Universidade Federal do Ceará
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática
Prof. Dr.-Eng. Tarcisio Ferreira Maciel
Sistemas Lineares - Revisão de Álgebra Linear

1. Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para um espaço n-dimensional $\mathbb{S}$. Mostre que a representação de qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ nessa base é única.

2. Encontre a representação de $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ na base $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. A representação de um operador linear é $L(\cdot)$ em relação à base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que o operador é unicamente determinado pelos pares $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i = L(\mathbf{x}_i))$ e que $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, encontre a representação de $L(\cdot)$ na base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}$ e mostre que $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}$.

4. Para as seguintes matrizes, determine o posto, a nulidade e as bases para o espaço coluna e espaço nulo.
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Mostre que matrizes similares possuem o mesmo polinômio característico e portanto os mesmos autovalores.

6. Para uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizável, mostre que o $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A})$ e que $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A})$.

7. Calcule $\mathbf{A}^{100}$ e $\exp(\mathbf{A}t)$ para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

8. Mostre que $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$.

9. Considere a matriz $\mathbf{R} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\mathrm{H}}$, onde $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_K \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ e x_k são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $k = 1, 2, \ldots, K$. Mostre que $\mathcal{E}\left\{\mathbf{x}^{\mathrm{H}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right\} = N$ com $\mathcal{E}\{\cdot\}$ denotando a esperança estatística.

10. Mostre que se $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, então o espaço coluna de $\mathbf{B}$ está contido no espaço nulo de $\mathbf{A}$ e que o espaço linha de $\mathbf{A}$ está contido no espaço nulo de $\mathbf{B}$.

11. Considere que $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$ de posto r. Sob que condições relativas a m, n e r a matriz $\mathbf{A}$ possui inversa, pseudo-inversa a esquerda, pseudo-inversa à direita, e $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possui infinitas soluções para cada vetor $\mathbf{b}$.

12. Sejam $\mathbf{w}$ e $\mathbf{a}$ dois vetores em $\mathbb{C}$. Considerando que $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$, qual vetor $\mathbf{w}$ maximiza a expressão $|\mathbf{w}^{\mathrm{H}} \mathbf{a}|^2$. Sugestão: utilize a relação entre produto interno e norma Euclidiana e a definição do quociente de Rayleigh.

13. Seja $\mathbb{D}$ um conjunto convexo que representa o domínio de $f(\mathbf{x})$. Nesse caso, uma condição necessária para a convexidade de uma função $f(\mathbf{x})$ é que $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + (\nabla f(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{D}$. Esta condição é chamada de condição de primeira ordem. Uma condição suficiente para convexidade de uma função $f(\mathbf{x})$ é que sua hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}) \geq 0$, isto é, que $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ seja positiva semi-definida. Essa condição é chamada condição de segunda ordem. Para funções da forma $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c$, mostre que as condições de primeira e segunda ordem são equivalentes.

14. Determine sob que condições $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ é ortogonal a $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

15. O coseno do ângulo entre dois vetores $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}$ pode ser escrito como $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}{}_i\mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i\|_2\|\mathbf{x}_j\|_2}$. Encontre uma expressão equivalente para vetores em $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbb{C}$.

16. Sejam $\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$ matrizes em $\mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{w}$ um vetor em $\mathbb{R}^n$. Considerando que $\mathbf{Q}$ possui posto completo e que $\|\mathbf{w}\|_2^2 = 1$, determine o vetor $\mathbf{w}$ que maximiza $\dfrac{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{w}}$. Sugestão: utilize o resultado do item 12 e a definição de autovalores/autovetores generalizados.

17. Encontre uma base ortonormal a partir de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ onde $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

18. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica $n \times n$ e ϵ_1 e ϵ_2 são tais que $\epsilon_1\mathbf{I} \leq \mathbf{A} \leq \epsilon_2\mathbf{I}$, mostre que $\dfrac{1}{\epsilon_2}\mathbf{I} \leq \mathbf{A}^{-1} \leq \dfrac{1}{\epsilon_1}\mathbf{I}$.

19. Seja $\mathbf{A}(t)$ uma matriz $n \times n$ invertível para todo t. Mostre que se existe uma constante finita α tal que $\|\mathbf{A}^{-1}(t)\| \leq \alpha$ para todo t, então existe uma constante positiva β tal que $|\det(\mathbf{A}(t))| \geq \beta$ para todo t.

20. Seja $\mathbf{A}(t)$ uma matriz $n \times n$ simétrica e positiva semi-definida para todo t. Se $t_b \geq t_a$ e $\displaystyle\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{A}(\sigma)d\sigma \leq \epsilon\mathbf{I}$, mostre que $\displaystyle\int_{t_a}^{t_b} \|\mathbf{A}(\sigma)\|d\sigma \leq n\epsilon$.

Referências

[BV04] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*, 1st ed. Cambridge University Press, 2004.

[Che99] C.-T. Chen, *Linear system theory and design*, 3rd ed. Oxford Univeristy Press, 1999.

[Mey01] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, 1st ed. Society for Industrial and Applied Mathematics, Feb. 2001.

[Rug96] W. J. Rugh, *Linear system theory*, 2nd ed., ser. Information and systems sciences, T. Kailath, Ed. Prentice Hall, 1996.

[Str88] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed. Harcourt College Publishers, 1988.