

# Teoria da Informação

## TIP7266 2017.1

TP01: Revisão de probabilidade

**Profs. Walter Freitas Jr e Charles Casimiro**

`{walter,charles}@gtel.ufc.br`

Departamento de Engenharia de Teleinformática (DETI)  
Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem Fio (GTEL)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática

<http://www.ppgeti.ufc.br/>

# Probabilidade

## Eventos probabilísticos

### Evento

**Definição:** Qualquer subconjunto do espaço amostral  $\mathcal{S}$  que constitui um campo de Borel  $\mathcal{F}$

### Eventos mutuamente exclusivos

Quando a ocorrência de um impossibilita a ocorrência do outro

Exemplo: Dado

$$\left. \begin{array}{l} A = \{\text{par}\} \\ B = \{\text{impar}\} \end{array} \right\} A \cdot B = \emptyset \quad (\text{eventos mutuamente exclusivos})$$

# Probabilidade

## Definição de probabilidade

### Probabilidade (Definição Axiomática)

É qualquer função real definida na classe  $\mathcal{F}$  tal que

1.  $\Pr(A) \geq 0$
2.  $\Pr(\mathcal{S}) = 1$
3. Se  $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A + B) = \Pr(A) + \Pr(B)$   
(eventos mutuamente exclusivos)

Assim,

$$\Pr(\cdot) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

# Probabilidade

## Probabilidade condicional

### Probabilidade condicional

Probabilidade de ocorrência de  $A$  dado que ocorreu  $B$

$$\Pr(A|B) \triangleq \frac{\Pr(AB)}{\Pr(B)}, \quad \Pr(B) > 0 \quad (1)$$

$\Pr(A|B)$  é probabilidade, pois

- ▶  $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(AB)}{\Pr(B)} \geq 0$
- ▶  $\Pr(\mathcal{S}|B) = 1$
- ▶ Para  $A \cdot C = \emptyset \Rightarrow \Pr[(A + C)|B] = \Pr(A|B) + \Pr(C|B)$

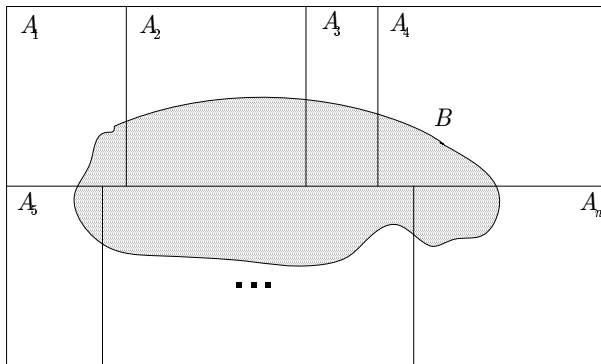
# Probabilidade

## Regra da probabilidade total

### Teorema da probabilidade total

Sejam  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  eventos mutuamente exclusivos

- ▶  $\Pr(A_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$
- ▶  $B \subset \{A_1 + A_2 + \dots + A_n\}$



# Probabilidade

## Regra da probabilidade total - cont.

### Teorema da probabilidade total - cont.

- ▶  $\Pr(B) = \Pr(BA_1) + \Pr(BA_2) + \cdots + \Pr(BA_n)$  pois  
 $B = \underbrace{BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_n}_{\text{mutuamente exclusivos}}$
- ▶  $\Pr(B) = \Pr(B|A_1) \Pr(A_1) + \cdots + \Pr(B|A_n) \Pr(A_n)$

## Probabilidade total

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^n \Pr(B|A_i) \Pr(A_i) \quad (2)$$

# Probabilidade

## Regra de Bayes

## Regra de Bayes

Inverso do conceito da probabilidade total

$$\Pr(A_j|B) = \frac{\Pr(B|A_j) \cdot \Pr(A_j)}{\sum_{i=1}^n \Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i)} \quad (3)$$

Também chamada de *probabilidade a posteriori*

# Probabilidade

## Independência probabilística

### Eventos independentes

Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se

$$\Pr(A \cdot B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

Generalizando (para três eventos):  $A$ ,  $B$  e  $C$

$$\left. \begin{array}{l} \Pr(AB) = \Pr(A) \Pr(B) \\ \Pr(AC) = \Pr(A) \Pr(C) \\ \Pr(BC) = \Pr(B) \Pr(C) \end{array} \right\} \Pr(ABC) = \Pr(A) \Pr(B) \Pr(C)$$



# Probabilidade

## Independência probabilística - cont.

### Propriedades de eventos independentes

1.  $\Pr(A|B) = \Pr(A)$
2.  $\Pr(\overline{A}B) = \Pr(\overline{A}) \cdot \Pr(B)$
3.  $\Pr(A\overline{B}) = \Pr(A) \cdot \Pr(\overline{B})$  e  $\Pr(\overline{A}\overline{B}) = \Pr(\overline{A}) \cdot \Pr(\overline{B})$

Ou seja Se  $A$  e  $B$  são independentes,  $A$  e  $\overline{B}$  são independentes e  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  também o são

# Probabilidade

## Eventos conjuntos

### Eventos conjuntos

Dado  $\mathcal{S}$  (espaço amostral), podemos atribuir diferentes atributos aos eventos pertencentes a diferentes classes de Borel

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}_1 \\ B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}_2 \end{cases}$$

Exemplo:

$$\mathcal{S} = \{\text{João, José, Maria}\}$$

(idade, altura)

Rescrevendo:

$$\mathcal{S} = \{(10, 1.50), (30, 1.80), (32, 1.65)\}$$

# Probabilidade

## Probabilidade marginal

## Probabilidade marginal

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \cdots + A_n &= \mathcal{S}_1 \\ B_1 + B_2 + \cdots + B_n &= \mathcal{S}_2 \\ \left. \begin{aligned} \Pr(A_i) &= \sum_{j=1}^n \Pr(A_i, B_j) \\ \Pr(B_j) &= \sum_{i=1}^n \Pr(A_i, B_j) \end{aligned} \right\} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Pr(A_i, B_j) = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

# Variáveis aleatórias

## Definição

Variável aleatória (v.a.) é qualquer função definida no espaço amostral  $\mathcal{S}$  tal que:

$$\{X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, X(w) \in (-\infty, x], w \in \mathcal{S}\} \in \mathcal{F} \quad (5)$$

## Exemplo

► Moeda:

$$\mathcal{S} = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

$$X(\text{cara}) = 0$$

$$X(\text{coroa}) = 1$$

# Variáveis aleatórias

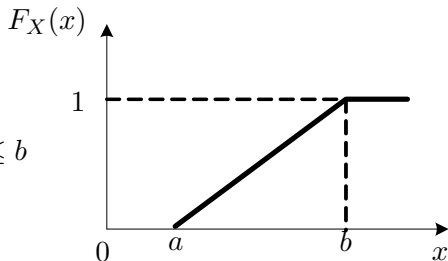
Função distribuição de probabilidade (função de probabilidade cumulativa)

## Definição

$$F_X(x) \triangleq \Pr\{X \leq x\} \quad (6)$$

Exemplo: *Distribuição uniforme*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ x - a, & \text{se } a < x \leq b \\ 1, & \text{se } x > b \end{cases}$$



# Variáveis aleatórias

Função distribuição de probabilidade - cont.

## Propriedades da fdc

1.  $F_X(-\infty) = 0$
2.  $F_X(\infty) = 1$
3.  $\Pr\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
4. Se  $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ , ou seja,  $F_X(x)$  é *monotônico não-decrescente*

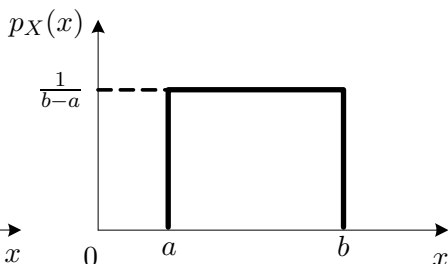
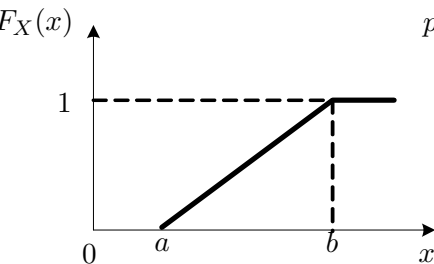
# Variáveis aleatórias

## Função densidade de probabilidade

### Definição

$$p_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (7)$$

Exemplo: *Distribuição uniforme*



# Variáveis aleatórias

Função densidade de probabilidade - cont.

## Propriedades

1.  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\xi) d\xi$
2.  $F_X(x)$  é monotônico não-decrescente  $\Rightarrow p_X(x) \geq 0$
3.  $\Pr\{X > x\} = 1 - F_X(x) = 1 - \Pr\{X \leq x\}$
4.  $\Pr\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(\xi) d\xi$

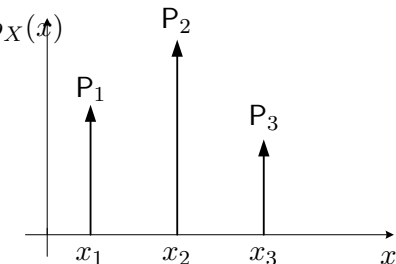


# Variáveis aleatórias

## Variáveis aleatórias discretas

### Dificuldade

Neste caso, as variáveis admitem valores somente em determinados instantes de tempo. O que ocorre com as probabilidades?



Funções  $\delta(\cdot)$  de Dirac (impulsos)

$$\delta(t) \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{array} \right.$$

$\delta(t)$  = função impulsiva de Dirac

$= \frac{d}{dt} u(t)$ , em que  $u(t)$  é a função degrau unitário

# Variáveis aleatórias

## Variáveis aleatórias discretas - cont.

Logo, teremos

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^N \Pr\{X = x_i\} \cdot \delta(x - x_i)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N \Pr\{X = x_i\} \cdot \int_{-\infty}^x \delta(\xi - x_i) d\xi$$

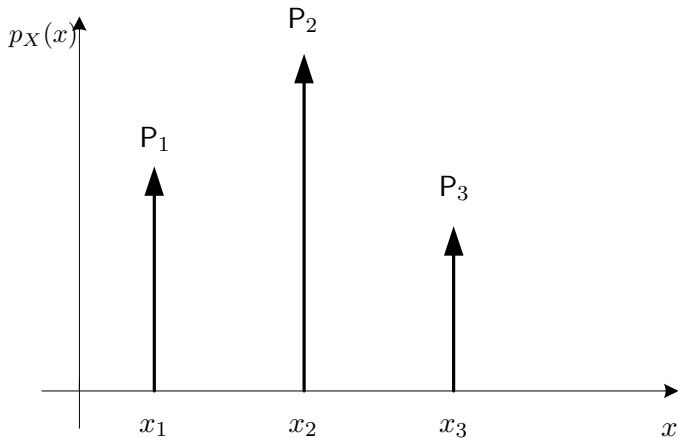
Mas sabe-se que

$$\int_{-\infty}^x \delta(\xi - x_i) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_i \\ 1, & \text{se } x \geq x_i \end{cases}$$

# Variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias discretas - cont.

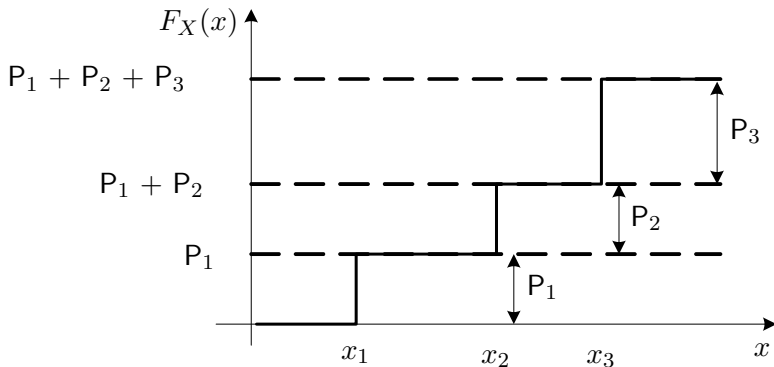
pdf



# Variáveis aleatórias

## Variáveis aleatórias discretas - cont.

fdc



# Variáveis aleatórias

Função de densidade de probabilidade *gaussiana*

## Definição

Seja  $X$  uma v.a.,  $X$  é dito ter distribuição de probabilidade gaussiana, ou *normal*, se sua densidade de probabilidade pode ser escrita da seguinte forma

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

Notação usual:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Parâmetros  $\left\{ \begin{array}{l} \mu \rightarrow \text{média} \\ \sigma^2 \rightarrow \text{variância} \end{array} \right.$

# Variáveis aleatórias

pdf gaussiana - cont.

## Normalização

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

## Função erro

Função de distribuição cumulativa da função gaussiana

$$\begin{aligned} \text{erf}(x) &= F_Z(x) = \Pr\{Z \leq x\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \end{aligned} \tag{9}$$

# Variáveis aleatórias

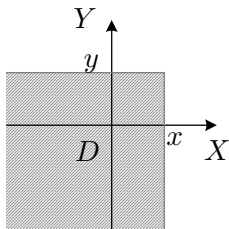
## Variáveis aleatórias bidimensionais

### Função distribuição de probabilidade

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr \underbrace{\{X \leq x, Y \leq y\}}_{\text{intersecção}} \quad (10)$$

$$\underbrace{\{X \leq x, Y \leq y\}}_{\text{evento}} = \{ w \in \mathcal{S} | [X(w), Y(w)] \in D \}$$

$$\text{em que } D = \{ (X, Y) | X \in (-\infty, x], Y \in (-\infty, y] \}$$



$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) \quad (11)$$

# Variáveis aleatórias

## Variáveis aleatórias bidimensionais - cont.

### Propriedades

1.  $F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$
2.  $F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$
3.  $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$
4. 
$$\left. \begin{aligned} F_{X,Y}(x, \infty) &= F_X(x) \\ F_{X,Y}(\infty, y) &= F_Y(y) \end{aligned} \right\} \text{distribuições marginais}$$
5. 
$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$
6. 
$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dy$$
$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dx$$



# Variáveis aleatórias

## Variáveis aleatórias independentes

### Definição

Sejam  $X$  e  $Y$  v.a.'s. Elas são independentes se:

$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \Pr\{ X \leq x, \quad Y \leq y \} \\ &= \Pr\{X \leq x\} \cdot \Pr\{Y \leq y\} \end{aligned}$$

Logo:

$$\boxed{p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)} \quad \text{pois}$$

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (F_X(x) \cdot F_Y(y)) \stackrel{?}{=} p_X(x) \cdot p_Y(y) \end{aligned}$$

# Variáveis aleatórias

## Medidas estatísticas

### Momentos

São *estatísticas* de uma variável aleatória capazes de representar seu comportamento probabilístico. Os infinitos momentos estatísticos definem a função de densidade de probabilidade.

### Média

Também chamada de esperança matemática, valor esperado, momento de 1ª ordem, é definido como

$$\mu = E\{X\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx \quad (13)$$

para  $X \sim$  v.a. contínua

# Variáveis aleatórias

## Medidas estatísticas - cont.

### Média

Para  $X$  discreta

$$\mu = \mathbb{E}\{X\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \cdot \Pr\{X = x_i\} \quad (14)$$

OBS: Se  $p_X(x)$  for simétrico em relação a um valor  $x = a \Rightarrow \mathbb{E}\{X\} = a$

Pergunta: Num jogo de moeda, qual a média? E no caso de uma distribuição uniforme entre  $[0, 1]$ ?

# Variáveis aleatórias

## Medidas estatísticas - cont.

### Propriedades da média

1. Linearidade -  $\mathbb{E}\{X + Y\} = \mathbb{E}\{X\} + \mathbb{E}\{Y\}$  ou ainda,

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^m a_i X_i\right\} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{E}\{X_i\}$$

2.  $\mathbb{E}\{X \cdot Y\} = \mathbb{E}\{X\} \cdot \mathbb{E}\{Y\}$  se  $X$  e  $Y$  são v.a.'s independentes

3. Transformação linear -  $\mathbb{E}\{\mathbf{A}\mathbf{x}\} = \mathbf{A}\mathbb{E}\{\mathbf{x}\}$

4.  $\mathbb{E}\{f(X, Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p_{X,Y}(x, y) dx dy$

# Variáveis aleatórias

## Medidas estatísticas - cont.

### Propriedades da média - cont.

5. Invariância à transformação - Seja  $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y} p_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

6. Se  $X$  e  $Y$  são independentes  $\mathbb{E}\{f(X) \cdot g(Y)\} = \mathbb{E}\{f(X)\} \cdot \mathbb{E}\{g(Y)\}$

# Variáveis aleatórias

## Medidas estatísticas - cont.

### Momentos de ordem $k$

$$\mu_k = \mathbb{E} \left\{ X^k \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot p_X(x) \, dx \quad (15)$$

- ▶ Os momentos de uma variável aleatória são uma representação da pdf da variável
- ▶ A coletânea dos *infinitos* momentos da v.a. definem sua pdf
- ▶ Algumas distribuições possuem alguns momentos nulos
- ▶ A estimativa de momentos cresce em complexidade e decresce em precisão com o aumento direto de  $k$

# Variáveis aleatórias

## Medidas estatísticas - cont.

### Momentos centrados

Uma importante medida estatística é avaliar o comportamento da v.a. *em torno* da média. Assim, define-se o *momento centrado de ordem  $k$*  como sendo

$$c_k = \mathbb{E} \left\{ (X - \mu)^k \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k \cdot p_X(x) \, dx \quad (16)$$

De particular interesse: *variância* ( $\sigma^2 = \mathbb{E} \{ (X - \mu)^2 \} \geq 0$ )

OBS: Se  $p_X(x)$  é simétrica em relação a média  $c_k = 0$  para  $\forall k$  ímpar!

# Variáveis aleatórias

## Distribuições e densidades condicionais

### Meta

Caracterização da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória condicionada a ocorrência de outra variável aleatória ou evento

### Definição distribuição cumulativa condicionada

$$\begin{aligned} F_X(x|A) &\triangleq \Pr\{X \leq x|A\} \\ &= \frac{\Pr\{X \leq x, A\}}{\Pr\{A\}} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\blacktriangleright p_X(x|A) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x|A)$$



# Variáveis aleatórias

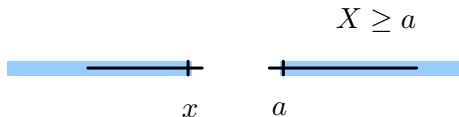
## Distribuições e densidades condicionais - cont.

### Analizando...

Seja  $A = \{x \geq a\}$  (evento)

$$\begin{aligned} F_X(x|A) &= F_X(x|X \geq a) \\ &= \Pr\{X \leq x|X \geq a\} \end{aligned}$$

(a)  $x < a$

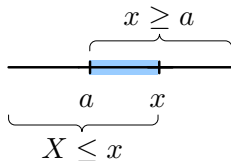


$$\Rightarrow F_X(x|x \geq a) = 0$$

# Variáveis aleatórias

## Distribuições e densidades condicionais - cont.

(a)  $x \geq a$



$$\begin{aligned} F_X(x|x \geq a) &= \frac{\Pr\{X \leq x, X \geq a\}}{\Pr\{X \geq a\}} = \frac{\int_a^x p_X(\alpha) d\alpha}{\int_a^\infty p_X(\beta) d\beta} \\ &= \frac{F_X(x) - F_X(a)}{1 - F_X(a)} \end{aligned}$$

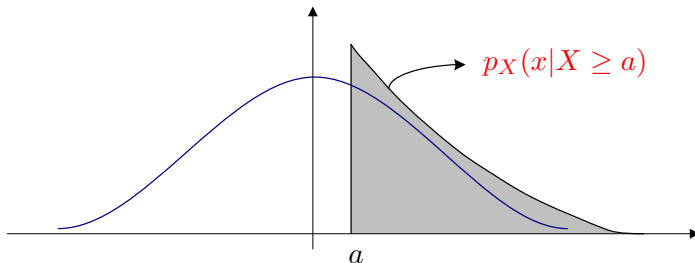
$$p_X(x|X \geq a) = \frac{d}{dx} F_X(x|X \geq a) = \frac{\frac{d}{dx} F_X(x)}{1 - F_X(a)} = \frac{p_X(x)}{1 - F_X(a)}$$

# Variáveis aleatórias

## Distribuições e densidades condicionais - cont.

### Resumindo

$$p_X(x|X \geq a) = \frac{p_X(x)}{\int_0^{\infty} p_X(\beta) d\beta} U(x - a)$$



# Variáveis aleatórias

## Distribuições e densidades condicionais - cont.

### Observações

1.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x|X \geq a) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{p_X(x)}{\int_a^{\infty} p_X(\beta) d\beta} \right] \cdot U(x - a) dx \\ &= \frac{\int_a^{\infty} p_X(x) dx}{\int_a^{\infty} p_X(\beta) d\beta} = 1\end{aligned}$$

# Variáveis aleatórias

## Distribuições e densidades condicionais - cont.

### Observações - cont.

2.  $\mathbb{E}\{X|A\} = ?$

$$A = \{X \geq a\}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X|X \geq a\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x|X \geq a) dx \\ &= \int_a^{\infty} \frac{x p_X(x)}{\int_a^{\infty} p_X(\beta) d\beta} \cdot U(x - a) dx\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\{X|X \geq a\} = \frac{\int_a^{\infty} x \cdot p_X(x) dx}{\int_a^{\infty} p_X(\beta) d\beta}$$

# Variáveis aleatórias

## Distribuições e densidades condicionais - cont.

### Observações - cont.

3. Caso em que  $A = \{X = a\}$

$$F_X(x|X = a) = \frac{\Pr\{X \leq x, X = a\}}{\underbrace{\Pr\{X = a\}}_{\text{v.a. contínua} \Rightarrow \Pr\{X=a\}=0}}$$

Relaxando “um pouco”  $X = a$  para

$$a \leq X \leq a + \Delta a, \quad \Delta a \rightarrow 0 \quad (\text{depois})$$

$$F_X(x|A) = F_X(x|a \leq X \leq a + \Delta a) = \frac{\Pr\{X \leq x, a \leq X \leq a + \Delta a\}}{\Pr\{a \leq X \leq a + \Delta a\}}$$

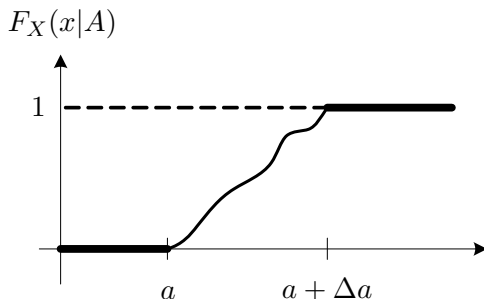
# Variáveis aleatórias

## Distribuições e densidades condicionais - cont.

### Observações - cont.

Temos 3 situações

- ▶  $X < a \Rightarrow F_X(x|A) = 0$
- ▶  $a \leq X \leq a + \Delta a \Rightarrow F_X(x|A) = \frac{\Pr\{a \leq X \leq x\}}{\Pr\{a \leq X \leq a + \Delta a\}}$
- ▶  $X > a + \Delta a \Rightarrow F_X(x|A) = 1$

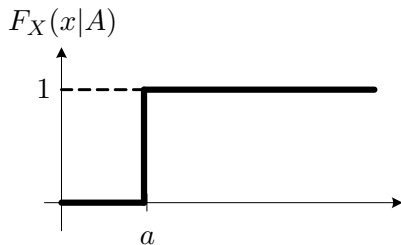


# Variáveis aleatórias

Distribuições e densidades condicionais - cont.

Observações - cont.

Fazendo  $\Delta \rightarrow 0$ :



$$F_X(x|A) = \underbrace{U(x - a)}_{\text{função degrau unitário}}$$

$$\Rightarrow F_X(x|X = a) = U(x - a)$$

$$p_X(x|X = a) = \frac{d}{dx} F_X(x|X = a) = \delta(x - a)$$



# Variáveis aleatórias

## Distribuições e densidades condicionais - cont.

### Função densidade condicional de duas variáveis aleatórias

$$p_Y(y|x) = ?$$

$$f_Y(y|x \leq X \leq x + \Delta x) = \frac{\Pr\{Y \leq y, x \leq X \leq x + \Delta x\}}{\Pr\{x \leq X \leq x + \Delta x\}}$$

Ainda

$$\begin{aligned}\Pr\{Y \leq y, x \leq X \leq x + \Delta x\} &= \int_{-\infty}^y \int_x^{x+\Delta x} p_{X,Y}(\alpha, \beta) \, d\alpha d\beta \\ &\cong p_{X,Y}(x, \beta) \Delta x \quad \text{método de Euler} \\ &= \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(x, \beta) \, d\beta \cdot \Delta x\end{aligned}$$

# Variáveis aleatórias

## Distribuições e densidades condicionais - cont.

### Função densidade condicional de duas variáveis aleatórias - cont.

$$\begin{aligned}\Pr\{x \leq X \leq x + \Delta x\} &= \int_x^{x+\Delta x} p_X(\gamma) d\gamma \cong p_X(x) \cdot \Delta x \\ F_Y(y|x) &\cong \frac{\int_{-\infty}^y p_{X,Y}(x, \beta) d\beta \cdot \Delta x}{p_X(x) \cdot \Delta x} = \frac{\int_{-\infty}^y p_{X,Y}(x, \beta) d\beta}{p_X(x)} \\ p_Y(y|x) &= \frac{dF_Y(y|x)}{dy} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}\end{aligned}$$

Se  $X$  e  $Y$  forem independentes

$$\begin{aligned}p_{X,Y}(x, y) &= p_X(x) \cdot p_Y(y) \\ \Rightarrow p_Y(y|x) &= p_Y(y)\end{aligned}\tag{18}$$

# Variáveis aleatórias

## Igualdades de densidades

- ▶  $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
- ▶  $p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$
- ▶  $p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)}{p_X(x)}$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Problema geral

## Função de uma variável aleatória

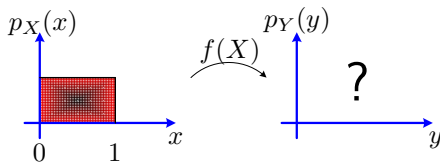
Dada  $X \sim$  v.a. e uma função

$$Y = f(X)$$

a questão é como determinar  $p_Y(y)$  conhecendo-se  $p_X(x)$ .

Por exemplo, seja  $X$  uma v.a. uniforme em  $[0, 1]$

$$Y = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left( \frac{1}{X} \right)$$



# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

Vamos analisar dois casos

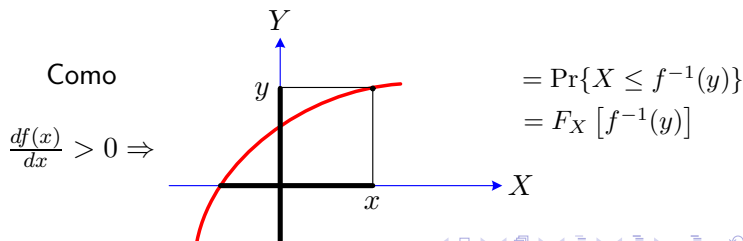
### 1o. caso

$X \sim \text{v.a. } p_X(x) \text{ conhecido}$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ \frac{df(x)}{dx} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ é monotônico crescente} \end{cases}$$

$\rightarrow f$  é biunívoca  $[p_Y(y), F_Y(y)]$

$$f_y(Y) = \Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{f(X) \leq Y\}$$



# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

### 1o. caso - cont.

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X[f^{-1}(y)]}{dy} \\ &= \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} p_X(x) dx \\ &= p_X[f^{-1}(y)] \cdot \frac{df^{-1}(y)}{dy} \end{aligned}$$

Mas:  $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$  Logo,

$$p_Y(y) = p_X(x) \cdot \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} \bigg|_{x=f^{-1}(y)} \quad \text{para } \frac{df(x)}{dx} > 0$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

### 2o. caso

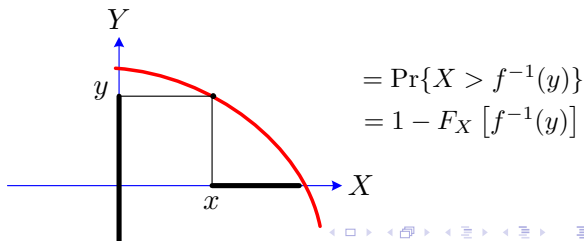
$X \sim \text{v.a.}$   $p_X(x)$  conhecido

$$\begin{cases} y = f(x) \\ \frac{df(x)}{dx} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ é monotônico decrescente} \end{cases}$$

$\rightarrow f$  é biunívoca  $[p_Y(y), F_Y(y)]$

$$F_Y(y) = \Pr\{Y \leq y\}$$

$$F_Y(y) = \Pr\{f(X) \leq y\}$$



# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

2o. caso - cont.

$$p_Y(y) = \frac{F_Y(y)}{dy} = \frac{-p_X(x)}{\frac{df(x)}{dx}} \bigg|_{x=f^{-1}(y)} \quad \text{com } \frac{df(x)}{dx} < 0$$
$$= \frac{p_X(x)}{\frac{df(x)}{dx}}$$

O sinal desaparece pois  $\frac{df(x)}{dx}$  também é negativo.



# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

Resumindo, para funções de uma variável aleatória temos:

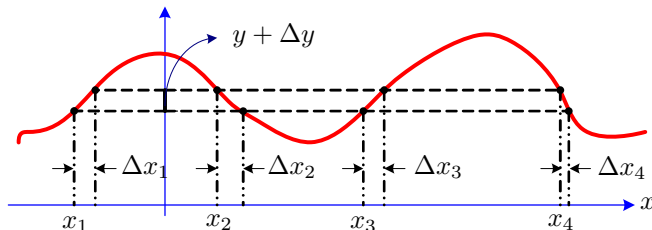
Para encontrar  $p_Y(y)$

$$p_Y(y) = \left. \frac{p_X(x)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|} \right|_{x=f^{-1}(y)} \quad (19)$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

## Funções não-biunívocas



$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr\{Y \leq y\} \\ &= \Pr\{y \leq Y \leq y + \Delta y\} \end{aligned}$$

Como há contribuições de diferentes intervalos de  $x$ , então

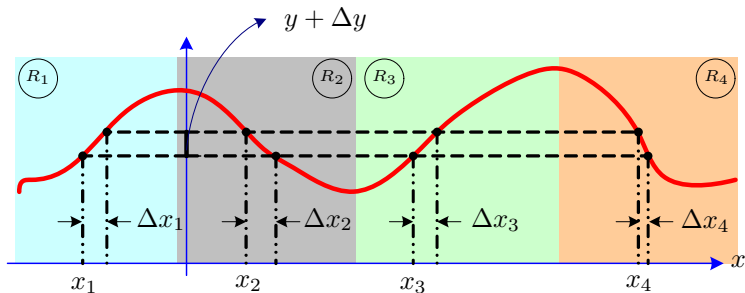
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr\{x_1 \leq X_1 \leq x_1 + \Delta x_1\} + \Pr\{x_2 - \Delta x_2 \leq X_2 \leq x_2\} \\ &\quad + \Pr\{x_3 \leq X_3 \leq x_3 + \Delta x_3\} + \Pr\{x_4 - \Delta x_4 \leq X_4 \leq x_4\} \end{aligned}$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

### Funções não-biunívocas - cont.

Nestes casos, dividimos o espaço amostral em regiões biunívocas. Ou seja, teremos



# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

### Funções não-biunívocas - cont.

Nestes casos, chamando de

$$y = f_i(x_i) \quad \text{em cada região } R_i$$

$$p_Y(y)$$

$$p_Y(y) = \sum_{R_i} \frac{p_X(x_i)}{\left| \frac{df_i(x_i)}{dx_i} \right|} \Bigg|_{x_i=f^{-1}(y)} \quad (20)$$

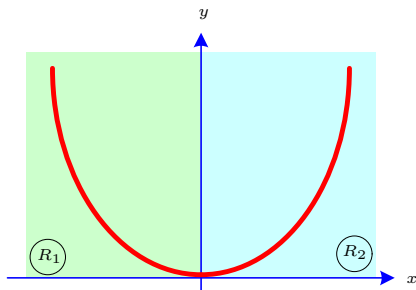
# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

### Exemplo

$$X \sim \text{v.a. } N(0, \sigma^2)$$

$$Y = X^2$$



$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de uma variável aleatória

### Exemplo - cont.

$$p_Y(y) = \underbrace{\left. \frac{p_X(x)}{\left| \frac{df_1(x)}{dx} \right|} \right|_{x=f_1^{-1}(y)}}_{R_1} + \underbrace{\left. \frac{p_X(x)}{\left| \frac{df_2(x)}{dx} \right|} \right|_{x=f_2^{-1}(y)}}_{R_2}$$

$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = 2x \quad x = -\sqrt{y}$$

$$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = 2x \quad x = \sqrt{y}$$

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= p_X(x)|_{x=-\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + p_X(x)|_{x=\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

Função de várias variáveis aleatória

## Problema

$$X \sim \text{v.a.} \quad Y \sim \text{v.a.}$$

$$\begin{cases} U = f(X, Y) \\ V = g(X, Y) \end{cases}$$

Conhecido  $p_{X,Y}(x, y)$ , como achar  $p_{U,V}(u, v)$ ?

# Funções de Variáveis Aleatórias

Função de várias variáveis aleatória

$p_{U,V}(u, v)$

Em regiões biunívocas:

$$p_{U,V}(u, v) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{\left| J \left( \frac{u, v}{x, y} \right) \right|} \quad \begin{array}{l} x = \mathbf{f}(u, v) \\ y = \mathbf{g}(u, v) \end{array} \quad (21)$$

em que  $\mathbf{f}(\cdot)$  e  $\mathbf{g}(\cdot)$  são funções inversas. E

$$J \left( \frac{u, v}{x, y} \right) = \det \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} \frac{df}{du} & \frac{df}{dv} \\ \frac{dg}{du} & \frac{dg}{dv} \end{bmatrix}}$$

é chamado *Jacobiano de  $u, v$  em relação a  $x, y$*



# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de várias variáveis aleatória

### Caso particular

$$Z = X + Y, \quad X \sim \text{v.a.}, Y \sim \text{v.a.}$$

$$p_{X,Y}(x,y) \text{ conhecido}$$

$$p_X(z) = ?$$

Definir então

$$\begin{cases} z = x + y \\ w = x \end{cases} \Rightarrow p_{Z,W}(z,w)$$

$$J \left( \begin{matrix} z, w \\ x, y \end{matrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

Logo,

$$p_{Z,W}(z,w) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{|-1|} \Bigg|_{\substack{x = \mathbf{f}(z,w) \\ y = \mathbf{g}(z,w)}}$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de várias variáveis aleatória

### Caso particular - cont.

$$\begin{aligned}x &= w, & y &= z - w \\ p_{Z,W}(z, w) &= p_{X,Y}(w, z - w)\end{aligned}$$

Então, para achar a densidade marginal  $p_Z(z)$ , temos

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(w, z - w) \, dw$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Função de várias variáveis aleatória

### Caso particular - cont.

Se supormos que  $X$  e  $Y$  são independentes

$$\begin{aligned}p_{X,Y}(w, z - w) &= p_X(w) \cdot p_Y(z - w) \\ \Rightarrow p_{Z,W}(z, w) &= p_X(w) \cdot p_Y(z - w) \\ p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{Z,W}(z, w) \, dw = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(w) \cdot p_Y(z - w) \, dw}_{\text{convolução}}\end{aligned}$$

Assim:

$$\boxed{p_Z(z) = p_X(x) \star p_Y(y)} \quad (22)$$