Introdução: Lógica e Sistemas Fuzzy

Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Depto. Engenharia de Teleinformática (*DETI/UFC*)

URL: http://www.researchgate.net/profile/Guilherme_Barreto2/

Email: gbarreto@ufc.br

Maio/2014

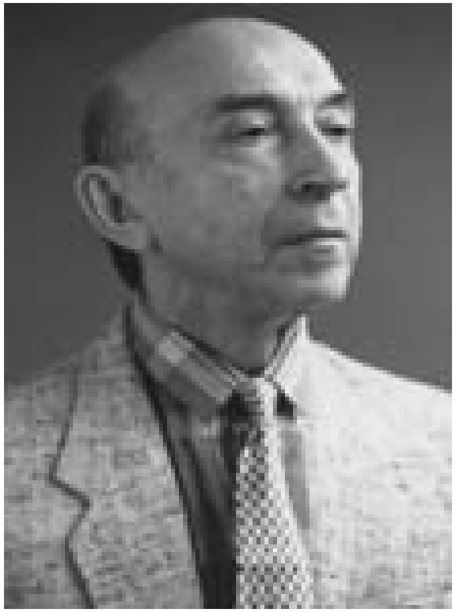
Ementa

1. Breve Histórico.
2. Lógica e Teoria Clássica dos Conjuntos.
3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência.
4. Variáveis Lingüísticas
5. Redes de Funções de Base Radial (MLP)
6. Algoritmos de Treinamento de Redes RBF
7. Semelhanças e Diferenças entre as Redes MLP e RBF
8. Aplicações da Rede RBF ao Problema do Crédito Bancário
9. Dicas de treinamento, teste e validação da rede RBF

1. Breve Histórico

- Surgiu com *Lofti A. Zadeh* em 1965, a partir da publicação do seguinte artigo.

Zadeh, L. A. (1965). “Fuzzy Sets”, Information and Control, vol. 8, 338-353.



1. Breve Histórico

- Passou despertar amplo interesse mundial a partir dos anos 80, mais especificamente com sua utilização prática no Japão.

- Mais especificamente a partir da aplicação de seus conceitos no gerenciamento e controle do metrô de Sendai, no Japão.

- Lógica *Fuzzy* é uma generalização da teoria clássica de conjuntos.
  - Um objeto pode **pertencer ou não** à um conjunto (conceito clássico)
  - Um objeto pode **pertencer parcialmente** a um conjunto (conceito fuzzy).

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos

Lógica

Conjunto de leis que regem o raciocínio.

Conjunto

Qualquer coleção de objetos arbitrários, denominados elementos.

- Século V a.C.: Sócrates, Platão e Aristóteles.

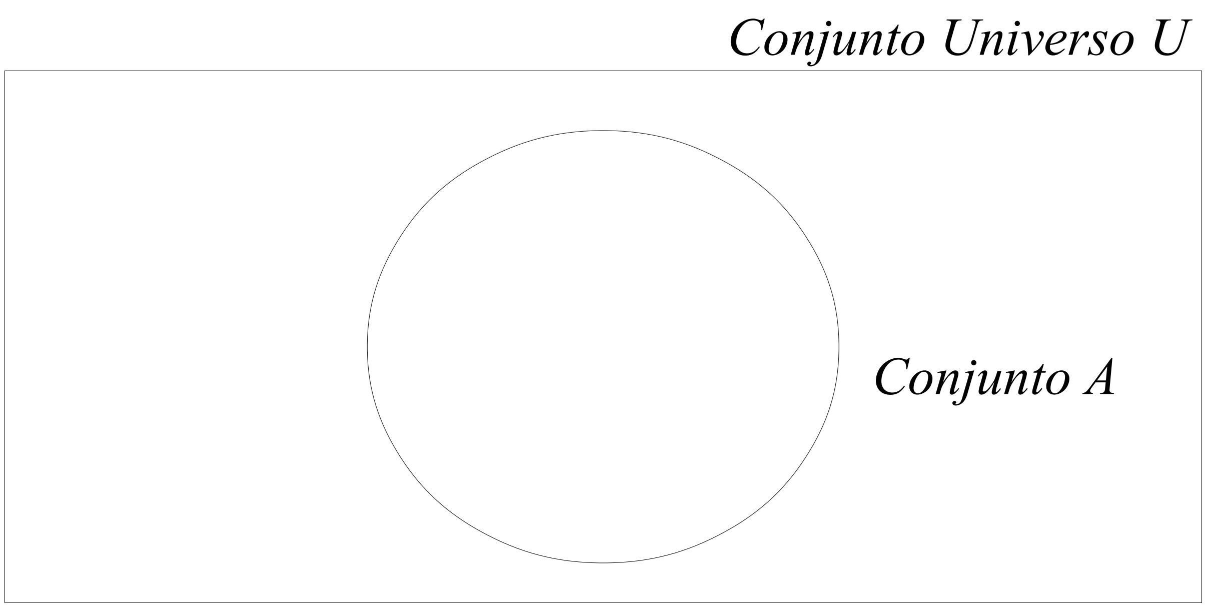
Silogismo: Pedro é homem (premissa 1)
Todos os homens são mortais (premissa 2)
Então Pedro é mortal. (conclusão)

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos: Visão Clássica

- **Século XVIII:** Euler representa conjuntos como círculos no plano.
- **Século XIX:** Venn introduz os diagramas que levam o seu nome.

Seja U o conjunto de todos os homens.

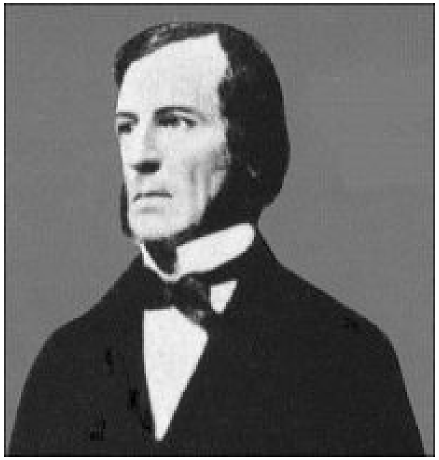
Seja A o conjunto dos homens altos.



2. Lógica e Teoria dos Conjuntos: Visão Clássica

- **Século XIX:** Boole unifica a lógica clássica com a matemática.

George Boole (1854). "*An investigation into the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*".



George Boole (02/11/1815 - 08/12/1864). Matemático e filósofo britânico. É o criador da Álgebra Booleana, base da atual aritmética computacional.

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos

Na Lógica e Teoria dos Conjuntos clássicas

- Um objeto X pode só **<u>pertencer ou não</u>** à um conjunto A.

  Se X é um elemento do conjunto A, então escreve-se: $X \in A$.

  Se X não é um elemento do conjunto A, então escreve-se: $X \notin A$.

- Pode-se definir uma função indicadora $\mu_A(X)$ que define o grau de pertinência de X ao conjunto A.

$$\mu_A(X) = \begin{cases} 1, & Se \quad X \in A \\ 0, & Se \quad X \notin A \end{cases}$$

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos

- De acordo com a teoria clássica de conjuntos, os diferentes graus de intensidade que uma certa variável X pode assumir é definido através de **fronteiras rígidas** (limiares).

- Por exemplo, um termostato está regulado para dois níveis dintintos de temporatura: $T < 20^o$ (baixa) e $T > 20^o$ (alta).

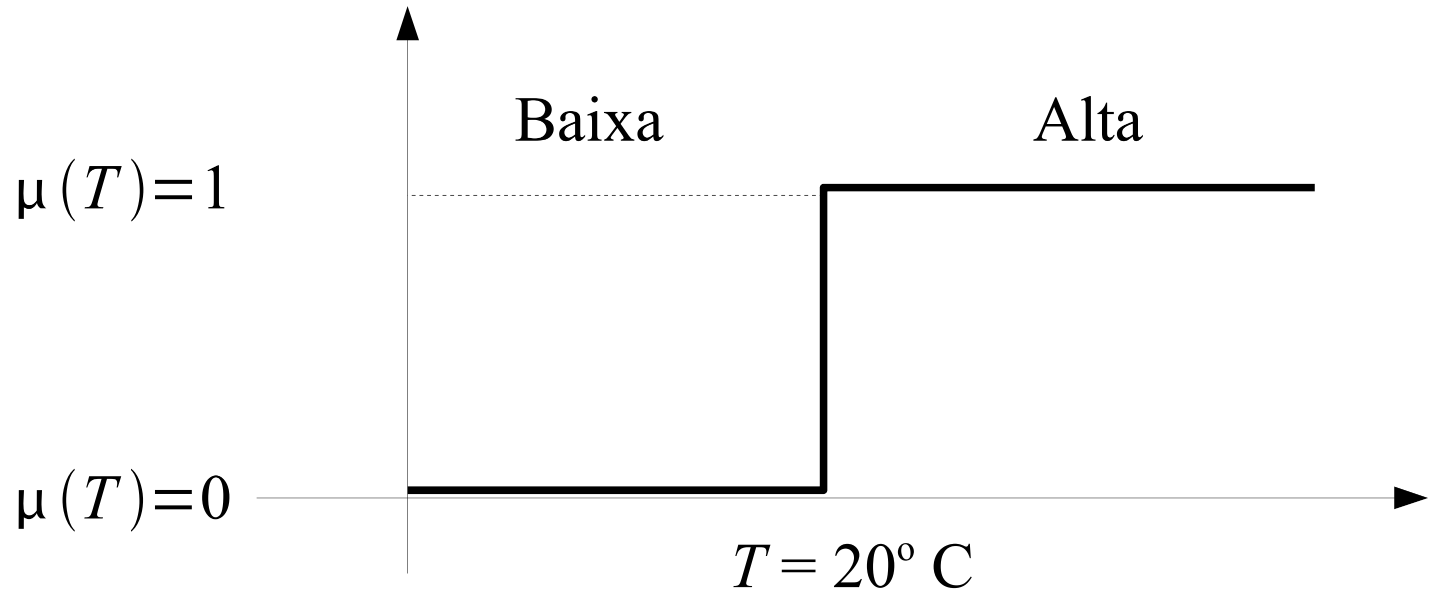
- Logo o limiar de decisão é $T = 20^o$.

- Assim, pode-se definir a operação deste termostato por meio da seguinte expressão:

$$\mu(T) = \begin{cases} Baixa, & Se \quad T < 20^o \\ Alta, & Se \quad T > 20^o \end{cases}$$

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos: Visão Clássica

- A operação do termostato também pode ser descrita graficamente.



2. Lógica e Teoria dos Conjuntos: Visão Clássica

- Porém, o conhecimento humano é <u>incerto</u>, <u>incompleto</u> ou <u>impreciso</u>.

- Ex.: Você vai para o jogo Fortaleza vs. Ceará?
  - talvez sim.
  - se não chover eu vou.
  - se o ingresso não for caro vou.
  - vou logo cedo.

- Muitas das frases e estimativas humanas não são facilmente definidas através de formalismos matemáticos.

3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

- **Complexidade versus Compreensão/Precisão.**

- *Zadeh* percebeu que a complexidade do sistema vem de como as variáveis são representadas e manipuladas.
- *Zadeh* representa o raciocínio humano em termos de conjuntos *fuzzy*.

Princípio da Incompatibilidade (Zadeh, 1965)

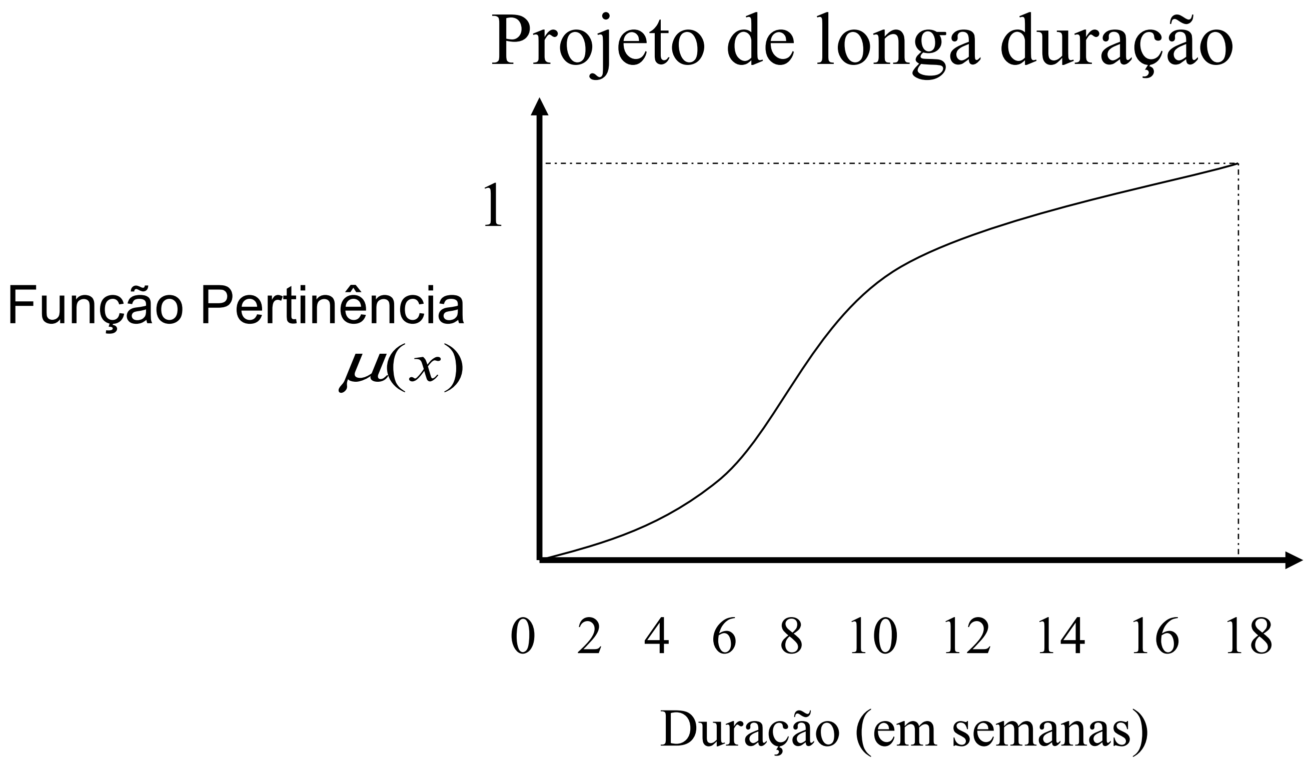
"À medida que a complexidade de um sistema aumenta, nossa habilidade para fazer afirmações precisas e que sejam significativas acerca deste sistema diminui até um limiar, abaixo do qual, precisão e relevância se tornem características quase mutuamente excludentes."

3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

- Conjuntos fuzzy são definidos por funções que mapeam o valor de um elemento *X* do conjunto para um número entre 0 e 1.
- Um grau de pertinência 0 indica que *X* não pertence ao conjunto de modo algum.
- Um grau com valor intermediário entre 0 e 1 indica que o elemento pertence parcialmente a dois ou mais conjuntos.
- Um grau 1 indica significa que *X* é um elemento que pertence totalmente ao conjunto, ou seja, com intensidade máxima..

3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

- Assim, as fronteiras entre conjuntos fuzzy não são mais definidas por um limiar, mas sim por uma região de transição.



3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Na Lógica e Teoria dos Conjuntos Fuzzy

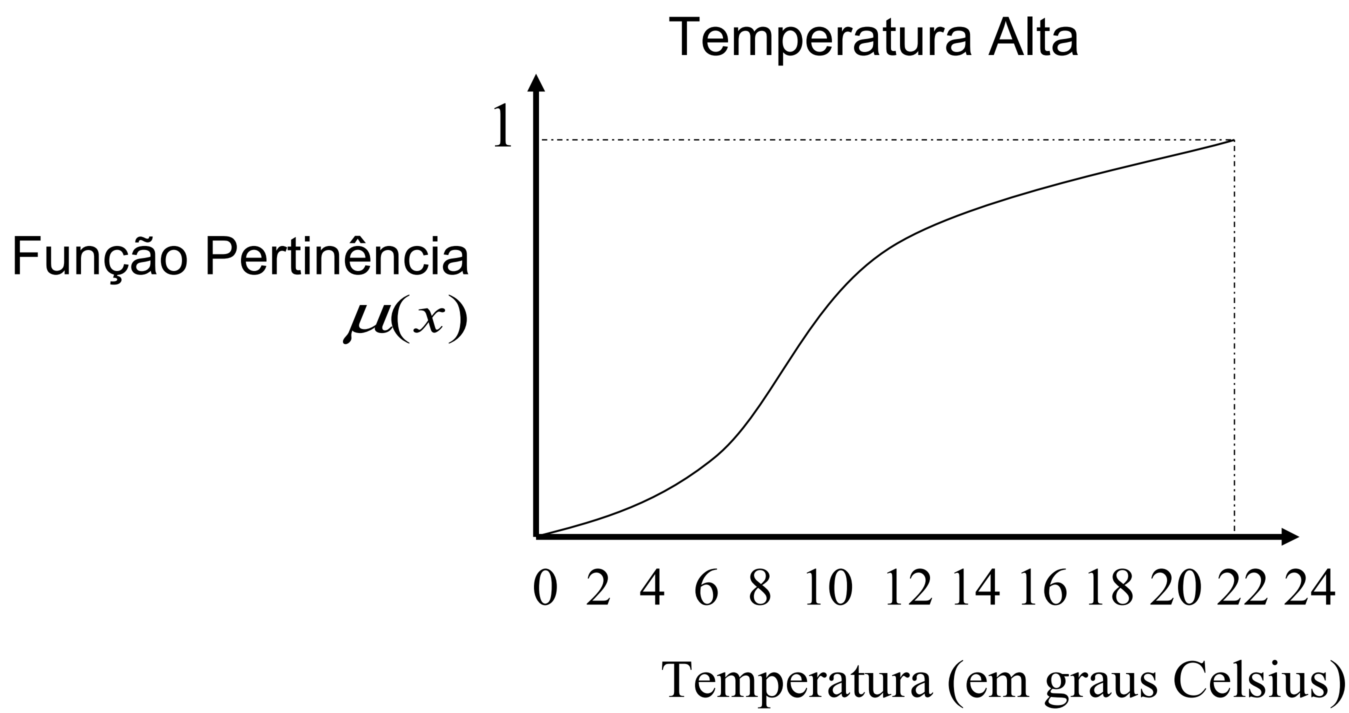
- Um objeto *X* pode **<u>pertencer parcialmente</u>** à um conjunto *A*.
- Assim, um elemento *X* pode a mais de um conjunto ao mesmo tempo, porém com graus de intensidade (pertinência) distintos.
- Pode-se definir uma função indicadora $\mu_A(X)$ que define o grau de pertinência de *X* ao conjunto *A*. Por exemplo,

$$\mu_A(T) = \frac{1}{1+\exp(-(T-T_L))}$$

onde T_L é a temperatura em que $\mu_A(T) = 0{,}5$.

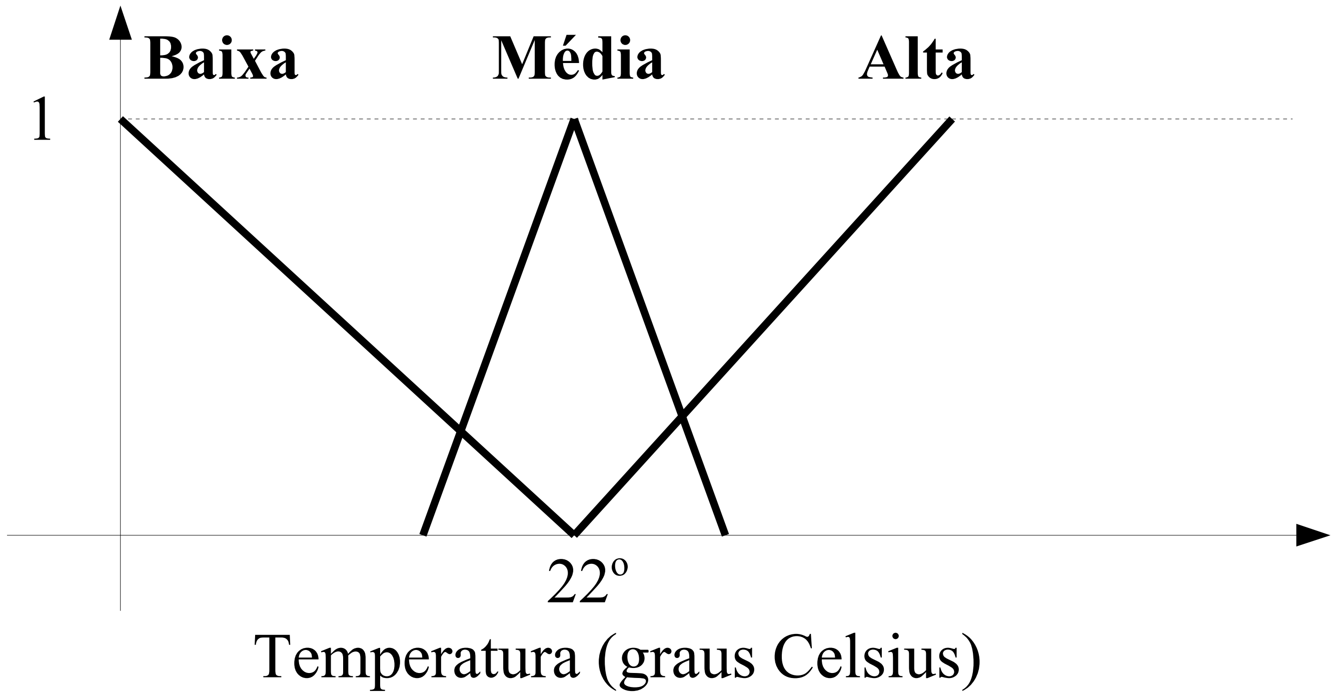
3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Função de Pertinência Sigmoidal



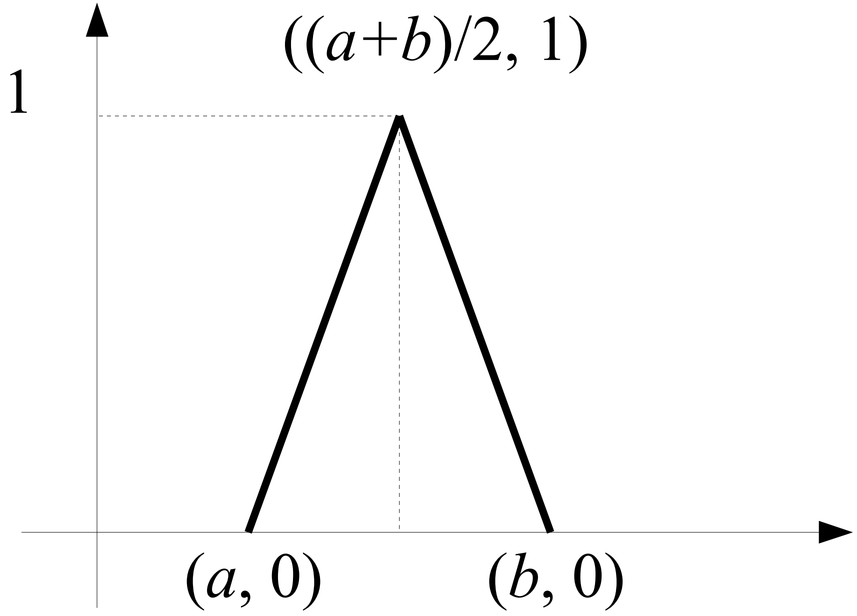
3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Funções de Pertinência Triangulares



3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Equação para Funções de Pertinência Triangulares



Note que $b > a$!

Trecho crescente:

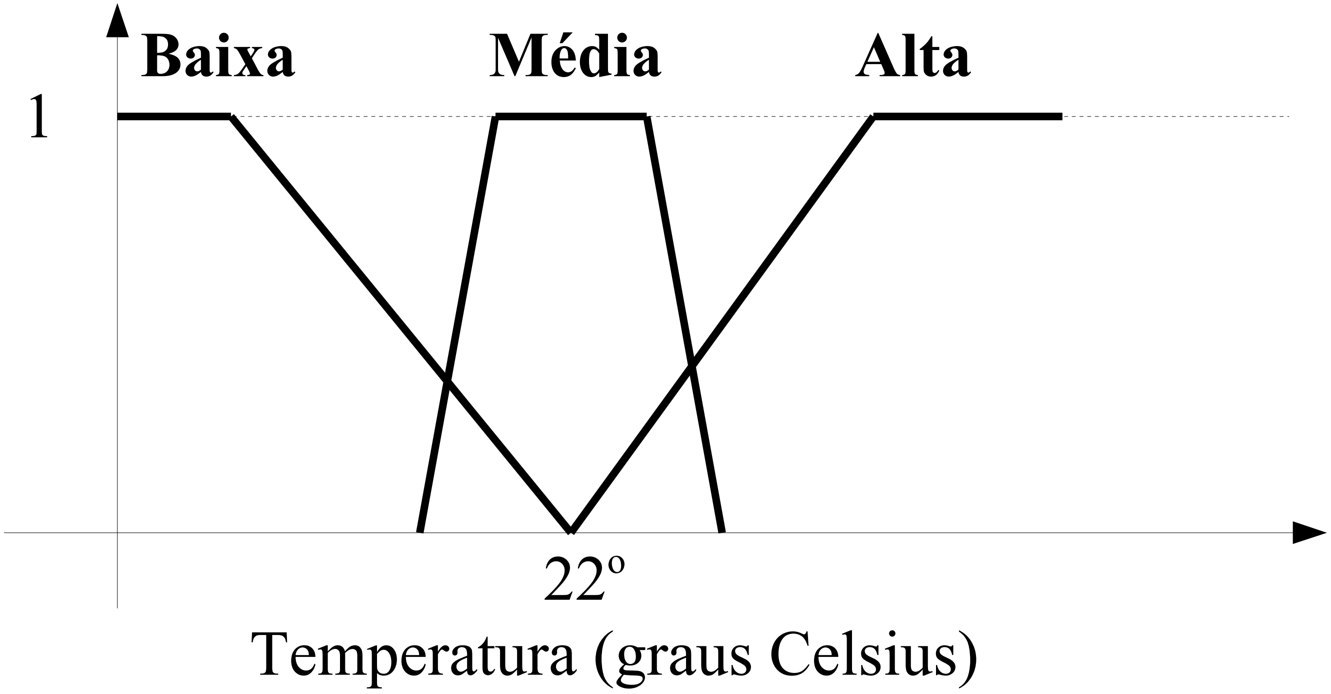
$$\mu(x) = \frac{2}{b-\mathrm{a}}(x-a)$$

Trecho decrescente:

$$\mu(x) = \frac{2}{a-b}(x-b)$$

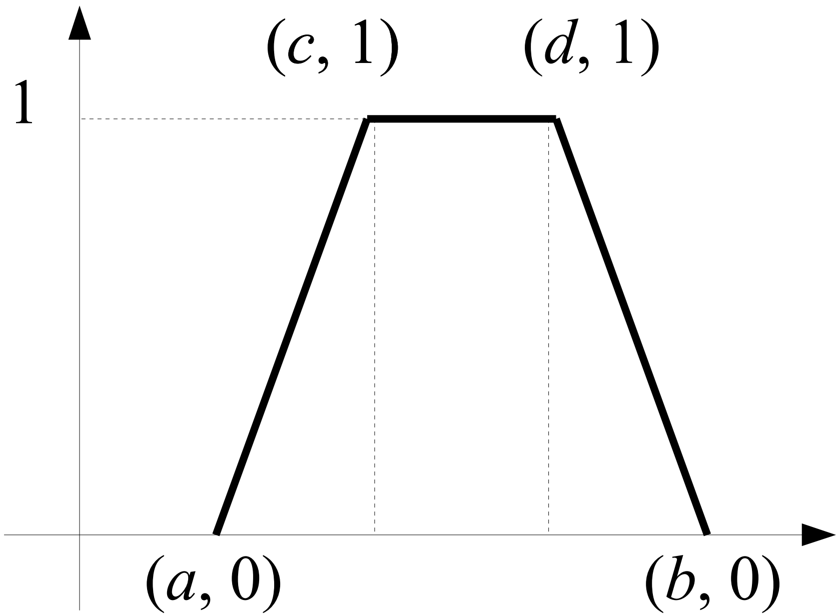
3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Funções de Pertinência Trapezoidais



3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Equação para Funções de Pertinência Trapezoidais



Note que $b > a$!

Trecho crescente:

$$\mu(x) = \frac{1}{c-a}(x-a)$$

Trecho constante:

$$\mu(x) = 1, \quad c \leq x \leq d$$

Trecho decrescente:

$$\mu(x) = \frac{1}{d-b}(x-b)$$

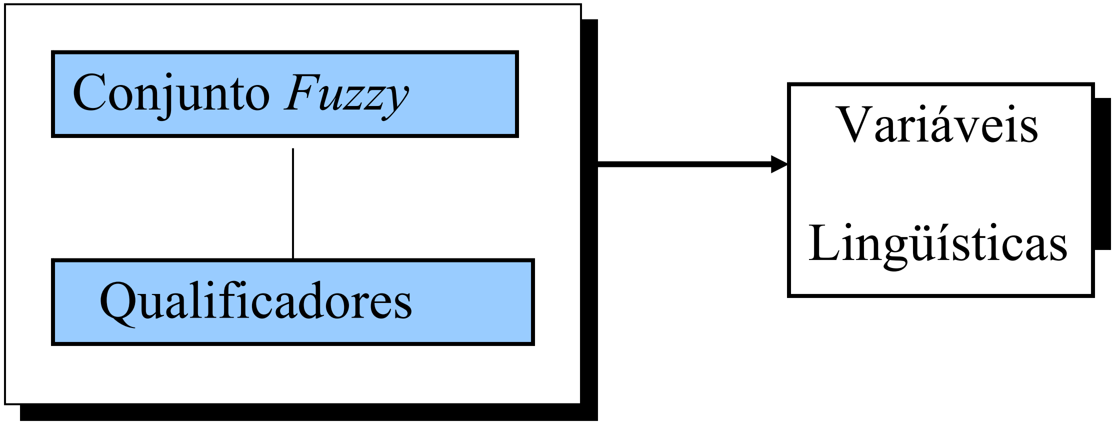
4. Variáveis Lingüísticas

- Uma variável lingüística é a variável (quantidade observada) cujo "comportamento" é alvo da representação via conjuntos *fuzzy*.
- Variáveis lingüísticas são normalmente usadas em sistemas de inferência *fuzzy* para fins de tomada de decisão.
- Exemplo: *SE* (duração *É* LONGO), (premissa)

  ENTÃO (risco *É* ALTO). (conclusão)
- Normalmente usada junto com qualificadores (*hedges*).
- Qualificadores mudam a forma do conjunto *fuzzy* associado a certa variável lingüística.

4. Variáveis Lingüísticas

- Variáveis lingüísticas com qualificadores (*hedges*):
  - muito BAIXA (equivale à raiz quadrada do conjunto BAIXO)
  - pouco ALTA (equivale a elevar ao quadrado o conjunto ALTO)
  - ligeiramente LONGO
  - positivamente não muito LONGO



4. Variáveis Lingüísticas

- Qualificadores permitem que expressar diferentes níveis de intensidade associados a uma certa variável lingüística.

- Exemplo:

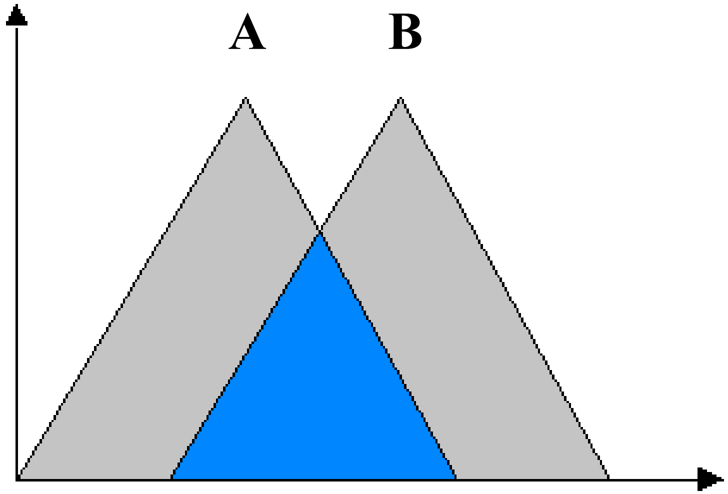
  SE (duração *É* muito LONGO)
  ENTÃO (risco É muito ALTO)

- Encapsula conceitos imprecisos numa forma computacionalmente eficiente.

5. Operadores Fuzzy

Sejam *A* e *B* conjuntos fuzzy associados à variável *X*.

- Intersecção de *A* e *B*



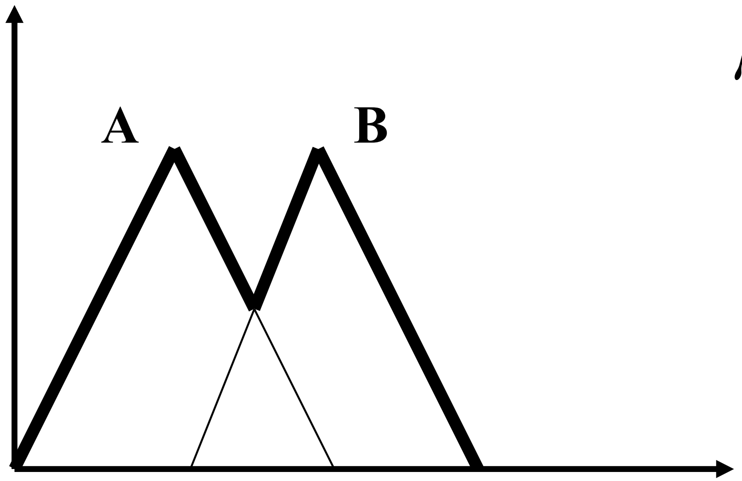
$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

5. Operadores Fuzzy

Sejam *A* e *B* conjuntos fuzzy associados à variável *X*.

- União de *A* e *B*



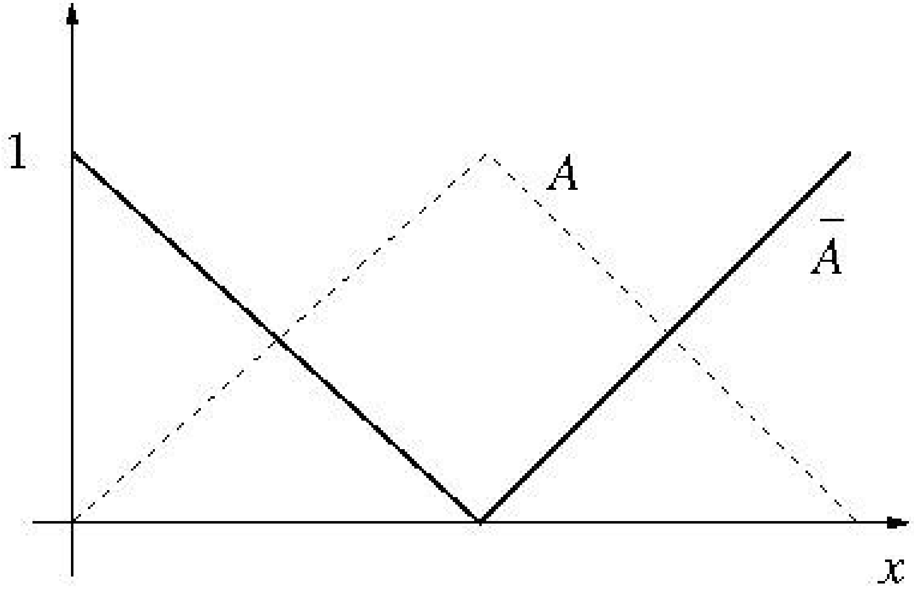
$$\mu_{(A\cup B)}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{(A\cap B)}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

5. Operadores Fuzzy

Sejam *A* um conjunto fuzzy associado à variável *X* (tracejado).

Então, o complemento fuzzy de *A* é mostrado em linha contínua.



$$\neg\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

5. Operadores Fuzzy

No início a lógica e a teoria de conjuntos Fuzzy causou um certo mal-estar no meio acadêmico.

Em grande parte, o mal-estar foi causado porque a teoria de conjuntos fuzzy contradizia certos AXIOMAS da teoria clássica de conjuntos.

Por exemplo, qual é o conjunto resultante da soma de um conjunto qualquer A com o seu complemento $\bar{A}$?

Segundo a teoria clássica: $A \cup \bar{A} = A + \bar{A} = U$

Por exemplo, qual é o conjunto resultante da interseção de um conjunto qualquer A com o seu complemento $\bar{A}$?

Segundo a teoria clássica: $A \cap \bar{A} = A \,.\, \bar{A} = \Phi$

5. Operadores Fuzzy

E segundo a lógica Fuzzy?

$$\mu(\neg A \cup A) \neq \mu(TRUE) \text{ e } \mu(\neg A \cap A) \neq \mu(FALSE),$$

Considere $\mu(A) = 1/2,$

$$\begin{aligned}
\mu(\neg A \cup A) &= \max(\neg\mu(A), \mu(A)) \\
&= \max(1 - 1/2, 1/2) \\
&= 1/2 \neq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\neg A \cap A) &= \min(\neg\mu(A), \mu(A)) \\
&= \min(1 - 1/2, 1/2) \\
&= 1/2 \neq 0
\end{aligned}$$

6. Regras Fuzzy

- Regras do tipo SE-ENTÃO cujas premissas (antecedentes) e conclusão (conseqüente) utilizam conceitos oriundos da lógica *fuzzy*.
- Exemplos de regras *fuzzy*:

R1: SE (velocidade é muito grande) E (raio de curvatura é pequeno), ENTÃO (força_sobre_pedal_freio é grande).

R2: SE (velocidade é mediana) E (raio de curvatura é grande), ENTÃO (força_sobre_pedal_freio é pequena).

6. Regras Fuzzy (cont.-1)

- Uma base de regras ou base de conhecimento *fuzzy* é formada por um número finito de regras *fuzzy*.
- Regras fuzzy são normalmente obtidas a partir de conhecimento especialista vago, sem precisão numérica.
- Existem vários métodos para extração do conhecimento:

(*i*) Obtenção manual (entrevistas);

(*ii*) Modelagem do especialista por observação direta;

(*iii*) Modelagem do processo a ser tratado.

(*iv*) Extração automática do conhecimento.

6. Regras Fuzzy (cont.-2)

- Para um conjunto de p variáveis de entrada $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ e uma variável de saída y, uma regra *fuzzy* pode ser genericamente escrita como:

$$R_i: \text{ SE } (x_1 \text{ é } A_{1i}) \text{ e } (x_2 \text{ é } A_{2i}) \text{ e } \ldots \text{ e } (x_p \text{ é } A_{pi}),$$
$$\text{ENTÃO } (y \text{ é } B_i).$$

- Sistema *fuzzy* descritos por regras tal como a mostrada acima são chamados de sistemas do tipo *Mamdani*.

- Mamdani, E. H. (1975). "Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis, *IEEE Transactions on Computers*, vol. 126, pp. 1182-1191.

6. Regras Fuzzy (cont.-3)

- Subconjuntos fuzzy de entrada: $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{pi}$
- Subconjunto fuzzy de saída: B_i
- Avaliação <u>individual</u> das premissas da *i*-ésima regra:

$$\text{Premissa 1: } x_1 \text{ é } A_{1i} \text{ equivale a } \mu_{A_1}^{(i)}(x_1)$$

$$\text{Premissa 2: } x_2 \text{ é } A_{2i} \text{ equivale a } \mu_{A_2}^{(i)}(x_2)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\text{Premissa } p\text{: } x_p \text{ é } A_{pi} \text{ equivale a } \mu_{A_p}^{(i)}(x_p)$$

6. Regras Fuzzy (cont.-4)

- Exemplo (premissas de regras *fuzzy*):

(*i*) Variáveis lingüísticas de entrada e saída:

$$x_1 = \text{velocidade [Km/h]}$$

$$x_2 = \text{raio de curvatura [m]}$$

$$y = \text{força sobre pedal de freio [N]}$$

(*ii*) Subconjuntos associados à *i*-ésima regra fuzzy:

$$A_{1i} = \text{grande}$$

$$A_{2i} = \text{pequeno}$$

$$B_i = \text{alta}$$

6. Regras Fuzzy (cont.-5)

- Exemplo (premissas de regras *fuzzy*):

(*iii*) Avaliação individual das premissas:

$$x_1 = 100\,Km/h \;\rightarrow\; \mu_{A_1}^{(i)}(x_1) = 0{,}7$$

$$x_2 = 10\,m \;\rightarrow\; \mu_{A_2}^{(i)}(x_2) = 0{,}8$$

6. Regras Fuzzy (cont.-6)

- Avaliação <u>conjunta</u> (interseção) das premissas da *i*-ésima regra *fuzzy*:

$$\mu_A^{(i)}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = min\{\mu_{A_1}^{(i)}(x_1), \mu_{A_2}^{(i)}(x_2), \ldots, \mu_{A_p}^{(i)}(x_p)\}$$

- Continuação do exemplo anterior:

$$\mu_A^{(i)}(x_1, x_2) = min\{\mu_{A_1}^{(i)}(x_1), \mu_{A_2}^{(i)}(x_2)\} = min\{0{,}7\,;0{,}8\} = 0{,}7$$

7. Inferência Fuzzy

- A saída de uma regra fuzzy é uma versão modificada do conjunto *fuzzy* de saída B_i.
- Inferência ou raciocínio *fuzzy* consiste no processo de avaliar o efeito que o resultado da avaliação conjunta das premissas de uma regra *fuzzy* produzem sobre o conjunto conjunto *fuzzy* de saída dessa regra.
- Aqui nos restringiremos ao método conhecido como *Regra de Inferência Modus Pones Generalizado*.

7. Inferência Fuzzy (cont.-1)

- Inferência ou raciocínio *fuzzy* consiste no processo de avaliar o efeito que o resultado da avaliação <u>conjunta</u> das premissas de uma regra *fuzzy* produzem sobre o conjunto conjunto *fuzzy* de saída dessa regra.
- Aqui nos restringiremos ao método de inferência conhecido como *Modus Ponens Generalizado:*

$$\mu_{A \to B}^{(i)}(x_{1,} x_2; y) = min\{\mu_A^{(i)}(x_{1,} x_2), \mu_B^{(i)}(y)\}$$

7. Inferência Fuzzy (cont.-2)

- *Modus Ponens Generalizado*:

$$\mu_{A \to B}^{(i)}(x_{1,} x_2 ; y) = min\{\mu_A^{(i)}(x_{1,} x_2), \mu_B^{(i)}(y)\}$$

- Note que:

(*i*) $\mu_A^{(i)}(x_{1,} x_2)$ é uma constante (linha horizontal).

(*ii*) $\mu_B^{(i)}(y)$ é o conjunto fuzzy de saída da *i*-eśima regra.

- Logo, a saída da *i*-ésima regra fuzzy é uma versão modificada do conjunto *fuzzy* de saída B_i.

7. Inferência Fuzzy (cont.-3)

- Exemplo *Modus Ponens Generalizado*: