Universidade Federal do Ceará (UFC)
Departamento de Engenharia de Teleinformática (DETI)
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática (PPGETI)

Teoria da Informação - TIP 812

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Número de créditos: 4
Carga horária total: 60 h
Período: 2010.1

Lista de Exercícios No. 4: Codificação e Capacidade de Canal

1. Considere o canal com quatro entradas e cinco saídas na Figura 1.

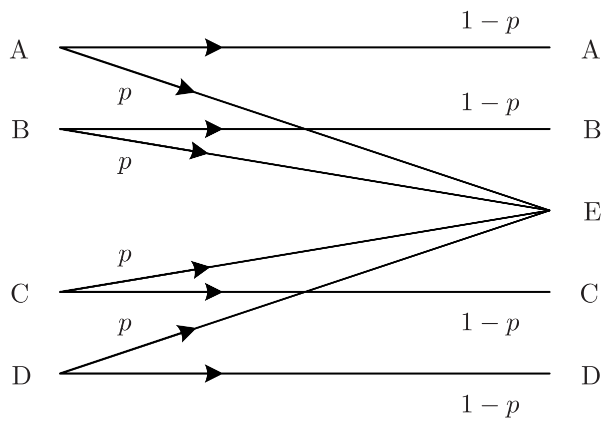

Figura 1: Canal discreto com 4 entradas e 5 saídas.

(a) Mostre que o canal é simétrico.

(b) Calcule sua capacidade

Propõe-se de utilizar o canal para transmitir o conteúdo de uma fonte binária A

(c) Determinar a ordem da extensão da fonte A para que as palavras da fonte possam ser transmitidas diretamente sobre o canal.

(d) Suponha a fonte A binária sem memória. Calcular a probabilidade para que uma palavra da fonte seja transmitida corretamente pelo canal.

(e) Se a fonte é equidistribuída, ou seja, $\Pr(a_0) = \Pr(a_1) = 1/2$, e sua taxa é dada por $R_s = \frac{1}{T_s}$, qual deve ser a taxa de utilização do canal R_c para que uma transmissão do conteúdo de A possa ser transmitida com uma probabilidade de erro tão pequena quanto possível?

2. Seja os canais 1 e 2 descritos conforme a figura abaixo.

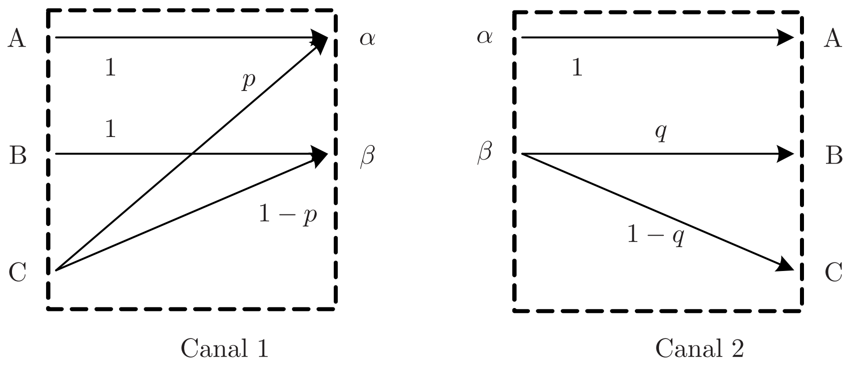

Figura 2: Canais 1 e 2 com capacidade $C1$ e $C2$, respectivamente.

(a) Calcular as capacidades $C1$ e $C2$ dos canais abaixo.

(b) Deduzir de (a) a capacidade do canal resultante da colocação em cascata de $C1$ e $C2$ obtido a partir da ligação das saídas α e β do canal 1 às entradas correspondentes α e β do canal 2.

3. Seja o canal com apagamento descrito na Figura 3

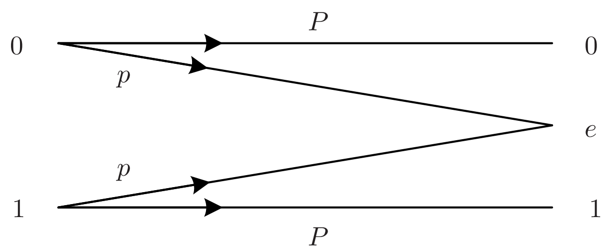

Figura 3: Canal com apagamento.

(a) Calcular a capacidade de canal.

(b) Qual a capacidade por unidade de tempo se a taxa de utilização do canal é $R_c = \frac{1}{T_c}$?

(c) Considere uma fonte binária equidistribuída sem memória de taxa R_s. Qual deve ser o valor da taxa de utilização do canal para que a transmissão do conteúdo da fonte possa ser efetuada com uma probabilidade de erro tão pequena quanto desejada?

(d) Com p e R_s fixos, imagine um dispositivo que inclua um canal de retorno não ruidoso que permita atingir o resultado de (c). Qual é a probabilidade de erro?

 Charles Casimiro Cavalcante
charles@gtel.ufc.br
http://www.gtel.ufc.br/∼charles

4. Calcular a capacidade de canal de um canal resultante da cascata de um canal binário simétrico de probabilidade de erro p e um canal com apagamento, conforme a figura abaixo.

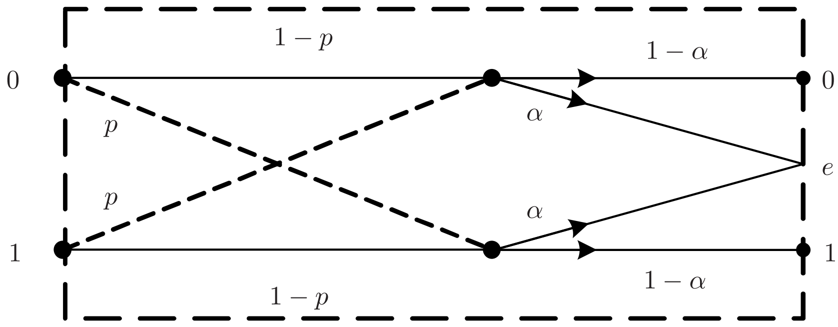

Figura 4: Cascata de canais binário e com apagamento.

5. Considere um canal de ruído aditivo gaussiano branco com uma restrição de potência P na saída do canal. Então $Y = X + Z$, em que $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, Z é independente de X e $\mathbb{E}\left\{Y^2\right\} \leq P$. Assuma que $\sigma^2 < P$. Encontre a capacidade do canal.

6. É dado um canal de comunicações com probabilidades de transição $p(y|x)$ e a capacidade do canal $C = \max_{p(x)} \mathcal{I}(X, Y)$. Um engenheiro pré-processa a saída formando $\widetilde{Y} = g(Y)$, formando um novo canal $p(\widetilde{y}|x)$. Ele afirma que isto irá necessariamente aumentar a capacidade do canal.

(a) Mostre que ele está errado.

(b) Sob quais condições ele não necessariamente decresce a capacidade?

7. O canal-Z, representado na Figura 5, tem entrada binária e suas probabilidades de transição $p(y|x)$ são dadas na seguinte matriz:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad x, y \in \{0, 1\}$$

Encontre a capacidade do canal-Z e a pdf da entrada que a maximiza.

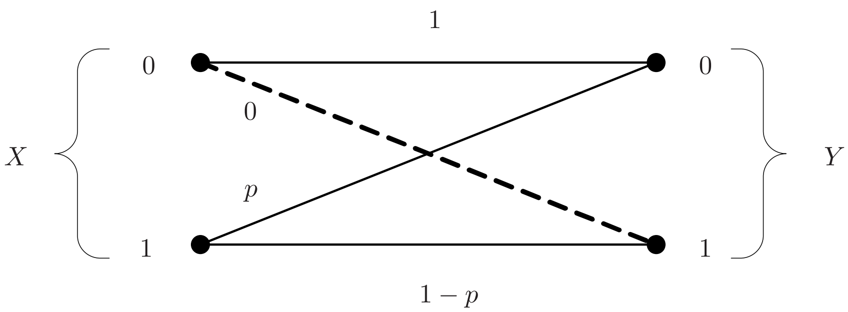

Figura 5: Canal Z.

8. Encontre a capacidade de canal do seguinte canal discreto sem memória:

$$Y = X + Z$$

em que $\Pr\{Z = 0\} = \Pr\{Z = a\} = \frac{1}{2}$. O alfabeto para X é $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. $Y = X + Z$ é uma adição real. Assuma que Z é independente de X. Observe que a capacidade do canal depende do valor de a.