Teoria da Informação - TIP 812

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Número de créditos: 4
Carga horária total: 60 h
Período: 2010.1

Lista de Exercícios No. 2: Informação e Entropia

1. Considere um jogo de baralho com 52 cartas e uma mão de de 4 cartas é considerado. Sejam os eventos:

$$E_1 = \{ \text{ a mão não contém nenhuma carta mais baixa do que o valete } \},$$
$$E_2 = \{ \text{ a mão não contém nenhuma figura } \},$$
$$E_3 = \{ \text{ a mão contém quatro cartas idênticas (do mesmo naipe) } \},$$
$$E_4 = \{ \text{ a mão contem os quatro ases } \}.$$

(a) Calcular a auto-informação associada a cada destes eventos bem com a informação mútua $\mathcal{I}(E_1, E_2)$ e $\mathcal{I}(E_1, E_3)$.

(b) Avaliar aproximadamente o número dos caracteres binários necessários para especificar quatro cartas e comparar a entropia da variável aleatória que corresponde a uma mão.

2. Considere 8 símbolos equiprováveis codificados em oito palavras binárias:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0000 & x_5 = 1001 \\ x_2 = 0011 & x_6 = 1010 \\ x_3 = 0101 & x_7 = 1100 \\ x_4 = 0110 & x_8 = 1111 \end{array}$$

Estas palavras transitam por um canal binário simétrico de probabilidade do erro p, conforme a Figura 1.

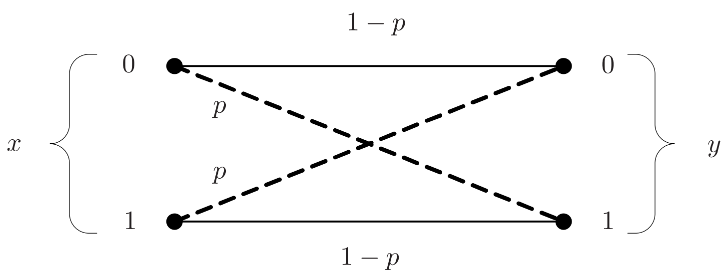

Figure 1: Canal binário com probabilidade de erro p.

Suponha que a palavra recebida é $y = 0000$.

(a) Calcular a informação trazida pelo conhecimento do primeiro bit recebido ("0") no evento $\{ x_1 \text{ foi emitido } \}$.

(b) Calcular a informação trazida pelo conhecimento do segundo bit recebido ("0") no evento $\{ x_1 \text{ foi emitido } \}$ condicionado com o conhecimento do primeiro bit recebido ("0"). O que pode ser constatado?

(c) O que se pode induzir quanto para à informação trazida pelo conhecimento do terceiro (quarto) bit recebido ("0") no evento { x_1 foi emitido } condicionado com o conhecimento dos dois primeiros (três primeiros) bits recebidos ("0")?

3. Seja um jogo de peças de ouro das quais apenas uma tem um peso inferior ao peso nominal. Para identificar esta peça, dispõe-se de uma balança de dois pratos que permite comparar os pesos a e b de dois conjuntos de peças A e B. O resultado de uma pesagem é então um dos três eventos: $a < b$, $a > b$ ou $a = b$.

(a) Calcular a incerteza média relacionada à determinação da peça falsa.

(b) Expressar a informação média trazida por uma pesagem na determinação da peça falsa em função da incerteza média relacionada ao resultado da pesagem. Generalizar este resultado para o caso de m pesagens.

(c) Qual a informação média máxima trazida por uma pesagem na identificação de uma peça falsa? Quando esta situação é encontrada?

(d) Suponha que desenvolveu-se uma estratégia que permite, com certeza, descobrira a peça falsa com m pesagens, no máximo.

- Fornecer, em função de n (número de pesagens) um limite inferior para m.
- No caso particular em que n é uma potência de 3, elaborar uma estratégia que permita, a cada pesagem, obter uma quantidade de informação média máxima sobre a determinação da peça falsa. Esta estratégia é ótima em que sentido?

(e) Considere o problema precedente com suposições diferentes: Dispõe-se de uma balança de um só prato que permite de determinar o peso de um conjunto de peças e o número de peças falsas é desconhecido mas cada uma pesa um peso f inferior ao peso nominal v.

- Mostrar que uma pesagem permite determinar o número de peças falsas entre aquelas pesadas.
- Seja uma estratégia que permite, com certeza, conhecer o número de peças falsas e de identificá-las em, no máximo, m pesagens. Forneça, em função de n, um limite inferior para m.

4. Denota-se por $X = 1$ o evento que indica a parada de uma bola do jogo de roleta em um número vermelho e $X = 0$ para a cor preta. A roleta está perfeitamente balanceada, de tal forma que $\Pr(X = 1) = \Pr(X = 0) = \frac{1}{2}$.

Um crupiê desonesto desenvolveu uma estratégia para fraudar o cassino. Após anos de observação, ele aprendeu como predizer parcialmente a cor do número que a bola vai parar observando a trajetória da mesma até o momento no qual as últimas apostas podem ser registradas. Ele comunica então suas predições para um cúmplice na seguinte maneira:

- se ele tosse, observa-se então o evento $Y = 1$, significando que ele prediz a cor vermelha,
- se ele pisca os olhos, observa-se o evento $Y = 0$, predizendo a cor preta.

Suponha que $P(X = 1|Y = 1) = P(X = 0|Y = 0) = \frac{3}{4}$.

(a) Qual a informação média que o crupiê passa para seu cúmplice?

Seja C_0 o capital inicial do cúmplice e C_n seu capital na n-ésima jogada da roleta. Uma vez que um jogador ganha, ele recupera duas vezes o valor apostado; a soma que ele possui aumenta na mesma quantia que a quantia que o cassino gasta. O Cúmplice decide de colocar sistematicamente a proporção $(1-q)$ de seu capital sobre a cor predita pelo crupiê e a proporção restante sobre a outra cor. Observa-se que a variável aleatória Z_i é igual a 1 se a cor predita na i-ésima jogada obtida e $Z_i = 0$ caso contrário.

(b) Calcular C_n em função de C_0, q e $Z_1, \cdots, Z_n$.

(c) Determinar o valor de q que faz o lucro médio na n-ésima jogada ser máximo.

(d) Define-se a taxa de crescimento do capital na n-ésima jogada por $\tau_n = \frac{1}{n}\log_2\left(\frac{C_n}{C_0}\right)$. Calcular o valor de q para que o qual a esperança da taxa média é máxima.

5. Seja X uma variável aleatória discreta. Mostre que a entropia de uma função de X é menor ou igual à entropia de X justificando os seguintes passos:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(X, g(X)) &\overset{(a)}{=} \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(g(X)|X)\\ &\overset{(b)}{=} \mathcal{H}(X)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(X, g(X)) &\overset{(c)}{=} \mathcal{H}(g(X)) + \mathcal{H}(X|g(X))\\ &\overset{(d)}{\geq} \mathcal{H}(g(X)).\end{aligned}$$

Então $\mathcal{H}(g(X)) \leq \mathcal{H}(X)$.

6. Seja X uma variável aleatória que pode assumir valores positivos e negativos. Se tivermos uma v.a. dada por $Y = f(X)$, qual a relação entre $\mathcal{H}(X)$ e $\mathcal{H}(Y)$ para:

(a) $Y = X^5$.

(b) $Y = X^2$.

(c) $Y = \tan(X)$.

7. Considere:

(a) Um lançamento de uma moeda justa. Qual a informação mútua entre o lado de cima e o de baixo da moeda?

(b) Um dado honesto de 6 faces é jogado. Qual a informação mútua entre o lado superior e o inferior do dado?

(c) Ainda considerando o dado do item (b), qual a informação mútua entre o lado superior e o lado frontal (mais próximo de você)?

8. A entropia $\mathcal{H}_a(X) = -\sum p(x)\log_a(p(x))$ é expressa em bits se o logaritmo tem base 2 e am bytes se o logaritmo tem base 256. Qual a relação entre $\mathcal{H}_2(X)$ e $\mathcal{H}_{256}(X)$?

9. Seja $p_{X,Y}(x, y)$ dada por

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

Encontre

(a) $\mathcal{H}(X)$ e $\mathcal{H}(Y)$.

(b) $\mathcal{H}(X|Y)$ e $\mathcal{H}(Y|X)$.

(c) $\mathcal{H}(X, Y)$.

(d) $\mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(Y|X)$.

(e) $\mathcal{I}(X, Y)$.

10. Seja X_1 e X_2 *identicamente distribuídas*, mas não necessariamente independentes. Seja ainda

$$\rho = 1 - \frac{\mathcal{H}(X_2|X_1)}{\mathcal{H}(X_1)}$$

(a) Mostre que $\rho = \frac{\mathcal{I}(X_1, X_2)}{\mathcal{H}(X_1)}$

(b) Mostre que $0 \leq \rho \leq 1$.

(c) Quando ocorre $\rho = 0$?

(d) Quando ocorre $\rho = 1$?

Charles Casimiro Cavalcante
charles@gtel.ufc.br
http://www.gtel.ufc.br/∼charles