Teoria da Informação | **Exercícios I** | Nome:____________
Prof. W. C. Freitas Jr., 2017 | | Matr.:____________

Instruções (0 points)

1. Uma série de cinco jogos entre duas equipes termina logo que uma delas ganhe três vezes. Seja X a variável aleatória que representa o resultado dos jogos entre as equipes A e B; exemplos de valores possíveis de X são AAA, BABAB e BBAAA. Seja Y o número de jogos jogados (Y=3, 4 ou 5).

1. Admitindo que as duas equipes têm igual nível competitivo, e que os jogos são independentes, calcule $\mathcal{H}(X)$, $\mathcal{H}(Y)$, $\mathcal{H}(Y|X)$ e $\mathcal{H}(X|Y)$.
2. Seja Z a equipe vencedora. Determine $\mathcal{H}(X|Z)$ e compare com $\mathcal{H}(X)$. Determine ainda $\mathcal{H}(Z|X)$.

Solução:

2. Considere 8 símbolos equiprováveis codificados em oito palavras binárias:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0000 & x_5 = 1001 \\ x_2 = 0011 & x_6 = 1010 \\ x_3 = 0101 & x_7 = 1100 \\ x_4 = 0110 & x_8 = 1111 \end{array}$$

Estas palavras transitam por um canal binário simétrico de probabilidade do erro p, conforme a Figura 1.

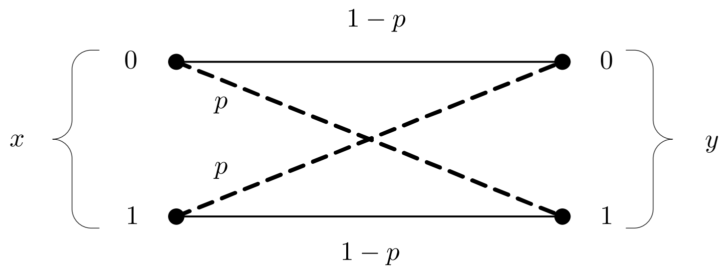


Figure 1: Canal binário com probabilidade de erro p.

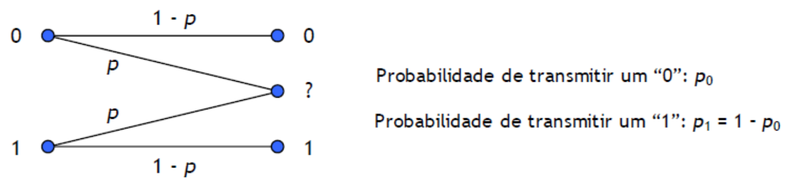
Suponha que a palavra recebida é $y = 0000$.

1. Calcular a informação trazida pelo conhecimento do primeiro bit recebido (“0”) no evento { x_1 foi emitido }.
2. Calcular a informação trazida pelo conhecimento do segundo bit recebido (“0”) no evento { x_1 foi emitido } condicionado com o conhecimento do primeiro bit recebido (“0”). O que pode ser constatado?
3. O que se pode induzir quanto para à informação trazida pelo conhecimento do terceiro (quarto) bit recebido (“0”) no evento { x_1 foi emitido } condicionado com o conhecimento dos dois primeiros (três primeiros) bits recebidos (“0”)?

Solução:

0 pts

3. Na figura abaixo está representado um canal discreto designado por *Binary Erasure Channel* (BEC).



Determine a informação mútua média do canal quando $p_0 = 1/4$ e $p = 0, 1$.

Solução:

4. Seja X uma variável aleatória com n valores possíveis $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ de probabilidades $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}$.

(a) Implemente uma codificação de Huffman dos n possíveis valores de X;

(b) Compare o comprimento médio das palavras códigos L com a entropia $\mathcal{H}(X)$ da fonte. O que se nota deste resultado? Em que este resultado é importante? Como explica-se este resultado?

Solução:

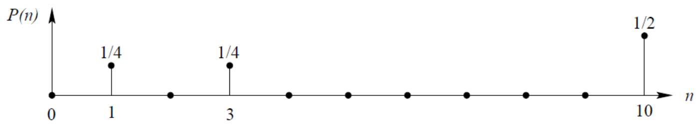
5. Calcule a entropia da imagem 4×8 de 256 tons de cinza a seguir. Projete um código de Huffman e compare a eficiência da codificação de tal imagem com um código de comprimento fixo e um código de comprimento variável (Huffman).

22	22	22	95	167	234	234	234
22	22	22	95	167	234	234	234
22	22	22	95	167	234	234	234
22	22	22	95	167	234	234	234

Solução:

6. Uma imagem de fac-símile (fax) é formada quando um documento é digitalizado por um dispositivo eletrônico sensível à luz, que gera um sinal elétrico com um pulso forte que corresponde a um ponto escuro na linha de varredura e um pulso fraco para um ponto branco. Em máquinas de fax digital, o sinal elétrico é posteriormente digitalizado em dois níveis e processado, antes da transmissão através de uma linha telefônica. Uma propriedade que claramente se destaca é a natureza em *cluster* dos pixels em preto (b) e branco (w). Os pixels ocorrem em rajadas. É justamente essa propriedade que é explorada pela maioria das técnicas de compressão. A forma natural de explorar esta propriedade é utilizar *run-length coding*, técnica utilizada amplamente para codificação de imagem em fac-símiles. A ideia é executar a codificação usando um par *run-length*, em vez da codificação dos pixels individuais.

Considere então uma imagem escaneada linha por linha. A distribuição de probabilidade $p(n)$ dos *runs* de cada linha, em que n é o comprimento do *run*, é dada pela figura abaixo.



Solução:

7. Seja uma fonte discreta sem memória de valores possíveis $\{\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_i,\ \cdots\ \}$ que verifique:

$$\forall k > j \geq 1, \quad P(a_k) \leq P(a_j)$$

Propõe-se de codificar os diferentes símbolos da fonte A da seguinte maneira:

Para o símbolo a_i é associado um número Q_i definido por $Q_i = \sum_{k=1}^{i-1} P(a_k)\ \forall k > 1$ e $Q_1 = 0$.

A palavra código binária c_i correspondente ao símbolo a_i é obtida tomando-se a parte "decimal" do valor de Q_i no sistema binário (por exemplo, $Q_i = \frac{1}{2} \rightarrow 100\ldots$, $Q_i = \frac{1}{4} \rightarrow 0100\ldots$, $Q_i = \frac{5}{8} \rightarrow 10100\ldots$) que nós truncamos sobre o número de bits igual ao menor inteiro superior ou igual a auto-informação do evento a_i.

(a) O código C verifica a condição de prefixo (inequação de Kraft-McMillan)?

(b) Denota-se por L o comprimento médio das palavras código. Mostrar que L verifica a inequação $\mathcal{H}(A) \leq L \leq \mathcal{H}(A) + 1$.

(c) Codificar pelo procedimento descrito os oito símbolos de uma fonte sem memória de probabilidades $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}$

- Em relação ao item anterior, calcular o comprimento médio das palavras código obtidas e comparar com a entropia da fonte. O que pode-se constatar? Como explicar este resultado?

Solução:

8. Considere o canal com quatro entradas e cinco saídas na Figura 2.

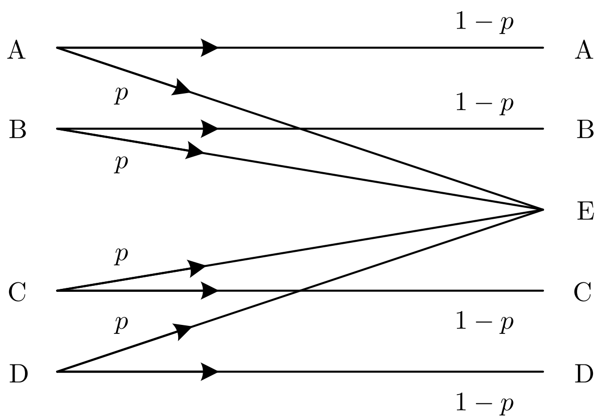


Figure 2: Canal discreto com 4 entradas e 5 saídas.

(a) Mostre que o canal é simétrico.

(b) Calcule sua capacidade

Propõe-se de utilizar o canal para transmitir o conteúdo de uma fonte binária A

(c) Determinar a ordem da extensão da fonte A para que as palavras da fonte possam ser transmitidas diretamente sobre o canal.

(d) Suponha a fonte A binária sem memória. Calcular a probabilidade para que uma palavra da fonte seja transmitida corretamente pelo canal.

(e) Se a fonte é equidistribuída, ou seja, $\Pr(a_0) = \Pr(a_1) = 1/2$, e sua taxa é dada por $R_s = \frac{1}{T_s}$, qual deve ser a taxa de utilização do canal R_c para que uma transmissão do conteúdo de A possa ser transmitida com uma probabilidade de erro tão pequena quanto possível?

Solução:

9. Calcular a capacidade de canal de um canal resultante da cascata de um canal binário simétrico de probabilidade de erro p e um canal com apagamento, conforme a figura abaixo.

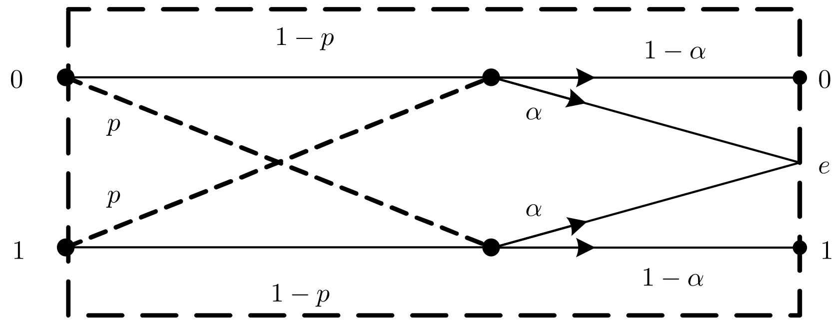


Figure 3: Cascata de canais binário e com apagamento.

Solução:

10. Seja o canal com apagamento descrito na Figura 4

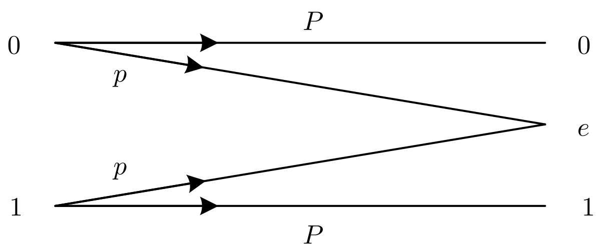


Figure 4: Canal com apagamento.

(a) Calcular a capacidade de canal.

(b) Qual a capacidade por unidade de tempo se a taxa de utilização do canal é $R_c = \frac{1}{T_c}$?

(c) Considere uma fonte binária equidistribuída sem memória de taxa R_s. Qual deve ser o valor da taxa de utilização do canal para que a transmissão do conteúdo da fonte possa ser efetuada com uma probabilidade de erro tão pequena quanto desejada?

(d) Com p e R_s fixos, imagine um dispositivo que inclua um canal de retorno não ruidoso que permita atingir o resultado de (c). Qual é a probabilidade de erro?

Solução:

0 pts

11. Considere um canal de ruído aditivo gaussiano branco com uma restrição de potência P na saída do canal. ENtão $Y = X + Z$, em que $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2)$, Z é independente de X e $E\left\{Y^2\right\} \leq P$. Assuma que $\sigma^2 < P$. Encontre a capacidade do canal.

Solução:

12. É dado um canal de comunicações com probabilidades de transição $p(y|x)$ a capacidade do canal $C = \max_{p(x)} \mathcal{I}(X, Y)$. Um engenheiro pré-processa a saída formando $\widetilde{Y} = g(Y)$, formando um novo canal $p(\widetilde{y}|x)$. Ele afirma que isto irá necessariamente aumentar a capacidade.

(a) Mostre que ele está errado.

(b) Sob quais condições ele não necessariamente decresce a capacidade?

Solução:

0 pts