Esercitazione 6: More on Greedy Algorithms and Dynamic Programming

Giacomo Paesani

April 23, 2024

Esercizio 1 (23.1-11, [1])**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non diretto e connesso con gli archi pesati da una funzione w e T un albero di copertura di G di peso minimo. Supponiamo che il peso di un'arco (u, v) che non appartiene a T diminuisce. Fornire un algoritmo in pseudo-codice che dato G, T e come viene modificato il peso dei un arco (u, v), trova un albero di copertura di peso minimo nel grafo modificato (senza calcolarlo da capo).

Soluzione 1. Sia (u, v) l'arco di G a cui viene cambiato peso da $w(u, v)$ in $w'(u, v)$. Dato che (u, v) non appartiene a T, allora esiste un cammino P in T che collega u e v. La soluzione consiste nel capire se è c'è un arco (s, t) in P tale che $w(s, t) > w'(u, v)$: se tale arco esiste allora è possibile trovare un nuovo albero di copertura di peso minimo. Altrimenti T resta minimo.

La soluzione proposta è quella data dal Algoritmo 1. Come prima cosa si esegue una ricerca in ampiezza BFS nell'albero T a partire da uno degli estremi dell'arco (u, v), ad esempio u: questa chiamata (Linea 5) restituisce il vettore dei padri. Tale vettore ci permette di ricostruire il cammino P in T tra u e v. A questo punto cerchiamo tra gli archi di P, grazie al ciclo **while** in Linea 10, quello di peso massimo: gli estremi e il peso di questo arco è salvato nelle variabili s, t e m. L'algoritmo termina sostituendo in T l'arco (s, t) con (u, v). □

Esercizio 2 (23.2-7,[1])**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non diretto e connesso con gli archi pesati da una funzione w e T un albero di copertura di G di peso minimo. Supponiamo che viene aggiunto un nuovo vertice u e gli archi a se incidenti a G. Fornire un algoritmo in pseudo-codice che dato G, T e la lista di adiacenza di u nei vertici di G, trova un albero di copertura di peso minimo nel grafo $G \cup \{u\}$ (senza calcolarlo da capo).

Algorithm 1 Algoritmo per aggiornare l'albero di copertura di costo minimo in seguito ad una riduzione di costo di un arco.

Input: $G = (V, E)$ grafo non diretto, connesso e con archi pesati, $T \subseteq E$, $(u, v) \in E$ e valore w'

Output: $T' \subseteq E$ albero di copertura di peso minimo

```
global variables
    Parent ↤ array dei padri
end global variables
function AdaptMST(G,T,(u,v),w')
    Parent=BFS(T,u)
    m = w'
    s = u
    t = v
    z = v
    while Parent[z] ≠ z do
        if w(z, Parent[z]) > m then
            m = w(z, Parent[z])
            s = z
            t = Parent[z]
        z = Parent[z]
    T.Remove(s, t)
    T.Add(u, v)
    return T
```

Soluzione 2. La problematica principale di questo esercizio è capire quali archi tra gli archi incidenti a u fanno parte di un albero di copertura di peso minimo T' nel grafo $G \cup \{u\}$ e quali tra gli archi di T non fanno parte di T'. Sia E_u l'insieme degli archi incidenti a u. L'idea è che è necessario aggiungere un arco di peso minimo $e^* \in E_u$; inoltre, per ogni arco $e \in E_u \setminus \{e^*\}$, $e \in T'$ se e solo se è possibile trovare un arco $e' \in T$ tale $(T \setminus \{e'\}) \cup \{e^*, e\}$ è un albero di copertura di $G \cup \{u\}$ di peso inferiore a $T \cup \{e^*\}$.

La soluzione proposta è data nel Algoritmo 2. Iniziamo con l'analisi della più semplice funzione che fa parte dell'esercizio MinEdge: dato un vertice u di un grafo, questa funzione mi restituisce un vicino z di u tale l'arco (u, z) ha costo minimo (Linea 24. La funzione centrale è MaxInPath: dato un arco $(u, v) \in E_u$, questa routine ci permette di individuare un arco di T che è il miglior candidato ad essere sostituito con (u, v). Infatti, dopo aver eseguito una DFS a partire da u sull'albero T (Linea 10, percorriamo l'unico cammino da u a v in T, a partire da v con il ciclo **While** di Linea 12, e salviamo in $(z, Parent[z])$ un arco di peso massimo di tale cammino.

Algorithm 2 Algoritmo per aggiornare l'albero di copertura di costo minimo in seguito ad una riduzione di costo di un arco.

Input: $G = (V, E)$ grafo non diretto e con archi pesati con funzione w, $T \subseteq E$
Output: $T' \subseteq E$ albero di copertura di peso minimo
1: **function MST-NewVertex**(G,w,T,u)
2: $\quad z$=MinEdge(G,u)
3: $\quad T = T \cup \{(u, z)\}$
4: $\quad$ **for** $v \in Adj[u]$ **do**
5: $\quad\quad (s, t)$=MaxInPath(G,T,u,v)
6: $\quad\quad$ **if** $w(s, t) > w(u, v)$ **then**
7: $\quad\quad\quad T = (T \setminus \{(s, t)\}) \cup \{(u, v)\}$
8: $\quad$ **return** T
9: **function MaxInPath**(G,T,u,v)
10: $\quad Parent$=DFS(G,T,u)$\hookleftarrow$ DFS che ritorna il vettore dei padri
11: $\quad m = -\infty$
12: $\quad$ **while** $Parent[v] \neq v$ **do**
13: $\quad\quad$ **if** $w(v, Parent[v]) > m$ **then**
14: $\quad\quad\quad m = w(v, Parent[v])$
15: $\quad\quad\quad z = v$
16: $\quad\quad v = Parent[v]$
17: $\quad$ **return** $(z, Parent[z])$
18: **function MinEdge**(G,u)
19: $\quad m = +\infty$
20: $\quad$ **for** $v \in Adj[u]$ **do**
21: $\quad\quad$ **if** $m > w(u, v)$ **then**
22: $\quad\quad\quad m = w(u, v)$
23: $\quad\quad\quad z = v$
24: $\quad$ **return** z

Guardiamo, in fine, la funzione MST-NewVertex che costituisce la base della soluzione proposta. Prima di tutto, aggiungiamo a T l'arco di costo minimo incidente a u (Linea 3 che troviamo dopo la chiamata alla funzione *MinEdge* (Linea 2). Ora, per ogni arco (u, v) incidente ad u troviamo l'arco di costo minimo (s, t) che può essere rimpiazzato da (u, v) tramite la chiamata a MaxInPath di Linea 5. A questo punto confrontiamo i pesi di (s, t) e (u, v) per decidere se aggiornare l'albero T o meno.

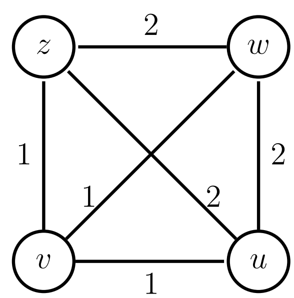
Concludiamo la spiegazione di questo esercizio con un analisi della complessità computazionale. La funzione MinEdge ha tempo di esecuzione $\mathcal{O}(|E|)$. La complessità della funzione MaxInPath è dominata dalla chiamata alla DFS che gira in tempo $\mathcal{O}(|V|)$ dato che come input ha l'albero T. In fine, la complessità della funzione MST-NewVertex è dominata dal ciclo **for** di Linea 4: per quanto detto prima questo ciclo consiste in al più $|E|$ chiamate alla funzione MaxInPath, ognuna di complessità $\mathcal{O}(n)$. Allora la complessità computazionale complessiva dell'algoritmo MST-NewVertex è di $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$. □

Esercizio 3 (23.2-8, [1])**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non diretto, connesso e con pesi sugli archi dati da una funzione w. Consideriamo la seguente strategia ricorsiva per calcolare un albero di copertura di peso minimo di G. Partizioniamo l'insieme V in due sottoinsiemi V_1 e V_2 tali che $|V_1|$ e $|V_2|$ differiscono di al più uno. Sia E_1 l'insieme di archi che sono incidenti solo a vertici di V_1 e E_2 l'insieme di archi che sono incidenti solo a vertici di V_2. Ricorsivamente troviamo un albero di copertura di peso minimo per i due sottografi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. In fine selezionare l'arco di peso minimo che attraversa il taglio (V_1, V_2) e aggiungerlo ai due alberi di copertura di peso minimo per i sottografi G_1 e G_2.

Dimostrare che la strategia proposta permette di implementare un algoritmo che trova correttamente una soluzione o esibire un contro-esempio che mostra come la strategia non sempre produce soluzioni ottime.

Soluzione 3. E' abbastanza immediato trovare un contro-esempio per cui la strategia proposta produce una soluzione non ottima. La figura qui sotto rappresenta un contro-esempio. Consideriamo una qualsiasi partizione, ad esempio data da $V_1 = \{u, z\}$ e $V_2 = \{v, w\}$ e allora troviamo che gli alberi di copertura di peso minimo per G_1 e G_2 sono dati da $T_1 = \{(u, z)\}$ e $T_2 = \{(v, w\}$. Ora aggiungendo un arco leggero per il taglio (V_1, V_2), cioè un arco di costo minimo che ha un estremo in V_1 e l'altro in V_2, come ad esempio l'arco (u, v) otteniamo un albero di copertura $T = \{(u, v), (u, z), (v, w)\}$ di costo 4. Notiamo che l'albero di copertura di costo minimo per G è dato da $\{(u, v), (v, z), (v, w)\}$ di costo 3.

Il problema di questa strategia è la forte dipendenza della soluzione ottenuta dalla partizione scelta dell'insieme V. E' possibile avere una garanzia di ottenere una soluzione ottima al costo di un aumento di complessità dato dal uso della programmazione dinamica per poter controllare tutte le partizioni *bilanciate* di V? La risposta è nuovamente negativa e l'esempio in figura lo mostra. Più in generale non funziona la strategia del *divide-et-impera* suddividendo il problema in sottoproblemi su sottografi che formano una partizione. L'idea è che la strategia proposta tende a ignorare alcuni alberi di copertura che potrebbero essere ottimi come ad esempio quelli a *stella*, cioè quelli in cui ogni arco è incidente ad uno stesso vertice detto *centro*, come è la soluzione del esempio in figura: infatti, se due dei sottografi indotti dalla partizione connessi allora una soluzione a stella è impossibile da ottenere. Inoltre se almeno un sottografo indotto dalla partizione non è connesso, allora l'algoritmo non produce alcun albero.



Esercizio 4 (24.2-3, [1])**.** Dato un grafo orientato $G = (V, E)$ e con archi pesati da una funzione w, senza cicli orientati di peso negativo, e sia m il massimo del numero minimo di archi di un cammino minimo da un vertice s a v, per ogni vertice $v \in V$. Fornire uno pseudo-codice modificando l'algoritmo di *Bellman-Ford* in modo che vengono fatte al più $m + 1$ iterazioni, anche se m non è noto a priori.

Soluzione 4. L'idea principale di questo esercizio è che dopo k iterazioni di rilassamento sugli archi del grafo G, l'algoritmo ha già stabilizzato, cioè ha già trovato il valore finale e corretto di, $dist[v]$ per tutti i vertici v tali che il cammino minimo da s a v ha al più k archi. Tale affermazione si può rapidamente dimostrare per induzione su k.

Per $k = 0$, questo è banalmente vero: infatti s è l'unico vertice per il cui il cammino minimo che lo collega ad s ha 0 archi e $dist[s]$ è inizializzata a 0 (Linea 24). Supponiamo ora che $k > 0$ e per ipotesi induttiva sappiamo che l'algoritmo ha stabilizzato tutti le distanze relative ai vertici per cui esiste un cammino minimo con al più $k - 1$ archi. Sia ora v un vertice tale che esiste un cammino minimo P da s a v di lunghezza minima con esattamente k archi. Allora esiste un cammino minimo P' da s a u di lunghezza minima con esattamente $k-1$ archi, dove $u = Parent[v]$ è il padre di v nel albero dei cammini minimi da s. Quindi, alla k-esima iterazione si crea il cammino P concatenando P' con l'arco (u, v) che realizza un cammino di peso $dist[v]$ corretto di lunghezza k.

Algorithm 3 Algoritmo per *fissare* il numero di iterazioni dell'algoritmo di Bellman-Ford.

Input: $G = (V, E)$ grafo diretto e con archi pesati con funzione w, vertice s
Output: `TRUE` se G non ha cicli di peso negativo e `FALSE` altrimenti

1: **global variables**
2: $\quad Parent \hookleftarrow$ array dei padri
3: $\quad dist \hookleftarrow$ array delle distanze pesate
4: **end global variables**
5: **function Short-Bellman-Ford**(G,w,s)
6: $\quad$ INITIALISE(G,s)
7: $\quad$ **for** $i = 1, \ldots, |V|$ **do**
8: $\qquad Fix =$ `TRUE`
9: $\qquad$ **for** $(u, v) \in E$ **do**
10: $\qquad\quad Fix = Fix \wedge$ RELAX(u,v,w)
11: $\qquad$ **if** Fix==`TRUE` **then**
12: $\qquad\quad$ **return** `TRUE`
13: $\quad$ **return** `FALSE`
14: **function Relax**(u,v,w)
15: $\quad Fix$=`TRUE`
16: $\quad$ **if** $dist[v] > dist[u] + w(u, v)$ **then**
17: $\qquad dist[v] = dist[u] + w(u, v)$
18: $\qquad Parent[v] = u$
19: $\qquad Fix$=`FALSE`
20: $\quad$ **return** Fix
21: **function Initialise**(G,s)
22: $\quad$ **for** $v \in V$ **do**
23: $\qquad dist[v] = +\infty$
24: $\quad dist[s] = 0$

La soluzione proposta è Algoritmo 3 che è ottenuto modificando l'algoritmo di Bellman-Ford. Viene introdotta la variabile booleana Fix che ha il compito, ad ogni iterazione, di capire se è stata modificato qualche coordinata dell'array $dist$. Infatti, se durante tutta un'iterazione di rilassamento tutti i valori restano invariati (Linea 11) allora si può facilmente dedurre che questi valori hanno raggiunto un punto fisso e sono quelli finali: l'algoritmo termina e i valori su *dist* sono quelli corretti (Linea 12). Supponiamo quindi che ad ogni iterazione, fino alla $n-1$-esima, almeno una coordinata di *dist* cambia e quindi la variabile Fix assume sempre il valore `FALSE`: la continua alterazione di coordinate dell'array *dist* è causata dall'esistenza di un ciclo di peso complessivo negativo raggiungibile da s e quindi l'algoritmo ritorna correttamente `FALSE`(Linea 13). □

References

[1] Thomas H Cormen, Charles E Leiserson, Ronald L Rivest, and Clifford Stein. Introduction to algorithms. 2022.