Esercitazione 1: Depth-First Search

Giacomo Paesani

March 6, 2024

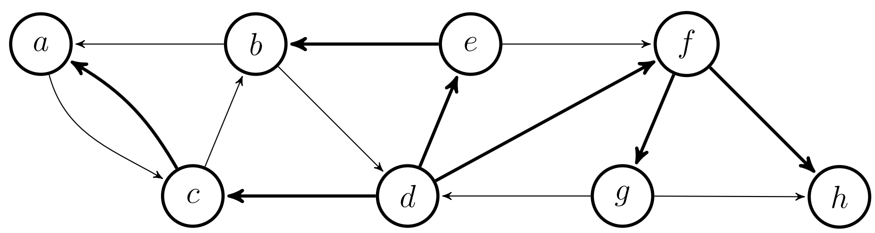
Esercizio 1. Un grafo diretto $G = (V, E)$ si dice diretto aciclico (DAG) se G non contiene alcun ciclo diretto. Modificare l'algoritmo della ricerca in profondità in maniera da poter controllare se un grafo diretto è aciclico o no; è possibile fare questa modifica in modo che il controllo avvenga in $\Theta(|V| + |E|)$?

Esercizio 2. Un grafo $G = (G, E)$ non diretto dice bipartito se l'insieme dei vertici V può essere partizionato in due insiemi disgiunti U e W tali che: (1) $U \cap W = \emptyset$, (2) $U \cup W = V$ e (3) ogni arco di G è incidente ad un vertice di U e ad vertice di W. E' noto che un grafo G è bipartito se e solo se G non ha cicli di lunghezza dispari. Modificare l'algoritmo della ricerca in profondità in maniera da poter controllare se un grafo non diretto è bipartito o no, e in caso fornire una bipartizione; è possibile fare questa modifica in modo che il controllo avvenga in $\Theta(|V| + |E|)$? Domanda bonus: nel caso in cui G non è bipartito, come deve essere ulteriormente modificato l'algoritmo per ritornare un ciclo dispari di G?

Esercizio 3 (I. Salvo)**.** Si consideri il grafo diretto G illustrato nella figura qui sotto e l'albero T formato formato dagli archi evidenziati. L'albero T può essere prodotto da una ricerca in profondità?

- In caso positivo, esibire una rappresentazione di G tramite liste di adiacenza in grado di produrre T e specificare il nodo da cui parte la ricerca e il tipo degli archi ottenuto a seguito della visita.
- In caso negativo, rimpiazzare un arco di T con un altro arco in maniera da ottenere un albero T' con la proprietà che T' possa essere un albero di ricerca per una ricerca in profondità. In tal caso, esibire una rappresentazione di G tramite liste di adiacenza in grado di produrre T' e

specificare il nodo da cui parte la visita e il tipo degli archi ottenuto a seguito della visita.



In fine, che succede se si considera lo stesso grafo G dove però gli archi non sono diretti?

Esercizio 4 (22.3-11,[1])**.** E' possibile avere un vertice u di un grafo diretto G che finisce in un albero di ricerca in profondità che contiene solo u, anche se G ha almeno un arco entrante ed uno uscente da u? E se si, fornire almeno un esempio non banale di un vertice u con tale proprietà. Che succede se invece G è un grafo non diretto?

Esercizio 5. In un grafo non diretto G un cammino *Hamiltoniano* è un cammino P di G che passa per ogni vertice di G esattamente una volta. Provare o confutare la seguente affermazione: G contiene un cammino Hamiltoniano se e solo se può essere prodotto un albero di ricerca di G che è un cammino. Domanda bonus: che succede se invece del cammino Hamiltoniano, si ha un ciclo Hamiltoniano in G?

Esercizio 6 (22.3-1,[1])**.** Durante una visita in profondità, ad ogni vertice u di un grafo viene associato un colore che varia nel tempo t dell'algoritmo. Se $t < u.d$ e cioè il vertice u deve ancora essere stato visitato per la prima volta allora u è colorato di BIANCO. Se $u.d \leq t \leq u.f$ e cioè il vertice u è ancora in visita allora u è colorato di GRIGIO. Infine, se $t > u.f$ e cioè il vertice u è stato già completamente visitato allora u è colorato di NERO. Fare una tabella 3x3 con righe e colonne contrassegnate da BIANCO, GRIGIO e NERO. In ogni cella (i, j), indicare se, in un alcun punto di una ricerca in profondità di un grafo diretto, è possibile avere un arco da un vertice di colore i ad un vertice di colore j. Per ogni possibile arco, indicare se esso può essere:

- arco dell'albero,

	BIANCO	GRIGIO	NERO
BIANCO			
GRIGIO			
NERO			

- arco all'indietro,
- arco in avanti o
- arco di attraversamento.

Fare una seconda tabella per una ricerca in profondità di un grafo non diretto.

References

[1] Thomas H Cormen, Charles E Leiserson, Ronald L Rivest, and Clifford Stein. Introduction to algorithms. 2022.