Exercícios de Teoria dos Grafos

http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/

Paulo Feofiloff

Departamento de Ciência da Computação

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

julho de 2012

Sumário

Prefácio

A teoria dos grafos estuda objetos combinatórios — os *grafos* — que são um bom modelo para muitos problemas de matemática, de computação, e de engenharia. A teoria dos grafos não é propriamente uma *teoria* mas uma *coleção de problemas*. Muitos desses problemas são um interessante desafio intelectual e têm importantes aplicações práticas.

O presente texto é uma coleção de exercícios de teoria dos grafos. A maioria dos exercícios foi extraída dos livros de Bondy e Murty [BM08, BM76], Wilson [Wil79], Diestel [Die00, Die05], Bollobás [Bol98], Lovász [Lov93], Melnikov *et alii* [MST+98], Lucchesi [Luc79] e Lovász e Plummer [LP86]. Alguns outros são subproduto de projetos de pesquisa. Autros ainda nasceram de conversas com professores, colegas e alunos.

O texto tem muitos *links* que levam de uma parte do texto a outra e apontam para material complementar. Para tirar proveito desses *links* é preciso ler o texto na tela do seu computador (e não impresso em papel).

O sítio *www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/* tem informações adicionais, além de uma versão atualizada do texto.

Organização. O capítulo 1 trata de conceitos básicos. Cada um dos outros capítulos aborda um problema clássico. Muitos desses problemas têm caráter computacional: procura-se um algoritmo eficiente que receba um grafo e extraia dele uma certa informação. Alguns dos problemas são fáceis, outros são difíceis; alguns já foram resolvidos, outros não.[1]

Em que ordem os capítulos devem ser examinados? Depois de estudar a primeira seção do capítulo 1, sugiro que o leitor avance imediatamente para o capítulo 2 e os seguintes, voltando ao capítulo 1 somente quando isso se fizer necessário. Há um bom índice remissivo que ajuda a localizar as definições dos vários conceitos.

[1] Para vários desses problemas não se conhece (ainda?) um algoritmo rápido, ou seja, não se conhece um algoritmo substancialmente melhor que examinar, pacientemente, uma enorme lista de candidatos a solução. Em termos técnicos, um problema desse tipo é NP-*completo* ou NP-*difícil*. Veja os livros de Garey–Johnson [GJ79], Harel [Har92] e Sipser [Sip97].

Classificação dos exercícios. A maioria dos exercícios tem um prefixo genérico **E**. Alguns têm prefixos mais específicos:

$\circ$ **E**	...	particularmente fácil ou rotineiro
! E	...	difícil
!! E	...	muito difícil
$\star$ **E**	...	importante
$\star$**! E**	...	importante e difícil
$\star\circ$ **E**	...	importante mas fácil
$\triangleright$ **E**	...	útil como ferramenta técnica
E $\heartsuit$	...	particularmente bom
D	...	desafio, problema em aberto

Mas esta classificação não é muito confiável e não foi feita de maneira muito sistemática.

Terminologia técnica em inglês. Boa parte da literatura da teoria dos grafos está escrita em inglês. Por isso, a definição de cada termo técnico em português é acompanhada, entre parênteses, do correspondente termo em inglês. O termo em inglês também é listado no índice remissivo.

O idioma inglês determinou a escolha de muitos símbolos. Assim, por exemplo, o conjunto das arestas (= *edges*) de um grafo é denotado por "E" e não por "A", como seria mais natural em português.

Agradecimentos. Agradeço a Rogério Brito por resolver várias dificuldades tipográficas.

IME–USP, São Paulo, julho de 2012
P. F.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Este capítulo formaliza a noção de grafo e introduz alguns conceitos básicos, como grau de vértice, corte, subgrafo, conexão, componente, ponte, articulação, união, interseção, complemento, menor, etc. O capítulo também introduz alguns tipos importantes de grafos, como

caminhos,
circuitos,
árvores,
grafos bipartidos,
grafos aresta-biconexos,
grafos biconexos,
grafos planares,
grafos de intervalos,
grafos aleatórios, etc.

Vários exemplos de grafos encontrados na natureza também são apresentados. É o caso

das grades,
dos cubos,
do grafo de Petersen,
dos grafos de diversas peças do jogo de xadrez,
dos grafos de compostos químicos, etc.

Estes exemplos serão úteis nos demais capítulos do texto.

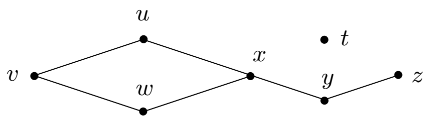
Sugiro que o leitor estude a primeira seção deste capítulo e logo avance para os capítulos seguintes (a começar pelo capítulo 2, que trata de isomorfismo). Quando necessário, o leitor poderá voltar a este capítulo 1 para aprender novos conceitos e rever definições. O índice remissivo pode ser muito útil nesse processo.

1.1 Grafos

Um **grafo** (= *graph*)[1] é uma estrutura formada por dois tipos de objetos: **vértices** (= *vertices*) e **arestas** (= *edges*). Cada aresta é um par não ordenado de vértices, ou seja, um conjunto com exatamente dois vértices.[2] Uma aresta

vw como $\{v, w\}$ será denota simplesmente por vw ou wv; diremos que a aresta **incide** em v e em w; diremos também que v e w são as **pontas** da aresta; diremos, ainda, que os vértices v e w são **vizinhos** (= *neighbors*), ou **adjacentes** (= *adjacent*).

> EXEMPLO: os vértices do grafo são t, u, v, w, x, y, z e as arestas são vw, uv, xw, xu, xy e yz. A figura abaixo é uma representação gráfica desse grafo.



De acordo com nossa definição, um grafo não pode ter duas arestas diferentes com o mesmo par de pontas (ou seja, não pode ter arestas "paralelas"). Além disso, as duas pontas de qualquer aresta são diferentes (ou seja, não há "laços"). Alguns livros gostam de enfatizar esse aspecto da definição dizendo

simples que o grafo é "simples"; nós não usaremos este adjetivo.

Um grafo com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E é denotado

(V, E) por (V, E). Muitas vezes é conveniente dar um nome ao grafo como um todo.

V_G, E_G Se o nome do grafo é G, o conjunto dos seus vértices é denotado por V_G e o

$n(G)$ conjunto das suas arestas por E_G. O número de vértices de G é denotado por

$m(G)$ $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$; portanto,

$$n(G) := |V_G| \quad \text{e} \quad m(G) := |E_G| \,.$$

$V^{(2)}$ O **complemento** de um grafo (V, E) é o grafo $(V, V^{(2)} \smallsetminus E)$, onde $V^{(2)}$ é o conjunto de todos os pares não ordenados[3] de elementos de V. O

$\overline{G}$ complemento de G é usualmente denotado por $\overline{G}$.

K_n Um grafo G é **completo** se $E_G = V_G^{(2)}$. A expressão "G é um K_n" é uma abreviatura de "G é um grafo completo com n vértices". Um grafo G é **vazio**

$\overline{K_n}$ se $E_G = \emptyset$. A expressão "G é um $\overline{K_n}$" é uma abreviatura de "G é um grafo vazio com n vértices".

---

[1] O termo foi usado pela primeira vez (no sentido que nos interessa aqui) por James Joseph Sylvester (1814 – 1897). (Veja verbete na Wikipedia.)

[2] Suporemos sempre que os conjuntos de vértices e de arestas de qualquer grafo são finitos e mutuamente disjuntos. Suporemos também que o conjunto de vértices não é vazio.

[3] Diestel [Die05] escreve "$[V]^2$". Há quem escreva "$\binom{V}{2}$".

Exercícios

E 1.1 Faça uma lista de todos os grafos que tenham $\{a, b, c\}$ por conjunto de vértices.[4] Faça a lista de modo que cada grafo apareça ao lado do seu complemento.

E 1.2 Faça uma figura de um K_5 e outra de um $\overline{K_5}$. Quantas arestas tem um K_n? E um $\overline{K_n}$?

E 1.3 A **matriz de adjacências** de um grafo G é a matriz A definida da seguinte maneira: para quaisquer dois vértices u e v, matriz de adjacências

$$A[u, v] \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } uv \in E_G\,, \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que a matriz é indexada por $V_G \times V_G$. (A matriz de adjacência é uma espécie de "figura" do grafo. Ela tem certas vantagens sobre a figura pontos-e-linhas que usamos acima.)

Escreva a matriz de adjacências do grafo definido no exemplo que aparece na página 8. Escreva a matriz de adjacências de um K_4. Qual a relação entre a matriz de adjacências de um grafo e matriz de adjacências do seu complemento?

E 1.4 A **matriz de incidências** de um grafo G é a matriz M definida da seguinte maneira: para todo vértice u e toda aresta e, matriz de incidências

$$M[u, e] \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ é uma das pontas de } e\,, \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que a matriz é indexada por $V_G \times E_G$. (A matriz de incidência é uma espécie de "figura" do grafo. Ela tem certas vantagens sobre a figura pontos-e-linhas que usamos acima.)

Escreva a matriz de incidências do grafo definido no exemplo que aparece na página 8. Escreva a matriz de incidências de um K_4. Quanto vale a soma de todos os elementos da matriz de incidências de um grafo? Qual a relação entre a matriz de incidências de um grafo e matriz de incidências do seu complemento?

E 1.5 Os hidrocarbonetos conhecidos como alcanos têm fórmula química C_pH_{2p+2}, onde C e H representam moléculas de carbono e hidrogênio respectivamente. As moléculas de alcanos podem ser representadas por grafos como os da figura 1.1. alcanos

[4] Num conjunto, a ordem em que os elementos são apresentados é irrelevante. Assim, $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{c, b, a\}$.

Faça uma figura de uma molécula de metano C_1H_4. Quantas moléculas "diferentes" de C_3H_8 existem?

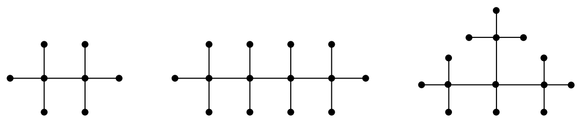


Figura 1.1: Etano (C_2H_6), butano (C_4H_{10}) e isobutano (C_4H_{10}). Os vértices em que incide uma só aresta representam átomos de hidrogênio (H); os demais representam átomos de carbono (C). (Veja o exercício 1.5.)

E 1.6 Seja V o produto cartesiano $\{1, 2, \ldots, p\} \times \{1, 2, \ldots, q\}$, isto é, o conjunto de todos os pares ordenados[5] (i, j) com i em $\{1, \ldots, p\}$ e j em $\{1, \ldots, q\}$. Digamos que dois elementos (i, j) e (i', j') de V são adjacentes se

$$i = i' \text{ e } |j - j'| = 1 \qquad \text{ou} \qquad j = j' \text{ e } |i - i'| = 1\,.$$

Essa relação de adjacência define um grafo sobre o conjunto V de vértices.
grade Esse grafo é conhecido como **grade** (= *grid*) p**-por-**q.

Quantas arestas tem a grade p-por-q? Escreva as matrizes de adjacência e incidência de uma grade 4-por-5.

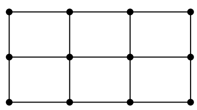


Figura 1.2: Uma grade 3-por-4 (veja exercício 1.6).

E 1.7 Dados números inteiros p e q, seja V o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, pq-2, pq-1, pq\}$. Digamos que dois elementos k e k' de V, com $k < k'$, são adjacentes se $k' = k + q$ ou[6]

$$k \bmod q \neq 0 \ \text{ e } \ k' = k + 1.$$

Essa relação de adjacência define um grafo com conjunto de vértices V.

Faça uma figura do grafo com parâmetros $p = 3$ e $q = 4$. Faça uma figura do grafo com parâmetros $p = 4$ e $q = 3$. Qual a relação entre esses grafos e a grade definida no exercício 1.6?

dama **E 1.8** O grafo **dos movimentos da dama**, ou simplesmente grafo **da dama**, é

[5] Um par ordenado é uma sequência de comprimento 2. Numa sequência, a *ordem* dos elementos é essencial. Assim, $(1, 2) \neq (2, 1)$ e $(1, 2, 1) \neq (1, 1, 2)$.

[6] A expressão "$k \bmod q$" denota o resto da divisão de k por q, ou seja, $k/q - \lfloor k/q \rfloor$.

definido assim: os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez com t linhas e t colunas (no tabuleiro usual temos $t = 8$) e dois vértices são adjacentes se uma dama (= *queen*) do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento. Para deixar claro o número de linhas e colunas do tabuleiro, podemos dizer que esse é o grafo da dama t**-por-**t. (Veja figura 1.3.)

Faça uma figura do grafo da dama 4-por-4. Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo da dama 4-por-4. Quantas arestas tem o grafo da dama 8-por-8? Quantas arestas tem o grafo da dama t-por-t?

E 1.9 O grafo **do cavalo** t-por-t é definido assim: os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez com t linhas e t colunas; dois vértices são adjacentes se um cavalo (= *knight*) do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento. (Veja figura 1.3.) cavalo

Faça uma figura do grafo do cavalo 3-por-3. Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo do cavalo 3-por-3. Quantas arestas tem o grafo do cavalo 8-por-8? Quantas arestas tem o grafo do cavalo t-por-t?

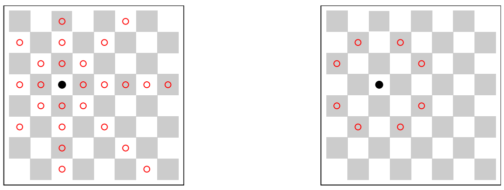


Figura 1.3: Tabuleiros de xadrez 8-por-8. A figura esquerda indica todos os vizinhos do vértice • no grafo da dama (veja exercício 1.8). A da direita indica todos os vizinhos do vértice • no grafo do cavalo (veja exercício 1.9).

E 1.10 O grafo **do bispo** t-por-t é definido assim: os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez com t linhas e t colunas; dois vértices são adjacentes se um bispo (= *bishop*) do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento. bispo

Faça uma figura do grafo do bispo 4-por-4. Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo do bispo 4-por-4. Quantas arestas tem o grafo do bispo 8-por-8? Quantas arestas tem o grafo do bispo t-por-t?

E 1.11 O grafo **da torre** t-por-t é definido assim: os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez com t linhas e t colunas; dois vértices são adjacentes se um torre (= *rook*) do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento. torre

Faça uma figura do grafo da torre 4-por-4. Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo da torre 4-por-4. Quantas arestas tem o grafo da torre 8-por-8? Quantas arestas tem o grafo da torre t-por-t?

rei **E 1.12** O grafo **do rei** t-por-t é definido assim: os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez com t linhas e t colunas; dois vértices são adjacentes se um rei (= *king*) do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento.

Faça uma figura do grafo do rei 4-por-4. Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo do rei 4-por-4. Quantas arestas tem o grafo do rei 8-por-8? Quantas arestas tem o grafo do rei t-por-t?

palavras **E 1.13** O grafo **das palavras** é definido assim: cada vértices é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. (Esse grafo é uma adaptação do `ladders` do *Stanford GraphBase* [Knu93].) Por exemplo, `rato` e `ralo` são adjacentes, enquanto `ralo` e `rota` não são. Faça uma figura da parte do grafo definida pelas palavras abaixo:

```
caiado cavado cavalo girafa girava ralo ramo rata rato
remo reta reto rota vaiado varado virada virado virava
```

Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo.

cubo **E 1.14** Para qualquer inteiro positivo k, um **cubo** de dimensão k (ou k-**cubo**) é o grafo definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são todas as sequências[7] $b_1 b_2 \cdots b_k$ de bits[8]; dois vértices são adjacentes se e somente se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, os vértices do cubo de dimensão 3 são 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111; o vértice 000 é adjacente aos vértices 001, 010, 100 e a nenhum outro; e assim por diante. O cubo de
Q_k dimensão k será denotado por Q_k.

Faça figuras dos cubos Q_1, Q_2 e Q_3. Escreva as matrizes de adjacência e incidência de Q_3. Quantos vértices tem Q_k? Quantas arestas tem Q_k?

E 1.15 Seja X o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e V o conjunto $X^{(2)}$ (portanto, V é o conjunto de todos os subconjuntos de X que têm exatamente 2 elementos). Digamos que dois elementos v e w de V são adjacentes se $v \cap w = \emptyset$. Essa
Petersen relação de adjacência sobre V define o grafo **de Petersen**.[9] Faça uma figura do grafo. Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo. Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo?

E 1.16 Seja V o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que têm exatamente k elementos, sendo $k \leq n/2$. Digamos que dois elementos v e w de V são adjacentes se $v \cap w = \emptyset$. Essa relação de adjacência sobre V define o
Kneser grafo **de Kneser** $K(n, k)$.[10] Em particular, $K(5, 2)$ é o grafo de Petersen. Faça

[7] A expressão "$b_1 b_2 \cdots b_k$" é uma abreviatura de "$(b_1, b_2, \ldots, b_k)$".
[8] Portanto, cada b_i pertence ao conjunto $\{0, 1\}$.
[9] Referência ao dinamarquês Julius Petersen (1839 – 1910). (Veja verbete na Wikipedia.)

figuras de $K(n,1)$, $K(n,n)$, $K(n,n-1)$, $K(4,2)$, $K(5,3)$, $K(6,2)$ e $K(6,3)$.

E 1.17 O grafo dos estados do Brasil é definido assim: cada vértice é um dos estados da República Federativa do Brasil; dois estados são adjacentes se têm uma fronteira comum. Faça um desenho do grafo. Quantos vértices tem o grafo? Quantas arestas? estados

E 1.18 Considere as grandes cidades e as grandes estradas do estado de São Paulo. Digamos que uma cidade é *grande* se tem pelo menos 300 mil habitantes. Digamos que uma estrada é *grande* se tiver pista dupla (como a SP300, por exemplo). Digamos que duas grandes cidades são adjacentes se uma grande estrada ou uma concatenação de grandes estradas liga as duas cidades diretamente (ou seja, sem passar por uma terceira grande cidade). Faça uma figura do grafo das grandes cidades definido pela relação de adjacência que acabamos de descrever. cidades

E 1.19 Seja V um conjunto de pontos no plano. Digamos que dois desses pontos são adjacentes se a distância entre eles é menor que 2. Essa relação de adjacência define o grafo **dos pontos no plano** (sobre o conjunto V). Faça uma figura do grafo definido pelos pontos abaixo. pontos no plano

$$\begin{array}{ccc} (0,2) & (1,2) & (2,2) \\ (0,1) & (1,1) & (2,1) \\ (0,0) & (1,0) & (2,0) \end{array}$$

Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo.

E 1.20 Dado um conjunto V, seja E o conjunto definido da seguinte maneira: para cada par não ordenado de elementos de V, jogue uma moeda; se o resultado for cara, acrescente o par a E. O grafo (V,E) assim definido é **aleatório** (= *random*). aleatório

Pegue sua moeda favorita e faça uma figura do grafo aleatório com vértices $1,\ldots,6$. Agora repita o exercício com uma moeda viciada que dá cara com probabilidade $1/3$ e coroa com probabilidade $2/3$.

E 1.21 Seja S uma matriz de números inteiros. Suponha que as linhas de S são indexadas por um conjunto V e que as colunas são indexadas pelo mesmo conjunto V. O grafo **da matriz** S é definido da seguinte maneira: o conjunto de vértices do grafo é V e dois vértices i e j são adjacentes se $S[i,j] \neq 0$. matriz

O grafo de S está bem definido? Que condições é preciso impor sobre a matriz para que o grafo esteja bem definido?

[10] Lásló Lovász usou esse grafo em 1978 para provar uma conjectura proposta por M. Kneser em 1955.

E 1.22 Suponha dados k intervalos de comprimento finito, digamos I_1, I_2, …, I_k, na reta real. Digamos que dois intervalos I_i e I_j são adjacentes se $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Essa relação de adjacência define um grafo com conjunto de vértices $\{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$. Esse é um grafo **de intervalos**.

intervalos

Faça uma figura do grafo definido pelos intervalos $[0, 2]$, $[1, 4]$, $[3, 6]$, $[5, 6]$ e $[1, 6]$. Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo.

E 1.23 Seja $\preceq$ uma relação de ordem parcial sobre um conjunto finito V. Portanto, a relação é transitiva (se $x \preceq y$ e $y \preceq z$ então $x \preceq z$), antissimétrica (se $x \preceq y$ e $y \preceq x$ então $x = y$) e reflexiva ($x \preceq x$ para todo x). Digamos que dois elementos distintos x e y de V são adjacentes se forem comparáveis, ou seja, se $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Essa relação de adjacência define o grafo **de comparabilidade** da relação $\preceq$.

comparabilidade

Faça uma figura do grafo de comparabilidade da relação usual de inclusão $\subseteq$ entre os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$.

E 1.24 Duas arestas de um grafo G são **adjacentes** se têm uma ponta comum. Essa relação de adjacência define o grafo das arestas de G. De modo mais formal, o **grafo das arestas** (= *line graph*) de um grafo G é o grafo (E_G, A) em que A é o conjunto de todos os pares de arestas adjacentes de G. (Há quem diga [Per09] **grafo lineal** no lugar de *grafo das arestas*.) O grafo das arestas de G será denotado por $L(G)$. (Veja a figura 1.4.)

das arestas

$L(G)$

Faça uma figura de $L(K_3)$. Faça uma figura de $L(K_4)$. Escreva as matrizes de adjacência e incidência de $L(K_4)$. Quantos vértices e quantas arestas tem $L(K_n)$? Faça uma figura do grafo $L(P)$, sendo P o grafo de Petersen (veja exercício 1.15).

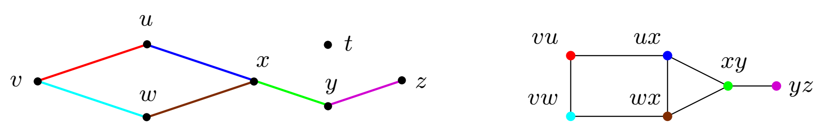


Figura 1.4: Um grafo (esquerda) e o seu grafo das arestas (direita).

1.2 Grafos bipartidos

Um grafo G é **bipartido** (= *bipartite*) se existe uma bipartição[11] $\{U, W\}$ de V_G tal que toda aresta de G tem uma ponta em U e outra em W. Para explicitar a partição, podemos dizer que o grafo é $\{U, W\}$-bipartido.

Se G é um grafo $\{U, W\}$-bipartido, podemos dizer, informalmente, que os elementos de U são os **vértices brancos** e os de W são os **vértices pretos** do grafo.

Um grafo $\{U, W\}$-bipartido é **completo** se todo vértice branco é adjacente a todos os vértices pretos. Um $K_{p,q}$ é um grafo bipartido completo com p vértices breancos e q pretos. $K_{p,q}$

Todo $K_{1,q}$ é uma **estrela** (= *star*). Se $q \geq 2$, o **centro** da estrela é o único vértice que incide em duas ou mais arestas. (Se $q < 2$, a estrela não tem centro.) estrela

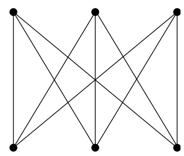


Figura 1.5: Um grafo bipartido completo.

Exercícios

∘ **E 1.25** Uma pequena fábrica tem cinco máquinas — 1, 2, 3, 4 e 5 — e seis operários — A, B, C, D, E e F. A tabela especifica as máquinas que cada operário sabe operar:

A	$2, 3$	B	$1, 2, 3, 4, 5$
C	3	D	
E	$2, 4, 5$	F	$2, 5$

Faça uma figura do grafo bipartido que representa a relação entre operários e máquinas.

∘ **E 1.26** Quantas arestas pode ter um grafo $\{U, W\}$-bipartido?

[11] Uma **bipartição** de um conjunto V é um par $\{U, W\}$ de conjuntos não vazios tal que $U \cup W = V$ e $U \cap W = \emptyset$. De modo mais geral, uma **partição** de um conjunto V é uma coleção $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ de conjuntos não vazios, disjuntos dois a dois (ou seja, $X_i \cap X_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$), cuja união é V (ou seja, $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k = V$). Não faz sentido dizer "X_1 é *uma das partições* de V"; isso equivale a confundir boi com boiada ou terno com paletó. Diga "X_1 é um dos elementos da partição" ou "X_1 é uma das partes da partição".

∘ **E 1.27** Quantas arestas tem um $K_{p,q}$? Quantas arestas tem um $\overline{K_{p,q}}$?

E 1.28 Faça uma figura de um $K_{3,4}$. Escreva as matrizes de adjacência e incidência de um $K_{3,4}$. Faça uma figura de uma estrela com 6 vértices.

E 1.29 É verdade que o grafo do cavalo no tabuleiro t-por-t é bipartido?

E 1.30 Que aparência tem a matriz de adjacências de um grafo bipartido?

E 1.31 A **matriz da bipartição** de um grafo $\{U, W\}$-bipartido é definida assim: cada linha da matriz é um elemento de U, cada coluna da matriz é um elemento de W e no cruzamento da linha u com a coluna w temos um 1 se uw é uma aresta e temos um 0 em caso contrário.

Escreva a matriz da bipartição do grafo do exercício 1.25. Adote a bipartição óbvia: $U = \{A, \ldots, F\}$ e $W = \{1, \ldots, 5\}$.

1.3 Vizinhanças e graus de vértices

A **vizinhança** (= *neighborhood*) **de um vértice** v em um grafo G é o conjunto de todos os vizinhos de v. Este conjunto será denotado por

$$\mathrm{N}_G(v)$$

ou simplesmente por $\mathrm{N}(v)$.[12] O **grau** (= *degree*) de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v. O grau de v será denotado por $\mathrm{N}(v)$

$$\mathrm{d}_G(v)$$

ou simplesmente por $\mathrm{d}(v)$. É evidente que $\mathrm{d}(v) = |\mathrm{N}(v)|$ para todo vértice v. Um vértice v é **isolado** se $\mathrm{d}(v) = 0$. $\mathrm{d}(v)$

O **grau mínimo** e o **grau máximo** dos vértices de um grafo[13] G são os números $\delta(G)$

$$\delta(G) := \min_{v \in V_G} \mathrm{d}_G(v) \quad \text{e} \quad \Delta(G) := \max_{v \in V_G} \mathrm{d}_G(v)$$ $\Delta(G)$

respectivamente. A média dos graus de G, ou seja, $\frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v)$, será denotada por $\mu(G)$.[14] Como veremos no exercício 1.43, $\mu(G)$

$$\mu(G) = 2m(G)/n(G)\ .$$

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, se $\delta = \Delta$. Um grafo é r-**regular** se $\mathrm{d}(v) = r$ para todo vértice v. Um grafo **cúbico** é o mesmo que um grafo 3-regular.

Exercícios

◦ **E 1.32** Quais são os graus dos vértices de uma estrela (veja a seção 1.2)?

◦ **E 1.33** Se G é um K_n, quanto valem $\delta(G)$ e $\Delta(G)$? Quanto valem os parâmetros δ e Δ de um $K_{p,q}$ (veja a seção 1.2)?

◦ **E 1.34** Para $r = 1, 2, 3$, faça uma figura de um grafo r-regular com 12 vértices.

E 1.35 Quais são os graus dos vértices de uma molécula de alcano (veja exercício 1.5)?

---

[12] Alguns autores escrevem "$Adj(v)$" em lugar de "$\mathrm{N}(v)$". Outros escrevem "$\Gamma(v)$".

[13] A expressão "grau mínimo de um grafo" não é muito gramatical, uma vez que "grau de um grafo" não faz sentido.

[14] Ao contrário de δ e Δ, a notação μ não é uma unanimidade. Diestel [Die05] e Bondy e Murty [BM08], por exemplo, escrevem d no lugar do meu μ.

E 1.36 Calcule os valores dos parâmetros δ, Δ e μ no k-cubo (veja exercício 1.14) e no grafo de Petersen (veja exercício 1.15 ou figura 1.6).

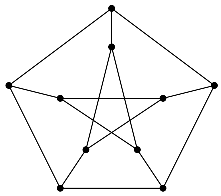


Figura 1.6: Grafo de Petersen. Veja exercícios 1.15 e 1.36.

E 1.37 Calcule os valores dos parâmetros δ e Δ no grafo dos estados do Brasil (veja exercício 1.17).

E 1.38 Calcule os valores dos parâmetros δ, Δ e μ no grafo da dama (veja exercício 1.8) e no grafo do cavalo (veja exercício 1.9).

E 1.39 Seja A a matriz de adjacências (veja exercício 1.3) e M a matriz de incidências (veja exercício 1.4) de um grafo G. Quanto vale a soma dos elementos da linha v de A? Quanto vale a soma dos elementos da linha v de M?

▷ **E 1.40** Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Suponha que G é r-regular, com $r > 0$. Mostre que $|U| = |W|$.

E 1.41 É verdade que todo grafo com pelo menos dois vértices tem dois vértices com o mesmo número de vizinhos? Em outras palavras, se um grafo tem mais de um vértice, é verdade que tem dois vértices distintos v e w tais que $|\mathrm{N}(v)| = |\mathrm{N}(w)|$? (Uma maneira informal de dizer isso: é verdade que em toda cidade com pelo menos dois habitantes residem duas pessoas que têm exatamente o mesmo número de amigos na cidade?)

⋆ **E 1.42** Mostre[15] que, em todo grafo, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas. Ou seja, todo grafo (V, E) satisfaz a identidade

$$\textstyle\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) \;=\; 2|E|\,. \tag{1.1}$$

∘ **E 1.43** Mostre que a $\mu(G) = 2m(G)/n(G)$ para todo grafo G.

15 Mostre = prove.

∘ **E 1.44** Mostre que todo grafo G tem um vértice v tal que $\mathrm{d}(v) \leq 2m(G)/n(G)$ e um vértice w tal que $\mathrm{d}(w) \geq 2m(G)/n(G)$. É verdade que todo grafo G tem um vértice x tal que $\mathrm{d}(x) < 2m(G)/n(G)$?

E 1.45 Mostre que em qualquer grafo tem-se $\delta \leq 2m/n \leq \Delta$.

E 1.46 Mostre que todo grafo com n vértices tem no máximo $n(n-1)/2$ arestas.

▷ **E 1.47** Mostre que em qualquer grafo o número de vértices de grau ímpar é necessariamente par.

E 1.48 Quantas arestas tem o grafo da dama 8-por-8 (veja exercício 1.8)? Quantas arestas tem o grafo da dama t-por-t?

E 1.49 Quantas arestas tem o grafo do cavalo 4-por-4 (veja exercício 1.9)? Quantas arestas tem o grafo do cavalo t-por-t?

E 1.50 Quantas arestas tem um grafo r-regular com n vértices?

E 1.51 Quantas arestas tem o cubo de dimensão k?

E 1.52 Quantas arestas tem o grafo das arestas (veja exercício 1.24) de um grafo G?

E 1.53 Seja $\overline{G}$ o complemento de um grafo G. Calcule $\delta(\overline{G})$ e $\Delta(\overline{G})$ em função de $\delta(G)$ e $\Delta(G)$.

E 1.54 Seja G um grafo tal que $m(G) > n(G)$. Mostre que $\Delta(G) \geq 3$.

E 1.55 Suponha que um grafo G tem menos arestas que vértices, ou seja, que $m(G) < n(G)$. Mostre que G tem (pelo menos) um vértice de grau 0 ou (pelo menos) dois vértices de grau 1.

! E 1.56 Escolha dois números naturais n e k e considere o seguinte jogo para dois jogadores, A e B. Cada iteração do jogo começa com um grafo G que tem n vértices (no início da primeira iteração tem-se $E_G = \emptyset$). Em cada iteração ímpar (primeira, terceira, etc.), o jogador A escolhe dois vértices não adjacentes u e v e acrescenta uv ao conjunto de arestas do grafo. Em cada iteração par (segunda, quarta, etc.), o jogador B faz um movimento análogo: escolhe dois vértices não adjacentes u e v e acrescenta uv ao conjunto de arestas do grafo. O primeiro jogador a produzir um grafo G tal que $\delta(G) \geq k$

perde o jogo. Problema: determinar uma estratégia vencedora para A e uma estratégia vencedora para B.

1.4 Caminhos e circuitos

Esta seção introduz dois tipos muito simples mas muito importantes de grafos: os caminhos e os circuitos.[16]

Um grafo G é um **caminho** (= *path*) se V_G admite uma permutação[17] $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\}\ .$$

Os vértices v_1 e v_n são os **extremos** do caminho; os demais vértices são **internos**.[18] Diremos que esse caminho **liga** v_1 **a** v_n.

O caminho que acabamos de descrever pode ser denotado simplesmente por $v_1 v_2 \cdots v_n$. Por exemplo, se dissermos "o caminho $xywz$" estaremos nos referindo ao grafo cujos vértices são x, y, w, z e cujas arestas são xy, yw e wz. $v_1 v_2 \cdots v_n$

Um grafo G é um **circuito** (= *circuit* = *polygon*)[19] se V_G tem 3 ou mais elementos e admite uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\}\ .$$

Este circuito pode ser denotado simplesmente por $v_1 v_2 \cdots v_n v_1$. Assim, se dissermos "o circuito $xywzx$", estaremos nos referindo ao grafo cujos vértices são x, y, w, z e cujas arestas são xy, yw, wz e zx. $v_1 v_2 \cdots v_n v_1$

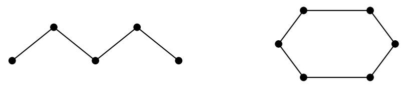


Figura 1.7: Um caminho e um circuito.

O **comprimento** de um caminho[20] ou circuito G é o número $m(G)$. É claro que um caminho de comprimento m tem $m + 1$ vértices e um circuito comprimento m tem m vértices.

Um **triângulo**, **quadrado**, **pentágono** e **hexágono** é o mesmo que um circuito de comprimento 3, 4, 5 e 6 respectivamente.

---

[16] Convém insistir que, para nós, caminhos e circuitos são grafos. Em alguns livros, caminhos e circuitos são tratados como sequências de vértices e não como grafos.

[17] Uma *permutação* de um conjunto X é uma sequência em que cada elemento de X aparece uma e uma só vez.

[18] Alguns autores [Per09] dizem que um caminho só é caminho se tiver 2 ou mais vértices. Para nós, entretanto, o grafo $(\{v\}, \emptyset)$ é um caminho. Esse detalhe não é tão irrelevante quanto pode parecer.

[19] Alguns autores dizem "ciclo" (= *cycle*) no lugar de "circuito".

[20] A expressão "*tamanho* de um caminho" é ambígua: não se sabe se estamos falando do número de vértices ou do número de arestas do caminho.

Exercícios

◦ **E 1.57** Faça uma figura de um caminho de comprimento 0, de um caminho de comprimento 1 e de um caminho de comprimento 2. Faça uma figura de um circuito de comprimento 3 e de um circuito de comprimento 4. Por que a definição de circuito tem a restrição "$n \geq 3$"?

◦ **E 1.58** Seja V o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ e E o conjunto $\{de, bc, ca, be\}$. Verifique que o grafo (V, E) é um caminho. Agora suponha que F é o conjunto $\{bc, bd, ea, ed, ac\}$ e verifique que o grafo (V, F) é um circuito.

◦ **E 1.59** Faça um figura do caminho $1\,2\,4\,3\,5$. Faça um figura do caminho $1\,3\,2\,4\,3\,5$. Faça um figura do circuito $1\,2\,4\,3\,5\,1$.

◦ **E 1.60** Verifique que o caminho $u\,v\,w\,x\,y\,z$ também pode ser denotado por $z\,y\,x\,w\,v\,u$. Verifique que essas duas expressões representam *o mesmo* caminho.

◦ **E 1.61** Considere o circuito $u\,v\,w\,x\,y\,z\,u$. Mostre que $z\,y\,x\,w\,v\,u\,z$ também é um circuito. Mostre que qualquer permutação cíclica — como $w\,x\,y\,z\,u\,v\,w$, por exemplo — também é um circuito. Mostre que todas essas expressões representam *o mesmo* circuito.

◦ **E 1.62** Exiba as matrizes de adjacências e incidências de um caminho de comprimento 4. Exiba as matrizes de adjacências e incidências de um circuito de comprimento 5.

◦ **E 1.63** É verdade que o grafo do cavalo 3-por-3 é um circuito?

◦ **E 1.64** Verifique que a grade 1-por-n é um caminho de comprimento $n - 1$. Quais grades são circuitos?

◦ **E 1.65** Suponha que P é um caminho de comprimento $n-1$ e O um circuito de comprimento n. Quanto valem $\delta(P)$, $\Delta(P)$, $\delta(O)$ e $\Delta(O)$?

◦ **E 1.66** Faça uma figura do complemento de um caminho de comprimento 3. Faça uma figura do complemento de um caminho de comprimento 4. Faça uma figura do complemento de um circuito de comprimento 5. Faça uma figura do complemento de um circuito de comprimento 6.

E 1.67 Quantos caminhos diferentes existem com conjunto de vértices $\{1, 2, 3\}$? Quantos circuitos diferentes existem com conjunto de vértices $\{1, 2, 3\}$? Quantos circuitos diferentes existem com conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 4\}$?

E 1.68 É verdade que todo grafo 2-regular é um circuito?

E 1.69 Seja G um grafo com $n(G) \geq 3$, $\Delta(G) = 2$ e $\delta(G) = 1$. Se G tem exatamente dois vértices de grau 1, é verdade que G é um caminho?

1.5 União e interseção de grafos

A **união** de dois grafos G e H é o grafo $(V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$. É natural denotar
$G \cup H$ esse grafo por $G \cup H$.

A **interseção** de dois grafos G e H é o grafo $(V_G \cap V_H, E_G \cap E_H)$. É natural
$G \cap H$ denotar esse grafo por $G \cap H$. Para evitar grafos sem vértices, só trataremos da interação $G \cap H$ se $V_G \cap V_H$ não for vazio.

Dois grafos G e H são **disjuntos** se os conjuntos V_G e V_H são disjuntos, ou seja, se $V_G \cap V_H = \emptyset$. É evidente que E_G e E_H também são disjuntos nesse caso.

Exercícios

○ **E 1.70** Seja G um grafo completo com conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e H um grafo completo com conjunto de vértices $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Faça figuras dos grafos $G \cup H$ e $G \cap H$.

E 1.71 Seja G o grafo do bispo e H o grafo da torre (veja exercícios 1.10 e 1.11). Mostre que $G \cup H$ é o grafo da dama.

○ **E 1.72** Seja G o circuito $1\,2\,3\,4\,5\,6\,1$ e H o caminho $4\,7\,8\,5$. Faça figuras dos grafos $G \cup H$ e $G \cap H$.

E 1.73 Seja P um caminho com extremos u a v e Q um caminho com extremos v e w. Mostre que se $V_P \cap V_Q = \{v\}$ então o grafo $P \cup Q$ é um caminho.

E 1.74 Suponha que os caminhos P e Q têm os mesmos extremos, digamos u e v. Suponha ainda que $V_P \cap V_Q = \{u, v\}$. Em que condições o grafo $P \cup Q$ é um circuito?

E 1.75 Sejam A, B e C os conjuntos $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7\}$ e $\{9, 10, 11\}$. Seja G o grafo $\{A, B\}$-bipartido completo. Seja H o grafo $\{B, C\}$-bipartido completo. Faça figuras dos grafos $G \cup H$ e $G \cap H$.

E 1.76 Uma **roda** (= *wheel*) é qualquer grafo da forma $G \cup H$, onde G é um circuito e H é uma estrela (veja a seção 1.2) com centro v tal que $V_H \setminus \{v\} = V_G$. Faça figuras de rodas com 4, 5 e 6 vértices. Quanto valem os parâmetros m, δ e Δ de uma roda com n vértices?

1.6 Grafos planares

Um grafo é **planar** se pode ser desenhado no plano sem que as linhas que representam arestas se cruzem. Esta definição é imprecisa, mas suficiente por enquanto. Daremos um definição melhor na seção 1.17.

Exercícios

○ **E 1.77** Verifique que todo caminho é planar. Verifique que todo circuito é planar.

○ **E 1.78** Mostre que toda grade (veja exercício 1.6) é planar.

E 1.79 Mostre que o grafo dos estados do Brasil (veja exercício 1.17) é planar.

E 1.80 O grafo dos pontos no plano descrito no exercício 1.19 é planar?

E 1.81 Mostre que todo K_4 é planar. É verdade que todo K_5 é planar?

E 1.82 Mostre que todo $K_{2,3}$ é planar. É verdade que todo $K_{3,3}$ é planar?

E 1.83 Mostre que o grafo Q_3 (veja exercício 1.14) é planar. O grafo Q_4 também é planar? O grafo Q_5 é planar?

E 1.84 O grafo do bispo t-por-t (veja exercício 1.10) é planar?

E 1.85 O grafo da dama t-por-t (veja exercício 1.8) é planar? O grafo do cavalo t-por-t (veja exercício 1.9) é planar?

E 1.86 Mostre que o complemento de um circuito de comprimento 6 é planar.

1.7 Subgrafos

Um **subgrafo** de um grafo G é qualquer grafo H tal que $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$.
$H \subseteq G$ É conveniente escrever "$H \subseteq G$" para dizer que H é subgrafo de G.

Um subgrafo H de G é **gerador** (= *spanning*) se $V_H = V_G$. (Há quem diga *abrangente* no lugar de *gerador* [Per09].)

Um subgrafo H de G é **próprio** se $V_H \neq V_G$ ou $E_H \neq E_G$. Às vezes é
$H \subset G$ conveniente escrever "$H \subset G$" para dizer que H é subgrafo próprio de G.[21]

O subgrafo de G **induzido** por um subconjunto X de V_G é o grafo (X, F)
$G[X]$ onde F é o conjunto $E_G \cap X^{(2)}$. Esse subgrafo é denotado por

$$G[X]\,.$$

$G - X$ Para qualquer subconjunto X de V_G, denotaremos por $G - X$ o subgrafo $G[V_G \setminus X]$. Em particular, para qualquer vértice v,

$$G - v$$

é uma abreviatura de $G - \{v\}$. Para qualquer aresta e de G,

$$G - e$$

é o grafo $(V_G, E_G \setminus \{e\})$. De modo mais geral, se A é um subconjunto de E_G
$G - A$ então $G - A$ é o grafo $(V_G, E_G \setminus A)$. É claro que $G - A$ é um subgrafo gerador de G.

Exercícios

◦ **E 1.87** Suponha que H é um subgrafo de G. Se $V_H = V_G$, é verdade que $H = G$? Se $E_H = E_G$, é verdade que $H = G$?

◦ **E 1.88** Seja G um grafo, V' um subconjunto de V_G e E' um subconjunto de E_G. É verdade que (V', E') é um subgrafo de G?

E 1.89 Repita o exercício 1.42: *Use indução[22] no número de arestas do grafo para provar que todo grafo (V, E) satisfaz a identidade*

$$\textstyle\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) \;=\; 2|E|\,.$$

◦ **E 1.90** Seja v um vértice e e uma aresta de um circuito O. Mostre que o grafo $O - v$ é um caminho. Mostre que o grafo $O - e$ é um caminho.

[21] De modo geral, escreveremos "$X \subset Y$" ou "$Y \supset X$" para dizer que o conjunto X é subconjunto próprio de Y, ou seja, que $X \subseteq Y$ mas $X \neq Y$.
[22] Indução é a arte de reduzir um problema a uma versão menor dele mesmo.

E 1.91 Mostre que todo subgrafo de um grafo planar é planar. Em outras palavras, se um grafo G tem um subgrafo não planar então G não é planar.

E 1.92 Sejam v e w dois vértices de um grafo G. Suponha que $\mathrm{d}(v) = \delta(G)$ e $\mathrm{d}(w) = \Delta(G)$. É verdade que $\delta(G - v) = \delta(G) - 1$? É verdade que $\Delta(G - w) = \Delta(G) - 1$?

◦ **E 1.93** Verifique que o grafo do bispo t-por-t é um subgrafo do grafo da dama t-por-t. Verifique que o grafo da torre t-por-t é um subgrafo do grafo da dama t-por-t.

E 1.94 O grafo Q_3 é subgrafo de Q_4?

◦ **E 1.95** Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Mostre que os subgrafos induzidos $G[U]$ e $G[W]$ são vazios.

◦ **E 1.96** Mostre que todo subgrafo induzido de um grafo completo é completo. É verdade que todo subgrafo induzido de um caminho é um caminho? É verdade que todo subgrafo induzido de um circuito é um caminho?

◦ **E 1.97** Seja G o grafo representado na figura 1.8 e X o conjunto $\{a, b, f, e, g, l\}$. Faça uma figura de $G[X]$.

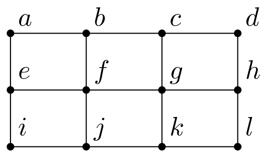


Figura 1.8: Veja exercícios 1.97, 1.116 e 1.117.

E 1.98 ♡ Seja H o grafo das arestas (veja exercício 1.24) de um grafo G (portanto, $H = L(G)$). Mostre que H não contém $K_{1,3}$ como subgrafo induzido, ou seja, mostre que não existe subconjunto X de V_H tal que $H[X]$ é um $K_{1,3}$. Mostre que a recíproca não é verdadeira.

E 1.99 Seja H o grafo das arestas (veja exercício 1.24) de um grafo G (portanto, $H = L(G)$). Seja H' um subgrafo induzido de H. Mostre que H' é o grafo das arestas de algum grafo G'.

E 1.100 Dado grafo G e inteiro k, encontrar um subconjunto máximo X de V_G tal que $\delta(G[X]) \geq k$. (Ou seja, dentre os subconjuntos X de V_G que têm a propriedade $\delta(G[X]) \geq k$, encontrar um de cardinalidade máxima.)

E 1.101 Seja G um grafo tal que $n(G) > 1$ e $\delta(G) \leq \frac{1}{2}\mu(G)$. Mostre que G tem um vértice x tal que

$$\mu(G - x) \geq \mu(G) .$$

Em outras palavras, mostre que é possível retirar um vértice sem com isso reduzir a média dos graus do grafo.

E 1.102 Mostre que todo grafo G com pelo menos uma aresta tem um subgrafo H tal que

$$\delta(H) > \mu(H)/2 \quad \text{mas} \quad \mu(H) \geq \mu(G) .$$

1.8 Cortes

Suponha que X é um conjunto de vértices de um grafo G. O **corte** associado a X (ou **franja** de X) é o conjunto de todas as arestas que têm uma ponta em X e outra em $V_G \setminus X$. O corte associado a X será denotado por $\partial(X)$

$$\partial_G(X)$$

ou simplesmente por $\partial(X)$.[23] (Alguns autores preferem escrever $\delta(X)$ ou até $\nabla(X)$.)

Dizemos que os cortes $\partial(\emptyset)$ e $\partial(V_G)$ são **triviais**. É evidente que os cortes triviais são vazios.

É claro que $|\partial(\{v\})| = \mathrm{d}(v)$ para todo vértice v. Para qualquer conjunto X de vértices, diremos que $|\partial(X)|$ é o **grau** de X e denotaremos esse número por $\mathrm{d}(X)$: $\mathrm{d}(X)$

$$\mathrm{d}(X) := |\partial(X)|\,.$$

Um **corte** (= *cut* = *coboundary*) em um grafo G é qualquer conjunto da forma $\partial(X)$, onde X é um subconjunto de V_G. (Um corte é, portanto, um conjunto de arestas e não de vértices.)

Exercícios

∘ **E 1.103** Seja X um conjunto de vértices de um grafo G. Mostre que $(V_G, \partial(X))$ é um subgrafo gerador bipartido de G.

E 1.104 Seja G o grafo representado na figura 1.8. É verdade que o conjunto $\{ae, ef, fj, jk, cd, dh\}$ é um corte?

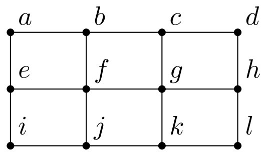


Figura 1.9: Veja o exercício 1.104.

E 1.105 Encontre o menor corte não trivial que puder no grafo da dama 8-por-8. Encontre o maior corte não trivial que puder no grafo da dama.

E 1.106 Encontre o menor corte não trivial que puder no grafo do bispo t-por-t.

[23] Não confunda ∂ com a letra grega δ.

E 1.107 Encontre o menor corte que puder no grafo de Petersen. Encontre o maior corte que puder no grafo de Petersen.

$\mathrm{N}(X)$ ∘ **E 1.108** Para qualquer conjunto X de vértices, denotamos por $\mathrm{N}(X)$, o conjunto dos vértices em $V_G \setminus X$ que têm um ou mais vizinhos em X. É verdade que $\mathrm{d}(X) = |\mathrm{N}(X)|$ para todo X?

É claro que $\mathrm{N}(X) \subseteq \bigcup_{x \in X} \mathrm{N}(x)$.[24] É verdade que os dois conjuntos são iguais?

⋆ **E 1.109** *Mostre que para qualquer grafo G e qualquer subconjunto X de V_G tem-se*

$$\textstyle\sum_{x \in X} \mathrm{d}_G(x) = 2m(G[X]) + \mathrm{d}_G(X)\,. \tag{1.2}$$

(Isso é uma generalização do exercício 1.42.)

E 1.110 Suponha que todos os vértices de um grafo G têm grau par. É verdade $\mathrm{d}(X)$ é par para todo subconjunto X de V_G?

Suponha que todos os vértices de um grafo G têm grau ímpar. É verdade $\mathrm{d}(X)$ é ímpar para todo subconjunto próprio e não vazio X de V_G?

E 1.111 (CORTE GRANDE) Mostre que em todo grafo existe um corte que contém pelo menos a metade das arestas do grafo. Em outras palavras, mostre que todo grafo G tem um conjunto X de vértices tal que $\mathrm{d}(X) \geq \frac{1}{2}\,m(G)$.

E 1.112 Mostre que todo grafo G tem um subgrafo gerador bipartido H que satisfaz a condição $\mathrm{d}_H(v) \geq \mathrm{d}_G(v)/2$ para todo vértice v.

Operações sobre cortes

E 1.113 (DIFERENÇA SIMÉTRICA) Mostre que $\partial(X \oplus Y) = \partial(X) \oplus \partial(Y)$ para
$A \oplus B$ quaisquer conjuntos X e Y de vértices de um grafo. Aqui, $A \oplus B$ denota a diferença simétrica[25] dos conjuntos A e B.

E 1.114 (SUBMODULARIDADE) *Mostre que em qualquer grafo G, para quaisquer subconjuntos X e Y de V_G,*

$$\mathrm{d}(X \cup Y) + \mathrm{d}(X \cap Y) \leq \mathrm{d}(X) + \mathrm{d}(Y)\,.$$

[24] Se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ então $\bigcup_{x \in X} \mathrm{N}(x)$ é o conjunto $\mathrm{N}(x_1) \cup \mathrm{N}(x_2) \cup \cdots \cup \mathrm{N}(x_k)$, sendo $\mathrm{N}(x_i)$ o conjunto de vizinhos de x_i, conforme a seção 1.3.

[25] A *diferença simétrica* de dois conjuntos A e B é o conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. É fácil verificar que $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

E 1.115 (Consequência de 1.114) Sejam v e w dois vértices de um grafo G. Um *isolador*[26] é qualquer subconjunto de V_G que contém v mas não contém w. Um isolador X é *mínimo* se $\mathrm{d}(X) \leq \mathrm{d}(X')$ para todo isolador X'. *Mostre que se X e Y são isoladores mínimos então $X \cup Y$ e $X \cap Y$ também são isoladores mínimos.*

[26] O termo *isolador* não é padrão. Ela está sendo usada aqui (e no capítulo 15) por falta de uma palavra melhor.

1.9 Caminhos e circuitos em grafos

Se um caminho $v_1 \cdots v_p$ é subgrafo de G, dizemos simplesmente que $v_1 \cdots v_p$ é um caminho **em** G ou que G **contém** o caminho $v_1 \cdots v_p$. Por exemplo, se dissermos que $u\,v\,w\,z$ é um caminho em G, devemos entender que $(\{u, v, w, z\}, \{uv, vw, wz\})$ é um subgrafo de G. Convenção análoga vale para circuitos que são subgrafos de G.[27]

Se v e w são os dois extremos de um caminho em G, é cômodo dizer que o caminho **vai de** v **a** w ou que **começa em** v e **termina em** w. Mas é preciso usar estas expressões com cautela pois caminhos são objetos estáticos e não têm orientação.

máximo
maximal

Um caminho P em um grafo G é **máximo** se G não contém um caminho de comprimento maior que o de P. Um caminho P em G é **maximal** se não existe caminho P' em G tal que $P \subset P'$.

Exercícios

∘ **E 1.116** Seja G o grafo representado na figura 1.8. É verdade que $e\,a\,b\,f\,g\,k$ é um caminho em G? É verdade que $e\,a\,b\,f\,c\,d$ é um caminho em G? É verdade que $e\,a\,b\,f\,g\,k\,j\,i\,e$ é um circuito em G?

E 1.117 Seja G o grafo da figura 1.8. É verdade que G contém um circuito de comprimento 6? É verdade que G contém um circuito induzido de comprimento 6? (Ou seja, é verdade que existe um subconjunto X de V_G tal que $G[X]$ é um circuito de comprimento 6?) Exiba um caminho induzido de comprimento 3 em G. (Ou seja, exiba um conjunto X de vértices tal que $G[X]$ é um caminho de comprimento 3.) Exiba um caminho de comprimento 3 em G que não seja induzido.

▷ **E 1.118** Sejam P um caminho com extremos x e x' e seja Q um caminho com extremos y e y'. Suponha que $V_P \cap V_Q \neq \emptyset$. Mostre existe um caminho com extremos x e y no grafo $P \cup Q$ (veja seção 1.5).

Pergunta adicional: Se z é um vértice em $V_P \cap V_Q$, é verdade que existe, no grafo $P \cup Q$, um caminho de x a y que passa por z?

E 1.119 Encontre um circuito de comprimento mínimo no grafo de Petersen (veja exercício 1.15 ou figura 1.6). Encontre um circuito de comprimento máximo no grafo de Petersen. Encontre um caminho de comprimento máximo no grafo de Petersen.

[27] Eu gostaria de dizer "subcaminho de G" e "subcircuito de G". Infelizmente, essas expressões não são usadas na literatura.

○ **E 1.120** Verifique que o grafo do cavalo 3-por-3 contém um circuito. Encontre o circuito mais longo que puder no grafo do cavalo 4-por-4.

E 1.121 Encontre o mais longo caminho que puder no grafo da dama. Encontre o mais longo circuito que puder no grafo da dama.

E 1.122 O grafo **de Heawood**[28] tem conjunto de vértices $\{0, 1, 2, \ldots, 13\}$. Cada vértice i é vizinho de $(i + 1) \bmod 14$ e de $(i + 13) \bmod 14$.[29] Além disso, cada i é vizinho de um terceiro vértice, que depende da paridade de i: se i é par então ele é vizinho de $(i + 5) \bmod 14$ e se i é ímpar então ele é vizinho de $(i+9) \bmod 14$. Faça uma figura do grafo. Encontre um circuito de comprimento mínimo no grafo de Heawood.

E 1.123 Suponha que um grafo G tem um circuito ímpar. Mostre que G também tem um circuito ímpar induzido, ou seja, que existe um conjunto X de vértices tal que $G[X]$ é um circuito ímpar. Algo análogo vale para circuitos pares?

E 1.124 Dê um exemplo de um grafo G e um caminho em G que seja maximal mas não seja máximo.

▷ **E 1.125** ♡ Suponha que $\mathrm{d}(v) \geq k$ para todo vértice v de um grafo. Mostre que o grafo tem um caminho de comprimento pelo menos k. (Sugestão: tome um caminho maximal.)[30]

O problema poderia ter sido formulado assim: mostre que todo grafo G contém um caminho com pelo menos $\delta(G) + 1$ vértices.

▷ **E 1.126** Seja G um grafo tal que $\delta(G) \geq 2$. Prove que G tem um circuito.

E 1.127 Seja G um grafo tal que $\delta(G) \geq 3$. Prove que G tem um circuito de comprimento par.

E 1.128 Seja k um número natural maior que 1. Suponha que $\mathrm{d}(v) \geq k$ para todo vértice v de um grafo G. Mostre que G tem um circuito de comprimento pelo menos $k + 1$. Em outras palavras, mostre que G tem um circuito com pelo menos $\delta(G) + 1$ vértices, desde que $\delta(G) > 1$. (Veja exercício 1.125.)

[28] Percy John Heawood (1861 – 1955). (Veja verbete na Wikipedia.)
[29] A expressão "$i \bmod j$" denota o resto da divisão de i por j.
[30] O capítulo 17 discute o importante mas difícil problema de encontrar um caminho de comprimento *máximo* em um grafo.

▷ **E 1.129** Seja P um caminho maximal num grafo G. Sejam u e w os extremos de P e suponha que $\mathrm{d}(u) + \mathrm{d}(w) \geq |V_P| \geq 3$. Mostre que G tem um circuito cujo conjunto de vértices é V_P.

E 1.130 Seja G um grafo com $n > 1$ vértices e pelo menos $2n$ arestas. Mostre que G tem um circuito de comprimento $\leq 2 \log_2 n$.

E 1.131 Seja G um grafo sem circuitos de comprimento menor que 5. Mostre que $n(G) \geq \delta(G)^2 + 1$.

E 1.132 Mostre que todo grafo G com pelo menos $k\, n(G)$ arestas contém um caminho de comprimento k. (Combine os exercícios 1.102 e 1.125.)

Caminhos e circuitos versus cortes

Dizemos que um corte $\partial(X)$ **separa** um vértice x de um vértice y X contém x mas não contém y. (É claro que se $\partial(X)$ separa x de y então $\overline{X}$ separa y de x.)

E 1.133 Seja P um caminho num grafo G. Seja X um conjunto de vértices que contém um e apenas um dos extremos de P. Mostre que $E_P \cap \partial(X) \neq \emptyset$.

⋆ **E 1.134** Prove que, para qualquer par (x, y) de vértices de qualquer grafo, vale uma e apenas uma das seguintes afirmações: (1) um caminho liga x a y ou (2) um corte vazio separa x de y. (Outra maneira de formular a mesma questão: prove que existe um caminho de x a y se e somente se nenhum corte vazio separa x de y.)

E 1.135 (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente que receba vértices v e w de um grafo G e encontre um caminho que vaqi de v a w ou mostre que tal caminho não existe.

Passeios, trilhas e ciclos

Um **passeio** (= *walk*) em um grafo é qualquer sequência finita $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ de vértices tal que v_i é adjacente a v_{i-1} para todo i entre 1 e k. (Os vértices do passeio podem não ser distintos dois a dois.) Dizemos que o vértice v_0 é a **origem** do passeio e que v_k é o **término** do passeio. Dizemos também que o passeio **vai de** v_0 **a** v_k e que o passeio **liga** v_0 a v_k.

As **arestas** do passeio são v_0v_1, v_1v_2, $\ldots$, $v_{k-1}v_k$. O **comprimento** do passeio é o número k.

Uma **trilha** (= *trail*) é um passeio sem arestas repetidas, isto é, um passeio cujas arestas são distintas duas a duas. É claro que o comprimento de uma trilha é igual à cardinalidade do seu conjunto de arestas.

Um passeio é **simples** se os seus vértices são distintos dois a dois, ou seja, se não tem vértices repetidos. É evidente que todo passeio simples é, em particular, uma trilha.

Um passeio $(v_0, \ldots, v_k)$ é **fechado** (= *closed*) se sua origem coincide com o término, ou seja, se $v_0 = v_k$.

Um **ciclo** (= *cycle*) é uma trilha fechada, ou seja, um passeio fechado sem arestas repetidas.[31]

▷ **E 1.136** Seja $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ um passeio com origem r e término s em um grafo G. Mostre que G tem um caminho com extremos r e s. Mais especificamente, mostre há um caminho com extremos r e s no subgrafo $(\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}\,,\ \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k\})$ de G.

E 1.137 Suponha que $(v_0, \ldots, v_k)$ é uma passeio fechado em um grafo G. É verdade que G tem um circuito?

▷ **E 1.138** Seja $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ um ciclo em um grafo G. Mostre que há um circuito no subgrafo $(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}, \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k\})$ de G.

◦ **E 1.139** Sejam v_0, ..., v_5 alguns vértices (não necessariamente distintos dois a dois) de um grafo G. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras: (1) se $v_0v_1v_2v_3v_4v_5$ é um caminho em G então $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ é um passeio simples; (2) se $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_0$ é um circuito em G então $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0)$ é um ciclo; (3) se $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ é uma trilha então $v_0v_1v_2v_3v_4v_5$ é um caminho; (4) se $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0)$ é um ciclo então $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_0$ é um circuito.

[31] De acordo com essa definição, um ciclo pode ter comprimento 0. Já um circuito, por definição, tem comprimento pelo menos 3.

1.10 Grafos conexos

Em qualquer grafo G, dizemos um vértice v está **ligado** a um vértice w se G contém um caminho com extremos v e w. É evidente que a relação é simétrica: se v está ligado a w então também w está ligado a v.

Um grafo é **conexo** (= *connected*) se seus vértices são ligados dois a dois. Em outras palavras, um grafo é conexo se v é ligado a w para cada par (v, w) de seus vértices.

Um grafo G é conexo se e somente se $\partial(X) \neq \emptyset$ para todo subconjunto próprio e não vazio X de V_G. (Veja exercício 1.148.)

Exercícios

E 1.140 O grafo do cavalo 3-por-3 é conexo? O grafo do bispo t-por-t é conexo?

E 1.141 Mostre que o grafo Q_k é conexo (qualquer que seja k).

E 1.142 Mostre que todo caminho é um grafo conexo. Mostre que todo circuito é um grafo conexo.

▷ **E 1.143** Sejam P e Q dois caminhos tais que $V_P \cap V_Q \neq \emptyset$. Mostre que o grafo $P \cup Q$ (veja seção 1.5) é conexo.

▷ **E 1.144** *Sejam G e H dois grafos conexos tais que $V_G \cap V_H \neq \emptyset$. Mostre que o grafo $G \cup H$ (veja seção 1.5) é conexo.*

◦ **E 1.145** Sejam G e H dois grafos. Quais das seguinte implicações são verdadeiras? 1. Se $V_G \cap V_H = \emptyset$ então $G \cup H$ não é conexo. 2. Se $G \cup H$ é conexo então $V_G \cap V_H \neq \emptyset$. 3. Se $G \cup H$ não é conexo então $V_G \cap V_H = \emptyset$.

▷ **E 1.146** ♡ Suponha que um certo vértice x de um grafo G é ligado a cada um dos demais vértice. Mostre que G é conexo.

◦ **E 1.147** Suponha que um subgrafo gerador H de um grafo G é conexo. Mostre que G é conexo.

⋆ **E 1.148** *Mostre que um grafo G é conexo se e somente se $\partial(X) \neq \emptyset$ para todo X tal que $\emptyset \subset X \subset V_G$.*

◦ **E 1.149** Seja G um grafo e X um subconjunto próprio e não vazio de V_G (isto é, $\emptyset \subset X \subset V_G$). Mostre que o grafo $G - \partial(X)$ não é conexo.

∘ **E 1.150** Quais das seguintes afirmações são verdadeiras para qualquer grafo G? 1. Se G é conexo então $\partial(X) \neq \emptyset$ para todo X tal que $\emptyset \subset X \subset V_G$. 2. Se G é conexo então $\partial(X) \neq \emptyset$ para algum X tal que $\emptyset \subset X \subset V_G$. 3. Se $\partial(X) \neq \emptyset$ para todo X tal que $\emptyset \subset X \subset V_G$ então G é conexo. 4. Se $\partial(X) \neq \emptyset$ para algum X tal que $\emptyset \subset X \subset V_G$ então G é conexo.

E 1.151 Prove que se um grafo G não é conexo então seu complemento $\overline{G}$ é conexo.

E 1.152 (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente que decida se um grafo é conexo. O que o seu algoritmo devolve (ou seja, qual a "saída" do algoritmo)?

E 1.153 Sejam x, y e z três vértices de um grafo conexo G. É verdade que G tem um caminho que contém x, y e z?

∘ **E 1.154** Seja X um conjunto de vértices de um grafo conexo G. É verdade que $G[X]$ é conexo?

⋆∘ **E 1.155** Seja e uma aresta e v um vértice de um circuito O. Mostre que o grafo $O - e$ é conexo. Mostre que $O - v$ é conexo.

∘ **E 1.156** Seja e uma aresta e v um vértice de um caminho P. Em que condições $P - e$ é conexo? Em que condições $P - v$ é conexo?

▷ **E 1.157** Seja O um circuito em um grafo conexo G. Mostre que $G - e$ é conexo para toda aresta e de O.

E 1.158 Seja v um vértice de grau 1 num grafo conexo G. Mostre que o grafo $G - v$ é conexo.

E 1.159 Suponha que G é um grafo conexo com pelo menos uma aresta. É verdade que existe uma aresta a tal que $G - a$ é conexo?

∘ **E 1.160** Seja G um grafo conexo e seja v um dos extremos de um caminho maximal (veja página 32) em G. É verdade que $G[\mathrm{N}(v)]$ é conexo?

E 1.161 ♡ Mostre que todo grafo conexo G com dois ou mais vértices tem um vértice v tal que $G - v$ é conexo.

⋆ **E 1.162** *Prove que todo grafo conexo com n vértices tem pelo menos $n-1$ arestas. Em outras palavras, mostre que em todo grafo conexo G tem-se*

$$m(G) \geq n(G) - 1 \,.$$

E 1.163 Seja k um número natural não nulo e G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Suponha que $|U| \leq k$ e $|W| \leq k$. Mostre que se $\delta(G) > k/2$ então G é conexo.

E 1.164 Seja G um grafo tal que $\delta(G) \geq n(G)/2$. Mostre que G é conexo.

E 1.165 Seja G um grafo tal que $\delta(G) \geq \lfloor n(G)/2 \rfloor$.[32] Mostre que G é conexo. (Mostre que o resultado é o melhor possível no seguinte sentido: existem grafos desconexos com $\mathrm{d}(v) \geq \lfloor n/2 \rfloor - 1$ para todo vértice v.)

∘ **E 1.166** Suponha que $\mathrm{d}(v) + \mathrm{d}(w) \geq n - 1$ para todo par (v, w) de vértices não adjacentes de um grafo G. Mostre que G é conexo.

E 1.167 Mostre que todo grafo com n vértices e mais que $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ arestas é conexo.

∘ **E 1.168** Seja G um grafo e k um número natural. Mostre que $\mathrm{d}(X) \geq k$ para todo X tal que $\emptyset \subset X \subset V_G$ se e somente se $G - F$ é conexo para todo subconjunto F de E_G tal que $|F| < k$.

E 1.169 Prove que se um grafo G é conexo então o grafo das arestas $L(G)$ também é conexo.

E 1.170 Sejam P^* e Q^* dois caminhos de comprimento máximo em um grafo conexo G. Mostre que P^* e Q^* têm um vértice em comum.

[32] Por definição, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro i tal que $i \leq x < i + 1$.

1.11 Componentes

Um subgrafo conexo H de um grafo G é **maximal** (com relação à propriedade de ser conexo) se não faz parte de um subgrafo conexo maior, ou seja, se não existe grafo conexo H' tal que $H \subset H' \subseteq G$.

Um **componente** de um grafo G é qualquer subgrafo conexo maximal de G. O número de componentes de um grafo G será denotado por $c(G)$

$$c(G) .$$

É claro que um grafo G é conexo se e somente se $c(G) = 1$.

O número de componentes de qualquer é pelo menos tão grande quanto $n(G) - m(G)$. (Veja exercício 1.192.)

Exercícios

E 1.171 Quantos componentes tem o grafo do cavalo 3-por-3? Quantos componentes tem o grafo do bispo t-por-t?

E 1.172 Seja a uma aresta e v um vértice de um caminho P. Mostre que $P - a$ tem exatamente dois componentes. Mostre que $P - v$ tem um ou dois componentes.

E 1.173 Seja a uma aresta e v um vértice de um circuito O. Mostre que $O - a$ tem um só componente. Mostre que $O - v$ tem um só componente.

E 1.174 Seja P um caminho e S um subconjunto próprio de V_P. Prove que $c(P - S) \leq |S| + 1$.

E 1.175 Seja O um circuito e S um subconjunto de V_O tal que $0 < |S| < n(O)$. Prove que $c(O - S) \leq |S|$.

E 1.176 Suponha que um grafo G tem exatamente dois vértices, digamos u e v, de grau ímpar. Mostre que existe um caminho em G cujos extremos são u e v.

▷ **E 1.177** Seja G um grafo tal que $\Delta(G) \leq 2$. Descreva os componentes de G.

E 1.178 Seja G um grafo 2-regular. Mostre que cada componente de G é um circuito.

$\circ$ **E 1.179** Mostre que, em qualquer grafo, todo vértice pertence a um e apenas um componente. Em outras palavras, mostre que em qualquer grafo G os conjuntos de vértices de todos os componentes formam uma partição de V_G.

$\circ$ **E 1.180** Seja H um componente de um grafo G. Mostre que $\partial_G(V_H) = \emptyset$.

$\circ$ **E 1.181** Seja X um conjunto de vértices de um grafo G. Prove ou desprove a seguinte afirmação: Se $\emptyset \subset X \subset V_G$ e $\partial_G(X) = \emptyset$ então $G[X]$ é um componente de G.

E 1.182 Seja X um conjunto não vazio de vértices de um grafo G. Mostre que $G[X]$ é um componente de G se e somente se $G[X]$ é conexo e $\partial_G(X) = \emptyset$.

$\star$ **E 1.183** Seja x um vértice de um grafo G. Seja X o conjunto de todos os vértices ligados a x. Mostre que $G[X]$ é um componente de G.

E 1.184 (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente que receba um vértice x de um grafo G e calcule o conjunto de vértices do componente de G que contém x.

E 1.185 (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente que calcule o número de componentes de qualquer grafo dado.

E 1.186 Seja H um subgrafo gerador de um grafo G. Mostre que $c(H) \geq c(G)$.

E 1.187 Seja e uma aresta de um grafo G. Mostre que $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$ para qualquer aresta e de G.

$\circ$ **E 1.188** Seja X um conjunto de vértices de um grafo G. Suponha que $c(G - X) > |X| + 1$. É verdade que G não é conexo?

E 1.189 Seja v um vértice de um grafo conexo G. Mostre que o número de componentes de $G - v$ não passa de $\mathrm{d}(v)$.

E 1.190 Seja G um grafo conexo e suponha que $\mathrm{d}(v)$ é par para todo vértice v de G. Mostre que, para qualquer vértice v, o número de componentes de $G - v$ não passa de $\frac{1}{2}\mathrm{d}(v)$.

E 1.191 (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente para o seguinte problema: Dado um grafo G e um número natural k, encontrar um conjunto X de não mais que k vértices que maximize o número de componentes de $G-X$.

⋆ **E 1.192** *Mostre que em todo grafo G tem-se*

$$m(G) \geq n(G) - c(G) \; .$$

E 1.193 Sejam n, m e c os números de vértices, de arestas e de componentes, respectivamente, de um grafo G. Mostre que

$$m \leq \tfrac{1}{2}(n - c)(n - c + 1) \; .$$

1.12 Pontes

Uma **ponte** (= *bridge*) ou **istmo** (= *isthmus*) ou **aresta de corte** (= *cut edge*) em um grafo G é qualquer aresta e tal que $c(G - e) > c(G)$, ou seja, $G - e$ tem mais componentes que G.

Uma aresta e é ponte se e somente se o conjunto $\{e\}$ é um corte do um grafo. (Veja exercício 1.197.)

Há uma interessante "dicotomia" entre pontes e circuitos: em qualquer grafo, toda aresta é uma ponte ou pertence a um circuito, mas não ambos. (Veja o exercício 1.199.)

Exercícios

◦ **E 1.194** O grafo do bispo t-por-t tem pontes?

E 1.195 Suponha que um grafo G tem uma ponte uv. Que aparência tem a matriz de adjacências de G? Que aparência tem a matriz de incidências de G?

◦ **E 1.196** Seja uv uma aresta de um grafo G. Mostre que uv é uma ponte se e somente se $\langle u\,v\rangle$ é o único caminho em G que tem extremos u e v.

◦ **E 1.197** Seja e uma aresta de um grafo G. Mostre que e é uma ponte se e somente se $\{e\}$ é um corte, ou seja, $\{e\} = \partial(X)$ para algum conjunto X de vértices. (Veja também o exercício 1.187.)

◦ **E 1.198** Seja G o grafo que tem vértices a, b, $\ldots$, g e arestas ab, bc, cd, de, ec, bf, gb, ag. Quais das arestas pertencem a circuitos? Quais das arestas são pontes?

⋆ **E 1.199** (DICOTOMIA PONTES/CIRCUITOS) Prove que, em qualquer grafo, toda aresta é de um e apenas um de dois tipos: ou ela pertence a um circuito do grafo ou é uma ponte.

E 1.200 Que aparência tem um grafo se todas as suas arestas são pontes? Que aparência tem um grafo se cada uma de suas arestas pertence a um circuito?

E 1.201 Suponha que todos os vértices de um grafo G têm grau par. Mostre que G não tem pontes.

E 1.202 Seja r um número natural maior que 1 e G um grafo bipartido r-regular. Prove que G não tem pontes.

E 1.203 Seja G um grafo conexo e X um subconjunto de V_G tal que $\mathrm{d}(X) = 1$. Mostre que os grafos induzidos $G[X]$ e $G[\overline{X}]$ são ambos conexos.

E 1.204 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que encontre as pontes de um grafo.

1.13 Grafos aresta-biconexos

Um grafo é **aresta-biconexo** (= *edge-biconnected*) se for conexo, tiver três ou mais vértices, e não tiver pontes.[33]

Um grafo com três ou mais vértices é aresta-biconexo se e somente se cada par de seus vértices é ligado por dois caminhos sem arestas em comum. (Veja exercício 1.208.) Esta propriedade explica o nome "aresta-biconexo".

Exercícios

∘ **E 1.205** Mostre que todo circuito é aresta-biconexo. Mostre que caminhos não são aresta-biconexos.

E 1.206 Mostre que cada um dos dois componentes do grafo do bispo 3-por-3 é aresta-biconexo.

∘ **E 1.207** Seja G um grafo aresta-biconexo. Mostre que $\mathrm{d}(X) \geq 2$ para todo subconjunto não vazio e próprio X de V_G.

⋆ **E 1.208** (DOIS CAMINHOS SEM ARESTAS EM COMUM) Seja G um grafo com três ou mais vértices dotado da seguinte propriedade: todo par de vértices de G é ligado por dois caminhos sem arestas em comum. Em outras palavras, suponha que para cada par (r, s) de vértices de G existem caminhos P e Q, ambos com extremos r e s, tais que $E_P \cap E_Q = \emptyset$. Mostre que G é aresta-biconexo.

Seja G um grafo aresta-biconexo. Mostre que todo par de vértices de G é ligado por dois caminhos sem arestas em comum.[34] (Compare com o exercício 1.134.)

E 1.209 Mostre que $m(G) \geq n(G)$ para todo grafo aresta-biconexo G.

[33] Em algumas áreas da Computação, diz-se que um tal grafo é "tolerante a falhas".
[34] Veja generalização no capítulo 15, exercício 15.7.

1.14 Articulações e grafos biconexos

Uma **articulação** (= *articulation*) ou **vértice de corte** (= *cut vertex*) num grafo G é um vértice v tal que $c(G - v) > c(G)$, ou seja, $G - v$ tem mais componentes que G.

Um grafo é **biconexo** (= *biconnected*) se for conexo, sem articulações, e tiver três ou mais vértices.[35]

Um grafo com três ou mais vértices é biconexo se e somente se cada par de seus vértices estiver ligado por dois caminhos internamente disjuntos (ou seja, dois caminhos sem vértices internos em comum). (Veja exercício 1.218.) Essa propriedade explica o nome "biconexo".

Segue daí que um grafo é biconexo se e somente se cada par de seus vértices pertence a um circuito. (Veja o exercício 1.219.)

Exercícios

E 1.210 Seja v um vértice de um grafo G. Mostre que v é uma articulação se e somente se existem dois vértices x e y em $V_G \setminus \{v\}$ tais que (1) algum caminho em G vai de x a y e (2) todo caminho de x a y contém v.

E 1.211 Seja v uma articulação de um grafo G. Que aparência tem a matriz de adjacências de G? Que aparência tem a matriz de incidências de G?

◦ **E 1.212** É verdade que todo grafo sem articulações não tem pontes? É verdade que todo grafo sem pontes não tem articulações?

◦ **E 1.213** Seja T uma árvore e v um vértice de T tal que $\mathrm{d}(v) \geq 2$. É verdade que v é uma articulação?

E 1.214 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que encontre as articulações de um grafo.

E 1.215 Mostre que todo circuito é biconexo.

E 1.216 O grafo do bispo 3-por-3 tem dois componentes. Mostre que apenas um deles é biconexo.

◦ **E 1.217** Mostre que nem todo grafo aresta-biconexo é biconexo. Mostre que todo grafo biconexo é aresta-biconexo.

[35] Em algumas áreas da Computação, diz-se que um tal grafo é "tolerante a falhas".

⋆ **E 1.218** (DOIS CAMINHOS INTERNAMENTE DISJUNTOS) Seja G um grafo com três ou mais vértices dotado da seguinte propriedade: todo par de vértices de G é ligado por dois caminhos internamente disjuntos. Em outras palavras, suponha que para cada par (r, s) de vértices de G existem caminhos P e Q, ambos com extremos r e s, tais que $V_P \cap V_Q = \{r, s\}$. Mostre que G é biconexo.

Seja G um grafo biconexo. Mostre que cada par de vértices de G é ligado por dois caminhos internamente disjuntos.[36]

E 1.219 (ARTICULAÇÕES VERSUS CIRCUITOS) Suponha que todo par de vértices de um grafo G pertence a um circuito. Mostre que G não tem articulações.

Seja G um grafo biconexo. Mostre que todo par de vértices de G pertence a um circuito. (Veja exercício 1.218.)

E 1.220 Exiba um grafo dotado da seguinte propriedade: quaisquer 2 vértices do grafo pertencem a um mesmo circuito mas há 3 vértices que não pertencem a um mesmo circuito.

E 1.221 Seja G um grafo conexo sem articulações. Mostre que se $\delta(G) \geq 3$ então G tem um vértice v tal que $G - v$ é conexo e não tem articulações. (Compare com o exercício 1.161 na seção 1.10.)

[36] Veja generalização no capítulo 16, exercício 16.8.

1.15 Florestas e árvores

Esta seção trata de duas espécies importantes de grafos: as florestas e as árvores. Árvores podem ser entendidas como uma generalização de caminhos (veja os exercícios 1.224 e 1.225).

Uma **floresta** (= *forest*), ou **grafo acíclico**, é um grafo sem circuitos. Essa definição pode ser reformulada assim: um grafo é uma *floresta* se cada uma de suas arestas é uma ponte (veja exercício 1.223).

Uma **árvore** (= *tree*) é uma floresta conexa. É claro que cada componente de uma floresta é uma árvore.[37]

Uma **folha** (= *leaf*) de uma floresta é qualquer vértice da floresta que tenha grau 1.

Um grafo G é uma floresta se e somente se $m(G) = n(G) - c(G)$. (Veja exercício 1.231.)

Quaisquer duas das seguintes propriedades implicam a terceira: "G é floresta", "G é conexo" e "$m(G) = n(G) - 1$". (Veja exercícios 1.228, 1.229 e 1.230.)

Exercícios

∘ **E 1.222** Mostre que todo caminho é uma árvore. Mostre que toda estrela (veja a seção 1.2) é uma árvore.

⋆ **E 1.223** Mostre que um grafo é uma floresta se e somente se cada uma de suas arestas é uma ponte. (Veja o exercício 1.199.)

E 1.224 Seja $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ uma sequência de objetos distintos dois a dois. Para cada j, seja $i(j)$ um índice em $\{1, \ldots, j-1\}$. Mostre que o grafo $\big(\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}, \{v_2 v_{i(2)}, v_3 v_{i(3)}, \ldots, v_n v_{i(n)}\}\big)$ é uma árvore. (Compare a maneira como o grafo foi definido com a definição de caminho na seção 1.4.) (Compare com o exercício 1.225.)

E 1.225 Seja T uma árvore. Mostre que existe uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de V_T dotada da seguinte propriedade: para $j = 2, \ldots, n$, o vértice v_j é adjacente a exatamente um dos vértices do conjunto $\{v_1, \ldots, v_{j-1}\}$. (Compare com o exercício 1.224.)

[37] Em algumas disciplinas, a palavra "árvore" traz à mente as ideias de *pai* e *filho*. No presente contexto, entretanto, as expressões "pai de um vértice" e "filho de um vértice" não fazem sentido. (Eles só adquirem sentido se um dos vértices da árvore for escolhido para fazer o papel de "raiz". Se r é a raiz da árvore então o **pai** de qualquer outro vértice v é o vértice adjacente a v no único caminho (veja exercício 1.226) que liga v a r. Todo vizinho de v que não seja o pai de v é **filho** de v.)

$\star$ **E 1.226** *Mostre que um grafo é uma floresta se e somente se tem a seguinte propriedade: para todo par (x, y) de seus vértices, existe no máximo um caminho com extremos x e y no grafo.*

E 1.227 (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente que decida se um grafo dado é uma árvore.

$\star$ **E 1.228** *Prove que em toda árvore T tem-se $m(T) = n(T) - 1$.* (Compare com o exercício 1.162.)

$\star$ **E 1.229** *Seja G um grafo conexo G tal que $m(G) = n(G) - 1$. Prove que G é uma árvore.*

E 1.230 *Seja F uma floresta tal que $m(F) = n(F) - 1$. Prove que F é uma árvore.*

$\star$ **E 1.231** Mostre que um grafo G é uma floresta se e somente se

$$m(G) = n(G) - c(G) .$$

(Compare com o exercício 1.192.)

$\triangleright$ **E 1.232** Mostre que toda árvore com pelo menos uma aresta tem pelo menos duas folhas.

E 1.233 Mostre que toda floresta F tem pelo menos $\Delta(F)$ folhas.

E 1.234 Seja T uma árvore com dois ou mais vértices. Seja X o conjunto dos vértices de T cujo grau é maior que 2. Mostre que T tem $2 + \sum_{x \in X} (\mathrm{d}(x) - 2)$ folhas.

E 1.235 Seja T uma árvore com vértices $1, \ldots, n$. Suponha que os graus dos vértices $1, 2, 3, 4, 5, 6$ são $7, 6, 5, 4, 3, 2$ respectivamente e que os vértices $7, \ldots, n$ são folhas. Determine n (e portanto o número de folhas da árvore).

E 1.236 Seja T uma árvore com $p + q$ vértices. Suponha que p dos vértices têm grau 4 e q são folhas. Mostre que $q = 2p + 2$.[38]

E 1.237 Seja T uma árvore com pelo menos três vértices. É verdade que o complemento $\overline{T}$ de T é conexo a menos que T seja um estrela?

---

[38] Imagine que os vértices de grau 4 são átomos de carbono e os de grau 1 são átomos de hidrogênio. O grafo representa então a molécula do hidrocarboneto C_pH_q. Veja o exercício 1.5.

E 1.238 Sejam T uma árvore e U um subconjunto de V_T. Supondo que $|U|$ é par, mostre que existe um subconjunto X de E_T tal que $\mathrm{d}_{T-X}(u)$ é ímpar para todo u em U e $\mathrm{d}_{T-X}(v)$ é par para todo v em $V_T \smallsetminus U$.

E 1.239 (PROPRIEDADE DE HELLY[39]) Sejam P, Q, R três caminhos em uma árvore e T. Suponha que $V_P \cap V_Q \neq \emptyset$, $V_Q \cap V_R \neq \emptyset$ e $V_P \cap V_R \neq \emptyset$. Prove que $V_P \cap V_Q \cap V_R \neq \emptyset$.

E 1.240 Mostre que toda floresta é planar.

[39] Referência ao matemático Eduard Helly (1884 – 1943).

1.16 Menores de grafos

Esta seção introduz uma generalização do conceito de subgrafo conhecida como *menor*. Pode-se dizer que um menor descreve a estrutura "grossa" do grafo, enquanto um subgrafo descreve a estrutura "fina". Menores têm um papel importante no estudo da planaridade (capítulo 19), da coloração de vértices (capítulo 8) e de diversos outros problemas.

Um grafo H é um **menor**[40] (= *minor*), ou **subcontração**, de um grafo G se V_H é uma subpartição[41] $\{V_1, \ldots, V_p\}$ de V_G tal que

- cada subgrafo $G[V_i]$ é conexo e
- se V_i é adjacente a V_j em H então há uma aresta de V_i a V_j em G

(mas pode existir uma aresta de V_i a V_j em G sem que V_i seja adjacente a V_j em H). A expressão "H é um menor de G" também é usada, num sentido mais amplo, para dizer que H é isomorfo a um menor de G.

De maneira muito informal, podemos dizer que H é um menor de G se H pode ser obtido a partir de um subgrafo de G por sucessivas operações de "contração" de arestas. (A "contração" de uma aresta uv faz coincidir os vértices u e v.)

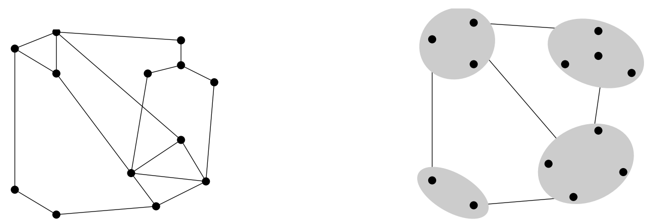


Figura 1.10: O grafo à direita, H, é um menor do grafo à esquerda, G. (Trata-se de um menor muito especial, pois $V_1 \cup \cdots \cup V_p = V_G$.)

Um grafo H é um **menor topológico** (= *topological minor*) de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e existe uma função P que associa um caminho em G a cada aresta de H de tal modo que

- para cada aresta xy de H, o caminho $P(xy)$ tem extremos x e y e não tem vértices internos em V_H e
- se xy e uv são duas arestas distintas de H então $P(xy)$ e $P(uv)$ não têm vértices internos em comum.

---

40 Às vezes digo *máinor*, pois não me habituo a usar a palavra *menor* como substantivo.

41 Uma **subpartição** de um conjunto V é uma coleção $\{V_1, \ldots, V_p\}$ de subconjuntos não vazios de V tal que $V_i \cap V_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

A expressão “H é um menor topológico de G” também é usada, num sentido mais amplo, para dizer que H é isomorfo a algum menor topológico de G.

Um menor topológico é um tipo especial de menor, embora isso não seja imediatamente aparente. (Veja o exercício 1.250.)

Se H é um menor topológico de G, diz-se também que G **contém uma subdivisão** de H porque é possível obter um subgrafo de G a partir de H por meio de sucessivas operações de “subdivisão” de arestas. (Cada “subdivisão” de uma aresta introduz um novo vértice de grau 2 no “interior” da aresta.)

Exercícios

◦ **E 1.241** Seja H um subgrafo de um grafo G. Mostre que H é um menor topológico de G.

◦ **E 1.242** Seja H um subgrafo de um grafo G. Mostre que H é isomorfo a um menor de G.

E 1.243 Mostre que um grafo G tem um menor topológico isomorfo a K_3 se e somente se G contém um circuito.

E 1.244 Mostre que um grafo G tem um menor isomorfo a K_3 se e somente se G contém um circuito.

E 1.245 Seja G o grafo do rei num tabuleiro 4-por-4. Seja u o vértice de coordenadas $(2,2)$ e v o vértice de coordenadas $(3,3)$. Mostre que $G + uv$ não tem subgrafo isomorfo a K_4 mas tem um menor topológico isomorfo a K_4.

E 1.246 Seja G o grafo do rei num tabuleiro 5-por-5. Seja u o vértice de coordenadas $(2,2)$ e v o vértice de coordenadas $(4,4)$. Mostre que $G + uv$ não tem subgrafo isomorfo a K_4 mas tem um menor isomorfo a K_4.

Seja x o vértice de coordenadas $(2,4)$ e y o vértice de coordenadas $(4,2)$. Mostre que $G + uv + xy$ tem um menor isomorfo a K_4.

E 1.247 Mostre que o grafo de Petersen tem um menor isomorfo a K_5 (mas não tem subgrafo isomorfo a K_5 nem menor topológico isomorfo a K_5).

E 1.248 Mostre que o grafo de Petersen tem um menor topológico isomorfo a $K_{3,3}$. Mostre que o grafo de Petersen tem um menor isomorfo a $K_{3,3}$.

E 1.249 Mostre que $K_{3,3}$ é isomorfo a um menor topológico do cubo Q_4. Mostre que K_5 é um menor topológico de Q_4.

$\star$ **E 1.250** *Seja H um menor topológico de G. Mostre que H é isomorfo a um menor de G.* Mostre que a recíproca não é verdadeira.

$\star$ **E 1.251** Seja H um menor de um grafo G. Suponha que $\Delta(H) \leq 3$. Prove que H é isomorfo a um menor topológico de G. Dê um bom exemplo para mostrar que a condição "$\Delta(H) \leq 3$" é essencial.

$H \preceq G$ **E 1.252** Se H é (isomorfo a) um menor de G, escrevemos $H \preceq G$. Mostre que $\preceq$ é uma relação de ordem. Mais precisamente, mostre que

1. $G \preceq G$,
2. se $H \preceq G$ e $G \preceq H$ então $H \cong G$,
3. se $H \preceq G$ e $G \preceq F$ então $H \preceq F$.

Mostre também que a relação é-menor-topológico-de é uma relação de ordem.

1.17 Mapas planos e suas faces

Já dissemos na seção 1.6 que, *grosso modo*, um grafo é **planar** se pode ser desenhado no plano[42] sem que as arestas se cruzem. A definição exata envolve os conceitos de linha e mapa plano, que passamos a discutir.

Uma **linha** é qualquer união finita de segmentos de reta no plano $\mathbb{R}^2$ que seja topologicamente homeomorfa ao intervalo fechado $[0,1]$ da reta. Em outras palavras, uma união finita c de segmentos de reta é uma **linha** se existe uma bijeção topologicamente contínua do intervalo $[0,1]$ em c. As imagens de 0 e 1 sob essa bijeção contínua são os **extremos** da linha.[43]

Um **mapa plano**[44] é um par $(\mathbb{V},\mathbb{E})$ de conjuntos finitos, sendo $\mathbb{V}$ um conjunto de pontos do plano $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{E}$ um conjunto de linhas tal que $\mathbb{V}$ $\mathbb{E}$

- os extremos de cada linha são elementos de $\mathbb{V}$,
- o interior de cada linha é disjunto de $\mathbb{V}$,
- o interior de cada linha é disjunto de todas os demais linhas,
- duas linhas diferentes têm no máximo um extremo em comum.

Os elementos de $\mathbb{V}$ são os **pontos**[45] do mapa e os de $\mathbb{E}$ são as **linhas**[46] **do mapa**. pontos linhas

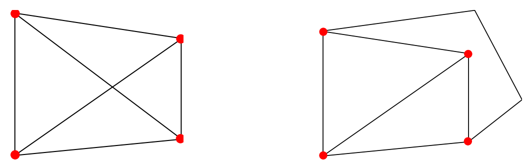


Figura 1.11: O mapa da esquerda não é plano. O mapa plano da direita representa um K_4.

O **grafo de** um mapa plano $(\mathbb{V},\mathbb{E})$ é definido da maneira óbvia: o conjunto de vértices do grafo é $\mathbb{V}$ e dois vértices v e w são adjacentes no grafo se existe uma linha em $\mathbb{E}$ com extremos v e w. (Será necessário tomar cuidado com a notação, uma vez que a letra "V" está sendo usada para designar tanto o conjunto de pontos de um mapa plano quanto o conjunto de vértices do correspondente grafo. Analogamente, a letra "E" está sendo usada para designar tanto o conjunto de linhas de um mapa plano quanto o conjunto de arestas do correspondente grafo.) grafo de mapa

[42] Do ponto de vista técnico, seria mais cômodo usar a superfície da esfera no lugar do plano. Mas os resultados são equivalentes.
[43] Por definição, os dois extremos são distintos.
[44] Alguns autores dizem "grafo plano". Não confunda esta expressão com "grafo planar".
[45] Prefiro não dizer "vértices" para evitar confusão com os vértices de um grafo.
[46] Prefiro não dizer "arestas" para evitar confusão com as arestas de um grafo.

mapa representa grafo

Dizemos que um mapa plano $\mathbb{M}$ **representa** um grafo G se o grafo de $\mathbb{M}$ é isomorfo (veja capítulo 2) a G. Em geral, um grafo pode ser representado por muitos mapas planos diferentes.

Um grafo G é **planar** se for representável por um mapa plano, ou seja, se existir um mapa plano cujo grafo é isomorfo a G. Esta é a versão precisa da definição vaga que demos na seção 1.6.

Exercícios

E 1.253 Veja o "jogo de planaridade" em www.planarity.net.

E 1.254 O grafo de Petersen (veja figura 1.6) é planar?

E 1.255 Seja G um K_5 (isto é, um grafo completo com 5 vértices). Mostre que $G - e$ é planar qualquer que seja a aresta e de G. Repita o exercício com $K_{3,3}$ (veja figura 19.1) no lugar de K_5.

∘ **E 1.256** Mostre que um grafo é planar se e somente se cada uma de suas componentes é planar.

E 1.257 Seja e uma ponte de um grafo G. Mostre que G é planar se e somente se $G - e$ é planar.

Seja v uma articulação de G. Mostre que G é planar se e somente se $G - v$ é planar.

Faces e dualidade planar

O **suporte** de um mapa plano $(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é o conjunto $\mathbb{V} \cup \bigcup \mathbb{E}$ (trata-se, obviamente, de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$).[47] Em outras palavras, o suporte do mapa é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que são pontos do mapa ou pertencem a linhas do mapa.

Uma **face** (= *face*) de um mapa plano $(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é qualquer região do complemento do suporte do mapa, ou seja, qualquer componente conexo — no sentido topológico[48] — do conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \big(\mathbb{V} \cup \bigcup \mathbb{E}\big)$. A **fronteira** de cada face é formada por linhas do mapa; o número de linhas na fronteira de uma face F é o **grau** de F.

Seja G o grafo de um mapa plano $\mathbb{M}$ com 3 ou mais pontos. Se G é aresta-biconexo então as faces de $\mathbb{M}$ são "bem comportadas": cada face é

[47] Se $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ então $\bigcup X$ denota o conjunto $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$.

[48] O conceito topológico de conexão é formalmente análogo ao conceito de conexão da teoria dos grafos: um subconjunto X do plano é **conexo** se, para quaisquer pontos x e x' em X, existe uma linha com extremos em x e x' cujos pontos estão todos em X.

topologicamente homeomorfa a um disco e cada linha pertence à fronteira de duas faces diferentes. Se G é biconexo, as faces de $\mathbb{M}$ são ainda mais "bem comportadas": a fronteira de cada face corresponde a um circuito de G.

O **grafo das faces**, ou **grafo dual**, de um mapa plano $\mathbb{M}$ é definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são as faces do mapa e duas faces são adjacentes se suas fronteiras têm pelo menos uma linha em comum.[49] (Note que o grafo dual é definido a partir de um mapa e não a partir do grafo do mapa. Um grafo planar pode ser representado por vários mapas planos diferentes,[50] e cada um desses mapas tem o seu grafo dual.)

Um exemplo: o grafo dos estados do Brasil que examinamos no exercício 1.17 é o grafo dual do mapa do Brasil.

Exercícios

E 1.258 Seja $\mathbb{M}$ um mapa plano e suponha que o grafo do mapa é um caminho. Mostre que $\mathbb{M}$ tem apenas uma face.

Seja $\mathbb{M}$ um mapa plano e suponha que o grafo do mapa é um circuito. Mostre que $\mathbb{M}$ tem exatamente duas faces (e as duas faces têm a mesma fronteira).

E 1.259 Mostre que um mapa plano tem uma e uma só face se e somente se o grafo do mapa é uma floresta.

E 1.260 Considere um mapa plano que representa uma grade p-por-q. Quantas faces tem o mapa?

E 1.261 Seja $\mathbb{M}$ um mapa plano que representa uma grade 3-por-4. Faça uma figura do grafo das faces (ou seja, do grafo dual) de $\mathbb{M}$.

E 1.262 Quantas faces tem um mapa plano que representa o cubo Q_3?

E 1.263 Faça uma figura dos grafos das faces de cada um dos mapas planos desenhados nas figuras 1.12 e 1.13.

[49] O estudo da dualidade planar fica mais "limpo" se a definição de grafo é liberalizada para permitir "arestas paralelas" (ou seja, duas ou mais arestas diferentes com o mesmo par de pontas) e "laços" (ou seja, uma aresta com duas pontas iguais). É claro que a definição de mapa plano deve ser liberalizada de acordo. Prefiro não adotar essa liberalização no presente texto. Para compensar, será necessário evitar ocasionalmente grafos que têm articulações ou vértices de grau 2.

[50] Mas veja o exercício 1.282.

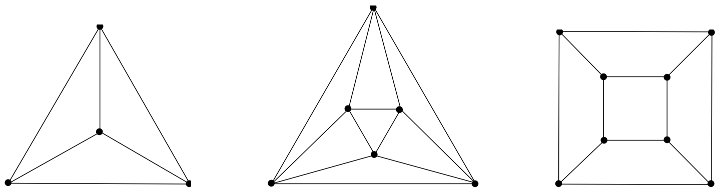


Figura 1.12: Faça uma figura do grafo dual de cada um dos mapas planos da figura.

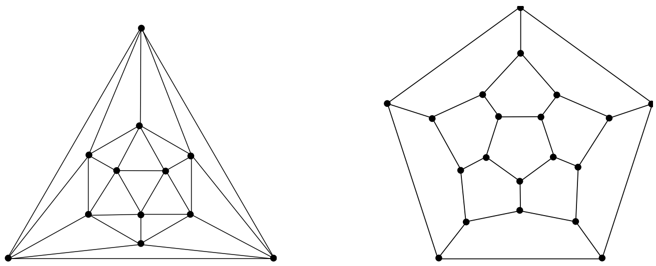


Figura 1.13: Faça uma figura do grafo dual de cada um dos mapas planos da figura.

E 1.264 Seja G um K_5 e e uma aresta de G. Seja $\mathbb{M}$ um mapa plano que representa $G - e$. Seja G^* o grafo das faces (ou seja, o grafo dual) de $\mathbb{M}$. Faça uma figura de G^*. Verifique que G^* é planar. Exiba uma representação plana, digamos $\mathbb{M}^*$, de G^*. Faça uma figura do grafo das faces de $\mathbb{M}^*$.

E 1.265 Dê um exemplo de um grafo conexo planar que possa ser representado por dois mapas planos com diferentes números de faces.

$\star$ **E 1.266** (FÓRMULA DE EULER[51]) *Seja* $(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ *um mapa plano cujo grafo é conexo. Mostre que*

$$|\mathbb{V}| - |\mathbb{E}| + |\mathbb{F}| = 2\,, \tag{1.3}$$

onde $\mathbb{F}$ *é o conjunto de faces do mapa.* (Verifique que a fórmula é falsa em mapas cujos grafos não são conexos.) (Compare com o exercício 1.228.)

E 1.267 Seja G um grafo planar aresta-biconexo. Seja $(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um mapa plano que representa G e seja $\mathbb{F}$ o conjunto das faces do mapa. Mostre que $\sum_{F \in \mathbb{F}} \mathrm{d}(F) = 2|\mathbb{E}|$, sendo $\mathrm{d}(F)$ o grau da face F. (Compare com o exercício 1.42.)

---

[51] Leonhard Euler (1707 – 1783). Veja verbete na Wikipedia.

$\star$ **E 1.268** *Seja G um grafo planar conexo com três ou mais vértices. Mostre que*

$$m(G) \leq 3n(G) - 6 \,. \tag{1.4}$$

(Sugestão: Faça uma indução no número de pontes.) Deduza daí que a desigualdade vale para qualquer grafo planar que tenha três ou mais vértices. Como são as faces de um mapa plano com n pontos e exatamente $3n - 6$ linhas?

$\circ$ **E 1.269** É verdade que todo grafo G com $m(G) \leq 3n(G) - 6$ é planar?

E 1.270 Deduza da desigualdade (1.4) que K_5 não é planar.

E 1.271 Seja G um grafo aresta-biconexo planar. Suponha que a cintura (veja capítulo 14) de G não é inferior a 4. Mostre que $m(G) \leq 2n(G) - 4$. (Compare com o exercício 1.268.) Deduza daí que $K_{3,3}$ não é planar. Deduza daí que Q_4 não é planar.

E 1.272 Seja G um grafo bipartido com três ou mais vértices. Mostre que se G é planar então $m(G) \leq 2n(G) - 4$. (Veja o exercício 1.271.)

E 1.273 Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Mostre que se G é planar então $m(G) \leq 2|U| + 2|W| - 4$.

E 1.274 Seja G um grafo e k um número natural não inferior a 3. Suponha que G tem pelo menos $\frac{1}{2}(k+2)$ vértices e cintura não inferior a k. Mostre que se G é planar então $m(G) \leq (n(G) - 2)k/(k - 2)$. (Compare com o exercício 1.271.)

$\star$ **E 1.275** Mostre que todo grafo planar tem pelo menos um vértice de grau não superior a 5. Em outras palavras, mostre que $\delta(G) \leq 5$ para todo grafo planar G.

Dê exemplo de um grafo planar que não contém vértices de grau menor que 5.

E 1.276 Seja G um grafo bipartido planar. Mostre que $\delta(G) \leq 3$.

$\circ$ **E 1.277** Um mapa plano "do tipo (n, m, d, g)" é um mapa plano com n pontos e m linhas cujos pontos têm grau d e cujas faces têm grau g. Exiba um mapa plano do tipo $(4, 6, 3, 3)$. Exiba um mapa plano do tipo $(6, 12, 4, 3)$. Exiba um mapa plano do tipo $(8, 12, 3, 4)$.

$\circ$ **E 1.278** Seja G um grafo 3-regular biconexo com 10 vértices. Mostre que G não pode ser representado por um mapa plano cujas faces tenham todas o mesmo grau.

E 1.279 Seja G um grafo com 11 ou mais vértices. Mostre que G e o seu complemento $\overline{G}$ não podem ser ambos planares.

E 1.280 Um mapa plano é **auto-dual** (= *self-dual*) se o seu grafo for isomorfo ao seu grafo dual. Mostre que se $(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é auto-dual então $2|\mathbb{V}| = |\mathbb{E}| + 2$. Mostre que nem todo mapa plano $(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ tal que $2|\mathbb{V}| = |\mathbb{E}| + 2$ é auto-dual.

$\star$ **E 1.281** Seja G o grafo de um mapa plano $\mathbb{M}$. Suponha que G é biconexo e não tem vértices de grau 2 (ou seja, $\delta(G) \geq 3$). Seja G^* o grafo das faces (isto é, o grafo dual) do mapa $\mathbb{M}$. Mostre que G^* é planar.

Seja $\mathbb{M}^*$ um mapa plano que representa G^*. Seja G^{**} o grafo das faces de $\mathbb{M}^*$. Mostre que $G^{**} \cong G$, ou seja, que G^{**} é isomorfo a G.

! E 1.282 (TEOREMA DE WHITNEY) Todo grafo planar 3-conexo (veja página 133) tem essencialmente um único mapa plano. O "essencialmente" significa que todos os mapas planos são equivalentes. Dois mapas de um mesmo grafo são **equivalentes** se o conjunto de arestas das fronteiras de faces correspondentes são iguais.

E 1.283 (EXOPLANAR) Um mapa plano $\mathbb{M}$ é **exoplano** se seus pontos estiverem todos na fronteira de uma mesma face. Um grafo G é **exoplanar** (= *outerplanar*) se for representável por um mapa exoplano.

Mostre que K_4 não é exoplanar. Mostre que $K_{2,3}$ não é exoplanar.

E 1.284 Mostre que o grafo dual de um mapa exoplano (veja exercício 1.283) pode não ser planar.

E 1.285 Seja $\mathbb{M}$ um mapa exoplano (veja o exercício 1.283). Seja F a face cuja fronteira contém todos os pontos de $\mathbb{M}$. Seja G^* o grafo das faces (isto é, o grafo dual) de $\mathbb{M}$. Mostre que $G^* - F$ é uma árvore.

E 1.286 Seja e uma aresta de um grafo exoplanar G (veja exercício 1.283). É verdade que existe um mapa exoplano de G em que a representação de e pertence à fronteira da face que contém todos os vértices?

1.18 Grafos aleatórios

Seja V o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ e seja $\mathcal{G}(n)$ a coleção[52] de todos os grafos com conjunto de vértices V. É claro que V $\mathcal{G}(n)$

$$|\mathcal{G}(n)| = 2^N , \quad \text{com } N := \binom{n}{2} .$$

Qualquer propriedade de grafos (como, por exemplo, a propriedade de ser conexo)[53] define uma subcoleção de $\mathcal{G}(n)$. Assim, convém confundir os conceitos de "propriedade" e "subcoleção" de $\mathcal{G}(n)$. Diremos que **quase todo grafo** tem determinada propriedade $\mathcal{P}(n)$ se N

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{P}(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} = 1 .$$

Uma maneira de estudar o conjunto $\mathcal{G}(n)$ é baseada na introdução de uma medida de probabilidade nesse conjunto. Seja p um número no intervalo $(0, 1)$ e escolha cada elemento de $V^{(2)}$, independentemente, com probabilidade p. (Veja exercício 1.20.) Se A é o conjunto dos pares escolhidos, então (V, A) é um **grafo aleatório** em $\mathcal{G}(n)$. A probabilidade de que o grafo (V, A) assim construído seja idêntico a um determinado elemento de $\mathcal{G}(n)$ que tenha m arestas é

$$p^m \, (1 - p)^{N-m} .$$

Se $p = \frac{1}{2}$ então todos os 2^N grafos em $\mathcal{G}(n)$ são equiprováveis: a probabilidade de obter qualquer um deles é $1/2^N$.

Exercícios

∘ **E 1.287** Mostre que quase todo grafo em $\mathcal{G}(n)$ tem mais que 10000 arestas.

E 1.288 Prove que quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n)$ é conexo. (Veja a seção 1.18.)

[52] "Coleção" é o mesmo que "conjunto".
[53] Naturalmente, só estamos interessados em propriedades invariantes sob isomorfismo (veja o capítulo 2).

Capítulo 2

Isomorfismo

Dois grafos são isomorfos se têm a mesma "estrutura". A definição exata do conceito é um pouco trabalhosa, como veremos a seguir.

Um **isomorfismo** (= *isomorphism*) entre dois grafos G e H é uma bijeção[1] f de V_G em V_H tal que, para todo par (v, w) de elementos de V_G, v e w são adjacentes em G se e somente se $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em H.

Dois grafos G e H são **isomorfos** (= *isomorphic*) se existe um isomorfismo entre eles. A expressão "$G \cong H$" é uma abreviatura de "G é isomorfo a H". $\cong$
Em outras palavras, dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais.

> PROBLEMA DO ISOMORFISMO: Decidir se dois grafos dados são isomorfos.

Exercícios

E 2.1 Um grafo G tem conjunto de vértices $\{a, b, c, d\}$ e conjunto de arestas $\{ab, bc, cd, da\}$. Um grafo H tem conjunto de vértices $\{a, b, c, d\}$ e conjunto de arestas $\{ab, bd, dc, ca\}$. Os grafos G e H são iguais?

E 2.2 Os grafos G e H descritos a seguir são isomorfos?

$$\begin{array}{ll} V_G = \{a, b, c, d, e, f, g\} & E_G = \{ab, bc, cd, cf, fe, gf, ga, gb\} \\ V_H = \{h, i, j, k, l, m, n\} & E_H = \{hk, nj, jk, lk, lm, li, ij, in\} \end{array}$$

E se trocarmos hk por hn em E_H?

E 2.3 Os grafos da figura 2.1 são isomorfos?

[1] Uma *bijeção* é uma função f de um conjunto A em um conjunto B tal que (1) $f(a) \neq f(a')$ sempre que $a \neq a'$ e (2) para todo b em B existe a em A tal que $b = f(a)$.

Figura 2.1: Os grafos da figura são isomorfos?

E 2.4 Mostre que dois caminhos são isomorfos se e somente se têm o mesmo comprimento. Mostre que dois circuitos são isomorfos se e somente se têm o mesmo comprimento.

E 2.5 Faça uma lista de todos os grafos sobre o conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ que sejam dois a dois não isomorfos. (Em outras palavras, faça a lista modo que todo grafo com 4 vértices seja isomorfo a um e apenas um dos grafos da lista.)

E 2.6 Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, faça uma lista de todas as árvores sobre o conjunto de vértices $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que sejam duas a duas não isomorfas.

E 2.7 Os grafos da figura 2.2 são isomorfos dois a dois?

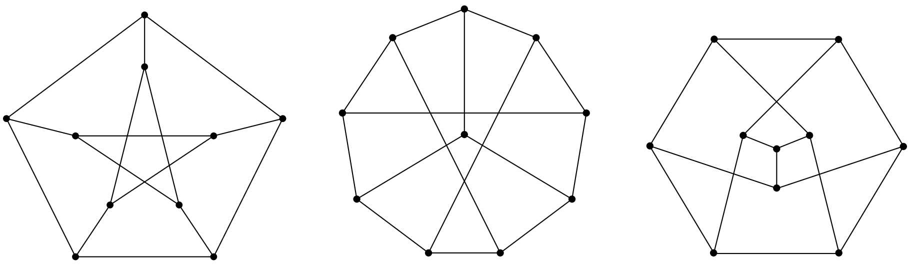


Figura 2.2: Esses grafos são dois a dois isomorfos?

E 2.8 Os grafos da figura 2.3 são isomorfos? Justifique.

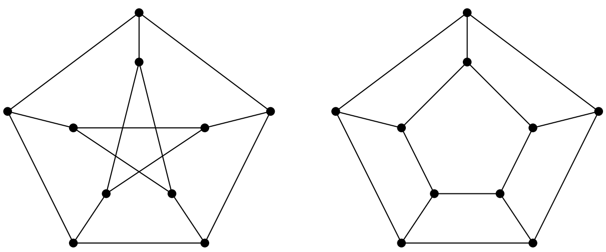


Figura 2.3: Os grafos da figura são isomorfos?

E 2.9 Os grafos da figura 2.4 são isomorfos? Justifique.

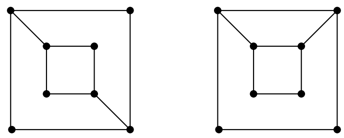


Figura 2.4: Esses grafos são isomorfos?

E 2.10 Seja G a grade 3-por-4 e H a grade 4-por-3 (veja exercício 1.6). Os grafos G e H são iguais? são isomorfos?

E 2.11 Mostre que a grade p-por-q e o grafo definido no exercício 1.7 são isomorfos.

E 2.12 Mostre que o cubo Q_3 é isomorfo a algum subgrafo do Q_4.

E 2.13 Mostre que o cubo Q_4 tem um subgrafo isomorfo à grade 4-por-4.

E 2.14 Para quais valores de t os dois componentes do grafo do bispo t-por-t são isomorfos?

D 2.15 Caracterize os grafos que são isomorfos a um subgrafo do Q_k.

E 2.16 Suponha que os grafos G e H são isomorfos. Mostre que $n(G) = n(H)$ e $m(G) = m(H)$. Mostre que para qualquer isomorfismo f de G em H tem-se $\mathrm{d}_G(v) = \mathrm{d}_H(f(v))$ para todo v em V_G. Mostre que se G tem um circuito de comprimento k então H também tem um circuito de comprimento k.

E 2.17 (ALGORITMO) O seguinte algoritmo se propõe a decidir se dois grafos, G e H, são isomorfos:

> examine todas as bijeções de V_G em V_H;
> se alguma delas for um isomorfismo, então G é isomorfo a H;
> caso contrário, G e H não são isomorfos.

Discuta o algoritmo.

E 2.18 (ALGORITMO) O seguinte algoritmo se propõe a decidir se dois grafos, G e H, são isomorfos:

> se $n(G) \neq n(H)$ então G e H não são isomorfos;
> se $m(G) \neq m(H)$ então G e H não são isomorfos;
> se $|\{ v \in V_G : \mathrm{d}_G(v) = i \}| \neq |\{ v \in V_H : \mathrm{d}_H(v) = i \}|$ para algum i

então G e H não são isomorfos;

em todos os demais casos, G é isomorfo a H.

Discuta o algoritmo.

E 2.19 Sejam G e H dois grafos e f uma bijeção de V_G em V_H tal que $\mathrm{d}_G(v) = \mathrm{d}_H(f(v))$ para todo v em V_G. É verdade que $G \cong H$?

∘ **E 2.20** Certo ou errado? Para mostrar que dois grafos G e H com mesmo número de vértices *não* são isomorfos basta exibir uma bijeção f de V_G em V_H e um par de vértices u e v em V_G tal que (1) $uv \in E_G$ mas $f(u)f(v) \notin E_H$ ou (2) $uv \notin E_G$ mas $f(u)f(v) \in E_H$.

E 2.21 Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos grafos que representam os alcanos que têm fórmula C_4H_{10}. (Veja exercício 1.5.) Cada um desses alcanos tem 4 vértices de grau 4 e 10 vértices de grau 1. Quantos grafos dois-a-dois não isomorfos há em $\mathcal{A}$?

E 2.22 Mostre que o grafo das arestas (veja o exercício 1.24) de um K_5 é isomorfo ao complemento do grafo de Petersen.

E 2.23 É verdade que todo grafo é isomorfo ao grafo das arestas (veja exercício 1.24) de algum outro grafo?

E 2.24 Seja X um conjunto de vértices de um grafo G. Suponha que o subgrafo induzido $G[X]$ é uma estrela (veja a seção 1.2) com 4 vértices. Mostre que G não é isomorfo ao grafo das arestas (veja exercício 1.24) de outro grafo, ou seja, que não existe grafo H tal que $G \cong L(H)$.

E 2.25 Seja G o grafo de Petersen. Dados quaisquer dois vértices u e v de G, mostre que existe um isomorfismo de G em G (isomorfismos desse tipo são conhecidos como *automorfismos*) que leva u em v. Dadas quaisquer duas arestas uv e xy de G, mostre que existe um isomorfismo de G em G que leva uv em xy (ou seja, leva u em x e v em y ou leva u em y e v em x).

E 2.26 Um grafo é **auto-complementar** se for isomorfo ao seu complemento. Mostre que se G é um grafo auto-complementar então $n(G) := 0 \pmod 4$ ou $n(G) := 1 \pmod 4$.[2]

[2] A expressão "$x := i \pmod 4$" significa que o resto da divisão de x por 4 e o resto da divisão de i por 4 são iguais, ou seja, que $x \bmod 4 = i \bmod 4$. Em outras palavras, $x - i$ é divisível por 4.

D 2.27 Encontre uma caracterização eficiente de grafos não isomorfos. Em outras palavras, encontre uma propriedade $\mathcal{X}$ que seja fácil de verificar e que torne verdadeira a seguinte afirmação: "Dois grafos G e H não são isomorfos se e somente se $\mathcal{X}$".

D 2.28 (ALGORITMO) Esboce um algoritmo rápido que resolva o problema do isomorfismo (isto é, decida se dois grafos dados são isomorfos).

Capítulo 3

Síntese de grafos com graus dados

Um grafo G **realiza** uma sequência $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ de números naturais[1] se os vértices do grafo são $1, 2, \ldots, n$ e $\mathrm{d}(i) = g_i$ para todo i.

Uma sequência $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ de números naturais é **gráfica** se existe um grafo que a realize. sequência gráfica

PROBLEMA DA SÍNTESE: Dada uma sequência de números naturais, decidir se ela é ou não gráfica.

Esse problema é às vezes chamado de *graph design problem*.

Exercícios

E 3.1 Considere as sequências $(2, 2, 0)$, $(1, 1, 2, 2)$, $(0, 3, 1, 0)$, $(0, 1, 2, 2, 3)$, $(3, 3, 2, 2, 1)$, $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ e $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$. Quais delas são gráficas?

E 3.2 Suponha que $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ é uma sequência gráfica. Mostre que $g_i \leq n - 1$ para todo i e que $\sum g_i$ é par. Formule a recíproca; ela é verdadeira?

E 3.3 Mostre que uma sequência $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ é gráfica se e somente se a sequência $(n-g_1-1, n-g_2-1, \ldots, n-g_n-1)$ é gráfica. (Este fato pode ser usado como base de um algoritmo que reconhece sequências gráficas.)

E 3.4 Prove que para cada $n \geq 5$ existe um grafo 4-regular com n vértices.

E 3.5 É verdade que para cada número r existe um grafo r-regular? É verdade que para cada par (r, n) de números tal que $r < n$ existe um grafo r-regular com n vértices?

[1] O conjunto dos números naturais é $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

E 3.6 Suponha que $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ é uma sequência gráfica e k é um número natural $\leq n$. Mostre que a sequência

$$(k, g_1{+}1, g_2{+}1, \ldots, g_k{+}1, g_{k+1}, \ldots, g_n)$$

também é gráfica. Formule a recíproca deste fato; ela é verdadeira?

⋆ **E 3.7** (TEOREMA DE HAVEL E HAKIMI[2]) *Seja* $(k, g_1, g_2, \ldots, g_n)$ *uma sequência de números naturais tal que* $k \geq g_1 \geq g_2 \geq \ldots \geq g_n$. *Suponha que a sequência*

$$(g_1 - 1,\ g_2 - 1,\ \ldots,\ g_k - 1,\ g_{k+1},\ \ldots,\ g_n)$$

é gráfica. Mostre que a primeira sequência também é gráfica.

⋆ **E 3.8** (TEOREMA DE ERDŐS[3] E GALLAI[4]) *Mostre que uma sequência* $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ *de números naturais é gráfica se e somente se* $\sum_i g_i$ *é par e*

$$\sum_{i=1}^{k} g_i \ \leq\ k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\,(k, g_i)$$

para cada k *tal que* $1 \leq k \leq n$.

E 3.9 (ALGORITMO) Esboce um algoritmo eficiente que resolva o problema de síntese enunciado acima, ou seja, decida se uma dada sequência de números naturais é gráfica. Busque inspiração nos exercícios 3.6 e 3.7 ou no exercício 3.8.

E 3.10 Sejam $g_1, \ldots, g_n$ números inteiros positivos. Suponha que $\sum_{i=1}^{n} g_i = 2(n-1)$. Mostre que existe uma árvore (veja seção 1.15) T com vértices $1, \ldots, n$ tal que $\mathrm{d}(i) = g_i$ para cada i.

---

[2] Publicado em 1955 por Václav Havel e em 1962 por S. Louis Hakimi.
[3] Paul Erdős (1913 − 1996). (Veja verbete na Wikipedia.)
[4] Tibor Gallai (1912 − 1992).

Capítulo 4

Grafos bicoloráveis

Uma **bicoloração** de um grafo G é uma bipartição[1] $\{U, W\}$ de V_G tal que toda aresta de G tem uma ponta em U e outra em W. (Você pode imaginar que todos os vértices em U são vermelhos e todos os vértices em W são azuis.) Por exemplo, todo grafo bipartido (veja seção 1.2) tem uma bicoloração óbvia.

> PROBLEMA DA BICOLORAÇÃO: Encontrar uma bicoloração de um grafo dado.

Faz parte do problema decidir se o grafo dado admite[2] bicoloração.[3] Diremos que um grafo é **bicolorável** se admite bicoloração. Portanto, um grafo bicolorável é o mesmo que um grafo bipartido.[4]

Como veremos adiante (exercício 4.15), um grafo é bicolorável se e somente se não contém circuito ímpar. Dizemos que um circuito é **ímpar** se seu comprimento é um número ímpar.

Exercícios

$\star$ **E 4.1** Mostre que um grafo G é bicolorável se e somente se E_G é um corte.

E 4.2 Mostre que o grafo do cavalo t-por-t é bicolorável.

---

[1] Uma **bipartição** de um conjunto V é um par $\{U, W\}$ de subconjuntos não vazios de V tal que $U \cup W = V$ e $U \cap W = \emptyset$. A bipartição é o par $\{U, W\}$. Não faz sentido dizer "U é *uma das bipartições* de V". Diga "U é um dos elementos da bipartição".

[2] A expressão "admite bicoloração" significa o mesmo que "tem uma bicoloração".

[3] Muitos problemas na teoria dos grafos são do tipo "mostre que este grafo *não* tem a propriedade X." No presente caso, a questão é "mostre que este grafo grafo não admite bicoloração." A resposta "Tente todas as possíveis bipartições de V_G" não é satisfatória, pois o número de bipartições é enorme: um conjunto de tamanho n tem 2^{n-1} diferentes bipartições.

[4] Na verdade, há uma sutil distinção entre os dois conceitos: um grafo bicolorável só se torna bipartido depois que uma de suas bicolorações for explicitamente dada.

E 4.3 É verdade que o grafo do bispo t-por-t é bicolorável?

E 4.4 Mostre que todo cubo Q_k é bicolorável.

E 4.5 Mostre que toda grade é bicolorável.

∘ **E 4.6** Mostre que todo caminho é bicolorável. Mostre que todo circuito de comprimento par é bicolorável.

E 4.7 Mostre que um grafo pode ter duas ou mais bicolorações diferentes. Mostre que grafos conexos têm no máximo uma bicoloração.

▷ **E 4.8** Mostre que toda floresta é bicolorável.

E 4.9 Seja $\{U, W\}$ uma bicoloração de uma floresta tal que $|U| = |W|$. Mostre que a floresta tem pelo menos uma folha em U e uma em W.

∘ **E 4.10** Suponha que um grafo G é bicolorável. É verdade que todo subgrafo de G é bicolorável? É verdade que todo subgrafo induzido de G é bicolorável?

E 4.11 Os grafos da figura 4.1 são bicoloráveis?

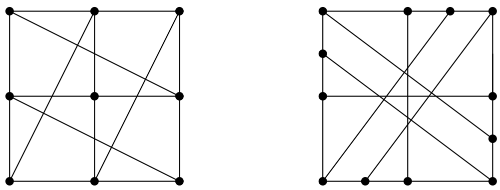


Figura 4.1: Exercício 4.11. Esses grafos são bicoloráveis?

E 4.12 ♡ Quantas arestas pode ter um grafo bicolorável com n vértices?

∘ **E 4.13** Suponha que um grafo G tem um circuito ímpar. Mostre que G não é bicolorável.

⋆ **E 4.14** Mostre que todo grafo sem circuitos ímpares é bicolorável.[5]

[5] Portanto, um circuito ímpar é um *certificado da inexistência* de bicoloração do grafo. Reciprocamente, uma bicoloração do grafo é um *certificado da ausência* de circuitos ímpares.

⋆ **E 4.15** (SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA BICOLORAÇÃO) *Deduza de 4.13 e 4.14 que um grafo é bicolorável se e somente se não tem circuitos ímpares.*

E 4.16 Dizemos que um grafo G tem um circuito *induzido* se existe $X \subseteq V_G$ tal que $G[X]$ é um circuito. Mostre que um grafo é bicolorável se e somente se não tem circuitos ímpares induzidos.

E 4.17 (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente que decida se um grafo dado é bicolorável. O algoritmo deve devolver uma bicoloração do grafo ou um circuito ímpar.

E 4.18 (CAMINHO PAR/ÍMPAR) Seja G um grafo biconexo. Sejam r e s dois vértices de G. Existe um caminho de comprimento par de r a s e um caminho de comprimento ímpar de r a s (os dois caminhos não são necessariamente disjuntos) se e somente se G não é bicolorável.

E 4.19 (CIRCUITO ÍMPAR) Seja G um grafo biconexo. Suponha que G tem um circuito de comprimento ímpar. Mostre que todo vértice de G faz parte de um circuito de comprimento ímpar.

Caracterização de cortes

E 4.20 Caracterize os conjuntos de arestas de um grafo que são cortes, ou seja, estabeleça as condições em que um conjunto de arestas de um grafo é um corte.

E 4.21 (ALGORITMO) Esboce um algoritmo eficiente que execute a seguinte tarefa: Dado um grafo G e um subconjunto C de E_G, o algoritmo decide se C é ou não um corte. Em caso afirmativo, o algoritmo deve devolver um conjunto X de vértices tal que $\partial(X) = C$. Que coisa o seu algoritmo deve devolver em caso negativo?

E 4.22 Seja D um corte e O um circuito em um grafo G. Mostre que $|D \cap E_O|$ é par.

E 4.23 (Recíproca de 4.22.) Seja D um conjunto de arestas de um grafo G. Suponha que $|D \cap E_O|$ é par para todo circuito O em G. Mostre que D é um corte.

E 4.24 Seja D um corte e P um caminho em um grafo G. O que se pode dizer sobre a paridade de $|D \cap E_P|$?

E 4.25 Digamos que um *grafo-com-sinais* é um terno (G, P, N) em que G é um grafo e (P, N) é uma partição do conjunto E_G. As arestas em P são *positivas* e as outras são *negativas*. Um grafo-com-sinais (G, P, N) é *equilibrado* se todo circuito em G tem um número par de arestas negativas. Prove que um grafo-com-sinais (G, P, N) é equilibrado se e somente se existe uma bipartição $\{U, W\}$ de V_G tal que $\partial(U) = N$.

Capítulo 5

Conjuntos estáveis

Um conjunto X de vértices de um grafo é **estável** (= *stable* = *independent*) se seus elementos são dois a dois não adjacentes. Em outras palavras X é estável se nenhuma aresta do grafo tem ambas as pontas em X, ou seja, se o grafo induzido $G[X]$ é vazio. Por exemplo, se $\{U, W\}$ é uma bicoloração do grafo então os conjuntos U e W são estáveis.

Um conjunto estável X^* é **máximo** se não existe conjunto estável X tal que $|X| > |X^*|$. Em outras palavras, X^* é máximo se $|X^*| \geq |X|$ para todo conjunto estável X. máximo

PROBLEMA DO CONJUNTO ESTÁVEL MÁXIMO: Encontrar um conjunto estável máximo num grafo dado.

É importante não confundir *máximo* com *maximal*. Um conjunto estável X' é **maximal** se não faz parte de um conjunto estável maior, ou seja, se não existe conjunto estável X tal que $X \supset X'$.[1] maximal

Eis uma variante do problema: Dado um grafo e um número natural k, encontrar um conjunto estável com k ou mais vértices. (É claro que essa variante nem sempre tem solução.)

O tamanho de um conjunto estável máximo em um grafo G é denotado por

$$\alpha(G) .$$

Em inglês, esse parâmetro é conhecido como *stability number* ou *independence number*. Quem sabe deveríamos chamar α de **índice de estabilidade** do grafo.

[1] A expressão "$A \supset B$" significa "B é subconjunto próprio de A", ou seja, $B \subseteq A$ mas $B \neq A$.

Exercícios

E 5.1 Mostre que o índice de estabilidade é invariante sob isomorfismo. Em outras palavras, se G e H são grafos isomorfos então $\alpha(G) = \alpha(H)$.

◦ **E 5.2** Encontre um conjunto estável máximo em um K_n. Encontre um conjunto estável máximo em um $\overline{K_n}$.

E 5.3 No grafo da figura 5.1, exiba um conjunto estável maximal que não seja máximo.

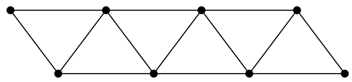


Figura 5.1: Veja exercício 5.3.

◦ **E 5.4** Suponha que X e Y são conjuntos estáveis maximais de um grafo. É verdade que X e Y são disjuntos (ou seja, que $X \cap Y = \emptyset$)?

◦ **E 5.5** Calcule um conjunto estável máximo em um caminho. Calcule um conjunto estável máximo em um circuito.

E 5.6 Encontre um conjunto estável máximo na grade p-por-q.

E 5.7 Exiba um conjunto estável máximo no cubo Q_k.

E 5.8 Encontre um conjunto estável máximo no grafo do cavalo.

E 5.9 Encontre um conjunto estável máximo no grafo do bispo.

E 5.10 Encontre um conjunto estável máximo no grafo da dama. (Em outras palavras, disponha o maior número possível de damas no tabuleiro de modo que elas não se ataquem mutuamente.)

E 5.11 Encontre um conjunto estável máximo no grafo de Petersen.

E 5.12 Encontre um conjunto estável máximo no grafo de Kneser $K(n, k)$ (veja exercício 1.16).

E 5.13 Encontre um conjunto estável máximo no grafo dos estados do Brasil (veja exercício 1.17).

E 5.14 Seja G um grafo bicolorável com bicoloração $\{U, W\}$ e suponha que $|U| \geq |W|$. É verdade que U é um conjunto estável máximo?

E 5.15 Suponha que um grafo G admite bicoloração. É verdade que todo conjunto estável maximal de G é máximo? E se G for uma árvore?

◦ **E 5.16** Seja H um subgrafo de um grafo G. Qual a relação entre $\alpha(H)$ e $\alpha(G)$?

◦ **E 5.17** Sejam G e H dois grafos tais que $V_G \cap V_H = \emptyset$. Mostre que $\alpha(G \cup H) = \alpha(G) + \alpha(H)$.

◦ **E 5.18** Seja A a matriz de adjacências de um grafo G (veja exercício 1.3). Seja X um conjunto estável de G. Que aparência tem a restrição de A a $X \times X$?

E 5.19 (ALGORITMO) Discuta o seguinte algoritmo para o problema do conjunto estável máximo:

> dado um grafo G, examine cada um dos subconjuntos de V_G;
> descarte os subconjuntos que não forem estáveis;
> escolha o maior dos que sobrarem.

D 5.20 (ALGORITMO) *Invente um algoritmo rápido que resolva o problema do conjunto estável máximo. Invente, pelo menos, um algoritmo que produza um conjunto estável grande.*

◦ **E 5.21** (ALGORITMO) Construa um algoritmo que encontre um conjunto estável maximal em qualquer grafo dado. (Sugestão: use uma estratégia "gulosa": em cada iteração, escolha qualquer vértice que seja razoável.[2])

E 5.22 (ALGORITMO) O seguinte algoritmo guloso (= *greedy*) recebe um grafo G e devolve um conjunto estável X:

> $X \leftarrow \emptyset$
> $H \leftarrow G$
> enquanto $V_H \neq \emptyset$ faça
>   escolha v em V_H de modo que $|\mathrm{N}_H(v)|$ seja mínimo
> $X \leftarrow X \cup \{v\}$
> $Z \leftarrow \{v\} \cup \mathrm{N}_H(v)$
> $H \leftarrow H - Z$
> devolva X

[2] De um modo geral, algoritmos gulosos abocanham o objeto que lhes parece mais saboroso na iteração corrente, sem medir as consequências que essa escolha terá a longo prazo.

É verdade que esse algoritmo devolve um conjunto estável máximo para qualquer grafo G dado? E se G for bipartido? E se G for uma árvore?

E 5.23 ♡ Prove que todo conjunto estável maxi*mal* de qualquer grafo G tem pelo menos

$$\left\lceil \frac{n(G)}{\Delta(G)+1} \right\rceil$$

vértices.[3] Deduza daí que $\alpha(G) \geq \frac{n(G)}{\Delta(G)+1}$ para todo grafo G.

E 5.24 ♡ Prove que todo grafo G satisfaz a desigualdade

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V_G} \frac{1}{\mathrm{d}(v)+1} \,.$$

Ou seja, prove que G tem um conjunto estável com $\lceil \sum \frac{1}{\mathrm{d}(v)+1} \rceil$ vértices.

E 5.25 Seja G_t o grafo da dama t-por-t. Use o exercício 5.24 para estimar $\alpha(G_t)$.

E 5.26 Seja X o conjunto estável produzido pelo algoritmo do exercício 5.22. Mostre que $|X| \geq \sum_{v \in V_G} 1/(\mathrm{d}(v)+1)$.

E 5.27 Prove que todo grafo G satisfaz a desigualdade

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\mu+1}\,,$$

sendo n o número de vértices, m o número de arestas, e μ a média dos graus dos vértices de G.

E 5.28 Digamos que uma *cobertura-por-caminhos* de um grafo G é uma coleção $\{P_1, \ldots, P_k\}$ de caminhos em G tal que $V_{P_1} \cup \cdots \cup V_{P_k} = V_G$. Suponha que toda cobertura-por-caminhos de um grafo G tem pelo menos k caminhos. Mostre que $\alpha(G) \geq k$. Em outras palavras, mostre que G tem um conjunto estável com pelo menos k vértices.

E 5.29 (ALGORITMO) Esboce um algoritmo eficiente que receba um grafo bipartido e devolva um conjunto estável máximo.[4]

$\alpha \leq$ **E 5.30** Seja G um grafo sem vértices isolados. Mostre que

[3] Por definição, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro j tal que $j-1 < x \leq j$.
[4] Discutiremos esse algoritmo em detalhe no capítulo 10.

$$\alpha(G) \leq m(G)/\delta(G) \,.$$

Em outras palavras, mostre que G não tem conjuntos estáveis com mais que $\lfloor m(G)/\delta(G) \rfloor$ vértices.[5]

E 5.31 Sejam n e a dois inteiros positivos. Seja $k := \lfloor n/a \rfloor$ e $r := n - ka$. Seja H o grafo que resulta da união de r cópias do K_{k+1} e $a - r$ cópias do K_k (os conjuntos de vértices das cópias são dois a dois disjuntos). Observe que

$$n(H) = n, \quad m(H) = r\binom{k+1}{2} + (a-r)\binom{k}{2} \quad \text{e} \quad \alpha(H) = a \,.$$

Mostre que $\alpha(G) > \alpha(H)$ para qualquer grafo G tal que $n(G) = n$ e $m(G) < m(H)$.[6]

Grafos aleatórios

E 5.32 *Mostre que o índice de estabilidade da maioria dos grafos não passa de pouco mais que* $2 \log_2 n(G)$. *Mais precisamente, mostre que para qualquer número real positivo* ε *tem-se*

$$\alpha(G) < (2 + \varepsilon) \log_2 n$$

para quase todo grafo G *em* $\mathcal{G}(n)$. (Veja a seção 1.18.)

E 5.33 Prove que, por menor que seja o número positivo ε, temos $\alpha(G) < n/(2 \log_2 n + 1 + \varepsilon)$ para quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n)$. (Veja o exercício 5.32, com $\varepsilon = (1 + \varepsilon)/\log_2 n$.)

---

[5] Por definição, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro i tal que $i \leq x < i + 1$.

[6] Pode-se provar que H é o único grafo (a menos de isomorfismo) com n vértices, $m(H)$ arestas e índice de estabilidade a. Este fato é um conhecido teorema de Paul Turán (1910 – 1976). (Veja verbete na Wikipedia.) O complemento de H é conhecido como **grafo de Turán**.

Capítulo 6

Cliques

Uma **clique**[1] (= *clique*) ou **conjunto completo** num grafo é qualquer conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Em outras palavras X é uma clique se o grafo induzido $G[X]$ é completo.

> PROBLEMA DA CLIQUE MÁXIMA: Encontrar uma clique máxima num grafo dado.

Eis uma variante do problema: dado um grafo e um número natural k, encontrar uma clique com k ou mais vértices.

O tamanho de uma clique máxima de um grafo G é denotado por

$$\omega(G) \, .$$

Em inglês, esse parâmetro é conhecido como *clique number*.

Exercícios

∘ **E 6.1** Encontre uma clique máxima em um K_n. Encontre uma clique máxima em um $\overline{K_n}$.

∘ **E 6.2** Encontre uma clique máxima em um caminho. Encontre uma clique máxima em um circuito.

E 6.3 Seja G um circuito de comprimento 6. Encontre uma clique máxima no grafo $\overline{G}$.

[1] A palavra *clique* é um neologismo importado do inglês. A palavra denota uma "panelinha" ou um grupo fechado de pessoas que se conhecem entre si. Nesse contexto, a palavra não tem qualquer relação com "estalido" e com expressões como "dê um clique com o botão esquerdo do mouse".

E 6.4 Exiba um grafo e uma clique que seja maximal mas não máxima.

E 6.5 Encontre uma clique máxima no grafo do cavalo.

E 6.6 Exiba uma clique máxima no cubo Q_k.

∘ **E 6.7** Suponha que G é um grafo bipartido. Quantos vértices tem uma clique máxima em G?

E 6.8 Encontre uma clique máxima no grafo do bispo.

E 6.9 Encontre uma clique máxima no grafo da dama.

E 6.10 Mostre que toda clique maximal do grafo de Kneser $K(n,k)$ (veja exercício 1.16) tem $\lfloor n/k \rfloor$ vértices. Exiba uma clique máxima em $K(n,k)$.

E 6.11 Qual a relação entre o problema da clique máxima e o problema do conjunto estável máximo (veja capítulo 5)? Como é possível usar um algoritmo que resolve um dos problemas para resolver o outro?

∘ **E 6.12** Prove que $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$ para todo grafo G.

E 6.13 Prove a seguinte relação, válida para qualquer conjunto X de vértices de um grafo G: X é uma clique em G se e somente se X é um conjunto estável em $\overline{G}$. Deduza daí que $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

E 6.14 Suponha que um grafo G tem a seguinte propriedade: para cada vértice v, o conjunto $\mathrm{N}(v)$ é uma clique. Mostre que cada componente de G é uma clique.

E 6.15 Mostre que $\omega(G) \geq 3$ para todo grafo G com mais que $n(G)^2/4$ arestas. (Veja exercício 4.12.)

E 6.16 Suponha que $\omega(G) \leq k$. Quantas arestas G pode ter no máximo (em relação ao número de vértices)?

E 6.17 É verdade que toda clique maximal em uma árvore é máxima?

∘ **E 6.18** (ALGORITMO) Construa um algoritmo que encontre uma clique maximal em qualquer grafo dado.

D 6.19 (ALGORITMO) *Invente um algoritmo rápido que resolva o problema da clique máxima. Invente, pelo menos, um algoritmo que produza uma clique grande em qualquer grafo dado.*

E 6.20 Seja $L(G)$ o grafo das arestas (veja exercício 1.24) de um grafo G. Mostre que para cada vértice v de G, o conjunto $\partial_G(v)$ é uma clique em $L(G)$. Mostre que o conjunto das arestas de qualquer triângulo em G é uma clique em $L(G)$. Mostre que qualquer clique de cardinalidade diferente de 3 em $L(G)$ é subconjunto de algum conjunto da forma $\partial_G(v)$.

E 6.21 Dado um grafo G, calcule uma clique máxima no grafo das arestas $L(G)$. (Veja exercício 6.20.)

E 6.22 Mostre que um grafo H é isomorfo ao grafo das arestas (veja exercício 1.24) de um outro grafo G se e somente se existe uma coleção de cliques de H tal que cada aresta de H tem ambas as pontas em uma e apenas uma das cliques e todo vértice de H pertence a no máximo duas das cliques.

E 6.23 Seja G um grafo planar (veja seção 1.6). Mostre que $\omega(G) \leq 4$.

Capítulo 7

Cobertura por vértices

Uma **cobertura por vértices**[1] (= *vertex cover*), ou simplesmente **cobertura**, de um grafo é qualquer conjunto de vértices que contenha pelo menos uma das pontas de cada aresta. Em outras palavras, um conjunto X de vértices é uma cobertura se toda aresta tem pelo menos uma de suas pontas em X.

> PROBLEMA DA COBERTURA MÍNIMA: Encontrar uma cobertura mínima num grafo dado.

A cardinalidade de uma cobertura mínima de um grafo G é denotada por

$$\beta(G) .$$

Há uma relação simples e íntima entre coberturas por vértices e conjuntos estáveis (veja o exercício 7.6). Essa relação torna o problema da cobertura mínima equivalente ao problema do conjunto estável máximo.

Exercícios

E 7.1 Uma galeria de arte consiste em um grande número de corredores retos que interligam pequenas praças. Um guarda postado numa praça é capaz de vigiar todos os corredores que saem da praça. Qual o número mínimo de guardas necessário para vigiar a galeria toda?

E 7.2 Encontre uma cobertura mínima no grafo do cavalo. Encontre uma cobertura mínima no grafo do bispo.

E 7.3 Encontre uma cobertura mínima no cubo Q_k.

[1] Quem sabe seria melhor dizer "cobertura das arestas por vértices".

$\circ$ **E 7.4** Mostre que um grafo G é bicolorável se e somente se V_G tem um subconjunto U que é, ao mesmo tempo, um conjunto independente e uma cobertura.

$\circ$ **E 7.5** O que é uma cobertura minimal? Use o grafo da figura 5.1 para dar um exemplo de uma cobertura minimal. É verdade que toda cobertura minima é minimal? É verdade que toda cobertura minimal é minima?

$\star$ **E 7.6** Prove a seguinte relação entre coberturas e conjuntos estáveis: em qualquer grafo G, um conjunto X de vértices é uma cobertura se e somente se $V_G \setminus X$ é estável. Deduza daí que $\beta(G) = n(G) - \alpha(G)$.

E 7.7 Mostre que o problema da cobertura mínima é equivalente ao problema do conjunto estável máximo. (Em outras palavras, mostre que qualquer algoritmo para um dos problemas pode ser convertido num algoritmo para o outro.)

E 7.8 Suponha que T é uma árvore. É verdade que toda cobertura minimal de T é mínima?

$\circ$ **E 7.9** Seja $\{U, W\}$ uma bicoloração de um grafo G. Seja $\{X, X'\}$ uma partição de U e $\{Y, Y'\}$ uma partição de W. Suponha que $\mathrm{N}(X) \subseteq Y$. (Veja definição de $\mathrm{N}(X)$ no exercício 1.108.) Mostre que $Y \cup X'$ é uma cobertura.

$\star\circ$ **E 7.10** (SOLUÇÃO APROXIMADA) Especifique um algoritmo que dê uma solução aproximada do problema da cobertura mínima: ao receber um grafo G, o algoritmo deve devolver uma cobertura X tal que $|X| \leq 2\beta(G)$.

E 7.11 Considere a equivalência discutida no exercício 7.7 e a solução aproximada discutida no exercício 7.10. É possível obter uma solução aproximada semelhante para o problema do conjunto estável máximo (veja capítulo 5)?

Capítulo 8

Coloração de vértices

Uma **coloração dos vértices**, ou **recobrimento por conjuntos estáveis**, de um grafo é uma coleção de conjuntos estáveis que cobre o conjunto de vértices. Mais precisamente, uma coloração dos vértices de um grafo G é uma coleção $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ de conjuntos estáveis tal que $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k = V_G$.

Embora isso não seja essencial, é cômodo supor que os conjuntos X_1, $\ldots$, X_k são disjuntos dois a dois. Podemos dizer então que uma coloração dos vértices de G é uma *partição* de V_G em conjuntos estáveis. Cada vértice do grafo estará em um e apenas um desses conjuntos. (É claro que o conceito de coloração de vértices é uma generalização do conceito de bicoloração discutido no capítulo 4.)

Se imaginarmos que cada conjunto estável X_i corresponde a uma cor, podemos dizer que uma coloração de vértices é uma atribuição de cores aos vértices tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes.

Dizemos que uma coloração $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ **usa** k **cores**.[1] Dizemos também que esta é uma k-**coloração**. Se um grafo tem uma k-coloração então também tem uma k'-coloração para todo $k' > k$.

Uma coloração de vértices é **mínima** se o seu número de cores é o menor possível, ou seja, se não existe outra que use menos cores.

> PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE VÉRTICES: Encontrar uma coloração mínima dos vértices de um grafo dado.

O **número cromático** (= *chromatic number*) de um grafo G é o número de cores em uma coloração mínima dos vértices de G. Esse número é denotado por

$$\chi(G) .$$

Um grafo G é k-**colorável** (= k-*colorable*) se $\chi(G) \leq k$. Em particular, "2-colorável" é o mesmo que "bicolorável", conforme o capítulo 4.

[1] Mesmo que algum X_i seja vazio.

Veja o sítio WWW *Graph Coloring Page* de Joseph Culberson na Universidade de Alberta, Canadá.

Uma **cobertura** de G **por cliques** é qualquer partição $\{X_1, \dots, X_k\}$ de V_G tal que cada X_i é uma clique. É claro que uma cobertura de G por cliques é o mesmo que uma coloração dos vértices de $\overline{G}$. O correspondente PROBLEMA DA COBERTURA POR CLIQUES consiste em encontrar a menor cobertura de V_G por cliques.

Exercícios

E 8.1 Uma indústria precisa armazenar um certo conjunto de reagentes químicos. Por razões de segurança, certos pares de reagentes não devem ficar num mesmo compartimento do armazém. Quantos compartimentos o armazém deve ter no mínimo?

◦ **E 8.2** Mostre que o número cromático é invariante sob isomorfismo. Em outras palavras, se G e H são grafos isomorfos então $\chi(G) = \chi(H)$.

◦ **E 8.3** Seja $\{X_1, \dots, X_k\}$ uma coloração dos vértices de um grafo G. Mostre que existe uma coloração $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ tal que os conjuntos $Y_1, \dots, Y_k$ são disjuntos dois a dois.

◦ **E 8.4** Encontre uma coloração mínima dos vértices de um caminho. Repita com um circuito no lugar do caminho. Repita com uma grade no lugar do caminho.

E 8.5 Seja T_t o grafo da torre t-por-t. Encontre uma coloração mínima dos vértices de T_t.

E 8.6 Seja B_t o grafo do bispo t-por-t. Encontre uma coloração mínima dos vértices de B_t.

E 8.7 Seja B_t o grafo do bispo t-por-t. Encontre uma cobertura por cliques mínima do grafo B_t.

E 8.8 Seja C_t o grafo do cavalo t-por-t. Encontre uma coloração mínima dos vértices de C_t. Encontre uma cobertura mínima de C_t por cliques. Considere inicialmente os casos $t = 2, \dots, 6$.

E 8.9 Seja D_t o grafo da dama t-por-t. Encontre uma coloração mínima dos vértices de D_t. Trate inicialmente dos casos $t = 2, \dots, 6$.

E 8.10 Seja R_t o grafo do rei t-por-t. Encontre uma coloração mínima dos vértices de R_t.

E 8.11 Encontre uma coloração mínima do grafo dos estados do Brasil (veja exercício 1.17).

E 8.12 Encontre uma coloração mínima dos vértices do cubo Q_k. Encontre uma cobertura por cliques mínima do cubo Q_k.

E 8.13 Encontre uma coloração mínima dos vértices do grafo de Petersen.

E 8.14 Encontre uma coloração mínima dos vértices do grafo G definido da seguinte maneira: comece com cinco cópias mutuamente disjuntas, digamos B_1, …, B_5, de um grafo completo com 3 vértices; para cada i, acrescente arestas ligando todos os vértices de B_i a todos os de B_{i+1}; finalmente, acrescente arestas ligando todos os vértices de B_5 a todos os de B_1. (Este grafo foi usado por Catlin[2] como contraexemplo para a conjectura de Hajós. Veja exercício 8.70.)

E 8.15 São dadas máquinas 1, …, n e intervalos de tempo I_1, …, I_n. Para cada i, um operador deve cuidar da máquina i durante o intervalo I_i. Se $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, um mesmo operador não pode cuidar de i e j. Qual o número mínimo de operadores suficiente para operar as máquinas? (Veja o exercício 1.22.)

∘ **E 8.16** Exiba um grafo G com duas colorações mínimas diferentes dos vértices de G.

∘ **E 8.17** Suponha que um grafo G tem uma coloração de vértices com k cores. É verdade que G tem uma coloração $\{X_1, \ldots, X_k\}$ tal que X_1 é um conjunto independente máximo?

∘ **E 8.18** Seja G um grafo com pelo menos uma aresta. Prove que existe uma partição $\{A, B\}$ de V_G tal que $\chi(G[A]) + \chi(G[B]) = \chi(G)$.

∘ **E 8.19** Sejam G e H dois grafos tais que $V_G \cap V_H = \emptyset$. Mostre que $\chi(G \cup H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

∘ **E 8.20** Seja H um subgrafo de um grafo G. Qual a relação entre $\chi(H)$ e $\chi(G)$?

---

[2] P. A. Catlin, 1979.

E 8.21 Seja e uma ponte de um grafo G com duas ou mais arestas. Mostre que $\chi(G-e) = \chi(G)$.

E 8.22 Seja v uma articulação de um grafo G. É verdade que $\chi(G) = \chi(G-v)$?

E 8.23 Seja v um vértice de um grafo G. Suponha que $\mathrm{d}(v) < \chi(G)-1$. Mostre que $\chi(G) = \chi(G-v)$.

E 8.24 Mostre que, para qualquer grafo G, toda coloração dos vértices de G
$\chi \geq$ usa pelo menos $\lceil n(G)/\alpha(G) \rceil$ cores. Em outras palavras, mostre que $\chi(G) \geq n(G)/\alpha(G)$.

E 8.25 (GENERALIZAÇÃO DE 8.24) Para cada vértice v de um grafo G, seja α_v a cardinalidade de um conjunto estável máximo dentre os que contêm v.
$\chi \geq$ Mostre que $\chi(G) \geq \sum_v 1/\alpha_v$.

E 8.26 Mostre que todo grafo com n vértices e número cromático k tem no
$\chi \geq$ máximo $\frac{1}{2}(n^2 - n^2/k)$ arestas. Deduza daí que $\chi(G) \geq n^2/(n^2-2m)$, para todo grafo G com n vértices e m arestas.[3] Deduza daí que $\chi(G) \geq n/(n-r)$ se G é r-regular.[4]

E 8.27 Mostre que $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m(G) + \frac{1}{4}}$ para todo grafo G.

E 8.28 (ALGORITMO) O algoritmo que descreveremos a seguir resolve o problema da coloração de vértices? Ao receber um grafo G, o algoritmo faz o seguinte:

> Escolhe um conjunto estável máximo, digamos X_1, em G. Em seguida, escolhe um conjunto estável máximo X_2 em $G - X_1$. Depois, escolhe um conjunto estável máximo X_3 em $(G-X_1)-X_2$. E assim por diante, até que não haja mais vértices a escolher.

E 8.29 (ALGORITMO) O seguinte algoritmo guloso (= *greedy*) recebe um grafo G e devolve uma coloração dos vértices $X_1, \ldots, X_k$. Cada iteração começa com um coleção $X_1, \ldots, X_k$ de conjuntos estáveis; a primeira pode começar com a coleção vazia, isto é, com $k = 0$. Cada iteração consiste no seguinte:

---

[3] Alguns exemplos: se $m > 0$ então $\chi > 1$, se $m > n^2/4$ então $\chi > 2$, se $m > 4n^2/9$ então $\chi > 9$.

[4] Exemplos: se $r > 0$ então $\chi > 0$, se $r > n/2$ então $\chi > 2$, se $r > 2n/3$ então $\chi > 3$.

CASO 1: $X_1 \cup \ldots \cup X_k = V_G$.
Devolva $X_1, \ldots, X_k$ e pare.

CASO 2: $X_1 \cup \ldots \cup X_k \neq V_G$.
Escolha um vértice v em $V_G \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_k)$.
Se $X_i \cup \{v\}$ é estável para algum i entre 1 e k
então comece nova iteração com $X_i \cup \{v\}$ no papel de X_i.
Caso contrário, faça $X_{k+1} = \{v\}$ e
comece nova iteração com $k+1$ no papel de k.

Este algoritmo resolve o problema da coloração de vértices?

E 8.30 ♡ Prove que todo grafo G admite uma coloração de vértices com apenas $\Delta(G) + 1$ cores. Em outras palavras, prove que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ para todo grafo G.

∘ **E 8.31** É verdade que $\chi(G) \geq \Delta(G)$ para todo grafo G? Em outras palavras, é verdade que toda coloração dos vértices de G usa pelo menos $\Delta(G)$ cores?

E 8.32 Prove que todo grafo G admite uma cobertura por cliques de tamanho no máximo $n(G) - \delta(G)$. Em outras palavras, mostre que $\chi(\overline{G}) \leq n(G) - \delta(G)$.

E 8.33 ♡ Seja G um grafo conexo não regular. Mostre que $\chi(G) \leq \Delta(G)$. (Compare com o exercício 8.30.)

E 8.34 (TEOREMA DE BROOKS[5]) Seja G um grafo conexo não completo diferente de um circuito ímpar. Mostre que $\chi(G) \leq \Delta(G)$. (Compare com o exercício 8.33.)

E 8.35 Mostre que a diferença $\Delta(G) - \chi(G)$ pode ser arbitrariamente grande. Mostre que o quociente $\Delta(G)/\chi(G)$ pode ser arbitrariamente grande. (Compare com o exercício 8.30.)

E 8.36 (GENERALIZAÇÃO DE 8.30) Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os vértices de um grafo G e suponha que $\mathrm{d}(v_1) \geq \mathrm{d}(v_2) \geq \cdots \geq \mathrm{d}(v_n)$. Mostre que $\chi(G) \leq \max_{i=1}^{n} \min\{i, \mathrm{d}(v_i) + 1\}$. (Sugestão: o lado direito da desigualdade é igual a $\max\{\, i : \mathrm{d}(v_i) + 1 \geq i \,\}$.)

E 8.37 Seja G um grafo dotado da seguinte propriedade: todo par de circuitos ímpares tem (pelo menos) um vértice em comum. Prove que G admite uma 5-coloração dos vértices.

[5] Publicado por R. L. Brooks em 1941.

⋆ **E 8.38** Suponha que um grafo G tem uma clique com k vértices. Mostre que toda coloração de vértices de G usa pelo menos k cores. Em outras palavras, mostre que

$\chi \geq$

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

para todo grafo G. (Veja exercícios 6.8 e 6.9.)

E 8.39 Suponha que um grafo G tem uma clique com k vértices e uma coloração dos vértices em k cores. Prove que a clique é máxima e que a coloração é mínima.[6]

E 8.40 Prove que $\chi(G) = \omega(G)$ para todo grafo bipartido G.

⋆ **E 8.41** (ALGORITMO[7]) Sejam v_1, v_2, …, v_n os vértices de um grafo G. Suponha que, para $i = 2, \ldots, n$, o conjunto

$$\{v_1, \ldots, v_{i-1}\} \cap \mathrm{N}(v_i)$$

é uma clique. Mostre que $\chi(G) = \omega(G)$. (Sugestão: Escreva um algoritmo que calcule uma coloração de vértices mínima e uma clique máxima.)

E 8.42 Mostre que, para todo k, existe um grafo sem cliques de tamanho k que não admite coloração com k (ou menos) cores. Em outras palavras, mostre que existem grafos G tais que $\chi(G) > \omega(G)$. Mostre que para cada k existe um grafo G tal que $\chi(G) = k$ e $\omega(G) = 2$.

E 8.43 Suponha que um grafo G tem um conjunto estável com k vértices. Mostre que toda cobertura de V_G por cliques usa pelo menos k cliques. Deduza daí que $\chi(\overline{G}) \geq \alpha(G)$.

E 8.44 Suponha que um grafo G não tem subgrafo induzido isomorfo a um caminho com 4 vértices. Mostre que $\chi(G) = \omega(G)$.

E 8.45 Suponha que um grafo G não tem subgrafo induzido isomorfo a $K_{1,3}$ nem a $K_4 - e$. Mostre $\chi(G) \leq \omega(G) + 1$.

E 8.46 Seja G um grafo (não necessariamente bicolorável) e seja $\{R, S\}$ uma partição de V_G. Suponha ainda que $\mathrm{d}(R) < k$ (ou seja, há menos que k arestas com uma ponta em R e outra em S). Suponha que os grafos $G[R]$ e $G[S]$ admitem colorações de vértices com k cores apenas. Mostre que G admite uma coloração de vértices com k cores.

---

[6] Uma tal clique pode ser usada como *certificado* da minimalidade de uma coloração. Reciprocamente, uma tal coloração pode ser usada como *certificado* da maximalidade da clique.

[7] *Perfect Elimination Scheme.*

E 8.47 Seja P um caminho de comprimento máximo em um grafo G. Mostre que $\chi(G) \leq n(P)$. (Em outras palavras, se um grafo não tem caminho com mais que k vértices então pode ser colorido com apenas k cores.)

E 8.48 (TEOREMA DE GALLAI E ROY[8]) Para qualquer orientação acíclica[9] D de um grafo G, seja $l(D)$ o comprimento de um caminho orientado[10] máximo em D. Então

$$\chi(G) = 1 + \min_D l(D) \,.$$

D 8.49 (ALGORITMO) *Invente um algoritmo rápido que resolva o problema da coloração de vértices.*

Coloração com número dado de cores

Se o número de cores disponíveis estiver fixo, temos a seguinte variante do problema da coloração:

> PROBLEMA DA COLORAÇÃO COM NÚMERO DADO DE CORES: Dado um número natural k e um grafo G, encontrar uma k-coloração de G.

É evidente que o problema nem sempre tem solução. O problema da 2-coloração, por exemplo, equivale ao problema de decidir se um dado grafo é bicolorável (veja exercício 4.15).

E 8.50 O seguinte algoritmo recebe um grafo G e promete devolver uma bicoloração de G. Cada iteração começa com um par (X_1, X_2) de conjuntos estáveis; a primeira pode começar com $X_1 = X_2 = \emptyset$. Cada iteração consiste no seguinte:

CASO 1: $X_1 \cup X_2 = V_G$.
  Devolva X_1, X_2 e pare.

CASO 2: $X_1 \cup X_2 \neq V_G$.
  Escolha um vértice v em $V_G \setminus (X_1 \cup X_2)$.
  Escolha i em $\{1, 2\}$ tal que $X_i \cup \{v\}$ é estável.
  Comece nova iteração com $X_i \cup \{v\}$ no papel de X_i.

O algoritmo cumpre a promessa (ou seja, produz uma 2-coloração dos vértices do grafo)?

[8] Publicado em 1966 por Tibor Gallai e em 1967, independentemente, por Bernard Roy.

[9] Uma **orientação** de um grafo consiste na substituição de cada aresta vw pelo par ordenado (v, w) ou pelo par ordenado (w, v). Um tal par ordenado é chamado **arco**. O resultado é um **grafo dirigido**. Um grafo dirigido D é **acíclico** se não tem circuitos orientados. Um circuito é **orientado** se todos os seus arcos são dirigidas no mesmo sentido.

[10] Um caminho é **orientado** se todos os seus arcos são dirigidas no mesmo sentido.

E 8.51 O seguinte algoritmo guloso recebe um grafo G e promete devolver uma 3-coloração de G. Cada iteração começa com conjuntos estáveis X_1, X_2 e X_3; a primeira pode começar com $X_1 = X_2 = X_3 = \emptyset$. Cada iteração consiste no seguinte:

CASO 1: $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = V_G$.
Devolva X_1, X_2, X_3 e pare.

CASO 2: $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \neq V_G$.
Escolha um vértice v em $V_G \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$.
Escolha i em $\{1, 2, 3\}$ tal que e $X_i \cup \{v\}$ é estável.
Comece nova iteração com $X_i \cup \{v\}$ no papel de X_i.

O algoritmo cumpre o prometido?

E 8.52 Considere o seguinte algoritmo guloso, que recebe um grafo G e promete devolver uma 3-coloração de G:

$W \leftarrow V_G$
enquanto $W \neq \emptyset$ faça
  escolha w em W
  $i \leftarrow 1$
  enquanto $\mathrm{N}(w) \cap X_i \neq \emptyset$ faça $i \leftarrow i + 1$
  $X_i \leftarrow X_i \cup \{w\}$
  $W \leftarrow W \setminus X_i$
devolva X_1, X_2, X_3

O algoritmo cumpre o que prometeu?

E 8.53 Quantas arestas no máximo pode ter um grafo com n vértices que admite uma 3-coloração dos vértices?

E 8.54 Imagine uma grade em que todos os vértices exceto um estão coloridos. Cada vértice colorido tem uma de 3 possíveis cores. Invente uma "heurística da troca de cores em componentes bicoloridas" (compare com o exercício 12.22) para obter, a partir da coloração parcial dada, uma coloração de todos os vértices com apenas 3 cores.

E 8.55 Sejam I e J conjuntos estáveis num grafo G e suponha $I \cap J = \emptyset$. Seja X o conjunto dos vértices de um componente do grafo bipartido $G[I \cup J]$. Mostre que o conjunto $I \oplus X$ é estável no grafo G.

E 8.56 (ALGORITMO) Descreva uma heurística[11] de coloração de vértices baseada no exercício 8.55. (No início de cada iteração temos uma coloração

[11] Segundo Wilf (em *Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, 1986), heurísticas são *methods that seem to work well in practice, for reasons nobody understands.*

parcial dos vértices; cada iteração escolhe um vértice não colorido e procura atribuir a ele uma das cores já usadas.)

D 8.57 Como se sabe, grafos 2-coloráveis são caracterizados pela ausência de circuitos ímpares. Invente uma boa caracterização dos grafos 3-coloráveis. Invente uma boa caracterização dos grafos k-coloráveis.

D 8.58 (ALGORITMO) Invente um algoritmo rápido que resolva o problema da 3-coloração de vértices.[12]

D 8.59 (ALGORITMO) Seja k um número natural maior que 3. Invente um algoritmo rápido que resolva o problema da k-coloração de vértices.

Coloração de grafos planares

Grafos planares podem ser coloridos com poucas cores.

E 8.60 Mostre que $\chi(G) \leq 6$ para todo grafo planar G. (Veja os exercícios 1.275 e 8.30.)

E 8.61 (TEOREMA DE HEAWOOD[13]) Mostre que $\chi(G) \leq 5$ para todo grafo planar G. (Veja exercícios 1.275, 8.54 e 8.56.)

E 8.62 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que produza uma 5-coloração dos vértices de qualquer grafo planar dado.

!! E 8.63 (TEOREMA DAS QUATRO CORES[14]) *Mostre que todo grafo planar admite uma coloração de vértices com 4 ou menos cores. Em outras palavras, mostre que*

$$\chi(G) \leq 4$$

para todo grafo planar G.

∘ **E 8.64** Mostre que existem grafos planares que não admitem coloração de vértices com 3 cores apenas.

12 Não se conhece um algoritmo rápido que decida se um grafo é 3-colorável. Em termos técnicos, esse problema de decisão é NP-completo. Veja observação na página 5.

13 Percy John Heawood (1861 − 1955).

14 Demonstrado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Demonstração simplificada em 1997 por Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul D. Seymour e Robin Thomas. Veja as páginas "The four color theorem" e "Four-Color Theorem".

E 8.65 É verdade que $\chi(G) = \omega(G)$ para todo grafo planar G? (Veja exercícios 8.38 e 8.39.)

E 8.66 Seja G o grafo dos estados do Brasil (veja exercício 1.17). Mostre que $\chi(G) = 4$.

!! E 8.67 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que produza uma 4-coloração dos vértices de qualquer grafo planar dado.

E 8.68 Mostre que $\alpha(G) \geq \frac{1}{4}n(G)$ para todo grafo planar G. (Seria muito interessante ter uma prova desse fato que não dependesse do teorema das quatro cores, exercício 8.63.)

E 8.69 Mostre que o conjunto das faces de todo grafo exoplanar (veja o exercício 1.283) é 3-colorável.

Coloração versus menores

Estude antes o capítulo 19 (Planaridade).

! E 8.70 Prove que a seguinte conjectura de Hajós[15] é falsa: Para todo grafo G, se $\chi(G) \geq k$ então G tem um menor topológico (veja seção 1.16) isomorfo a K_k.

E 8.71 Seja G um grafo tal que $\chi(G) \geq 3$. Mostre que G tem um menor (veja seção 1.16) isomorfo a K_3. (Compare com o exercício 8.38.)

E 8.72 Seja G um grafo tal que $\chi(G) \geq 4$. Mostre que G tem um menor isomorfo a K_4.

!! E 8.73 Seja G um grafo tal que $\chi(G) \geq 5$. Mostre que G tem um menor isomorfo a K_5. (Isto é equivalente ao teorema da Quatro Cores, exercício 8.63.)

D 8.74 (CONJECTURA DE HADWIGER[16]) *Para todo número natural $k \geq 2$ e todo grafo G, se $\chi(G) \geq k$ então G tem um menor isomorfo a K_k.* (Esta é uma profunda generalização do teorema da Quatro Cores, exercício 8.63.)

---

[15] A conjectura foi proposta por G. Hajós, em 1961.

[16] A conjectura foi proposta por H. Hadwiger, em 1943.

Coloração de grafos aleatórios

E 8.75 Seja ε um número real positivo. Mostre que

$$\chi(G) > \frac{1}{2+\varepsilon}\,\frac{n}{\log_2 n}$$

para quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n)$. (Veja a seção 1.18.)

! E 8.76 *Seja* ε *um número real positivo menor que* 2. *Mostre que*

$$\chi(G) < \frac{1}{2-\varepsilon}\,\frac{n}{\log_2 n}$$

para quase todo grafo G *em* $\mathcal{G}(n)$. (Compare com o exercício 8.75.)

Grafos perfeitos

Um grafo é **perfeito** (= *perfect*) se $\chi(G[X]) = \omega(G[X])$ para todo subconjunto X de V_G. (Veja o exercício 8.38.)

E 8.77 Exiba um grafo não perfeito G tal que $\chi(G) = \omega(G)$.

E 8.78 Mostre que todo grafo bicolorável é perfeito.

! E 8.79 (TEOREMA DE LOVÁSZ[17]) Mostre que o complemento de todo grafo perfeito é perfeito.

!! E 8.80 (TEOREMA FORTE DO GRAFO PERFEITO[18]) Um **buraco ímpar** (= *odd hole*) é um circuito induzido com um número ímpar ≥ 5 de vértices.

Prove que um grafo G é perfeito se e somente se nem G nem $\overline{G}$ contêm um buraco ímpar.[19] (Esta caracterização de grafos perfeitos havia sido conjecturada por Claude Berge em 1960.)

---

[17] Publicado por Lásló Lovász em 1972.

[18] *Strong Perfect Graph Theorem*.

[19] Este teorema foi provado em 2002 por Maria Chudnovsky e Paul D. Seymour com base em trabalho prévio de Neil Robertson e Robin Thomas.

Capítulo 9

Emparelhamentos

Duas arestas de um grafo são **adjacentes** se têm uma ponta comum. Um **emparelhamento** (= *matching*) é um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes.

Em outras palavras, um emparelhamento num grafo é um conjunto M de arestas tal que $|M \cap \partial(v)| \leq 1$ para cada vértice v.

> PROBLEMA DO EMPARELHAMENTO MÁXIMO: Encontrar um emparelhamento máximo num grafo dado.

Um emparelhamento M^* é **máximo** se não existe um emparelhamento M tal que $|M| > |M^*|$. A cardinalidade de um emparelhamento máximo num grafo G é denotada por

$$\alpha'(G) .$$

A propósito, um emparelhamento M' é **maximal** se não faz parte de um emparelhamento maior, ou seja, se não existe um emparelhamento M tal que $M \supset M'$.

O problema do emparelhamento é um caso particular do problema do conjunto estável (veja o exercício 9.15). Embora não saibamos como resolver este último de maneira eficiente, sabemos como resolver o primeiro.

Um emparelhamento M é **perfeito** (= *perfect matching*) se cada vértice do grafo é ponta de algum elemento de M. Eis uma especialização interessante do problema acima: Encontrar um emparelhamento perfeito num grafo dado. É claro que nem todo grafo tem um emparelhamento perfeito; a dificuldade do problema está em decidir se o grafo dado tem ou não tem um emparelhamento perfeito.

Os seguintes conceitos são importantes no estudo de emparelhamentos:

1. Um emparelhamento M **satura** um vértice v se $\partial(v) \cap M \neq \emptyset$, ou seja, se alguma aresta de M incide em v.
2. Um emparelhamento M **satura** um conjunto X de vértices se M

satura cada vértice em X.

3. Um caminho é **alternante** (= *alternating*) em relação a um emparelhamento M se suas arestas estão alternadamente em M e fora de M. Às vezes é mais cômodo dizer "M-alternante" que "alternante em relação a M".
4. Um **caminho de aumento** (= *augmenting path*) para um emparelhamento M é um caminho M-alternante de comprimento não nulo cujos extremos não estão saturados por M.

Exercícios

◦ **E 9.1** Seja M um conjunto de arestas de um grafo G. Seja H o grafo (V_G, M). Mostre que M é um emparelhamento em G se e somente se $\mathrm{d}_H(v) \leq 1$ para todo vértice v de H.

◦ **E 9.2** Quantas arestas tem um emparelhamento máximo num grafo completo com n vértices?

◦ **E 9.3** Quantas arestas tem um emparelhamento máximo em um grafo bipartido completo?

◦ **E 9.4** Calcule um emparelhamento máximo em um caminho. Calcule um emparelhamento máximo em um circuito.

◦ **E 9.5** Suponha que um grafo G tem um emparelhamento perfeito. Mostre que $n(G)$ é par.

E 9.6 Seja G um K_6 e M um emparelhamento perfeito em G. Mostre que $G - M$ é planar. Mostre que $G - M$ tem um emparelhamento perfeito, digamos M'. Mostre que o complemento de $(G - M) - M'$ é um circuito de comprimento 6.

E 9.7 Calcule um emparelhamento máximo em um grafo 3-regular dotado de circuito hamiltoniano (veja capítulo 17).

◦ **E 9.8** É verdade que todo grafo regular tem um emparelhamento perfeito?

◦ **E 9.9** Encontre um emparelhamento máximo no grafo da dama t-por-t.

E 9.10 Encontre um emparelhamento máximo no grafo do bispo t-por-t.

E 9.11 Encontre um emparelhamento máximo no grafo do cavalo t-por-t.

E 9.12 Quantas arestas tem um emparelhamento máximo no cubo Q_k?

E 9.13 Exiba um grafo G e um emparelhamento em G que seja maximal mas não seja máximo.

E 9.14 É verdade que em qualquer árvore todo emparelhamento maximal é máximo?

E 9.15 Mostre que o problema do emparelhamento máximo é um caso particular do problema do conjunto estável máximo.

E 9.16 É verdade que, em qualquer grafo, todo vértice não isolado é saturado por algum emparelhamento máximo? É verdade que toda aresta pertence a algum emparelhamento perfeito?

▷ **E 9.17** ♡ Sejam M e M' dois emparelhamentos num grafo G. Descreva o grafo $(V_G, M \cup M')$. Descreva o grafo $(V_G, M \oplus M')$.[1] Que acontece se os emparelhamentos M e M' são perfeitos? $M \oplus M'$

E 9.18 Suponha que um grafo G tem uma ponte a. Mostre que ou todos os emparelhamentos perfeitos de G contêm a ou nenhum emparelhamento perfeito de G contém a.

E 9.19 Prove que toda floresta tem no máximo um emparelhamento perfeito.

∘ **E 9.20** Seja M um emparelhamento em um grafo e seja P um caminho M-alternante. Mostre que todo caminho em P também é M-alternante.

E 9.21 Seja M um emparelhamento em um grafo e seja P um caminho M-alternante maximal. Suponha que as duas arestas extremas de P não estão em M. É verdade que P é um caminho de aumento?

⋆ **E 9.22** (CAMINHO DE AUMENTO) *Suponha que P é um caminho de aumento para um emparelhamento M. Prove que*

$$M \oplus E_P$$

é um emparelhamento. Prove que $|M \oplus E_P| > |M|$.

---

[1] Para quaisquer conjuntos A e B, denota-se por $A \oplus B$ o conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. É fácil verificar que $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$\star$ **E 9.23** *Seja M um emparelhamento num grafo G. Suponha que M não é máximo. Prove que existe um caminho de aumento para M.*

$\star$ **E 9.24** (TEOREMA DE BERGE[2]) Prove que um emparelhamento M é máximo se e somente se não existe caminho de aumento para M. (Segue dos exercícios 9.22 e 9.23.)

! E 9.25 (ALGORITMO) Seja M um emparelhamento em um grafo G. Sejam a e b dois vértices não saturados por M. Escreva um algoritmo que encontre um caminho alternante com origem a e término b (ou constate que um tal caminho não existe).

E 9.26 ♡ Seja M um emparelhamento. Seja $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um passeio (veja fim da seção 1.9) cujas arestas estão alternadamente em M e fora de M e suponha que v_0 e v_k não estão saturados por M. Seja A o conjunto das arestas do passeio. Mostre que o conjunto $M \oplus A$ não é necessariamente um emparelhamento. (Compare com o exercício 9.22.)

E 9.27 (SLITHER) Dois jogadores, digamos A e B, se alternam escolhendo vértices num grafo G. Primeiro, A escolhe um vértice v_0. Em seguida, B escolhe um vértice v_1 adjacente a v_0. Depois, A escolhe um vértice adjacente a v_1 mas diferente de v_0 e de v_1. E assim por diante.

Eis uma maneira mais limpa de descrever o jogo: Os vértices escolhidos formam um caminho $v_0 v_1 v_2 \cdots v_k$. Se k é ímpar, A escolhe um vértice v_{k+1} distinto dos demais mas adjacente a v_k. Se k é par, B faz um jogada análoga. O último jogador que puder fazer um movimento vence o jogo.

Prove que B tem uma estratégia vencedora se G tem um emparelhamento perfeito. Prove que A tem uma estratégia vencedora em caso contrário.

E 9.28 Seja M um emparelhamento e X um conjunto de vértices de um grafo. Mostre que se X é saturado por M então X também é saturado por algum emparelhamento máximo. (Compare com o exercício 9.16.)

E 9.29 Sejam X e Y dois conjuntos de vértices de um grafo G. Suponha que X é saturado por algum emparelhamento e Y é saturado por algum emparelhamento (não necessariamente o mesmo).

Se y é um elemento de $Y \smallsetminus X$, é verdade que $X \cup \{y\}$ é saturado por algum emprelhamento?

Se $|Y| > |X|$, é verdade que existe y em $Y \smallsetminus X$, tal que $X \cup \{y\}$ é saturado por algum emprelhamento?

[2] Publicado em 1957 por Claude Berge (1926 – 2002).

⋆ **E 9.30** (EMPARELHAMENTOS VERSUS COBERTURAS) *Mostre que, em qualquer grafo, para qualquer emparelhamento M e qualquer cobertura K* (veja capítulo 7),

$$|M| \leq |K| .$$

Deduza daí que se $|M| = |K|$ então M é um emparelhamento máximo e K é uma cobertura mínima.[3] Dê um exemplo de um grafo que *não* possui um par (M, K) tal que $|M| = |K|$. (Veja também o exercício 9.33.)

⋆ **E 9.31** Mostre que $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ para todo grafo G. $\alpha' \leq$

∘ **E 9.32** Seja K uma cobertura minimal de um grafo (veja o capítulo 7). É verdade que toda aresta de qualquer emparelhamento tem apenas uma das pontas em K?

E 9.33 Seja M um emparelhamento e K uma cobertura (veja o capítulo 7) tais que $|M| = |K|$. Mostre que M satura K e que cada elemento de M tem apenas uma das pontas em K. (Veja o exercício 9.30.)

E 9.34 Suponha que M é um emparelhamento maximal num grafo. Seja $V(M)$ o conjunto dos vértices saturados por M. Mostre que $V(M)$ é uma cobertura (veja o capítulo 7).

Escolha uma das pontas de cada aresta em M. Seja W o conjunto resultante. É verdade que W é uma cobertura?

E 9.35 (EMPARELHAMENTO QUASE MÁXIMO) Seja M um emparelhamento maximal e M^* um emparelhamento máximo em um grafo. É evidente que $|M| \leq |M^*|$. Mostre que $|M| \geq \frac{1}{2}|M^*|$. É verdade que $|M| > \frac{1}{2}|M^*|$ qualquer que seja o grafo?

E 9.36 Suponha que um grafo G tem um emparelhamento perfeito. Mostre que, para todo vértice v, o grafo $G - v$ tem exatamente um componente com número ímpar de vértices.

E 9.37 Seja G um grafo com $n(G) \geq 2k$ e $\delta(G) \geq k$. Mostre que G tem um emparelhamento com pelo menos k arestas.

[3] Assim, se uma cobertura tem o mesmo tamanho que um emparelhamento, ela serve de *certificado* da maximalidade do emparelhamento.

Capítulo 10

Emparelhamentos em grafos bipartidos

Quando restrito a grafos bipartidos, o problema do emparelhamento máximo (veja capítulo 9) tem uma solução muito elegante e eficiente. Dois teoremas (veja exercícios 10.7 e 10.23) resumem a solução:

1. Num grafo bipartido, um emparelhamento máximo tem o mesmo tamanho que uma cobertura mínima.
2. Um grafo com bipartição $\{U, W\}$ tem um emparelhamento que satura U se e somente se $|\mathrm{N}(Z)| \geq |Z|$ para todo subconjunto Z de U.

A expressão $\mathrm{N}(Z)$ denota o conjunto de todos os vértices que estão fora de Z mas têm algum vizinho em Z. (Veja exercício 1.108.) $\mathrm{N}(X)$

Exercícios

E 10.1 Exiba um emparelhamento máximo no grafo da figura 10.1.

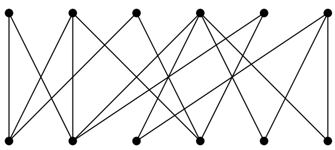


Figura 10.1: Encontre um emparelhamento máximo.

E 10.2 Encontre um emparelhamento máximo no cubo Q_k.

E 10.3 Exiba um emparelhamento máximo no grafo da figura 10.2.

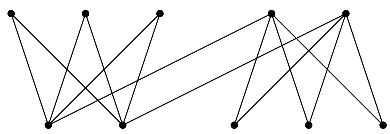


Figura 10.2: Encontre um emparelhamento máximo.

▷ **E 10.4** (LEMA DE DE CAEN[1]) Seja G um grafo bipartido com pelo menos uma aresta. Mostre que algum vértice de G é saturado por *todos* os emparelhamentos máximos. (Usado na resolução indutiva do exercício 10.6.)

∘ **E 10.5** É verdade que todo grafo bipartido tem uma aresta que pertence a todos os emparelhamentos máximos? (Compare com o exercício 10.4.) É verdade que todo grafo bipartido tem uma aresta que não pertence a nenhum emparelhamento máximo?

⋆ **E 10.6** *Mostre que todo grafo bipartido tem um emparelhamento M e uma cobertura K tais que*

$$|M| = |K| .$$

(Compare com o exercício 9.30. Veja o exercício 10.4.)

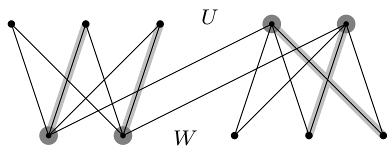


Figura 10.3: Os círculos cinzentos indicam uma cobertura. As linhas cinzentas indicam um emparelhamento. (Exercício 10.6.)

⋆ **E 10.7** (TEOREMA DE KŐNIG–EGERVÁRY[2]) *Seja M^* um emparelhamento máximo e K_* uma cobertura mínima de um grafo bicolorável. Mostre que* $|M^*| = |K_*|$. (Segue de 9.30 e 10.6.)

E 10.8 Mostre que $\alpha'(G) = \beta(G)$ em todo grafo bicolorável G.

E 10.9 Encontre um emparelhamento máximo e uma cobertura mínima no grafo da figura 10.1.

E 10.10 Seja G um grafo bicolorável. Prove que $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

[1] Publicado em 1988.

[2] Publicado em 1931 por Dénes Kőnig (1884 – 1944). O teorema também é atribuído a Eugene Egerváry (1931).

E 10.11 Dê uma condição necessária e suficiente para que um grafo bipartido tenha um emparelhamento com k arestas.

E 10.12 Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Suponha que $|U| = |W|$ e $m(G) > (k-1)\,|U|$ para algum k inteiro positivo. Prove que G tem um emparelhamento de cardinalidade k.

Algoritmos

∘ **E 10.13** Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Seja $\{U', U''\}$ uma partição de U e $\{W', W''\}$ uma partição de W. Mostre que $\mathrm{N}(U') \subseteq W'$ se e somente se $\mathrm{N}(W'') \subseteq U''$. Mostre que se $\mathrm{N}(U') \subseteq W'$ então $W' \cup U''$ é uma cobertura.

Mostre que para toda cobertura K de G tem-se $\mathrm{N}(U \setminus K) \subseteq W \cap K$ e $\mathrm{N}(W \setminus K) \subseteq U \cap K$.

▷ **E 10.14** Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido e M um emparelhamento em G. Seja $V(M)$ o conjunto dos vértices que M satura. Seja X o conjunto dos vértices de todos os caminhos M-alternantes que têm um dos extremos em $U \setminus V(M)$. Prove que

$$(W \cap X) \cup (U \setminus X)$$

é uma cobertura de G. (Usado na resolução do exercício 10.15.)

▷ **E 10.15** (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente que receba um grafo $\{U, W\}$-bipartido e um emparelhamento M e devolva (1) um emparelhamento M' tal que $|M'| > |M|$ ou (2) uma cobertura K tal que $|K| = |M|$. (Veja o exercício 10.14.)

⋆ **E 10.16** (ALGORITMO HÚNGARO[3]) *Construa um algoritmo eficiente que receba um grafo bipartido G e devolva um emparelhamento M e uma cobertura K de mesmo tamanho.* (Veja o exercício 10.15.) (Esta é a versão algorítmica do exercício 10.6.)

E 10.17 (ALGORITMO) Seja M um emparelhamento em um grafo $\{U, W\}$-bipartido G. Seja $V(M)$ o conjunto dos vértices saturados por M. Seja a um vértice em $U \setminus V(M)$ e b um vértice em $W \setminus V(M)$. Escreva um algoritmo que encontre um caminho alternante com origem a e término b (ou constate que um tal caminho não existe).

E 10.18 Use o algoritmo húngaro (exercício 10.16) para provar o teorema de Kőnig–Egerváry (exercício 10.7).

[3] Referência aos húngaros Kőnig, Egerváry e outros.

E 10.19 (ALGORITMO) Mostre como encontrar um conjunto estável máximo num grafo bipartido.

Emparelhamentos semi-perfeitos

Um emparelhamento num grafo bipartido é *semi-perfeito* se satura um dos "lados" do grafo. É claro que todo emparelhamento semi-perfeito é máximo, mas nem todo emparelhamento máximo é semi-perfeito.

> PROBLEMA: Dado um grafo $\{U, W\}$-bipartido, encontrar um emparelhamento que sature U.

◦ **E 10.20** Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Seja M um emparelhamento que satura U. Prove que M é um emparelhamento máximo. Prove que U é uma cobertura mínima.

◦ **E 10.21** Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Suponha que $|\mathrm{N}(Z)| < |Z|$ para algum subconjunto Z de U. Mostre que G não tem um emparelhamento que satura U.

⋆ **E 10.22** *Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Suponha que*

$$|\mathrm{N}(Z)| \geq |Z|$$

para todo subconjunto Z de U. Mostre que G tem um emparelhamento que satura U.

⋆ **E 10.23** (TEOREMA DE HALL[4]) *Mostre que um grafo $\{U, W\}$-bipartido tem um emparelhamento que satura U se e somente se $|\mathrm{N}(Z)| \geq |Z|$ para todo subconjunto Z de U.* (Segue de 10.21 e 10.22.)

◦ **E 10.24** Quais das afirmações a seguir valem para todo grafo $\{U, W\}$-bipartido G? (1) Se G tem um emparelhamento que satura U então $|\mathrm{N}(Z)| \geq |Z|$ para todo subconjunto Z de U. (2) Se G tem um emparelhamento que satura U então $|\mathrm{N}(Z)| \geq |Z|$ para algum subconjunto Z de U. (3) Se $|\mathrm{N}(Z)| < |Z|$ para algum subconjunto Z de U então G não tem um emparelhamento que satura U. (4) Se $|\mathrm{N}(Z)| \geq |Z|$ para todo subconjunto Z de U então G tem um emparelhamento que satura U. (5) Se $|\mathrm{N}(Z)| < |Z|$ para todo subconjunto Z de U então G não tem um emparelhamento que satura U. (6) Se $|\mathrm{N}(Z)| \geq |Z|$ para algum subconjunto Z de U então G tem um emparelhamento que satura U.

[4] Publicado em 1935 por Philip Hall (1904 – 1982). (Veja verbete na Wikipedia.)

E 10.25 (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente que receba um grafo bipartido e sua bicoloração $\{U, W\}$ e devolva (1) um emparelhamento que satura U ou (2) um subconjunto Z de U tal que $|\mathrm{N}(Z)| > |Z|$. (Esta é a versão algorítmica do teorema de Hall, exercício 10.23.)

E 10.26 Deduza o teorema de Kőnig–Egerváry (exercício 10.7) do teorema de Hall (exercício 10.23).

E 10.27 Seja H um conjunto de homens, M um conjunto de mulheres e k um inteiro positivo. Suponha que cada homem conhece no máximo k mulheres e cada mulher conhece no mínimo k homens. Prove que é possível casar cada mulher com um homem que ela conhece.

E 10.28 Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido com pelo menos uma aresta. Suponha que $\mathrm{d}(u) \geq \mathrm{d}(w)$ para todo u em U e w em W. Prove que existe em G um emparelhamento que cobre U.

E 10.29 Seja G um grafo bipartido r-regular com $r > 0$. Mostre que G tem um emparelhamento perfeito.

E 10.30 Prove que um grafo bicolorável G tem um emparelhamento perfeito se e somente se $|\mathrm{N}^*(Z)| \geq |Z|$ para todo subconjunto Z de V_G, sendo $\mathrm{N}^*(Z)$ o conjunto $\bigcup_{z \in Z} \mathrm{N}(z)$. (É claro que $\mathrm{N}^*(Z)$ contém $\mathrm{N}(Z)$.)

Dê um exemplo de um grafo (não bicolorável) que não tem emparelhamento perfeito mas satisfaz a desigualdade $|\mathrm{N}^*(Z)| \geq |Z|$ para todo conjunto Z de vértices.

E 10.31 Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido e X um subconjunto de U. Dê uma condição necessária e suficiente para que exista um emparelhamento em G que satura X.

▷ **E 10.32** Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido, X um subconjunto de U e Y um subconjunto de W. Seja M um emparelhamento que satura X e N um emparelhamento que satura Y. Mostre que existe um emparelhamento que satura $X \cup Y$.

E 10.33 Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido com pelo menos uma aresta. Seja X o conjunto dos vértices em U que têm grau $\Delta(G)$. Mostre que G tem um emparelhamento que satura X.

▷ **E 10.34** ♡ Seja G um grafo bicolorável com pelo menos uma aresta. Mostre que existe um emparelhamento que satura todos os vértices de grau $\Delta(G)$. (Veja exercícios 10.32 e 10.33.)

E 10.35 Seja K um grafo $\{U, W\}$-bipartido completo com $|U| = |W|$. Seja G um subgrafo de K e ponha $r = \Delta(G)$. Mostre que existe um grafo r-regular H tal que $G \subseteq H \subseteq K$.

E 10.36 Seja G um grafo bicolorável e ponha $r = \Delta(G)$. Mostre que G é subgrafo de algum grafo bicolorável r-regular.

E 10.37 (GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE HALL) Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido. Prove que todo emparelhamento máximo em G tem cardinalidade

$$\min_{Z \subseteq U} |U| - |Z| + |\mathrm{N}(Z)| \,.$$

E 10.38 Seja G um grafo (não necessariamente bicolorável) e seja $\{A, B\}$ uma partição de V_G. Suponha ainda que há menos que k arestas com uma ponta em A e outra em B (ou seja, $\mathrm{d}(A) < k$). Suponha que os grafos $G[A]$ e $G[B]$ admitem colorações de vértices (veja capítulo 8) com k cores. Mostre que G admite uma coloração de vértices com k cores.

Capítulo 11

Emparelhamentos em grafos arbitrários

Um componente de um grafo é **ímpar** (= *odd component*) se tem um número ímpar de vértices. O número de componentes ímpares de um grafo G será denotado nesta seção por $o(G)$. $o(G)$

Exercícios

E 11.1 Seja T uma árvore e suponha que $o(T - v) = 1$ para cada vértice v de T. Mostre que T tem emparelhamento perfeito. (Veja antes exercício 9.36.)

E 11.2 Suponha que um grafo G tem um emparelhamento perfeito. Mostre que $o(G - S) \leq |S|$ para todo conjunto S de vértices.

◦ **E 11.3** Suponha que um grafo G satisfaz a condição $o(G - S) \leq |S|$ para todo conjunto S de vértices. Prove que $n(G)$ é par.

⋆! **E 11.4** *Suponha que um grafo G tem a seguinte propriedade:*

$$o(G - S) \leq |S|$$

para todo conjunto S de vértices. Mostre que G tem um emparelhamento perfeito.

⋆ **E 11.5** (Teorema de Tutte[1]) *Mostre que um grafo G tem um emparelhamento perfeito se e somente se $o(G - S) \leq |S|$ para todo conjunto S de vértices.* (Segue dos exercícios 11.2 e 11.4.)

[1] Publicado em 1947 por William T. Tutte (1917 – 2002). (Veja verbete na Wikipedia.)

$\star$**! E 11.6** (ALGORITMO) Esboce um algoritmo eficiente que decida se um grafo tem ou não tem um emparelhamento perfeito.

E 11.7 Deduza o teorema de Hall (exercício 10.23) do teorema de Tutte (exercício 11.4).

$\star$ **E 11.8** Seja M um emparelhamento e S um conjunto de vértices de um grafo G. Prove que o número de vértices não saturados por M é pelo menos $o(G - S) - |S|$. Deduza daí que

$$|M| \leq \gamma(G, S) ,$$

$\gamma()$ sendo $\gamma(G, S)$ o número $\frac{1}{2}n(G) - \frac{1}{2}\big(o(G - S) - |S|\big)$.

E 11.9 Seja M um emparelhamento e S um conjunto de vértices de um grafo G. Suponha que $|M| = \gamma(G, S)$, sendo $\gamma(G, S)$ o número definido no exercício 11.8. Mostre que o emparelhamento M é máximo.[2]

$\star$**! E 11.10** Mostre que em qualquer grafo G existe um emparelhamento M e um subconjunto S de V_G tais que M deixa de saturar apenas $o(G - S) - |S|$ vértices, ou seja, tais que

$$|M| \geq \gamma(G, S) ,$$

sendo $\gamma(G, S)$ o número definido no exercício 11.8.

$\star$**! E 11.11** (TEOREMA DE TUTTE–BERGE[3]) Prove que, em qualquer grafo G,

$$\alpha'(G) = \gamma(G) ,$$

sendo $\gamma(G)$ o valor mínimo de $\gamma(G, S)$ para todos os subconjuntos S de V_G, onde $\gamma(G, S)$ é a expressão definida no exercício 11.8. (Veja o exercício 11.10.)

E 11.12 Deduza o exercício 9.30 do exercício 11.8. Deduza o teorema de Kőnig–Egerváry (exercício 10.7) do teorema de Tutte–Berge (exercício 11.11).

E 11.13 Seja G um grafo 3-regular sem pontes. Mostre que G tem um emparelhamento perfeito. Mostre que nem todo grafo 3-regular tem um emparelhamento perfeito.

[2] O conjunto S serve de *certificado* da maximalidade do emparelhamento.

[3] Combinação do teorema de Tutte (exercício 11.4) com um teorema de Claude Berge (1926 – 2002) publicado em 1958.

$\star$**! E 11.14** (DECOMPOSIÇÃO DE GALLAI–EDMONDS[4]) Seja G um grafo e D o conjunto dos vértices de G que *não* são saturados por algum emparelhamento máximo. Seja A o conjunto $\mathrm{N}(D)$. (Veja definição de N no exercício 1.108.) Seja C o conjunto $V_G \setminus (D \cup A)$. Mostre que para todo emparelhamento máximo M^* em G tem-se

$$2|M^*| = n(G) - c(G[D]) + |A| ,$$

onde $c(H)$ denota o número de componentes do grafo H.

! E 11.15 (ALGORITMO DE EDMONDS[5]) Esboce um algoritmo eficiente que encontre um emparelhamento máximo em qualquer grafo dado.

! E 11.16 Uma **cobertura por arestas** (= *edge cover*)[6] de um grafo é um conjunto F de arestas tal que todo vértice do grafo é ponta de algum elemento de F. (Não confunda com o conceito de cobertura por vértices.) Invente um algoritmo eficiente que produza uma cobertura por arestas mínima.

! E 11.17 (ALGORITMO DO EMPARELHAMENTO DE PESO MÁXIMO) Seja K um grafo completo e π uma função de E_K em $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Para cada aresta e do grafo, diremos que $\pi(e)$ é o *peso* de e. O *peso* de um subconjunto F de E_K é $\sum_{e \in F} \pi(e)$. Esboce um algoritmo para encontrar um emparelhamento de peso máximo em K.

[4] Publicada em 1963 e 1964 por Tibor Gallai (1912 − 1992) e em 1965 por Jack Edmonds.
[5] Jack Edmonds.
[6] Quem sabe eu deveria dizer “cobertura de vértices por arestas”.

Capítulo 12

Coloração de arestas

Uma **coloração das arestas**, ou **recobrimento por emparelhamentos**, de um grafo é uma coleção de emparelhamentos que cobre o conjunto de arestas. Mais precisamente, uma coloração das arestas de um grafo G é uma coleção M_1, M_2, ..., M_k de emparelhamentos tal que $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k = E_G$. (Podemos exigir que os emparelhamentos sejam disjuntos dois a dois; essa disjunção é cômoda mas não é essencial.)

Se imaginarmos que cada emparelhamento M_i corresponde a uma cor, poderemos dizer que uma **coloração das arestas** de um grafo é uma atribuição de cores às arestas que tem a seguinte propriedade: arestas adjacentes recebem cores diferentes.

Se $M_1, \ldots, M_k$ é uma coloração de arestas, dizemos que k é o **número de cores** da coloração (mesmo que algum M_i seja vazio). Dizemos também que esta é uma k-**coloração**. Uma coloração de arestas é **mínima** se o seu número de cores é o menor possível, ou seja, se não existe outra que use menos cores.

> PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS: Encontrar uma coloração mínima das arestas de um grafo dado.

O **índice cromático** (= *chromatic index*) de um grafo G é o número mínimo de cores necessário para colorir as arestas de G. Este número é denotado por

$$\chi'(G) .$$

(Não confunda com o número cromático $\chi(G)$ definido no capítulo 8.)

Exercícios

∘ **E 12.1** Seja $M_1, \ldots, M_k$ uma coloração das arestas de um grafo. Mostre que existe uma coloração $M'_1, \ldots, M'_k$ tal que os emparelhamentos $M'_1, \ldots, M'_k$ são disjuntos dois a dois.

E 12.2 Um processo industrial consiste em um certo conjunto de tarefas. Cada tarefa é executada por um operário em uma máquina e cada tarefa tem duração de 1 dia. Cada operário está qualificado para operar apenas algumas das máquinas. Quantos dias são necessários para completar o processo?

E 12.3 Uma escola pode ser representada por um grafo $\{U, W\}$-bipartido: cada vértice em U é um professor, cada vértice em W é uma turma de alunos e um professor é adjacente às turmas para as quais deve dar aulas. Uma semana letiva é dividida em períodos (segunda-feira das 8h às 10h, segunda-feira das 10h às 12h, etc.) e cada período é representado por uma cor. Uma coloração das arestas do grafo é uma programação das aulas da semana. Quantos períodos são necessários e suficientes para cumprir o programa de aulas?[1]

E 12.4 Mostre que o problema da coloração mínima das arestas é um caso particular do problema da coloração mínima de vértices (veja capítulo 8).

E 12.5 Exiba um grafo com duas colorações mínimas diferentes.

∘ **E 12.6** Calcule uma coloração mínima das arestas de um grafo completo. Calcule uma coloração mínima das arestas de um grafo bipartido completo.

∘ **E 12.7** Calcule o índice cromático de um caminho e de um circuito. Calcule o índice cromático de grafos com $\Delta = 0$, com $\Delta = 1$, e com $\Delta = 2$.

E 12.8 Calcule o índice cromático do grafo de Petersen.

E 12.9 Seja G um grafo 3-regular dotado de circuito hamiltoniano. (Um circuito C em G é hamiltoniano se $V_C = V_G$. Veja o capítulo 17.) Prove que $\chi'(G) = 3$.

E 12.10 Mostre que $\chi'(G) \geq m(G)/\alpha'(G)$ para todo grafo G.

⋆ **E 12.11** Mostre que qualquer coloração das arestas de um grafo G usa pelo
$\chi' \geq$ menos $\Delta(G)$ cores. Em outras palavras, mostre que

$$\chi'(G) \geq \Delta(G)$$

para todo grafo G. Mostre que esta desigualdade é um caso particular da desigualdade $\chi \geq \omega$ do exercício 8.38.

[1] Este é o "problema da grade de horários" (*timetabling problem*).

∘ **E 12.12** Seja G um grafo r-regular com um número ímpar de vértices. Mostre que $\chi'(G) > r$.

E 12.13 Seja G um grafo r-regular com $r \geq 2$. Suponha que G tem uma ponte. Mostre que $\chi'(G) > r$. (Veja o exercício 9.18.)

E 12.14 Seja G um grafo r-regular, $r \geq 1$. Suponha que G tem uma articulação. Mostre que $\chi'(G) > r$.

E 12.15 Suponha que $n(G)$ é ímpar e $m(G) > \Delta(G)\,(n(G) - 1)/2$. Mostre que $\chi'(G) > \Delta(G)$.

E 12.16 Seja G um grafo r-regular, $r \geq 1$, com um número ímpar de vértices. Seja H um subgrafo obtido pela remoção de no máximo $(r-1)/2$ arestas de G. Mostre que $\chi'(H) > \Delta(H)$.

E 12.17 Mostre que o conjunto das arestas de toda árvore T pode ser colorido com (apenas) $\Delta(T)$ cores. (Compare com o exercício 12.11.)

E 12.18 Mostre que $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ para todo grafo G. (Sugestão: indução no número de arestas de G).

E 12.19 (ALGORITMO DE COLORAÇÃO MINIMAL) Considere o seguinte algoritmo guloso de coloração das arestas de um grafo G. Cada iteração do algoritmo começa com uma coleção $M_1, \ldots, M_j$ de emparelhamentos. Em cada iteração,

> escolha uma aresta e que não esteja em $M_1 \cup \cdots \cup M_j$; se existe i tal que $M_i \cup \{e\}$ é um emparelhamento então comece nova iteração com $M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i \cup \{e\}, M_{i+1}, \ldots, M_j$; senão, comece nova iteração com a coleção $M_1, \ldots, M_j, \{e\}$.

Mostre que o algoritmo usa no máximo $2\Delta(G) - 1$ emparelhamentos. Mostre que o algoritmo usa no máximo $2\chi'(G) - 1$ emparelhamentos. O algoritmo produz uma coloração mínima?

E 12.20 (ALGORITMO DE COLORAÇÃO MINIMAL) Considere o seguinte algoritmo guloso de coloração das arestas de um grafo G:

> a j-ésima iteração começa com uma coleção $M_1, M_2, \ldots, M_{j-1}$ de emparelhamentos e calcula um emparelhamento maximal M_j no grafo $G - (M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{j-1})$.

Mostre que o algoritmo usa no máximo $2\Delta(G) - 1$ cores. Mostre que o algoritmo usa no máximo $2\chi'(G) - 1$ cores. O algoritmo produz uma coloração mínima?

E 12.21 (ALGORITMO) Considere o seguinte algoritmo de coloração das arestas de um grafo G:

> a j-ésima iteração começa com uma coleção M_1, M_2, ..., M_{j-1} de emparelhamentos e calcula um emparelhamento *máximo* M_j no grafo $G - (M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{j-1})$.

Esse algoritmo produz uma coloração mínima?

E 12.22 (HEURÍSTICA DA TROCA DE CORES) Considere a seguinte heurística[2] da "troca de cores em caminhos alternantes", que tenta resolver o problema da coloração de arestas:

> No começo de cada iteração tem-se uma coloração parcial, ou seja, uma coleção M_1, M_2, ..., M_k de emparelhamentos disjuntos dois a dois. Seja vw uma aresta ainda não colorida, isto é, uma aresta que não está em $M_1 \cup \cdots \cup M_k$. Seja M_i uma cor "ausente" em v e seja M_j uma cor "ausente" em w. Seja P o componente do grafo $(V_G, M_i \cup M_j)$ que contém v. Troque M_i por $M_i \oplus E_P$. Em seguida, troque M_j por $M_j \cup \{vw\}$ e comece nova iteração.

Complete os detalhes e discuta a heurística. Ela resolve o problema da coloração de arestas?

E 12.23 Mostre que todo grafo bipartido r-regular admite uma coloração das arestas com apenas r cores. (Veja o exercício 10.29.)

E 12.24 Escolha 16 casas em um tabuleiro de xadrez 8-por-8 de forma que cada linha e cada coluna do tabuleiro contenha exatamente duas das casas escolhidas. Prove que é possível colocar 8 peões brancos e 8 pretos nas 16 casas escolhidas de tal forma que cada linha e cada coluna contenha contenha exatamente um peão branco e um preto.

$\star$ **E 12.25** *Seja G um grafo bicolorável. Mostre que o conjunto de arestas de G pode ser colorido com (apenas) $\Delta(G)$ cores.* (Veja a heurística 12.22 ou o exercício 10.34.)

$\star$ **E 12.26** (TEOREMA DE KŐNIG[3]) *Mostre que $\chi'(G) = \Delta(G)$ para todo grafo bicolorável G.* (Segue dos exercícios 12.11 e 12.25.)

E 12.27 Exiba colorações mínimas das arestas dos grafos das figuras 10.1 e 10.2.

---

[2] Wilf diz (em *Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, 1986) que heurísticas são *methods that seem to work well in practice, for reasons nobody understands*.

[3] Dénes Kőnig (1884 – 1944). (Veja verbete na Wikipedia.)

E 12.28 Sejam M e N dois emparelhamentos de um grafo G. Suponha que $\big||M| - |N|\big| \geq 2$. Mostre que existem emparelhamentos M' e N' tais que $M \cup N = M' \cup N'$ e $\big||M'| - |N'|\big| < \big||M| - |N|\big|$.

E 12.29 Seja G um grafo e ponha $k = \chi'(G)$. Mostre que existe uma k-coloração M_1, M_2, $\ldots$, M_k das arestas tal que $\big||M_i| - |M_j|\big| \leq 1$ para todo par i,j de cores. Escreva uma "fórmula" para $|M_i|$ em termos de $m(G)$. (Veja exercício 12.28.)

⋆ **E 12.30** (TEOREMA DE VIZING[4]) *Mostre que*

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

para todo grafo G.[5] (Se combinarmos isso com o exercício 12.11, poderemos dizer que $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$ para todo grafo.)

E 12.31 Mostre que a heurística de troca de pares de cores sugerido no exercício 12.22 não é suficiente para demonstrar o teorema de Vizing (exercício 12.30).

E 12.32 (TEOREMA DE ERDŐS AND WILSON) Seja $\mathcal{G}^1(n)$ a coleção de todos os grafos em $\mathcal{G}(n)$ (veja seção 1.18) para os quais $\chi' = \Delta$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{G}^1(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} = 1.$$

D 12.33 (ALGORITMO) Invente um algoritmo rápido que calcule $\chi'(G)$ para qualquer grafo G dado.

D 12.34 (ALGORITMO) Invente um algoritmo rápido que resolva o problema da coloração de arestas.

E 12.35 Seja X o conjunto dos vértices de um grafo G que têm grau $\Delta(G)$. Mostre o seguinte: se $G[X]$ é uma floresta então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

---

[4] Publicado em 1964–1965 por Vadim G. Vizing (1937–). O fato também foi descoberto, independentemente, por Ram Prakash Gupta em 1966.

[5] É tentador comparar essa desigualdade com a desigualdade $\chi \leq \Delta + 1$ do exercício 8.30. Mas as razões para as duas desigualdades são muito diferentes.

Grafos planares

!! E 12.36 Mostre que $\chi'(G) = 3$ para todo grafo planar 3-regular aresta-biconexo G. (Compare com o exercício 12.13.) (Este teorema é equivalente ao teorema das Quatro Cores, exercício 8.63.)

Capítulo 13

Conectores e conjuntos acíclicos

Uma **conector**[1] de um grafo G é qualquer subconjunto C de E_G tal que o grafo (V_G, C) é conexo. Um conector C_* é **mínimo** se não existe outro conector C tal que $|C| < |C_*|$.

> PROBLEMA DO CONECTOR MÍNIMO: Encontrar um conector mínimo de um grafo dado.

Um conector $\hat{C}$ é **minimal** se não existe conector C tal que $C \subset \hat{C}$. É evidente que todo conector mínimo também é minimal. É um tanto surpreendente (diante do que acontece com coberturas por vértices, por exemplo) que a recíproca seja verdadeira (veja exercício 13.5). Por isso, o problema do conector mínimo é muito fácil.

Um conjunto F de arestas de um grafo G é **acíclico** se o grafo (V_G, F) não tem circuitos, ou seja, se (V_G, F) é uma floresta. Um subconjunto acíclico F^* de E_G é **máximo** se não existe subconjunto acíclico F tal que $|F| > |F^*|$.

> PROBLEMA DO CONJUNTO ACÍCLICO MÁXIMO: Dado um grafo G, encontrar um subconjunto acíclico máximo de E_G.

Uma subconjunto acíclico $\check{F}$ de E_G é **maximal** se não existe subconjunto acíclico F de E_G tal que $F \supset \check{F}$. É evidente que todo subconjunto acíclico máximo também é maximal. É um tanto surpreendente que a recíproca seja verdadeira (veja exercício 13.6). Por isso, o problema do subconjunto acíclico máximo é muito fácil.

Uma **árvore geradora**, ou **árvore abrangente** (= *spanning tree*), de um grafo G é qualquer subgrafo gerador de G que seja uma árvore.[2] Uma árvore

[1] Cuidado! A maioria dos livros de teoria dos grafos não usa o termo "conector".

[2] Uma árvore geradora de um grafo poderia ser chamada *esqueleto* do grafo. Em alemão, por exemplo, diz-se *Gerüst* (= andaime).

geradora é essencialmente o mesmo que um conector minimal e um conjunto acíclico minimal (veja o exercício 13.4).

Exercícios

◦ **E 13.1** Mostre que um grafo G tem um conector se e somente se G é conexo. Mostre que todo grafo tem um conjunto acíclico.

E 13.2 Seja C um conector minimal de um grafo G. Mostre que C é acíclico maximal.

E 13.3 Seja G um grafo conexo e F um subconjunto acíclico maximal de E_G. Mostre que F é um conector minimal. (Veja o exercício 1.199.)

E 13.4 Seja C um conector minimal e F um conjunto acíclico maximal de um grafo conexo G. Mostre que os grafos (V_G, C) e (V_G, F) são árvores geradoras de G.

Seja T uma árvore geradora de G. Mostre que E_T é um conector minimal e também um conjunto acíclico maximal de G.

⋆ **E 13.5** Mostre que todo conector minimal de um grafo G tem exatamente $n(G) - 1$ arestas. (Veja exercício 1.228.) Deduza daí que todo conector minimal é mínimo.

⋆ **E 13.6** Mostre que todo conjunto acíclico maximal de um grafo G tem exatamente $n(G) - c(G)$ arestas, sendo $c(G)$ o número de componentes de G. (Veja exercício 1.231.) Deduza daí que todo conjunto acíclico maximal é máximo.

E 13.7 (ALGORITMO) Construa um algoritmo eficiente que receba um grafo G e devolva um conector mínimo de G (ou uma prova de que G não é conexo).

Construa um algoritmo eficiente que receba um grafo G e devolva um subconjunto acíclico máximo de E_G.

⋆ **E 13.8** (TROCA DE ARESTAS) *Seja C um conector minimal de um grafo G e b um elemento de $E_G \setminus C$. Mostre que existe a em C tal que*

$$(C \cup \{b\}) \setminus \{a\}$$

é um conector minimal de G.

E 13.9 Seja a uma aresta em um conector minimal C de um grafo G. Dê uma condição necessária e suficiente para que exista uma aresta b em $E_G \setminus C$ tal que $(C \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ seja um conector. (Compare com o exercício 13.8.)

E 13.10 (ALGORITMO) Suponha que cada aresta e de um grafo G tem um "peso" numérico $\pi(e) \geq 0$. Por definição, o peso de qualquer conjunto A de arestas é o número $\sum_{e \in A} \pi(e)$.

Construa um algoritmo que encontre um conector de G que tenha peso mínimo.[3]

[3] Os célebres algoritmos de J.B. Kruskal e R.C. Prim resolvem os problemas. Esses algoritmos tem um caráter "guloso". Eles estão entre os mais antigos e mais conhecidos algoritmos gulosos da teoria dos grafos. A prova da correção desses algoritmos depende do exercício 13.8.

Capítulo 14

Caminhos e circuitos mínimos

Um caminho é **mais curto** que outro se o comprimento do primeiro é menor que o do segundo. Um caminho P_* é **mínimo** se nenhum caminho mais curto tem os mesmos extremos que P_*.

> PROBLEMA DO CAMINHO MÍNIMO: Dados vértices v e w de um grafo, encontrar um caminho mínimo com extremos v e w.

A **distância** entre dois vértices v e w é o comprimento de um caminho mínimo com extremos v e w.[1] (Se não existe caminho algum com esses extremos, a distância não está definida.) A distância entre dois vértices v e w de um grafo G será denotada por

$$\operatorname{dist}_G(v, w) .$$

Se G estiver subentendido, diremos simplesmente $\operatorname{dist}(v, w)$.

Um circuito é **mínimo** se o grafo não contém outro circuito mais curto. A **cintura** (= *girth*) de um grafo é o comprimento de um circuito mínimo no grafo. (Se um grafo não tem circuito algum, sua cintura não está definida.)

Exercícios

E 14.1 No grafo da figura 14.1, calcule a distância entre o vértice x e cada um dos outros vértices. Em seguida, exiba um caminho mínimo entre x e y.

∘ **E 14.2** Seja k a distância entre dois vértices v e w num grafo. Mostre que (1) existe um caminho de comprimento k de v a w e (2) não existe caminho de comprimento menor que k de v a w. Mostre a recíproca: se (1) e (2) valem então a distância entre v e w é k.

[1] A expressão "distância mínima" é redundante e deve ser evitada.

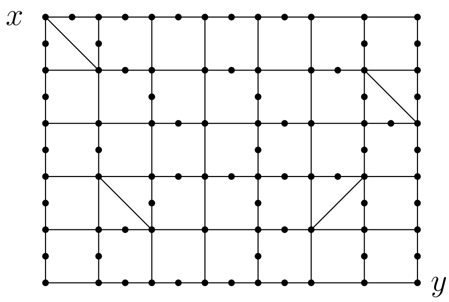


Figura 14.1: Encontre um caminho mínimo entre x e y. Veja o exercício 14.1.

E 14.3 Suponha que $v_0v_1 \cdots v_k$ é um caminho mínimo (dentre os que têm extremos v_0 a v_k). Prove que

$$\mathrm{dist}(v_0, v_j) = j$$

para todo índice j.

$\star$ **E 14.4** (DESIGUALDADE TRIANGULAR) Seja (x, y, z) um terno de vértices de um grafo conexo. Prove que

$$\mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z) \ \geq \ \mathrm{dist}(x, z) \, .$$

E 14.5 Seja r um vértice e uv uma aresta de um grafo conexo. Mostre que

$$|\mathrm{dist}(r, u) - \mathrm{dist}(r, v)| \ \leq \ 1 \, .$$

E 14.6 (ALGORITMO DA BUSCA EM LARGURA[2]) Construa um algoritmo eficiente que receba dois vértices v e w de um grafo e calcule a distância entre v e w. Construa um algoritmo eficiente que encontre um caminho mínimo entre dois vértices dados.

E 14.7 (ÁRVORE DAS DISTÂNCIAS) Seja r um vértice de um grafo conexo G. Mostre que G tem uma árvore geradora T tal que

$$\mathrm{dist}_G(r, x) \ = \ \mathrm{dist}_T(r, x)$$

para todo vértice x (ou seja, a distância entre r e x em G é igual à distância entre r e x em T).

$\circ$ **E 14.8** É verdade que todo grafo conexo G tem uma árvore geradora T tal que $\mathrm{dist}_G(u, v) = \mathrm{dist}_T(u, v)$ para todo par u,v de vértices?

[2] *Breadth-First Search* Algorithm.

E 14.9 A **excentricidade** de um vértice v num grafo é o número $\mathrm{exc}(v) := \max_{w \in V} \mathrm{dist}(v, w)$. Um **centro** é um vértice de excentricidade mínima. O **raio** do grafo é a excentricidade de um centro.

Mostre que toda árvore tem no máximo dois centros e se tiver dois então eles são adjacentes.

E 14.10 O grafo **de Heawood**[3] tem conjunto de vértices $\{0, 1, 2, \ldots, 13\}$. Cada vértice i é vizinho de $(i + 1) \bmod 14$ e de $(i + 13) \bmod 14$.[4] Além disso, cada i é vizinho de um terceiro vértice, que depende da paridade de i: se i é par então ele é vizinho de $(i + 5) \bmod 14$ e se i é ímpar então ele é vizinho de $(i + 9) \bmod 14$.

Faça uma figura do grafo de Heawood. Encontre um circuito de comprimento mínimo no grafo.

E 14.11 Mostre que todo grafo conexo com $m \geq 3n/2$ tem um circuito de comprimento $\leq c \log n$ para alguma constante c.

E 14.12 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que calcule a cintura de qualquer grafo dado. Construa um algoritmo que encontre um circuito mínimo em qualquer grafo dado. (Veja o exercício 14.6.)

Restrições de paridade

Dizemos que um circuito ou caminho **é ímpar** se o seu comprimento é um número ímpar. Analogamente, um circuito ou caminho **é par** se o seu comprimento é um número par.

A **cintura ímpar** de um grafo é o comprimento de um circuito ímpar mínimo no grafo. A **cintura par** é definida analogamente.

E 14.13 Seja r um vértice de um grafo conexo G. Sejam u e v dois vértices adjacentes tais que $\mathrm{dist}(r, u) = \mathrm{dist}(r, v)$. Mostre que G tem um circuito ímpar de comprimento não superior a $\mathrm{dist}(r, u) + \mathrm{dist}(r, v) + 1$. (Veja o exercício 14.3.)

E 14.14 Seja r um vértice de um grafo conexo G. Sejam x e y dois vértices adjacentes tais que $\mathrm{dist}(r, x)$ e $\mathrm{dist}(r, y)$ têm a mesma paridade (ou seja, ambos são pares ou ambos ímpares). Mostre que G tem um circuito ímpar.

[3] Percy John Heawood (1861 – 1955).
[4] A expressão "$i \bmod j$" denota o resto da divisão de i por j.

E 14.15 (Recíproca de 14.13) Seja r um vértice de um grafo conexo G. Seja O um circuito ímpar em G. Mostre que O tem uma aresta xy tal que $\operatorname{dist}_G(r, x) = \operatorname{dist}_G(r, y)$. (Veja exercício 14.5.)

E 14.16 Seja r um vértice de um grafo conexo G. Mostre que G é bicolorável se e somente se $\operatorname{dist}(r, u) \neq \operatorname{dist}(r, v)$ para toda aresta uv. (Veja os exercícios 14.13 e 14.15.)

E 14.17 Use o conceito de distância para mostrar que um grafo é bicolorável se e somente se não tem circuitos ímpares. (Compare com o exercício 4.15. Veja o exercício 14.14.)

E 14.18 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que calcule a cintura ímpar de qualquer grafo dado. Construa um algoritmo que encontre um circuito ímpar mínimo em qualquer grafo dado. (Veja os exercícios 14.13, 14.15 e 14.6. Compare com o exercício 1.123.)

! E 14.19 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que calcule a cintura par de qualquer grafo dado. Construa um algoritmo que encontre um circuito par mínimo em qualquer grafo dado.

! E 14.20 (ALGORITMO) Dados dois vértices u e v de um grafo G, encontre um caminho de comprimento mínimo na coleção de todos os caminhos de comprimento par que têm extremos u e v.

! E 14.21 (ALGORITMO) Dados dois vértices u e v de um grafo G, encontre um caminho de comprimento mínimo na coleção de todos os caminhos de comprimento ímpar que têm extremos u e v.

Grafos aleatórios

E 14.22 O **diâmetro** de um grafo G é o número $\max_{(u,v)} \operatorname{dist}(u, v)$, sendo o máximo tomado sobre todos os pares u,v de vértices. Prove que o diâmetro de quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n)$ (veja a seção 1.18) não passa de 2.

Capítulo 15

Fluxo

Um **fluxo** (= *flow*) em um grafo é uma coleção de caminhos sem arestas em comum.[1] Mais precisamente, um **fluxo** é uma coleção $\mathcal{F}$ de caminhos tal que

$$E_P \cap E_Q = \emptyset$$

para cada par (P, Q) de elementos distintos de $\mathcal{F}$. (Acho que "macarronada" seria um boa alternativa para "fluxo"!)

Dado um grafo G e dois vértices a e b, diremos que um fluxo $\mathcal{F}$ **liga** a **a** b se cada caminho em $\mathcal{F}$ tem um extremo em a e outro em b Podemos dizer também, nessas circunstâncias, que $\mathcal{F}$ é um fluxo **entre** a **e** b ou **de** a **a** b. (É claro que um fluxo de a a b é exatamente o mesmo que um fluxo de b a a.)

Um fluxo $\mathcal{F}$ de a a b é **máximo** se $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}'|$ para todo fluxo $\mathcal{F}'$ de a a b.

> PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO: Dados dois vértices a e b de um grafo G, encontrar um fluxo máximo de a a b.

Um conjunto C de arestas **separa** a **de** b se todo caminho de a a b tem pelo menos uma aresta em C. Conforme o exercício 15.4, todo conjunto que separa a de b é, essencialmente, um corte $\partial(X)$ tal que X contém a mas não contém b.

Exercícios

E 15.1 Considere o grafo do bispo num tabuleiro 3-por-3. Seja a a casa no canto superior esquerdo e b a casa no canto superior direito. Encontre um fluxo máximo de a a b.

[1] Este uso da palavra "fluxo" não é ortodoxo. Em muitos livros, a palavra é usada de maneira um pouco diferente.

E 15.2 Considere o grafo da dama num tabuleiro 3-por-3. Seja a a casa no canto superior esquerdo e b a casa no meio do tabuleiro. Encontre um fluxo máximo de a a b.

E 15.3 Considere o grafo do cavalo num tabuleiro 3-por-3. Seja a a primeira casa da primeira linha e b a última casa da segunda linha. Encontre um fluxo máximo de a a b.

E 15.4 (SEPARADORES VERSUS CORTES) Seja G um grafo e sejam a e b dois de seus vértices. Seja X um subconjunto de V_G que contém a mas não contém b. Mostre que $\partial(X)$ separa a de b.

Seja C um conjunto de arestas que separa a de b. Mostre que existe um subconjunto X de V_G tal que $a \in X$, $b \notin X$ e $\partial(X) \subseteq C$.

○ **E 15.5** Sejam a e b dois vértices de um grafo. Suponha que existe um fluxo de cardinalidade k entre a e b. Mostre que todo conjunto de arestas que separa a de b tem pelo menos k arestas.[2]

⋆ **E 15.6** (FLUXO VERSUS CORTE) *Sejam a e b dois vértices de um grafo G. Suponha que todo corte que separa a de b tem pelo menos k arestas. Mostre que um fluxo de cardinalidade k liga a a b em G.* (Compare com os exercícios 15.5 e 1.208.)

⋆ **E 15.7** (TEOREMA DE MENGER[3]) Sejam a e b dois vértices de um grafo. Seja $\mathcal{F}^*$ um fluxo máximo dentre os que ligam a a b. Seja C_* um conjunto mínimo de arestas dentre os que separam a de b. Mostre que

$$|\mathcal{F}^*| = |C_*| \,.$$

(Esta é uma combinação de 15.5 e 15.6.[4])

○ **E 15.8** Sejam a e b dois vértices de um grafo G. Suponha que todo conjunto que separa a de b tem pelo menos 2 arestas. Seja P um caminho em G com extremos a e b. É verdade que $G - E_P$ tem um caminho com extremos a e b?

E 15.9 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que receba dois vértices a e b de um grafo G e devolva um fluxo $\mathcal{F}$ de a a b e um conjunto X que contém a mas não contém b tais que $|\mathcal{F}| = \mathrm{d}(X)$.

---

[2] Assim, um corte com k arestas é um *certificado* de que não existe fluxo de tamanho maior que k.

[3] Karl Menger (1902 – 1985). O "g" tem som de "gato" e não de "gente".

[4] Trata-se também de um caso especial do Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo de Ford, Fulkerson, Elias, Feinstein e Shannon.

E 15.10 Seja G um grafo e sejam A e B dois subconjuntos não vazios de V_G tais que $A \cap B = \emptyset$. Uma **barreira** é qualquer subconjunto F de E_G tal que todo caminho de A a B tem uma aresta em F.

Suponha que toda barreira tem pelo menos k arestas. Mostre que existe uma coleção de k caminhos de A a B sem arestas em comum.

Grafos aresta-k-conexos

A **aresta-conexidade** de um grafo G é a cardinalidade do menor subconjunto C de E_G tal que $G - C$ é desconexo (ou seja, tem dois ou mais componentes). A aresta-conexidade de G é denotada por

$$\kappa'(G) .$$

Esta definição de conexidade não se aplica ao caso em que G tem um só vértice, pois nesse caso não existe C tal que $G - C$ é desconexo. (Poderíamos, talvez, dizer que $\kappa'(K_1) = \infty$.) Convenciona-se, então, que $\kappa'(K_1) = 1$.

Dizemos que um grafo G é **aresta-k-conexo** (= k-*edge-connected*) para todo $k \leq \kappa'(G)$. Assim, um grafo aresta-1-conexo é o mesmo que um grafo conexo e um grafo aresta-2-conexo é o mesmo que um grafo aresta-biconexo (veja seção 1.13).

∘ **E 15.11** Calcule a aresta-conexidade de um caminho. Calcule a aresta-conexidade de um circuito.

E 15.12 Calcule a aresta-conexidade de um grafo completo com $n \geq 2$ vértices.

E 15.13 Seja G um grafo aresta-k-conexo, com $k > 0$. Seja C um conjunto de k arestas. Mostre que $G - C$ tem no máximo 2 componentes.

E 15.14 Seja G um grafo com dois ou mais vértices e k um número natural. Mostre que G é aresta-k-conexo se e somente se $G - C$ é conexo para todo subconjunto C de E_G tal que $|C| < k$.

E 15.15 Seja G um grafo com dois ou mais vértices e k um número natural. Mostre que G é aresta-k-conexo se e somente se $\mathrm{d}(X) \geq k$ para todo conjunto X de vértices tal que $\emptyset \subset X \subset V_G$. (Veja o exercício 15.4.)

E 15.16 Seja B_t um dos componentes do grafo do bispo num tabuleiro t-por-t. Calcule $\kappa'(B_t)$ para $t = 2, 3, 4$.

E 15.17 Seja D_t o grafo da dama num tabuleiro t-por-t. Calcule $\kappa'(D_t)$ para $t = 2, 3, 4$.

E 15.18 Seja C_4 o grafo do cavalo num tabuleiro 4-por-4. Calcule $\kappa'(C_4)$.

$\star$ **E 15.19** Seja G um grafo com dois ou mais vértices. Mostre (a partir do teorema de Menger, exercício 15.7) que *G é aresta-k-conexo se e somente se cada par de seus vértices é ligado por um fluxo de cardinalidade k.*

$\star$ **E 15.20** Mostre que $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ para todo grafo G com dois ou mais vértices. Mostre que a desigualdade pode ser estrita.

E 15.21 Seja G um grafo com dois ou mais vértices tal que $\delta(G) \geq (n(G) - 1)/2$. Mostre que $\kappa'(G) = \delta(G)$.

$\circ$ **E 15.22** Seja G um grafo aresta-k-conexo. Mostre que $m(G) \geq k\, n(G)/2$.

E 15.23 Seja G um grafo aresta-k-conexo. Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de V_G tais que $A \cap B = \emptyset$. Mostre que existe um fluxo $\mathcal{F}$ de cardinalidade k em G tal que cada caminho em $\mathcal{F}$ tem um extremo em A e outro em B.

E 15.24 Seja G um grafo aresta-$(2k-1)$-conexo. Mostre que G tem um subgrafo bipartido gerador H que é aresta-k-conexo.

Capítulo 16

Fluxo internamente disjunto

Sejam a e b dois vértices de um grafo G. Um **fluxo internamente disjunto** é uma coleção de caminhos de a a b sem vértices internos em comum. Portanto,

$$V_P \cap V_Q = \{a, b\}$$

para cada par (P, Q) de caminhos da coleção. Diremos que uma tal coleção **liga** a **a** b.

> PROBLEMA DO FLUXO INTERNAMENTE DISJUNTO MÁXIMO: Dados dois vértices a e b de um grafo, encontrar um fluxo internamente disjunto máximo ligando a a b.

(Para evitar discussões inúteis, é melhor restringir o problema ao caso em a e b não são adjacentes.)

Um **separador** do par (a, b) é qualquer conjunto S de vértices tal que a e b estão em componentes distintas de $G - S$. Em outras palavras, um separador de (a, b) é qualquer subconjunto S de $V_G \smallsetminus \{a, b\}$ tal que todo caminho com extremos a e b tem pelo menos um vértice em S. (É claro que se a e b são adjacentes então não existe separador de (a, b).)

Exercícios

E 16.1 Considere o grafo do bispo num tabuleiro 4-por-4. Seja a a primeira casa da primeira linha e b a última casa da última linha. Encontre um fluxo internamente disjunto máximo ligando a a b. Repita o exercício com a e b', sendo b' a terceira casa da primeira linha.

E 16.2 Considere o grafo da dama num tabuleiro 3-por-3. Seja a a casa no canto superior esquerdo e b a casa no meio do tabuleiro. Encontre um fluxo internamente disjunto máximo ligando a a b.

E 16.3 Considere o grafo do cavalo num tabuleiro 3-por-3. Seja a a primeira casa da primeira linha e b a última casa da segunda linha. Encontre um fluxo internamente disjunto máximo ligando a a b.

∘ **E 16.4** Seja v uma articulação em um grafo G e sejam a e b vértices em componentes distintos de $G - v$. Verifique que $\{v\}$ separa a de b.

∘ **E 16.5** Critique a seguinte definição alternativa de separador: "Um *separador* de (a, b) é um conjunto S de vértices tal que todo caminho com extremos a e b tem pelo menos um vértice em S."

∘ **E 16.6** Sejam a e b dois vértices não adjacentes de um grafo. Suponha que um fluxo internamente disjunto de a a b tem k caminhos. Mostre que todo separador de (a, b) tem pelo menos k vértices.[1] (Que acontece se a e b forem adjacentes?)

⋆ **E 16.7** (FLUXO VERSUS SEPARADOR) *Sejam* a *e* b *dois vértices* não adjacentes *de um grafo* G. *Suponha que todo separador de* (a, b) *tem pelo menos* k *vértices. Mostre que* G *tem um fluxo internamente disjunto de tamanho* k *ligando* a *a* b. (Compare com os exercícios 16.6 e 1.218.)

⋆ **E 16.8** (TEOREMA DE MENGER[2]) Sejam a e b dois vértices *não adjacentes* de um grafo. Seja $\mathcal{P}^*$ um fluxo internamente disjunto máximo dentre todos os que ligam a a b. Seja S_* um separador mínimo de (a, b). Mostre que

$$|\mathcal{P}^*| = |S_*| \,,$$

(Esta é uma combinação de 16.6 e 16.7.)

⋆ **E 16.9** Deduza o teorema de Kőnig–Egerváry (exercício 10.7) do teorema de Menger (exercício 16.8).

E 16.10 (LEMA DO LEQUE) Seja a um vértice de um grafo G e seja B um subconjunto não vazio de $V_G \setminus \{a\}$. Um **leque** é uma coleção de caminhos de a a B tal que $V_P \cap V_Q = \{a\}$ para cada par (P, Q) de caminhos da coleção. Uma **barreira** é qualquer subconjunto S de $V_G \setminus \{a\}$ tal que todo caminho de a a B tem um vértice em S.

Suponha que todo barreira tem k ou mais vértices. Mostre que existe um leque com k caminhos.

[1] Assim, um separador com k vértices é um *certificado* de que não existe fluxo internamente disjunto de tamanho maior que k.

[2] Karl Menger (1902 – 1985). Pronuncie o "g" como "gato" e não como "gente".

E 16.11 Seja G um grafo e sejam A e B dois subconjuntos não vazios de V_G. Uma coleção de caminhos é **disjunta** se $V_P \cap V_Q = \emptyset$ para cada par (P, Q) de caminhos da coleção. Uma **barreira** é qualquer subconjunto S de V_G tal que todo caminho de A a B tem um vértice em S.

Suponha que toda barreira tem pelo menos k vértices. Mostre que existe uma coleção disjunta de k caminhos de A a B.

Conexidade

A **conexidade** de um grafo G é a cardinalidade do menor subconjunto S de V_G tal que $G - S$ é desconexo (ou seja, tem dois ou mais componentes). A conexidade de um grafo G é denotada por

$$\kappa(G) .$$

Esta definição de conexidade não se aplica ao caso em que G é completo, pois nesse caso não existe S tal que $G - S$ é desconexo. (Poderíamos, talvez, dizer que $\kappa(K_n) = \infty$.) Convenciona-se, então, que $\kappa(K_n) = n - 1$ para todo $n \geq 2$ e $\kappa(K_1) = 1$.

Dizemos que um grafo G é k-**conexo** (= k-*connected*) para todo $k \leq \kappa(G)$. Assim, um grafo 1-conexo é o mesmo que um grafo conexo e um grafo 2-conexo é o mesmo que um grafo biconexo (veja seção 1.14).

◦ **E 16.12** Calcule a conexidade de um caminho. Calcule a conexidade de um circuito.

◦ **E 16.13** Seja G um grafo completo com $n \geq 2$ vértices e e uma de suas arestas. Calcule a conexidade de $G - e$.

E 16.14 Seja G um grafo não completo e k um número natural. Mostre que G é k-conexo se e somente se $G - S$ é conexo para todo subconjunto S de V_G tal que $|S| < k$.

E 16.15 Seja B_t um dos componentes do grafo do bispo num tabuleiro t-por-t. Calcule $\kappa(B_t)$ para $t = 2, 3, 4$.

E 16.16 Seja D_t o grafo da dama num tabuleiro t-por-t. Calcule $\kappa(D_t)$ para $t = 2, 3, 4$.

E 16.17 Seja C_4 o grafo do cavalo num tabuleiro 4-por-4. Calcule $\kappa(C_4)$.

E 16.18 Seja G um circuito de comprimento 6. Calcule a conexidade do grafo $\overline{G}$.

E 16.19 Calcule a conexidade do grafo de Petersen.

$\star$ **E 16.20** Seja G um grafo não completo. Mostre (a partir do teorema de Menger, exercício 16.8) que *G é k-conexo se e somente se cada par de vértices não adjacentes de G é ligado por um fluxo internamente disjunto de tamanho k.*

$\circ$ **E 16.21** Mostre que todo grafo k-conexo com dois ou mais vértices é aresta-k-conexo. Mostre que a recíproca não é verdadeira, ou seja, que nem todo grafo aresta-k-conexo com dois ou mais vértices é k-conexo.

$\star$ **E 16.22** Mostre que $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ para todo grafo G com dois ou mais vértices. Mostre que a desigualdade pode ser estrita.

E 16.23 Mostre que $\kappa(G) = \kappa'(G)$ para todo grafo 3-regular G.

E 16.24 Seja k um número natural maior que 1 e G um grafo k-conexo com $n(G) \geq 2k$. Mostre que G tem um circuito com $2k$ ou mais vértices.

E 16.25 (Teorema de Dirac[3]) Seja k um número natural maior que 1 e G um grafo k-conexo. Seja Z um conjunto de k vértices de G. Mostre que existe um circuito em G que contém todos os vértices de Z.

[3] Publicado em 1952 por Gabriel Andrew Dirac (1925 – 1984).

Capítulo 17

Circuitos e caminhos hamiltonianos

Um circuito num grafo é **máximo** se o grafo não contém um circuito mais comprido. A **circunferência** de um grafo é o comprimento de um circuito de comprimento máximo no grafo.

> PROBLEMA DO CIRCUITO MÁXIMO: Encontrar um circuito máximo num grafo dado.

O problema de encontrar um caminho máximo é formulado de maneira análoga. Um caminho num grafo é **máximo** se o grafo não contém um caminho mais comprido.

Um circuito é **hamiltoniano**[1] se contém todos os vértices do grafo. É evidente que todo circuito hamiltoniano é um circuito máximo. O problema do circuito máximo tem a seguinte especialização óbvia:

> PROBLEMA DO CIRCUITO HAMILTONIANO: Decidir se um dado grafo tem um circuito hamiltoniano.

O conceito de **caminho hamiltoniano** e o problema do caminho hamiltoniano são definidos de maneira análoga.

Alguns dos exercícios abaixo envolvem a condição "$\delta(G) \geq k$". Convém lembrar que esta condição equivale a "$|\mathrm{N}(v)| \geq k$ para todo vértice v", uma vez que $|\mathrm{N}(v)| = \mathrm{d}(v)$ para todo vértice v.

[1] Referência a William Rowan Hamilton (1805 − 1865). (Veja verbete na Wikipedia.) Teria sido mais justo homenagear o inglês Thomas P. Kirkman (1806 − 1895). (Veja verbete na Wikipedia.)

Exercícios

∘ **E 17.1** É verdade que todo grafo completo tem um circuito hamiltoniano?

∘ **E 17.2** Dê condições necessárias e suficientes para que um grafo bipartido completo tenha um circuito hamiltoniano.

E 17.3 Encontre um circuito máximo em cada um dos grafos da figura 17.1.

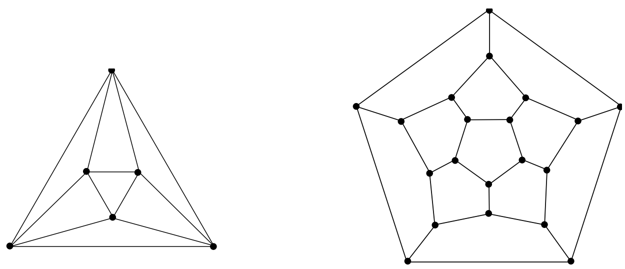


Figura 17.1: Encontre um circuito máximo. Veja exercício 17.3.

E 17.4 Encontre um circuito máximo no grafo de Petersen. Encontre um caminho máximo no grafo de Petersen.

E 17.5 Prove que para todo $k \geq 2$ o grafo Q_k tem um circuito hamiltoniano. (Sugestão: Use indução em k.)

E 17.6 Dê uma condição necessária e suficiente para que uma grade tenha um circuito hamiltoniano.

E 17.7 Encontre um circuito hamiltoniano no grafo do cavalo t-por-t. (Veja verbete na Wikipedia e artigo no Wolfram MathWorld.)

∘ **E 17.8** Seja G um grafo 3-regular dotado de um circuito hamiltoniano. Mostre que $\chi'(G) = 3$.

E 17.9 (ALGORITMO) Discuta o seguinte algoritmo para o problema do circuito hamiltoniano: Ao receber um grafo G, gere uma lista de todas as permutações de V_G; descarte as permutações que não correspondem a circuitos hamiltonianos; devolva qualquer uma das permutações restantes.

E 17.10 Mostre que todo grafo G tem um caminho de comprimento $\delta(G)$. (Veja exercício 1.125.)

E 17.11 Mostre que todo grafo G tem um circuito com $\delta(G) + 1$ ou mais vértices, desde que $\delta(G) > 1$. (Veja exercício 1.128 na seção 1.9.)

E 17.12 Mostre que todo grafo G tem um caminho com pelo menos $\chi(G)$ vértices, sendo $\chi(G)$ o número cromático (veja capítulo 8) de G. (Veja o exercício 8.47).

E 17.13 Sejam P^* e Q^* dois caminhos máximos em um grafo conexo G. Mostre que P^* e Q^* têm um vértice em comum. (Veja o exercício 1.170.)

◦ **E 17.14** Seja G um grafo dotado de circuito hamiltoniano. Mostre G não tem pontes. Mostre que G não tem articulações.

E 17.15 Seja G um grafo dotado de circuito hamiltoniano. Mostre que toda aresta de G pertence a um circuito.

E 17.16 Seja G um grafo $\{U, W\}$-bipartido tal que $|U| \neq |W|$. Prove que G não tem circuito hamiltoniano. (Outra maneira de formular a questão: para todo grafo $\{U, W\}$-bipartido dotado de circuito hamiltoniano tem-se $|U| = |W|$.)

E 17.17 Suponha que um grafo G tem um conjunto estável com mais que $n(G)/2$ vértices. Mostre que G não tem circuito hamiltoniano.

É verdade que todo grafo G com $\alpha(G) \leq n(G)/2$ tem um circuito hamiltoniano?

E 17.18 (CONDIÇÃO NECESSÁRIA) Seja S um conjunto de vértices de um grafo G. Suponha que $|S| < n(G)$ e

$$c(G - S) > |S| + 1\,,$$

sendo $c(G - S)$ o número de componentes de $G - S$. Mostre que G não tem caminho hamiltoniano. (Veja exercício 1.174.)

⋆ **E 17.19** (CONDIÇÃO NECESSÁRIA) Seja S um conjunto de vértices de um grafo G. Suponha que $0 < |S| < n(G)$ e

$$c(G - S) > |S|\,,$$

sendo $c(G - S)$ o número de componentes de $G - S$. Mostre que G não tem circuito hamiltoniano. (Veja exercício 1.175.) Outra maneira de formular a questão: Se G tem um circuito hamiltoniano então $c(G - S) \leq |S|$ para todo subconjunto próprio e não vazio S de V_G.

Mostre que a condição "$c(G - S) > |S|$" é uma generalização dos exercícios 17.14, 17.16 e 17.17.

E 17.20 Suponha que um grafo G satisfaz a desigualdade $c(G-S) \leq |S|$ para todo conjunto S de vértices tal que $0 < |S| < n(G)$. É verdade que G tem um circuito hamiltoniano?

D 17.21 (CONDIÇÃO SUFICIENTE: CONJECTURA DE CHVÁTAL[2]) Seja G um grafo tal que $c(G - S) \leq |S|/2$ para todo subconjunto S de V_G tal que $2 \leq |S| < n(G)$. Prove que G tem um circuito hamiltoniano. (Compare com o exercício 17.19.)

E 17.22 É verdade que existe um número natural k tal que todo grafo k-conexo (veja página 133) tem um circuito hamiltoniano? (Compare com os exercícios 17.19 e 17.35.)

E 17.23 Seja G um grafo conexo e O um circuito em G tal que, para todo aresta e de O, o grafo $O - e$ é um caminho máximo em G. Prove que G tem um circuito hamiltoniano.

E 17.24 Seja G um grafo com 4 ou mais vértices tal que $\delta(G) \geq n(G) - 2$. Mostre que G tem um circuito hamiltoniano.

E 17.25 Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Suponha que $m \geq 2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Prove que G tem um circuito hamiltoniano.

⋆ **E 17.26** (CONDIÇÃO SUFICIENTE: TEOREMA DE DIRAC[3]) Seja G um grafo com 3 ou mais vértices que satisfaz a condição

$$\delta(G) \geq n(G)/2\,.$$

Mostre que G tem um circuito hamiltoniano. (Sugestão: Use o exercício 1.129.)

⋆ **E 17.27** (GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE DIRAC) Seja G um grafo com 3 ou mais vértices que satisfaz a condição

$$\mathrm{d}_G(u) + \mathrm{d}_G(v) \geq n(G)$$

para todo par (u, v) de vértices distintos não adjacentes. Mostre que G tem um circuito hamiltoniano. (Sugestão: Use o exercício 1.129.)

---

[2] Proposta por Vašek Chvátal em 1971.
[3] Publicado em 1952 por Gabriel Andrew Dirac (1925 – 1984).

E 17.28 Seja G um grafo e $\{V_1, V_2, V_3\}$ uma partição de V_G em partes não vazias. Suponha que (1) cada vértice em V_1 é adjacente a todos os vértices de $V_2 \cup V_3$ e (2) cada vértice de V_2 é adjacente a todos os vértices de V_3.

Prove que se $|V_2| = 2|V_1|$ e $|V_3| = 3|V_1|$ então G tem um circuito hamiltoniano. Prove que se $|V_2| = 2|V_1|$ e $|V_3| = 3|V_1| + 1$ então G não tem circuito hamiltoniano.

E 17.29 Seja $\mathcal{A}$ um algoritmo que decide se um grafo dado tem um circuito hamiltoniano. Use $\mathcal{A}$ para formular um algoritmo que decide se um grafo dado tem um caminho hamiltoniano.

Seja $\mathcal{B}$ um algoritmo que decide se um grafo dado tem um caminho hamiltoniano. Use $\mathcal{B}$ para formular um algoritmo que decide se um grafo dado tem um circuito hamiltoniano.

D 17.30 (CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE?) Descubra uma condição necessária e suficiente para que um grafo tenha um circuito hamiltoniano. Descubra uma condição necessária e suficiente para que um grafo tenha um caminho hamiltoniano.

D 17.31 (ALGORITMO) Invente um algoritmo rápido que receba um grafo e devolva um circuito hamiltoniano no grafo (ou constate que o grafo não tem um tal circuito).

D 17.32 (ALGORITMO) Invente um algoritmo rápido que encontre um circuito máximo em qualquer grafo que não seja uma floresta.[4]

D 17.33 (ALGORITMO) Invente um algoritmo rápido que receba um grafo e devolva um caminho hamiltoniano no grafo (ou constate que o grafo não tem um tal caminho).[5]

D 17.34 (PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE[6]) Seja K um grafo completo e φ uma função de E_K em $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Para cada aresta e do grafo, diremos que $\varphi(e)$ é o *custo* de e. O *custo* de um subgrafo H de K é $\sum_{e \in E_H} \varphi(e)$. Invente um algoritmo para encontrar um circuito hamiltoniano de custo mínimo em K.[7] (Veja o sítio *The Traveling Salesman Problem*, mantido por Bill Cook na Georgia Tech University.)

---

[4] Um tal algoritmo ainda não foi encontrado. O problema de encontrar um circuito máximo é NP-difícil. Veja os livros de Garey–Johnson [GJ79], Harel [Har92] e Sipser [Sip97].

[5] Um tal algoritmo ainda não foi encontrado. O problema de decidir se um grafo tem um caminho hamiltoniano é NP-completo. Veja os livros de Garey–Johnson [GJ79], Harel [Har92] e Sipser [Sip97].

[6] *Traveling Salesman Problem* ou *TSP*.

[7] O problema é NP-difícil. Veja os livros de Garey–Johnson [GJ79], Harel [Har92] e Sipser [Sip97].

Grafos hamiltonianos planares

! E 17.35 (Teorema de Tutte[8]) Mostre que todo grafo planar 4-conexo (veja página 133) tem um circuito hamiltoniano. (Compare com o exercício 17.22.)

E 17.36 Mostre que nem todo grafo planar 3-conexo (veja página 133) tem circuito hamiltoniano.

D 17.37 (Conjectura de Barnette) Prove ou desprove a seguinte conjectura: Todo grafo planar bicolorável 3-regular 3-conexo (veja página 133) tem um circuito hamiltoniano.[9]

[8] William T. Tutte (1917 – 2002). (Veja verbete na Wikipedia.)
[9] D. Barnette propôs a conjectura em 1970.

Capítulo 18

Coberturas por circuitos

Uma **cobertura por circuitos** (= *circuit cover*) de um grafo G é qualquer coleção $\mathcal{O}$ de circuitos de G tal que $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} E_O = E_G$. Em outras palavras, uma cobertura por circuitos é uma coleção de circuitos tal que cada aresta do grafo pertence a pelo menos um dos circuitos do coleção.[1]

Seria natural dedicar este capítulo ao problema da cobertura mínima por circuitos. Mas este problema é muito difícil. (Veja fim do capítulo.) Trataremos então do problema da *decomposição* em circuitos, que é bem mais simples.

Uma **decomposição em circuitos**, ou cobertura **simples** por circuitos, de um grafo é uma cobertura por circuitos que cobre cada aresta do grafo apenas uma vez.

> PROBLEMA DA DECOMPOSIÇÃO EM CIRCUITOS: Encontrar uma decomposição em circuitos de um grafo dado.

Por conta do exercício 18.16, este problema também é conhecido como "problema dos ciclos eulerianos".

Exercícios

E 18.1 Exiba uma decomposição em circuitos de cada um dos grafos da figura 18.1.

E 18.2 Para que valores de p e q uma grade p-por-q tem uma decomposição em circuitos?

[1] Coberturas por circuitos são muito diferente de coberturas por emparelhamentos, por exmeplo, porque uma parte de um circuito não é um circuito enquanto toda parte de um emparelhamento é um emparelhamento.

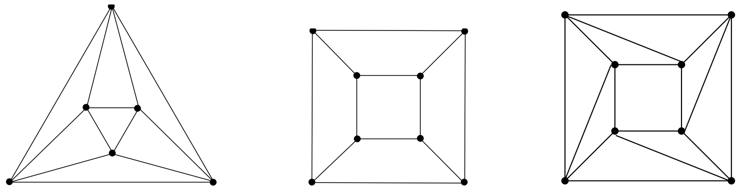


Figura 18.1: Encontre uma decomposição em circuitos. Veja exercício 18.1.

E 18.3 Encontre uma decomposição em circuitos do grafo do cavalo.

E 18.4 Para que valores de k o cubo Q_k tem uma decomposição em circuitos?

E 18.5 Dê uma condição necessária e suficiente para que um grafo completo tenha uma decomposição em circuitos.

◦ **E 18.6** Suponha que um grafo G tem uma ponte. Mostre que G não tem decomposição em circuitos. (Veja exercício 1.199.)

E 18.7 Seja F um conjunto de arestas de um grafo G com três ou mais vértices. Suponha que o grafo (V_G, F) é conexo e tem uma decomposição em circuitos. Mostre que G é aresta-biconexo. A recíproca é verdadeira?

◦ **E 18.8** Suponha que um grafo G tem um vértice de grau ímpar. Mostre que G não tem decomposição em circuitos.[2] (Outra maneira de dizer a mesma coisa: se um grafo G tem uma decomposição em circuitos então todos os vértices de G têm grau par.)

⋆ **E 18.9** (TEOREMA DE VEBLEN[3] E EULER[4]) Mostre que um grafo tem uma decomposição em circuitos se e somente se o grau de cada um de seus vértices é par. (Compare com o exercício 18.8.) Em outras palavras, mostre que a ausência de vértices de grau ímpar é condição necessária e suficiente para que um grafo tenha uma decomposição em circuitos.

E 18.10 Mostre que um grafo tem uma decomposição em circuitos se e somente se todos os seus cortes são pares.

E 18.11 Grafos que têm decomposição em circuitos não têm vértices ímpares. Por outro lado, grafos bicoloráveis não têm circuitos ímpares. Há algo por trás desse paralelo?

[2] Portanto, um vértice de grau ímpar é um *certificado* da inexistência de decomposição em circuitos.

[3] Oswald Veblen (1880 − 1960). Veja verbete na Wikipedia.

[4] Leonhard Euler (1707 − 1783). Veja verbete na Wikipedia.

E 18.12 Seja G o grafo de um mapa plano $\mathbb{M}$. Suponha que G é biconexo e não tem vértices de grau 2. Seja G^* o grafo das faces (ou seja, grafo dual) do mapa $\mathbb{M}$. Mostre que G^* é bicolorável se e somente se G tem uma decomposição em circuitos.

E 18.13 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que receba um grafo G e devolva uma decomposição em circuitos de G ou prove que tal decomposição não existe.

Ciclos e trilhas eulerianas

Como já dissemos no fim da seção 1.9, um **passeio** (= *walk*) em um grafo é qualquer sequência $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ de vértices tal que v_i é adjacente a v_{i-1} para todo i entre 1 e k. Dizemos que o passeio **vai de** v_0 **a** v_k. O **comprimento** do passeio é o número k.

Uma **trilha** (= *trail*) é um passeio sem arestas repetidas, isto é, um passeio cujas arestas são distintas duas a duas. Uma trilha $(v_0, \ldots, v_k)$ é **fechada** (= *closed*) se $v_0 = v_k$.

Uma trilha é **euleriana**[5] se passa por todas as arestas do grafo.[6] Assim, uma trilha $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ é euleriana se e somente se $\{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k\}$ é o conjunto de (todas as) arestas do grafo.

Um **ciclo** (= *cycle*) é uma trilha fechada.[7] Um ciclo é euleriano se e somente se passa por todas as arestas do grafo.

E 18.14 Encontre um ciclo euleriano no grafo da figura 18.2.

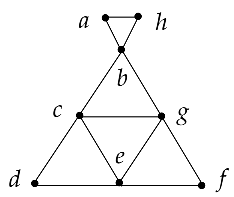


Figura 18.2: Encontre um ciclo euleriano. Veja exercício 18.14.

[5] Referência a Leonhard Euler (1707 – 1783). Veja verbete na Wikipedia.

[6] Alguns autores também exigem que a trilha passe por todos os vértices do grafo. A diferença entre as duas definições é superficial.

[7] De acordo com essa definição, um ciclo pode ter comprimento 0. Já um circuito, por definição, tem comprimento pelo menos 3.

E 18.15 Considere as 21 peças do jogo de dominó que não são duplas. Cada uma dessas peças corresponde a um subconjunto de cardinalidade 2 do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$. É permitido "encostar" uma peça $\{i, j\}$ numa peça $\{j, k\}$ de forma a produzir a sequência (i, j, j, k). Pergunta: É possível formar um "roda" que contenha todas as 21 peças? E se eliminarmos todas as peças que contêm "6"?

⋆ **E 18.16** (CICLOS EULERIANOS) Mostre que todo grafo dotado de um ciclo euleriano tem uma decomposição em circuitos.

Mostre que todo grafo conexo dotado de uma decomposição em circuitos tem um ciclo euleriano.

E 18.17 Dê uma condição necessária e suficiente para que um grafo tenha uma trilha euleriana não fechada.

E 18.18 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que encontre uma trilha euleriana (fechada ou não) em qualquer um grafo conexo dado.

! E 18.19 (PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS[8]) Dado um grafo, encontrar um passeio de comprimento mínimo dentre os que são fechados e passam por todas as arestas do grafo.

E 18.20 Suponha que um grafo G tem um ciclo euleriano. Mostre que o grafo das arestas $L(G)$ tem um circuito hamiltoniano (veja exercício 1.24).

Mostre que a recíproca não é verdadeira: $L(G)$ pode ter um circuito hamiltoniano sem que G tenha um ciclo euleriano.

E 18.21 Sejam xy e yz duas arestas de um grafo conexo G sem vértices de grau ímpar. É verdade que G tem um ciclo euleriano na qual xy e yz aparecem consecutivamente?

E 18.22 Seja G um grafo conexo cada um de cujos vértices tem grau par. Suponha ainda que $m(G)$ é par. Prove que E_G admite uma partição $\{F_1, F_2\}$ tal que $|F_1 \cap \partial\{v\}| = |F_2 \cap \partial\{v\}|$ para cada vértice v, ou seja, v incide no mesmo número de arestas de F_1 e F_2.

Coberturas por circuitos

Como já dissemos no início do capítulo, uma **cobertura por circuitos** de um grafo G é qualquer coleção $\mathcal{O}$ de circuitos de G tal que $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} E_O = E_G$.

[8] *Chinese Postman Problem*. Proposto em 1962 pelo matemático chinês Mei-Ko Kwan.

Uma cobertura por circuitos $\mathcal{O}$ é **mínima** se não existe cobertura por circuitos $\mathcal{O}'$ tal que $|\mathcal{O}'| < |\mathcal{O}|$.

O **comprimento total** de uma cobertura por circuitos $\mathcal{O}$ é a soma $\sum_{O\in\mathcal{O}} |E_O|$. É claro que toda decomposição em circuitos é uma cobertura de comprimento total mínimo.

A **espessura** de uma cobertura por circuitos $\mathcal{O}$ de um grafo G é o número $\max_{e\in E_G} |\{\, O \in \mathcal{O} : E_O \ni e \,\}|$. Assim, se uma cobertura por circuitos tem espessura k então toda aresta do grafo pertence a no máximo k dos circuitos. Reciprocamente, se cada aresta do grafo pertence a $\leq k$ circuitos da cobertura então a cobertura tem espessura $\leq k$.

É claro que uma decomposição em circuitos é o mesmo que uma cobertura de espessura 1.

Exercícios

$\circ$ **E 18.23** Mostre que um grafo tem uma cobertura por circuitos se e somente se não tem pontes. (Veja o exercício 1.199.)

D 18.24 (COBERTURA MÍNIMA POR CIRCUITOS) Resolva o seguinte problema: Encontrar uma cobertura por circuitos mínima de um grafo sem pontes.

! E 18.25 Mostre que, para todo k par, o cubo Q_k pode ser coberto por apenas $k/2$ circuitos.

E 18.26 Encontre uma cobertura por circuitos mínima do grafo de Petersen.

E 18.27 Encontre uma cobertura por circuitos mínima do primeiro grafo da figura 18.1. (Esse grafo pode ser descrito como $K_6 - M$, sendo M um emparelhamento perfeito.)

D 18.28 (COBERTURA DE COMPRIMENTO TOTAL MÍNIMO) Resolva o seguinte problema: Dado um grafo G sem pontes, encontrar uma cobertura por circuitos de G que tenha comprimento total mínimo.[9]

E 18.29 Encontre uma cobertura por circuitos do grafo de Petersen que tenha comprimento total mínimo.

$\star$ **E 18.30** Mostre que todo grafo planar aresta-biconexo G tem uma cobertura por circuitos de comprimento total $\leq 2m(G)$.

[9] Não se conhece um algoritmo eficiente para o problema. Em termos técnicos, o problema é NP-difícil.

D 18.31 (COBERTURA DE ESPESSURA MÍNIMA) Resolva o seguinte problema: Dado um grafo G sem pontes, encontre uma cobertura por circuitos de G que tenha espessura mínima.

(Segundo a célebre conjectura da Cobertura Dupla por Circuitos,[10] todo grafo sem pontes tem uma cobertura de espessura ≤ 2.)

⋆ **E 18.32** Mostre que todo grafo planar aresta-biconexo tem uma cobertura por circuitos de espessura ≤ 2.

E 18.33 Encontre uma cobertura por circuitos do grafo de Petersen que tenha espessura mínima.

E 18.34 Encontre uma cobertura por circuitos de K_5 que tenha espessura mínima.

E 18.35 Encontre uma cobertura por circuitos de $K_{3,3}$ que tenha espessura mínima.

! E 18.36 (TEOREMA DE KILPATRICK E JAEGER[11]) Mostre que todo grafo aresta-4-conexo (veja página 129) tem uma cobertura por circuitos de espessura ≤ 2.

E 18.37 Mostre (através de exemplos) que os conceitos de cobertura mínima, cobertura de comprimento total mínimo, e cobertura de espessura mínima são distintos dois a dois.

E 18.38 Por que o problema do carteiro chinês (exercício 18.19) não resolve o problema da cobertura por circuitos de espessura mínima (veja exercício 18.31)? Por que não resolve o problema da cobertura por circuitos de comprimento total mínimo (veja exercício 18.28)?

---

[10] *Circuit Double Cover Conjecture*. A conjectura é de George Szekeres e Paul Seymour.

[11] Publicado por Kilpatrick em 1975 e F. Jaeger em 1976.

Capítulo 19

Caracterização da planaridade

Como dissemos na seção 1.17, um grafo é **planar** se for representável por um mapa plano, ou seja, se for isomorfo ao grafo de algum mapa plano.

> PROBLEMA DA PLANARIDADE: Decidir se um dado grafo é planar ou não.

Se um grafo não é planar, como é possível tornar isso evidente? Uma resposta muito bonita envolve o conceito de menores proibidos (veja a seção 1.16): todo grafo não planar tem um menor que é *obviamente* não planar.

Exercícios

⋆ **E 19.1** Mostre que $K_{3,3}$ não é planar. (Veja, por exemplo, o exercício 1.271.)

⋆ **E 19.2** Mostre que K_5 não é planar. (Veja, por exemplo, o exercício 1.270.)

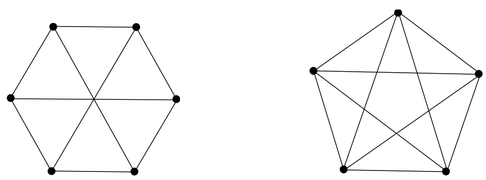


Figura 19.1: $K_{3,3}$ e K_5 não são planares. Veja exercícios 19.1 e 19.2.

∘ **E 19.3** Mostre que todo subgrafo de um grafo planar é planar. Em outras palavras, se um grafo G tem um subgrafo não planar então G não é planar.

∘ **E 19.4** Suponha que todos os subgrafos próprios de um grafo G são planares. É verdade que G é planar?

E 19.5 Suponha que um grafo G não tem subgrafo isomorfo a K_5 nem subgrafo isomorfo a $K_{3,3}$. É verdade que G é planar?

⋆∘ **E 19.6** Mostre que todo menor topológico (veja seção 1.16) de um grafo planar é planar. Em outras palavras, se um grafo G tem um menor topológico não planar então G não é planar. (Em particular, se G contém uma uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ então G não é planar.)

⋆ **E 19.7** Mostre que todo menor (veja seção 1.16) de um grafo planar é planar. Em outras palavras, se um grafo G tem um menor não planar então G não é planar. (Em particular, se G tem uma subcontração isomorfa a K_5 ou a $K_{3,3}$ então G não é planar.)

E 19.8 Mostre que todo menor próprio de K_5 é planar. Mostre que todo menor próprio de $K_{3,3}$ é planar.

∘ **E 19.9** Mostre que $K_{3,3}$ não é um menor de K_5. Mostre que K_5 não é um menor de $K_{3,3}$.

E 19.10 Para que valores de t o grafo do bispo t-por-t é planar?

E 19.11 Para que valores de t o grafo do cavalo t-por-t é planar?

E 19.12 Mostre que o grafo de Petersen não é planar. (Veja os exercícios 1.247 e 1.248.)

E 19.13 Mostre que o cubo Q_4 não é planar. (Veja o exercício 1.249.)

⋆! **E 19.14** (TEOREMA DE WAGNER[1]) *Mostre que um grafo é planar se e somente se não tem um menor isomorfo a K_5 nem um menor isomorfo a $K_{3,3}$.* (Compare com o exercício 19.7.)

⋆! **E 19.15** (TEOREMA DE KURATOWSKI[2]) *Mostre que um grafo é planar se e somente se não tem um menor topológico isomorfo a K_5 nem um menor topológico isomorfo a $K_{3,3}$.* (Compare com o exercício 19.6.)

E 19.16 Discuta a seguinte afirmação: "Como K_5 não é bicolorável, podemos concluir que todo grafo bicolorável não planar tem um minor topológico $K_{3,3}$."

---

[1] Publicado em 1937 por Klaus W. Wagner (1910 − 2000).
[2] Publicado em 1930 por Kazimierz Kuratowski (1896 − 1980).

! E 19.17 (ALGORITMO) Construa um algoritmo que decida se um dado grafo é planar.

! E 19.18 Mostre que todo grafo não planar 4-conexo tem um menor K_5. Mostre que todo grafo não planar 3-conexo com 6 ou mais vértices tem um menor $K_{3,3}$.

D 19.19 Prove a seguinte conjectura de Dirac:[3] Se um grafo G não tem um menor topológico K_5 então $m(G) \le 3n(G) - 6$. (Compare com o exercício 1.268.)

E 19.20 Mostre que um grafo é exoplanar (veja o exercício 1.283) se e somente se não tem menor K_4 nem menor $K_{2,3}$. Mostre que um grafo é exoplanar se e somente se não tem menor topológico K_4 nem menor topológico $K_{2,3}$.

[3] A conjectura foi proposta por G. A. Dirac em 1964.

Apêndice A

Algumas dicas

Exercício 1.208. Prova por indução na distância entre r e s. Ela cuida primeiro do caso em que r e s são vizinhos, depois do caso em que existe um caminho de comprimento 2 de r a s, etc.

Seja $v_0\, v_1\, \ldots\, v_k$ um caminho de r a s. Por hipótese de indução, existem dois caminhos, P e Q, de v_0 a v_{k-1} tais que $E_P \cap E_Q = \emptyset$. Seja C um circuito que contém a aresta $v_{k-1}v_k$. O grafo $P \cup Q \cup C$ contém dois caminhos de v_0 a v_k sem arestas em comum.

Exercício 1.226. Suponha que há dois caminhos diferentes, digamos P e Q, com extremos x e y. Encontre um circuito no grafo $P \cup Q$.

Exercício 1.233. Seja v um vértice tal que $\mathrm{d}(v) = \Delta$. Para cada vizinho w de v, tome um caminho maximal dentre os que têm v como primeiro vértice e w como segundo vértice.

Exercício 1.228. Faça a prova por indução em $m(G)$. Passo da indução: Seja a uma aresta de T e sejam T_1 e T_2 os dois componentes de $T - a$. Por hipótese de indução, $m(T_1) = n(T_1) - 1$ e $m(T_2) = n(T_2) - 1$.

Exercício 1.229. Indução em $n(G)$. Passo da indução: Suponha $m(G) = n(G) - 1$. Seja v um vértice v tal que $\mathrm{d}(v) = 1$. O grafo $G - v$ é conexo e $m(G-v) = n(G-v) - 1$. Por hipótese de indução, $G - v$ não tem circuitos. Portanto, G não tem circuitos.

Exercício 1.266. Faça indução no número de faces. A base da indução usa a igualdade $m = n - 1$ válida para árvores (veja exercício 1.228).

Exercício 1.268. Comece tratando do caso em que G é aresta-biconexo. Veja os exercícios 1.266 e 1.267.

Exercício 1.275. Veja o exercício 1.268.

Exercício 4.23. Digamos que as aresta em D são vermelhas e as outras são pretas. Um caminho é par se tem um número par de arestas vermelhas e ímpar se tem um número ímpar de arestas vermelhas.

Fato fundamental: se dois caminhos têm os mesmos extremos, então têm a mesma paridade. Prove este fato por indução no número de vértices comuns.

Exercício 5.27. Mostre que o algoritmo do exercício 5.22 produz um conjunto estável S tal que $|S| \geq n/(\mu + 1)$.

Exercício 6.15. Suponha $\omega \leq 2$. Construa um grafo bicolorável H tal que $V_H = V_G$ e $\mathrm{d}_G(v) \leq \mathrm{d}_H(v)$ para todo vértice v. Use o exercício 4.12.

Exercício 8.47. Seja $\{X_1, \ldots, X_k\}$ uma coloração mínima que maximiza o número $\sum_{i=1}^{k} i\,|X_i|$. Então existe um caminho da forma $x_1\, x_2\, \ldots\, x_k$ com $x_i \in X_i$.

Outra possibilidade: veja algoritmos nos exercícios 8.28 e 8.29.

Outra possibilidade: remova o último vértice de um caminho de comprimento máximo e aplique indução.

Exercício 8.41. No início de cada iteração os vértices $v_1, \ldots, v_j$ já foram coloridos com k cores e $G[\{v_1, \ldots, v_j\}]$ tem uma clique com k vértices.

Exercício 9.23. Veja o exercício 9.17.

Exercício 9.36. Mostre que $G - v$ tem pelo menos um componente ímpar. Depois, mostre que $G - v$ não pode ter mais que um componente ímpar.

Exercício 10.4. Prove que uma das pontas de cada aresta é saturada por todos os emparelhamentos máximos. Prova por contradição: suponha que existe uma aresta uw e emparelhamentos máximos M e N tais que M não satura u e N não satura w. Estude o componente de $(V_G, M \cup N)$ que contém u.

Exercício 10.6. Prova por indução no número de vértices. Tome um vértice u que seja saturado por todos os emparelhamentos máximos. Aplique a hipótese de indução a $G - u$.

Exercício 10.18. Seja M um emparelhamento máximo. Digamos que um caminho é *bom* se tiver um extremo em $U \setminus V(M)$ e for M-alternante Seja X o conjunto dos vértices de todos os caminhos bons. Seja $K := (W \cap X) \cup (U \setminus X)$. Mostre que K é uma cobertura. Mostre que $|K| = |M|$.

Exercício 10.12. Seja M^* um emparelhamento máximo e suponha por um momento que $|M^*| < k$. De acordo com o teorema de Kőnig, G tem uma cobertura K_* tal que $|K_*| < k$. Logo, $m(G) \leq |U|\,|K_*| \leq |U|\,(k-1)$. Contradição.

Exercício 10.22. Seja M um emparelhamento e K uma cobertura tais que $|M| = |K|$ (veja exercício 10.6). Mostre que $|U| \leq |K|$ e veja o exercício 9.30.

Exercício 10.22. A prova é uma indução na cardinalidade de U. O passo da indução tem dois casos. No primeiro, $|\mathrm{N}_G(Z)| > |Z|$ para todo subconjunto próprio e não vazio Z de U. No segundo, $|\mathrm{N}_G(Y)| = |Y|$ para algum subconjunto próprio e não vazio Y de U. No primeiro caso, tome qualquer aresta uw com $u \in U$ e aplique a hipótese de indução a $G - \{u, w\}$. No segundo, aplique a hipótese de indução a $G - (Y \cup \mathrm{N}_G(Y))$ e a $G[(U \smallsetminus Y) \cup (W \smallsetminus \mathrm{N}(Y))]$.

Exercício 10.32. Considere o grafo $(V_G, M \cup N)$. Veja exercício 9.17.

Exercício 12.2. Cada operário é um vértice do meu grafo; cada máquina também é um vértice; cada aresta é uma tarefa, que associa um operário com uma máquina; cada cor é um dia de trabalho.

Exercício 12.15. G não tem emparelhamento perfeito.

Exercício 12.16. G não tem emparelhamento perfeito. Segue do exercício 12.15.

Exercício 12.23. Faça indução em r. Veja exercício 10.29.

Exercício 12.25. Veja o exercício 10.34.

Exercício 13.4. Basta provar que cada aresta de C é uma ponte no grafo (V_G, C). (Veja também os exercícios 1.149 e 1.157.)

Exercício 13.8. Veja o exercício 1.226.

Exercício 14.9. Sejam x e z dois vértices não adjacentes de uma árvore. Seja L o único caminho de x a z. Mostre que se $\mathrm{exc}(x) = \mathrm{exc}(z)$ então $\mathrm{exc}(y) < \mathrm{exc}(x)$ para todo vértice interno y de L.

Exercício 14.14. Veja o exercício 14.13.

Exercício 14.18. Para cada vértice r, analise a árvore das distância (exercício 14.7) centrada em r. Veja exercícios 14.13, 14.5, 1.123, e 14.3.

Exercício 14.19. Para cada vértice r, analise a árvore das distância 14.7 centrada em r.

Exercício 14.20. Encontre um emparelhamento perfeito de peso mínimo (veja exercício 11.17) num grafo apropriado construído a partir de (G, u, v).

Exercício 14.21. Encontre um emparelhamento perfeito de peso mínimo (veja exercício 11.17) num grafo apropriado construído a partir de (G, u, v).

Exercício 15.6. Faça a prova por indução em k. Adote as seguintes definições: Para qualquer subconjunto B de E_G, seja $V(B)$ o conjunto dos vértices que incidem em elementos de B e seja $G(B)$ o grafo $(V(B) \cup \{r\}, B)$. Um subconjunto B de E_G é *bom* se $G(B)$ é conexo e $\mathrm{d}_{G-B}(Y) \geq k - 1$ para todo Y que contém r mas não contém s.

Comece por provar o seguinte lema: Para qualquer conjunto bom B, se s não está em $G(B)$ então existe uma aresta e em $E_G \setminus B$ tal que $B \cup \{e\}$ é bom. Use o exercício 1.115.

Exercício 16.10. Acrescente a G um novo vértice y e novas arestas ligando y a cada um dos vértices em S. Mostre que o novo grafo é k-conexo.

Exercício 16.25. Faça indução em k, começando com $k = 2$. No passo da indução, use o lema do leque, exercício 16.10.

Exercício 17.10. Tome um caminho maximal. (Veja a seção 1.7.)

Exercício 17.19. Veja os exercícios 1.174 e 1.175.

Exercício 17.26. Sejam u e v os extremos de um caminho máximo P. Mostre que o grafo $(V_P, E_P \cup \partial(u) \cup \partial(v))$ contém um circuito hamiltoniano.

Exercício 18.6. Veja os exercícios 1.110 e 18.8.

Exercício 18.7. Veja os exercícios 1.110, 1.199 e 18.6.

Exercício 18.16. Veja o exercício 1.126.

Exercício 18.19. Se não há vértices de grau ímpar, basta encontrar um ciclo euleriano. Se há apenas dois vértices de grau ímpar, basta tomar um caminho de comprimento mínimo entre esses vértice e... Se há mais que dois vértices de grau ímpar, use o algoritmo do emparelhamento de peso mínimo (exercício 11.17) para escolher caminhos ligando vértices ímpares aos pares.

Exercício 19.6. Segue de 19.7 e 1.250.

Exercício 19.7. Isto é uma generalização do exercício 19.6. Veja os exercícios 1.250 e 1.251.

Exercício 19.14. Segue de 19.15 e 1.250.

Exercício 19.15. Segue de 19.14 e 1.251.

Apêndice B

O alfabeto grego

A teoria dos grafos, tal como outras áreas da matemática, considera o alfabeto latino insuficiente e recorre muitas vezes ao alfabeto grego:

α	A	alfa	ν	N	nü
β	B	beta	ξ	Ξ	ksi
γ	Γ	gama	o	O	ômicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	E	epsilon	ρ	P	rô
ζ	Z	zeta	σ	Σ	sigma
η	H	eta	τ	T	tau
θ	Θ	teta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	φ	Φ	fi
κ	K	kapa	χ	X	qui
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mü	ω	Ω	ômega

O símbolo ∂ não pertence ao alfabeto grego. Este texto usa o símbolo para denotar cortes (veja a seção 1.8).

Bibliografia

[BM76] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Macmillan/Elsevier, 1976. Internet: http://www.ecp6.jussieu.fr/pageperso/bondy/books/gtwa/gtwa.html. 5

[BM08] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics 244. Springer, 2008. Internet: http://blogs.springer.com/bondyandmurty. 5, 17

[Bol98] B. Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer, 1998. 5

[Car11] D.M. Cardoso. Teoria dos Grafos e Aplicações. Internet: http://arquivoescolar.org/handle/arquivo-e/78, 2011.

[Die00] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2nd edition, 2000. Internet: http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/index.html. 5

[Die05] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 3rd edition, 2005. 5, 8, 17

[GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman, 1979. 5, 139

[Har92] D. Harel. *Algorithmics: The Spirit of Computing*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1992. 5, 139

[JNC10] D. Joyner, M.V. Nguyen, and N. Cohen. *Algorithmic Graph Theory*. Google Code, 2010. [eBook].

[Knu93] D.E. Knuth. *The Stanford GraphBase: A Platform for Combinatorial Computing*. ACM Press and Addison-Wesley, 1993. 12

[Lov93] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. North-Holland, second edition, 1993. 5

[LP86] L. Lovász and M.D. Plummer. *Matching Theory*, volume 29 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, 1986. 5

[Luc79] C.L. Lucchesi. *Introdução à Teoria dos Grafos*. 12o. Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1979. 5

[MST+98] O. Melnikov, V. Sarvanov, R. Tyshkevich, V. Yemelichev, and I. Zverovich. *Exercises in Graph Theory*, volume 19 of *Kluwer Texts in the Mathematical Sciences*. Kluwer, 1998. 5

[OPG] Open Problem Garden. Internet: http://garden.irmacs.sfu.ca/. Hosted by Simon Fraser University.

[Per09] J.M.S. Simões Pereira. *Matemática Discreta: Grafos, Redes, Aplicações*. Luz da Vida, Coimbra, Portugal, 2009. 14, 21, 26

[Sip97] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. PWS Publishing, 1997. Internet: http://www-math.mit.edu/~sipser/book.html. 5, 139

[vL90] J. van Leeuwen. Graph algorithms. In J. van Leeuwen, editor, *Algorithms and Complexity*, volume A of *Handbook of Theoretical Computer Science*, pages 527–631. Elsevier and MIT Press, 1990.

[Wil79] R.J. Wilson. *Introduction to Graph Theory*. Academic Press, 2nd edition, 1979. 5

[Zha97] C.-Q. Zhang. *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*. Marcel Dekker, 1997.

Índice Remissivo