Allocation optimale avec consommation du capital.

Gil-Arnaud Coche

March 4, 2021

Dans cette note, on va chercher à comprendre les points essentiels d'une allocation de richesse entre un actif risqué et un actif sans risque, sachant que l'investisseur consomme son capital sur la période. On s'intéresse au cas simple mais instructif d'un investissement de $k = 0$ à $k = 1$.

1 Le modèle

Mettons-nous dans la peau d'un petit porteur qui a à sa disposition un capital $\mathcal{W}_0$ à l'instant 0. On va essayer de comprendre comment ce petit porteur pourrait répartir ce capital jusqu'à l'instant 1 entre

- un actif risqué de rendement
$$\mu = m + \sigma\epsilon$$
où ϵ est une loi normale centrée et réduite;
- un actif sans risque de rendement r;

sachant qu'il souhaite consommer c_0 et c_1 de ce capital en 0 et 1 respectivement.

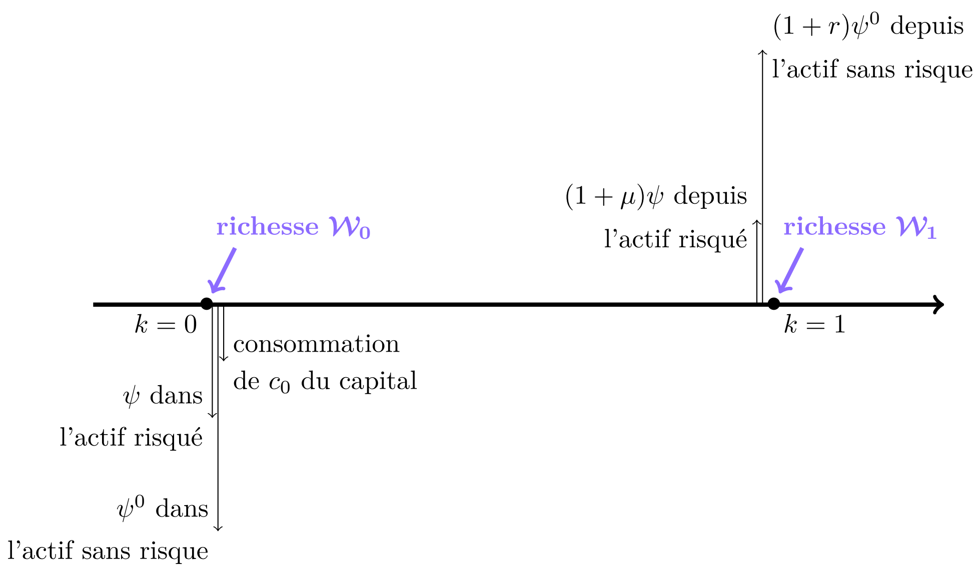

Figure 1: Les flux de richesse entre deux instant de gestion $k = 0$ et $k = 1$.

D'après la figure 1, le petit porteur place en l'instant $k = 0$

- une valeur ψ dans l'actif risqué;
- une valeur ψ^0 dans l'actif sans risque.

Il consomme également c_0, de sorte que sa initiale richesse $\mathcal{W}_0$ peut s'exprimer comme la somme de ψ, ψ^0 et de c_0

$$\mathcal{W}_0 = \psi + \psi^0 + c_0. \tag{1.1}$$

En l'instant $k = 1$, il reçoit

- une valeur $(1+\mu)\psi$ de son placement risqué;
- une valeur $(1+r)\psi^0$ de son placement sans risque.

et il se verse l'intégralité de ce qu'il a. Mathématiquement nous avons donc les égalités

$$c_1 = \mathcal{W}_1 = (1+\mu)\psi + (1+r)\psi^0.$$

En prenant en compte la relation (1.1) dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$c_1 = (\mu - r)\psi + (1+r)\left(\mathcal{W}_0 - c_0\right). \tag{1.2}$$

Le porteur percevra donc les flux actualisés suivants

$$\tilde{\mathcal{G}} = c_0 + \frac{c_1}{1+r} = \mathcal{W}_0 + \frac{m - r + \sigma\epsilon}{1+r}\psi \tag{1.3}$$

2 La stratégie d'investissement du petit porteur, solution d'un problème d'optimisation

2.1 Benchmark linéaire

Pour se benchmarker, le petit porteur part du principe que sans stratégie d'investissement, il pourrait tout simplement placer $\psi^0 = \mathcal{W}_0/2$ en l'actif sans risqué et percevoir $c_0 = \mathcal{W}_0/2$ à l'instant initial. Cela lui assurerait d'obtenir $(1+r)W_0/2$ en l'instant $k=1$ et ne pas trop subir les affres de l'inflation.

2.2 Son objectif d'investissement.

Il souhaite à présent bénéficier d'une position en l'actif risqué pour essayer d'augmenter ses rendements. Il cherche donc à chercher le couple (c_0, ψ) qui lui permettra d'assurer une rente actualisée supérieure à $\mathcal{W}_0$.

Mathématiquement, on considère que ce porteur veut maximiser son espérance de gains actualisés par rapport à sa richesse initiale $\mathcal{W}_0$.

$$\max_{c_0,\psi} \frac{m-r}{1+r}\psi \tag{2.1}$$

L'équation ci-dessus étant linéaire en ψ, tout optimisation numérique ira chercher la plus grande valeur possible pour ψ. En l'absence de contraintes, l'optimisation n'aurait pas donc pas de solutions. C'est justement la nature des contraintes qui va déterminer la stratégie optimale.

2.3 Ses contraintes d'investissement.

Néanmoins, il ne veut pas non plus prendre des risques inconsidérés. Il veut donc maîtriser au maximum les possibilités de pertes. Sa mesure du risque sera la probabilité que son investissement lui rapporte en $k=1$ moins que $(1+r)\mathcal{W}_0/2$, ce qu'il aurait avec la stratégie sans risque.

Ce choix de contrainte est cohérent avec sa démarche de prise de risque: pourquoi investir dans l'incertain si la probabilité de faire moins que son benchmark naïf et certain lui semble trop élevée?

Quantitativement, il se fixe un niveau α de probabilité de perte qu'il juge maximal: il rejettera toute stratégie qui ne lui assurerait pas un probabilité $1-\alpha$ de faire mieux que son benchmark.

Mathématiquement cela se traduit par l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(\left(m - r + \sigma\epsilon\right)\psi \leq (1+r)\left(c_0 - \frac{\mathcal{W}_0}{2}\right)\right) \leq \alpha.$$

Pour y voir plus claire, un peu de développements sont nécessaires. En utilisant l'inverse de la focntion de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(x) = \mathbb{P}\left(\epsilon \leq x\right)$, on arrive à

$$\frac{1+r}{\sigma\psi}\left(c_0 - \frac{\mathcal{W}_0}{2}\right) \leq \frac{m-r}{\sigma} - \mathcal{N}^{-1}\left(1-\alpha\right). \tag{2.2}$$

Dans l'expression ci-dessus, on voit apparaître le ratio de sharpe

$$s = \frac{m-r}{\sigma}$$

et un ratio de Sharpe limite

$$s_\alpha = \mathcal{N}^{-1}\left(1-\alpha\right)$$

qui n'est autre que le quantile de niveau $1-\alpha$ de la distribution de ϵ (qui est ici gaussienne centrée réduite). Deux cas de figure vont donc se présenter. Avant de les développer, rappelons que l'on a en toute circonstance $0 \leq \psi \leq \mathcal{W}_0 - c_0$.

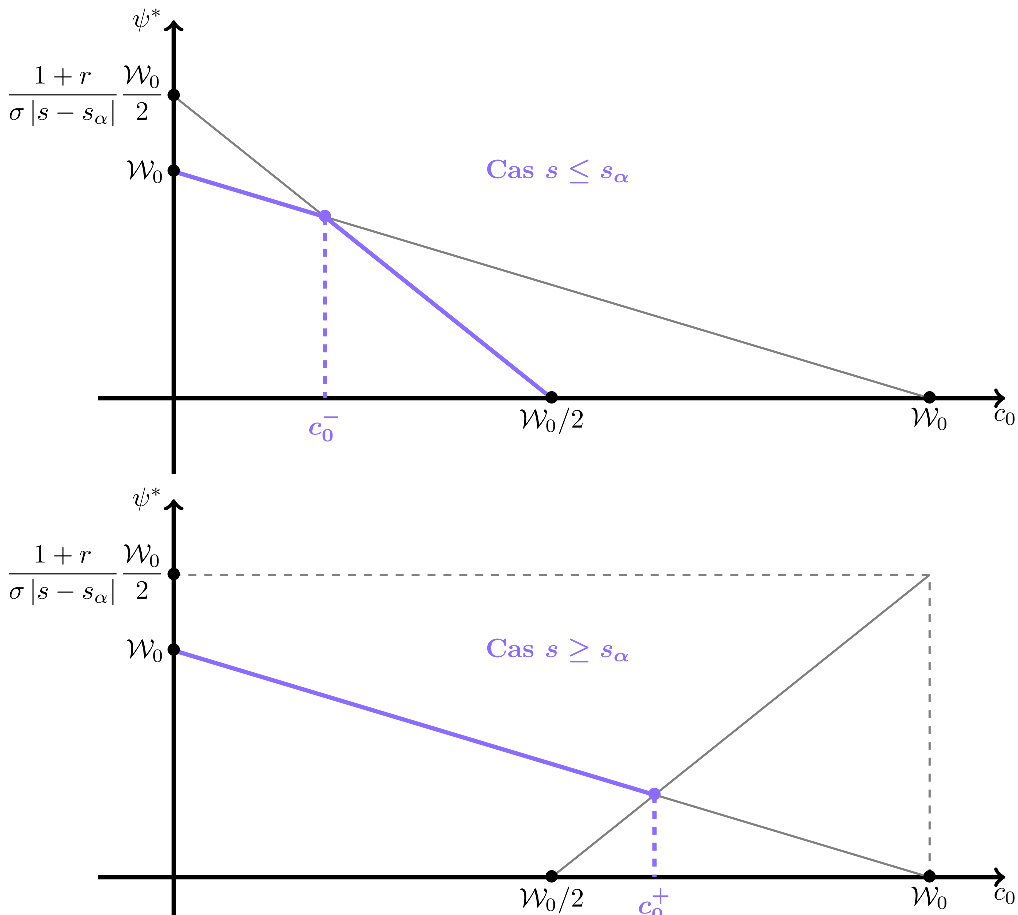

Figure 2: L'allocation optimale en actif risqué comme fonction de la consommation c_0

- **Cas $s \leq s_\alpha$: l'actif ne performe pas assez pour l'investisseur**

  L'inégalité de l'équation (2.2) devient

$$\frac{1+r}{\sigma\left(s_\alpha - s\right)}\left(\frac{\mathcal{W}_0}{2} - c_0\right) \geq \psi$$

  ce qui donne la condition générale pour la satisfaction des attentes en risques

$$0 \leq \psi \leq \min\left(\frac{1+r}{\sigma\left(s_\alpha - s\right)}\left(\frac{\mathcal{W}_0}{2} - c_0\right), \mathcal{W}_0 - c_0\right) \tag{2.3}$$

- **Cas $s \geq s_\alpha$: l'actif a une performance intéressante pour l'investisseur**

  L'inégalité de l'équation (2.2) devient cette fois

$$\frac{1+r}{\sigma\left(s-s_\alpha\right)}\left(c_0-\frac{\mathcal{W}_0}{2}\right) \leq \psi$$

  et l'on conclut donc que la contrainte sur les risques sera satisfaite à condition que

$$\frac{1+r}{\sigma\left(s-s_\alpha\right)}\left(c_0-\frac{\mathcal{W}_0}{2}\right) \leq \psi \leq \mathcal{W}_0-c_0. \tag{2.4}$$

Comme évoqué à la section précédente, la nature linéaire en ψ de la fonction objectif implique que l'on sature les les bornes supérieures dans les inégalités précédentes. On peut alors tracer l'allocation optimale ψ^* en fonction de la consommation c_0 (figure 2).

Pour des ratios de sharpes plus petit que le niveau exigé par l'aversion au risque du porteur, il est inutile d'investir dans l'actif risqué si l'on consomme $c_0 = \mathcal{W}_0/2$. Ce qui confirme que l'on peut difficilement battre le marché avec cette stratégie. En revanche, si l'on est patient et que l'on consomme moins, on peut s'attendre à un coupon plus important en période 1 et au global, pourvu que $m > r$, on peut espérer faire un gain total actualisé plus important que $\mathcal{W}_0$ avec une probabilité π égale à

$$\pi = \mathcal{N}\left(-s\right) \tag{2.5}$$

Seule la patience permet de créer du levier grâce à une prise de risque maîtrisée.

Pour des ratios de sharpe plus important, il est possible de consommer jusqu'à

$$c_0^+ = \frac{1+r+2\sigma\left(s-s_\alpha\right)}{1+r+\sigma\left(s-s_\alpha\right)}\frac{W_0}{2} > \frac{W_0}{2} \tag{2.6}$$

comme indiqué par le schéma du bas sur la figure 2. La valeur c_0^+ est facilement obtenue en égalisant les bornes de l'inégalité (2.4). Si l'on s'intéresse aux ordres de grandeur, on se rend vite compte que cette situation est en fait plutôt rarissime. Pour un niveau $\alpha = 5\%$, il faudrait que l'actif risqué ait un ratio de sharpe de plus de 1.96...