○ $A = B$ iff $a_{ij} = b_{ij}$ $\quad i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$

○ $AB = C$ $\quad A_{m\times r}\ B_{r\times p}$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$ $\quad$ a의 행벡터와 b의 열벡터의 내적

$\bar{x}^T x = \|x\|^2$ (내적, 1×1 matrix)

벡터 x의 크기

○ $(AB)C = A(BC)$

$A_{m\times r}\ B_{r\times p}\ C_{p\times n}$

$$((AB)\cdot C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{r}(A_{il}B_{lk})C_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{r} A_{il}\left(\sum_{k=1}^{p} B_{lk}C_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{r} A_{il}(BC)_{lj} = A(BC)$$

○ Transpose $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(kA)^T = kA^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

proof) $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{r} b_{ki}a_{jk}$

$= \sum_{k=1}^{r} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$

○ Symmetric과 Skew Symmetric

Symmetric : $A^T = A$

Skew Symmetric : $A^T = -A$

– A와 B가 symmetric이고 $AB = BA$이면 AB는 symmetric

proof) $(AB)^T = AB$ 임을 보이자

$(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB$

– A와 B가 skew symmetric이고 $AB = -BA$이면 AB는 skew symmetric

proof) $(AB)^T = -AB$ 임을 보이자

$(AB)^T = (-BA)^T = -(BA)^T = -A^T B^T = -AB$

○ Symmetric과 Eigenvalue

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad$ A는 실수를 원소로 갖는 n×n matrix

Symmetric matrix의 eigenvalue는 실수

proof) $Ax = \lambda x$ $(x \neq 0)$ $\quad$ A는 symmetric $\quad$ $\bar{\lambda} = \lambda$임을 보이자

$\lambda = \cdots$ 에 관한 식으로 바꾸기 위해 양변에 $\bar{x}^T$를 곱하자

$\bar{x}^T A x = \bar{x}^T \lambda x = \lambda \bar{x}^T x = \lambda \|x\|^2$ $\qquad \lambda = \dfrac{\bar{x}^T A x}{\|x\|^2}$

↳ 내적 → 벡터 x의 크기

$\frac{1}{\|x\|^2}\bar{\lambda} = \overline{\bar{x}^T A x} = x^T A \bar{x} = (x^T A \bar{x})^T = \bar{x}^T A^T x = \bar{x}^T A x = \lambda \frac{1}{\|x\|^2}$

$\therefore \lambda = \bar{\lambda}$ $\quad$ λ is real $\qquad$ $x^T\bar{x}$는 1×1 matrix (벡터 x의 크기)

Skew symmetric matrix의 eigen value는 pure imaginary or 0

proof) $Ax = \lambda x$ $(x \neq 0)$ $\quad$ A는 skew symmetric $\quad$ $\lambda = -\bar{\lambda}$임을 보이자

$\bar{x}^T A x = \bar{x}^T \lambda x = \lambda \bar{x}^T x = \lambda \|x\|^2$ $\qquad \lambda = \dfrac{\bar{x}^T A x}{\|x\|^2}$

$\frac{1}{\|x\|^2}\bar{\lambda} = \overline{\bar{x}^T A x} = x^T A \bar{x} = (x^T A \bar{x})^T = \bar{x}^T A^T x = -\bar{x}^T A x = -\frac{\lambda}{\|x\|^2}$

$\therefore \bar{\lambda} = -\lambda$

○ Orthogonal matrix $\quad A^T A = I \quad A^T = A^{-1}$

직교행렬 A에서 행벡터 또는 열벡터끼리 orthonormal

(벡터 크기는 1, 벡터끼리 내적은 0)

직교한다

○ 두 벡터에 Orthogonal transformation을 해도 내적은 변하지 않는다

proof) For any x_1, x_2, $\quad y_1 = Ax_1,\ y_2 = Ax_2$ (A: orthogonal)

$y_1^T y_2 = (Ax_1)^T(Ax_2) = x_1^T A^T A x_2 = x_1^T x_2$

회전 변환 생각해 보기 $\quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

○ Orthogonal matrix의 determinant는 1 또는 −1

$A^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ $\quad$ A: orthogonal

A의 열벡터

$A^T A = \begin{bmatrix} \|a_1\|^2 & & & \\ & \|a_2\|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \det(A) = 1$ or -1

$\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \{\det(A)\}^2 = 1$

$\det(A^T) = \det(A)$ 전치행렬의 행렬식은 원래 행렬의 행렬식과 같음

○ Orthogonal의 eigenvalue의 크기(magnitude)는 1

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad$ A: orthogonal $\quad x \neq 0$

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x} \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \Leftrightarrow (A\bar{x})^T = (\bar{\lambda}\bar{x})^T$

$(A\bar{x})^T Ax = (\bar{\lambda}\bar{x})^T \lambda x \Leftrightarrow \bar{x}^T \underbrace{A^T A}_{I} x = \bar{x}^T \bar{\lambda}^T \lambda x$

$\Leftrightarrow \bar{x}^T x = \bar{\lambda}^T\lambda\, \bar{x}^T x$

$\Leftrightarrow \|x\|^2 = \|\lambda\|^2 \|x\|^2$ $\qquad \therefore \|\lambda\| = \pm 1$

○ 모든 matrix는 symmetric과 skew symmetric 부분의 합으로 나타낼 수 있다

$A = \underbrace{\dfrac{A^T + A}{2}}_{\text{symmetric}} + \underbrace{\dfrac{A - A^T}{2}}_{\text{skew symmetric}}$

○ Determinant of A

$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ $\quad A \longmapsto \det(A) = \alpha$

행끼리 바꾼 결과

Such that (i) $\det(I_n) = 1$ (ii) $\det(A) = -\det(P_{ij}A)$

두 행이 같으면 $\det(A)=0$

(iii) "det" is linear for each row (column)

그래서 E 연산을 하는 게 determinant가 유지되는 이유

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad E_{12}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(E_{12}A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(A)$$

1행과 2행이 서로 같으므로 0

Cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \, |M_{ij}|$

i행과 j열 제외한 나머지 부분 행렬

$$|A| = \det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad 1 \le i \le n$$

○ $\det(A) = -\det(P_{ij}A)$

proof) 귀납법에 의해 증명

$n=2$ $\quad A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = ad - bc$

$P_{12}A_{2\times2} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ $\quad \det(P_{12}A_{2\times2}) = bc - ad$

$(n-1)\times(n-1)$ matrix까지 $\det(A') = -\det(P_{ij}A')$ 만족한다고 가정할 때

C_{ij} : cofactor of A $\quad d_{ij}$: cofactor of $P_{ij}A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ & \boxed{A'} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad P_{ij}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ & \boxed{PA'} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$\det(A) = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$ $\quad \det(P_{ij}A) = a_{11}d_{11} + \cdots + a_{1n}d_{1n}$

$C_{11} = \det(A')$ $\quad d_{11} = \det(P_{ij}A') = -\det(A')$

○ $\det(A) = \det(E_{ij}A)$

$$E_{ij}(k)A = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ ka_{i1}+a_{j1} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$(ka_{i1}+a_{j1})C_{j1} + (ka_{i2}+a_{j2})C_{j2} + \cdots + (ka_{in}+a_{jn})C_{jn}$$

$$= k\underbrace{(a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn})} + \underbrace{(a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn})}_{=\det(A)}$$

i행과 j행이 서로 같은 성분인 행렬의 행렬식 = determinant가 0

○ $\det(D_i(c)A) = c\det(A)$ $\quad |D_{(c)}A| = c|A|$

여인수 전개할 때 C 곱한 행 기준으로 전개하면 됨 $\quad |A| = \frac{1}{c}|D_{(c)}A|$

○ 두 행이 같은 행렬의 determinant는 0

$\det(A) = -\det(P_{ij}A) \underset{\uparrow}{=} -\det(A)$ $\quad \therefore \det(A) = 0$

i와 j행이 같으면

○ 모든 성분이 0인 행이 존재하는 행렬의 determinant는 0

0인 행에 관해 여인수 전개 시 0

○ 삼각 행렬의 determinant는 대각 성분의 곱

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}C_{11} + 0 + \cdots + 0$

$= a_{11}(a_{22}C_{22} + 0 + \cdots + 0)$ $\quad C_{11} = |M_{11}|$ 이므로

$\vdots$

$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

○ A is invertible $\iff \det(A) \neq 0$
A is singular $\iff \det(A) = 0$

proof) ($\Rightarrow$) A : invertible $\quad \exists A^{-1}$ such that $AA^{-1} = I$

$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1 \neq 0$

$\therefore \det(A) \neq 0$ & $\det(A^{-1}) = 0$

($\Rightarrow$) $\operatorname{adj}(A)A = A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I$ $\quad \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & \ddots & \\ \vdots & & \\ C_{1n} & & C_{nn} \end{bmatrix}$

전제에 의해 $\det(A) \neq 0$ 이므로

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right)A = I \quad \therefore A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

○ 비례 관계인 두 행이 존재하는 행렬의 determinant는 0

$$A = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \\ ka_{i1} & ka_{i2} \cdots & ka_{in} \\ & \vdots & \end{bmatrix} \begin{matrix} i\text{행} \\ j\text{행} \end{matrix}$$

$\det(A) = ka_{i1}C_{j1} + \cdots + ka_{in}C_{jn}$

$= k(a_{i1}C_{j1} + \cdots + a_{in}C_{jn}) = 0$

i행과 j행이 같은 행렬의 determinant

○ 유용한 determinant 성질

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

증명 < A가 가역행렬이 아닐 때 / A가 가역행렬일 때 $A = E_1E_2\cdots E_r$

(2) $\det(A^T) = \det(A)$

(3) $\det(kA) = k^n\det(A)$

(4) $\det(E) \neq 0$

○ Cramer's Rule

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \text{일 때}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

단, $D \neq 0$

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

행렬에서 변수가 있는 결렬의 값을 대체

계수행렬

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Proof) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

(1) System의 해가 존재하고 Unique한지를 보여야함

$D \neq 0$ 이므로 $\text{rank}(A) = n$

$Ax = b$ has a unique solution for any $b \in \mathbb{R}^n$

(2) 그 unique한 solution이 바로 $x_i = \frac{D_i}{D}$ 인지 구하기

$\det(A) = D$ 라고 하면 k열 여인수 전개에 의해

$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} \cdots a_{nk}C_{nk}$ $\quad C_{ik}$: A의 a_{ik}에 대한 여인수

$$C_{1k} \times (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1)$$
$$C_{2k} \times (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2)$$
$$\vdots$$
$$C_{nk} \times (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n)$$

$$\cancel{\underbrace{(C_{1k}a_{11} + C_{2k}a_{21} + \cdots + C_{nk}a_{n1})}_{\text{1열과 C열의 성분이 같은 행렬의 determinant}}x_1} + \cancel{(C_{1k}a_{12} + C_{2k}a_{22} + \cdots + C_{nk}a_{n2})} \cancel{+ \cdots}$$

$$+ \underbrace{(C_{1k}a_{1k} + \cdots + C_{nk}a_{nk})}_{\text{A의 determinant}}x_k + \cancel{\cdots} = b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \cdots + b_nC_{nk}$$

$$D x_k = \underbrace{b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \cdots + b_nC_{nk}}$$

↳ 행렬 A에서 k열의 성분을 $b_1, \cdots, b_n$로 대체한 행렬 A_k의 행렬식

$$\therefore x_k = \frac{D_k}{D}$$

○ 역행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\exists A^{-1}$ such that $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

○ A의 역행렬 구하는 방법 (먼저 $\det(A) \neq 0$ 인지 확인)

(1) Gauss 소거법

$AX = I \qquad [A \vdots I] \longrightarrow [I \vdots A^{-1}]$

(2)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} C^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \\ C_{1n} & & C_{nn} \end{bmatrix}$$

○ 유용한 역행렬 성질

(1) 역행렬은 유일하다

proof) B와 C가 A의 역행렬이라고 가정

$\underbrace{(BA)}_{I}C = B\underbrace{(AC)}_{I} \Rightarrow B = C$ 모순에 의한 증명

(2) 두 행렬의 곱이 역행렬이면 두행렬은 각각 역행렬

$\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ & $\det(B) \neq 0$

A와 B는 모두 invertible

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (A와 B는 invertible)

AB의 역행렬이 C일 때 $C(AB) = I$

$C(AB)(B^{-1}A^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$

$CABB^{-1}A^{-1} = CAIA^{-1} = C = B^{-1}A^{-1}$

(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 전치행렬의 역행렬은 역행렬의 전치행렬

A^T의 역행렬 B일 때 $\quad BA^T = I = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$

$\Leftrightarrow B\underbrace{A^T(A^T)^{-1}}_{I} = (A^{-1})^T \underbrace{A^T(A^T)^{-1}}_{I} = (A^{-1})^T \qquad \therefore B = (A^{-1})^T$

○ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

① A^{-1} exists $\Leftrightarrow$ A is nonsingular (invertible)

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$

$\Leftrightarrow$ ② $Ax = b$는 유일한 해를 가짐 for any $b \in \mathbb{R}^n$

① ⇔ ② 증명

① → ② proof) $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$ $\quad A^{-1}$ exists $\quad AA^{-1} = I$

$\underbrace{A^{-1}A}_{I}x = A^{-1}b \qquad x = A^{-1}b$

∴ A^{-1}는 유일하고 임의의 b에 관해 x가 유일하게 결정됨

② → ① proof) $Ax = b \rightarrow [A \vdots b] \longrightarrow [\ \ddots\ \overset{\star}{\beta}\ \overset{\star}{\alpha}\ \vdots\ f\ ]$ $\quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

유일한 해를 가지므로 $\text{rank}([A \vdots b]) = n$

$x_n = \frac{1}{\alpha} f_n \qquad x_{n-1} = k_n f_n + k_{n-1} f_{n-1}$

$x_1 = k_n f_n + k_{n-1} f_{n-1} + \cdots + k_1 f_1$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overset{B}{\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = Bf = bBC = bD$$

$f = \underbrace{C}_{\text{기본행연산 (E, D, P) 유한번 적용}} b$

$Ax = b \rightarrow AbD = b \rightarrow AD = I$

D는 A의 역행렬 $\quad$ ∴ A의 역행렬 존재

A의 열벡터들의 선형결합

○ $Ax=b$ 의 solution에 관한 중요한 정리

$A=[a_1\ a_2 \cdots a_n]$ $a_i\in\mathbb{R}^m$, $x\in\mathbb{R}^n$ $b\in\mathbb{R}^m$

(1) 해가 존재한다 $\Leftrightarrow b\in C(A) \Leftrightarrow \text{rank}(\text{span}\{a_1,\cdots,a_n,b\})$

$a_1,\cdots,a_n$을 가지고 선형결합하여 $= \dim(C(A)) = \text{rank}(A)$

b를 만들 수 있다 $\Leftrightarrow \text{rank}([A\,|\,b]) = \text{rank}(A)$

(2) 해가 유일하게 존재한다 $\Leftrightarrow N(A)=\{\vec{0}\}$, nullity of $A=0$

$\Leftrightarrow \text{rank}(A)=n$

$Ax_1=b=Ax_2$ $\quad Ax_1-Ax_2=0$ $\quad A(x_1-x_2)=0$

$x_1-x_2\in N(A)=\{\vec{0}\}$ $\quad x_1=x_2$

$\text{rank}(A)+\text{nullity}(A)=n$

(3) 임의의 b에 관해 해가 존재한다 $\Leftrightarrow C(A)=\mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow \dim(C(A)) = m = \text{rank}(A) \Leftrightarrow \text{rank}(A)=m$

필요없는 행이 없다

(4) 임의의 b에 관해 해가 유일하게 존재한다

$\Leftrightarrow C(A)=\mathbb{R}^m$ 이면서 $\text{rank}(A)=n \Leftrightarrow \text{rank}(A)=n=m$

$\Leftrightarrow$ A는 $\text{rank}(A)=n$인 $n\times n$ square matrix

○ $Ax=0$ has a nontrivial solution $\Leftrightarrow \text{rank}(A)<n$

$\Leftrightarrow$ A is singular $\Leftrightarrow \det(A)=0$

$\text{rank}(A)+\underbrace{\text{nullity}(A)}_{>1}=n$

○ Any solution x to $Ax=b$ can be written by

$x=x_h+x_p$

x_h가 $\vec{0}$만으로 이루어지는 vector space 구성하면 x는 unique solution

○ Rank 정의 $\quad A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad$ 선형독립인 행벡터의 최대 개수

rank(A) : the maximum number of linearly independent row vectors of A

○ Rank 성질

* $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

$A_{m\times n} \Rightarrow \text{rank}(A)\le \min\{m,n\}$

$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}_{p\times n}$ $\quad v_i\in\mathbb{R}^n$ $\quad n<p$이면 행벡터 p개가 linearly dependent

* $\text{rank}(A)=\text{rank}(A^T)$ 증명

$A=\begin{bmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(m) \end{bmatrix}_{m\times n}$ $\quad a(i)$: i번째 행벡터, a_{ij}: $a(i)$의 j열 성분 $\quad$ $\text{rank}(A)=r$ 일 때

$v(1),\cdots,v(r)$: 선형독립인 A의 행 벡터들 $\in\{a(1),\cdots,a(n)\}$

A의 모든 행벡터는 $v(1),\cdots,v(r)$의 선형결합으로 나타낼 수 있음

$a(1) = c_{11}v(1)+\cdots+c_{1r}v(r)$

$\vdots$ $\qquad$ k열 성분만 찾아서 정리해보자

$a(m) = c_{m1}v(1)+\cdots+c_{mr}v(r)$

$a_{1k} = c_{11}v_{1k}+\cdots+c_{1r}v_{rk}$

$\vdots$

$a_{mk} = c_{m1}v_{1k}+\cdots+c_{mr}v_{rk}$

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} v_{1k} + \cdots + \begin{bmatrix} c_{1r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{bmatrix} v_{rk}$$

k번째 열 벡터는 최대 r개의 벡터의 선형결합으로 나타낼 수 있음

$\text{rank}(A^T)\le r$ and $r\le \text{rank}(A^T)$ $\quad \therefore \text{rank}(A^T)=\text{rank}(A)=r$

○ 특성방정식 $\det(\lambda I-A)=0$ or $\det(A-\lambda I)=0$

$$\lambda I-A = \begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix}$$

determinant 구할 때 $n!$ 조합으로 각 행에서 열 성분 겹치지 않게 뽑기

$\det(\lambda I-A) = (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn}) + \cdots$

$= \lambda^n - (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots$

$=$ A의 eigenvalue의 합 $=$ trace(A)

○ $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ $\quad$ A의 determinant는 A의 고유벡터의 합

proof) $\det(\lambda I-A) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$\lambda=0 \rightarrow \det(-A) = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

$(-1)^n\det(A) = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ $\quad \therefore \det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

○ A is not invertible (singular) $\Leftrightarrow \det(A)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ is an eigenvalue

proof) $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ $\quad \lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 중 하나는 0이므로

$\det(A)=0$

○ Eigenvalue와 eigenvector 성질

$Ax=\lambda x$ for nonzero x

(1) A의 거듭제곱을 해도 eigenvector 공유 eigenvalue는 거듭제곱

$A^kx = A^{k-1}Ax = A^{k-1}(\lambda x) = A^{k-2}\lambda^2x = \cdots = \lambda^kx$

(2) A에 scalar배 해도 eigenvector 공유 eigenvalue는 scalar배

$c\cdot(Ax) = c\cdot(\lambda x) \Leftrightarrow (cA)x = (c\lambda)x$

(3) A의 역행렬도 eigenvector 공유 eigenvalue는 역수

$Ax=\lambda x \Leftrightarrow x=A^{-1}\lambda x \Leftrightarrow A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$

(4) A의 전치행렬은 eigenvalue는 공유하지만 eigenvector는 보장 X

$\det(\lambda I-A)=0 \Leftrightarrow \det(\lambda I-A)^T = \det(\lambda I-A^T)=0$

○ A가 λ를 eigenvalue, 그에 대응되는 x를 eigenvector로 가지면
$\bar{\lambda}$를 eigenvalue, 그에 대응되는 $\bar{x}$를 eigenvector로 자연스럽게 가진다 (단, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

$(\lambda I - A)x = 0$ for nonzero x

$\overline{(\lambda I - A)x} = \bar{0} \Rightarrow (\bar{\lambda} I - A)\bar{x} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$

○ 닮음 행렬

B is similar to A   위치 조심

$\Leftrightarrow \exists P$ such that $B = P^{-1}AP$ (P: non singular)

○ 닮음 행렬의 성질   A is similar to B

(1) eigenvalue와 그에 대응되는 geometric multiplicity가 같다
(2) determinant가 같다 $\det(A) = \det(B)$ 고유벡터까지 같은지는 보장X
(3) rank가 같다 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ $(\mathrm{nullity}(A) = \mathrm{nullity}(B))$
(4) A가 invertible이면 B도 invertible
(5) $\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(B)$

○ A가 대각화 가능 (diagonalizable)

$\Leftrightarrow$ A is similar to D (D: diagonal)

$\Leftrightarrow D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PDP^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{I}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}$ (P: nonsingular)

$\Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ 순서지키자!

순서 바뀌게 되면 eigenvector를 가지고 바로 P로 만들 수 없음

○ A를 대각화하면 거듭제곱 구하기가 쉬워진다

$D = P^{-1}AP$ $D^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}AP\cdots P^{-1}AP$
$= P^{-1}A^kP$

$A^k = PD^kP^{-1}$

○ A가 대각화 가능 $\Leftrightarrow$ A는 n개의 선형독립인 eigenvector 가진다

proof) ($\Rightarrow$) $\exists P, D$ such that $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow AP = PD$
(P: nonsingular, D: diagonal)

$$A\begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1 & \lambda_2 P_2 & \cdots & \lambda_n P_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n,\ P_i \neq \vec{0})$

P가 nonsingular 이므로 P_i들이 linearly independent
A는 n개의 linearly independent한 P_i라는 eigenvector를 지님

($\Leftarrow$) $P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$ & $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ then $A = PDP^{-1}$, $D = P^{-1}AP$

linearly independent eigenvector   eigenvector에 각각 대응되는 eigenvalue

○ If $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ are distinct eigenvalues of A and $v_1, \cdots, v_r$ are corresponding eigenvectors, then $\{v_1, \cdots, v_r\}$ is linearly independent

서로 다른 eigenvalue에 대응되는 eigenspace에서 나온 eigenvector는 선형 독립이다

○ Symmetric인 행렬 A는 n개의 선형독립인 eigenvector를 가지고, 모든 eigenvector가 서로 orthogonal 해질 수 있다

eigenvector 끼리 내적이 0이다

문제 1) $2x+3y+z+5t=8$ $\quad Ax=b$ form으로

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=8$$

solution x fill a 3D plane in 4 dimension (hyperplane)

문제 2) $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\1&2&4&0&5\\3&2&0&5&2\end{bmatrix}$

(1) $N(A)$의 basis 구하기

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\1&2&4&0&5\\3&2&0&5&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-1&-3&1&-3\\1&2&4&0&5\\0&-4&-12&5&-13\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&4&0&5\\0&-1&-3&1&-3\\0&-4&-12&5&-13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&4&0&5\\0&-1&-3&1&-3\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-2&2&-1\\0&1&3&-1&3\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$x_1=2x_3-2x_4+x_5=2s-t$

$x_2=-3x_3+x_4-3x_5=-3s-2t$

$x_3=s$

$x_4=x_5=t$

$$N(A)=\left\{\begin{bmatrix}2\\-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\\1\end{bmatrix}t,\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

(2) $C(A)=\mathrm{span}\left(\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}}_{v_1},\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}}_{v_2},\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}}_{v_3}\right\}\right)$

(3) $\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}$

문제 3) $A=\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$ $\quad A^{-1}$ 존재하는지?

$$\begin{vmatrix}0&0&2&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-2=\det(A)\neq 0$$

A는 가역행렬

$$[A\,|\,I]\quad\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&0&2&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&2&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

문제 4)

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\a&8&3\\0&b&5\end{bmatrix}$ $\quad A$가 singular $\Leftrightarrow \det(A)=0$

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\a&8&3\\0&b&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-2a+8&3\\0&b&5\end{bmatrix}$$

$a=4$이고 $b\neq 0$이면 row exchange 필요

$\det(A)=1\cdot(40-3b)-a(10)=-10a-3b+40=0$

$10a+3b=40$ 이면 singular

(2) $A=\begin{bmatrix}c&2\\6&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}c-6&-2\\6&4\end{bmatrix}$

$c=0$ 또는 $c=6$이면 row exchange 필요

$\det(A)=4(c-6)+12=4c-12=0$

$c=3$이면 singular

문제 5) $\mathrm{span}(S)$의 basis 구하기

이 벡터들을 가지고 만든 column space의 basis를 구하면 됨

$$S=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}}_{v_1},\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\end{bmatrix}}_{v_2},\underbrace{\begin{bmatrix}2\\6\\-2\end{bmatrix}}_{v_3},\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}}_{v_4}\right\}$$

$\therefore v_1, v_2$

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\2&-2&6&1\\1&-1&-2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&0&2&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

pivot이 있는 위치의 v_1과 v_3이 B의 column space의 basis를 이룸

마찬가지로 v_1와 v_3이 A의 column space의 기저를 이룸

문제 6) $A=\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$ A^{10}

$A=PDP^{-1}$ $D=P^{-1}AP$ $Ax=\lambda x$ $(x\neq 0)$

$(\lambda I-A)x=0$ has nontrivial solution

$\det(\lambda I-A)=0$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&2\\-1&\lambda-2&-1\\-1&0&\lambda-3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)\{\lambda(\lambda-3)-(-1)2\}=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)$

$=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-2)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

(i) $\lambda=1$ algebraic 중복도: 1 geometric 중복도 = 1

$I-A=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&-1&-1\\-1&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $x_1=-2x_3=-2t$ $x_3=t$

$x_2=x_3=t$

eigenvector with $\lambda=1$

$\therefore N(I-A)=\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}t,\ t\in\mathbb{R}\right\}$

(ii) $\lambda=2$ algebraic 중복도: 2 geometric 중복도: 2

$2I-A=\begin{bmatrix}2&0&2\\-1&0&-1\\-1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

eigenvectors with $\lambda=2$

$x_1=-x_3=-t$ $N(2I-A)=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}t,\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$

$x_2=s$ $x_3=t$

$P=\begin{bmatrix}-2&0&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

$[P|I]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&-1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&2\\0&1&-1&0&1&-1\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&1&0&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&-1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&1&0&2\end{array}\right]$

$P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}$

$A^{10}=PD^{10}P^{-1}=\begin{bmatrix}-2&0&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{10}&0&0\\0&2^{10}&0\\0&0&2^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-2&0&-2^{10}\\1&2^{10}&0\\1&0&2^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2+0-2^{10}&0+0+0&2+0-2^{11}\\-1+2^{10}+0&0+2^{10}+0&-1+2^{10}+0\\-1+0+2^{10}&0+0+0&-1+0+2^{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1022&0&-2046\\1023&1024&1023\\1023&0&2047\end{bmatrix}$

문제 7) $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ A는 singular

$\lambda=1$ $\lambda=-1$ $\lambda=0$ 선형독립인 3개의 eigenvector

→ 대각화 가능

$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$[P|I]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&1&-1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&0&1&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&\frac12&\frac12&0\\0&1&1&1&0&-1\end{array}\right]$

$\to\Big[\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I}\ \Big|\ \underbrace{\begin{matrix}0&0&1\\\frac12&\frac12&0\\\frac12&-\frac12&-1\end{matrix}}_{P^{-1}}\Big]$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\\frac12&\frac12&0\\\frac12&-\frac12&-1\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\\frac12&\frac12&0\\\frac12&-\frac12&-1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\\frac12&\frac12&0\\\frac12&-\frac12&-1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0-\frac12+0&0-\frac12+0&1+0+0\\0-\frac12+0&0-\frac12+0&-1+0+0\\0+0+0&0+0+0&1+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac12&-\frac12&1\\-\frac12&-\frac12&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

문제 8) $Ax=\lambda x$ $(x\neq 0)$ $(\lambda I-A)x=0$

(1) s가 scalar이면 x가 $sI-A$의 eigenvector인지 구하고

그에 대응되는 eigenvalue 찾기

$sI-A$의 eigenvector $\Leftrightarrow$ $(sI-A)x'=\lambda' x'$를 만족시키는 nonzero 벡터 x'

$x'=x$ 이면 $(sI-A)x=\lambda' x$ $\Rightarrow$ $(sI-\lambda' I-A)x=0$

$\Rightarrow((s-\lambda')I-A)x=0$ $s-\lambda'=\lambda$ $\Rightarrow$ $s-\lambda=\lambda'$

(2) $\lambda\neq 0$ 일 때, x는 A^{-1}의 eigenvector인지 구하기

$Ax=\lambda x$ A가 invertible 하다는 가정이 있어야 함

$A^{-1}Ax=A^{-1}\lambda x$ $\Rightarrow$ $x=A^{-1}\lambda x$ $\Rightarrow$ $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$ eigenvalue는 $\frac{1}{\lambda}$

(3) $A=\begin{bmatrix}-2&2&3\\-2&3&2\\-4&2&5\end{bmatrix}$ $Ax=\lambda x$ $(x\neq 0)$

$\det(\lambda I-A)=0$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-2&-3\\2&\lambda-3&-2\\4&-2&\lambda-5\end{vmatrix}$

$=(\lambda+2)\{(\lambda-3)(\lambda-5)-4\}-2\{-2(\lambda-5)-6\}$

$+4\{4+3(\lambda-3)\}=0$

$=(\lambda+2)(\lambda^2-8\lambda+11)-2(-2\lambda+4)+4(3\lambda-5)$

$=(\lambda+2)(\lambda^2-8\lambda+11)+16\lambda-28$

$=\lambda^3-8\lambda^2+11\lambda+2\lambda^2-\cancel{16\lambda}+22+\cancel{16\lambda}-28$

$=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$

(i) $\lambda=1$

$$I-A=\begin{bmatrix}3&-2&-3\\2&-2&-2\\4&-2&-4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\0&2&0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\0&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1=x_3=t$ $\quad N(I-A)=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}t,\ t\in\mathbb{R}\right\}$

$x_2=0$

(ii) $\lambda=2$

$$2I-A=\begin{bmatrix}4&-2&-3\\2&-1&-2\\4&-2&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&1\\2&-1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1=\frac{1}{2}x_2=\frac{1}{2}t$

$x_2=t$

$x_3=0$

$N(2I-A)=\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}t,\ t\in\mathbb{R}\right\}$

(iii) $\lambda=3$

$$3I-A=\begin{bmatrix}5&-2&-3\\2&0&-2\\4&-2&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}5&-2&-3\\2&0&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}5&0&-5\\2&0&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1=x_3=t$ $\quad N(3I-A)=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}t,\ t\in\mathbb{R}\right\}$

$x_2=x_3=t$

A^{-1}의 eigenvalue $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$ eigenvector $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$3I-A$의 eigenvalue $2,\ 1,\ 0$ eigenvector $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

예제) $A=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}$ $\quad(\lambda I-A)x=0\ \ (x\neq0)$

$\det(\lambda I-A)=0$

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda&0&1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&0&\lambda-2\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=(\lambda-2)\{\lambda(\lambda-2)-(-1)2\}=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

(i) $\lambda=2$ $\quad N(2I-A)=\text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\right)$ $\quad$ (a.m=1 g.m=1)

$$\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&0&-1\\-1&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&-1\\-1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1=-x_3=0$

$x_2=t$ $\quad\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}t,\ t\in\mathbb{R}\right\}$

$x_3=0$

(ii) $\lambda=1$ $\quad N(I-A)=\text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$ $\quad$ (a.m=2, g.m=1)

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&-1\\-1&0&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1=-x_3=-t$ $\quad\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}t,\ t\in\mathbb{R}\right\}$

$x_2=0$

$x_3=t$

대각화 불가!