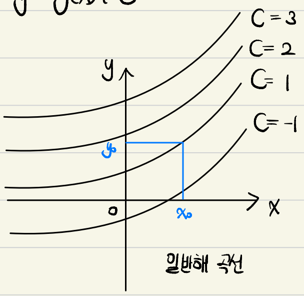
일계 ODE에서 초기값 문제 (IVP)에 대한 해의 존재와 유일성

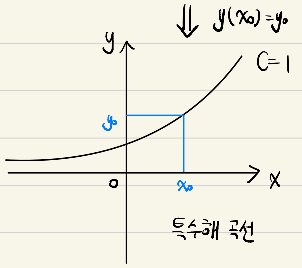
$y' = f(x)$

$\downarrow$

$y = g(x) + C \xrightarrow{\text{초기값 } y(x_0)=y_0} y = g(x)$



$\Downarrow$ $y(x_0) = y_0$



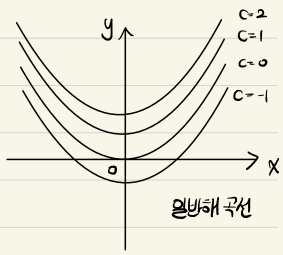
근데 반드시 이렇게 하나의 해가 나올까? No!

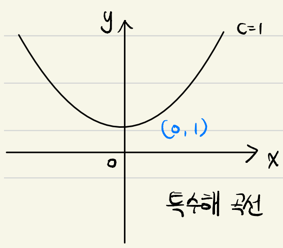
$y' = 2x$ $\quad y(0) = 1$

$\frac{dy}{dx} = 2x$

$\int dy = 2x\, dx$

$y = x^2 + C$





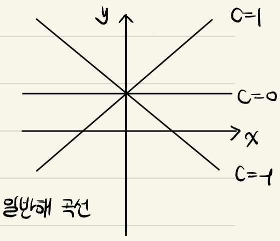
$xy' = y - 1 \quad y(0) = 1$

$\frac{1}{y-1} y' = \frac{1}{x}$

$\ln|y-1| = \ln|x| + C$

$y - 1 = Cx$

$y = Cx + 1$



초기값 $y(0)=1$

but 모든 직선이 다 $(0,1)$을 지나고 있으므로

해가 unique하지 X (여러 개의 해)

만약 초기값이 $(1,2)$로 주어지면? ($y(1)=2$)

$y = x+1$ 하나로 해가 나옴

초기값에 따라 해가 존재하는지,

존재하면 그 해가 하나인지 무수히 많은지

(uniqueness)

초기값 문제에 대한 해의 존재와 유일성

〈존재 정리〉

$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ 에서 적어도 한 개의 해가 존재하기 위해서는

① $R: |x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$

② $|f(x,y)| \le k$

y' (기울기)가 식별이 가능하고 연속이어야 한다

〈유일성의 정리〉

$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ 에서 많아야 한 개의 특수해가 존재하기 위해서는

① 존재 정리가 성립해야 하고

② $|f_y(x,y)| \le M$ & $f_y(x,y)$ 가 R에서 continuous

$\frac{\partial f}{\partial y}$ 〃 연속이 되어야 함

존재성의 정리

미분방정식 해의 도함수
특정한 점에서의 미분계수

IVP : $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ 에서

$f(x,y)$가 어떤 사각영역 $x_0 - a < x < x_0 + a$

R: $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$ $y_0 - b < y < y_0 + b$

내의 모든 점 (x,y)에서 연속이고

R에서 bounded ($|f(x,y)| \le K$)

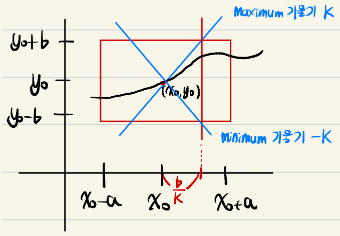
이 되는 수 K가 존재한다고 하자

해 y(x)의 함수의 정의역

그러면 IVP는 $|x - x_0| < \alpha$ 구간에서

최소 한 개 이상의 solution $y(x)$를 가진다

where $\alpha = \min\{a, \frac{b}{K}\}$



유일성의 정리

IVP가 $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$ 정의역에서 solution $y(x)$를 지닐 때, R에서 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < M$ 이고 $\frac{\partial f}{\partial y}$가 continuous

어떤 특정 값에 bounded 되어야 한다

$f(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$

(예) $y' = y^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow f(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$

$y(0) = 0$

연속함수

$f(x,y) \le K$ bounded

$y^{-\frac{1}{3}} y' = 1$

$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = x + C$

$y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x + C$

$y = \left(\frac{2}{3}x + C\right)^{\frac{3}{2}}$ $y(0) = 0$

$y = \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ 존재함 $0 = C^{\frac{3}{2}} \longrightarrow C = 0$

Unique 한지? $y = 0$도 가능한 solution → unique하지 X

$f_y(x,y) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$ y가 0에 가까워지면 값이 점점 커짐

bounded 되지 X

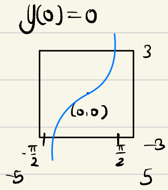
또한 f_y가 (0,0) 근처에서 continuous하지도 X

$$y(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 1) \\ \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} & (x > 1) \end{cases}$$

경계에서도 미분 가능함

(예) $y' = 1 + y^2$ $y(0) = 0$

$f(x,y) = 1 + y^2$



$f(x,y)$ bounded

continuous

$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int 1 \, dx$

$\tan^{-1} y = x + C$ $y(0) = 0$

$y = \tan(x + C) \longrightarrow y = \tan(x)$

$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{K}\right)$ $a = 5$, $b = 3$일 때

$\alpha = \min\left(5, \frac{3}{K}\right)$ $x_0 = 0$ 이므로 $-\alpha < x < \alpha$

≤ 10

$f(x,y) = 1 + y^2 \le 10$ $y = 3$일 때 $1 + 9 = 10$

$|x| < 5$, $|y| < 3$

이제 ODE에서 초기값 문제 (IVP)에 대한

해의 존재와 유일성

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad y(x_0) = k_0 \quad y(x_0) = k_1$

$p(x)$와 $q(x)$가 $I(\ni x_0)$ 에서 연속이면

(x_0를 포함하는 open interval)

I에서 정의되는 $\boxed{\text{unique한 solution}}$을 가진다

초기값 근처에서 계수가 연속이기만 하면 됨

→ 초기값을 잘 정하는 게 중요

y_1, y_2가 (H)의 solution

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (H) $\quad y_1, y_2$가 선형 독립인 해라고 하자

(1) y_1 & y_2 are linearly dependent

$\Longleftrightarrow W(y_1(x^*), y_2(x^*)) = 0$ for $x^* \in I$

(2) $W(y_1(x^*), y_2(x^*)) = 0 \Rightarrow W(y_1(x), y_2(x)) = 0, \ \forall x$

Wronskian이 한 점에서 0이기만 하면 전체에서도 0이다

(3) $W(y_1(x^*), y_2(x^*)) \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2$ are linearly independent

어떤 특정한 점에서 0이 아니면 for $x^* \in I$ on I

Proof) (1)의 ($\Rightarrow$) $\exists c_1, c_2$ not all zero such that

$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \quad \forall x$ (선형 종속의 정의에 의해)

모든 x에 관해 항등식이다

Assume $c_1 \neq 0 \qquad y_1(x) = -\dfrac{c_2}{c_1} y_2(x), \ \forall x$ 이므로

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} -\frac{c_2}{c_1} y_2(x) & y_2(x) \\ -\frac{c_2}{c_1} y_2'(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = 0, \ \forall x$$

$W(y_1, y_2) = 0$ 이므로 $\quad W(y_1(x^*), y_2(x^*)) = 0$

y_1, y_2가 미분방정식의 solution이든 아니든

이 proof (1)의 ($\Rightarrow$)은 성립 가능

미분방정식의 해로 만든

Wronskian은 x^2-1의 꼴이 나올 수 X

$x = -1$, $x = 1$에서 Wronskian이 0인데

그러면 전체에서도 0이어야 하므로

proof) (1)의 ($\Leftarrow$) $\begin{vmatrix} y_1(x^*) & y_2(x^*) \\ y_1'(x^*) & y_2'(x^*) \end{vmatrix} = 0$ 이므로

앞서 구한 바에 따라 선형 종속에 의해

$\exists c_1, c_2$ not all zero such that $c_1 \begin{bmatrix} y_1(x^*) \\ y_1'(x^*) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} y_2(x^*) \\ y_2'(x^*) \end{bmatrix} = 0$

벡터

x^*의 함숫값이므로 상수

$c_1 y_1(x^*) + c_2 y_2(x^*) = 0$

$c_1 y_1'(x^*) + c_2 y_2'(x^*) = 0$

c_1과 c_2도 찾은 상태

(IVP)제시 ← 증명 skill로 자주 사용

초기값

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad y(x^*) = 0 \quad y'(x^*) = 0$

→ 문제에서 주어진 것

Homogeneous case의 solution이 되어야 하고

초기값도 만족해야 함

$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ is a solution to (IVP)

(Y is a solution to (H) → 이건 당연하고

$Y(x^*) = 0 \qquad Y'(x^*) = 0$ → 이걸 봐줘야 함

$c_1 \underset{0}{\underline{y_1(x^*)}} + c_2 \underset{0}{\underline{y_2(x^*)}} = 0 \qquad c_1 \underset{0}{\underline{y_1'(x^*)}} + c_2 \underset{0}{\underline{y_2'(x^*)}} = 0$ → 맞음)

$\bar{y}(x) \equiv 0$ (항등적으로 0인 함수) → 당연히 homogeneous case의 solution이고

초기값 문제도 만족하므로 (IVP)의 solution

$\bar{y}(x)$가 항등적으로 0인 함수이므로

Uniqueness theorem에 의해서 $\quad Y(x) = \bar{y}(x) \equiv 0, \ \forall(x)$

$\Rightarrow c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \ \forall x$, but c_1, c_2 not all zero

y_1, y_2 is linearly dependent

y_1, y_2가 미분방정식의 solution이어야

이 proof (1)의 ($\Leftarrow$)가 성립됨

proof) (2) 한 점에서 Wronskian이 0이면

y_1, y_2가 linearly dependent (by (1))

y_1, y_2 : linearly dependent

$\exists\ c_1, c_2$ not all zero such that

$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \ \forall x$

$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0, \ \forall x$

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

has a nontrivial solution $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

c_1과 c_2가 not all zero이므로

어떤 행렬 방정식이 nontrivial solution을 가지려면

계수 행렬의 determinant가 0이어야 한다

$$\Rightarrow W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

y_1, y_2가 미분방정식의 solution이어야 가능

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

① Homogeneous case의 solution이면서 서로 선형독립인

y_1, y_2가 존재한다

proof) $p(x)$와 $q(x)$는 $I(I \ni x_0)$에서 continuous하다

(IVP) (i) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad y(x_0) = 1 \quad y'(x_0) = 0$

unique solution인 $y_1(x)$를 갖는다.

(IVP) (ii) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad y(x_0) = 0 \quad y'(x_0) = 1$

unique solution인 $y_2(x)$를 갖는다

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

특정 점에서 Wronskian이 0이 아니므로

y_1과 y_2는 I에서 linearly independent하다

② (H)의 어떤 solution이든 간에 그 꼴은 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$이다.

($\exists\ c_1, c_2$ such that $Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ for any solution)

proof) y_1와 y_2가 독립이므로

$\exists x^* \in I$ such that $W(x^*) \neq 0 \qquad W(x^*) = \begin{vmatrix} y_1(x^*) & y_2(x^*) \\ y_1'(x^*) & y_2'(x^*) \end{vmatrix}$

Y는 (H)의 임의의 solution on $I \ni x^*$

$$\begin{bmatrix} y_1(x^*) & y_2(x^*) \\ y_1'(x^*) & y_2'(x^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(x^*) \\ Y'(x^*) \end{bmatrix}$$ has a

unique solution $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$

상수임!

$c_1 y_1(x^*) + c_2 y_2(x^*) = Y(x^*)$

$c_1 y_1'(x^*) + c_2 y_2'(x^*) = Y'(x^*)$

(IVP) 문제 제안 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$y(x^*) = c_1 y_1(x^*) + c_2 y_2(x^*)$

$y'(x^*) = c_1 y_1'(x^*) + c_2 y_2'(x^*)$

그러면 $Y(x^*)$는 (IVP)의 solution

이미 구해진 것

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

첫번째 증명에서 구한 solution 함수

$\bar{y}(x)$도 (IVP) 문제의 solution

$$\bar{y}(x^*) = C_1 y_1(x^*) + C_2 y_2(x^*)$$

$$\bar{y}'(x^*) = C_1 y_1'(x^*) + C_2 y_2(x^*)$$

앞에서 찾은

Uniqueness Theorom에 의해 $Y(x) = \bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$