

UNIVERSITÄT AUGSBURG

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Masterarbeit

Insert Title

von:
Lukas GRAF

Betreut von:
Prof. Dr. Tobias HARKS

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	3
2 Potentiale	5
2.1 Definitionen	5
2.2 Erste Sätze	6
3 Auslastungsspiele	7
4 Morphismen	9
4.1 Definitionen	9
4.2 Erste Sätze	10
Literatur	12

1 Grundlagen

Definition 1.1. Ein Spiel Γ in strategischer Form ist ein Tupel $(I, X = (X_i)_{i \in I}, (K_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$. Dabei ist

- I die Menge der Spieler,
- X_i die Menge der (reinen) Strategien von Spieler i ,
- (K_i, \preceq) , eine total geordnete Menge, der Kostenraum von Spieler i und
- $c_i : X \rightarrow K_i$ die Kostenfunktion von Spieler i .

Das eigentliche Spiel besteht nun daraus, dass jeder Spieler versucht durch die Wahl seiner Strategie seine Kosten zu minimieren.

Beobachtung 1.2. Klassische Kostenminimierungsspiele erhält man durch Wahl von $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \leq)$ als Kostenraum für alle Spieler, Nutzenmaximierungsspiele durch Wahl von (\mathbb{R}, \geq) als „Kosten“-raum.

Notation 1.3. Zu einem festen Spieler i bezeichne $X_{-i} := \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j$ das Produkt aller Strategieräume außer dem von Spieler i . Zu jedem Strategieprofil $x \in X$ bezeichne dann x_{-i} die Projektion dieses Profils auf den Raum X_{-i} und x_i die Projektion auf X_i (also die von Spieler i gewählte Strategie). Wir schreiben dann auch (x_i, x_{-i}) für das Strategieprofil x .

Sollte der Begriff Strategieprofil eigens definiert werden?

Definition 1.4. Ein Strategieprofil $x \in X$ ist ein *Nash-Gleichgewicht*, wenn für jeden Spieler $i \in I$ und jede seiner Strategien \hat{x}_i gilt:

$$c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) \succcurlyeq c_i(x)$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist also ein Strategieprofil, aus dem heraus kein Spieler einen Anreiz für einen einseitigen Strategiewechsel hat.

Aus [MS96]:

Definition 1.5. Eine Folge von Strategieprofilen x^0, x^1, x^2, \dots ist ein *Verbesserungspfad*, wenn folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für jede Stelle n gibt es einen Spieler $i(n) \in I$, sodass das Profil x^{n+1} aus x^n durch alleinige Abweichung dieses Spielers entsteht, d.h. $x^{n+1} = (x_{i(n)}^{n+1}, x_{-i(n)}^n)$
2. Der abweichende Spieler $i(n)$ verbessert sich, d.h. $u_{i(n)}(x^{n+1}) < u_{i(n)}(x^n)$.

Definition 1.6. Ein Spiel Γ hat die *finite improvement property (FIP)*, wenn jeder Verbesserungspfad endlich ist.

Beobachtung 1.7. Jedes Ende eines maximalen Verbesserungspfades ist ein Nash-Gleichgewicht. Denn wäre dem nicht so, dann gäbe es wenigstens einen Spieler, der sich durch Abweichen noch verbessern kann - was zu einer Verlängerung des Verbesserungspfades führen würde.

Umgekehrt ist offenkundig auch jedes Nash-Gleichgewicht Ende wenigstens eines maximalen Verbesserungspfades - nämlich des trivialen, nur aus diesem Strategieprofil bestehenden Verbesserungspfades.

Korollar 1.8. *Ein Spiel Γ besitzt genau dann (mindestens) ein Nash-Gleichgewicht, wenn es (mindestens) einen endlichen, maximalen Verbesserungspfad besitzt. Ein Spiel mit FIP besitzt dementsprechend immer wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.*

Sollte eine Beobachtung wirklich ein Korollar haben?

Aus [Voo00]

Definition 1.9. Eine Verbesserungspfad x^0, x^1, x^2, \dots heißt *Beste Antwort-Pfad*, wenn der abweichende Spieler jeweils eine beste Alternativstrategie wählt, d.h.

Voorneveld nennt es (ohne Verbesserungsbedingung) beste Antwort-kompatibel

$$u_{i(n)}(x^{n+1}) = \max_{\hat{x}_{i(n)} \in X_{i(n)}} u_{i(n)}(\hat{x}_i, x_{-i(n)}^n).$$

Insbesondere setzt das natürlich voraus, dass ein solches Maximum auf dem Pfad immer existiert.

2 Potentiale

2.1 Definitionen

Definition 2.1. Eine Funktion $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *Beste Antwort-Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ gilt:

$$\arg \max_{x_i \in X_i} c_i(x) = \arg \max_{x_i \in X_i} P(x)$$

- *verallgemeinertes ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x_i, x_{-i}) > c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) \implies P(x_i, x_{-i}) > P(\hat{x}_i, x_{-i})$$

- *ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x_i, x_{-i}) > c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) \iff P(x_i, x_{-i}) > P(\hat{x}_i, x_{-i})$$

Sind die K_i zudem geordnete abelsche Gruppen, so heißt P

- *skaliertes Potential*, wenn es streng monotone Funktionen $f_i : \mathbb{R} \rightarrow K_i$ gibt, sodass für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x_i, x_{-i}) - c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) = f_i(P(x_i, x_{-i}) - P(\hat{x}_i, x_{-i}))$$

Sind die K_i Teilmengen einer gemeinsamen geordneten abelschen Gruppe K , so heißt P

- *gewichtetes Potential*, wenn es einen Gewichtsvektor $(w_i)_{i \in I}$ gibt, sodass für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x_i, x_{-i}) - c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) = w_i \cdot (P(x_i, x_{-i}) - P(\hat{x}_i, x_{-i}))$$

- *exaktes Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x_i, x_{-i}) - c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) = P(x_i, x_{-i}) - P(\hat{x}_i, x_{-i})$$

Exakte, gewichtete, ordinale und verallgemeinerte ordinale Potentiale wurden erstmals in [MS96] definiert, beste Antwort-Potentiale erstmals in [Voo00].

Verallgemeinern? (total geordnete Menge K statt \mathbb{R} ?)

Kann man diese Definition irgendwie kompakter/übersichtlicher machen?

Anschauung

Zusammenhänge (evtl. schon nächstes Kapitel?)

2.2 Erste Sätze

Zu einem gegebenen Strategieprofil $x \in X$ sei dessen *Nachbarschaft* die Menge aller durch höchstens eine Abweichung erreichbarer Strategieprofile, d.h. die Menge $\{(\hat{x}_i, x_{-i}) \mid i \in N, \hat{x}_i \in X_i\}$. Wir nennen x dann ein *lokales Minimum* einer Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, wenn es ein Minimum innerhalb seiner Nachbarschaft ist.

Satz 2.2. *Sei Γ ein Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential P . Dann ist jedes lokale Minimum von P ein Nash-Gleichgewicht von Γ . Ist P sogar ein ordinales Potential, so gilt auch die umgekehrte Richtung.*

Dieser Satz zeigt also, dass man Nash-Gleichgewichte allein durch Betrachten einer Potentialfunktion finden kann. Insbesondere folgt daraus direkt die Existenz von Nash-Gleichgewichten in einer Vielzahl von Potentialspielen:

Korollar 2.3. *Sei Γ ein Spiel mit einem kompakten Strategieraum und einer stetigen verallgemeinerten ordinalen Potentialfunktion. Dann hat Γ wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.*

Insbesondere also haben endliche Potentialspiele immer ein Nashgleichgewicht. Satz 2.2 folgt mit Hilfe von Korollar 1.8 direkt aus dem folgenden Satz:

Satz 2.4. *Sei Γ ein Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential P . Dann ist jeder Verbesserungspfad in Γ auch ein Verbesserungspfad bezüglich P . Ist P sogar ein ordinales Potential, so gilt auch die umgekehrte Richtung.*

Streng genommen nicht wirklich, da das Korollar nur für Spiele gilt!?

Beweis. .

Beweis

□

Was kann man über Beste-Antwort-Potentiale sagen (vermtl. Zusammenhang zu Beste-Antwort-Pfade?)

3 Auslastungsspiele

Definition 3.1. Ein *Auslastungsmodell* M ist gegeben durch ein Tupel $(I, R, (S_i)_{i \in I}, K, (g_r)_{r \in R})$. Dabei ist

- I die Menge der Spieler,
- R die Menge der zur Verfügung stehenden Ressourcen,
- $S_i \subseteq \mathcal{P}(R)$ die Menge von Teilmengen der Ressourcenmenge, unter denen sich der Spieler i entscheiden kann,
- K , eine geordnete abelsche Gruppe, der Kostenraum der Ressourcen und
- $g_r : \mathbb{R} \rightarrow K$ eine Funktion, welche die Kosten der Ressource $r \in R$ in Abhängigkeit von ihrer Auslastung beschreibt.

Definition 3.2. Jedes Auslastungsmodell M induziert ein *Auslastungsspiel* $\Gamma(M) := (I, S = (S_i)_{i \in I}, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow K : s \mapsto \sum_{r \in R} g_r(l_r(x))$$

wobei $l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto |\{i \in I \mid r \in s_i\}|$ die *Lastfunktion* der Ressource ist.

Definition 3.3. Zusammen mit einem Gewichtsvektor $(w_i)_{i \in I}$ induziert ein Auslastungsmodell M

Hier bekommt man wohl Probleme, wenn Spieler- bzw. Ressourcenmenge unendlich ist.

- ein *kostengewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma_c(M, w) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow K : s \mapsto \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(x))$$

und die gleiche Lastfunktion wie im ungewichteten Fall.

- ein *lastgewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma_l(M, w) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion wie im ungewichteten Fall und die Lastfunktion $l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto \sum \{w_i \mid r \in s_i\}$.
- ein *gewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma(M, w) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow K : s \mapsto \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(x))$$

und die Lastfunktion $l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto \sum \{w_i \mid r \in s_i\}$.

Definition 3.4. Zusammen mit einer Skalierungsfunktionen $(f_i : K \rightarrow K)_{i \in I}$ und verallgemeinerten Lastfunktionen $(h_r : X \rightarrow \mathbb{R})_{r \in R}$ induziert ein Auslastungsmodell M

Ist diese Definition wirklich sinnvoll?

- ein *kostenskaliertes Auslastungsspiel* $\Gamma_c(M, f_i) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow K : s \mapsto \sum_{r \in R} f_i(g_r(l_r(x)))$$

und die gleiche Lastfunktion wie im ungewichteten Fall.

- ein *lastskaliertes Auslastungsspiel* $\Gamma_l(M, h_r) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow K : s \mapsto \sum_{r \in R} g_r(h_r(x))$$

- ein *gewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma(M, f_i, h_r) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow K : s \mapsto \sum_{r \in R} f_i(g_r(h_r(x))).$$

4 Morphismen von Spielen

4.1 Definitionen

Definition 4.1. Zwei Spiele $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i \in I}, (c'_i)_{i \in I})$ heißen *äquivalent*, wenn es für jeden Spieler i eine bijektive Abbildung $\phi_i : X_i \rightarrow X'_i$ gibt, sodass gilt:

$$\forall x \in X : c_i(x) = c'_i(\phi(x))$$

Permutation von Spielern erlauben?

Bemerkung 4.2. Zwei Spiele sind also genau dann äquivalent, wenn sie sich ausschließlich durch Umbenennung der Strategien ineinander überführen lassen. In [MS96] (S. 133) wird dies als Isomorphie von Spielen bezeichnet.

Definition 4.3. Zwei Spiele $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i \in I}, (c'_i)_{i \in I})$ heißen *isomorph*, falls es bijektive Abbildungen $\phi_i : X_i \rightarrow X'_i$ sowie bijektive und monotone Abbildungen $\psi_i : K_i \rightarrow K'_i$ gibt, sodass alle Diagramme der folgenden Form kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ \downarrow c_i & & \downarrow c'_i \\ K_i & \xrightarrow{\psi_i} & K'_i \end{array}$$

Bemerkung 4.4. Diese Definition ergibt sich aus der abstrakteren Definition für in [Lap99].

Definition 4.5. Zwei im Sinne von Definition 4.3 isomorphe Spiele heißen *sozial isomorph*, wenn zusätzlich die Funktion

$$\sum \psi_i : \prod_{i \in I} K_i \rightarrow \prod_{i \in I} K'_i$$

monoton ist.

Beispiel 4.6. lineare Funktionen

Definition 4.7. Ein *Nash-Morphismus* $\gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ zwischen zwei Spielen $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i \in I}, (c'_i)_{i \in I})$ ist gegeben durch Abbildungen $\phi_i : X_i \rightarrow X'_i$ sodass gilt:

$$\forall x \in X, i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) > c_i(x) \Rightarrow c'_i(\phi(\hat{x}_i, x_{-i})) > c'_i(\phi(x))$$

Der Morphismus γ heißt *Nash-Isomorphismus* (und die beiden Spiele dann *Nash-isomorph*), wenn die ϕ_i bijektiv sind und gilt:

$$\forall x \in X, i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) > c_i(x) \iff c'_i(\phi(\hat{x}_i, x_{-i})) > c'_i(\phi(x))$$

Beobachtung 4.8. Es gilt:

$$\text{äquivalent} \Rightarrow \text{sozial isomorph} \Rightarrow \text{isomorph} \Rightarrow \text{Nash-isomorph}$$

Das macht natürlich nur Sinn, wenn auf den beiden Produkträumen auch totale (?) Ordnungen existieren

4.2 Erste Sätze

Lemma 4.9. Seien Γ und Γ' zwei Nash-isomorphe Spiele. Dann ist $x \in X$ genau dann ein Nashgleichgewicht von Γ , wenn $\phi(x) \in X'$ ein Nashgleichgewicht von Γ' ist.

Beweis. .

folgt direkt mit Definitionen

□

Lemma 4.10. Seien Γ und Γ' zwei Nash-isomorphe Spiele. Dann hat Γ genau dann die FIP, wenn Γ' diese besitzt.

Beweis. .

Beweis über Verbesserungspfad im einen entspricht Verbesserungspfad im anderen. Evtl. direkt das als Lemma formulieren und dann die beiden vorherigen Lemmas als Korollare daraus?

□

Lemma 4.11. Sei $\gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ ein Nash-Morphismus und $x \in X$. Ist dann $\phi(x) \in X'$ ein Nashgleichgewicht von Γ' , so ist auch x selbst schon ein Nashgleichgewicht (von Γ).

Beweis. .

Nachrechnen - evtl. mit vorherigen Sätzen verbinden bzw. schon davor zeigen, damit diese ein Korollar werden?

□

Lemma 4.12. Seien Γ und Γ' zwei sozial isomorphe Spiele. Dann ist $x \in X$ genau dann ein soziales Optimum von Γ , wenn $\phi(x) \in X'$ ein soziales Optimum von Γ' ist.

Beweis. .

Folgt direkt mit Definitionen

□

Satz 4.13. Besitzt ein Spiel Γ ein ordinales Potential, so ist es isomorph zu einem Auslastungsspiel.

Beweis. Analog zum Beweis der Äquivalenz von Spielen mit exaktem Potential und Auslastungsspielen in [MS96], Beweis orientiert sich an [Mon].

□

Beobachtung 4.14. Besitzt ein Spiel ein verallgemeinertes ordinales Potential, so gibt es einen Nash-Morphismus in/von ein Auslastungsspiel.

Was von beidem?

Beweis. .

Proofmining in oberem Beweis

□

Beobachtung 4.15. Nach [\[MS96\]](#) Lemma 2.5 hat jedes Spiel mit FIP ein verallgemeinertes Potential, also

in/von...

Literatur

- [Jim14] Alfi Jiménez. *Game Theory from the Category Theory Point of View*. 2014. URL: <https://www.gtcenter.org/Archive/2014/Conf/Jimenez1880.pdf> (besucht am 15.01.2017).
- [Lap99] Victor Lapitsky. „On some Categories of Games and Corresponding Equilibria“. In: *International Game Theory Review* 1.2 (1999), S. 169–185.
- [Mon] Dov Monderer. *Multipotential Games*.
- [MS96] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Potential Games“. In: *Games and Economic Behaviour* (1996), S. 124–143.
- [Voo00] Mark Voorneveld. „Best-response potential games“. In: *Economics Letters* 66.3 (2000), S. 289–295. ISSN: 0165-1765. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1765\(99\)00196-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1765(99)00196-2). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165176599001962>.