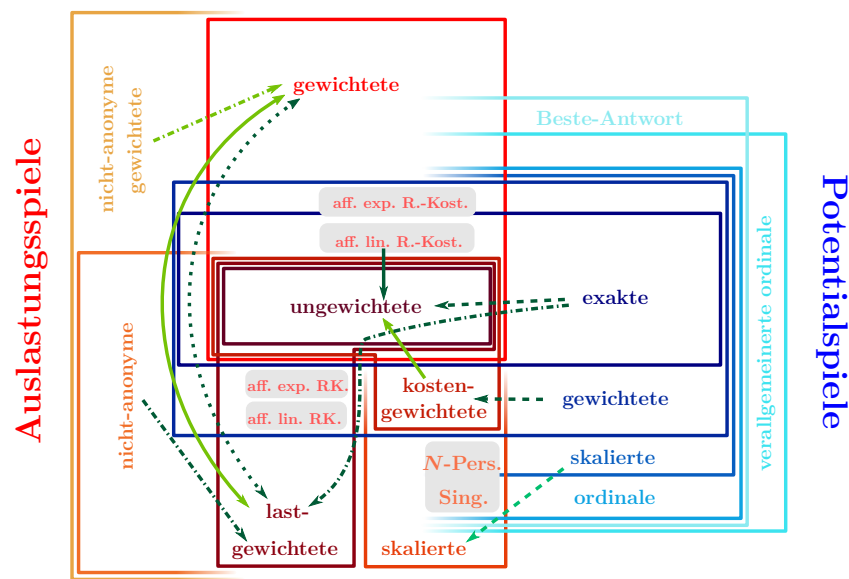


UNIVERSITÄT AUGSBURG

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

# Masterarbeit

## Zusammenhänge zwischen Auslastungs- und Potentialspielen



überarbeitete Version vom 17. Mai 2017

Vorgelegt von:  
Lukas GRAF

Betreut von:  
Prof. Dr. Tobias HARKS



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>7</b>
1.1 Spiele in strategischer Form . . . . .	7
1.2 Abweichungspfade . . . . .	8
1.3 Auslastungsspiele . . . . .	11
<b>2 Potentiale</b>	<b>16</b>
2.1 Definitionen . . . . .	16
2.2 Anschauung . . . . .	17
2.3 Eigenschaften der Potentiale . . . . .	19
2.4 Charakterisierungen der Potentiale . . . . .	22
2.4.1 Exakte Potentiale . . . . .	23
2.4.2 Gewichtete und skalierte Potentiale . . . . .	25
2.4.3 Ordinale Potentiale . . . . .	26
2.4.4 Verallgemeinerte ordinale Potentiale . . . . .	28
2.4.5 Beste-Antwort-Potentiale . . . . .	30
2.4.6 Nash-Potentiale . . . . .	33
2.4.7 Zusammenfassung . . . . .	34
<b>3 Morphismen</b>	<b>36</b>
3.1 Definitionen . . . . .	36
3.2 Beweise der Potentialsätze . . . . .	46
3.3 Weitere Sätze mit Morphismen . . . . .	50
<b>4 Zusammenhänge von Auslastungs- und Potentialspielen</b>	<b>53</b>
4.1 Von ungewichtet zu gewichtet . . . . .	54
4.1.1 Gewichtete Auslastungsspiele . . . . .	55
4.1.2 Lastgewichtete Auslastungsspiele . . . . .	56
4.1.3 Kostengewichtete Auslastungsspiele . . . . .	57
4.1.4 Unendliche Auslastungsspiele . . . . .	58
4.2 Schnelle Beste-Antwort-Dynamik in Matroidspielen . . . . .	62
4.3 Weitere Zusammenhänge . . . . .	65
4.4 Zusammenfassung . . . . .	70
<b>Ausblick</b>	<b>72</b>
<b>Index</b>	<b>74</b>
<b>Literatur</b>	<b>75</b>



## Einleitung

Nicht-kooperative Spiele in strategischer Form sind eine einfache, aber zugleich mächtige Art und Weise, eine Vielzahl von Spielen oder spielartigen Situationen mathematisch zu beschreiben. Ein Spiel wird hierbei dadurch angegeben, dass jeder Spieler eine Menge ihm zur Verfügung stehender Strategien sowie eine eigene Kostenfunktion (oder Auszahlungsfunktion) auf dem Produktraum aller spielerspezifischen Strategieräume hat. „Gespielt“ wird ein solches Spiel, indem jeder Spieler eine seiner Strategien auswählt (ohne dabei die Wahlen der anderen Spieler zu kennen). Hat jeder Spieler dies getan, so legt die Gesamtheit aller gewählten Strategien das Ergebnis des Spiels fest, welches dann jeder Spieler mit Hilfe seiner Kostenfunktion für sich bewerten kann.

Von besonderem Interesse bei der Analyse derartiger Spiele sind Nash-Gleichgewichte: Spielsituationen, in denen keiner der Spieler (aus rein egoistischer Sicht) ein Interesse daran hat, einseitig seine gewählte Strategie zu ändern – also Situationen, in denen jede alleinige Strategieänderung eines Spielers zu einem schlechteren oder höchstens genauso guten Ergebnis für diesen Spieler führt. Die Fragen, welche Spiele solch ein Nash-Gleichgewicht besitzen, welche Eigenschaften dieses dann besitzt und wie man es finden kann, gehören zu den zentralen Fragestellungen der Spieltheorie.

Eine Klasse von anschaulichen (endlichen) Spielen, die zudem immer wenigstens ein Nash-Gleichgewicht besitzen, fand Rosenthal mit den sogenannten Auslastungsspielen. Dabei handelt es sich um Spiele, in denen jeder Spieler festlegt, welche Teilmenge einer gemeinsamen Menge von Ressourcen er nutzt, wobei deren Kosten davon abhängen, wie viele Spieler die jeweilige Ressource nutzen. Im Beweis der Existenz eines solchen Gleichgewichtes nutzte Rosenthal eine Art gemeinsame Kostenfunktion für alle Spieler, eine sogenannte Potentialfunktion. Die durch diese Potentialfunktion beschriebenen Kosten sind dabei auf geeignete Weise mit den ursprünglichen spielerspezifischen Kosten verträglich, sodass ein Minimum der Potentialfunktion automatisch auch ein Nash-Gleichgewicht des eigentlichen Spiels ist.

Später bewiesen Monderer und Shapley, dass sich umgekehrt auch jedes Spiel, welches eine derartige Potentialfunktion besitzt, als Auslastungsspiel darstellen lässt, es also ein Auslastungsspiel gibt, welches äquivalent zu dem Potentialspiel ist. Zudem definierten sie weitere, allgemeinere Potentialbegriffe, welche ebenfalls die Suche von Nash-Gleichgewichten erleichtern, aber dabei auch für Spiele anwendbar sind, welche nicht durch Rosenthals Auslastungsspiele darstellbar sind.

Beide beschriebenen Sätze nutzen als zentrales Element spezielle Arten von Beziehungen zwischen zwei Spielen (einmal zwischen einem Spiel und dem durch die Potentialfunktion beschriebenen alternativen Spiel und einmal zwischen dem Potentialspiel und dem es darstellenden Auslastungsspiel). Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir diese Idee einer Beziehung zwischen zwei Spielen, die gewisse Eigenschaften wie etwa Nash-Gleichgewichte erhält, formalisieren und näher untersuchen. Außerdem werden wir versuchen, weitere derartige Beziehungen zwischen verschiedenen Klassen von Spielen zu finden.

Nachdem wir in Abschnitt 1 einige Grundbegriffe der Spieltheorie definiert haben, werden wir uns zunächst in Abschnitt 2 dem Konzept von Potentialfunktionen für Spiele zuwenden. Wir werden eine ganze Reihe derartiger Potentiale kennenlernen und jeweils notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zeigen, dass ein Spiel ein entsprechendes Potential besitzt. Im folgenden Abschnitt 3 werden wir verschiedene Arten von Morphismen zwischen Spielen definieren, die dann Isomorphismen induzieren, die wir nutzen können, um die besagten Beziehungen zwischen verschiedenen Spielen beschreiben zu können. In Abschnitt 4 schließlich werden wir diese (Iso-)Morphismen nutzen, um einige Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Klassen von Auslastungs- und Potentialspielen zu formulieren und zu beweisen.

Wir werden dabei immer versuchen, die verschiedenen Sätze möglichst allgemein zu halten und insbesondere – soweit dies möglich ist – auch über unendliche statt, wie in der Literatur meist üblich, nur über endliche Spiele sprechen.

# 1 Grundlagen

## 1.1 Spiele in strategischer Form

**Definition 1.1.** Ein (*nichtkooperatives*) *Spiel in strategischer Form* ist gegeben durch ein Tupel  $\Gamma = (I, X = \prod_{i \in I} X_i, (c_i)_{i \in I})$ . Dabei ist

- $I$  die Menge der Spieler,
- $X_i$  die nicht-leere Menge der (reinen) Strategien von Spieler  $i$ ,
- $c_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  die Kostenfunktion von Spieler  $i$ .

Das eigentliche Spiel besteht nun darin, dass jeder Spieler  $i \in I$  versucht durch die Wahl einer Strategie  $x_i \in X_i$  aus seinem Strategieraum die eigenen Kosten  $c_i((x_i)_{i \in I})$  zu minimieren. Das Tupel  $x := (x_i)_{i \in I}$  bezeichnen wir dabei als *Strategieprofil*.

Wir nennen ein solches Spiel *endlich*, wenn der gesamte Strategieraum  $X$  endlich ist, und *N-Personen-Spiel*, wenn  $|I| = N \in \mathbb{N}$  gilt.

*Beobachtung 1.2.* Ist ein Spiel endlich, so können wir in der Regel ohne Einschränkung annehmen, dass auch die Menge der Spieler endlich ist. Denn die Menge  $X = \prod_{i \in I} X_i$  kann nur endlich sein, wenn alle bis auf endliche viele  $X_i$  einelementig sind. Also haben in einem endlichen Spiel nur endlich viele Spieler mehr als eine Strategie. Und für die Suche beispielsweise nach Nash-Gleichgewichten spielen nur solche Spieler überhaupt eine Rolle. Wir werden dies später in Abschnitt 3 formal zeigen (siehe Korollar 3.34).

*Notation 1.3.* Ein endliches 2-Personenspiel lässt sich leicht als Matrix darstellen. Deren Zeilen werden durch die Strategien von Spieler 1 indiziert, ihre Spalten durch die Strategien von Spieler 2. Jedem Tupel  $(x_1, x_2)$  aus je einer Strategie der beiden Spieler (also einem Strategieprofil) entspricht dann genau ein Eintrag der Matrix, welcher das Tupel  $(c_1(x_1, x_2), c_2(x_1, x_2))$  ist.

**Beispiel 1.4.** Das Spiel Schere-Stein-Papier lässt sich wie folgt als strategisches Spiel beschreiben: Jeder der beiden Spieler hat eine dreielementige Strategiemenge, nämlich  $X_1 = X_2 = \{ \text{✂}, \text{✊}, \text{✋} \}$ , sowie die durch die folgende Matrix gegebenen Kostenfunktion

	✂	✊	✋
✂	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
✊	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
✋	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

**Beispiel 1.5.** Ein klassisches Beispiel der Spieltheorie ist das Gefangenendilemma (vgl. etwa [Vor94, Beispiel 3 (S. 65)]), in dem beide Spieler je zwei Strategien haben  $X_1 = X_2 = \{ \text{gestehen}, \text{leugnen} \}$  und die Kostenfunktionen durch folgende Matrix beschrieben werden:

	gestehen	leugnen
gestehen	(8,8)	(0,10)
leugnen	(10,0)	(1,1)

*Notation 1.6.* Zu einem Strategieprofil  $x \in X$  und einer einzelnen Strategie  $\hat{x}_i \in X_i$  bezeichnen wir einer Konvention aus [Mil15] folgend mit  $(x \mid \hat{x}_i)$  das Strategieprofil, das aus  $x$  entsteht, wenn Spieler  $i$  einseitig seine Strategie von  $x_i$  auf  $\hat{x}_i$  ändert.

**Definition 1.7.** Ein Strategieprofil  $x \in X$  ist ein (*reines*) *Nash-Gleichgewicht*, wenn für jeden Spieler  $i \in I$  und jede seiner Strategien  $\hat{x}_i$  gilt:

$$c_i(x \mid \hat{x}_i) \geq c_i(x)$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist also ein Strategieprofil, aus dem heraus kein Spieler einen Anreiz für einen einseitigen Strategiewechsel hat.

**Beispiel 1.8.** Im Gefangenendilemma (Beispiel 1.5) gibt es genau ein Nash-Gleichgewicht, nämlich (gestehen, gestehen). Schere-Stein-Papier (Beispiel 1.4) hingegen besitzt kein Nash-Gleichgewicht.

In [Voo+99, Definition 2.2] werden Koordinations- und Dummy-Spiele definiert. Daran anlehnend definieren wir hier zusätzlich skalierte Koordinationsspiele und Dummy-Spieler:

**Definition 1.9.** Ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  heißt

- *Koordinationsspiel*, wenn alle Spieler eine gemeinsame Kostenfunktion nutzen, wenn also gilt  $c_i = c_{i'}$  für alle Spieler  $i, i' \in I$ .
- *skaliertes Koordinationsspiel*, wenn jeder Spieler eine streng monoton skalierte Variante einer gemeinsamen Kostenfunktion verwendet, d.h. wenn es eine Funktion  $c : X \rightarrow \mathbb{R}$  und streng monotone<sup>1</sup> Funktionen  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass für jeden Spieler  $c_i = f_i \circ c$  gilt.

Ein Spieler  $i \in I$  heißt *Dummy-Spieler*, wenn die alleinige Abweichung dieses Spielers von einem gegebenen Strategieprofil nie zu einer Änderung seiner Kosten führt. D.h. wenn für alle  $x \in X$  und  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt  $c_i(x) = c_i(x \mid \hat{x}_i)$ .

Das ganze Spiel  $\Gamma$  heißt *Dummy-Spiel*, wenn alle Spieler des Spiels Dummy-Spieler sind.

*Beobachtung 1.10.* In einem (skalierten) Koordinationsspiel sind globale Minima der gemeinsamen Kostenfunktion Nash-Gleichgewichte des Spiels. Insbesondere haben damit endliche (skalierte) Koordinationsspiele immer mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

In einem Dummy-Spiel ist *jedes* Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht, da ein einzelner Spieler durch einseitige Abweichung seine Kosten nie verändern und daher insbesondere nicht verringern kann.

## 1.2 Abweichungspfade

Eine natürliche Methode ein Nash-Gleichgewicht in einem konkreten Spiel zu finden, ist die folgende: Man beginnt bei einem beliebigen Strategieprofil und prüft, ob dieses

<sup>1</sup>Mit streng monotonen Funktionen sind in dieser Arbeit immer ordnungserhaltende, also streng monoton *wachsende* Funktionen gemeint.



bereits ein Nash-Gleichgewicht ist. Ist dies der Fall, ist man bereits fertig. Andernfalls gibt es wenigstens einen Spieler, der seine Kosten durch einen einseitigen Strategiewechsel verbessern kann. Dadurch erhält man ein neues Strategieprofil, für das man erneut prüft, ob es ein Nash-Gleichgewicht ist usw. Terminiert dieses Verfahren, so hat man ein Nash-Gleichgewicht gefunden.

Im Laufe dieses Verfahrens erhält man eine Folge von Strategieprofilen, die jeweils durch Abweichung eines einzelnen Spielers auseinander hervorgehen, wobei dieser Spieler seine Kosten senkt. Eine solche Folge bezeichnen Monderer und Shapley in [MS96] als „Verbesserungspfad“. Stellt man andere Bedingungen an die Kostenveränderung für den abweichenden Spieler, so erhält man analog weitere Arten von Pfaden im Strategieraum (vergleiche etwa [VN97] und [Voo00]).

**Definition 1.11.** Ein Tupel von Strategieprofilen  $(x^0, x^1) \in X \times X$  nennen wir einen *Schritt*, wenn  $x^1$  durch Abweichung eines einzelnen Spielers aus  $x^0$  entsteht. Das heißt also, wenn es einen Spieler  $i \in I$  gibt, sodass  $x^1 = (x^0 \mid x_i^1)$  gilt.

Ein solcher Schritt heißt

- *Nichtverschlechterungsschritt*, wenn sich der abweichende Spieler nicht verschlechtert, d.h.  $c_i(x^0) \geq c_i(x^1)$ .
- *Verbesserungsschritt*, wenn sich der abweichende Spieler echt verbessert, wenn also  $c_i(x^0) > c_i(x^1)$  gilt.
- *Beste-Antwort-Schritt*, wenn der abweichende Spieler eine für ihn bestmögliche Antwort wählt, d.h.  $\min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x^0 \mid \hat{x}_i) = c_i(x^1)$ .

**Definition 1.12.** Eine Folge von Strategieprofilen  $\gamma = (x^0, x^1, x^2, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$  ist ein *Pfad*, wenn je zwei aufeinanderfolgende Strategieprofile einen Schritt bilden. Das heißt wenn es für jeden Schritt  $k$  einen Spieler  $i(k) \in I$  gibt, sodass das Profil  $x^k$  aus  $x^{k-1}$  durch alleinige Abweichung dieses Spielers entsteht, also  $x^k = (x^{k-1} \mid x_{i(k)}^k)$ .

Ein solcher Pfad heißt

- *Nichtverschlechterungspfad*, wenn jeder Schritt ein Nichtverschlechterungsschritt ist, d.h. für alle  $k$  gilt  $c_{i(k)}(x^{k-1}) \geq c_{i(k)}(x^k)$ .
- *schwacher Verbesserungspfad*, wenn er ein Nichtverschlechterungspfad ist und mindestens ein Schritt ein Verbesserungsschritt ist.
- *Verbesserungspfad*, wenn jeder Schritt ein Verbesserungsschritt ist.
- *Beste-Antwort-Pfad*<sup>2</sup>, wenn jeder Schritt ein Beste-Antwort-Schritt ist, wenn also gilt  $\min_{\hat{x}_{i(k)} \in X_{i(k)}} c_{i(k)}(x^{k-1} \mid \hat{x}_{i(k)}) = c_{i(k)}(x^k)$ .
- *schwacher Beste-Antwort-Verbesserungspfad*, wenn er ein schwacher Verbesserungspfad und ein Beste-Antwort-Pfad ist.

---

<sup>2</sup>In [Voo00] werden solche Pfade als „Beste-Antwort-kompatibel“ bezeichnet.

- *Beste-Antwort-Verbesserungspfad*, wenn er ein Verbesserungspfad und ein Beste-Antwort-Pfad ist.

**Definition 1.13.** Für einen endlichen Pfad  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$  ist

- die *Gesamtänderung*  $\delta(\gamma)$  entlang des Pfades definiert als die Summe aller Änderungen für die jeweils abweichenden Spieler:

$$\delta(\gamma) := \sum_{k=1}^n \left( c_{i(k)}(x^k) - c_{i(k)}(x^{k-1}) \right)$$

- $\gamma$  ein *abgeschlossener Verbesserungspfad*, wenn er ein Verbesserungspfad ist, der nicht mehr nach hinten verlängert werden kann, d.h. es keinen Spieler  $i$  mit einer Strategie  $\hat{x}_i$  gibt, sodass  $c_i(x^n) > c_i(x^n | \hat{x}_i)$  gilt.
- $\gamma$  ein *(n-)Zykel*, wenn  $x^0 = x^n$  und  $n \geq 1$  gilt.
- $\overleftarrow{\gamma} := (x^n, x^{n-1}, \dots, x^0)$  der in die Gegenrichtung laufende Pfad.

Ist zusätzlich  $\mu = (y^0, y^1, \dots)$  ein beliebiger bei  $x^n$  beginnender Pfad (also  $y^0 = x^n$ ), so ist  $\gamma \cdot \mu := (x^0, \dots, x^n, y^1, \dots)$  die Verknüpfung der beiden Pfade (und offensichtlich selbst wieder ein Pfad).

*Beobachtung 1.14.* Einige einfache Beobachtungen über Pfade:

- Ein endlicher Nichtverschlechterungspfad  $\gamma$  ist genau dann ein schwacher Verbesserungspfad, wenn  $\overleftarrow{\gamma}$  kein Nichtverschlechterungspfad ist.
- Zwei Pfade  $\gamma$  und  $\mu$  von  $x$  nach  $y$  haben genau dann die gleiche Gesamtänderung, wenn  $\gamma \cdot \overleftarrow{\mu}$  eine Gesamtänderung von 0 hat. Es gilt also für zwei solche Pfade:

$$\delta(\gamma) = \delta(\mu) \iff \delta(\gamma \cdot \overleftarrow{\mu}) = 0$$

- Jeder Beste-Antwort-Pfad ist automatisch ein Nichtverschlechterungspfad.

Der eingangs beschriebene natürliche Algorithmus zum Finden eines Nash-Gleichgewichtes terminiert genau dann immer, wenn alle Verbesserungspfade in dem gegebenen Spiel endlich sind. Diese Eigenschaft bezeichnen wir als *finite improvement property*:

**Definition 1.15.** Ein Spiel  $\Gamma$  hat die *finite improvement property (FIP)*, wenn jeder Verbesserungspfad endlich ist.

*Beobachtung 1.16.* Das Ende eines abgeschlossenen Verbesserungspfades ist immer ein Nash-Gleichgewicht. Denn wäre dem nicht so, dann gäbe es wenigstens einen Spieler, der sich durch Abweichen noch verbessern kann – was zu einer Verlängerung des Verbesserungspfades führen würde.

Umgekehrt bildet offenkundig auch jedes Nash-Gleichgewicht das Ende wenigstens eines abgeschlossenen Verbesserungspfades (sogar Beste-Antwort-Verbesserungspfades) – nämlich des trivialen, nur aus diesem Strategieprofil bestehenden Verbesserungspfades.

*Beobachtung 1.17.* Ein Spiel  $\Gamma$  besitzt genau dann (mindestens) ein Nash-Gleichgewicht, wenn es (mindestens) einen abgeschlossenen (Beste-Antwort-)Verbesserungspfad besitzt. Ein Spiel mit FIP besitzt dementsprechend immer wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.

Alternativ können auch Beste-Antwort-Schritte dazu verwendet werden, Nash-Gleichgewichte zu charakterisieren:

*Beobachtung 1.18.* Ein Strategieprofil  $x \in X$  ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn  $(x, x)$  für jeden Spieler ein Beste-Antwort-Schritt ist.

Beste-Antwort-Pfade treten bei sogenannten Beste-Antwort-Dynamiken auf: Bei diesen handelt es sich ebenfalls um Verfahren zum Auffinden von Nash-Gleichgewichten. Im Unterschied zum zuvor beschriebenen Verfahren wechselt der abweichende Spieler hierbei allerdings nicht zu irgendeiner für ihn besseren Strategie, sondern wählt direkt die (momentan) *beste* der ihm zur Verfügung stehenden Strategien.

Schließlich führen wir noch eigene Bezeichnungen für den Bereich eines Strategieraums ein, der von einem gegebenen Strategieprofil aus überhaupt mit Hilfe eines Pfades erreicht werden kann.

**Definition 1.19.** Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  des Strategieraumes bezeichnen wir als *Pfadzusammenhangskomponente*, wenn es für je zwei  $x, y \in Y$  einen Pfad von  $x$  nach  $y$  in  $Y$  gibt. Zu einem gegebenen Strategieprofil  $x \in X$  ist die *Pfadzusammenhangskomponente von  $x$*  die (bezüglich Inklusion) maximale Pfadzusammenhangskomponente  $Y_x \subseteq X$ , welche  $x$  enthält.

*Beobachtung 1.20.* Die Pfadzusammenhangskomponente eines Strategieprofils  $x$  besteht aus allen Strategieprofilen, die sich an höchstens endlich vielen Stellen von  $x$  unterscheiden, d.h.

$$Y_x = \{ y \in X \mid \exists J \subseteq I : |J| < \infty \text{ und } \forall i \in I \setminus J : x_i = y_i \}$$

Insbesondere ist also für  $N$ -Personenspiele der gesamte Strategieraum eine einzige Pfadzusammenhangskomponente.

### 1.3 Auslastungsspiele

In diesem Abschnitt wollen wir noch eine besondere Klasse von Spielen kennenlernen, nämlich die erstmals von Rosenthal in [Ros73] definierten Auslastungsspiele sowie einige Varianten davon. Verschiedene Eigenschaften dieser Spiele und insbesondere ihre Beziehungen zu Potentialspielen werden wir später in Abschnitt 4 diskutieren.

**Definition 1.21.** Ein *Auslastungsmodell* ist ein Tupel  $M = (I, R, S := \prod_{i \in I} S_i, (g_r)_{r \in R})$ . Dabei ist

- $I$  die Menge der Spieler,
- $R$  die Menge der zur Verfügung stehenden Ressourcen,

- $g_r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, welche die Kosten der Ressource  $r$  in Abhängigkeit von ihrer Auslastung beschreibt, und
- $S_i \subseteq \mathcal{P}(R)$  eine (nicht-leere) Menge von Teilmengen der Ressourcenmenge, unter denen sich der Spieler  $i$  für eine Teilmenge entscheiden kann.

**Definition 1.22.** Ein Auslastungsmodell  $M$  induziert durch die Lastfunktionen

$$l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto |\{i \in I \mid r \in s_i\}|$$

und die Kostenfunktionen

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in s_i} g_r(l_r(s))$$

ein *Auslastungsspiel*  $\Gamma(M) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$ , wenn alle  $c_i$  und alle  $l_r$  auf ganz  $S$  wohldefiniert sind (also die entsprechenden Mengen/Summen für jedes  $s \in S$  endlich sind/absolut konvergieren).

*Bemerkung 1.23.* Eine Lastfunktion  $l_r$  ist genau dann wohldefiniert, wenn diese Ressource  $r$  von höchstens endlich vielen verschiedenen Spielen benutzt werden kann. Das heißt wenn gilt:  $|\{i \in I \mid \exists s_i \in S_i : r \in s_i\}| < \infty$ . Sind alle  $l_r$  bereits wohldefiniert, so ist eine hinreichende Bedingung für die Wohldefiniertheit von  $c_i$ , dass alle diesem Spieler zur Auswahl stehende Teilmengen von  $R$  endlich sind. Diese Bedingung ist aber nicht notwendig.

Insbesondere induzieren Auslastungsmodelle mit endlicher Ressourcen- und Spielerzahl daher immer ein wohldefiniertes Auslastungsspiel.

Ist die Ressourcenmenge  $R$  endlich, so ist das induzierte Auslastungsspiel ein endliches Spiel (d.h. dessen Strategieraum ist endlich). Ist umgekehrt der Strategieraum endlich und jede Strategie jedes Spielers enthält nur endlich viele Ressourcen, so können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass auch  $R$  endlich ist. Denn in diesem Fall tauchen nur endlich viele der Ressourcen in einer Strategie wenigstens eines der Spieler auf – und alle anderen Ressourcen können für die Betrachtung des Spiels ignoriert werden.

**Beispiel 1.24.** Ein Beispiel für Auslastungsmodelle sind *Netzwerkauslastungsmodelle*. Diese sind gegeben durch einen (nicht notwendigerweise endlichen) Multigraphen  $G = (V, E)$ , eine Kostenfunktion  $g_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  für jede Kante  $e \in E$  und für jeden Spieler  $i \in I$  je ein ausgezeichnete Start- und Endknoten  $s_i, t_i \in V$ . Die Ressourcen sind dann die Kanten des Graphen, die Strategien von Spieler  $i$  entsprechen den endlichen  $s_i, t_i$ -Pfadern in  $G$ .

Zusätzlich ist es möglich bestimmte Kanten nur für einen Teil der Spieler zuzulassen. Dadurch wird dann der Strategieraum der anderen Spieler entsprechend eingeschränkt.

Verallgemeinerungen von Auslastungsspielen erhalten wir durch das Einführen von Spielergewichten bzw. dem Abändern der Form, in der die Kosten berechnet werden:

**Definition 1.25.** Zusammen mit einem positiven Gewichtsvektor  $(w_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_{>0}^I$  induziert ein Auslastungsmodell  $M$  (wiederum unter der Voraussetzung, dass alle beteiligten Funktionen wohldefiniert sind)

- ein *kostengewichtetes Auslastungsspiel*  $\Gamma_c(M, w) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$  durch die Kostenfunktion

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in s_i} w_i \cdot g_r(l_r(s))$$

und die gleiche Lastfunktion wie im ungewichteten Fall.

- ein *lastgewichtetes Auslastungsspiel*  $\Gamma_l(M, w) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$  durch die Kostenfunktion wie im ungewichteten Fall und die Lastfunktion

$$l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto \sum \{ w_i \mid r \in s_i \}.$$

- ein *gewichtetes Auslastungsspiel*  $\Gamma(M, w) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$  durch die Kostenfunktion

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in s_i} w_i \cdot g_r(l_r(s))$$

und die Lastfunktion

$$l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto \sum \{ w_i \mid r \in s_i \}.$$

*Beobachtung 1.26.* Für (last-)gewichtete Auslastungsspiele ist es auch möglich, dass abzählbar unendlich viele Spieler eine Ressource nutzen können (und die entsprechende Lastfunktion dennoch wohldefiniert ist) – beispielsweise dann, wenn der Gewichtsvektor von der Form  $(1/2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist.

Einige weitere Varianten von Auslastungsspielen sind die folgenden:

**Definition 1.27.** • Zusammen mit einer Familie streng monotoner Skalierungsfunktionen  $(f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$  erhält man aus einem Auslastungsmodell ein *skaliertes Auslastungsspiel* durch Verwenden der Kostenfunktionen

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in s_i} f_i(g_r(l_r(s))).$$

- Ein *Auslastungsmodell/-spiel mit playerspezifischen Ressourcenkosten* erhält man, wenn es zu jeder Ressource  $r \in R$  und jedem Spieler  $i \in I$  eine playerspezifische Ressourcenkostenfunktion  $g_r^i : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt und die Kostenfunktionen der Spieler definiert sind als

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in s_i} g_r^i(l_r(s)).$$

*Bemerkung 1.28.* Jedes skalierte Auslastungsspiel ist insbesondere ein Auslastungsspiel mit playerspezifischen Ressourcenkosten: Setze dazu  $g_r^i := f_i \circ g_r$ .

**Definition 1.29.** Ein Auslastungsmodell/-spiel heißt *nicht-anonym*, wenn die Kosten einer Ressource nicht nur von der Zahl bzw. dem Gesamtgewicht der sie nutzenden Spieler, sondern auch von deren Identität abhängt. Die Lastfunktionen sind dann also definiert als

$$l_r : S \rightarrow \mathcal{P}(I) : s \mapsto \{ i \in I \mid r \in s_i \}$$

und die Ressourcenkostenfunktionen sind von der Form

$$g_r : \mathcal{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Speziellere Klassen von Auslastungsspielen erhalten wir hingegen, wenn die Mengen der zulässigen Teilmengen der einzelnen Spieler zusätzliche Struktur besitzen. Der einfachste Fall hierfür ist, dass jeder Spieler immer nur genau eine Ressource auf einmal wählen kann:

**Definition 1.30.** Ein Auslastungsmodell/-spiel heißt *Singelton-Auslastungsmodell/-spiel*, wenn jede Strategie jedes Spielers aus genau einer Ressource besteht.

Eine andere Möglichkeit ist, dass die zulässigen Teilmengen jedes Spielers den Basen eines (spielerspezifischen) Matroids auf der Ressourcenmenge entsprechen:

**Definition 1.31.** Ein ungewichtetes Auslastungsmodell/-spiel heißt *Matroidmodell/-spiel*, wenn es für jeden Spieler  $i \in I$  einen Matroid  $M_i$  auf der Ressourcenmenge gibt, sodass  $S_i$  gerade die Basen dieses Matroids sind.

**Definition 1.32.** Ein Teilmengensystem  $M \subseteq \mathcal{P}(R)$  auf einer endlichen Menge  $R$  heißt *Matroid*, wenn es die folgenden drei Axiome erfüllt (vgl. [Sch03, Abschnitt 39.1])

1.  $\emptyset \in M$  (oder äquivalent dazu:  $M \neq \emptyset$ )
2.  $M$  ist abgeschlossen unter Inklusion, d.h.  $\forall S \in M, T \subseteq R : T \subseteq S \implies T \in M$ .
3.  $\forall S, T \in M : |T| < |S| \implies \exists r \in S \setminus T : T \cup \{r\} \in M$ .

Die Mengen in  $M$  bezeichnen wir dann als *unabhängige Mengen*, die bezüglich Inklusion maximalen Mengen unter diesen nennen wir *Basen des Matroids*.

Eine wichtige Eigenschaft, welche alle Matroide erfüllen, ist der starke Basisaustauschsatz ([Sch03, Theorem 29.12]):

**Satz 1.33.** Seien  $M$  ein Matroid,  $B_1, B_2$  zwei Basen von  $M$  und  $q \in B_1 \setminus B_2$  beliebig. Dann gibt es ein Element  $r \in B_2 \setminus B_1$ , sodass das Vertauschen dieser beiden Elemente wieder zwei Basen ergibt, d.h. sowohl  $B_1 \setminus \{q\} \cup \{r\}$  als auch  $B_2 \setminus \{r\} \cup \{q\}$  sind ebenfalls Basen von  $M$ .

Mittels Induktion ergibt sich daraus die Basen-Matching-Eigenschaft ([Sch03, Korollar 39.12a]):

**Korollar 1.34.** *Seien  $M$  ein Matroid und  $B_1, B_2$  zwei Basen von  $M$ . Dann gibt es eine Partitionierung der symmetrischen Differenz  $B_1 \triangle B_2 := B_1 \setminus B_2 \cup B_2 \setminus B_1$  in eine Menge von Tupeln der Form  $(q, r)$  mit  $q \in B_1 \setminus B_2$  und  $r \in B_2 \setminus B_1$ , sodass  $B_1 \setminus \{q\} \cup \{r\}$  ebenfalls eine Basis von  $M$  ist. Es gibt also eine Menge von Tupeln  $A \subseteq (B_1 \setminus B_2) \times (B_2 \setminus B_1)$ , sodass gilt:*

- $\forall q \in B_1 \setminus B_2 : \exists! r \in B_2 \setminus B_1 : (q, r) \in A$
- $\forall r \in B_2 \setminus B_1 : \exists! q \in B_1 \setminus B_2 : (q, r) \in A$
- $\forall (q, r) \in A : B_1 \setminus \{q\} \cup \{r\}$  ist eine Basis von  $M$

## 2 Potentiale

Eine Schwierigkeit bei der Analyse von Spielen bildet der Umstand, dass jeder Spieler eine eigene Kostenfunktion und damit ein eigenes Optimierungsziel hat. Möchte man also beispielsweise Gleichgewichtspunkte finden, so muss man alle diese Funktionen gleichzeitig (lokal) optimieren. Diese Aufgabe wird wesentlich einfacher, wenn das Spiel eine sogenannte *Potentialfunktion* besitzt. Das ist eine Funktion auf dem Strategieraum des Spieles, die ein alternatives Koordinationsspiel darauf definiert, welches gewisse Eigenschaften mit dem ursprünglichen Spiel teilt (etwa die Lage der Gleichgewichtspunkte).

In diesem Kapitel werden wir einige Varianten von Potentialfunktionen kennenlernen und feststellen, welche Spiele diese jeweils besitzen. In Abschnitt 3 werden wir dann die Beziehung zwischen Ausgangsspiel und dem von einer Potentialfunktion darauf beschriebenen Koordinationsspiel durch Morphismen zwischen den beiden Spielen formalisieren und dadurch zeigen, welche Eigenschaften beim Wechsel zwischen den beiden Spielen erhalten bleiben.

### 2.1 Definitionen

Zunächst definieren wir eine Auswahl verschiedener Arten von Potentialfunktionen:

**Definition 2.1.** Zu einem Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  heißt eine Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$

- *verallgemeinertes Nash-Potential*, wenn jedes Minimum von  $P$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$  ist, d.h. für alle  $x \in X$  gilt:

$$P(x) = \min_{\hat{x} \in X} P(\hat{x}) \implies \forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(x) \leq c_i(x \mid \hat{x}_i)$$

- *Nash-Potential*, wenn jedes Minimum von  $P$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$  ist und umgekehrt, d.h. für alle  $x \in X$  gilt:

$$P(x) = \min_{\hat{x} \in X} P(\hat{x}) \iff \forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(x) \leq c_i(x \mid \hat{x}_i)$$

- *lokales Nash-Potential*, wenn jedes „lokale“ Minimum von  $P$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$  ist und umgekehrt, d.h. für alle  $x \in X$  gilt:

$$\forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : P(x) \leq P(x \mid \hat{x}_i) \iff \forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(x) \leq c_i(x \mid \hat{x}_i)$$

- *Beste-Antwort-Potential*, wenn für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  gilt:

$$\arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x \mid \hat{x}_i) = \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} P(x \mid \hat{x}_i)$$



- *verallgemeinertes ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i) \implies P(x) > P(x \mid \hat{x}_i)$$

- *ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i) \iff P(x) > P(x \mid \hat{x}_i)$$

- *skaliertes Potential*, wenn es streng monotone Funktionen  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = f_i(P(x)) - f_i(P(x \mid \hat{x}_i))$$

- *gewichtetes Potential*, wenn es einen Gewichtsvektor  $(w_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_{>0}^I$  gibt, sodass für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = w_i \cdot (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i))$$

- *exaktes Potential*, wenn für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)$$

Exakte, gewichtete, ordinale und verallgemeinerte ordinale Potentiale wurden erstmals in [MS96] definiert, beste Antwort-Potentiale erstmals in [Voo00]. Die Begriffe verallgemeinertes und lokales Nash-Potential dürften für die Anwendung eher weniger interessant sein, sondern sollen vor allem das grundlegende Konzept eines Potentials formalisieren und umfassen daher auch (fast) alle anderen Potentiale. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Potentialbegriffen werden in dem an [Voo00, Abbildung 1] angelehnten Euler-Diagramm (Abbildung 1) dargestellt.

**Beispiel 2.2.** Jedes Koordinationsspiel besitzt ein exaktes Potential (nämlich die gemeinsame Kostenfunktion). Entsprechend besitzt jedes skalierte Koordinationsspiel ein skaliertes Potential und jedes Dummyspiel ein exaktes Potential (die konstante 0-Funktion).

## 2.2 Anschauung

Verallgemeinerte Nash-Potentiale (und damit alle oben beschriebenen Potentiale) formalisieren die Idee, ein Spiel durch irgendein anderes mit einer einzigen Funktion beschriebenes Optimierungsproblem zu ersetzen, dessen Optima Nash-Gleichgewichte im ursprünglichen Spiel sind. Im Falle eines Nash-Potentials entsprechen diese Optima sogar *allen* Nash-Gleichgewichten. Findet man nun ein solches Optimierungsproblem und kann von diesem zeigen, dass es immer ein Optimum besitzt (etwa weil es durch eine stetige Funktion beschrieben wird und der Strategieraum kompakt ist), so zeigt dies, dass das

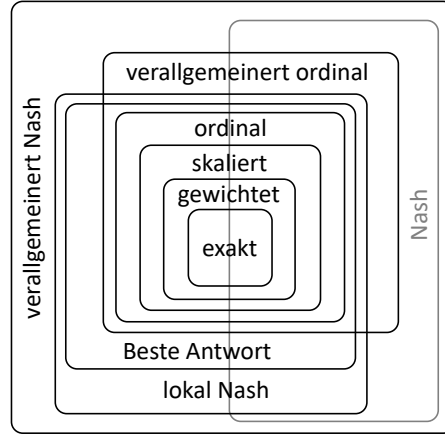


Abbildung 1: Beziehungen zwischen den einzelnen Potentialbegriffen

ursprüngliche Spiel mindestens ein Nash-Gleichgewicht besitzt. Außerdem lässt sich dieses durch Lösen des Optimierungsproblems bestimmen.

Versteht man zu einem gegebenen Strategieprofil  $x \in X$  dessen *Nachbarschaft* als die Menge aller durch höchstens einen Schritt erreichbarer Strategieprofile, d.h. die Menge  $\{(x \mid \hat{x}_i) \mid i \in I, \hat{x}_i \in X_i\}$ , so nennen wir  $x$  ein *lokales Minimum* einer Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn es ein Minimum innerhalb seiner Nachbarschaft ist. Ein lokales Nash-Potential beschreibt damit ein Optimierungsproblem, dessen *lokale* Minima den Nash-Gleichgewichten des Ausgangsspiels entsprechen.

Die Nachbarschaft eines Strategieprofils  $x$  besteht nun gerade aus den Profilen, die man mit  $x$  vergleichen muss, um festzustellen, ob es sich bei  $x$  um ein Nash-Gleichgewicht handelt. Hat man also ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  mit einem lokalen Nash-Potential  $P$ , so induziert dieses ein Koordinationsspiel  $K := (I, X, (P))$  auf dem selben Strategieraum, dessen Nash-Gleichgewichte gerade mit denen des Ausgangsspiels  $\Gamma$  übereinstimmen.

Weitere Spezialisierungen des Potentialbegriffs führen dann zu induzierten Koordinationsspielen, welche noch mehr Eigenschaften des Ausgangsspiels übernehmen: So hat das durch ein Beste-Antwort-Potential beschriebene Spiel etwa die gleichen Beste-Antwort-Pfade und eignet sich daher beispielsweise zur Analyse von Beste-Antwort-Dynamiken (vgl. Abschnitt 4.2). Durch ein ordinales Potential erhält man ein Spiel, welches auch die gleichen Verbesserungs- und Nichtverschlechterungspfade besitzt. Bei einem verallgemeinerten ordinalen Potential bleiben diese hingegen jeweils nur in eine Richtung erhalten: Ein Verbesserungspfad im Ausgangsspiel ist auch einer im Koordinationsspiel und ein Nichtverschlechterungspfad im Koordinationsspiel entspricht einem solchen im ursprünglichen Spiel (vgl. Satz 2.6 bzw. Proposition 3.24).

Für skalierte, gewichtete und exakte Potentiale gibt es eine noch anschaulichere Betrachtungsweise für den Fall (endlicher) 2-Personenspiele. Statt als Matrix kann man deren Strategieraum auch als Gitternetz in der Ebene auffassen, wobei jede Strategie von Spieler 1 einer waagerechten und jede Strategie von Spieler 2 einer senkrechten Gitterlinie

entspricht. Kreuzungspunkte von zwei Geraden entsprechen dann vollständigen Strategieprofilen und Kostenfunktionen (ebenso wie Potentiale) sind „Reliefkarten“, deren Höhe den jeweiligen Kosten entspricht.

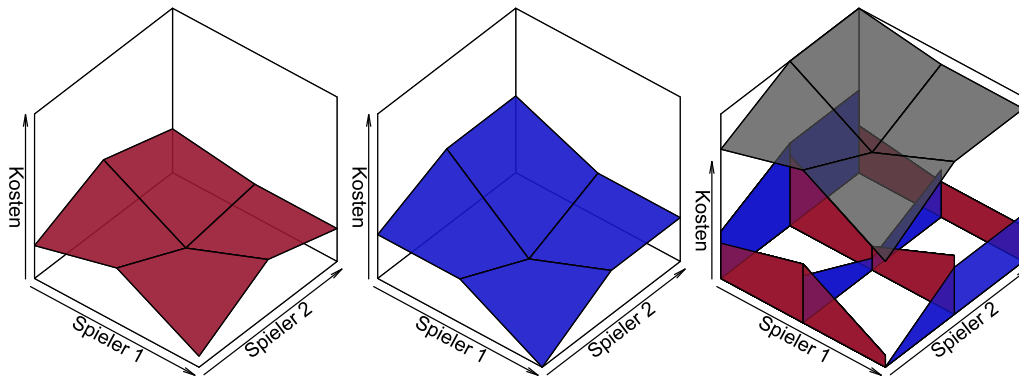


Abbildung 2: Ein 2-Personenspiel mit exaktem Potential (grau): Spieler 1: rot, Spieler 2: blau

Ein Potential ist in diesem Bild eine gemeinsame Reliefkarte für beide Spieler, die – im Falle eines exakten Potentials – „scheibenweise“ bis auf eine additive Konstante mit der eigentlichen Kostenfunktion übereinstimmt. Anders formuliert: Wird die Strategie eines Spielers festgehalten, so kann der andere Spieler seine Kostenveränderungen bei der Wahl der verschiedenen ihm zur Verfügung stehenden Strategien auch anhand der Potentialfunktion ablesen.

Geht man nun über zu einem skalierten Potential, so lesen die beiden Spieler das Potential sozusagen in verschiedenen Einheiten ab (müssen das Potential also erst noch passend skalieren um ihre tatsächliche Veränderung zu bekommen). Sind die Skalierungsfunktionen linear (das Potential damit ein gewichtetes), dann sind die verschiedenen Einheiten proportional zueinander.

## 2.3 Eigenschaften der Potentiale

Wir wollen hier noch einige Eigenschaften der verschiedenen Potentiale zusammenfassen – beweisen werden wir sie aber erst später.

**Satz 2.3.** *Es gelten die in Abbildung 1 dargestellten Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Potentials.*

Die Zusammenhänge lassen sich alle leicht direkt beweisen. Wir werden diese Beweise hier allerdings nicht führen, da sich die Aussagen auch aus den allgemeineren Sätzen über die entsprechenden Morphismen ergeben, die wir in Abschnitt 3 definieren werden (die Beweise finden sich dann in Abschnitt 3.2). Dass die unterschiedlichen Potentiale tatsächlich echt verschiedene Klassen von Spielen beschreiben, zeigen die folgenden Beispiele:

**Beispiel 2.4.** Es sei jeweils  $\gamma := ((t,l), (t,r), (b,r), (b,l))$  der 4-Zykel, der den Strategie-raum im Uhrzeigersinn durchläuft. Zum Beweis, dass ein Spiel ein bestimmtes Potential nicht besitzen kann, verwenden wir zum Teil bereits die entsprechenden Charakterisierungen aus Abschnitt 2.4.

- $\Gamma_1$  besitzt ein gewichtetes, aber kein exaktes Potential:

$$\Gamma_1 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & (0,0) & (0,0) \\ \hline b & (0,0) & (1,2) \end{array} \quad P_1 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & 1 \end{array}$$

$P_1$  ist ein gewichtetes Potential (mit Gewichtsvektor  $(1,2)$ ), aber  $\Gamma_1$  kann nach Satz 2.9 kein exaktes Potential besitzen, da die Pfadänderung  $\delta(\gamma) = 0+1-2+0 \neq 0$  ist.

- $\Gamma_2$  besitzt ein skaliertes, aber kein gewichtetes Potential:

$$\Gamma_2 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & (0,0) & (0,1) \\ \hline b & (1,0) & (2,1) \end{array} \quad P_2 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & 0 & 1 \\ \hline b & 1 & 2 \end{array}$$

$P_2$  ist ein skaliertes Potential (mit den Skalierungsfunktionen  $f_1(0) := 0, f_1(1) = 1, f_1(2) = 3$  und  $f_2 := \text{id}$ ).  $\Gamma_2$  kann aber kein gewichtetes Potential besitzen. Denn gäbe es ein solches und wäre  $w = (w_1, w_2)$  der zugehörige Gewichtsvektor, so würde nach Satz 2.11 für die gewichtete Pfadänderung gelten:

$$0 = \delta_w(\gamma) = w_2(1 - 0) + w_1(2 - 0) + w_2(0 - 1) + w_1(0 - 1) = w_1$$

Das wäre jedoch ein Widerspruch dazu, dass Gewichtsvektoren positiv sein müssen.

- $\Gamma_3$  besitzt ein ordinales, aber kein skaliertes Potential:

$$\Gamma_3 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & (0,0) & (0,0) \\ \hline b & (1,0) & (2,0) \end{array} \quad P_3 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & 0 & 0 \\ \hline b & 1 & 1 \end{array}$$

$P_3$  ist ein ordinales Potential,  $\Gamma_3$  besitzt aber kein skaliertes Potential. Denn wäre  $P$  ein solches skaliertes Potential, dann müsste wegen der strengen Monotonie der Skalierungsfunktion  $f_2$  gelten:

$$P(t,l) = P(t,r) \text{ und } P(b,l) = P(b,r)$$

Daraus ergäbe sich dann aber der folgende Widerspruch:

$$\begin{aligned} 1 = c_1(b,l) - c_1(t,l) &= f_1(P(b,l)) - f_1(P(t,l)) = \\ &= f_1(P(b,r)) - f_1(P(t,r)) = c_1(b,r) - c_1(t,r) = 2 \end{aligned}$$

Die folgenden drei Beispiele sind [Voo00, Beispiele 4.1, 4.2 und 4.3] entnommen:

- $\Gamma_4$  besitzt ein verallgemeinertes ordinales und ein Beste-Antwort-Potential, aber kein ordinales Potential:

		l	m	r
$\Gamma_4 :$	t	(1,2)	(2,0)	(2,1)
	b	(2,2)	(2,0)	(1,2)

		l	m	r
$P_4 :$	t	3	0	2
	b	4	0	1

$P_4$  ist sowohl ein verallgemeinertes ordinales als auch ein Beste-Antwort-Potential für  $\Gamma_4$ , ein ordinales Potential kann es allerdings nach Satz 2.15 nicht geben, da  $\gamma$  ein schwacher Verbesserungszykel ist.

- $\Gamma_5$  besitzt ein verallgemeinertes ordinales Potential, aber kein Beste-Antwort-Potential:

		l	r
$\Gamma_5 :$	t	(1,1)	(1,0)
	b	(1,0)	(0,1)

		l	r
$P_5 :$	t	3	2
	b	0	1

$P_5$  ist ein verallgemeinertes ordinales Potential für  $\Gamma_5$ . Ein Beste-Antwort-Potential hierzu kann es aber nach Satz 2.29 nicht geben, da  $\gamma$  ein schwacher Beste-Antwort-Verbesserungszykel ist.

- $\Gamma_6$  besitzt ein Beste-Antwort-Potential, aber kein verallgemeinertes ordinales Potential:

		l	m	r
$\Gamma_6 :$	t	(1,2)	(0,0)	(2,1)
	b	(2,1)	(2,2)	(1,2)

		l	m	r
$P_6 :$	t	1	0	4
	b	2	4	3

$P_6$  ist ein Beste-Antwort-Potential zu  $\Gamma_6$ , ein verallgemeinertes ordinales Potential kann es jedoch laut Korollar 2.25 nicht geben, da  $\gamma$  ein Verbesserungszykel ist.

Laut Definition wissen wir über verallgemeinerte Nash-Potentiale, dass jedes Minimum eines solchen Potentials ein Nash-Gleichgewicht des zugrunde liegenden Spiels ist. Da nun nach Satz 2.3 alle hier definierten Potentiale verallgemeinerte Nash-Potentiale sind, gilt dieser Zusammenhang auch für diese. Wir können daher Nash-Gleichgewichte allein durch Betrachten einer Potentialfunktion finden.

Daraus folgt direkt die Existenz von Nash-Gleichgewichten in einer Vielzahl von Potentialspielen, nämlich all diejenigen deren Potentialfunktion mindestens ein globales Minimum haben.

**Korollar 2.5.** *Sei  $\Gamma$  ein Spiel mit einem kompakten Strategieraum und einem stetigen verallgemeinerten Nash-Potential. Dann hat  $\Gamma$  wenigstens ein Nash-Gleichgewicht. Insbesondere haben endliche Potentialspiele immer ein Nash-Gleichgewicht.*

Wie bereits erwähnt bewahren ordinale Potentiale zudem auch Verbesserungspfade:

**Satz 2.6.** *Sei  $\Gamma$  ein Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential  $P$ . Dann ist jeder Verbesserungspfad in  $\Gamma$  auch ein Verbesserungspfad bezüglich  $P$ . Ist  $P$  sogar ein ordinales Potential, so gilt auch die umgekehrte Richtung.*

Analog zu diesem Satz gilt für Beste-Antwort-Pfade und Beste-Antwort-Potentiale:

**Satz 2.7.** *Sei  $\Gamma$  ein Spiel mit einem Beste-Antwort-Potential  $P$ . Dann ist jeder Beste-Antwort-(Verbesserungs-)Pfad in  $\Gamma$  auch ein Beste-Antwort-(Verbesserungs-)Pfad bezüglich  $P$  und umgekehrt.*

Tabelle 1 fasst einige der von Potentialen erhaltenen Eigenschaften zusammen.

	Nash-Gl.	FIP	Nichtverschl.pfad	Verb.pfad	Beste-Antwort-Pfad
exakt	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
gewichtet	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
skaliert	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
ordinal	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
verallg. ordinal	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
Beste Antwort	$\Leftrightarrow$				$\Leftrightarrow$
lokal Nash	$\Leftrightarrow$				

Tabelle 1: Welche Eigenschaft bleibt beim Übergang von einem Spiel auf das von einem entsprechenden Potential induzierte Koordinationsspiel erhalten ( $\Rightarrow$ ) und welche bei der umgekehrten Richtung ( $\Leftarrow$ )?

Für Spiele mit unendlicher Spielermenge wird sich im folgenden Abschnitt die Beobachtung als hilfreich erweisen, dass wir die meisten Potentiale pfadzusammenhangskomponentenweise definieren können:

*Beobachtung 2.8.* Sei  $\Gamma$  ein beliebiges Spiel und  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Erfüllt  $P$  dann die Bedingung eines exakten/ordinalen/verallgemeinerten ordinalen/Beste-Antwort/lokalen Nash-Potentials für jede (maximale) Pfadzusammenhangskomponente, so ist  $P$  ein entsprechendes Potential für ganz  $\Gamma$ .

Für gewichtete/skalierte Potentiale gilt die Aussage nur mit der Zusatzbedingung, dass die verschiedenen Teilpotentiale auf den Pfadzusammenhangskomponenten jeweils die gleichen Gewichte bzw. Skalierungsfunktionen verwenden.

*Beweis.* Die Beobachtung folgt direkt aus dem Umstand, dass die definierende Eigenschaft für alle aufgezählten Potentiale immer nur entlang eines Pfades (der Länge 1) und damit innerhalb einer Zusammenhangskomponente geprüft werden muss.  $\square$

## 2.4 Charakterisierungen der Potentiale

In diesem Abschnitt wollen wir für die zuvor beschriebenen Potentiale notwendige und hinreichende Anforderungen dafür finden, dass ein Spiel ein entsprechendes Potential besitzt.

### 2.4.1 Exakte Potentiale

**Satz 2.9.** *Ein Spiel besitzt genau dann ein exaktes Potential, wenn alle 4-Zykel im Strategieraum eine Gesamtänderung von 0 haben.*

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis aus [MS96, Anhang A]. Dort wird der Satz zwar nur für  $N$ -Personenspiele gezeigt (deren Strategieraum nach Beobachtung 1.20 eine einzige Zusammenhangskomponente ist), mit Beobachtung 2.8 überträgt sich dieser Beweis aber direkt auch auf allgemeine Spiele.

Sei zunächst  $\gamma := (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$  ein beliebiger 4-Zykel in einem Spiel mit exaktem Potential  $P$ . Dann gilt für die Gesamtänderung entlang dieses Pfades:

$$\delta(\gamma) = \sum_{k=1}^4 \left( c_{i(k)}(x^k) - c_{i(k)}(x^{k-1}) \right) = \sum_{k=1}^4 \left( P(x^k) - P(x^{k-1}) \right) = P(x^4) - P(x^0) = 0$$

Ist umgekehrt  $\Gamma$  ein Spiel, in dem für alle 4-Zykel  $\gamma$  gilt  $\delta(\gamma) = 0$ ,  $\hat{x}$  ein beliebiges, aber festes Strategieprofil in  $\Gamma$  und  $Y_{\hat{x}}$  dessen Pfadzusammenhangskomponente, dann definieren wir wie folgt eine Funktion  $P_{\hat{x}}$  auf  $Y_{\hat{x}}$ :

$$P_{\hat{x}} : Y_{\hat{x}} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \delta(\gamma), \gamma \text{ beliebiger Pfad von } \hat{x} \text{ nach } x$$

Damit diese Funktion tatsächlich wohldefiniert ist, muss für je zwei Pfade  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  von  $\hat{x}$  nach  $x$  gelten, dass die jeweiligen Gesamtänderungen gleich sind, d.h.  $\delta(\gamma_1) = \delta(\gamma_2)$ . Dies ist nach Beobachtung 1.14 äquivalent zu

$$\delta(\gamma_1 \cdot \overleftarrow{\gamma_2}) = 0.$$

Dazu zeigen wir nun mittels Induktion über deren Länge, dass für alle Zykel  $\mu$  gilt  $\delta(\mu) = 0$ :

**IA** ( $|\mu| = 4$ )<sup>3</sup> D.h.  $\mu$  ist ein 4-Zykel und damit  $\delta(\mu) = 0$  nach Voraussetzung.

**IS** ( $|\mu| =: n$ ) Vorausgesetzt es gibt einen Pfad  $\mu' = (x'^0, \dots, x'^n)$  gleicher Länge und Gesamtänderung wie  $\mu$ , sodass in den ersten beiden Schritten der gleiche Spieler seine Strategie wechselt, d.h.  $i(1) = i(2)$ . Dann erhält man durch Weglassen des ersten Schrittes einen *kürzeren* Pfad  $\mu'' := (x'^0, x'^2, \dots, x'^n)$  mit gleicher Gesamtänderung, welche dann nach Induktion bereits 0 ist. In diesem Fall haben wir dann wie gewünscht  $\delta(\mu) = \delta(\mu') = \delta(\mu'') = 0$ .

Die Existenz eines derartigen Pfades  $\mu'$  zeigen wir durch eine weitere Induktion über  $k := \min \{1 < l \leq n \mid i(l) = i(1)\}$ . Dieses  $k$  existiert immer, da Spieler  $i(1)$  bereits im ersten Schritt seine Strategie wechselt und dies daher im Verlauf des Zyklus noch mindestens ein weiteres Mal tun muss, damit der Zykel geschlossen werden kann.

---

<sup>3</sup>Zykel der Längen 1, 2 und 3 haben automatisch immer Gesamtänderung 0, da in ihnen alle Abweichungen vom gleichen Spieler vorgenommen werden müssen.

**IA ( $k = 2$ )** Dann gilt bereits  $i(1) = i(2)$  und wir sind fertig mit  $\mu' := \mu$ .

**IS ( $k - 1 \rightarrow k$ )** Wir ändern  $\mu$  so ab, dass Spieler  $i(1)$  schon im  $(k - 1)$ -ten Schritt der abweichende Spieler ist. Dann sind wir fertig nach Induktionsvoraussetzung. Dazu ersetzen wir in  $\mu$  das Strategieprofil  $x^{k-1}$  durch  $(x^{k-2} \mid x_{i(1)}^k)$ , sodass also Spieler  $i(1)$  bereits einen Schritt früher (im  $(k - 1)$ -ten) seine Strategie wechselt und der Spieler, der dies zuvor in diesem Schritt getan hat, einen Schritt später.

Bei dieser Anpassung bleibt die Gesamtänderung des Pfades  $\mu$  gleich, denn wir ersetzen lediglich ein Pfadstück der Länge 2 durch ein anderes Pfadstück der Länge 2. Und da sich diese beiden Pfade zu einem 4-Zykel zusammensetzen lassen, haben diese nach Voraussetzung und Beobachtung 1.14 die gleiche Gesamtänderung.

Auf das abgeänderte  $\mu$  können wir nun die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten dadurch einen neuen Pfad  $\mu'$  mit den gewünschten Eigenschaften.

Hiermit können wir auch den Induktionsschritt der äußeren Induktion und damit den Nachweis der Wohldefiniertheit von  $P_{\hat{x}}$  abschließen.

Wählen wir nun für jede maximale Pfadzusammenhangskomponente ein einziges  $\hat{x}$  in dieser und definieren wie oben eine Funktion  $P_{\hat{x}}$ , so lassen sich alle diese Funktionen zu einer Funktion  $P$  auf ganz  $X$  zusammensetzen. Nach Definition erfüllt diese auf jeder Pfadzusammenhangskomponente die Bedingung eines exakten Potentials. Also ist  $P$  mit Beobachtung 2.8 ein exaktes Potential auf  $X$ .  $\square$

Eine alternative Charakterisierung für die Existenz eines exakten Potentials zeigen Voorneveld u. a. in [Voo+99, Theorem 2.1]:

**Satz 2.10.** *Ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  besitzt genau dann ein exaktes Potential, wenn es ein Koordinationsspiel  $K = (I, X, (p))$  und ein Dummy-Spiel  $D = (I, X, (d_i))$  auf dem selben Strategieraum gibt, sodass die Kostenfunktionen in  $\Gamma$  die Summe der Kostenfunktionen aus  $K$  und  $D$  sind, d.h.  $c_i = p + d_i$ .*

*Beweis.* Ist  $\Gamma$  ein Spiel mit einem exakten Potential  $P$ , so definiert dieses ein Koordinationsspiel  $K := (I, X, (P))$ . Ferner ist  $D := (I, X, (P - c_i))$  ein dazu passendes Dummy-Spiel, denn es gilt für jeden Spieler  $i \in I$  und alle Strategieprofile/Strategien  $x \in X, \hat{x}_i \in X_i$ :

$$(P - c_i)(x) - (P - c_i)(x \mid \hat{x}_i) = (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)) - (c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i)) = 0$$

Daraus erhalten wir  $(P - c_i)(x) = (P - c_i)(x \mid \hat{x}_i)$ .

Umgekehrt haben sowohl ein Koordinations- als auch ein Dummy-Spiel ein exaktes Potential. Die Summe der beiden Potentialfunktionen ist dann ein exaktes Potential für die Summe der beiden Spiele.  $\square$



## 2.4.2 Gewichtete und skalierte Potentiale

**Satz 2.11.** *Ein Spiel besitzt genau dann ein gewichtetes Potential mit Gewichtsvektor  $w = (w_i)_{i \in I}$ , wenn die  $w$ -gewichtete Gesamtänderung entlang jedes 4-Zykels 0 ist, d.h. für jeden 4-Zykel  $\gamma := (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$  gilt:*

$$\delta_w(\gamma) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{w_{i(k)}} \left( c_{i(k)}(x^k) - c_{i(k)}(x^{k-1}) \right) = 0$$

Diese Charakterisierung folgt direkt aus der folgenden Beobachtung in [HKM11, Kapitel 3.2]:

*Beobachtung 2.12.* Zu einem Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  ist eine Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann ein gewichtetes Potential mit Gewichtsvektor  $w = (w_i)$ , wenn  $P$  ein exaktes Potential zum Spiel  $\Gamma_{1/w} := (I, X, (\frac{1}{w_i} c_i))$  ist.

*Beweis.* Für jedes Strategieprofil  $x \in X$ , jeden Spieler  $i \in I$  und jede Strategie  $\hat{x}_i$  gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = w_i \cdot (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)) \iff \frac{c_i(x)}{w_i} - \frac{c_i(x \mid \hat{x}_i)}{w_i} = P(x) - P(x \mid \hat{x}_i) \quad \square$$

Für skalierte Potentiale erhalten wir ganz analog zu Satz 2.10 eine Charakterisierung durch Zerlegen des Spiels in ein Dummy- und ein skaliertes Koordinationsspiel:

**Satz 2.13.** *Ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  besitzt genau dann ein skaliertes Potential, wenn es ein skaliertes Koordinationsspiel  $K = (I, X, (p_i))$  und ein Dummy-Spiel  $D = (I, X, (d_i))$  auf dem selben Strategieraum gibt, sodass die Kostenfunktionen in  $\Gamma$  die Summe der Kostenfunktionen aus  $K$  und  $D$  sind, d.h.  $c_i = p_i + d_i$ .*

*Beweis.* Ist  $\Gamma$  ein Spiel mit einem skalierten Potential  $P$  und entsprechenden Skalierungsfunktionen  $f_i$ , so erhält man ein skaliertes Koordinationsspiel  $K := (I, X, (f_i \circ P))$ . Ferner ist  $D := (I, X, (f_i \circ P - c_i))$  ein dazu passendes Dummy-Spiel, denn es gilt für jeden Spieler  $i \in I$  und alle Strategieprofile/Strategien  $x \in X, \hat{x}_i \in X_i$ :

$$(f_i \circ P - c_i)(x) - (f_i \circ P - c_i)(x \mid \hat{x}_i) = (f_i \circ P(x) - f_i \circ P(x \mid \hat{x}_i)) - (c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i)) = 0$$

Starten wir umgekehrt mit einem skalierten Koordinationsspiel  $K = (I, X, (f_i \circ P))$  und einem Dummy-Spiel  $D = (I, X, (d_i))$ , so ist  $P$  ein skaliertes Potential zu dem Spiel  $\Gamma := (I, X, (f_i \circ P + d_i))$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} (f_i \circ P + d_i)(x) - (f_i \circ P + d_i)(x \mid \hat{x}_i) &= (f_i \circ P)(x) - (f_i \circ P)(x \mid \hat{x}_i) + d_i(x) - d_i(x \mid \hat{x}_i) \\ &= (f_i \circ P)(x) - (f_i \circ P)(x \mid \hat{x}_i) \end{aligned} \quad \square$$

### 2.4.3 Ordinale Potentiale

**Definition 2.14.** Eine Menge  $X$  mit einer Relation  $\prec$  heißt *reell geordnet*<sup>4</sup>, wenn

- $\prec$  eine strikte Partialordnung ist (d.h. irreflexiv und transitiv) und
- es eine strikt monotone Abbildung von  $X$  in die reellen Zahlen gibt, also eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \prec x' \implies f(x) < f(x')$ .

Wir definieren ferner eine Äquivalenzrelation auf dem Strategieraum:

$$x \approx y : \iff \text{es gibt einen Nichtverschlechterungspfad von } x \text{ nach } y \text{ und umgekehrt}$$

Auf dem dadurch erzeugten Raum von Äquivalenzklassen  $X/\approx := \{[x] \mid x \in X\}$  erhält man eine transitive Ordnung

$$[x] \prec_{\uparrow} [y] : \iff \text{es gibt einen schwachen Verbesserungspfad von } y \text{ nach } x$$

Sowohl Wohldefiniertheit als auch Transitivität dieser Relation ergeben sich aus der Beobachtung, dass die Verknüpfung eines Nichtverschlechterungspfades mit einem schwachen Verbesserungspfad wieder einen schwachen Verbesserungspfad bildet.

Damit zeigen Voorneveld und Norde in [VN97, Theorem 3.1] folgende Charakterisierung der Existenz von ordinalen Potentialen:

**Satz 2.15.** *Ein Spiel besitzt genau dann ein ordinales Potential, wenn  $(X/\approx, \prec_{\uparrow})$  reell geordnet ist.*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zwei Propositionen:

**Proposition 2.16.**  *$\prec_{\uparrow}$  ist genau dann eine strikte Partialordnung auf  $X/\approx$ , wenn  $X$  keine schwachen Verbesserungszykel enthält.*

*Beweis.* Wie wir bereits gesehen haben, ist  $\prec_{\uparrow}$  immer transitiv. Es bleibt also die Irreflexivität der Relation zu zeigen. Dazu genügt die Beobachtung, dass für ein Strategieprofil  $x \in X$  genau dann  $[x] \prec_{\uparrow} [x]$  gilt, wenn es einen schwachen Verbesserungspfad von  $x$  nach  $x$  gibt, was gerade einem schwachen Verbesserungszykel entspricht.  $\square$

**Proposition 2.17.** *Hat ein Spiel  $\Gamma$  ein ordinales Potential  $P$ , so gibt es in  $\Gamma$  keine schwachen Verbesserungszykel.*

*Beweis.* Angenommen  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$  wäre ein schwacher Verbesserungszykel in  $\Gamma$ , so gilt für alle  $0 < k \leq n$ :  $c_{i(k)}(x^k) \leq c_{i(k)}(x^{k-1})$  und für ein solches  $k$  sogar  $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$ . Da ferner  $P$  ein ordinales Potential ist, folgt daraus:

$$P(x^0) \geq P(x^1) \geq \dots \geq P(x^{k-1}) > P(x^k) \geq \dots \geq P(x^n) = P(x^0)$$

---

<sup>4</sup>Voorneveld und Norde bezeichnen solche Mengen in [VN97] als „properly ordered“

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Also kann es keinen solchen Verbesserungszykel geben.  $\square$

*Beweis von Satz 2.15.* Sei zunächst  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein ordinales Potential eines Spiels  $\Gamma$ . Nach Proposition 2.17 gibt es in  $X$  dann keine schwachen Verbesserungszykel, woraus mit Proposition 2.16 folgt, dass  $\prec_{\uparrow}$  eine strikte Partialordnung ist.

Wir definieren ferner die Abbildung  $f : X/\approx \rightarrow \mathbb{R} : [x] \mapsto P(x)$ . Diese ist wohldefiniert, denn ist  $y \in [x]$ , so gibt es Nichtverschlechterungspfade von  $x$  nach  $y$  und umgekehrt. Zusammen bilden diese einen Nichtverschlechterungszykel und da es keine schwachen Verbesserungszykel in  $\Gamma$  gibt, muss in diesem Zykel (und damit auch in den beiden Pfaden) in jedem Schritt Gleichheit gelten. Insbesondere folgt damit  $P(x) = P(y)$ .

Ferner ist diese Abbildung streng monoton, denn gilt  $[x] \prec_{\uparrow} [y]$ , so gibt es einen schwachen Verbesserungspfad  $\gamma$  von  $y$  nach  $x$ . Damit folgt analog zum Beweis von Proposition 2.17  $P(x) < P(y)$ , also nach Definition  $f([x]) < f([y])$ .

Ist umgekehrt  $(X/\approx, \prec_{\uparrow})$  reell-geordnet mit Abbildung  $f : X/\approx \rightarrow \mathbb{R}$ , so definieren wir die Abbildung  $P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f([x])$ . Diese ist ein ordinales Potential, denn:

1. Gilt  $c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i)$ , so ist  $(x, (x \mid \hat{x}_i))$  ein schwacher Verbesserungspfad, also  $[(x \mid \hat{x}_i)] \prec_{\uparrow} [x]$ . Daraus wiederum folgt  $P(x) = f([x]) > f([(x \mid \hat{x}_i)]) = P(x \mid \hat{x}_i)$ .
2. Gilt  $c_i(x) = c_i(x \mid \hat{x}_i)$ , so sind sowohl  $(x, (x \mid \hat{x}_i))$  als auch  $((x \mid \hat{x}_i), x)$  Nichtverschlechterungspfade, also  $[x] = [(x \mid \hat{x}_i)]$  und  $P(x) = f([x]) = f([(x \mid \hat{x}_i)]) = P(x \mid \hat{x}_i)$ .  $\square$

In dieser Form ist dies noch eine wenig hilfreiche Charakterisierung, denn um zu zeigen, dass der Strategieraum reell geordnet ist, muss man im Wesentlichen bereits die Potentialfunktion angeben. Allerdings erhält man daraus mit Hilfe der folgenden Propositionen einfachere Charakterisierungen für gewisse Teilklassen von Spielen:

**Proposition 2.18.** *Jede abzählbare Menge mit einer strikten Partialordnung ist bereits reell geordnet.*

Ein Beweis dazu findet sich in [VN97, Lemma 2.2]. Voorneveld und Norde zitieren dort sogar ein noch allgemeineres Resultat, nach dem es bereits genügt, wenn die partiell geordnete Menge eine bezüglich dieser Ordnung dichte, abzählbare Teilmenge hat.

**Korollar 2.19.** *Ein Spiel mit abzählbarem Strategieraum besitzt genau dann ein ordinales Potential, wenn der Strategieraum keine schwachen Verbesserungszykel enthält.*

*Beweis.* Nach Proposition 2.18 ist jede abzählbare Menge mit einer strikten Partialordnung bereits reell geordnet. Also macht  $\prec_{\uparrow}$  die abzählbar große Menge  $X/\approx$  genau dann zu einer reell geordneten Menge, wenn  $\prec_{\uparrow}$  eine strikte Partialordnung ist. Und dies ist nach Proposition 2.16 genau dann der Fall, wenn das Spiel keine schwachen Verbesserungszykel enthält.  $\square$

Laut Beobachtung 2.8 gilt diese Charakterisierung sogar wieder für die größere Klasse der Spiele mit abzählbar großen Pfadzusammenhangskomponenten. Insbesondere gilt damit:

**Korollar 2.20.** *Ein Spiel mit abzählbar vielen Spielern und abzählbar großen spieler-spezifischen Strategieräumen besitzt genau dann ein ordinales Potential, wenn es keine schwachen Verbesserungszykel enthält.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass in einem solchen Spiel jede Pfadzusammenhangskomponente abzählbar groß ist. Seien dazu  $x \in X$  und  $n \in \mathbb{N}^*$  beliebig. Dann ist

$$Y_x^n := \{ y \in X \mid \text{es existiert ein Pfad der Länge } n \text{ von } x \text{ nach } y \},$$

die Menge aller von  $x$  aus durch Pfade der Länge  $n$  erreichbaren Strategieprofile, abzählbar. Es gilt nämlich induktiv:

**IA ( $n = 1$ )** Die Menge

$$\begin{aligned} Y_x^1 &= \{ y \in X \mid \exists i \in I : y = (x \mid y_i) \} = \\ &= \{ (x \mid y_i) \mid i \in I, y_i \in Y_i \} = \bigcup_{i \in I} \{ (x \mid y_i) \mid y_i \in Y_i \} \end{aligned}$$

ist eine abzählbare Vereinigung (da die Spielermenge abzählbar ist) von abzählbar großen Mengen (den spieler-spezifischen Strategieräumen), also selbst abzählbar groß.

**IS ( $n - 1 \rightarrow n$ )** Es ist

$$Y_x^n = \bigcup_{y \in Y_x^{n-1}} Y_y^1$$

eine (nach Induktionsvoraussetzung) abzählbare Vereinigung abzählbar großer Mengen (nach Induktionsanfang) und daher selbst wieder abzählbar.

Folglich ist auch  $Y_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_x^n$  abzählbar und besitzt wegen Korollar 2.19 ein ordinales Potential.  $\square$

*Bemerkung 2.21.* Im Gegensatz zur Charakterisierung von exakten Potentialspielen in Satz 2.9 genügt es für die Existenz eines ordinalen Potentials nicht, nur Zykel der Länge 4 zu betrachten. Voorneveld und Norde geben dafür in [VN97, Beispiel 3.1] ein Gegenbeispiel mit zwei Spielern und je drei Strategien an.

#### 2.4.4 Verallgemeinerte ordinale Potentiale

Vollkommen analog zu Satz 2.15 erhält man unter Verwendung der Relation

$$x <_{\uparrow} y : \Longleftrightarrow \text{es gibt einen Verbesserungspfad der Länge } \geq 1 \text{ von } y \text{ nach } x$$

eine Charakterisierung der Existenz eines verallgemeinerten ordinalen Potentials:

**Satz 2.22.** *Ein Spiel besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn  $(X, <_{\uparrow})$  reell geordnet ist.*

Zum Beweis benötigen wir die folgenden Propositionen:

**Proposition 2.23.** *Die Relation  $<_{\uparrow}$  ist genau dann eine strikte Partialordnung, wenn  $\Gamma$  keine Verbesserungszykel enthält.*

*Beweis.* Da die Verknüpfung eines Verbesserungspfades von  $z$  nach  $y$  mit einem von  $y$  nach  $x$  einen Verbesserungspfad von  $z$  nach  $x$  ergibt, ist  $<_{\uparrow}$  automatisch immer transitiv.

Ferner ist  $<_{\uparrow}$  genau dann irreflexiv, wenn für alle  $x \in X$  gilt, dass  $x \not<_{\uparrow} x$  ist, es also keinen Verbesserungspfad von  $x$  nach  $x$  gibt. Und letzteres entspricht gerade einem (bei  $x$  beginnenden) Verbesserungszykel.  $\square$

**Proposition 2.24.** *Hat ein Spiel  $\Gamma$  ein verallgemeinertes ordinales Potential  $P$ , so gibt es in dessen Strategieraum  $X$  keine Verbesserungszykel.*

*Beweis.* Angenommen  $\Gamma$  enthielte einen Verbesserungszykel  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$ . Da  $P$  ein verallgemeinertes ordinales Potential ist, wäre  $\gamma$  dann nach Satz 2.6 auch ein Verbesserungszykel bezüglich  $P$  und daher  $P(x^0) > P(x^1) > \dots > P(x^n) = P(x^0)$ , ein Widerspruch. Also kann es keinen solchen Verbesserungszykel geben  $\square$

*Beweis von Satz 2.22.* Ist  $(X, <_{\uparrow})$  reell geordnet mit streng monotoner Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , so sieht man direkt, dass  $f$  auch ein verallgemeinertes Potential ist. Denn für  $x \in X, \hat{x}_i \in X_i$  mit  $c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i)$  ist  $(x, (x \mid \hat{x}_i))$  ein Verbesserungspfad, also  $(x \mid \hat{x}_i) <_{\uparrow} x$  und damit  $f(x \mid \hat{x}_i) < f(x)$ .

Haben wir hingegen ein Spiel  $\Gamma$  mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential  $P$ , so ist  $(X, <_{\uparrow})$  reell geordnet, denn:

1.  $<_{\uparrow}$  ist eine strikte Partialordnung auf  $X$ : Nach Proposition 2.24 enthält  $X$  keine Verbesserungszykel, womit wir aus Proposition 2.23 folgern können, dass  $<_{\uparrow}$  tatsächlich eine strikte Partialordnung ist.
2.  $(X, <_{\uparrow})$  ist reell geordnet durch die Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Gilt nämlich  $x <_{\uparrow} y$ , so gibt es also einen Verbesserungspfad von  $y$  nach  $x$ . Da  $P$  ein verallgemeinertes ordinales Potential ist, ist dies nach Satz 2.6 auch ein Verbesserungspfad bezüglich  $P$  und folglich gilt  $P(y) > P(x)$ . Damit ist  $P$  streng monoton auf  $(X, <_{\uparrow})$ .  $\square$

Erneut können wir daraus für „kleine“ Spiele einfachere Charakterisierungen erhalten (die Beweise sind völlig analog zu denen von Korollar 2.19 und Korollar 2.20):

**Korollar 2.25.** *Ein Spiel mit abzählbarem Strategieraum besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es keine Verbesserungszykel enthält.*

**Korollar 2.26.** *Ein Spiel mit abzählbar vielen Spielern und abzählbar großen playerspezifischen Strategieräumen besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es keine Verbesserungszykel enthält.*

Beschränkt man sich sogar auf die Klasse der endlichen Spielen, so erhält man die (auf anderem Wege) erstmals von Monderer und Shapley in [MS96, Lemma 2.5] gezeigte Charakterisierung der Existenz von verallgemeinerten ordinalen Potentialen:

**Korollar 2.27.** *Ein endliches Spiel besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es die FIP besitzt.*

*Beweis.* In einem Spiel mit endlichem Strategieraum sind unendliche Verbesserungspfade genau die Verbesserungszykel. Damit folgt die Aussage direkt aus Korollar 2.25.  $\square$

*Bemerkung 2.28.* Möchte man in den oben beschriebenen Fällen eine konkrete Potentialfunktion angeben, so kann man dies analog zu einer alternativen, konstruktiven Beweisidee für endliche Spiele aus [Mil96, Abschnitt 5] tun:

Sei dazu  $\Gamma$  ein Spiel mit abzählbarem Strategieraum  $X := \{x^1, x^2, \dots\}$  (bzw. entsprechender Pfadzusammenhangskomponente) und ohne Verbesserungszykel. Definiere die Funktion  $h : X \rightarrow \mathbb{R} : x^k \mapsto 2^{-k}$  sowie für jedes Strategieprofil  $x \in X$  die Menge  $Y_{>x} := \{y \in X \mid \exists \text{ Verbesserungspfad von } y \text{ nach } x\}$  und mit deren Hilfe das verallgemeinerte ordinale Potential

$$P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1 - \sum_{y \in Y_{>x}} h(y)$$

*Beweis.* Diese Funktion ist wohldefiniert, da  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$  absolut konvergiert. Sie ist außerdem ein verallgemeinertes ordinales Potential, denn gilt  $c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i)$  so ist  $(x, (x \mid \hat{x}_i))$  ein Verbesserungspfad. Damit gilt offenkundig  $Y_{>x} \subseteq Y_{>(x \mid \hat{x}_i)}$  und außerdem  $x \notin Y_{>x}$ , da es in  $\Gamma$  keine Verbesserungszykel gibt. Damit folgt:

$$P(x) = 1 - \sum_{y \in Y_{>x}} h(y) > 1 - \sum_{y \in Y_{>(x \mid \hat{x}_i)}} h(y) - h(x) \geq 1 - \sum_{y \in Y_{>(x \mid \hat{x}_i)}} h(y) = P(x \mid \hat{x}_i) \quad \square$$

## 2.4.5 Beste-Antwort-Potentiale

Ebenfalls analog zur Charakterisierung für ordinale Potentiale zeigt Voorneveld in [Voo00, Theorem 3.1] eine solche für Beste-Antwort-Potentiale. Dazu verwenden wir die Äquivalenzrelation

$$x \approx^* y : \Longleftrightarrow \text{ es gibt einen Beste-Antwort-Pfad von } x \text{ nach } y \text{ und umgekehrt.}$$

Auf dem dadurch erzeugten Raum von Äquivalenzklassen  $X/\approx^* := \{[x] \mid x \in X\}$  erhalten wir die transitive Ordnung

$$[x] \prec^* [y] : \Longleftrightarrow \text{ es gibt einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungspfad von } y \text{ nach } x$$

**Satz 2.29.** *Ein Spiel, in dem jeder Spieler zu jedem Strategieprofil wenigstens eine beste Antwort zur Verfügung hat, besitzt genau dann ein Beste-Antwort-Potential, wenn  $(X/\approx^*, \prec^*)$  reell geordnet ist.*

**Proposition 2.30.** *Die Relation  $\prec^*$  ist genau dann eine strikte Partialordnung auf  $X/\approx^*$ , wenn  $\Gamma$  keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel enthält.*

*Beweis.* Für ein Strategieprofil  $x \in X$  gilt genau dann  $[x] \prec^* [x]$  gilt, wenn es einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungspfad von  $x$  nach  $x$  gibt, was gerade einem schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel entspricht.  $\square$

**Proposition 2.31.** *Hat ein Spiel  $\Gamma$  ein Beste-Antwort-Potential  $P$ , so gibt es in dessen Strategieraum  $X$  keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel.*

*Beweis.* Angenommen  $\Gamma$  enthielte einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$ , so wäre für alle  $0 < k \leq n$

$$c_{i(k)}(x^k) = \min_{\hat{x}_{i(k)} \in X_{i(k)}} c_{i(k)}(x^{k-1} \mid \hat{x}_{i(k)})$$

und, da  $P$  ein Beste-Antwort-Potential ist, ebenso

$$P(x^k) = \min_{\hat{x}_{i(k)} \in X_{i(k)}} P(x^{k-1} \mid \hat{x}_{i(k)}) \leq P(x^{k-1}).$$

Ferner gilt für ein solches  $k$  sogar  $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$ , also auch  $P(x^k) < P(x^{k-1})$  (da  $x_{i(k)}^{k-1}$  keine beste Antwort auf  $x^{k-1}$  ist). Zusammen folgt daher

$$P(x^0) \leq P(x^1) \leq \dots \leq P(x^k) < P(x^{k-1}) \leq \dots \leq P(x^n) = P(x^0).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Also kann es keinen solchen Verbesserungszykel geben.  $\square$

*Beweis von Satz 2.29.* Sei zunächst  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein Beste-Antwort-Potential eines Spiels  $\Gamma$ . Dann gibt es in  $\Gamma$  laut Proposition 2.31 keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel und daher ist  $\prec^*$  nach Proposition 2.30 eine strikte Partialordnung auf  $X/\approx^*$ .

Ferner ist  $(X/\approx^*, \prec^*)$  reell geordnet. Definiere dazu die Abbildung

$$f : X/\approx^* \rightarrow \mathbb{R} : [x] \mapsto P(x).$$

Diese ist wohldefiniert, denn ist  $y \in [x]$ , so gibt es Beste-Antwort-Pfade von  $x$  nach  $y$  und umgekehrt. Zusammen bilden diese einen Beste-Antwort-Zykel und da es keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel in  $\Gamma$  gibt, muss in diesem Zykel (und damit bereits in den beiden Pfaden) in jedem Schritt Gleichheit gelten. Insbesondere folgt damit  $P(x) = P(y)$ .

Schließlich ist diese Abbildung streng monoton, denn gilt  $[x] \prec_{\uparrow} [y]$ , so gibt es einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungspfad  $\gamma$  von  $y$  nach  $x$ . Damit folgt analog zum Beweis von Proposition 2.31  $P(x) < P(y)$ , also auch  $f([x]) < f([y])$ .

Ist umgekehrt  $\Gamma$  ein Spiel, für das  $(X/\approx^*, \prec^*)$  reell geordnet ist mit einer streng monotonen Abbildung  $f : X/\approx^* \rightarrow \mathbb{R}$ , so definiere  $P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f([x])$ . Dies ist ein Beste-Antwort-Potential, denn es gilt  $\arg \min_{x'_i \in X_i} c_i(x | x'_i) = \arg \min_{x'_i \in X_i} P(x | x'_i)$  für alle Strategieprofile  $x \in X$  und Spieler  $i \in I$ :

„ $\subseteq$ “: Ist  $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x | \hat{x}_i)$ , so ist also  $\hat{x}_i$  insbesondere auch eine beste Antwort auf alle Strategieprofile  $(x | x'_i)$  für  $x'_i \in X_i$ .

**1. Fall:** Gilt  $c_i(x | \hat{x}_i) < c_i(x | x'_i)$ , so ist  $((x | x'_i), (x | \hat{x}_i))$  ein Beste-Antwort-Verbesserungspfad, also  $[(x | \hat{x}_i)] \prec^* [(x | x'_i)]$  und damit erhalten wir wie gewünscht  $P(x | \hat{x}_i) = f([(x | \hat{x}_i)]) < f([(x | x'_i)]) = P(x | x'_i)$ .

**2. Fall:** Gilt  $c_i(x | \hat{x}_i) = c_i(x | x'_i)$ , so sind sowohl  $((x | x'_i), (x | \hat{x}_i))$  als auch  $((x | \hat{x}_i), (x | x'_i))$  Beste-Antwort-Pfade und folglich  $(x | x'_i) \approx^* (x | \hat{x}_i)$ . Somit folgt  $P(x | \hat{x}_i) = f([(x | \hat{x}_i)]) = f([(x | x'_i)]) = P(x | x'_i)$ .

Insgesamt haben wir so für alle  $x'_i \in X_i$  gezeigt, dass  $P(x | \hat{x}_i) \leq P(x | x'_i)$  und daher  $\hat{x}_i \in \arg \min_{x'_i \in X_i} P(x | x'_i)$  gilt.

„ $\supseteq$ “: Sei  $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} P(x | \hat{x}_i)$ . Angenommen es wäre  $\hat{x}_i \notin \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x | \hat{x}_i)$ , d.h. es gäbe eine beste Antwort  $x'_i \in X_i$  auf  $x$  mit  $c_i(x | x'_i) < c_i(x | \hat{x}_i)$ . Dann wäre  $((x | \hat{x}_i), (x | x'_i))$  ein Beste-Antwort-Verbesserungspfad und daher  $[(x | x'_i)] \prec^* [(x | \hat{x}_i)]$ . Somit wäre auch  $P(x | x'_i) = f([(x | x'_i)]) < f([(x | \hat{x}_i)]) = P(x | \hat{x}_i)$ , im Widerspruch zu  $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} P(x | \hat{x}_i)$ . Also gibt es kein solches  $x'_i$  und es gilt  $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x | \hat{x}_i)$ .  $\square$

*Bemerkung 2.32.* In [Voo00] wird Satz 2.29 für allgemeine Spiele (also ohne die Zusatzvoraussetzung der Existenz bester Antworten) formuliert. Es ist allerdings nicht klar wie der Beweis von  $\arg \min_{x'_i \in X_i} c_i(x | x'_i) \supseteq \arg \min_{x'_i \in X_i} P(x | x'_i)$  in der Rückrichtung ohne diese Voraussetzung gelten kann. Denn wenn  $x'_i$  an dieser Stelle nur eine bessere, aber nicht notwendigerweise beste Antwort sein muss, so ist  $((x | \hat{x}_i), (x | x'_i))$  im Allgemeinen kein Beste-Antwort-Pfad und daher auch nicht zwangsläufig  $[(x | x'_i)] \prec^* [(x | \hat{x}_i)]$ .

Das folgende Beispiel enthält genau einen solchen Fall und ist damit zwar kein Gegenbeispiel zu dem in [Voo00] gezeigten Satz, aber zu dem dort geführten Beweis hierzu:

**Beispiel 2.33.** Wir betrachten das 1-Personenspiel  $\Gamma := (\{*\}, \mathbb{Z}, (\text{id}))$ . Dieses hat offensichtlich ein exaktes und damit erst recht Beste-Antwort-Potential, es steht aber trotzdem im Widerspruch zu obigem Beweis. Da es keinerlei beste Antworten besitzt, ist nämlich  $\mathbb{Z}/\approx^* = \mathbb{Z}$  und  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto 0$  zeigt, dass der Strategieraum reell geordnet ist. Aber im Gegensatz zur Aussage in obigem Beweis liefert  $f$  kein Beste-Antwort-Potential für  $\Gamma$ .



## 2.4.6 Nash-Potentiale

Die Existenz eines verallgemeinerten Nash-Potentials (und gleichzeitig auch der anderen beiden Nash-Potentiale) schließlich lässt sich für endliche Spiele trivialerweise dadurch charakterisieren, dass das entsprechende Spiel ein Nash-Gleichgewicht besitzt. Unendliche Spiele auf der anderen Seite besitzen sogar immer alle Nash-Potentiale.

*Beobachtung 2.34.* Wie bereits in Beobachtung 1.2 festgestellt ist der Strategieprofilraum  $X := \prod_{i \in I} X_i$  eines Spiels genau dann endlich, wenn alle Strategiemengen  $X_i$  endlich sind und nur endlich viele davon mehr als eine Strategie enthalten. Umgekehrt muss ein Spiel mit unendlich großem Strategieprofilraum mindestens eine unendlich große Strategiemenge oder aber unendlich viele Spieler mit zwei oder mehr Strategien haben.

In beiden Fällen enthält automatisch jede Pfadzusammenhangskomponente einen Pfad unendlicher Länge ohne Wiederholungen: Entweder indem ein Spieler unendlich oft seine Strategie wechselt oder unendlich viele verschiedene Spieler nacheinander je einmal ihre Strategie ändern. Insbesondere sind in diesem Fall auch alle Pfadzusammenhangskomponenten unendlich groß.

Wir können damit den folgenden Charakterisierungssatz für Nash-Potentiale zeigen:

**Satz 2.35.** *Ein Spiel besitzt genau dann ein Nash-Potential/verallgemeinertes/lokales Nash-Potential, wenn alle endlichen Pfadzusammenhangskomponenten mindestens ein Nash-Gleichgewicht besitzen.*

*Beweis.* Auf jeder Pfadzusammenhangskomponente, welche mindestens ein Nash-Gleichgewicht enthält, können wir folgendes lokale Nash-Potential und Nash-Potential definieren:

$$P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \min \{ |\gamma| \mid \gamma \text{ (endlicher) Pfad von } x \text{ zu einem Nash-Gleichgewicht} \}$$

Denn die Nash-Gleichgewichte sind nun genau die Strategieprofile mit  $P(x) = 0$  und für alle anderen Strategieprofile fällt das Potential entlang jedes kürzesten Pfades zum nächsten Nash-Gleichgewicht in jedem Schritt strikt ab (befindet sich also insbesondere nicht in einem (lokalen) Minimum).

Für unendliche Pfadzusammenhangskomponenten *ohne* Nash-Gleichgewicht können wir ferner wie folgt ein lokales Nash-Potential und Nash-Potential finden. Wir wählen einen festen, unendlichen Pfad  $\hat{\gamma} = (x^0, x^1, \dots)$  in dieser Zusammenhangskomponente, welcher kein Strategieprofil mehrfach enthält. Dann definieren wir:

$$P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1/k, & x = x^{k-1} \text{ auf dem Pfad } \hat{\gamma} \\ \min \{ |\gamma| \mid \gamma \text{ Pfad von } x \text{ zu einem Profil auf } \hat{\gamma} \}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion besitzt keine (lokalen) Minima und erfüllt daher trivialerweise alle Bedingungen an die verschiedenen Nash-Potentiale.

Nicht einmal ein verallgemeinertes Nash-Potential besitzt ein Spiel hingegen dann, wenn es eine endliche Pfadzusammenhangskomponente ohne Nash-Gleichgewichte enthält<sup>5</sup>. Denn gäbe es ein solches, so würde es auch ein (globales) Minimum annehmen und dieses müsste folglich einem Nash-Gleichgewicht in der Zusammenhangskomponente entsprechen.  $\square$

Diese Charakterisierung zeigt gleichzeitig, warum allgemeine Potentiale für endliche Spiele so interessant, aber für unendliche Spiele deutlich weniger interessant sind.

#### 2.4.7 Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung aller in diesem Abschnitt beschriebenen Charakterisierungen findet sich in Tabelle 2

---

<sup>5</sup>Tatsächlich besitzt ein Spiel genau dann eine (und in diesem Fall auch nur eine) endliche Pfadzusammenhangskomponente, wenn es selbst schon endlich ist. Denn um einen unendlichen Strategieprofilraum besitzen zu können, muss es mindestens einen Spieler mit unendlichem Strategieraum oder unendlich viele Spieler mit mehr als einer Strategie geben. Beides führt nach Beobachtung 2.34 automatisch dazu, dass alle Pfadzusammenhangskomponenten unendlich groß sind.

Ein Spiel  $\Gamma$  hat ein...

exaktes Potential	$\iff$	f.a. 4-Zykel $\gamma$ ist $\delta(\gamma) = 0$	(Satz 2.9)
	$\iff$	die Kostenfunktionen von $\Gamma$ lassen sich als Summe der Kostenfunktionen eines Dummyspiels und eines Koordinationsspiels darstellen.	(Satz 2.10)
gewichtetes Potential	$\iff$	es gibt einen positiven Gewichtsvektor $w$ , sodass f.a. 4-Zykel $\gamma$ gilt $\delta_w(\gamma) = 0$	(Satz 2.11)
	$\iff$	es gibt einen positiven Gewichtsvektor $w$ , sodass $\Gamma_{1/w}$ ein exaktes Potential besitzt.	(Beob. 2.12)
skaliertes Potential	$\iff$	die Kostenfunktionen von $\Gamma$ lassen sich als Summe der Kostenfunktionen eines Dummyspiels und eines skalierten Koordinationsspiels darstellen.	(Satz 2.13)
ordinales Potential	$\iff$	$(X/\approx, \prec_\uparrow)$ ist reell geordnet	(Satz 2.15)
-für $I$ und $X_i$ abzählbar:	$\iff$	$\Gamma$ enthält keine schwachen Verbesserungszykel	(Kor. 2.20)
verallg. ord. Potential	$\iff$	$(X, \prec_\uparrow)$ ist reell geordnet	(Satz 2.22)
-für $I$ und $X_i$ abzählbar:	$\iff$	$\Gamma$ enthält keine Verbesserungszykel	(Kor. 2.26)
-für $\Gamma$ endlich:	$\iff$	$\Gamma$ hat FIP	(Kor. 2.27)
Beste-Antwort-Potential	$\Leftarrow$	es existieren immer beste Antworten und $(X/\approx^*, \prec^*)$ ist reell geordnet	(Satz 2.29)
	$\Rightarrow$	$(X/\approx^*, \prec^*)$ ist reell geordnet	(Satz 2.29)
(lok/verallg.) Nash-Potential	$\iff$	jede endliche Pfadzusammenhangskomponente besitzt mindestens ein Nash-Gleichgewicht	(Satz 2.35)

Tabelle 2: Übersicht der Charakterisierungen der Existenz von Potentialen aus diesem Abschnitt

### 3 Morphismen und Isomorphismen von Spielen

Wie wir im vorherigen Kapitel gesehen haben, definieren Potentiale ein Koordinationsspiel, welches in einer „gewissen Beziehung“ zum Ausgangsspiel steht (etwa die gleichen Nash-Gleichgewichte besitzt). Genau diese Beziehung wollen wir nun mit Hilfe eines Morphismus bzw. eines Isomorphismus zwischen den beiden Spielen präziser beschreiben. Die Eigenschaften, die Ausgangs- und Koordinationsspiel gemeinsam haben, sind dann genau die, die von den jeweiligen (Iso-)Morphismen bewahrt werden. Umgekehrt ist es auch möglich, zuerst bestimmte Arten von Isomorphismen zu definieren und daraus dann neue Potentialbegriffe zu gewinnen, wie das beispielsweise in [MU04, Definitionen 5/6] getan wird.

Darüber hinaus helfen Morphismen auch dabei, andere Beziehungen zwischen verschiedenen Spielen zu verstehen. Bereits Nash verwendet in [Nas51, S. 288f] den Begriff eines Automorphismus (bzw. einer Symmetrie) von Spielen. Auch die von Monderer und Shapley in [MS96, Theorem 3.2] gefundene Äquivalenz von Auslastungsspielen und Spielen mit exaktem Potential wird durch einen passenden Isomorphiebegriff beschrieben. Und in Abschnitt 4 werden wir später noch weitere Beispiele für derartige Verbindungen kennenlernen. Schließlich ist es aus kategorientheoretischer Sicht auch allgemein interessant, die Morphismen der Kategorie, in der man arbeitet, zu verstehen, da diese die Struktur dieser Kategorie festlegen und etwa dazu verwendet werden, abstrakte Konstruktionen durchzuführen. Diesen Ansatz werden wir hier allerdings nicht fortführen und verweisen dazu auf [Lap99].

#### 3.1 Definitionen

**Definition 3.1.** Zu zwei gegebenen Spielen  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  und  $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$  kann man wie folgt einen *Morphismus*  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  zwischen diesen definieren:

- Eine Abbildung  $\sigma : I \leftarrow J$  zwischen den Spielermengen, die *Spielerabbildung*, und
- für jeden Spieler  $j \in J$  aus  $\Delta$  eine Abbildung  $\phi_j : X_{\sigma(j)} \rightarrow Y_j$  in den Raum seiner Strategien, die *Strategieabbildungen*.

Ist  $(\tau, \psi) : \Delta \rightarrow E = (K, Z, (e_k)_{k \in K})$  ein weiterer Morphismus, so ist die Verknüpfung der beiden Morphismen  $(\tau, \psi) \circ (\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow E$  gegeben durch

- die Spielerabbildung  $\sigma \circ \tau : I \leftarrow K$  und
- die Strategieabbildungen  $\psi_k \circ \phi_{\tau(k)} : X_{\sigma(\tau(k))} \rightarrow Z_k$ .

Ein Morphismus  $(\sigma, \phi)$  heißt *Isomorphismus von Spielen*, wenn er einen inversen Morphismus besitzt, d.h. einen Morphismus  $(\tau, \psi) : \Delta \rightarrow \Gamma$  mit  $(\sigma, \phi) \circ (\tau, \psi) = (\text{id}, \text{id})$  und  $(\tau, \psi) \circ (\sigma, \phi) = (\text{id}, \text{id})$ . Dabei ist  $(\text{id}, \text{id})$ , der Identitätsmorphismus auf dem jeweiligen Spiel, gegeben durch die Identität als Spielerabbildung und Identitäten für alle Strategieabbildungen.

Diese Art und Weise Abbildungen zwischen zwei Spielen zu definieren ergibt sich aus dem noch deutlich allgemeineren Ansatz hierzu von Lapitsky in [Lap99]<sup>6</sup>. Wir orientieren uns dabei vor allem an dem dort in Kapitel 4 vorgestellten Morphismusbegriff für topologische Spiele (in denen die Spielermenge ein topologischer Raum und der Strategieraum eine Garbe über diesem ist) bzw. dessen Spezialisierung auf Spiele mit diskreter Spielermenge aus Kapitel 5.

Im dortigen Kontext ergibt es sich etwas natürlicher, dass die Abbildung zwischen den Spielermengen in die entgegengesetzte Richtung zu denen zwischen den Strategieräumen verläuft. Eine andere, auch im hier vorliegenden Kontext nachvollziehbare Begründung hierfür liefert aber die folgende Bemerkung:

*Bemerkung 3.2.* Alle Strategieabbildungen  $\phi_j$  zusammen induzieren eine *Strategieprofilabbildung*

$$\phi : X \rightarrow Y : x = (x_i)_{i \in I} \mapsto \phi(x) := \left( \phi_j(x_{\sigma(j)}) \right)_{j \in J}$$

Würde die Abbildung  $\sigma$  zwischen den Spielermengen in die andere, „natürlichere“ Richtung verlaufen (also von  $I$  nach  $J$ ), so müssten wir zusätzlich fordern, dass diese bijektiv ist, damit auf die obige Art und Weise Strategieprofile auf Strategieprofile abgebildet werden (vgl. etwa [Jim14]). Denn nur dann wäre  $\phi(x) := (\phi_i(x_i))$  wieder ein vollständiges und wohldefiniertes Strategieprofil in  $Y$ .

*Bemerkung 3.3.* Möchte man Spieler- und Strategieabbildungen in die gleiche Richtung haben und trotzdem Morphismen zwischen Spielen mit unterschiedlich großen Spielermengen erlauben, so kann man einem alternativen Ansatz zur Definition von Morphismen von Spielen folgen, welcher von Vorob’ev in [Vor94, Kapitel 1, Abschnitt 1.14] verwendet wird: Hierbei wird als Spielerabbildung eine mengenwertige Abbildung verwendet, die also einen einzelnen Spieler nicht zwangsläufig wieder auf einen einzelnen Spieler abbildet, sondern gleich auf eine ganze Teilmenge der Bildspielermenge. Von diesem Morphismen-typ betrachtet Vorob’ev dann verschiedene „approximativ kostenerhaltende“ Varianten und untersucht die sich dadurch ergebende Kategorie.

*Notation 3.4.* In den meisten Fällen wird die Abbildung zwischen den Spielermengen allerdings doch bijektiv sein. In diesen Fällen werden wir zur Vereinfachung der Notation ohne Einschränkung davon ausgehen, dass die Spielermengen beider an der Abbildung beteiligten Spiele bereits gleich und geeignet permutiert sind, sodass  $\sigma$  die Identitätsabbildung ist. Damit kann die Spielerabbildung in der Notation weggelassen werden und die Abbildung zwischen den Spielen besteht nur noch aus den Abbildungen  $\phi_i : X_i \rightarrow Y_i$  zwischen den Strategieräumen.

Morphismen der in Definition 3.1 beschriebenen Form nehmen noch keinerlei Rücksicht auf die Kostenfunktionen der jeweiligen Spiele. Da gerade diese aber in der Regel die interessanten Eigenschaften eines Spiels (wie beispielsweise Gleichgewichte) festlegen, werden derartige Abbildungen im Allgemeinen noch wenige Aussagen über die beteiligten Spiele

---

<sup>6</sup>Lapitsky lässt in seiner Definition allerdings alle beteiligten Abbildungen in die jeweils umgekehrte Richtung gehen. Wir betrachten hier also gewissermaßen die zur dort definierten duale Kategorie.

ermöglichen. So besagt der durch diese Art Abbildungen induzierte Isomorphiebegriff beispielsweise nur, dass zwei Spiele Spieler- und Strategiemengen gleicher Kardinalität besitzen.

Sinnvollerweise sollten Morphismen zwischen Spielen folglich noch mehr der Struktur eines Spiels erhalten, insbesondere in irgendeiner Form „verträglich“ mit den Kostenfunktionen sein. Je nachdem, welche Eigenschaften die Morphismen (und insbesondere die dadurch induzierten Isomorphismen) bewahren sollen, gelangt man so zu unterschiedlich starken Verträglichkeitsbedingungen. Einige Möglichkeiten dafür werden wir nun kennenlernen.

Eine relative starke Forderung ist die, dass Morphismen *kostenerhaltend* sein müssen, wie sie etwa in [Nas51, S. 288f] oder [Mil13, Abschnitt 2.1] gestellt wird:

**Definition 3.5.** Ein Morphismus  $(\sigma, \phi)$  von  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  nach  $\Delta = (J, Y, (d_j))$  heißt *kostenerhaltend*, wenn für alle Strategieprofile  $x \in X$  und jeden Spieler  $j \in J$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) = d_j(\phi(x))$$

Ist ein solcher Morphismus gleichzeitig ein Isomorphismus, so nennen wir  $\Gamma$  und  $\Delta$  *äquivalent*.

*Bemerkung 3.6.* Zwei Spiele sind also genau dann äquivalent, wenn sie sich ausschließlich durch Umbenennung der Spieler und ihrer Strategien ineinander überführen lassen. In [MS96, S. 133] wird genau das als Isomorphie von Spielen bezeichnet.

**Beispiel 3.7.** Ein Spiel  $\Delta = (J, Y, (d_j))$  ist genau dann ein Koordinationsspiel, wenn es einen kostenerhaltenden Morphismus mit surjektiver Strategieprofilabbildung von einem 1-Personenspiel nach  $\Delta$  gibt.

Denn ist  $\Delta$  ein Koordinationsspiel, so definiert man ein 1-Personenspiel  $K := (\{*\}, X, (c_*))$  mit  $X = X_* := Y$  und  $c_*(y) := d_{\hat{j}}(y)$  für einen beliebigen, aber festen Spieler  $\hat{j} \in J$ . Ferner definiert man den folgenden Morphismus  $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Delta$ :

$$\begin{array}{lll} \sigma : & \{*\} \leftarrow J : & * \leftarrow \hat{j} \\ \phi_j : & X_* \rightarrow Y_j : & y \mapsto y_j \end{array}$$

Dieser ist kostenerhaltend, denn für jedes Strategieprofil  $y \in X = Y$  und jeden Spieler  $j \in J$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(y) = c_*(y) = d_{\hat{j}}(y) \stackrel{\Gamma \text{ Koord.spiel}}{=} d_j(y) = d_j(\phi(y))$$

Zudem ist die Strategieprofilabbildung  $\phi$  offensichtlich surjektiv.

Sind umgekehrt ein 1-Personenspiel  $K = (\{*\}, X, (c_*))$  sowie ein kostenerhaltender Morphismus  $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Delta$  mit surjektiver Strategieprofilabbildungen gegeben, dann ist  $\Delta$  bereits ein Koordinationsspiel. Denn aufgrund der Surjektivität von  $\phi$  gibt es zu jedem Strategieprofil  $y \in Y$  ein Strategieprofil  $x \in X$  mit  $\phi(x) = y$ . Da  $(\sigma, \phi)$  außerdem kostenerhaltend ist, folgt dann für je zwei Spieler  $j, \hat{j} \in J$ :

$$d_j(y) = d_j(\phi(x)) = c_{\sigma(j)}(x) = c_*(x) = c_{\sigma(\hat{j})}(x) = d_{\hat{j}}(\phi(x)) = d_{\hat{j}}(y)$$

Also ist  $\Gamma$  tatsächlich ein Koordinationsspiel.

Dieses Beispiel formalisiert die Intuition, dass in einem Koordinationsspiel alle Spieler ein gemeinsames Ziel haben und daher zusammen „wie ein Spieler“ spielen (d.h. das Koordinationsspiel kann durch ein 1-Personenspiel simuliert werden).

In [Lap99, Definition 4.1] fordert Lapitsky folgende schwächere Verträglichkeitsbedingung:

**Definition 3.8.** Ein Morphismus  $(\sigma, \phi)$  von  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  nach  $\Delta = (J, Y, (d_j))$  zusammen mit monotonen *Kostenabbildung*  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für jeden Spieler  $j \in J$  heißt *monoton*, wenn für jeden Spieler das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ c_{\sigma(j)} \downarrow & & \downarrow d_j \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f_j} & \mathbb{R} \end{array}$$

Einen solchen Morphismus nennen wir *monotonen Isomorphismus*, wenn er ein monotonen Inverses hat, dessen Kostenabbildungen verknüpft mit denen von  $(\sigma, \phi)$  die Identität ergeben.

*Bemerkung 3.9.* Gibt es eine derartige Abbildung  $f_j$  für einen Spieler  $j \in J$ , so gilt für je zwei Strategieprofile  $x, \hat{x} \in X$ :

$$c_{\sigma(j)}(x) \leq c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \implies d_j(\phi(x)) \leq d_j(\phi(\hat{x})) \quad (1)$$

Ist umgekehrt diese Bedingung für einen Spieler  $j \in J$  und je zwei Strategieprofile erfüllt und ist zudem  $d_j(\phi(X)) \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt oder  $c_{\sigma(j)}(X) \subseteq \mathbb{R}$  in beide Richtungen unbeschränkt, so gibt es eine monotone Kostenabbildung  $f_j$  mit  $f_j \circ c_{\sigma(j)} = d_j \circ \phi$ .

*Beweis.* Existiert eine Kostenabbildung  $f_j$ , so gilt wegen der Monotonie dieser Abbildung für zwei Strategieprofile  $x, \hat{x} \in X$  mit  $c_{\sigma(j)}(x) \leq c_{\sigma(j)}(\hat{x})$ :

$$d_j(\phi(x)) = f_j \circ c_{\sigma(j)}(x) \leq f_j \circ c_{\sigma(j)}(\hat{x}) = d_j(\phi(\hat{x}))$$

Ist  $d_j(\phi(X)) \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt oder  $c_{\sigma(j)}(X) \subseteq \mathbb{R}$  in beide Richtungen unbeschränkt, so können wir folgende Abbildung  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren:

$$f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} \sup \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X \}, & \nexists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \geq t \\ \inf \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X, c_{\sigma(j)}(x) \geq t \}, & t \geq 0 \text{ und } \exists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \geq t \\ \sup \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X, c_{\sigma(j)}(x) \leq t \}, & t < 0 \text{ und } \exists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \leq t \\ \inf \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X \}, & \nexists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \leq t \end{cases}$$

Gilt Eigenschaft (1), so ist diese Abbildung monoton und es gilt  $f_j \circ c_{\sigma(j)} = d_j \circ \phi$ , denn für ein festes Strategieprofil  $\hat{x} \in X$  mit  $c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \geq 0$  gilt dann:

$$\forall x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \geq c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \xrightarrow{(1)} d_j(x) \geq d_j(\hat{x})$$

Also nach Definition von  $f_j$ :

$$\begin{aligned} f_j \circ c_{\sigma(j)}(\hat{x}) &= f_j(c_{\sigma(j)}(\hat{x})) = \inf \left\{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X, c_{\sigma(j)}(x) \geq c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \right\} = \\ &= d_j(\phi(\hat{x})) = d_j \circ \phi(\hat{x}) \end{aligned}$$

Analog folgt dies für Strategieprofile  $\hat{x} \in X$  mit  $c_{\sigma(j)}(\hat{x}) < 0$ .  $\square$

Der Begriff eines monotonen Isomorphismus liefert uns nun das erste Beispiel eines Zusammenhangs zwischen Morphismen und Potentialen:

**Proposition 3.10.** *Ist ein Spiel monoton isomorph zu einem Koordinationsspiel, so besitzt es ein skaliertes Potential.*

*Beweis.* Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma = (I, X, (c_i)) \rightarrow K = (J, Y, (d_j))$  ein solcher monotoner Isomorphismus. Dann gibt es monotone Abbildungen  $f_j$  und  $g_i$ , sodass alle Diagramme der folgenden Form kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y & \xrightarrow{\phi^{-1}} & X \\ \downarrow c_i & & \downarrow d_{\sigma^{-1}(i)} & & \downarrow c_i \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f_{\sigma^{-1}(i)}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g_i} & \mathbb{R} \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & \text{id} & & \end{array}$$

Es ist  $P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d_j \circ \phi(x)$  (für einen beliebigen, aber festen Spieler  $\hat{j} \in J$ ) ein skaliertes Potential mit Skalierungsfunktionen  $g_i$ , denn es gilt allgemein

$$g_i \circ d_j \circ \phi \stackrel{\text{K Koord.spiel}}{=} g_i \circ d_{\sigma^{-1}(i)} \circ \phi = c_i \circ \phi^{-1} \circ \phi = c_i \circ \text{id} = c_i$$

und damit im Besonderen

$$g_i \circ P(x) - g_i \circ P(x \mid \hat{x}_i) = g_i \circ d_j \circ \phi(x) - g_i \circ d_j \circ \phi(x \mid \hat{x}_i) = c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i).$$

Ferner sind die  $g_i$  nach Voraussetzung monoton und wegen  $f_{\sigma^{-1}(i)} \circ g_i = \text{id}$  injektiv, also insgesamt streng monoton.  $\square$

**Korollar 3.11.** *Sei  $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Gamma$  ein monotoner Morphismus mit surjektiver Strategieprofilabbildung und bijektiven Kostenabbildungen von einem 1-Personenspiel  $K$  nach  $\Gamma$ . Dann besitzt  $\Gamma$  ein skaliertes Potential.*

*Beweis.* Wir konstruieren ein zu  $\Gamma$  monoton isomorphes Spiel  $\Delta$  und einen kostenerhaltenden Morphismus mit surjektiver Strategieprofilabbildung von  $K$  nach  $\Delta$ . Mit Beispiel 3.7 ist  $\Delta$  dann ein Koordinationsspiel und nach Proposition 3.10 besitzt  $\Gamma$  folglich ein



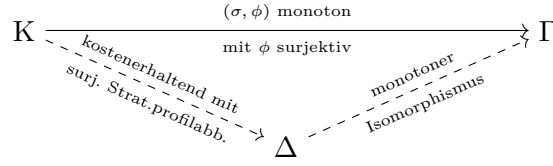


Abbildung 3: Die in diesem Beweis verwendeten Spiele und Morphismen.

skaliertes Potential. Seien also  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  und  $K = (\{*\}, Z_*, (e_*))$  die gegebenen Spiele und  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die (bijektiven) Kostenabbildungen zu  $(\sigma, \phi)$ . Dann definieren wir  $\Delta := (I, X, (f_i^{-1} \circ c_i)_{i \in I})$ . Nun hat  $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Delta$  nach Voraussetzung eine surjektive Strategieprofilabbildung und ist ferner kostenerhaltend, denn für jedes  $z \in Z_*$  gilt:

$$f_i^{-1} \circ c_i \circ \phi(z) = f_i^{-1} \circ f_i \circ e_*(z) = e_*(z) = e_{\sigma(i)}(z)$$

Weiter sind  $(\text{id}, \text{id}) : \Delta \rightarrow \Gamma$  und die Umkehrabbildung  $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow \Delta$  monotone Morphismen, denn

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}} & X \\ f_i^{-1} \circ c_i \downarrow & & \downarrow c_i \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f_i} & \mathbb{R} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\text{id}} & X \\ f_i^{-1} \circ c_i \downarrow & & \downarrow c_i \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{f_i^{-1}} & \mathbb{R} \end{array}$$

kommutieren offenkundig. Also sind  $\Delta$  und  $\Gamma$  tatsächlich monoton isomorph.  $\square$

Dies ist also ein Beispiel dafür, wie man eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials durch die Existenz eines passenden Isomorphismus zu einem Koordinationsspiel ausdrücken kann. Allerdings ist die Verträglichkeitsbedingung an monotone Morphismen noch zu stark, um auf diesem Weg auch eine notwendige Bedingung für die Existenz eines skalierten Potentials zu erhalten. Dies liegt daran, dass hier eine globale Monotonie gefordert wird, während die meisten Potentiale lediglich lokale Monotonie benötigen.

**Beispiel 3.12.** Das folgende Spiel  $\Gamma$  besitzt ein exaktes (und damit erst recht skaliertes) Potential  $P$ .

$$\Gamma : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & l & r \\ \hline t & (1,0) & (0,1) \\ \hline \end{array} \quad P : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & l & r \\ \hline t & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Gleichzeitig kann  $\Gamma$  aber nicht monoton isomorph zu einem Koordinationsspiel sein. Denn, wie wir bereits gesehen haben, müssten die Kostenabbildungen  $f_i$  eines solchen Isomorphismus sogar streng monoton sein. Dadurch erhielten wir die beiden einander widersprechenden Anforderungen an die gemeinsame Kostenfunktion  $d$  des hypothetischen Koordinationsspiels:

$$c_1(t, l) > c_1(t, r) \implies f_1(c_1(t, l)) > f_1(c_1(t, r)) \implies d(\phi(t, l)) > d(\phi(t, r))$$

und

$$c_2(t,l) < c_2(t,r) \implies f_2(c_2(t,l)) < f_2(c_2(t,r)) \implies d(\phi(t,l)) < d(\phi(t,r))$$

Wir schränken daher die Verträglichkeitsbedingung auf Nachbarschaften ein, ersetzen Monotonie durch strenge Monotonie und kommen so zum Begriff eines skalierten Morphismus. Analog hierzu lassen sich auch für die anderen Potentialbegriffe passende Formen von Morphismen (und damit Isomorphismen) definieren – wie das etwa Milchtaich in [Mil13, Abschnitt 2.1] für exakte Potentiale tut<sup>7</sup>.

**Definition 3.13.** Ein Morphismus  $(\sigma, \phi)$  von  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  nach  $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$  heißt

- *exakt*, wenn für alle Strategieprofile  $x \in X$ , Spieler  $j \in J$  und Strategien  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = d_j(\phi(x)) - d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$$

- *gewichtend*, wenn es einen Vektor  $(w_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^J$  gibt, sodass für alle Strategieprofile  $x \in X$ , Spieler  $j \in J$  und Strategien  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = w_j \cdot (d_j(\phi(x)) - d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})))$$

- *skalierend*, wenn es streng monotone Funktionen  $f_j$  gibt, sodass für alle Strategieprofile  $x \in X$ , Spieler  $j \in J$  und Strategien  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = f_j(d_j(\phi(x))) - f_j(d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})))$$

- *ordinal*, wenn für alle Strategieprofile  $x \in X$ , Spieler  $j \in J$  und Strategien  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) < c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) \implies d_j(\phi(x)) < d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$$

Gilt die Implikation auch in die umgekehrte Richtung, so bezeichnen wir den Morphismus als *biordinal*.

- *beste Antwort-erhaltend*, wenn für alle Spieler  $j \in J$  und Strategieprofile  $x \in X$  gilt:

$$\phi_j(\arg \min_{\hat{x}_{\sigma(j)} \in X_{\sigma(j)}} c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})) \subseteq \arg \min_{y_j \in Y_j} d_j(\phi(x) \mid y_j)$$

Ein exakter/gewichtender/... Morphismus heißt *exakter/gewichtender/... Isomorphismus*, wenn er ein Isomorphismus ist und der inverse Morphismus ebenfalls exakt/gewichtet/... ist.

**Bemerkung 3.14.** Ist ein Morphismus exakt/gewichtend und ein Isomorphismus so ist er automatisch ein exakter/gewichtender Isomorphismus (analog etwa zu Gruppenhomomorphismen). Bei skalierenden, ordinalen oder Beste-Antwort-Morphismen muss zusätzlich

<sup>7</sup>Milchtaich bezeichnet zwei exakt isomorphe Spiele dann als „ähnlich“.

geprüft werden, ob auch der inverse Morphismus ordinal, skalierend oder Beste-Antwort ist (analog beispielsweise zu stetigen Abbildungen).

**Beispiel 3.15.** Für den Fall ordinaler bzw. Beste-Antwort-Morphismen betrachten wir die Spiele

$$\Gamma := (\{*\}, \{t, b\}, (c_*)) \text{ mit } c_*(t) := 0, c_*(b) := 0$$

und

$$\Delta := (\{*\}, \{t, b\}, (d_*)) \text{ mit } d_*(t) := 0, d_*(b) := 1.$$

Dann ist  $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein ordinaler, aber kein Beste-Antwort-Morphismus, während  $(\text{id}, \text{id}) : \Delta \rightarrow \Gamma$  ein Beste-Antwort-, aber kein ordinaler Morphismus ist.

**Beispiel 3.16.** Für skalierende Morphismen betrachten wir die folgenden beiden 2-Personenspiele:

$$\Gamma : \begin{array}{c|cc} & l & r \\ \hline t & (0,0) & (0,0) \\ \hline b & (1,1) & (1,1) \end{array} \qquad \Delta : \begin{array}{c|cc} & l & r \\ \hline t & (0,0) & (2,0) \\ \hline b & (1,2) & (4,2) \end{array}$$

Dann ist die Abbildung  $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein skalierender Morphismus mit Skalierungsfunktionen

$$f_1(0) = 0, \quad f_1(1) = 1, \quad f_1(2) = 2, \quad f_1(4) = 3 \quad \text{und} \quad f_2 := \text{id}.$$

Der Morphismus in die umgekehrte  $(\text{id}, \text{id}) : \Delta \rightarrow \Gamma$  ist hingegen kein skalierender Morphismus.

*Beobachtung 3.17.* Das Inverse eines Isomorphismus, welcher zudem ein skalierender Morphismus ist, ist also nicht zwangsläufig selbst wieder skalierend. Zumindest ist das Inverse aber noch ordinal und somit ein ordinaler Isomorphismus (das ergibt sich direkt aus der strengen Monotonie der Skalierungsfunktionen).

Während, wie man leicht zeigen kann, die Verknüpfung zweier kostenerhaltender Morphismen wieder einen kostenerhaltenden Morphismus ergibt und die zweier monotonen wieder einen monotonen, ist dies bei exakten/gewichtenden/... Morphismen im Allgemeinen nicht der Fall:

**Beispiel 3.18.** Betrachte die folgenden drei 1- bzw. 2-Personenspiele:

- $\Gamma := (\{1\}, \{t, b\}, c_1)$ , wobei die Kostenfunktion  $c_1$  wie folgt definiert ist:

$$c_1(t) = 0, c_1(b) = 1$$

- $\Delta := (\{1, 2\}, \{t, b\} \times \{l, r\}, (d_1, d_2))$  mit Kostenfunktionen definiert durch folgende Auszahlungsmatrix (mit Einträgen  $(d_1(\_), d_2(\_))$ ):

	l	r
t	(0,0)	(1,0)
b	(0,1)	(1,1)

- $E := (\{1, 2\}, \{t, b\} \times \{l, r\}, (e_1, e_2))$  mit Kostenfunktionen definiert durch folgende Auszahlungsmatrix (mit Einträgen  $(e_1(\_), e_2(\_))$ ):

	l	r
t	(1,1)	(0,1)
b	(1,0)	(0,0)

Dann sind sowohl die Abbildung  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  mit  $\sigma(1) = \sigma(2) = 1$  und  $\phi_1(t) = t, \phi_1(b) = b, \phi_2(t) = l, \phi_2(b) = r$  als auch die Abbildung  $(\tau, \psi) : \Delta \rightarrow E$  mit  $\tau = \text{id}$  und  $\psi_i = \text{id}$  exakt, wie man durch einfaches Nachprüfen der jeweiligen Bedingungen sieht. Gleichzeitig ist aber die Verknüpfung der beiden Abbildungen  $(\tau, \psi) \circ (\sigma, \phi) = (\sigma \circ \tau, \psi \circ \phi)$  nicht einmal ordinal, denn es gilt

$$c_{\sigma \circ \tau(1)}(t) = c_1(t) = 0 < 1 = c_1(b) = c_{\sigma \circ \tau(1)}(b) = c_{\sigma \circ \tau(1)}(t \mid b),$$

aber gleichzeitig

$$e_1(\psi \circ \phi(t)) = e_1(t, l) = 1 > 0 = e_1(b, r) = e_1(\psi \circ \phi(b)) = e_1(\psi \circ \phi(t \mid b)).$$

Insbesondere erhält man also keine Kategorie von Spielen im Sinne der Kategorientheorie, wenn man sich nur auf exakte/gewichtende/... Morphismen beschränkt (was für kostenertaltende/monotone Morphismen sehr wohl der Fall ist). Man kann allerdings sicherstellen, dass die Komposition zweier exakter/gewichtender/ordinaler/Beste-Antwort-Morphismen wieder die jeweilige Eigenschaft hat, wenn man sich auf Morphismen mit injektiver Spielerabbildung beschränkt:

**Lemma 3.19.** *Die Verknüpfung zweier exakter/gewichtender/ordinaler/Bester-Antwort-Morphismen mit injektiven Spielerabbildungen ist wieder ein solcher Morphismus.*

*Beweis.* Die Aussage des Lemmas ergibt sich aus folgender Beobachtung: Für einen Morphismus  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  mit injektiver Spielerabbildung gilt für jeden Spieler  $j$ , jedes Strategieprofil  $x$  und jede Strategie  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  von Spieler  $\sigma(j)$

$$\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = (\phi(x) \mid \phi_j(\hat{x}_{\sigma(j)})). \quad (2)$$

Die Injektivität der Spielerabbildung stellt nämlich gerade sicher, dass die Strategie von Spieler  $\sigma(j)$  ausschließlich die Strategie von Spieler  $j$  und keinem anderen beeinflusst.

Wir zeigen das Lemma nun für exakte Morphismen – der Beweis für die anderen Morphismenarten geht dann völlig analog. Seien also zwei exakte Morphismen mit injektiver Spielerabbildung gegeben:

$$\Gamma = (I, X, (c_i)) \xrightarrow{(\sigma, \phi)} \Delta = (J, Y, (d_j)) \xrightarrow{(\tau, \psi)} E = (K, Z, (e_k))$$

$$\searrow (\sigma \circ \tau, \psi \circ \phi) \nearrow$$

Dann ist auch die Verknüpfung der beiden Morphismen exakt, denn es gilt:

$$\begin{aligned} e_k(\psi \circ \phi(x)) - e_k(\psi \circ \phi(x \mid \hat{x}_{\sigma \circ \tau(k)})) &= \\ &\stackrel{(2)}{=} e_k(\psi(\phi(x))) - e_k(\psi(\phi(x) \mid \phi_{\tau(k)}(\hat{x}_{\sigma(\tau(k))}))) = \\ &\stackrel{(\tau, \psi)}{\stackrel{\text{exakt}}{=}} d_{\tau(k)}(\phi(x)) - d_{\tau(k)}(\phi(x) \mid \phi_{\tau(k)}(\hat{x}_{\sigma(\tau(k))})) = \\ &\stackrel{(2)}{=} d_{\tau(k)}(\phi(x)) - d_{\tau(k)}(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(\tau(k))})) = \\ &\stackrel{(\sigma, \phi)}{\stackrel{\text{exakt}}{=}} c_{\sigma(\tau(k))}(x) - c_{\sigma(\tau(k))}(x \mid \hat{x}_{\sigma(\tau(k))}) \quad \square \end{aligned}$$

Lediglich bei skalierenden Morphismen ist die Komposition zweier solcher auch in diesem Fall und selbst für bijektive Spieler- und Strategieabbildungen im Allgemeinen nicht wieder skalierend, wie das folgende Beispiel zeigt:

**Beispiel 3.20.** Betrachte die folgenden drei 2-Personenspiele:

	<table><tr><td></td><td>l</td><td>r</td></tr><tr><td>t</td><td>(0,0)</td><td>(0,0)</td></tr><tr><td>b</td><td>(1,1)</td><td>(1,1)</td></tr></table>		l	r	t	(0,0)	(0,0)	b	(1,1)	(1,1)	$\Delta :$	<table><tr><td></td><td>l</td><td>r</td></tr><tr><td>t</td><td>(0,0)</td><td>(2,0)</td></tr><tr><td>b</td><td>(1,2)</td><td>(4,2)</td></tr></table>		l	r	t	(0,0)	(2,0)	b	(1,2)	(4,2)	$E :$	<table><tr><td></td><td>l</td><td>r</td></tr><tr><td>t</td><td>(0,0)</td><td>(0,0)</td></tr><tr><td>b</td><td>(1,0)</td><td>(2,0)</td></tr></table>		l	r	t	(0,0)	(0,0)	b	(1,0)	(2,0)
	l	r																														
t	(0,0)	(0,0)																														
b	(1,1)	(1,1)																														
	l	r																														
t	(0,0)	(2,0)																														
b	(1,2)	(4,2)																														
	l	r																														
t	(0,0)	(0,0)																														
b	(1,0)	(2,0)																														

Dass  $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein skalierender Morphismus ist, haben wir bereits in Beispiel 3.16 gesehen und  $(\text{id}, \text{id}) : \Delta \rightarrow E$  ist ein skalierender Morphismus mit Skalierungsfunktionen  $f'_1 := \text{id}$  und  $f'_2 := \text{id}$  (also sogar ein exakter Morphismus).

Die Verknüpfung der beiden Morphismen (also  $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow E$ ) ist zwar noch ein ordinaler, aber kein skalierender Morphismus mehr, denn eine Skalierungsfunktion für Spieler 1 müsste dazu 1 und 2 auf den gleichen Wert abbilden – ein Widerspruch dazu, dass Skalierungsfunktionen *streng* monoton sein müssen.

Da der in Beispiel 3.7 zur Charakterisierung von Koordinationsspielen verwendete Morphismus gerade keine injektive Spielerabbildung verwendet, können die Morphismenbegriffe aus Definition 3.13 nicht dazu verwendet werden, um eine zu Korollar 3.11 analoge Bedingung für die Existenz der verschiedenen Potentiale zu finden. Dafür erhalten wir aber eine stärkere Form von Proposition 3.10 zur Charakterisierung von Potentialen:

**Proposition 3.21.** *Ein Spiel  $\Gamma$  besitzt genau dann ein exaktes/gewichtetes/ordinales/Beste-Antwort-Potential, wenn es exakt/gewichtend/ordinal/Beste-Antwort-isomorph zu einem Koordinationsspiel ist. Es besitzt genau dann ein skaliertes/verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es einen skalierenden/ordinalen Morphismus mit bijektiven Spieler- und Strategieabbildungen von  $\Gamma$  in ein Koordinationsspiel gibt.*

*Beweis.* Besitzt ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  ein exaktes/gewichtendes/ordinales/Beste-Antwort-Potential  $P$ , so definieren wir das Koordinationsspiel  $K = (I, X, (P))$ . Dieses ist offensichtlich isomorph zu  $\Gamma$  mittels des Identitätsmorphismus, wobei sich die entsprechende Eigenschaft des Morphismus aus der des Potentials ergibt.

Ist umgekehrt  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow K$  ein exakter/gewichtender/ordinaler/Beste-Antwort-Isomorphismus von  $\Gamma$  in ein Koordinationsspiel  $K$  mit einheitlicher Kostenfunktion  $p$ , dann ist  $P := p \circ \phi$  ein entsprechendes Potential auf  $\Gamma$ .

Völlig analog beweist man die Aussage für skalierende bzw. verallgemeinerte ordinale Potentiale.  $\square$

**Korollar 3.22.** *Ist ein Spiel  $\Gamma$  exakt/gewichtend/ordinal/Beste-Antwort-isomorph zu einem Spiel  $\Delta$  mit exaktem/gewichtetem/ordinalen/Beste-Antwort-Potential, so hat auch  $\Gamma$  selbst ein entsprechendes Potential.*

*Beweis.* Nach Proposition 3.21 ist  $\Delta$  exakt/gewichtend/... isomorph zu einem Koordinationsspiel und da wir laut Lemma 3.19 diese Isomorphismen verknüpfen können, gilt dies auch für  $\Gamma$ , welches damit – erneut nach Proposition 3.21 – ein exaktes/gewichtetes/... Potential besitzt.  $\square$

## 3.2 Beweise der Potentialsätze

Wie wir gesehen haben, hängen die verschiedenen Morphismen (und insbesondere Isomorphismen) eng mit den entsprechenden Potentialen zusammen. In diesem Kapitel werden wir dies ausnutzen, um mit Hilfe der analogen Eigenschaften der Morphismen die Aussagen aus Abschnitt 2 zu zeigen (insbesondere Satz 2.3).

**Proposition 3.23.** *Es gelten folgende Beziehungen zwischen den verschiedenen Morphismenbegriffen:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \nearrow & \text{monoton} & \\ \text{kostenerhaltend} & \implies & \text{exakt} & \implies & \text{gewichtend} & \implies & \text{skalierend} \implies \text{ordinal} \end{array}$$

Für die entsprechenden Isomorphismen gilt sogar:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \nearrow & \text{monoton} & \searrow \\ \text{kostenerhaltend} & \Rightarrow & \text{exakt} & \Rightarrow & \text{gewichtend} & \Rightarrow & \text{skalierend} \Rightarrow \text{ordinal} \Rightarrow \text{Beste Antwort} \end{array}$$

*Beweis.* Die meisten der Folgerungen ergeben sich direkt aus den Definitionen. Für die Morphismen ist:

**kostenerh.  $\Rightarrow$  exakt:** klar

**kostenerh.  $\Rightarrow$  monoton:** mit Kostenabbildungen  $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

**exakt  $\Rightarrow$  gew:** mit Gewichten  $w_j := 1$

**gew  $\Rightarrow$  skalierend:**  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto w_j \cdot t$  sind streng monotone Skalierungsfunktionen.

**skalierend  $\Rightarrow$  ordinal:** Gilt  $c_{\sigma(j)}(x) < c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})$  so erhalten wir damit zunächst  $f_j \circ d_j(\phi(x)) < f_j \circ d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$  und daraus (wegen strenger Monotonie von  $f_j$ )  $d_j(\phi(x)) < d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$ .

Die zusätzlichen Zusammenhänge von Isomorphismen sind:

**monoton  $\Rightarrow$  skalierend:** mit dem gleichen Beweis wie Proposition 3.10 (wir haben dabei nirgends verwendet, dass eines der beteiligten Spiele ein Koordinationsspiel ist)

**ordinal  $\Rightarrow$  BA:** Da sowohl  $\phi_j$  als auch  $\sigma$  bijektiv sind, folgt aus

$$c_{\sigma(j)}(x) < c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) \iff d_j(\phi(x)) < d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})).$$

direkt, dass  $(\sigma, \phi)$  auch ein Beste-Antwort-Isomorphismus ist.  $\square$

Mit Proposition 3.21 erhalten wir aus der vorherigen Proposition einen Großteil der in Abbildung 1 dargestellten Beziehungen zwischen den verschiedenen Potentialbegriffen. Um zu zeigen, dass skalierte Potentiale auch ordinale sind, verwenden wir hierbei zusätzlich noch Beobachtung 3.17 (Isomorphismen, die skalierende Morphismen sind, sind bereits ordinale Isomorphismen). Es bleibt noch zu zeigen, dass Beste-Antwort-Potentiale lokale Nash und verallgemeinert ordinale Potentiale verallgemeinert Nash sind. Dies werden wir erneut aus allgemeineren Sätzen über ordinale bzw. Beste-Antwort-Morphismen folgern.

Wie wir bereits in Beobachtung 1.16 gesehen haben, hängen Nash-Gleichgewichte eng mit (abgeschlossenen) Verbesserungspfaden zusammen. Wir zeigen daher zunächst, wie diese sich mit ordinalen Morphismen vertragen.

**Proposition 3.24.** *Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein ordinaler Morphismus mit surjektiver Spielerabbildung  $\sigma$  und  $\gamma = (x^0, x^1, \dots)$  ein Pfad in  $X$ , sodass auch  $\phi(\gamma) := (\phi(x^0), \phi(x^1), \dots)$  ein Pfad in  $Y$  ist. Ist dann  $\phi(\gamma)$  ein Nichtverschlechterungspfad, so auch  $\gamma$ . Ist  $\gamma$  sogar ein Verbesserungspfad, so auch  $\phi(\gamma)$ .*

Ordinale Morphismen mit surjektiver Spielerabbildung erhalten also Verbesserungspfade und reflektieren Nichtverschlechterungspfade. Daraus folgt dann insbesondere Satz 2.6, der dies für (verallgemeinerte) ordinale Potentiale behauptet.

*Beweis.* Sei zunächst  $\phi(\gamma)$  ein Nichtverschlechterungspfad. Angenommen  $\gamma$  wäre kein Nichtverschlechterungspfad, dann gäbe es also ein  $k$ , sodass sich der im  $k$ -ten Schritt abweichende Spieler echt verschlechtert, d.h.  $c_{i(k)}(x^k) > c_{i(k)}(x^{k-1})$ . Da  $\sigma : J \rightarrow I$  surjektiv ist, gibt es nun einen Spieler  $j \in J$  mit  $\sigma(j) = i(k)$  und wegen der Ordinalität von  $\phi$  gilt für diesen  $d_j(\phi(x^k)) > d_j(\phi(x^{k-1}))$ , das heißt er verschlechtert sich im  $k$ -ten Schritt von  $\phi(\gamma)$  echt.

Insbesondere wissen wir damit, dass es auch in  $\phi(\gamma)$  einen Spieler  $j(k)$  geben muss, der im  $k$ -ten Schritt seine Strategie echt ändert. Es gilt also

$$\phi_{\sigma(j(k))}(x_{\sigma(j(k))}^k) = (\phi(x^k))_{\sigma(j(k))} \neq (\phi(x^{k-1}))_{\sigma(j(k))} = \phi_{\sigma(j(k))}(x_{\sigma(j(k))}^{k-1})$$

Daraus folgt  $x_{\sigma(j(k))}^k \neq x_{\sigma(j(k))}^{k-1}$  und, da es in einem Pfad pro Schritt höchstens einen abweichenden Spieler geben kann, auch  $i(k) = \sigma(j(k))$ . Wegen der Ordinalität von  $\phi$  folgt dann aber aus  $c_{i(k)}(x^k) > c_{i(k)}(x^{k-1})$ , dass sich auch  $j(k)$  echt verschlechtert, d.h.  $d_{j(k)}(\phi(x^k)) > d_{j(k)}(\phi(x^{k-1}))$  – im Widerspruch dazu, dass  $\phi(\gamma)$  ein Nichtverschlechterungspfad ist.

Ist nun  $\gamma$  ein Verbesserungspfad, so gilt in jedem Schritt  $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$  und daher – mit dem gleichen Argument wie eben – auch  $d_{j(k)}(\phi(x^{k+1})) < d_{j(k)}(\phi(x^k))$ . Also ist  $\phi(\gamma)$  ein Verbesserungspfad.  $\square$

Im Allgemeinen bilden (ordinale) Morphismen Pfade nicht wieder auf Pfade ab. Ist nämlich  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein solcher Morphismus und gibt es zwei Spieler  $j$  und  $j'$  mit  $\sigma(j) = \sigma(j') =: i$ , dann kann eine einseitige Abweichung von Spieler  $i$  in  $\Gamma$  zu einer gleichzeitigen Abweichung der *beiden* Spieler  $j$  und  $j'$  in  $\Delta$  führen. Wie wir bereits im Beweis von Lemma 3.19 gesehen haben, können derartige Probleme hingegen nicht auftreten, wenn die Spielerabbildung  $\sigma$  injektiv ist.

*Beobachtung 3.25.* Morphismen  $(\sigma, \phi)$  mit injektivem  $\sigma$  bilden Pfade auf Pfade ab.

Dies erlaubt uns folgendes Korollar:

**Korollar 3.26.** *Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein ordinaler Morphismus mit bijektiver Spielerabbildung  $\sigma$  und  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$  ein Verbesserungspfad in  $X$ . Ist dann  $\phi(\gamma)$  abgeschlossen in  $\Delta$ , so ist auch  $\gamma$  in  $\Gamma$  abgeschlossen.*

*Beweis.* Nehmen wir im Widerspruch zur Behauptung an,  $\gamma$  wäre nicht abgeschlossen. Dann gäbe es folglich ein Strategieprofil  $x^{n+1} \in X$ , welches  $\gamma$  zu einem Verbesserungspfad  $\gamma' := (x^0, \dots, x^n, x^{n+1})$  in  $\Gamma$  verlängert. Nach Beobachtung 3.25 ist dann auch  $\phi(\gamma')$  ein Pfad in  $\Delta$  und mit Proposition 3.24 sogar ein Verbesserungspfad, also insbesondere eine Verlängerung des Pfades  $\phi(\gamma)$  – ein Widerspruch zu dessen Abgeschlossenheit.  $\square$

**Korollar 3.27.** *Ordinale Morphismen mit bijektiver Spielerabbildung reflektieren Nash-Gleichgewichte. Das heißt, ist  $x \in X$  ein Strategieprofil in  $\Gamma$  und  $(\sigma, \phi)$  ein ordinaler Morphismus in ein Spiel  $\Delta$ , sodass  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht in diesem ist, dann war bereits  $x$  ein Nash-Gleichgewicht von  $\Gamma$ .*

*Beweis.* Es ist  $x$  ein trivialer Verbesserungspfad in  $\Gamma$ , dessen Bild  $\phi(x)$  in  $\Delta$  abgeschlossen ist. Daher ist mit Korollar 3.26  $x$  in  $\Gamma$  abgeschlossen und folglich (vgl. Beobachtung 1.16)  $x$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$ .  $\square$



Zur Notwendigkeit der Bijektivität der Spielerabbildung betrachten wir das folgende Beispiel:

**Beispiel 3.28.** Wir definieren die folgenden drei Spiele:

$$\Gamma : \begin{array}{c|cc} & l & r \\ \hline t & (2,2) & (1,1) \\ \hline b & (1,1) & (0,0) \end{array} \quad \Delta : \begin{array}{c|c} a & 1 \\ \hline b & 0 \end{array} \quad E : \begin{array}{c|cc} & l & r \\ \hline t & (1,1) & (2,2) \\ \hline b & (2,2) & (0,0) \end{array}$$

- Der Morphismus  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  mit  $\sigma(1) = 1$  und  $\phi_1(t) = a, \phi_1(b) = b$  ist ein ordinaler Morphismus, dessen Spielerabbildung nicht surjektiv ist. Und tatsächlich gilt hier die Aussage von Korollar 3.27 nicht: Denn  $(b, l)$  ist kein Nash-Gleichgewicht von  $\Gamma$ , obwohl  $\phi(b, l) = b$  ein Nash-Gleichgewicht von  $\Delta$  ist.
- Der Morphismus  $(\tau, \psi) : \Delta \rightarrow E$  mit  $\tau(1) = \tau(2) = 1$  und  $\psi_1(a) = t, \psi_1(b) = b, \psi_2(a) = l, \psi_2(b) = r$  ist ein ordinaler Morphismus, dessen Spielerabbildung nicht injektiv ist. Und in der Tat gilt auch hier die Aussage des Korollars nicht: Denn  $a$  ist kein Nash-Gleichgewicht von  $\Delta$ , obwohl  $\psi(a) = (t, l)$  ein Nash-Gleichgewicht von  $E$  ist.

Aus Korollar 3.27 folgt insbesondere, dass Nash-Gleichgewichte in dem von einem verallgemeinerten ordinalen Potential induzierten Koordinationsspiel auch Nash-Gleichgewichte im Ausgangsspiel sind. Also sind verallgemeinerte ordinale Potentiale verallgemeinerte Nash-Potentiale.

**Beispiel 3.29.** Ordinale Isomorphismen haben insbesondere injektive Spieler- und Strategieabbildungen. Damit erfüllen sie die Voraussetzungen von Korollar 3.27, d.h. ordinal isomorphe Spiele haben die gleichen Nash-Gleichgewichte.

Dies zeigt also bereits, dass ordinale Potentiale lokale Nash-Potentiale sind. Es verbleibt die allgemeinere Aussage für Beste-Antwort-Potentiale. Dazu stellen wir zunächst fest, dass Beste-Antwort-Morphismen mit bijektiver Spielerabbildung Beste-Antwort-Schritte (und damit auch Beste-Antwort-Pfade und Nash-Gleichgewichte) erhalten.

**Proposition 3.30.** Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein Beste-Antwort-Morphismus mit bijektiver Spielerabbildung  $\sigma$  und  $(x^0, x^1)$  ein Beste-Antwort-Schritt von Spieler  $\sigma(i)$  in  $\Gamma$ , so auch  $(\phi(x^0), \phi(x^1))$  von Spieler  $i$  in  $\Delta$ .

*Beweis.* Da  $\sigma$  bijektiv ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\sigma$  die Identität ist. Ferner wissen wir damit, dass aus  $x^1 = (x^0 \mid x_i^1)$  auch  $\phi(x^1) = \phi((x^0 \mid x_i^1)) = (\phi((x^0 \mid \phi_i(x_i^1)))$  folgt. Nachdem dieser Schritt sogar ein Bester-Antwort-Schritt ist, gilt außerdem  $x_i^1 \in \arg \max_{x_i \in X_i} c_i(x^0 \mid x_i)$  und daher mit der definierenden Eigenschaft von Beste-Antwort-Morphismen auch  $\phi_i(x_i^1) \in \arg \max_{y_i \in Y_i} d_i(\phi(x^0) \mid y_i)$ . Also ist  $\phi((x^0, x^1))$  ebenfalls ein Beste-Antwort-Schritt (von Spieler  $i$ ).  $\square$

**Korollar 3.31.** Beste-Antwort-Morphismen mit bijektiver Spielerabbildung bewahren Besten-Antwort-Pfade und Nash-Gleichgewichte.

*Beweis.* Der erste Teil der Aussage ergibt sich direkt aus der vorangegangenen Proposition 3.30. Sei also  $x$  ein Nash-Gleichgewicht von  $\Gamma$ , dann ist  $(x, x)$  ein Beste-Antwort-Schritt für alle Spieler  $i \in I$ . Damit ist  $(\phi(x), \phi(x))$  ebenfalls ein Beste-Antwort-Schritt für jeden Spieler und daher insbesondere ein Nash-Gleichgewicht (vgl. Beobachtung 1.18).  $\square$

Beste-Antwort-isomorphe Spiele haben damit sogar die gleichen Nash-Gleichgewichte, womit Beste-Antwort-Potentiale lokale Nash-Potentiale sind und wir den Beweis von Satz 2.3 vervollständigt haben. Außerdem folgt hieraus Satz 2.7.

### 3.3 Weitere Sätze mit Morphismen

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch einige weitere Beobachtungen über bzw. mit Morphismen festhalten.

Für monotone Morphismen gibt es einen zu Proposition 3.24 analogen Satz über Nichtverschlechterungs- und Verbesserungspfade.

**Proposition 3.32.** *Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein monotoner Morphismus und  $\gamma = (x^0, x^1, \dots)$  ein Pfad in  $X$ , sodass auch  $\phi(\gamma) := (\phi(x^0), \phi(x^1), \dots)$  ein Pfad in  $Y$  ist. Ist dann  $\gamma$  ein Nichtverschlechterungspfad, so auch  $\phi(\gamma)$ . Ist  $\phi(\gamma)$  sogar ein Verbesserungspfad, so auch  $\gamma$ .*

Das heißt monotone Morphismen erhalten Nichtverschlechterungspfade und reflektieren Verbesserungspfade – also genau umgekehrt zu ordinalen Morphismen.

*Beweis.* Zunächst beobachten wir, dass  $\sigma$  immer den in  $\phi(\gamma)$  im  $k$ -ten Schritt abweichenden Spieler (sofern es einen solchen gibt) auf den im gleichen Schritt abweichenden Spieler in  $\gamma$  abbildet. Ist nämlich  $j(k)$  der entsprechende Spieler aus  $\Delta$ , so gilt:

$$\phi_{\sigma(j(k))} \left( x_{\sigma(j(k))}^k \right) = \left( \phi(x^k) \right)_{\sigma(j(k))} \neq \left( \phi(x^{k-1}) \right)_{\sigma(j(k))} = \phi_{\sigma(j(k))} \left( x_{\sigma(j(k))}^{k-1} \right)$$

Daraus folgt  $x_{\sigma(j(k))}^k \neq x_{\sigma(j(k))}^{k-1}$  und, da es in einem Pfad pro Schritt höchstens einen abweichenden Spieler geben kann, auch  $i(k) = \sigma(j(k))$ .

Ist nun  $\gamma$  ein Nichtverschlechterungspfad und es gibt im  $k$ -ten Schritt einen (echt) abweichenden Spieler  $j(k)$ , so ist also  $\sigma(j(k)) = i(k)$  und daher  $c_{\sigma(j(k))}(x^k) \leq c_{\sigma(j(k))}(x^{k-1})$ . Mit der Monotonie von  $\phi$  folgt daraus direkt auch  $d_{j(k)}(\phi(x^k)) \leq d_{j(k)}(\phi(x^{k-1}))$ .

Ist  $\phi(\gamma)$  ein Verbesserungspfad, gilt in jedem Schritt  $d_{j(k)}(\phi(x^{k+1})) < d_{j(k)}(\phi(x^k))$  und daher – erneut wegen der Monotonie von  $\phi$  – auch  $c_{\sigma(j(k))}(x^{k+1}) < c_{\sigma(j(k))}(x^k)$ .  $\square$

Der folgende Satz zeigt, wann man Spieler weglassen kann, ohne dadurch die Nash-Gleichgewichte des Spiels zu beeinflussen.

**Satz 3.33.** Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein biordinaler Morphismus mit injektiver Spielerabbildung und surjektiven Strategieabbildungen. Seien ferner alle Spieler in  $I \setminus \sigma(J)$  Dummy-Spieler. Dann ist ein Strategieprofil  $x \in X$  genau dann ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$ , wenn  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Delta$  ist.

*Beweis.* Sei zunächst  $x \in X$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$  und  $y_j \in Y_j$ . Da  $\phi_j$  surjektiv ist, gibt es dann ein  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  mit  $\phi_j(\hat{x}_{\sigma(j)}) = y_j$ . Wegen der Injektivität von  $\sigma$  gilt ferner  $\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = (\phi(x) \mid \phi_j(\hat{x}_{\sigma(j)})) = (\phi(x) \mid y_j)$ .

Da  $x$  ein Nash-Gleichgewicht ist, gilt nun  $c_{\sigma(j)}(x) \leq c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})$  und folglich wegen der Biordinalität von  $\phi$  auch  $d_j(\phi(x)) \leq d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})) = d_j(\phi(x) \mid y_j)$ . Also ist  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Delta$ .

Sei umgekehrt  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Delta$  und  $\hat{x}_i$  eine alternative Strategie von Spieler  $i \in I$ .

1. **Fall:** Liegt  $i$  in  $I \setminus \sigma(J)$ , so ist  $i$  nach Voraussetzung ein Dummy-Spieler und folglich gilt:  $c_i(x) = c_i(x \mid \hat{x}_i)$ .
2. **Fall:** Liegt  $i$  hingegen in  $\sigma(J)$ , so gibt es also einen Spieler  $j \in J$  mit  $\sigma(j) = i$ . Aus der Injektivität von  $\sigma$  und dem Wissen, dass  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht ist, folgt nun  $d_j(\phi(x \mid \hat{x}_i)) = d_j(\phi(x) \mid \phi_j(\hat{x}_{\sigma(j)})) \geq d_j(\phi(x))$ . Über die Biordinalität von  $\phi$  erhalten wir schließlich  $c_i(x \mid \hat{x}_i) = c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_i) \geq c_{\sigma(j)}(x) = c_i(x)$ .

Insgesamt ist also auch  $x$  ein Nash-Gleichgewicht.  $\square$

Mit diesem Satz können wir nun die in Beobachtung 1.2 gemachte Feststellung formalisieren (und beweisen), dass Spieler mit nur einer einzigen Strategie beim Untersuchen von Nash-Gleichgewichten immer ignoriert werden können:

**Korollar 3.34.** Spieler mit nur einer einzigen Strategie können immer entfernt werden ohne die Nash-Gleichgewichte zu verändern.

*Beweis.* Sei dazu  $\Gamma$  ein beliebiges Spiel und  $I' \subseteq I$  eine solche Teilmenge von Spielern, dass alle Spieler  $i$  in  $I \setminus I'$  genau eine Strategie  $*_i$  besitzen. Dann betrachten wir die Einschränkung von  $\Gamma$  auf die Spieler in  $I'$ , nämlich  $\Gamma' := (I', \prod_{i \in I'} X_i, (c'_i)_{i \in I'})$ , wobei die Kostenfunktionen wie folgt definiert sind:

$$c'_i(x') := c_i(x), \text{ wobei } x \in X \text{ definiert ist durch } x_i = \begin{cases} x'_i, & i \in I' \\ *_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

und den folgenden Morphismus  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  zwischen den beiden Spielen:

$$\begin{array}{lll} \sigma : & I \leftarrow I \setminus I' : & i \leftarrow i \\ \phi_i : & X_i \rightarrow X_i : & x_i \mapsto x_i \end{array}$$

Dieser ist offensichtlich kostenerhaltend, also insbesondere biordinal, die Spielerabbildung ist injektiv, die Strategieabbildungen sind surjektiv und  $I \setminus \sigma(I') = I \setminus I'$  enthält nur Dummy-Spieler. Damit folgt die Behauptung mit Satz 3.33.  $\square$

Schließlich wollen wir noch das Analog zu Beobachtung 2.12 für Morphismen beweisen:

**Lemma 3.35.** *Seien  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  und  $\Delta = (J, Y, (d_j))$  zwei Spiele. Dann gibt es genau dann einen gewichtenden Morphismus  $\Gamma \rightarrow \Delta$ , wenn es positive Gewichte  $(w_j)_{j \in J}$  und einen exakten Morphismus  $\Gamma \rightarrow \Delta_w := (J, Y, (w_j \cdot d_j))$  gibt.*

*Beweis.* Ein Morphismus  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ist genau dann ein exakter Morphismus zwischen  $\Gamma$  und  $\Delta_w$ , wenn für alle Strategieprofile  $x \in X$ , Spieler  $j \in J$  und Strategien  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = w_j \cdot d_j(\phi(x)) - w_j \cdot d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$$

Und dies ist offensichtlich äquivalent zu

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = w_j \cdot \left( d_j(\phi(x)) - d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})) \right),$$

also dazu, dass  $(\sigma, \phi)$  ein gewichteter Morphismus zwischen  $\Gamma$  und  $\Delta$  ist.  $\square$

## 4 Zusammenhänge von Auslastungs- und Potentialspielen

In [Ros73] führte Rosenthal mit Auslastungsspielen eine Klasse von endlichen Spielen ein, welche immer ein exaktes Potential (und damit ein Nash-Gleichgewicht) besitzen. Später zeigten Monderer und Shapley in [MS96, Theorem 3.2], dass diese Klasse bis auf (kostenerhaltende) Isomorphie bereits *alle* endlichen Spiele mit exaktem Potential umfasst. Zusammengefasst und etwas verallgemeinert gilt also:

**Satz 4.1.** *Jedes exakte  $N$ -Personen-Potentialspiel ist äquivalent zu einem Auslastungsspiel und jedes  $N$ -Personen-Auslastungsspiel, in dem jede Strategie nur endlich viele Ressourcen umfasst, besitzt ein exaktes Potential.*

*Beweis.* Sei  $\Gamma(M)$  ein beliebiges solches  $N$ -Personen-Auslastungsspiel. Dann definieren wir wie folgt die Rosenthal-Potentialfunktion (vgl. [Ros73]):

$$P : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} g_r(k)$$

Die Funktion ist wohldefiniert, da die insgesamt  $N$  Spieler zusammen nur endlich viele Ressourcen auf einmal nutzen können und daher nur endlich viele der inneren Summen ungleich null sind. Sie ist ferner ein exaktes Potential, denn zu jedem Strategieprofil  $s \in S$  und jeder alternativen Strategie  $\hat{s}_i$  von Spieler  $i$  gilt:

$$\begin{aligned} P(s) - P(s \mid \hat{s}_i) &= \\ &= \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} g_r(k) - \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s \mid \hat{s}_i)} g_r(k) = \sum_{r \in s_i \setminus \hat{s}_i} g_r(l_r(s)) - \sum_{r \in \hat{s}_i \setminus s_i} g_r(l_r(s) + 1) = \\ &= \sum_{r \in s_i \setminus \hat{s}_i} g_r(l_r(s)) + \sum_{r \in s_i \cap \hat{s}_i} g_r(l_r(s)) - \sum_{r \in s_i \cap \hat{s}_i} g_r(l_r(s \mid \hat{s}_i)) - \sum_{r \in \hat{s}_i \setminus s_i} g_r(l_r(s \mid \hat{s}_i)) = \\ &= \sum_{r \in s_i} g_r(l_r(s)) - \sum_{r \in \hat{s}_i} g_r(l_r(s \mid \hat{s}_i)) = c_i(s) - c_i(s \mid \hat{s}_i) \end{aligned}$$

Für die umgekehrte Richtung orientieren wir uns an dem Beweis in [Mon07, Theorem 1]. Gegeben also ein  $N$ -Personenspiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  mit einem exakten Potential  $P$ . Hierzu definieren wir folgendes Auslastungsmodell  $M = (I, R, S, (g_r)_{r \in R})$ :

- Die Ressourcenmenge  $R := R_K \cup R_D \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X_i)$  setzt sich zusammen aus zwei Arten von Ressourcen, nämlich
  - $R_K := \{ (\{x_i\})_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$  und
  - $R_D := \{ (Y_i)_{i \in I} \mid \exists \hat{i} \in I : Y_{\hat{i}} = X_{\hat{i}}, \forall i \neq \hat{i} : |X_i \setminus Y_i| = 1 \}$ .

- Die Ressourcenkosten sind jeweils nur für genau eine Auslastung nicht null: Bei Ressourcen aus  $R_K$  genau dann, wenn alle Spieler sie nutzen, bei Ressourcen aus  $R_D$ , wenn sie genau ein Spieler nutzt:

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_k \text{ und } k = N \\ c_i(x) - P(x), & r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \{i\}} \times X_i \in R_D, x_i \in X_i \text{ bel. und } k = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zweite Fall hängt tatsächlich nicht von der Wahl der Strategie  $x_i \in X_i$  ab, denn ist  $\hat{x}_i$  eine andere solche Strategie, so gilt (da  $P$  ein exaktes Potential ist):

$$(c_i(x) - P(x)) - (c_i(x \mid \hat{x}_i) - P(x \mid \hat{x}_i)) = (c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i)) - (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)) = 0$$

- $S_i := \{ \{ r \in R \mid x_i \in r_i \} \mid x_i \in X_i \}$

Die induzierten Lastfunktionen sind automatisch wohldefiniert, da die Spielermenge endlich ist, die Wohldefiniertheit der Kostenfunktionen  $d_i$  folgt aus dem Beweis der Äquivalenz der Spiele  $\Gamma$  und  $\Gamma(M)$ . Dazu betrachten wir  $(\text{id}, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma(M)$ , wobei  $\phi_i(x) := s(x_i) := \{ r \in R \mid x_i \in r_i \}$  ist. Dieser ist offenkundig bijektiv auf allen Mengen und zudem kostenerhaltend, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d_i(\phi(x)) &= \sum_{r \in \phi(x)_i = \phi_i(x_i)} g_r(l_r(\phi(x))) = \sum_{r \in R: x_i \in r_i} g_r(l_r(\phi(x))) = \\ &= \sum_{r \in R_K: x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{= N \Leftrightarrow r = (\{x_i\})_{i \in I}}) + \sum_{r \in R_D: x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{= 1 \Leftrightarrow r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \{i\}} \times X_i}) = \\ &= g_{(\{x_i\})_{i \in I}}(N) + g_{(X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \{i\}} \times X_i}(1) = \\ &= P(x) + c_i(x) - P(x) = c_i(x) \quad \square \end{aligned}$$

*Bemerkung 4.2.* Berücksichtigt man nur die Ressourcen aus  $R_K$ , so erhält man ein Koordinationsspiel, nimmt man nur die aus  $R_D$ , so erhält man ein Dummy-Spiel. Aus dieser Beobachtung ergibt sich der in [Voo+99] beschriebene alternative Beweis für die Rückrichtung: Man zerlegt das exakte Potentialspiel zunächst in ein Koordinations- und ein Dummispiel (siehe Satz 2.10), konstruiert für jedes der beiden ein äquivalentes Auslastungsspiel (mit Ressourcenmengen  $R_K$  bzw.  $R_D$ ) und erhält schließlich die Summe der beiden Auslastungsspiele als zum Ausgangsspiel kostenerhaltend isomorphes Auslastungsspiel.

#### 4.1 Von ungewichtet zu gewichtet

Auslastungsspiele sind also nicht nur *ein* Beispiel für Spiele mit exaktem Potential, sondern in gewissem Sinne (nämlich bis auf kostenerhaltende Isomorphie) sogar *das* Beispiel für solche Spiele. Eine naheliegende Frage ist nun, ob es ähnliche Klassen von „auslastungsartigen“ Spielen gibt, welche genau den Spielen mit allgemeineren Potentialen

entsprechen. Im Folgenden werden wir versuchen eine zu gewichteten Potentialspielen passende Verallgemeinerung von Auslastungsspielen zu finden.

#### 4.1.1 Gewichtete Auslastungsspiele

Für endliche gewichtete Auslastungsspiele zeigen Harks, Klimm und Möhring in [HKM11, Theorem 3.9], dass die einzigen beiden Klassen stetiger Funktionen, die (als Ressourcenkostenfunktionen verwendet) ausschließlich endliche Spiele mit gewichtetem Potential erzeugen, affin lineare Funktionen bzw. affine exponentielle Funktionen (mit gemeinsamem Exponenten) sind:

**Satz 4.3.** *Gegeben eine Menge von stetigen Funktionen  $C$ . Dann besitzt genau dann jedes endliche gewichtete Auslastungsspiel, welches nur Funktionen aus  $C$  als Ressourcenkostenfunktionen verwendet, ein gewichtetes Potential, wenn  $C$*

- *entweder ausschließlich affin lineare Funktionen enthält, also Funktionen der Form  $g(k) = a_g \cdot k + d_g$ ,*
- *oder ausschließlich Funktionen der Form  $g(k) = a_g \cdot b^k + d_g$  (mit gemeinsamem  $b > 0$ ).*

*Alle mit Kostenfunktionen aus  $C$  erzeugten gewichteten Auslastungsspiele besitzen genau dann sogar ein exaktes Potential, wenn  $C$  ausschließlich affin lineare Funktionen enthält (vgl. [HKM11, Theorem 3.7]).*

Die wichtigsten Beweisschritte für die „wenn“-Richtung werden wir in Abschnitt 4.1.4 skizzieren.

In [HK12, Theorem 5.1] zeigen Harks und Klimm weiter, dass diese beiden Klassen von Kostenfunktionen unter allen Klassen stetiger Funktionen zugleich auch die einzigen sind, die die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes garantieren.<sup>8</sup>

Da nun für endliche Spiele alle der in Abschnitt 2 definierten Potentiale die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes garantieren, folgt hiermit direkt, dass es auch für die allgemeineren Potentialbegriffe keine größeren Klassen von stetigen Funktionen gibt, die immer die Existenz eines entsprechenden Potentials sicherstellen.

Zusätzlich sehen wir damit, dass der Schritt vom ungewichteten Fall zum gewichteten auf Seite der Auslastungsspiele erheblich größer ist als auf Seite der Potentiale. Möchte man daher eine wirklich analoge Verallgemeinerung von Auslastungsspielen passend zu gewichteten Potentialspielen finden, muss man also andere Varianten betrachten Gewichte ins Spiel zu bringen. In Definition 1.25 hatten wir bereits zwei solche gesehen: lastgewichtete und kostengewichtete Auslastungsspiele. Diese beiden werden wir nun näher untersuchen.

---

<sup>8</sup>Zudem sind es auch noch die einzigen Klassen, welche für jedes gewichtete Auslastungsspiel das Erfüllen der FIP sicherstellen.

### 4.1.2 Lastgewichtete Auslastungsspiele

Die erste alternative Klasse von Auslastungsspielen sind die lastgewichteten Auslastungsspiele. Harks, Klimm und Möhring beobachten in [HKM11, S. 53], dass lastgewichtete Auslastungsspiele (die dort als normalisierte Auslastungsspiele bezeichnet werden) zwar nicht unbedingt äquivalent, aber doch unter verschiedenen Aspekten sehr ähnlich zu allgemeinen gewichteten Auslastungsspielen sind. Diesen Zusammenhang können wir nun leicht durch einen passenden Isomorphiebegriff formalisieren – es gilt nämlich:

**Lemma 4.4.** *Jedes lastgewichtete Auslastungsspiel ist gewichtend isomorph zu einem gewichteten Auslastungsspiel und umgekehrt. Die beiden Spiele basieren dabei jeweils auf dem gleichen Auslastungsmodell und der Gewichtsvektor des Morphismus vom gewichteten zum lastgewichteten Auslastungsspiel ist der Gewichtsvektor des Auslastungsmodells.*

*Beweis.* Sei  $M = (I, R, (S_i), (g_r))$  ein Auslastungsmodell und  $w = (w_i)$  ein Gewichtsvektor. Dann ist  $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma(M, w) \rightarrow \Gamma_l(M, w)$  offensichtlich ein Isomorphismus und ferner gewichtend, denn sind  $c_i$  die Kostenfunktionen von  $\Gamma(M, w)$  und  $d_i$  die von  $\Gamma_l(M, w)$ , so gilt sogar für jedes Strategieprofil  $s$ :

$$c_i(s) = \sum_{r \in s_i} w_i \cdot g_r(l_r(s)) = w_i \cdot \sum_{r \in s_i} g_r(l_r(s)) = w_i \cdot d_i(s)$$

Insbesondere ist damit  $\Gamma(M, w)$  genau dann wohldefiniert, wenn  $\Gamma_l(M, w)$  dies ist.  $\square$

Hieraus ergeben sich dann direkt die in [HKM11] beobachteten Zusammenhänge zwischen gewichteten und lastgewichteten Auslastungsspielen:

**Korollar 4.5.** *Sei  $M = (I, R, S, (g_r))$  ein Auslastungsmodell und  $w = (w_i)$  ein Gewichtsvektor. Dann gilt:*

- *Die Nash-Gleichgewichte von  $\Gamma(M, w)$  und  $\Gamma_l(M, w)$  stimmen überein.*
- *Eine Funktion  $P : S \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann ein gewichtetes/ordinales/verallgemeineres ordinales/Beste-Antwort-/lokales Nash-Potential von  $\Gamma(M, w)$ , wenn es ein solches für  $\Gamma_l(M, w)$  ist.*
- *Eine Funktion  $P : S \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann ein exaktes Potential von  $\Gamma_l(M, w)$ , wenn sie ein  $w$ -Potential von  $\Gamma(M, w)$  ist.*
- *Eine Funktion  $P : S \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann ein exaktes Potential von  $\Gamma(M, w)$ , wenn sie ein  $(1/w_i)_{i \in I}$ -Potential von  $\Gamma_l(M, w)$  ist.*

Außerdem übersetzt sich damit Satz 4.3 zu

**Korollar 4.6.** *Gegeben eine Menge von stetigen Funktionen  $C$ . Dann besitzt genau dann jedes endliche lastgewichtete Auslastungsspiel, welches nur Funktionen aus  $C$  als Kostenfunktionen verwendet, ein gewichtetes Potential, wenn  $C$*



- entweder ausschließlich affin lineare Funktionen
- oder ausschließlich Funktionen der Form  $g(k) = a_g \cdot b^k + d_g$  enthält.

Insbesondere sehen wir damit aber auch, dass lastgewichtete Auslastungsspiele ebenfalls eine zu starke Verallgemeinerung von ungewichteten Auslastungsspielen sind, um eine Entsprechung der gewichteten Potentialspiele sein zu können. Tatsächlich zeigt Milchtaich in [Mil13, Theorem 1] sogar, dass dieser Verallgemeinerungsschritt für (endliche) Auslastungsspiele bereits der größtmögliche ist, denn es gilt:

**Satz 4.7.** *Jedes endliche Spiel  $\Gamma = (I = \{1, \dots, n\}, X, (c_i))$  ist äquivalent zu einem lastgewichteten Auslastungsspiel mit Gewichten  $w_i = n + i - 2$ .<sup>9</sup>*

Die Menge der lastgewichteten Auslastungsspiele umfasst also (bis auf kostenerhaltende Isomorphie) bereits *alle* endlichen Spiele in strategischer Form. Und wie man leicht sehen kann, gilt dies genauso für gewichtete Auslastungsspiele:

**Korollar 4.8.** *Jedes endliche Spiel ist äquivalent zu einem gewichteten Auslastungsspiel.*

*Beweis.* Sei  $\Gamma = (I = \{1, \dots, n\}, X, (c_i))$  ein endliches Spiel und  $w := (n + i - 2)_{i \in I}$  der Gewichtsvektor aus Satz 4.7. Nach diesem Satz gibt es dann ein Auslastungsmodell  $M$ , sodass das lastgewichtete Auslastungsspiel  $\Gamma_l(M, w)$  äquivalent zu dem Spiel  $\Gamma_{1/w_i} = (I, X, (\frac{1}{w_i} c_i))$  ist. Und damit ist dann das gewichtete Auslastungsspiel  $\Gamma(M, w)$  äquivalent zum Ausgangsspiel  $\Gamma$  (vgl. den Beweis zu Lemma 4.4).  $\square$

Für endliche Spiele erhalten wir aus Satz 4.7 und Korollar 4.8 zusammen noch eine Version von Lemma 4.4 mit einem stärkeren Isomorphiebegriff:

**Korollar 4.9.** *Jedes endliche lastgewichtete Auslastungsspiel ist kostenerhaltend isomorph zu einem endlichen gewichteten Auslastungsspiel und umgekehrt.*

### 4.1.3 Kostengewichtete Auslastungsspiele

Es verbleiben also noch die kostengewichteten Auslastungsspiele - und wie sich herausstellt, sind diese tatsächlich eine geeignete, den gewichteten Potentialspielen entsprechende Klasse:

**Satz 4.10.** *Jedes  $N$ -Personen-Spiel mit einem gewichteten Potential ist äquivalent zu einem kostengewichteten Auslastungsspiel und jedes kostengewichtete  $N$ -Personen-Auslastungsspiel, in dem jede Strategie endlich viele Ressourcen umfasst, besitzt ein gewichtetes Potential.*

<sup>9</sup>Milchtaich zeigt sogar, dass jedes endliche Spiel äquivalent zu einem lastgewichteten Netzwerkauslastungsspiel (dort als „gewichtetes Netzwerkauslastungsspiel“ bezeichnet) mit privaten Kanten und gemeinsamen Start- und Zielknoten ist.

Nicht nur entspricht dieser Satz genau dem von Monderer und Shapley bewiesenen Satz für ungewichtete Auslastungsspiele und exakte Potentiale (Satz 4.1), auch der Beweis erfolgt völlig analog:

*Beweis.* Sei  $\Gamma$  ein kostengewichtetes Auslastungsspiel mit Gewichtsvektor  $w := (w_i)_{i \in I}$ . Dann ist die Rosenthal-Potentialfunktion  $P(x) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(x)} g_r(k)$  ein  $w$ -Potential.

Ist umgekehrt  $\Gamma$  ein Spiel mit einem gewichteten Potential  $P$  (mit Gewichtsvektor  $w$ ), so definieren wir das gleiche Auslastungsmodell  $M = (I, R, (S_i)_{i \in I}, (g_r)_{r \in R})$  wie im Beweis zu Satz 4.1 mit dem einzigen Unterschied in den Ressourcenkosten:

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_k \text{ und } k = N \\ \frac{1}{w_i} c_i(x) - P(x), & r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \hat{i}} \times X_{\hat{i}} \in R_D \text{ und } k = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Rest des Beweises erfolgt dann genauso wie zuvor.  $\square$

**Lemma 4.11.** *Jedes kostengewichtete Auslastungsspiel ist gewichtend isomorph zum (ungewichteten) Auslastungsspiel auf dem selben Auslastungsmodell.*

*Beweis.* Sei als  $M$  ein Auslastungsmodell und  $w$  ein positiver Gewichtsvektor, sodass  $\Gamma_c(M, w)$  wohldefiniert ist. Die ungewichtete Variante  $\Gamma(M)$  ist dann ebenfalls wohldefiniert, da sie die gleichen Lastfunktionen verwendet und die Spielerkosten lediglich um den konstanten Faktor  $\frac{1}{w_i}$  skaliert werden. Daher ist dann auch  $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma_c(M, w) \rightarrow \Gamma(M)$  ein gewichtender Isomorphismus mit Gewichtsvektor  $w$ .  $\square$

#### 4.1.4 Unendliche Auslastungsspiele

In [Kuk17, Abschnitt 8] zeigt Kukushkin, dass die erste Hälfte von Satz 4.3 („Gewichtete Auslastungsspiele mit affinen Ressourcenkosten besitzen exakte Potentiale.“) auch für gewichtete  $N$ -Personen-Auslastungsspiele mit potentiell unendlicher Ressourcenmenge gilt, solange jede einzelne Strategie eines Spielers nur endlich viele Ressourcen umfasst.

Tatsächlich aber wird Endlichkeit der Strategieräume schon im Beweis von Harks, Klimm und Möhring gar nicht benötigt und auch die Endlichkeit der Spielermenge ist nicht notwendig, da – wie wir in Satz 2.9 gesehen haben – die Charakterisierung der Existenz exakter Potentiale von Monderer und Shapley auch für solche Spiele unverändert gilt.

**Satz 4.12.** *Gegeben eine Menge von stetigen Funktionen  $C$ . Dann besitzt genau dann jedes (wohldefinierte) gewichtete Auslastungsspiel, welches nur Funktionen aus  $C$  als Kostenfunktionen verwendet, ein gewichtetes Potential, wenn  $C$*

- *entweder ausschließlich affin lineare Funktionen*
- *oder ausschließlich affin exponentielle Funktionen mit gemeinsamer Basis enthält.*

Alle mit Kostenfunktionen aus  $C$  erzeugten gewichteten Auslastungsspiele besitzen genau dann sogar ein exaktes Potential, wenn  $C$  ausschließlich affin lineare Funktionen enthält.

Neu zu zeigen ist dabei nur die „wenn“-Richtung. Hierzu werden wir kurz die entsprechenden Beweisschritte aus [HKM11, Abschnitt 3] nachvollziehen um zu sehen, dass diese tatsächlich auch schon die etwas allgemeinere Version des Satzes zeigen.

Sei dazu also  $M = (I, R, S, (g_r))$  ein beliebiges Auslastungsmodell und  $w = (w_i)_{i \in I}$  ein Gewichtsvektor, sodass das Spiel  $\Gamma(M, w) = (I, S, (c_i))$  wohldefiniert ist. Wir wollen nun zeigen, dass  $\Gamma(M, w)$  ein exaktes Potential besitzt, falls alle  $g_r$  affin linear sind, bzw. ein gewichtetes Potential, falls alle  $g_r$  affin exponentiell sind.

Da wir dies mit Hilfe von Satz 2.9 bzw. Satz 2.11 tun wollen, betrachten wir zunächst einen beliebigen (nicht-trivialen) 4-Zykel  $\gamma = (s, (s \mid t_{i'}), (s \mid t_{i'} \mid t_i), (s \mid t_i), s)$ . Das folgende Lemma zeigt, wie wir die (gewichtete) Gesamtänderung entlang eines solchen Zyklus berechnen können. Dazu definieren wir für jede Ressource  $r \in R$  das Gesamtgewicht aller diese im Strategieprofil  $s$  nutzenden Spieler außer  $i'$  und  $i$

$$w_{i' i}^r := \sum_{i \in I \setminus \{i', i\} : r \in s_i} w_i$$

sowie die Menge der Ressourcen, die beide Spieler beim ersten Wechsel abgeben oder beide Spieler beim ersten Wechsel hinzunehmen,

$$R_1 := (s_{i'} \setminus t_{i'} \cap t_i \setminus s_i) \cup (t_{i'} \setminus s_{i'} \cap s_i \setminus t_i)$$

und die Menge der Ressourcen, die der eine Spieler abgibt und der zweite hinzunimmt oder umgekehrt,

$$R_2 := (s_{i'} \setminus t_{i'} \cap s_i \setminus t_i) \cup (t_{i'} \setminus s_{i'} \cap t_i \setminus s_i).$$

**Lemma 4.13.** *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \delta(\gamma) = & \sum_{r \in R_1} \left( (w_{i'} - w_i) g_r(w_{i' i}^r + w_i + w_{i'}) - w_{i'} g_r(w_{i' i}^r + w_{i'}) + w_i g_r(w_{i' i}^r + w_i) \right) \\ & + \sum_{r \in R_2} \left( (w_i - w_{i'}) g_r(w_{i' i}^r + w_i + w_{i'}) - w_i g_r(w_{i' i}^r + w_i) + w_{i'} g_r(w_{i' i}^r + w_{i'}) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Ist  $v = (v_i)_{i \in I}$  ein zusätzlicher Gewichtsvektor, so gilt:

$$\begin{aligned} \delta(\gamma, v) = & \sum_{r \in R_1} \left( \left( \frac{w_{i'}}{v_{i'}} - \frac{w_i}{v_i} \right) g_r(w_{i' i}^r + w_i + w_{i'}) - \frac{w_{i'}}{v_{i'}} g_r(w_{i' i}^r + w_{i'}) + \frac{w_i}{v_i} g_r(w_{i' i}^r + w_i) \right) \\ & + \sum_{r \in R_2} \left( \left( \frac{w_i}{v_i} - \frac{w_{i'}}{v_{i'}} \right) g_r(w_{i' i}^r + w_i + w_{i'}) - \frac{w_i}{v_i} g_r(w_{i' i}^r + w_i) + \frac{w_{i'}}{v_{i'}} g_r(w_{i' i}^r + w_{i'}) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen der Definition der Kostenfunktionen, Umsortieren der Summanden und Kürzen. Da für die Wohldefiniertheit von  $\Gamma(M, w)$  bereits gefordert

wird, dass alle in der Kostenberechnung auftretenden Summen absolut konvergieren, können wir dies im unendlichen Fall genauso machen wie im endlichen.

Wir können nun leicht folgern, dass gewichtete Auslastungsspiele mit ausschließlich affin linearen Ressourcenkosten immer ein exaktes Potential besitzen. Ist nämlich  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige affin lineare Funktion, so gilt für alle reellen Zahlen  $u, v, w \in \mathbb{R}$

$$(u - v)g(w + u + v) - ug(w + u) + vg(w + v) = 0.$$

Werden also alle Ressourcenkosten durch affin lineare Funktionen beschrieben, so ist jeder Summand in (3) null und folglich auch  $\delta(\gamma) = 0$ . Nach Satz 2.9 hat das Spiel dann ein exaktes Potential.

Sei nun also  $M$  ein Auslastungsmodell, in dem alle Ressourcenkosten von der Form  $g(k) = a_g \cdot b^k + d_g$  sind. Dann definieren wir die Gewichte  $v_i := \frac{w_i b^{w_i}}{b^{w_i} - 1}$ . Da sowohl  $b$  als auch  $w_i$  positive reelle Zahlen sind, gilt dies auch für  $v_i$ . Wir setzen nun diese Gewichte in (4) aus Lemma 4.13 ein und sehen, dass dadurch alle Summanden und damit auch die gewichtete Pfadänderung null werden:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{w_{i'}}{v_{i'}} - \frac{w_i}{v_i} \right) g_r(w_{i'i}^r + w_i + w_{i'}) - \frac{w_{i'}}{v_{i'}} g_r(w_{i'i}^r + w_{i'}) + \frac{w_i}{v_i} g_r(w_{i'i}^r + w_i) = \\ &= \frac{w_{i'}}{v_{i'}} (g_r(w_{i'i}^r + w_i + w_{i'}) - g_r(w_{i'i}^r + w_{i'})) - \frac{w_i}{v_i} (g_r(w_{i'i}^r + w_i + w_{i'}) - g_r(w_{i'i}^r + w_i)) = \\ &= \frac{b^{w_{i'}} - 1}{b^{w_{i'}}} \left( a_{g_r} b^{w_{i'i}^r + w_i + w_{i'}} + d_{g_r} - a_{g_r} b^{w_{i'i}^r + w_{i'}} - d_{g_r} \right) \\ & \quad - \frac{b^{w_i} - 1}{b^{w_i}} \left( a_{g_r} b^{w_{i'i}^r + w_i + w_{i'}} + d_{g_r} - a_{g_r} b^{w_{i'i}^r + w_i} - d_{g_r} \right) = \\ &= a_{g_r} b^{w_{i'i}^r} \left( (b^{w_{i'}} - 1)(b^{w_i} - 1) - (b^{w_i} - 1)(b^{w_{i'}} - 1) \right) = 0 \end{aligned}$$

Somit hat  $\Gamma(M)$  nach Satz 2.11 ein gewichtetes Potential und wir haben Satz 4.12 vollständig bewiesen.

Harks, Klimm und Möhring beobachten in [HKM11] außerdem, dass wir aus Lemma 4.13 auch einen alternativen Beweis dafür bekommen können, dass ungewichtete Auslastungsspiele ein exaktes Potential besitzen. Aus unserer Version des Lemmas erhalten wir sogar noch eine etwas stärkere Version der einen Richtung von Satz 4.1 (die Einschränkung auf endliche Spielermengen und endliche Strategien entfällt), die also auch in Fällen gilt, in denen die Rosenthal-Potentialfunktion nicht definiert wäre (da die entsprechende Summe divergiert):

**Korollar 4.14.** *Jedes ungewichtete Auslastungsspiel hat ein exaktes Potential.*

*Beweis.* Setzen wir in (3) alle Gewichte auf 1, so sehen wir direkt, dass sich unabhängig von der Form der verwendeten Ressourcenkosten  $g_r$  alle Summanden wegkürzen, und wir erhalten  $\delta(\gamma) = 0$ . Also besitzt jedes ungewichtete Auslastungsspiel nach Satz 2.9 ein exaktes Potential.  $\square$

*Bemerkung 4.15.* Die entsprechenden Aussagen für last- bzw. kostengewichtete Spiele ergeben sich jetzt direkt aus Satz 4.12 bzw. Korollar 4.14, da wir bereits gesehen haben, dass diese Spiele immer gewichtend isomorph zu gewichteten bzw. ungewichteten Auslastungsspielen auf dem gleichen Auslastungsmodell sind (vgl. Lemma 4.4 und Lemma 4.11). Alternativ könnte man diese Aussagen auch auf analogem Wege zu den obigen mit entsprechend angepassten Versionen von Lemma 4.13 zeigen.

Wie wir sehen, lassen sich also die Sätze über die Existenz von Potentials in den verschiedenen Auslastungsspielen leicht auch auf unendliche Spiele anwenden. Für die umgekehrte Richtung hingegen, also das Konstruieren eines äquivalenten Auslastungsspieles zu einem gegebenen Potentialspiel, ist es weniger klar, ob die entsprechenden Aussagen aus Satz 4.1 und Satz 4.10 auch für Spiele mit unendlicher Spielermenge gelten.

Zumindest wird dafür aber vermutlich eine neue Konstruktion notwendig sein, da die für den endlichen Fall verwendete an zentraler Stelle die Endlichkeit der Spielermenge verwendet: Nämlich um zu testen, ob *alle* Spieler gleichzeitig eine bestimmte Ressource benutzen, die dann gerade einem Strategieprofil entspricht. Ein solcher Test ist problemlos möglich, wenn die Zahl der Spieler endlich ist, aber nicht mehr, wenn sie unendlich oder gar überabzählbar ist.

Wir können die Konstruktion allerdings noch retten, wenn wir uns dabei erlauben neue Spielergewichte einzuführen, sodass die Summe aller dieser gegen einen endlichen Wert konvergiert. Dadurch erhalten wir zumindest noch den folgenden Satz, der jedoch deutlich schwächer ist als die bisherigen Versionen. Denn dieses Mal gehört das konstruierte Spiel einer der Varianten von Auslastungsspielen an, die im Allgemeinen kein exaktes Potential besitzen (die verwendeten Ressourcenkosten sind auch weder affin linear noch affin exponentiell).

**Satz 4.16.** *Zu jedem Spiel mit abzählbarer Spielermenge und exakter Potentialfunktion gibt es ein äquivalentes lastgewichtetes Auslastungsspiel.*

*Beweis.* Wir verwenden eine nur leicht modifizierte Version der Konstruktion aus dem Beweis zu Satz 4.1. Sei also  $\Gamma$  ein Spiel mit abzählbarer Spielermenge  $I$  (wir nehmen ohne Einschränkung  $I \subseteq \mathbb{N}$  an) und exaktem Potential  $P$ . Hierzu definieren wir folgendes Auslastungsmodell  $M = (I, R, S, (g_r)_{r \in R})$ :

- Ressourcen  $R := R_K \cup R_D \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X_i)$ , wobei  $R_K := \{ (\{x_i\})_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$  und  $R_D := \{ (Y_i)_{i \in I} \mid \exists \hat{i} \in I : Y_{\hat{i}} = X_{\hat{i}}, \forall i \neq \hat{i} : |X_i \setminus Y_i| = 1 \}$  sind,
- mit Ressourcenkosten

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_K \text{ und } k = \sum_{i \in I} 1/2^i \\ c_{\hat{i}}(x) - P(x), & r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \{\hat{i}\}} \times X_{\hat{i}} \in R_D, x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}} \text{ bel. und } k = 1/2^{\hat{i}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- und dazu Strategien  $S_i := \{ \{ r \in R \mid x_i \in r_i \} \mid x_i \in X_i \}$ .

Dann betrachten wir das zusammen mit dem Gewichtsvektor  $w := (1/2^i)_{i \in I}$  darauf induzierte lastgewichtete Auslastungsspiel  $\Gamma_l(M, w)$ . Dessen Lastfunktionen sind wohldefiniert, da die Summe aller Spielergewichte  $\sum_{i \in I} 1/2^i \leq 1$  absolut konvergiert. Die Wohldefiniertheit der Kostenfunktionen  $d_i$  folgt dann aus dem Beweis der Äquivalenz der Spiele  $\Gamma$  und  $\Gamma_l(M, w)$ . Dazu betrachten wir den Morphismus  $(\text{id}, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma_l(M, w)$ , wobei  $\phi_i(x) := s(x_i) := \{r \in R \mid x_i \in r_i\}$  ist. Dieser ist offensichtlich bijektiv auf allen Mengen und zudem kostenerhaltend, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
d_i(\phi(x)) &= \sum_{r \in \phi(x)_i = \phi_i(x_i)} g_r(l_r(\phi(x))) = \\
&= \sum_{r \in R_K : x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{= \sum_{1/2^i \leftrightarrow r = (\{x_i\})_{i \in I}}}) + \sum_{r \in R_D : x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{= 1/2^i \leftrightarrow r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus i} \times X_i}) = \\
&= g_{(\{x_i\})_{i \in I}} \left( \sum_{i \in I} 1/2^i \right) + g_{(X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus i} \times X_i} (1/2^i) = \\
&= P(x) + c_i(x) - P(x) = c_i(x) \quad \square
\end{aligned}$$

## 4.2 Schnelle Beste-Antwort-Dynamik in Matroidspielen

Da endliche Auslastungsspiele nach Satz 4.1 ein exaktes und damit insbesondere ein Beste-Antwort-Potential besitzt, wissen wir bereits, dass in solchen Spielen jede Beste-Antwort-Dynamik nach endlicher Zeit ein Nash-Gleichgewicht erreicht. Allerdings kann diese Suche im Allgemeinen sehr lange dauern. Zum Beispiel stellen Ackermann, Röglin und Vöcking in [ARV08, Theorem 3.1] ein (endliches)  $N$ -Personen-Auslastungsspiel vor, welches einen Beste-Antwort-Verbesserungspfad der Länge  $2^{N/4}$  besitzt.

Für die Teilklasse der Matroidspiele kann man jedoch zeigen, dass diese Konvergenz immer schon in polynomieller Zeit erfolgt. Eine leichte Modifikation des Beweises hierzu in [ARV08, Theorem 2.5] erlaubt sogar die folgende noch etwas stärkere Aussage:

**Satz 4.17.** *Sei  $M = (I, R, S, (g_r))$  ein endliches Matroidspiel. Dann ist  $\Gamma(M)$  Beste-Antwort-isomorph zu einem Auslastungsspiel mit selber Ressourcenmenge, in dem alle Ressourcenkosten nur Werte zwischen 1 und  $|R| \cdot |I|$  annehmen.*

*Beweis.* Wir definieren zunächst das Auslastungsmodell  $N := (I, R, S, (h_r))$ , wobei die Ressourcenkosten  $h_{\hat{r}}$  wie folgt definiert sind:

$$h_{\hat{r}}(\hat{k}) := \# \left\{ (r, k) \in R \times \{1, \dots, |I|\} \mid g_r(k) \leq g_{\hat{r}}(\hat{k}) \right\}$$

Das heißt also wir ordnen alle möglichen Werte, welche die Ressourcenkostenfunktionen annehmen können, und ersetzen dann die tatsächlichen Kosten durch die Position dieser Kosten in der Liste aller Kosten. Das von  $N$  induzierte Auslastungsspiel  $\Gamma(N) = (I, R, S, (d_i))$  hat nun offensichtlich die gewünschten Eigenschaften.

Noch zu zeigen ist, dass  $\Gamma(N)$  tatsächlich Beste-Antwort-isomorph zu  $\Gamma(M)$  ist. Dazu betrachten wir den Identitätsmorphimus zwischen den beiden Spielen (der offensichtlich bijektiv ist) und zeigen, dass die besten Antworten in  $\Gamma(N)$  genau den besten Antworten in  $\Gamma(M)$  entsprechen. Dazu benötigen wir die folgende Proposition:

**Proposition 4.18.** *Sei  $s \in S$  ein beliebiges Strategieprofil und  $s_i^* \in S_i$  eine beste Antwort von Spieler  $i$  auf  $s$  in  $\Gamma(M)$ . Dann gilt*

- $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s) \implies d_i(s \mid s_i^*) < d_i(s)$  und
- $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s) \implies d_i(s \mid s_i^*) = d_i(s)$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt dem in [ARV08, Lemma 2.6]. Es sind sowohl  $s_i^*$  als auch  $s_i$  Basen im Matroid von Spieler  $i$ . Daher gibt es der Basen-Matching-Eigenschaft (Korollar 1.34) zu Folge eine Partitionierung der symmetrischen Differenz  $s_i^* \triangle s_i$  in eine Menge von Tupeln der Form  $(q, r)$  mit  $q \in s_i^* \setminus s_i$  und  $r \in s_i \setminus s_i^*$ , sodass  $s_i^{+r-q} := s_i^* \setminus \{q\} \cup \{r\}$  ebenfalls eine Basis ist (d.h. eine zulässige Ressourcenmenge von Spieler  $i$ ).

Da nun  $s_i^*$  eine beste Antwort auf  $s$  ist, muss die Antwort  $s_i^{+r-q}$  zu mindestens ebenso hohen Kosten für Spieler  $i$  führen, es muss also gelten:

$$0 \leq c_i(s \mid s_i^{+r-q}) - c_i(s \mid s_i^*) = g_r(l_r(s \mid s_i^*) + 1) - g_q(l_q(s \mid s_i^*))$$

und damit (für jedes solche Tupel aus der Partitionierung)

$$g_q(l_q(s \mid s_i^*)) \leq g_r(l_r(s \mid s_i^*) + 1). \quad (5)$$

Insbesondere werden somit auch die alternativen Ressourcenkosten bei jedem solchen Ressourcenwechsel höchstens kleiner.

Gilt nun zusätzlich  $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s)$ , so muss die Ungleichung (5) für wenigstens ein solches Tupel  $(q, r)$  sogar strikt sein und es sinken mindestens für diesen Ressourcenwechsel auch die alternativen Kosten echt ab. Also gilt insgesamt  $d_i(s \mid s_i^*) < d_i(s)$ .

Gilt hingegen  $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s)$ , so muss auch in jeder Ungleichung der Form (5) Gleichheit gelten, womit auch alle alternativen Ressourcenkosten gleich bleiben. Folglich gilt in diesem Fall  $d_i(s \mid s_i^*) = d_i(s)$ .  $\square$

*Beweis von Satz 4.17 (Forts.)* Sei  $s \in S$  ein beliebiges Strategieprofil,  $s_i^*$  eine beste Antwort von Spieler  $i$  auf  $s$  im Spiel  $\Gamma(M)$  (also bezüglich  $c_i$ ) und  $s'_i$  eine beste Antwort im Spiel  $\Gamma(N)$  (also bezüglich der alternativen Kosten  $d_i$ ). Wir werden nun zeigen, dass  $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s \mid s'_i)$  gilt. Mit Proposition 4.18 erhalten wir dann auch  $d_i(s \mid s_i^*) = d_i(s)$  und folglich ist sowohl  $s'_i$  eine Beste Antwort in  $\Gamma(M)$  als auch  $s_i^*$  eine Beste Antwort in  $\Gamma(N)$ . Das zeigt, dass die Identitätsabbildung zwischen den beiden Spielen beste Antworten in beide Richtungen erhält und daher ein Beste-Antwort-Isomorphismus ist.

Wir untersuchen dazu, welcher der drei theoretisch möglichen Fälle tatsächlich eintreten kann:

1. **Fall:**  $c_i(s \mid s_i^*) > c_i(s \mid s_i')$ . Dann wäre  $(s \mid s_i')$  eine bessere Antwort auf  $s$  als  $s_i^*$  (bzgl.  $c_i$ ) - ein Widerspruch dazu, dass  $s_i^*$  eine *beste* Antwort auf  $s$  ist. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
2. **Fall:**  $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s \mid s_i')$ . Nach Proposition 4.18 gilt dann auch  $d_i(s \mid s_i^*) < d_i(s \mid s_i')$ , was analog zum ersten Fall ein Widerspruch dazu ist, dass  $s_i'$  eine Beste Antwort auf  $s$  bezüglich  $d_i$  ist.
3. **Fall:**  $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s \mid s_i')$  ist also die einzige verbleibende Möglichkeit.

Das beschließt den Beweis von Satz 4.17.  $\square$

**Korollar 4.19.** *Sei  $\Gamma(M)$  ein endliches Matroidspiel. Dann erreicht jede Beste-Antwort-Dynamik in höchstens  $|I|^2 |R|^2$  Schritten ein Nash-Gleichgewicht.*

*Beweis.* Die Rosenthal-Potentialfunktion  $P : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} h_r(k)$  ist (wie in Satz 4.1 gezeigt) ein exaktes Potential für das Auslastungsspiel  $\Gamma(N)$ , insbesondere also auch ein Beste-Antwort-Potential. Ferner sieht man leicht, dass diese Potentialfunktion höchstens  $|R| \cdot |I| \cdot |R| |I|$  viele verschiedene Werte annehmen kann.

Zusammen mit Korollar 3.22 können wir nun aus Satz 4.17 folgern, dass  $P$  auch ein Beste-Antwort-Potential für  $\Gamma(M)$  ist. Mit Satz 2.7 ist dann jeder Beste-Antwort-Verbesserungspfad in  $\Gamma(M)$  auch ein solcher im von  $P$  induzierten Koordinationsspiel. In diesem kann aber kein solcher Pfad länger als  $|I|^2 |R|^2$  sein, was somit auch für alle Beste-Antwort-Verbesserungspfade in  $\Gamma(M)$  gelten muss.  $\square$

**Korollar 4.20.** *Sei  $\Gamma_c(M, w)$  ein endliches kostengewichtetes Matroidspiel. Dann erreicht jede Beste-Antwort-Dynamik in höchstens  $|I|^2 |R|^2$  Schritten ein Nash-Gleichgewicht.*

*Beweis.* Nach Lemma 4.11 ist  $\Gamma_c(M, w)$  gewichtet (und damit auch Beste-Antwort-) isomorph zu  $\Gamma(M)$  und dieses nach Satz 4.17 zu einem Auslastungsspiel mit selber Ressourcenmenge, in dem alle Ressourcenkosten nur Werte zwischen 1 und  $|R| \cdot |I|$  annehmen. Da die Verknüpfung von Beste-Antwort-Isomorphismen wieder ein Beste-Antwort-Isomorphismus ist, folgt die zu zeigende Aussage nun analog zu Korollar 4.19.  $\square$

Auf lastgewichtete bzw. gewichtete Matroidspiele lässt sich diese Aussage hingegen nicht verallgemeinern. Zwar funktioniert der Beweis von Satz 4.17 weiterhin (wenn auch mit größerem Bild der Kostenfunktionen), aber das dabei erhaltene alternative Auslastungsspiel ist dann ebenfalls gewichtet und hat daher im Allgemeinen kein Potential. Ackermann, Röglin und Vöcking geben in [ARV06, Theorem 14] ein lastgewichtetes<sup>10</sup> Matroidspiel mit zwei Spielern, vier Ressourcen und monoton wachsenden Kostenfunktionen an, welches kein Beste-Antwort-Potential besitzt. Wegen Lemma 4.4 kann auch die gewichtete Version davon kein Beste-Antwort-Potential besitzen.

<sup>10</sup>Dort werden lastgewichtete Auslastungsspiele als „weighted congestion games“ bezeichnet.



### 4.3 Weitere Zusammenhänge

Aus Satz 4.12 wissen wir bereits, dass jedes gewichtete  $N$ -Personen-Auslastungsspiel mit affin linearen Kostenfunktionen ein exaktes Potential hat und daher nach Satz 4.1 äquivalent zu einem (ungewichteten) Auslastungsspiel ist. Der folgende Satz enthält im Wesentlichen die gleiche Aussage, allerdings auch für Spiele mit unendlicher Spielermenge. Außerdem ist das konstruierte Auslastungsspiel etwas einfacher und hat im Allgemeinen eine kleinere Ressourcenmenge.

**Satz 4.21.** *Sei  $\Gamma(M, w)$  ein gewichtetes Auslastungsspiel, in dem alle Kostenfunktionen affin linear sind. Dann gibt es ein dazu äquivalentes (ungewichtetes) Auslastungsspiel.*

*Beweis.* Seien also die Kostenfunktionen aus  $M$  von der Form  $g_r(k) = a_r k + b_r$ .

Definiere eine Ressourcenmenge  $Q := \{ (r, \{i, i'\}) \mid r \in R, i, i' \in I \}$  mit Kostenfunktionen  $h_{(r, \{i, i'\})}$  darauf so, dass gilt:

$$h_{(r, \{i, i'\})}(k) = \begin{cases} 0, & k = 1, i \neq i' \\ a_r w_i w_{i'}, & k = 2, i \neq i' \\ a_r w_i^2 + b_r w_i & k = 1, i = i' \end{cases}$$

Schließlich ist der Strategieraum von Spieler  $i \in I$  gegeben durch

$$T_i := \{ \{ (r, \{i, i'\}) \mid r \in s_i, i' \in I \} \mid s_i \in S_i \}.$$

Dadurch erhalten wir das Auslastungsmodell  $N := (I, Q, \prod_{i \in I} T_i, (h_q)_{q \in Q})$ . Die Lastenfunktionen des davon erzeugten Auslastungsspiel sind offensichtlich wohldefiniert, da keine Ressource von mehr als zwei Spielern genutzt werden kann. Die Wohldefiniertheit der Kostenfunktionen ergibt sich aus der Äquivalenz von  $\Gamma(N)$  zu  $\Gamma(M)$ .

Zum Beweis der Äquivalenz betrachten wir den Morphismus  $(\text{id}, \phi) : \Gamma(M, w) \rightarrow \Gamma(N)$  mit Strategieabbildungen  $\phi_i : S_i \rightarrow T_i : s_i \mapsto \{ (r, \{i, i'\}) \mid r \in s_i, i' \in I \}$ . Dieser Morphismus ist offensichtlich auf allen Mengen bijektiv und zudem kostenerhaltend, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d_i(\phi(s)) &= \sum_{q \in \phi(s)_i = \phi_i(s_i)} h_q(l_q(\phi(s))) = \sum_{r \in s_i, i' \in I} h_{(r, \{i, i'\})}(l_{(r, \{i, i'\})}(\phi(s))) = \\ &= \sum_{r \in s_i} \left( h_{(r, \{i\})}(\underbrace{l_{(r, \{i\})}(\phi(s))}_{=1}) + \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} h_{(r, \{i, i'\})}(\underbrace{l_{(r, \{i, i'\})}(\phi(s))}_{=2 \iff r \in s_{i'}}) \right) = \\ &= \sum_{r \in s_i} \left( a_r w_i^2 + b_r w_i + \sum_{i' \in I \setminus \{i\}: r \in s_{i'}} a_r w_i w_{i'} \right) = \sum_{r \in s_i} w_i \left( b_r + a_r \sum_{i' \in I: r \in s_{i'}} w_{i'} \right) = \\ &= \sum_{r \in s_i} w_i (b_r + a_r l_r(s)) = \sum_{r \in s_i} w_i g_r(l_r(s)) = c_i(s) \end{aligned}$$

□

*Beobachtung 4.22.* Da immer nur an höchstens zwei Stellen Bedingungen an die Ressourcenkosten gestellt werden, lassen sich diese insbesondere immer als affin-lineare Funktionen realisieren. Im Gegensatz dazu ist das bei dem Auslastungsspiel, welches man über den Umweg eines exakten Potentials und Satz 4.1 erhalten würde, im Allgemeinen nicht der Fall.

Außerdem wird die Ressourcenmenge dabei auf die Größe des Strategieraums des Ausgangsspiels vergrößert (welcher theoretisch  $\mathcal{P}(R)^I$  sein kann). Bei dem hier konstruierten Auslastungsspiel ist die neue Ressourcenmenge hingegen lediglich  $R \times I^2$ .

Nachdem wir die Äquivalenz von ungewichteten Auslastungs- und exakten Potentialspielen in Satz 4.10 bereits auf kostengewichtete Auslastungs- und gewichtete Potentialspiele übertragen haben, werden wir nun untersuchen inwieweit sich dies auch für skalierte Auslastungs- und Potentialspiele fortsetzen lässt. Die eine Richtung gilt dabei weiterhin mit einem leicht schwächeren Isomorphiebegriff:

**Satz 4.23.** *Jedes skalierte  $N$ -Personen-Potentialspiel ist exakt isomorph zu einem skalierten Auslastungsspiel.*

*Beweis.* Gegeben also ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  mit einem skalierten Potential  $P$  sowie entsprechenden Skalierungsfunktionen  $f_i$ . Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass es einen Wert  $t \in \mathbb{R}$  gibt, der von allen Skalierungsfunktionen auf 0 abgebildet wird. Ist dies nämlich nicht der Fall, so wählen wir ein beliebiges aber festes Strategieprofil  $\tilde{x} \in X$ , setzen  $t := P(\tilde{x})$  und verwenden alternative Skalierungsfunktionen  $f'_i(\_) := f_i(\_) - f_i(t)$ . Diese bilden offensichtlich  $t$  auf 0 ab und sind immer noch streng monoton. Ferner sind sie weiterhin Skalierungsfunktionen zu dem gegebenen Potential  $P$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} f'_i(P(x)) - f'_i(P(x \mid \hat{x}_i)) &= (f_i(P(x)) - f_i(t)) - (f_i(P(x \mid \hat{x}_i)) - f_i(t)) = \\ &= f_i(P(x)) - f_i(P(x \mid \hat{x}_i)) = c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) \end{aligned}$$

Nun definieren analog zum Beweis von Satz 4.1 das Auslastungsmodell  $M = (I, R, S, (g_r))$ :

- $R := \{ (\{x_i\})_{i \in I} \mid x_i \in X_i \} \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X_i)$
- Für die Ressourcenkosten definieren wir:

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_k \text{ und } k = N \\ t, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $S_i := \{ \{ r \in R \mid x_i \in r_i \} \mid x_i \in X_i \}$

Die induzierten Lastfunktionen sind automatisch wohldefiniert, da die Spielermenge endlich ist, die Kostenfunktionen  $d_i$  sind es, da jeder Spieler immer nur genau für eine Ressource etwas zahlen muss. Zum Beweis der exakten Isomorphie von  $\Gamma$  und  $\Gamma(M, (f_i))$  betrachten wir den über  $\phi_i(x) := s(x_i) := \{ r \in R \mid x_i \in r_i \}$  definierten Morphismus

$(\text{id}, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma(M)$ . Dieser ist offenkundig bijektiv auf allen Mengen und zudem exakt, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
d_i(\phi(x)) - d_i(\phi(x \mid \hat{x}_i)) &= \sum_{r \in \phi(x)_i = \phi_i(x_i)} f_i \circ g_r(l_r(\phi(x))) - \sum_{r \in \phi_i(\hat{x}_i)} f_i \circ g_r(l_r(\phi(x \mid \hat{x}_i))) = \\
&= \sum_{r \in R_K : x_i \in r_i} f_i(\underbrace{g_r(l_r(\phi(x)))}_{=t \Leftarrow r \neq (\{x_i\})_{i \in I}}) - \sum_{r \in R_K : \hat{x}_i \in r_i} f_i(\underbrace{g_r(l_r(\phi(x \mid \hat{x}_i)))}_{=t \Leftarrow r \neq (\{x_i\}) \mid \{\hat{x}_i\}}) = \\
&= f_i \circ g_{(\{x_i\})_{i \in I}}(N) - f_i \circ g_{(\{x_i\}) \mid \{\hat{x}_i\}}(N) = \\
&= f_i \circ P(x) - f_i \circ P(x \mid \hat{x}_i) = c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) \quad \square
\end{aligned}$$

Die Rückrichtung hingegen können wir nur in einer deutlich abgeschwächten Form zeigen:

**Satz 4.24.** *Jedes skalierte  $N$ -Personen-Singleton-Auslastungsspiel hat ein ordinales Potential.*

*Beweis.* Die Rosenthal-Potentialfunktion ist ein ordinales Potential, denn es gilt (für  $s_i = \{r\}, \hat{s}_i = \{\hat{r}\}$ ):

$$\begin{aligned}
c_i(s) < c_i(s \mid \hat{s}_i) &\iff f_i \circ g_r(l_r(s)) < f_i \circ g_{\hat{r}}(l_{\hat{r}}(s) + 1) \iff g_r(l_r(s)) < g_{\hat{r}}(l_{\hat{r}}(s) + 1) \\
&\iff P(s) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} g_r(k) < \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s \mid \hat{s}_i)} g_r(k) = P(s \mid \hat{s}_i) \quad \square
\end{aligned}$$

Skalierte Nicht-Singleton-Auslastungsspiele hingegen besitzen im Allgemeinen nicht einmal ein Nash-Potential (also erst recht kein ordinales) wie das folgende Beispiel zeigt:

**Beispiel 4.25.** Wir betrachten ein skaliertes 2-Personen-Auslastungsmodell mit Ressourcenmenge  $R := \{r, s, t, u, v\}$ , folgenden Ressourcenkosten

Ressource:	$r$	$s$	$t$	$u$	$v$
$g_{-}(1)$	1	2	4	1	3
$g_{-}(2)$	5	2	—	4	—

Strategiemengen  $S_1 := \{\{r, s\}, \{u, v\}\}$  und  $S_2 := \{\{s, t\}, \{r, u\}\}$  sowie den Skalierungsfunktionen

	1	2	3	4	5
$f_1(\_)$	2	4	6	8	9
$f_2(\_)$	1	2	3	4	10

Dadurch erhalten wir das durch folgende Kostenmatrix beschriebene Spiel:

	$\{s, t\}$	$\{r, u\}$
$\{r, s\}$	(6,6)	(13,11)
$\{u, v\}$	(5,8)	(14,5)

Da dieses Spiel kein Nash-Gleichgewicht besitzt (den Strategieraum entgegen dem Uhrzeigersinn zu durchlaufen ergibt einen Verbesserungszykel), kann es zu diesem Spiel nach Satz 2.35 kein Nash-Potential geben.

Schließlich wollen wir noch die allgemeinste Form der zu Beginn dieser Arbeit definierten Auslastungsspiele betrachten: Gewichtete Auslastungsspiele mit nicht-anonymen Ressourcenkosten. Da endliche Spiele Korollar 4.8 zufolge immer äquivalent zu einem gewichteten Auslastungsspiel sind, lassen sich insbesondere (endliche) nicht-anonyme gewichtete Auslastungsspiele immer auch als solche darstellen. Dabei wird allerdings die Ressourcenmenge im Allgemeinen erheblich größer.

Begnügen wir uns hingegen mit gewichtender Isomorphie (statt kostenerhaltender), so ist ein entsprechender Wechsel zu gewichteten Auslastungsspielen ohne Vergrößerung der Ressourcenmenge und selbst bei abzählbar unendlichen Spielermengen möglich:

**Satz 4.26.** *Jedes nicht-anonyme Auslastungsspiel mit abzählbarer Spielermenge ist äquivalent zu einem lastgewichteten (anonymen) Auslastungsspiel und jedes nicht-anonyme gewichtete Auslastungsspiel mit abzählbarer Spielermenge ist gewichtend isomorph zu einem gewichteten (anonymen) Auslastungsspiel. Dabei verwenden jeweils beide Spiele die gleiche Ressourcenmenge.*

*Beweis.* Sei  $M = (I, R, S, (g_r))$  das gegebene nicht-anonyme Auslastungsmodell. Da  $I$  abzählbar ist, können wir ohne Einschränkung  $I \subseteq \mathbb{N}$  annehmen. Wir definieren nun einen Gewichtsvektor  $v := (1/3^n)_{n \in I}$ . Damit entspricht jede (endliche) Teilmenge  $J \subseteq I$  einer eindeutigen Zahl  $v(J) := \sum_{n \in J} 1/3^n$  und wir können neue (anonyme) Ressourcenkosten  $h_r$  definieren:

$$h_r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : k \mapsto \begin{cases} g_r(l_r(J)), & k = v(J) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir erhalten so ein (anonymes) Auslastungsmodell  $N := (I, R, S, (h_r))$  und sehen leicht, dass  $\Gamma(M)$  und  $\Gamma_l(N, v)$  äquivalent sind. Dabei sind die Lastfunktionen wohldefiniert, da  $\sum_{n \in I} 1/3^n$  endlich ist, und die Kostenfunktionen wegen der Äquivalenz zu  $\Gamma(M)$ .

Ist zusätzlich ein Gewichtsvektor  $w = (w_i)_{i \in I}$  gegeben, so ist das nicht-anonyme gewichtete Auslastungsspiel  $\Gamma(M, w)$  gewichtend isomorph zum gewichteten Auslastungsspiel  $\Gamma(N, v)$ , wobei  $(w_i/v_i)_{i \in I}$  der Gewichtsvektor des Isomorphismus ist.  $\square$

Erlauben wir uns nun bei der Konstruktion des Auslastungsspieles, welches äquivalent zu einem exakten bzw. gewichteten Potentialspiel ist, die Verwendung der nicht-anonymen Variante, so erhalten wir die Entsprechungen der Sätze 4.1 und 4.10 auch für unendliche bzw. überabzählbare Spiele.

**Satz 4.27.** *Jedes Spiel mit einem exakten Potential ist äquivalent zu einem (ungewichteten) nicht-anonymen Auslastungsspiel und jedes Spiel mit gewichtetem Potential ist äquivalent zu einem gewichteten nicht-anonymen Auslastungsspiel.*

*Beweis.* Wir verwenden eine leicht angepasste Variante der Konstruktion aus dem Beweis zu Satz 4.1: Gegeben also ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  mit einem exakten Potential  $P$ . Hierzu definieren wir folgendes nicht-anonymes Auslastungsmodell  $M = (I, R, S, (g_r)_{r \in R})$ :

- Die Ressourcenmenge  $R := R_K \cup R_D \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X_i)$  setzt sich genauso zusammen wie im ursprünglichen Beweis
  - $R_K := \{ (\{x_i\})_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$  und
  - $R_D := \{ (Y_i)_{i \in I} \mid \exists \hat{i} \in I : Y_{\hat{i}} = X_{\hat{i}}, \forall i \neq \hat{i} : |X_i \setminus Y_i| = 1 \}$ .
- Und auch die Ressourcenkosten sind jeweils nur für genau eine Auslastung nicht null: Da die Lastfunktionen nicht-anonymer Auslastungsspiele mengenwertig sind, können wir hier nun auch bei unendlichen Spielermengen testen, ob alle Spieler zugleich eine bestimmte Ressource nutzen (was für die Ressourcen aus  $R_k$  notwendig ist).

$$g_r(J) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_k \text{ und } J = I \\ c_i(x) - P(x), & r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \{\hat{i}\}} \times X_{\hat{i}} \in R_D, x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}} \text{ bel. und } |J| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zweite Fall hängt wieder nicht von der Wahl der Strategie  $x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$  ab.

- $S_i := \{ \{ r \in R \mid x_i \in r_i \} \mid x_i \in X_i \}$

Die Wohldefiniertheit der Kostenfunktionen  $d_i$  folgt aus dem Beweis der Äquivalenz der Spiele  $\Gamma$  und  $\Gamma(M)$ . Dazu betrachten wir  $(\text{id}, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma(M)$ , wobei  $\phi_i(x) := s(x_i) := \{ r \in R \mid x_i \in r_i \}$  ist. Dieser ist offenkundig bijektiv auf allen Mengen und zudem kostenerhaltend, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d_i(\phi(x)) &= \sum_{r \in \phi(x)_i = \phi_i(x_i)} g_r(l_r(\phi(x))) = \sum_{r \in R: x_i \in r_i} g_r(l_r(\phi(x))) = \\ &= \sum_{r \in R_K: x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{= I \Leftrightarrow r = (\{x_i\})_{i \in I}}) + \sum_{r \in R_D: x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{|\cdot|=1 \Leftrightarrow r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \{\hat{i}\}} \times X_{\hat{i}}}) = \\ &= g_{(\{x_i\})_{i \in I}}(I) + g_{(X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \{\hat{i}\}} \times X_{\hat{i}}}(\{x_i\}) = \\ &= P(x) + c_i(x) - P(x) = c_i(x) \end{aligned}$$

Für den Beweis des zweiten Teils des Satzes können wir völlig analog den Beweis zu Satz 4.10 anpassen.  $\square$

## 4.4 Zusammenfassung

In Abbildung 4 sind die meisten der in diesem Kapitel beschriebenen Zusammenhänge in einer gemeinsamen Übersicht dargestellt.



## Ausblick

Wir haben nun also gesehen, wie (Iso-)Morphismen von Spielen genutzt werden können, um Zusammenhänge zwischen Spielen zu formalisieren und zu verstehen, welche Eigenschaften die zwei Spiele an den beiden Enden des Morphismus gemeinsam haben. Diese haben wir dann genutzt, um verschiedene Aussagen über Potential- und Auslastungsspiele zu zeigen. Dabei ist es allerdings wichtig festzuhalten, dass die Verwendung von Morphismen hierbei niemals unumgänglich war, sondern die Aussagen immer auch ohne diesen Begriff hätten gezeigt werden können.

Die Verwendung von Morphismen dient daher vor allem der einheitlicheren Beschreibung von Beziehungen zwischen Spielen, erleichtert die Strukturierung der Zusammenhänge, vereinfacht und verkürzt manche Aussagen und gibt möglicherweise auch neue Ideen für weitere Beziehungen. Auch ist es so besser möglich, die verschieden starken Abstufungen von möglichen Beziehungen zu verstehen und etwa direkt zu sehen, welche Art von Beziehung man durch das Verknüpfen mehrerer solcher erhält.

Zunächst haben wir die Morphismenbegriffe dazu genutzt, Potentiale durch passende Morphismen in Koordinationsspiele zu beschreiben. Dadurch hoffen wir, einen neuen Blickwinkel auf Potentiale gewonnen zu haben. Ferner haben wir diesen Zusammenhang genutzt, um einige Eigenschaften und Zusammenhänge der verschiedenen Potentialarten zu beweisen.

Sodann haben wir analoge Sätze zu dem von Monderer und Shapley für gewichtete und skalierte Potentiale gesehen, haben Beste-Antwort-Isomorphismen und deren Verknüpfung dazu genutzt, schnelle Konvergenz der Beste-Antwort-Dynamik für Matroidspiele zu zeigen, und haben gesehen, wie sich selbst nicht-anonyme Auslastungsspiele als gewöhnliche anonyme Auslastungsspiele darstellen lassen.

Gleichzeitig haben wir aber auch festgestellt, dass skalierte Auslastungsspiele bereits wieder eine zu große Klasse von Auslastungsspielen sind, um vollständig in der Menge der Spiele mit skaliertem Potential enthalten sein zu können. Entsprechend unserer Suche nach einer passenden Klasse für Spiele mit gewichtetem Potential könnte man nun weiter nach einer passenderen Verallgemeinerung von kostengewichteten Auslastungsspielen suchen, die genau den skalierten Potentialspielen entspricht.

Ein anderes Ziel könnte es sein, andere Varianten zu finden, die noch allgemeineren Potentialspielen entsprechen. Vermutlich wird dies allerdings neue und aufwändigere Konstruktionen erfordern, da die Potentiale mit größerer Allgemeinheit immer weniger Information über das ursprüngliche Spiel enthalten. Ein skaliertes Potential etwa legt zusammen mit den Skalierungsfunktionen ein Spiel noch bis auf exakte Isomorphie eindeutig fest, ein ordinales Potential hingegen tut das nicht mehr (da hier zwar noch das Vorzeichen, aber keine Information mehr über die Größe der Änderungen eingeht).

Weitere Fragestellungen könnten sein, welche Sätze man noch für unendliche Spiele verallgemeinern kann (v.a. Satz 4.7 und der zweite Teil von Satz 4.1) oder ob man Konstruktionen in bereits existierenden Sätzen vereinfachen kann (etwa ob man analog



zu Satz 4.21 gewichtete Auslastungsspiele mit affin exponentiellen Ressourcenkosten ohne den Umweg eines gewichteten Potentials direkt in isomorphe kostengewichtete Auslastungsspiele umwandeln kann). All diese Fragen lassen sich für kostenerhaltende Isomorphie (also Äquivalenz), aber – falls die entsprechenden Aussagen nicht zugänglich oder sogar falsch sind – auch für die verschiedenen schwächeren Isomorphiebegriffe untersuchen.

## Index

- Auslastungsmodell, [11](#)
- Auslastungsspiel, [12](#)
  - gewichtetes, [13](#)
  - kostengewichtetes, [13](#)
  - lastgewichtetes, [13](#)
  - skaliertes, [13](#)
- Dummy-Spiel, [8](#)
- Dummy-Spieler, [8](#)
- finite improvement property (FIP), [10](#)
- Koordinationsspiel, [8](#)
- Matroid, [14](#)
- Matroidmodell, [14](#)
- Matroidspiel, [14](#)
- Morphismus, [36](#)
- Nash-Gleichgewicht, [8](#)
- Pfad, [9](#)
  - Beste-Antwort-, [9](#)
  - Beste-Antwort-Verbesserungs-, [10](#)
  - Nichtverschlechterungs-, [9](#)
  - schwacher Beste-Antwort-Verbesserungs-, [9](#)
  - schwacher Verbesserungs-, [9](#)
  - Verbesserungs-, [9](#)
- Pfadzusammenhangskomponente, [11](#)
- Potential
  - Beste-Antwort-, [16](#), [31](#)
  - exaktes, [17](#), [23](#), [24](#)
  - gewichtetes, [17](#), [25](#)
  - lokales Nash-, [16](#)
  - ordinales, [17](#), [26](#)
  - skaliertes, [17](#), [25](#)
  - verallgemeinertes ordinales, [17](#), [29](#)
- Schritt, [9](#)
  - Beste-Antwort-, [9](#)
  - Nichtverschlechterungs-, [9](#)
  - Verbesserungs-, [9](#)
- skaliertes Koordinationsspiel, [8](#)
- Spiel, [7](#)
  - $N$ -Personen-, [7](#)
  - endliches, [7](#)

## Literatur

- [ARV06] Heiner Ackermann, Heiko Röglin und Berthold Vöcking. „Pure Nash Equilibria in Player-Specific and Weighted Congestion Games“. In: *Internet and Network Economics: Second International Workshop, WINE 2006, Patras, Greece, December 15-17, 2006. Proceedings*. Springer Berlin Heidelberg, 2006, S. 50–61. ISBN: 978-3-540-68141-0.  
URL: [https://dx.doi.org/10.1007/11944874\\_6](https://dx.doi.org/10.1007/11944874_6).
- [ARV08] Heiner Ackermann, Heiko Röglin und Berthold Vöcking. „On the Impact of Combinatorial Structure on Congestion Games“. In: *J. ACM* 55.6 (Dez. 2008), 25:1–25:22.  
URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1455248.1455249>.
- [HK12] Tobias Harks und Max Klimm. „On the Existence of Pure Nash Equilibria in Weighted Congestion Games“. In: *Mathematics of Operations Research* 37.3 (2012), S. 419–436.  
URL: <https://dx.doi.org/10.1287/moor.1120.0543>.
- [HKM11] Tobias Harks, Max Klimm und Rolf H. Möhring. „Characterizing the Existence of Potential Functions in Weighted Congestion Games“. In: *Theory of Computing Systems* 49.1 (2011), S. 46–70.  
URL: <https://dx.doi.org/10.1007/s00224-011-9315-x>.
- [Jim14] Alfi Jiménez. *Game Theory from the Category Theory Point of View*. 2014.  
URL: <http://www.gtcenter.org/Archive/2014/Conf/Jimenez1880.pdf> (besucht am 27.04.2017).
- [Kuk17] Nikolai S. Kukushkin. „A universal construction generating potential games“. In: *Games and Economic Behavior* (2017).  
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825617300386>.
- [Lap99] Victor Lapitsky. „On some Categories of Games and Corresponding Equilibria“. In: *International Game Theory Review* 1.2 (1999), S. 169–185.
- [Mil13] Igal Milchtaich. „Representation of finite games as network congestion games“. In: *International Journal of Game Theory* 42.4 (2013), S. 1085–1096.  
URL: <https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/03.html>.
- [Mil15] Igal Milchtaich. „Polyequilibrium“. Bar-Ilan University, Department of Economics, 2015.  
URL: <https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/30.html>. Working Paper.

- [Mil96] Igal Milchtaich. „Congestion Games with Player-Specific Payoff Functions“. In: *Games and Economic Behavior* 13.1 (1996), S. 111–124.  
URL: <https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/20.html>.
- [Mon07] Dov Monderer. „Multipotential Games“. In: *Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 2007.  
URL: [https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/dov/image/bce0fb629a68f9b2e9bd487ebb73356d/multi\\_potential\\_games--monderer.pdf](https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/dov/image/bce0fb629a68f9b2e9bd487ebb73356d/multi_potential_games--monderer.pdf).
- [MS96] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Potential Games“. In: *Games and Economic Behaviour* 14.1 (1996), S. 124–143.  
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825696900445>.
- [MU04] Stephen Morris und Takashi Ui. „Best response equivalence“. In: *Games and Economic Behavior* 49.2 (2004), S. 260–287.  
URL: [https://www.princeton.edu/~smorris/pdfs/paper\\_40\\_Best\\_Response\\_Equivalence.pdf](https://www.princeton.edu/~smorris/pdfs/paper_40_Best_Response_Equivalence.pdf).
- [Nas51] John Nash. „Non-Cooperative Games“. In: *Annals of Mathematics* 54.2 (1951), S. 286–295.  
URL: <http://www.jstor.org/stable/1969529>.
- [Ros73] Robert W. Rosenthal. „A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria“. In: *International Journal of Game Theory* 2.1 (1973), S. 65–67.  
URL: <https://dx.doi.org/10.1007/BF01737559>.
- [Sch03] Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency*. Bd. B. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. ISBN: 978-3-540-44389-6.
- [VN97] Mark Voorneveld und Henk Norde. „A Characterization of Ordinal Potential Games“. In: *Games and Economic Behavior* 19.2 (1997), S. 235–242.  
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825697905546>.
- [Voo+99] Mark Voorneveld u. a. „Congestion games and potentials reconsidered“. In: *International Game Theory Review* 1.03n04 (1999), S. 283–299.  
URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219198999000219>.
- [Voo00] Mark Voorneveld. „Best-response potential games“. In: *Economics Letters* 66.3 (2000), S. 289–295.  
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165176599001962>.
- [Vor94] Nicolai N. Vorob'ev. *Foundations of Game Theory. Noncooperative Games*. Englisch. Übers. von Ralph P. Boas. Birkhäuser Basel, 1994.  
URL: <https://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-8514-0>.