Universität Augsburg

Institut für Mathematik

Masterarbeit

Insert Title

von:
Lukas Graf

Betreut von:
Prof. Dr. Tobias Harks

Inhaltsverzeichnis

1 Morphismen von Spielen 3

Literatur 4

1 Morphismen von Spielen

Definition 1.1. Ein *Spiel in strategischer Form* Γ ist gegeben durch ein Tupel $(I, X = \prod_{i \in I} X_i, (K_i)_{i \in I}, (u_i : X \to K_i)_{i \in I})$. Dabei ist:

- I die Menge der Spieler,
- X_i die Menge der (reinen) Strategien von Spieler i,
- K_i die

  Übersetzung von Payoff-Raum evtl. angepasst für Kosten?

  von Spieler i und
- u_i die Kostenfunktion von Spieler i

Definition 1.2. Zwei Spiele $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K_i)_{i \in I}, (u'_i)_{i \in I})$ heißen *äquivalent*, wenn es für jeden Spieler i eine bijektive Abbildung $\phi_i : X_i \to X'_i$ gibt, sodass gilt:

$$\forall x \in X : u_i(x) = u'_i(\phi(x))$$

Bemerkung 1.3. Zwei Spiele sind also genau dann äquivalent, wenn sie sich ausschließlich durch Umbenennung der Strategien ineinander überführen lassen. In [MS96] (S. 133) wird dies als Isomorphie von Spielen bezeichnet.

Permutation von Spielern erlauben?

Definition 1.4. Zwei Spiele $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i \in I}, (u'_i)_{i \in I})$ heißen *isomorph*, falls es bijektive Abbildungen $\phi_i : X_i \to X'_i$ sowie bijektive und monotone Abbildungen $\psi_i : K_i \to K'_i$ gibt, sodass alle Diagramme der folgenden Form kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "u_i"] & X' \arrow[d, "u'_i"] \\
K_i \arrow[r, "\psi_i"] & K'_i
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 1.5. Diese Definition ergibt sich aus der abstrakteren Definition für in [Lap99].

...

Definition 1.6. Zwei isomorphe Spiele (im Sinne von definition 1.4) $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i \in I}, (u'_i)_{i \in I})$ heißen *sozial isomorph*, wenn zusätzlich die Funktion

$$\sum \psi_i : \prod_{i \in I} K_i \to \prod_{i \in I} K'_i$$

monoton ist.

Das macht natürlich nur Sinn, wenn auf den beiden Produkträumen auch totale (?) Ordnungen existieren

Definition 1.7. Ein *Nash-Morphismus* $\gamma : \Gamma \to \Gamma'$ zwischen zwei Spielen $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i \in I}, (u'_i)_{i \in I})$ ist gegeben durch Abbildungen $\phi_i : X_i \to X'_i$ sodass gilt:

$$\forall x \in X, i \in I, \hat{x}_i \in X_i : u_i(\hat{x}_i, x_{-i}) > u_i(x) \Rightarrow u'_i(\phi(\hat{x}_i, x_{-i})) > u'_i(\phi(x))$$

Literatur

[Jim14] Alfi Jiménez. *Game Theory from the Category Theory Point of View*. 2014. URL: https://www.gtcenter.org/Archive/2014/Conf/Jimenez1880.pdf (besucht am 15. 01. 2017).

[Lap99] Victor Lapitsky. „On some Categories of Games and Corresponding Equilibria“. In: *International Game Theory Review* 1.2 (1999), S. 169–185.

[MS96] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Potential Games“. In: *Games and Economic Behaviour* (1996), S. 124–143.