

UNIVERSITÄT AUGSBURG

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Masterarbeit

Insert Title

*von:*  
Lukas GRAF

*Betreut von:*  
Prof. Dr. Tobias HARKS

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>6</b>
1.1 Spiele in strategischer Form . . . . .	6
1.2 Abweichungspfade . . . . .	7
1.3 Auslastungsspiele . . . . .	9
<b>2 Potentiale</b>	<b>13</b>
2.1 Definitionen . . . . .	13
2.2 Anschauung . . . . .	15
2.3 Eigenschaften der Potentiale . . . . .	16
2.4 Charakterisierungen der Potentiale . . . . .	18
2.4.1 Exakte Potentiale . . . . .	18
2.4.2 Gewichtete und skalierte Potentiale . . . . .	20
2.4.3 Ordinale Potentiale . . . . .	21
2.4.4 Verallgemeinerte ordinale Potentiale . . . . .	22
2.4.5 Beste-Antwort-Potentiale . . . . .	25
2.4.6 Nash-Potentiale . . . . .	27
2.4.7 Zusammenfassung . . . . .	28
<b>3 Morphismen</b>	<b>30</b>
3.1 Definitionen . . . . .	30
3.2 Beweise der Potentialsätze . . . . .	37
3.3 Weitere Sätze mit Morphismen . . . . .	39
<b>4 Zusammenhänge von Auslastungs- und Potentialspielen</b>	<b>42</b>
4.1 Von ungewichtet zu gewichtet . . . . .	43
4.1.1 Gewichtete Auslastungsspiele . . . . .	43
4.1.2 Lastgewichtete Auslastungsspiele . . . . .	44
4.1.3 Kostengewichtete Auslastungsspiele . . . . .	45
4.2 Weitere Zusammenhänge . . . . .	46
4.2.1 Schnelle Beste-Antwort-Dynamik in Auslastungsspielen . . . . .	48
4.3 Überblick . . . . .	50
<b>Literatur</b>	<b>52</b>

## Liste der noch zu erledigenden Punkte

Insert Title . . . . .	1
Motivation/Anschauung . . . . .	7
Vorneveld nennt es beste Antwort-kompatibel . . . . .	7
Schöner formulieren . . . . .	8

Ordnen/Aussortieren/Beweise? . . . . .	8
Wohldefiniertheit? Evtl. direkt mit Relationen definieren? . . . . .	8
Wirklich „genau dann wenn“? Dann evtl. in Definition aufnehmen. . . . .	9
gewichtetes Netzwerkauslastungsspiel . . . . .	10
Quelle? . . . . .	10
[citation needed(?)] Matroid . . . . .	11
Potentiale aus [MU04]? . . . . .	14
Beziehungen beweisen? → Kapitel 3 . . . . .	14
Wann ist ein ordinales Potentialspiel bereits ein skaliertes? Zumindest für endliche Spiele sollte das stimmen? . . . . .	14
Besseres Bild! . . . . .	16
Alternativ direkt sagen, dass das Potentialrelief verschieden stark gestreckt/gestaucht wird. . . . .	16
Evtl. die einfachen direkt hier, zumindest die schwierigeren aber erst in Kapitel 3 - hier aber darauf verweisen! . . . . .	17
Beispiel? . . . . .	17
Tabelle korrigieren, erweitern, erklären... . . . .	18
Gibt es eine bessere Charakterisierung von gew. Potentialen? Insb. ohne dass man schon den richtigen Gewichtsvektor angeben muss? . . . . .	20
evtl. schon im Grundlagenkapitel gemeinsam mit Pfadzusammenhangskomponenten? . . . . .	21
Formulierung mit Satz 2.17 in Einklang bringen . . . . .	21
Formulierung mit Satz 2.15 in Einklang bringen . . . . .	23
wirklich gezeigt wird es dort eigentlich nicht (sondern auf andere Quelle verwiesen) . . . . .	23
Tabelle korrigieren, erweitern, erklären... . . . .	29
Motivation: Warum betrachtet man überhaupt Morphismen von Spielen. Wie indu- zieren diese Isomorphismen? . . . . .	30
Umgekehrt kann man aus Isomorphiebegriffen neue Potentialbegriffe definieren (vgl. [MU04]) . . . . .	30
Diese Punkte (insbesondere den letzten) näher ausführen? . . . . .	30
Genauer beschreiben... . . . .	31
Stimmt das so? . . . . .	32
Kann man auch Dummy-Spiele auf derartige Weise beschreiben? . . . . .	32

Gibt es irgendeine anschauliche Konstruktion von Spielen, die sich als Produkt beschreiben lässt? Falls nicht, eher weglassen. . . . .	32
Diagramm zur Veranschaulichung des Beweises. Wie beschriftet man die Pfeile vernünftig? . . . . .	34
Ist dieser Satz wirklich sinnvoll? Insbesondere mit diesem Beweis? . . . . .	35
Beispiel für die Nicht-Notwendigkeit finden! . . . . .	35
Als Auszahlungsmatrizen darstellen? . . . . .	36
Nachprüfen!!! . . . . .	36
bessere Formulierung . . . . .	36
Weiter... . . . .	37
einer der beiden/beide bijektiv auf ... sind? . . . . .	37
Beweis? . . . . .	37
Zu beste Antwort: vgl. [MS96a], [MU04] . . . . .	37
Wie sieht es mit Isomorphismen aus? Speziell auf Zusammenhang von skaliert und monoton eingehen! . . . . .	37
Ordinale Morphismen erhalten Verbesserungen und reflektieren Nicht-Verschlechterung: . . . . .	37
Zu obigen Sätzen jeweils Beispiele für Notwendigkeit der Voraussetzungen finden . . . . .	38
Näher ausführen - auf entsprechende Sätze im Potential-Kapitel verweisen . . . . .	38
Weitere unsortierte Sätze...: . . . . .	39
Begriff definieren! . . . . .	39
Begriff definieren! Evtl. zusammen mit Dummy-Spielen . . . . .	39
Kann man das noch schöner ausdrücken (mit Retrakten o.ä.)? . . . . .	39
Kein Zusammenhang zum Vorhergehenden: . . . . .	40
usw. . . . .	40
Ist der folgende Satz hilfreich? Wenn ja, wo unterbringen (eig. kein Potentialsatz!) . . . . .	40
Welche Endlichkeitsvoraussetzungen benötigt man hier jeweils? . . . . .	42
Mit Einleitung von Kapitel 1.3 vergleichen. . . . .	42
Wohldefiniertheit! . . . . .	42
Fälle: Exaktes Potential/gewichtetes Potential unterscheiden . . . . .	43
(sogar Netzwerkauslastungsspiel mit ...) . . . . .	44
... . . . .	46

Jedes kostengewichtete Auslastungsspiel ist gewichtet isomorph zu einem ungewichteten?! Kann später bei BA-Potential verwendet werden. . . . .	46
Direkte Konstruktion eines ungewichteten Auslastungsspiels zu gew. mit affin-linearen Kosten (wie ähnlich ist diese zu dem Beweis der Existenz eines exakten Potentials von Fotakis et al?) Kann man irgendwas zu Spielen mit exponentiellen Kosten sagen? . . . . .	46
Wohldefiniertheit von $\Gamma(N)$ . . . . .	46
Wohldefiniertheit! . . . . .	47
Im Unterschied zu Satz 4.4 bleibt hier die Ressourcenmenge gleich groß . . . . .	48
[citation needed] - wie lang genau? Exponentiell in ??? . . . . .	48
Was ist mit gewichteten Matroidspielen? Zumindest Kostengewichtete könnten funktionieren? . . . . .	49
Evtl. Korollar vor den Beweis des Satzes stellen um Bezug zur Motivation zu behalten.	50

# 1 Grundlagen

## 1.1 Spiele in strategischer Form

**Definition 1.1.** Ein (*nichtkooperatives*) *Spiel in strategischer Form* ist ein Tupel  $\Gamma = (I, X = (X_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ . Dabei ist

- $I$  die Menge der Spieler,
- $X_i$  die nicht-leere Menge der (reinen) Strategien von Spieler  $i$ ,
- $c_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$  die Kostenfunktion von Spieler  $i$ .

Das eigentliche Spiel besteht nun daraus, dass jeder Spieler versucht durch die Wahl einer Strategie  $x_i \in X_i$  aus seinem Strategieraum die eigenen Kosten  $c_i((x_j)_{j \in I})$  zu minimieren. Das Tupel  $x := (x_j)_{j \in I}$  bezeichnen wir dabei als *Strategieprofil*.

Wir nennen ein solches Spiel *endlich*, wenn der gesamte Strategieraum  $X$  endlich ist und  $N$ -Personenspiel, wenn  $|I| = N \in \mathbb{N}$  gilt.

*Beobachtung 1.2.* Ist ein Spiel endlich, so können wir in der Regel ohne Einschränkung annehmen, dass auch die Menge der Spieler endlich ist. Denn die Menge  $X = \prod_{i \in I} X_i$  kann nur endlich sein, wenn höchstens endlich viele  $X_i$  einelementig sind. Also haben in einem endlichen Spiel nur endlich viele Spieler mehr als eine Strategie. Für die Suche beispielsweise nach Nash-Gleichgewichten oder Verbesserungspfaden spielen aber nur solche Spieler eine Rolle. Wir werden dies später in Abschnitt 3 formal zeigen (siehe Beispiel 3.24).

*Notation 1.3.* Zu einem Strategieprofil  $x \in X$  und einer einzelnen Strategie  $\hat{x}_i \in X_i$  bezeichnen wir einer Konvention aus [Mil15] folgend mit  $(x \mid \hat{x}_i)$  das Strategieprofil, das aus  $x$  entsteht, wenn Spieler  $i$  einseitig seine Strategie von  $x_i$  auf  $\hat{x}_i$  ändert.

**Definition 1.4.** Ein Strategieprofil  $x \in X$  ist ein *Nash-Gleichgewicht*, wenn für jeden Spieler  $i \in I$  und jede seiner Strategien  $\hat{x}_i$  gilt:

$$c_i(x \mid \hat{x}_i) \geq c_i(x)$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist also ein Strategieprofil, aus dem heraus kein Spieler einen Anreiz für einen einseitigen Strategiewechsel hat.

In [Voo+99, Definition 2.2] werden Koordinations- und Dummy-Spiele definiert. Analog dazu definieren wir hier zusätzlich skalierte Koordinationsspiele:

**Definition 1.5.** Ein Spiel  $\Gamma = (I, X = (X_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$  heißt

- *Koordinationsspiel*, wenn alle Spieler eine gemeinsame Kostenfunktion nutzen, wenn also gilt  $c_i = c_j$  für alle Spieler  $i, j \in I$ .
- *skaliertes Koordinationsspiel*, wenn jeder Spieler eine streng monoton skalierte Variante einer gemeinsamen Kostenfunktion verwendet, d.h. wenn es eine Funktion  $c : X \rightarrow \mathbb{R}$  und streng monotone Funktionen  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass für jeden Spieler  $c_i = f_i \circ c$  gilt.

- *Dummenspiel*, wenn die alleinige Abweichung eines einzelnen Spielers von einem gegebenen Strategieprofil nie zu einer Änderung seiner Kosten führt. D.h. wenn für alle  $x \in X, i \in I$  und  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt  $c_i(x) = c_i(x \mid \hat{x}_i)$ .

*Beobachtung 1.6.* In einem (skalierten) Koordinationsspiel ist ein Strategieprofil bereits ein Nash-Gleichgewicht, wenn es nur für einen der Spieler optimal ist. Insbesondere haben damit endliche (skalierte) Koordinationsspiele immer mindestens ein Nash-Gleichgewicht, nämlich das (globale) Minimum der gemeinsamen Kostenfunktion.

In einem Dummy-Spiel ist *jedes* Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht, da ein einzelner Spieler durch einseitige Abweichung seine Kosten nie verändern und daher insbesondere nicht verringern kann.

## 1.2 Abweichungspfade

Aus [MS96b]/[Voo00]

Motivation/Anschauung

**Definition 1.7.** Eine Folge von Strategieprofilen  $\gamma = (x^0, x^1, x^2, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$  ist ein *Pfad*, wenn jeder Schritt aus der Abweichung eines einzelnen Spielers besteht. Das heißt wenn es für jeden Schritt  $k$  einen Spieler  $i(k) \in I$  gibt, sodass das Profil  $x^k$  aus  $x^{k-1}$  durch alleinige Abweichung dieses Spielers entsteht, also  $x^k = (x^{k-1} \mid x_{i(k)}^k)$ .

Ein solcher Pfad heißt

- *Nichtverschlechterungspfad*, wenn sich der abweichende Spieler jeweils nicht verschlechtert. Das heißt es gilt in jedem Schritt:  $c_{i(k)}(x^k) \leq c_{i(k)}(x^{k-1})$ .
- *schwacher Verbesserungspfad*, wenn er ein Nichtverschlechterungspfad ist und sich an mindestens einer Stelle der abweichende Spieler echt verbessert. Das heißt es gibt einen Schritt  $k$  mit  $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$ .
- *Verbesserungspfad*, wenn sich der abweichende Spieler jeweils echt verbessert. Das heißt es gilt in *jedem* Schritt:  $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$ .
- *Beste-Antwort-Pfad*, wenn der abweichende Spieler jeweils eine beste Alternativstrategie wählt, d.h.  $c_{i(k)}(x^k) = \min_{\hat{x}_{i(k)} \in X_{i(k)}} c_{i(k)}(x^{k-1} \mid \hat{x}_i)$ .
- *schwacher Beste-Antwort-Verbesserungspfad*, wenn er ein schwacher Verbesserungspfad und ein Beste-Antwort-Pfad ist.
- *Beste-Antwort-Verbesserungspfad*, wenn er ein Verbesserungspfad und ein Beste-Antwort-Pfad ist.

Voorneveld nennt es beste Antwort-kompatibel

Für einen endlichen Pfad  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$  ist

- die *Gesamtänderung* entlang des Pfades  $\delta(\gamma)$  definiert als die Summe aller Änderungen für die jeweils abweichenden Spieler:

$$\delta(\gamma) := \sum_{k=1}^n (c_{i(k)}(x^k) - c_{i(k)}(x^{k-1}))$$

- $\gamma$  ein *abgeschlossener Verbesserungspfad*, wenn er ein Verbesserungspfad ist, der nicht mehr nach hinten verlängert werden kann, d.h. es keine Strategie  $\hat{x}_i$  gibt, mit  $c_i(x^n | \hat{x}_i) < c_i(x^n)$ .

Schöner formulieren

- $\gamma$  ein *n-Zykel*, wenn  $x^0 = x^n$  gilt.
- $\overleftarrow{\gamma} := (x^n, x^{n-1}, \dots, x^0)$  der in die andere Richtung durchlaufende Pfad.

Ist zusätzlich  $\mu = (y^0, y^1, \dots)$  ein beliebiger Pfad, so ist  $\gamma \cdot \mu := (x^0, \dots, x^n, y^0, y^1, \dots)$  die Verknüpfung der beiden Pfade (und offensichtlich selbst wieder ein Pfad).

Beobachtung 1.8.

Ordnen/Aussortieren/Beweisen

- Ein endlicher Nichtverschlechterungspfad  $\gamma$  ist genau dann ein schwacher Verbesserungspfad, wenn  $\overleftarrow{\gamma}$  kein Nichtverschlechterungspfad ist.
- Zwei Pfade  $\gamma$  und  $\mu$  von  $x$  nach  $y$  haben genau dann die gleiche Gesamtänderung, wenn  $\gamma \cdot \overleftarrow{\mu}$  eine Gesamtänderung von 0 hat. Es gilt also für zwei solche Pfade:

$$\delta(\gamma) = \delta(\mu) \iff \delta(\gamma \cdot \overleftarrow{\mu}) = 0$$

- Jeder Beste-Antwort-Pfad ist automatisch ein Nichtverschlechterungspfad.

**Definition 1.9.** Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  des Strategieraumes bezeichnen wir als *Pfadzusammenhangskomponente*, wenn es für je zwei  $x, y \in Y$  einen Pfad von  $x$  nach  $y$  in  $Y$  gibt. Zu einem gegebenen Strategieprofil  $x \in X$  ist die *Pfadzusammenhangskomponente von x* die (bezüglich Inklusion) maximale Pfadzusammenhangskomponente  $Y_x \subseteq X$ , welche  $x$  enthält.

Wohldefiniertheit? Evtl. direkt mit Relationen definieren?

**Beobachtung 1.10.** Die Pfadzusammenhangskomponente eines Strategieprofils  $x$  besteht aus allen Strategieprofilen, die sich an höchstens endlich vielen Stellen von  $x$  unterscheiden, d.h.

$$Y_x = \{y \in X \mid \exists J \subseteq I : |J| < \infty \text{ und } \forall i \in I \setminus J : x_i = y_i\}$$

Insbesondere ist also für  $N$ -Personenspiele der gesamte Strategieraum eine einzige Zusammenhangskomponente.

**Definition 1.11.** Ein Spiel  $\Gamma$  hat die *finite improvement property (FIP)*, wenn jeder Verbesserungspfad endlich ist.

Eine anschauliche Bedeutung der FIP ist die, dass der natürliche Algorithmus zum Finden von Nash-Gleichgewichten immer terminiert: Dazu startet man mit einem beliebigen Strategieprofil und führt, solange dieses noch kein Nash-Gleichgewicht ist, einen der dann zur Auswahl stehenden Verbesserungsschritte durch. Im Laufe dieses Verfahrens beschreitet man gerade einen Verbesserungspfad und das Verfahren terminiert genau dann immer, wenn alle Verbesserungspfade endlich sind.

**Beobachtung 1.12.** Das Ende eines abgeschlossenen Verbesserungspfades ist immer ein Nash-Gleichgewicht. Denn wäre dem nicht so, dann gäbe es wenigstens einen Spieler, der sich



durch Abweichen noch verbessern kann - was zu einer Verlängerung des Verbesserungspfades führen würde.

Umgekehrt ist offenkundig auch jedes Nash-Gleichgewicht Ende wenigstens eines abgeschlossenen Verbesserungspfades (sogar Beste-Antwort-Verbesserungspfades) - nämlich des trivialen, nur aus diesem Strategieprofil bestehenden Verbesserungspfades.

**Korollar 1.13.** *Ein Spiel  $\Gamma$  besitzt genau dann (mindestens) ein Nash-Gleichgewicht, wenn es (mindestens) einen endlichen, maximalen (Beste-Antwort-)Verbesserungspfad besitzt. Ein Spiel mit FIP besitzt dementsprechend immer wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.*

### 1.3 Auslastungsspiele

Eine Klasse von Spielen, welche (im endlichen Fall) immer ein Nash-Gleichgewicht besitzt, bilden die sogenannten Auslastungsspiele, welche erstmals von Rosenthal in [Ros73] definiert wurden. Im folgenden wollen wir diese Klasse sowie einige Varianten davon definieren. Verschiedene Eigenschaften dieser sowie insbesondere ihre Beziehung zu Potentialspielen werden wir später in Abschnitt 4 diskutieren.

**Definition 1.14.** Ein *Auslastungsmodell*  $M$  ist gegeben durch ein Tupel  $(I, R, (S_i)_{i \in I}, (g_r)_{r \in R})$ . Dabei ist

- $I$  die Menge der Spieler,
- $R$  die Menge der zur Verfügung stehenden Ressourcen,
- $g_r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, welche die Kosten der Ressource  $r \in R$  in Abhängigkeit von ihrer Auslastung beschreibt, und
- $S_i \subseteq \mathcal{P}(R)$  die Menge von Teilmengen der Ressourcenmenge, unter denen sich der Spieler  $i$  für eine Teilmenge entscheiden kann.

**Definition 1.15.** Ein Auslastungsmodell  $M$  induziert ein *Auslastungsspiel*  $\Gamma(M) := (I, S = (S_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$  durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} g_r(l_r(s))$$

wobei  $l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto |\{i \in I \mid r \in s_i\}|$  die der Ressource ist, wenn alle  $c_i$  und alle  $l_r$  auf ganz  $S$  wohldefiniert sind (also die entsprechenden Summen für jedes  $s \in S$  konvergieren).

*Bemerkung 1.16.* Eine Lastfunktion  $l_r$  ist genau dann wohldefiniert, wenn diese Ressource  $r$  von höchstens endlich vielen verschiedenen Spielern benutzt werden kann. Das heißt wenn gilt:  $|\{i \in I \mid \exists s_i \in S_i : r \in s_i\}| < \infty$ . Sind alle  $l_r$  bereits wohldefiniert, so ist eine hinreichende Bedingung für die Wohldefiniertheit von  $c_i$ , dass alle diesem Spieler zur Auswahl stehende Teilmengen von  $R$  endlich sind. Diese Bedingung ist aber nicht notwendig.

Wirklich „genau dann wenn“? Dann evtl. in Definition aufnehmen.

Insbesondere induzieren Auslastungsmodelle mit endlicher Ressourcen- und Spielerzahl immer ein Auslastungsspiel.

Ist die Ressourcenmenge  $R$  endlich, so ist das induzierte Auslastungsspiel ein endliches Spiel (d.h. dessen Strategieraum ist endlich). Ist umgekehrt der Strategieraum endlich, so können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass auch  $R$  endlich ist. Denn in diesem Fall tauchen nur endlich viele der Ressourcen in einer Strategie wenigstens eines der Spieler auf - und alle anderen Ressourcen können für die Betrachtung des Spiels ignoriert werden.

**Beispiel 1.17.** Ein Beispiel für Auslastungsmodelle sind *Netzwerkauslastungsmodelle*. Diese sind gegeben durch einen (nicht notwendigerweise endlichen) Multigraphen  $G = (V, E)$ , einer Kostenfunktion  $c_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  für jede Kante  $e \in E$  und für jeden Spieler  $i \in I$  je ein ausgezeichneter Start- und Endknoten  $s_i, t_i \in V$ . Die Ressourcen sind dann die Kanten des Graphen, die Strategien von Spieler  $i \in I$  entsprechen den endlichen  $s_i, t_i$ -Pfaden in  $G$ .

Zusätzlich ist es möglich bestimmte Kanten nur für einen Teil der Spieler zuzulassen. Dadurch wird dann der Strategieraum der anderen Spieler entsprechend eingeschränkt.

Verallgemeinerungen von Auslastungsspielen erhalten wir durch das Einführen von Spieler-  
gewichten bzw. dem Abändern der Form, in der die Kosten berechnet werden:

**Definition 1.18.** Zusammen mit einem positiven Gewichtsvektor  $(w_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_{>0}^I$  induziert ein Auslastungsmodell  $M$  (wiederum unter der Voraussetzung, dass alle beteiligten Funktionen wohldefiniert sind)

- ein *kostengewichtetes Auslastungsspiel*  $\Gamma_c(M, w) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$  durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(s))$$

und die gleiche Lastfunktion wie im ungewichteten Fall.

- ein *lastgewichtetes Auslastungsspiel*  $\Gamma_l(M, w) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$  durch die Kostenfunktion wie im ungewichteten Fall und die Lastfunktion  $l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto \sum \{w_i \mid r \in s_i\}$ .
- ein *gewichtetes Auslastungsspiel*  $\Gamma(M, w) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$  durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(s))$$

und die Lastfunktion  $l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto \sum \{w_i \mid r \in s_i\}$ .

**Beispiel 1.19.** .

gewichtetes Netzwerkauslastungsspiel

Weitere Varianten von Auslastungsspielen: \_\_\_\_\_

Quelle?

**Definition 1.20.** • Zusammen mit einer streng monotonen Skalierungsfunktionen  $(f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$  erhält man aus einem Auslastungsmodell ein *skaliertes Auslastungsspiel* durch die Kostenfunktionen:

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} f_i(g_r(l_r(s)))$$

- Ein *Auslastungsmodell/-spiel mit playerspezifischen Ressourcenkosten* erhält man, wenn es zu jeder Ressource  $r \in R$  und jedem Spieler  $i \in I$  eine eigene Funktion  $g_r^i : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt und die Kostenfunktionen der Spieler definiert sind als

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} g_r^i(l_r(s))$$

*Bemerkung 1.21.* Jedes skalierte Auslastungsspiel ist insbesondere ein Auslastungsspiel mit playerspezifischen Ressourcenkosten: Setze dazu  $g_r^i := f_i \circ g_r$ .

**Definition 1.22.** Ein Auslastungsmodell/-spiel heißt *nicht-anonym*, wenn die Kosten einer Ressource nicht nur von der Zahl bzw. dem Gesamtgewicht der sie nutzenden Spieler, sondern auch von deren Identität abhängt. Die Lastfunktionen sind dann also definiert als

$$l_r : S \rightarrow \mathcal{P}(I) : s \mapsto \{ i \in I \mid r \in s_i \}$$

und die Ressourcenkostenfunktionen sind von der Form

$$g_r : \mathcal{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Speziellere Klassen von Auslastungsspielen erhalten wir hingegen, wenn die Mengen der zulässigen Teilmengen der einzelnen Spieler zusätzliche Struktur besitzen. Der einfachste Fall hierfür ist, dass jeder Spieler immer nur genau eine Ressource auf einmal wählen kann:

**Definition 1.23.** Ein Auslastungsmodell/-spiel heißt *Singelton-Auslastungsmodell/-spiel*, wenn jede Strategie jedes Spielers aus genau einer Ressource besteht.

Eine andere Möglichkeit ist, dass die zulässigen Teilmengen eines Spielers Basen eines Matroids auf der Ressourcenmenge bilden:

**Definition 1.24.** Ein ungewichtetes Auslastungsmodell/-spiel heißt *Matroidmodell/-spiel*, wenn es für jeden Spieler  $i \in I$  einen Matroid  $M_i$  auf der Ressourcenmenge gibt, sodass  $S_i$  gerade die Basen dieses Matroids sind.

**Definition 1.25.** Ein Teilmengensystem  $M \subseteq \mathcal{P}(R)$  auf einer endlichen Menge  $R$  heißt Matroid, wenn es die folgenden drei Axiome erfüllt:

1.  $\emptyset \in M$  (oder äquivalent dazu:  $M \neq \emptyset$ )
2.  $M$  ist abgeschlossen unter Inklusion, d.h.  $\forall S \in M, T \subseteq M : T \subseteq S \implies T \in M$ .
3.  $\forall S, T \in M : |T| < |S| \implies \exists r \in S \setminus T : T \cup \{r\} \in M$ .

Die Mengen in  $M$  bezeichnen wir dann als *unabhängige Mengen*, die bezüglich Inklusion maximalen Mengen unter diesen nennen wir *Basen des Matroids*.

Eine wichtige Eigenschaft, welche alle Matroide erfüllen, ist der starke Basisaustauschsatz (vgl. [Har16][Satz 3.7]):

[citation needed(?)] Matroid

**Satz 1.26.** *Seien  $M$  ein Matroid,  $B_1, B_2$  zwei Basen von  $M$  und  $r \in B_1 \setminus B_2$  beliebig. Dann gibt es ein Element  $q \in B_2 \setminus B_1$ , sodass das Vertauschen dieser beiden Elemente wieder zwei Basen ergibt, d.h. sowohl  $B_1 \setminus \{r\} \cup \{q\}$  als auch  $B_2 \setminus \{q\} \cup \{r\}$  sind ebenfalls Basen von  $M$ .*

Mittels Induktion ergibt sich daraus die Basen-Matching-Eigenschaft (vgl. [Har16][Lemma 3.2]):

**Korollar 1.27.** *Seien  $M$  ein Matroid und  $B_1, B_2$  zwei Basen von  $M$ . Dann gibt es eine Partitionierung der symmetrischen Differenz  $B_1 \triangle B_2 := B_1 \setminus B_2 \cup B_2 \setminus B_1$  in eine Menge von Tupeln der Form  $(q, r)$  mit  $q \in B_1 \setminus B_2$  und  $r \in B_2 \setminus B_1$ , sodass  $B_1 \setminus \{q\} \cup \{r\}$  ebenfalls eine Basis von  $M$  ist. Es gibt also eine Menge von Tupeln  $A \subseteq (B_1 \setminus B_2) \times (B_2 \setminus B_1)$ , sodass gilt:*

- $\forall q \in B_1 \setminus B_2 \exists! r \in B_2 \setminus B_1 : (q, r) \in A$
- $\forall r \in B_2 \setminus B_1 \exists! q \in B_1 \setminus B_2 : (q, r) \in A$
- $\forall (q, r) \in A : B_1 \setminus \{q\} \cup \{r\}$  ist eine Basis von  $M$

## 2 Potentiale

Eine Schwierigkeit bei der Analyse von Spielen bildet der Umstand, dass jeder Spieler eine eigene Kostenfunktion und damit ein eigenes Optimierungsziel hat. Möchte man also beispielsweise Gleichgewichtspunkte finden, so muss man alle diese Funktionen gleichzeitig (lokal) optimieren. Diese Aufgabe wird wesentlich einfacher, wenn das Spiel eine sogenannte *Potentialfunktion* besitzt. Das ist eine Funktion auf dem Strategieraum des Spieles, die ein alternatives Koordinationsspiel darauf definiert, welches gewisse Eigenschaften mit dem ursprünglichen Spiel teilt (etwa die Lage der Gleichgewichtspunkte).

In diesem Kapitel werden wir einige Varianten von Potentialfunktionen kennenlernen und feststellen, welche Spiele diese jeweils besitzen. In Abschnitt 3 werden wir dann die Beziehung zwischen Ausgangsspiel und dem von einer Potentialfunktion beschriebenen Koordinationsspiel durch Morphismen zwischen den beiden Spielen formalisieren und dadurch zeigen, welche Eigenschaften beim Wechsel zwischen den beiden Spielen erhalten bleiben.

### 2.1 Definitionen

Zunächst definieren wir eine Auswahl verschiedener Typen von Potentialfunktionen:

**Definition 2.1.** Zu einem Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  heißt eine Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$

- *verallgemeinertes Nash-Potential*, wenn jedes Minimum von  $P$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$  ist, d.h. für alle  $x \in X$  gilt:

$$P(x) = \min_{\hat{x} \in X} P(\hat{x}) \implies \forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(x) \leq c_i(x \mid \hat{x}_i)$$

- *Nash-Potential*, wenn jedes Minimum von  $P$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$  ist und umgekehrt, d.h. für alle  $x \in X$  gilt:

$$P(x) = \min_{\hat{x} \in X} P(\hat{x}) \iff \forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(x) \leq c_i(x \mid \hat{x}_i)$$

- *lokales Nash-Potential*, wenn jedes lokale Minimum von  $P$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$  ist und umgekehrt, d.h. für alle  $x \in X$  gilt:

$$\forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : P(x) \leq P(x \mid \hat{x}_i) \iff \forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(x) \leq c_i(x \mid \hat{x}_i)$$

- *Beste-Antwort-Potential*, wenn für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  gilt:

$$\arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x \mid \hat{x}_i) = \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} P(x \mid \hat{x}_i)$$

- *verallgemeinertes ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i) \implies P(x) > P(x \mid \hat{x}_i)$$

- *ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i) \iff P(x) > P(x \mid \hat{x}_i)$$

- *skaliertes Potential*, wenn es streng monotone Funktionen  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = f_i(P(x)) - f_i(P(x \mid \hat{x}_i))$$

- *gewichtetes Potential*, wenn es einen Gewichtsvektor  $(w_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_{>0}^I$  gibt, sodass für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = w_i \cdot (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i))$$

- *exaktes Potential*, wenn für jeden Spieler  $i$  und alle Strategieprofile  $x \in X$  sowie  $\hat{x}_i \in X_i$  gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)$$

- Potentiale aus [MU04]?

Exakte, gewichtete, ordinale und verallgemeinerte ordinale Potentiale wurden erstmals in [MS96b] definiert, beste Antwort-Potentiale erstmals in [Voo00]. Die Begriffe verallgemeinertes und lokales Nash-Potential dürften für die Anwendung eher weniger interessant sein, sondern sollen vor allem das grundlegende Konzept eines Potentials formalisieren und umfassen daher auch (fast) alle anderen Potentiale. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Potentialbegriffen werden in folgendem an [Voo00] angelehnten Euler-Diagramm (Abbildung 1) dargestellt:

Beziehungen beweisen? → Kapitel 3

Wann ist ein ordinales Potentialspiel bereits ein skaliertes? Zumindest für endliche Spiele sollte das stimmen?

**Beispiel 2.2.** Jedes Koordinationsspiel besitzt ein exaktes Potential (nämlich die gemeinsame Kostenfunktion). Ebenso besitzt jedes Dummenspiel ein exaktes Potential (nämlich die konstante 0-Funktion).

Entsprechend besitzt jedes skalierte Koordinationsspiel ein skaliertes Potential.

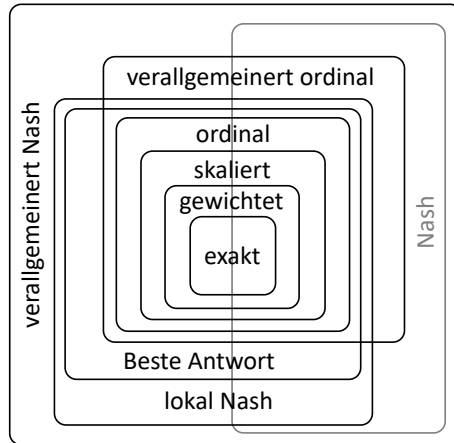


Abbildung 1: Beziehungen zwischen den einzelnen Potentialbegriffen

## 2.2 Anschauung

Verallgemeinerte Nash-Potentiale (und damit alle oben beschriebenen Potentiale) formalisieren die Idee ein Spiel durch irgendein anderes durch eine einzige Funktion beschriebenes Optimierungsproblem zu ersetzen, dessen Optima Nash-Gleichgewichte im ursprünglichen Spiel sind. Im Falle eines Nash-Potentials entsprechen diese Optima sogar allen Nash-Gleichgewichten. Findet man nun ein solches Optimierungsproblem und kann von diesem zeigen, dass es immer ein Optimum besitzt (etwa weil es durch eine stetige Funktion beschrieben wird und der Strategieraum kompakt ist), so zeigt dies, dass das ursprüngliche Spiel mindestens ein Nash-Gleichgewicht besitzt. Außerdem kann man dieses durch Lösen des Optimierungsproblems bestimmen.

Versteht man zu einem gegebenen Strategieprofil  $x \in X$  dessen *Nachbarschaft* als die Menge aller durch höchstens eine Abweichung erreichbarer Strategieprofile, d.h. die Menge  $\{(x \mid \hat{x}_i) \mid i \in I, \hat{x}_i \in X_i\}$ , so nennen wir  $x$  ein *lokales Minimum* einer Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn es ein Minimum innerhalb seiner Nachbarschaft ist. Ein lokales Nash-Potential beschreibt damit ein Optimierungsproblem, dessen *lokale* Minima den Nash-Gleichgewichten des Ausgangsspiels entsprechen.

Die Nachbarschaft eines Strategieprofils  $x$  besteht nun gerade aus den Profilen, die man mit  $x$  vergleichen muss, um festzustellen, ob es sich bei  $x$  um ein Nash-Gleichgewicht handelt. Hat man also ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  mit einem lokalen Nash-Potential  $P$ , so induziert dieses ein Koordinationsspiel  $K := (I, X, (P))$  auf dem selben Strategieraum, dessen Nash-Gleichgewichte gerade mit denen des Spiels  $\Gamma$  übereinstimmen.

Weitere Spezialisierungen dieses Potentialbegriffs führen dann zu induzierten Koordinationsspielen, welche noch weitere Eigenschaften des Ausgangsspiels übernehmen: So hat das durch ein Beste-Antwort-Potential beschriebene Spiel etwa die gleichen Beste-Antwort-Pfade und eignet sich daher beispielsweise zur Analyse von Beste-Antwort-Dynamiken. Durch ein ordinales Potential erhält man ein Spiel, welches auch die gleichen Verbesserungs-

und Nichtverschlechterungspfade enthält. Bei einem verallgemeinerten ordinalen Potential bleiben diese hingegen jeweils nur in eine Richtung erhalten: Ein Verbesserungspfad im Ausgangsspiel ist auch einer im Koordinationsspiel und ein Nichtverschlechterungspfad im Koordinationsspiel entspricht einem solchen im ursprünglichen Spiel (vgl. Satz 2.6).

Für skalierte, gewichtete und exakte Potentiale gibt es eine noch anschaulichere Betrachtungsweise für den Fall (endlicher) 2-Personenspiele. Deren Strategieraum kann man als Gitternetz in der Ebene auffassen, wobei jede Strategie von Spieler 1 einer senkrechten und jede Strategie von Spieler 2 einer waagerechten Gitterlinie entspricht. Kreuzungspunkte von zwei Gerade entsprechen dann gerade vollständige Strategieprofilen. Kostenfunktionen (ebenso wie Potentiale) sind dann „Reliefkarten“, deren Höhe den jeweiligen Kosten entspricht.

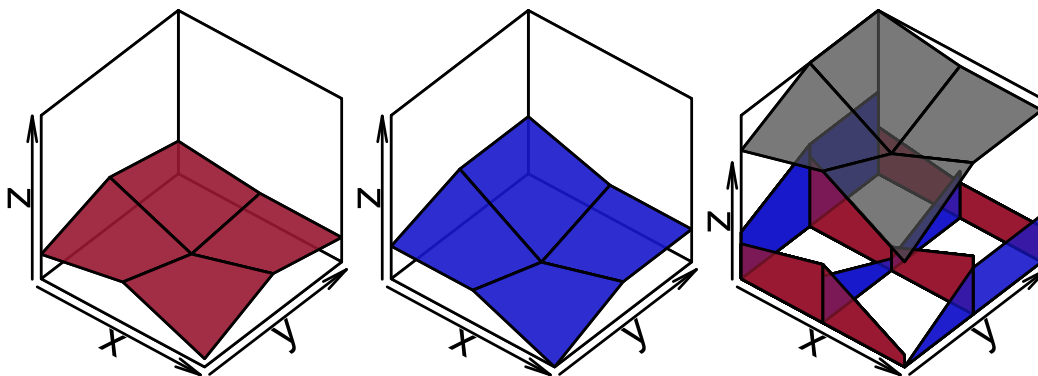


Abbildung 2: Ein 2-Personenspiel mit exaktem Potential (grau): Spieler 1: rot, Spieler 2: blau

*Besseres Bild!*

Ein exaktes Potential entspricht in diesem Bild einer gemeinsamen Reliefkarte für beide Spieler, die - im Falle eines exakten Potentials - „scheibenweise“ bis auf eine additive Konstante mit der eigentlichen Kostenfunktion übereinstimmt. Anders formuliert: Wird die Strategie eines Spieler festgehalten, so kann der andere Spieler seine Kostenveränderungen bei der Wahl der verschiedenen ihm zur Verfügung stehenden Strategien auch anhand der Potentialfunktion ablesen.

Geht man nun über zu einem skalierten Potential, so lesen die beiden Spieler das Potential sozusagen in verschiedenen Einheiten. Sind die Skalierungsfunktionen linear (das Potential also sogar ein gewichtetes), dann sind die verschiedenen Einheiten proportional zueinander.

Alternativ direkt sagen, dass das Potentialrelief verschieden stark gestreckt/gestaucht wird.

## 2.3 Eigenschaften der Potentiale

Wir wollen hier noch einige Eigenschaften der verschiedenen Potentiale zusammenfassen - beweisen werden wir sie dann aber erst in Abschnitt 3.

**Satz 2.3.** Es gelten die in Abbildung 1 dargestellten Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Potentiale.



*Beweis.* .

Evtl. die einfachen direkt hier, zumindest die schwierigeren aber erst in Kapitel 3 - hier aber darauf verweisen!

□

*Beobachtung 2.4.* Ist  $\Gamma$  ein Spiel mit einem lokalen Nash-Potential  $P$ . Dann ist jedes lokale Minimum von  $P$  ein Nash-Gleichgewicht von  $\Gamma$  und umgekehrt.

Diese Beobachtung zeigt also, dass man Nash-Gleichgewichte allein durch Betrachten einer Potentialfunktion finden kann. Daraus folgt direkt die Existenz von Nash-Gleichgewichten in einer Vielzahl von Potentialspielen, nämlich all diejenigen deren Potentialfunktion mindestens ein globales (und damit erst recht lokales) Minimum haben. Also beispielsweise:

**Korollar 2.5.** *Sei  $\Gamma$  ein Spiel mit einem kompakten Strategieraum und einem stetigen verallgemeinerten Nash-Potential. Dann hat  $\Gamma$  wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.*

Insbesondere also haben endliche Potentialspiele immer ein Nashgleichgewicht.

**Satz 2.6.** *Sei  $\Gamma$  ein Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential  $P$ . Dann ist jeder Verbesserungspfad in  $\Gamma$  auch ein Verbesserungspfad bezüglich  $P$ . Ist  $P$  sogar ein ordinales Potential, so gilt auch die umgekehrte Richtung.*

Zusammen mit Korollar 1.13 werden wir hieraus später folgern, dass ordinale Potentiale lokale Nash-Potentiale sind. Ferner ergibt sich daraus, dass ein lokales Minimum eines verallgemeinerten ordinalen Potentials ein Nash-Gleichgewicht des eigentlichen Spiels ist. Die Umkehrung gilt in diesem Fall aber nicht mehr notwendigerweise.

Beispiel?

Analog zu diesem Satz gilt für Beste-Antwort-Pfade und Beste-Antwort-Potentiale:

**Satz 2.7.** *Sei  $\Gamma$  ein Spiel mit einem Beste-Antwort-Potential  $P$ . Dann ist jeder Beste-Antwort-(Verbesserungs-)Pfad in  $\Gamma$  auch ein Beste-Antwort-(Verbesserungs-)Pfad bezüglich  $P$  und umgekehrt.*

Und auch hieraus erhalten wir mit Korollar 1.13, dass Beste-Antwort-Potentiale lokale Nash-Potentiale sind. Tabelle 1 fasst einige der von Potentialen erhaltenen Eigenschaften zusammen.

Für Spiele mit unendlicher Spielermenge wird sich im folgenden Abschnitt die Beobachtung als hilfreich erweisen, dass wir die meisten Potentiale pfadzusammenhangskomponentenweise definieren können:

*Beobachtung 2.8.* Sei  $\Gamma$  ein beliebiges Spiel und  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Erfüllt  $P$  dann die Bedingung eines exakten/gewichteten/skalierten/ordinalen/verallgemeinerten ordinalen/Beste Antwort/lokalen Nash-Potentials für jede (maximale) Pfadzusammenhangskomponente, so ist  $P$  ein entsprechendes Potential für ganz  $\Gamma$ .

*Beweis.* Dies folgt direkt aus dem Umstand, dass die definierende Eigenschaft für alle aufgezählten Potentiale immer nur entlang eines Pfades (der Länge 1) und damit innerhalb einer Zusammenhangskomponente geprüft werden muss. □

	Nash-Gl.	FIP	Nichtverschl.pfad	Verb.pfad	Beste-Antwort-Pfad
exakt	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
gewichtet	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
skaliert	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
ordinal	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
verallg. ordinal	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
Beste Antwort	$\Leftrightarrow$				$\Leftrightarrow$
lokal Nash	$\Leftrightarrow$				

Tabelle 1: Welche Eigenschaft bleibt beim Übergang von einem Spiel auf das von einem entsprechenden Potential induzierte Koordinationsspiel erhalten ( $\Rightarrow$ ) und welche bei der umgekehrten Richtung ( $\Leftarrow$ )?

Tabelle korrigieren, erweitern, erklären...

## 2.4 Charakterisierungen der Potentiale

In diesem Abschnitt wollen wir für einige der zuvor beschriebenen Potentiale notwendige und hinreichende Anforderungen an ein Spiel beschreiben, damit dieses ein entsprechendes Potential besitzt.

### 2.4.1 Exakte Potentiale

**Satz 2.9.** Ein Spiel besitzt genau dann ein exaktes Potential, wenn alle 4-Zykel im Strategieraum eine Gesamtänderung von 0 haben.

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis aus [MS96b, Anhang A]. Dort wird der Satz zwar nur für  $N$ -Personenspiele gezeigt, mit Beobachtung 2.8 überträgt sich dieser Beweis aber direkt auch auf allgemeine Spiele.

Sei zunächst  $\gamma := (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$  ein beliebiger 4-Zykel in einem Spiel mit Potential  $P$ . Dann gilt für die Gesamtänderung:

$$\delta(\gamma) = \sum_{i=1}^4 (c_{i(k)}(x^k) - c_{i(k)}(x^{k-1})) = \sum_{k=1}^4 (P(x^k) - P(x^{k-1})) = P(x^4) - P(x^0) = 0$$

Ist umgekehrt  $\Gamma$  ein Spiel, in dem für alle 4-Zykel  $\gamma$  gilt  $\delta(\gamma) = 0$ ,  $x$  ein beliebiges, aber festes Strategieprofil in  $\Gamma$  und  $Y_x$  dessen Pfadzusammenhangskomponente, dann definiere wie folgt eine Funktion  $P_x$  auf  $Y_x$ :

$$P : Y_x \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \delta(\gamma), \gamma \text{ beliebiger Pfad von } x \text{ nach } y$$

Damit diese Funktion tatsächlich wohldefiniert ist, muss für je zwei Pfade  $\gamma$  und  $\gamma'$  von  $\hat{x}$  nach  $x$  gelten, dass die jeweiligen Gesamtänderungen gleich sind, d.h.  $\delta(\gamma) = \delta(\gamma')$ . Dies

ist äquivalent dazu, dass der Zykel, den man durch Verknüpfen der beiden Pfade  $\gamma$  und  $\gamma'^{\leftarrow}$  erhält eine Gesamtänderung von 0 hat. Dazu zeigen wir nun mittels Induktion über deren Länge, dass für alle Zykel  $\mu$  gilt  $\delta(\mu) = 0$ :

**IA ( $|\mu| = 4$ )<sup>1</sup>** D.h.  $\mu$  ist ein 4-Zykel und damit  $\delta(\mu) = 0$  nach Voraussetzung.

**IS ( $|\mu| =: n$ )** Vorausgesetzt es gibt einen Pfad  $\mu' = (x'^0, \dots, x'^n)$  gleicher Länge und Gesamtänderung wie  $\mu$ , sodass in den ersten beiden Schritten der gleiche Spieler seine Strategie wechselt, d.h.  $i(1) = i(2)$ . Dann erhält man durch Weglassen des ersten Schrittes einen *kürzeren* Pfad  $\mu'' := (x'^0, x'^2, \dots, x'^n)$  mit gleicher Gesamtänderung, welche dann nach Induktion bereits 0 ist. In diesem Fall haben wir dann wie gewünscht  $\delta(\mu) = \delta(\mu') = \delta(\mu'') = 0$ .

Die Existenz eines solchen Pfades  $\mu'$  zeigen wir nun mittels Induktion über  $k := \min \{1 < l \leq n \mid i(l) = i(1)\}$ . Ein solches  $k$  existiert immer, da Spieler  $i(1)$  bereits im ersten Schritt seine Strategie wechselt und dies daher im Verlauf des Zyklus noch mindestens ein weiteres Mal tun muss, damit der Zykel geschlossen werden kann.

**IA ( $k = 2$ )** Dann gilt bereits  $i(1) = i(2)$  und wir sind fertig mit  $\mu' := \mu$ .

**IS ( $k - 1 \rightarrow k$ )** Wir ändern  $\mu$  so ab, dass Spieler  $i(1)$  bereits im  $(k - 1)$ -ten Schritt der abweichende Spieler ist. Dann sind wir fertig nach Induktionsvoraussetzung. Dazu ersetzen wir in  $\mu$  das Strategieprofil  $x^k$  durch  $(x^{k-1} \mid x_{i(1)}^{k+1})$ , sodass also Spieler  $i(1)$  bereits einen Schritt früher (im  $(k - 1)$ -ten) seine Strategie wechselt und der Spieler, der dies zuvor in diesem Schritt getan hat, einen Schritt später.

Bei dieser Anpassung bleibt die Gesamtänderung des Pfades  $\mu$  gleich, denn wir ersetzen lediglich ein Pfadstück der Länge 2 durch ein anderes Pfadstück der Länge 2. Und da sich diese beiden Pfade zu einem 4-Zykel zusammensetzen lassen, haben diese nach Voraussetzung die gleiche Gesamtänderung.

Auf dieses abgeänderte  $\mu$  können wir nun die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten dadurch einen neuen Pfad  $\mu'$  mit den gewünschten Eigenschaften.

Hiermit können wir auch den Induktionsschritt der äußeren Induktion und damit den Nachweis der Wohldefiniertheit von  $P$  abschließen.

Wählen wir nun für jede maximale Pfadzusammenhangskomponente ein einziges  $x$  in dieser und definieren wie oben eine Funktion  $P_x$ , so lassen sich alle diese Funktionen zu einer Funktion  $P$  auf ganz  $X$  zusammensetzen. Nach Definition erfüllt diese auf jeder Pfadzusammenhangskomponente die Bedingung eines exakten Potentials. Also ist nach Beobachtung 2.8  $P$  ein exaktes Potential auf  $X$ .  $\square$

Eine alternative Charakterisierung für die Existenz eines exakten Potentials zeigen Voorneveld u. a. in [Voo+99, Theorem 2.1]:

**Satz 2.10.** *Ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  besitzt genau dann ein exaktes Potential, wenn es ein Koordinationsspiel  $K = (I, X, (p))$  und ein Dummy-Spiel  $D = (I, X, (d_i))$  auf dem selben Strategieraum gibt, sodass die Kostenfunktionen in  $\Gamma$  die Summe der Kostenfunktionen aus  $K$  und  $D$  sind, d.h.  $c_i = p + d_i$ .*

*Beweis.* Ist  $\Gamma$  ein Spiel mit einem exakten Potential  $P$ , so definiert dieses ein Koordinationsspiel  $K := (I, X, (P))$ . Ferner ist  $D := (I, X, (P - c_i))$  ein dazu passendes Dummy-Spiel, denn es gilt für jeden Spieler  $i \in I$  und alle Strategien/Strategieprofile  $x \in X, \hat{x}_i \in X_i$ :

$$(P - c_i)(x) - (P - c_i)(x \mid \hat{x}_i) = (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)) - (c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i)) = 0$$

Also  $(P - c_i)(x) = (P - c_i)(x \mid \hat{x}_i)$ .

Umgekehrt haben sowohl ein Koordinations- als auch ein Dummy-Spiel ein exaktes Potential. Die Summe der beiden Potentialfunktionen ist dann ein exaktes Potential für die Summe der beiden Spiele.  $\square$

## 2.4.2 Gewichtete und skalierte Potentiale

**Satz 2.11.** *Ein Spiel besitzt genau dann ein gewichtetes Potential mit Gewichtsvektor  $w = (w_i)_{i \in I}$ , wenn die  $w$ -gewichtete Gesamtänderung entlang jedes 4-Zykels 0 ist, d.h. für jeden 4-Zykel  $\gamma := (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$  gilt:*

$$\delta_w(\gamma) = \sum_{i=1}^4 w_{i(k)} \cdot (c_{i(k)}(x^k) - c_{i(k)}(x^{k-1})) = 0$$

Gibt es eine bessere Charakterisierung von gew. Potentialen? Insb. ohne dass man schon den richtigen Gewichtsvektor angeben muss?

Diese Charakterisierung folgt direkt aus der folgenden Beobachtung aus [HKM11, Kapitel 3.2]

*Beobachtung 2.12.* Zu einem Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  ist eine Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann ein gewichtetes Potential mit Gewichtsvektor  $w = (w_i)$ , wenn  $P$  ein exaktes Potential zum Spiel  $\Gamma_w := (I, X, (c_i/w_i))$  ist.

*Beweis.* Für jedes Strategieprofil  $x \in X$ , jeden Spieler  $i \in I$  und jede Strategie  $\hat{x}_i$  gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = w_i \cdot (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)) \iff \frac{c_i(x)}{w_i} - \frac{c_i(x \mid \hat{x}_i)}{w_i} = P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)$$

$\square$

Für skalierte Potentiale erhalten wir ganz analog zu Satz 2.10 eine Charakterisierung durch eine Zerlegung des Spiels in ein Dummy- und ein skaliertes Koordinationsspiel:

**Satz 2.13.** *Ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  besitzt genau dann ein skaliertes Potential, wenn es ein skaliertes Koordinationsspiel  $K = (I, X, (p_i))$  und ein Dummy-Spiel  $D = (I, X, (d_i))$  auf dem selben Strategieraum gibt, sodass die Kostenfunktionen in  $\Gamma$  die Summe der Kostenfunktionen aus  $K$  und  $D$  sind, d.h.  $c_i = p_i + d_i$ .*

*Beweis.* Ist  $\Gamma$  ein Spiel mit einem skalierten Potential  $P$  und entsprechenden Skalierungsfunktionen  $f_i$ , so definiert dieses ein skaliertes Koordinationsspiel  $K := (I, X, (f_i \circ P))$ .

Ferner ist  $D := (I, X, (f_i \circ P - c_i))$  ein dazu passendes Dummy-Spiel, denn es gilt für jeden Spieler  $i \in I$  und alle Strategien/Strategieprofile  $x \in X, \hat{x}_i \in X_i$ :

$$(f_i \circ P - c_i)(x) - (f_i \circ P - c_i)(x \mid \hat{x}_i) = (f_i \circ P(x) - f_i \circ P(x \mid \hat{x}_i)) - (c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i)) = 0$$

Also  $(f_i \circ P - c_i)(x) = (f_i \circ P - c_i)(x \mid \hat{x}_i)$ .

Starten wir umgekehrt mit einem skalierten Koordinationsspiel  $K = (I, X, (f_i \circ P))$  und einem Dummy-Spiel  $D = (I, X, (d_i))$ , so ist  $P$  ein skaliertes Potential zu  $\Gamma := (I, X, (f_i \circ P + d_i))$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} (f_i \circ P + d_i)(x) - (f_i \circ P + d_i)(x \mid \hat{x}_i) &= (f_i \circ P)(x) - (f_i \circ P)(x \mid \hat{x}_i) + d_i(x) - d_i(x \mid \hat{x}_i) \\ &= (f_i \circ P)(x) - (f_i \circ P)(x \mid \hat{x}_i) \end{aligned} \quad \square$$

### 2.4.3 Ordinale Potentiale

**Definition 2.14.** Eine Menge  $X$  mit einer strikten Partialordnung  $\prec$  (irreflexiv und transitiv) heißt *reell geordnet*<sup>2</sup>, wenn es eine strikt monotone Abbildung von  $X$  in die reellen Zahlen gibt, also  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \prec x' \implies f(x) < f(x')$ .

Wir definieren nun eine Äquivalenzrelation auf dem Strategieraum:

$x \approx y : \iff$  es gibt einen nicht-Verschlechterungspfad von  $x$  nach  $y$  und umgekehrt

Auf dem dadurch erzeugten Raum von Äquivalenzklassen  $X/\approx := \{[x] \mid x \in X\}$  erhält man eine transitive Ordnung

$[x] \prec_{\uparrow} [y] : \iff$  Es gibt einen schwachen Verbesserungspfad von  $y$  nach  $x$

Sowohl Wohldefiniertheit als auch Transitivität dieser Relation ergeben sich aus der Beobachtung, dass die Verknüpfung eines nicht-Verschlechterungspfades mit einem schwachen Verbesserungspfad wieder einen schwachen Verbesserungspfad ergibt.

Damit zeigen Voorneveld und Norde in [VN97, Theorem 3.1] folgende Charakterisierung der Existenz von ordinalen Potentialen:

**Satz 2.15.** *Ein Spiel besitzt genau dann ein ordinales Potential, wenn es keine schwachen Verbesserungszykel enthält und  $(X/\approx, \prec_{\uparrow})$  reell geordnet ist.*

*Beweis.* Sei zunächst  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein ordinales Potential eines Spiels  $\Gamma$ . Dann gilt:

1.  $\Gamma$  enthält keine schwachen Verbesserungszykel. Denn angenommen  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$  wäre ein schwacher Verbesserungszykel in  $\Gamma$ , so gilt für alle  $0 < k \leq n$ :  $c_{i(k)}(x^k) \leq$

evtl. schon im Grundlagenkapitel gemeinsam mit Pfadzusammenhangskomponenten?

Formulierung mit Satz 2.17 in Einklang bringen

<sup>2</sup>Voorneveld und Norde bezeichnen solche Mengen in [VN97] als „properly ordered“

$c_{i(k)}(x^{k-1})$  und für ein solches  $k$  sogar  $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$ . Da ferner  $P$  ein ordinales Potential ist, folgt daraus:

$$P(x^0) \leq P(x^1) \leq \dots \leq P(x^{k-1}) < P(x^k) \leq \dots \leq P(x^n) = P(x^0)$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Also kann es keinen solchen Verbesserungszykel geben.

2.  $\prec_{\uparrow}$  ist eine strikte Partialordnung auf  $X/\approx$ . Denn die Relation ist immer transitiv und in der Abwesenheit von schwachen Verbesserungszykeln zudem irreflexiv. Gäbe es nämlich ein Strategieprofil mit  $[x] \prec_{\uparrow} [x]$ , so gäbe es einen schwachen Verbesserungs Pfad von  $x$  nach  $x$ , also einen schwachen Verbesserungszykel.
3.  $(X/\approx, \prec_{\uparrow})$  ist reell geordnet. Definiere dazu die Abbildung  $f : X/\approx \rightarrow \mathbb{R} : [x] \mapsto P(x)$ . Diese ist wohldefiniert, denn ist  $y \in [x]$ , so gibt es also Nichtverschlechterungspfade von  $x$  nach  $y$  und umgekehrt. Zusammen bilden diese einen Nichtverschlechterungszykel und da es keine schwachen Verbesserungszykel in  $\Gamma$  gibt, muss in die diesem Zykel (und damit bereits in den beiden Pfaden) in jedem Schritt Gleichheit gelten. Insbesondere folgt damit  $P(x) = P(y)$ .

Ferner ist diese Abbildung streng monoton, denn gilt  $[x] \prec_{\uparrow} [y]$ , so gibt es einen schwachen Verbesserungs Pfad  $\gamma$  von  $y$  nach  $x$ . Damit folgt analog zum ersten Punkt:  $P(x) < P(y)$

Ist umgekehrt  $\Gamma$  ein Spiel ohne schwache Verbesserungszykel, so ist - wie bereits gezeigt -  $\prec_{\uparrow}$  eine strikte Partialordnung auf  $X/\approx$ . Sei nun  $(X/\approx, \prec_{\uparrow})$  sogar reell-geordnet mit Abbildung  $f : X/\approx \rightarrow \mathbb{R}$ , so definiere  $P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f([x])$ . Dies ist ein ordinales Potential, denn es gilt:

1. Gilt  $c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i)$ , so ist  $(x, (x \mid \hat{x}_i))$  ein schwacher Verbesserungs Pfad. Da es in  $\Gamma$  keine schwachen Verbesserungszykel gibt, kann es also keinen nicht-Verschlechterungs Pfad in die andere Richtung geben und es gilt:  $[x] \succ [(x \mid \hat{x}_i)]$ . Daraus wiederum folgt  $P(x) = f([x]) > f([(x \mid \hat{x}_i)]) = P(x \mid \hat{x}_i)$ .
2. Gilt  $c_i(x) = c_i(x \mid \hat{x}_i)$ , so sind sowohl  $(x, (x \mid \hat{x}_i))$  als auch  $((x \mid \hat{x}_i), x)$  nicht-Verschlechterungspfade, also  $[x] = [(x \mid \hat{x}_i)]$  und damit  $P(x) = f([x]) = f([(x \mid \hat{x}_i)]) = P(x \mid \hat{x}_i)$ .  $\square$

*Bemerkung 2.16.* Im Gegensatz zur Charakterisierung von exakten Potentialspielen in Satz 2.9 genügt es für die Existenz eines ordinalen Potentials nicht, nur Zykel der Länge 4 zu betrachten. Voorneveld und Norde geben dafür in [VN97, Beispiel 3.1] ein Gegenbeispiel mit zwei Spielern und je drei Strategien an.

#### 2.4.4 Verallgemeinerte ordinale Potentiale

Anlehnend an Satz 2.15 erhält man unter Verwendung der Relation

$$x \prec_{\uparrow} y : \Longleftrightarrow \text{es gibt einen Verbesserungs Pfad der Länge } \geq 1 \text{ von } y \text{ nach } x$$

eine Charakterisierung der Existenz eines verallgemeinerten ordinalen Potentials:

**Satz 2.17.** *Ein Spiel besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn  $(X, <_{\uparrow})$  reell geordnet ist.*

Formulierung mit Satz 2.15 in Einklang bringen

*Beweis.*  $(X, <_{\uparrow})$  reell geordnet mit streng monotoner Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , so sieht man direkt, dass  $f$  auch ein verallgemeinertes Potential ist. Denn für  $x \in X, \hat{x}_i \in X_i$  mit  $c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i)$  ist  $(x, (x \mid \hat{x}_i))$  ein Verbesserungspfad, also  $(x \mid \hat{x}_i) <_{\uparrow} x$  und damit  $f(x \mid \hat{x}_i) < f(x)$ .

Haben wir hingegen ein Spiel  $\Gamma$  mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential  $P$ , so ist  $(X, <_{\uparrow})$  reell geordnet, denn

1.  $<_{\uparrow}$  ist eine strikte Partialordnung auf  $X$ : Sie ist transitiv, da die Verknüpfung zweier Verbesserungspfade wieder ein Verbesserungspfad ist, und irreflexiv, da es in  $\Gamma$  keine Verbesserungszykel gibt. Angenommen nämlich  $\Gamma$  enthielte einen solchen Verbesserungszykel  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$ , d.h. für alle  $0 < k \leq n$  gilt  $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$ . Da  $P$  ein verallgemeinertes ordinales Potential ist, folgt daraus  $P(x^0) > P(x^1) > \dots > P(x^n) = P(x^0)$ , ein Widerspruch. Also kann es keinen Verbesserungszykel geben und damit nie  $x <_{\uparrow} x$  gelten.
2.  $(X, <_{\uparrow})$  ist reell geordnet durch die Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Gilt nämlich  $x <_{\uparrow} y$ , so gibt es also einen Verbesserungspfad von  $y$  nach  $x$ . Da  $P$  ein verallgemeinertes ordinales Potential ist, nimmt es entlang dieses Pfades in jedem Schritt ab, und folglich gilt  $P(y) > P(x)$ . Damit ist  $P$  streng monoton auf  $(X, <_{\uparrow})$ .  $\square$

In dieser Form ist dies noch eine wenig hilfreiche Charakterisierung, denn um zu zeigen, dass der Strategieraum reell geordnet ist, muss man im Grunde bereits die Potentialfunktion angeben. Allerdings erhält man daraus mit Hilfe der folgenden Propositionen einfachere Charakterisierungen für gewisse Teilklassen von Spielen:

**Proposition 2.18.** *Jede abzählbare Menge mit einer strikten Partialordnung ist bereits reell geordnet.*

Ein Beweis dazu findet sich in [VN97, Lemma 2.2]. Noch allgemeiner zeigen Voorneveld und Norde, dass es sogar genügt, wenn die partiell geordnete Menge eine bezüglich dieser Ordnung dichte, abzählbare Teilmenge hat.

wirklich gezeigt wird es dort eigentlich nicht (sondern auf andere Quelle verwiesen)

**Proposition 2.19.** *Die Relation  $<_{\uparrow}$  ist genau dann eine strikte Partialordnung, wenn  $\Gamma$  keine Verbesserungszykel enthält.*

*Beweis.* Da die Verknüpfung eines Verbesserungspfades von  $z$  nach  $y$  mit einem von  $y$  nach  $x$  einen Verbesserungspfad von  $z$  nach  $x$  ergibt, ist  $<_{\uparrow}$  automatisch immer transitiv.

Ferner ist  $<_{\uparrow}$  genau dann irreflexiv, wenn für alle  $x \in X$  gilt, dass  $x \not<_{\uparrow} x$ , es also keinen Verbesserungspfad von  $x$  nach  $x$  gibt. Und letzteres entspricht genau einem (bei  $x$  beginnenden) Verbesserungskreis.  $\square$

**Korollar 2.20.** *Ein Spiel mit abzählbarem Strategieraum besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es keine Verbesserungskreise enthält.*

*Beweis.* Nach Proposition 2.18 ist jede abzählbare Menge mit einer strikten Partialordnung bereits reell geordnet. Also macht  $<_{\uparrow}$  einen abzählbaren Strategieraum genau dann zu einer reell geordneten Menge, wenn  $<_{\uparrow}$  eine strikte Partialordnung ist. Und dies ist nach Proposition 2.19 genau dann der Fall, wenn das Spiel keine Verbesserungszykel enthält.  $\square$

Laut Beobachtung 2.8 gilt diese Charakterisierung sogar für die größere Klasse der Spiele mit abzählbar großen Pfadzusammenhangskomponenten. Insbesondere gilt damit:

**Korollar 2.21.** *Ein Spiel mit abzählbar vielen Spielern und abzählbar großen spielerspezifischen Strategieräumen besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es keine Verbesserungskreise enthält.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass in einem solchen Spiel jede Pfadzusammenhangskomponente abzählbar groß ist. Seien dazu also  $x \in X$  und  $n \in \mathbb{N}^*$  beliebig. Dann ist

$$Y_x^n := \{y \in X \mid \exists \gamma \text{ Pfad der Länge } n \text{ von } x \text{ nach } y\},$$

die Menge aller von  $x$  aus durch Pfade der Länge  $n$  erreichbaren Strategieprofile, abzählbar. Denn es gilt induktiv:

**IA ( $n = 1$ )** Es ist

$$Y_x^1 = \{y \in X \mid \exists i \in I : y = (x \mid y_i)\} = \{(x \mid y_i) \mid i \in I, y_i \in Y_i\} = \bigcup_{i \in I} \{(x \mid y_i) \mid y_i \in Y_i\}$$

eine abzählbare Vereinigung (da die Spielermenge abzählbar ist) von abzählbar großen Mengen (den spielerspezifischen Strategieräumen), also selbst abzählbar groß.

**IS ( $< n \rightarrow n$ )** Es ist

$$Y_x^n = \bigcup_{y \in Y_x^{n-1}} Y_y^1$$

eine (nach Induktionsvoraussetzung) abzählbare Vereinigung abzählbar großer Mengen und daher selbst wieder abzählbar.

Folglich ist auch  $Y_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_x^n$  abzählbar und besitzt daher nach Korollar 2.20 ein verallgemeinertes ordinales Potential.  $\square$

Beschränkt man sich hingegen auf die kleinere Klasse von endlichen Spielen, so erhält man die (auf anderem Wege) erstmals von Monderer und Shapley in [MS96b, Lemma 2.5] gezeigte Charakterisierung der Existenz von verallgemeinerten ordinalen Potentialen:

**Korollar 2.22.** *Ein endliches Spiel besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es die FIP besitzt.*



*Beweis.* In einem Spiel mit endlichem Strategieraum sind unendliche Verbesserungspfade genau die Verbesserungskreise. Damit folgt die Aussage direkt aus Korollar 2.20.  $\square$

*Bemerkung 2.23.* Möchte man in den oben beschriebenen Fällen eine konkrete Potentialfunktion angeben, so kann man dies analog zu einer alternativen, konstruktiven Beweisidee für endliche Spiele aus [Mil96, Abschnitt 5] tun:

Sei dazu  $\Gamma$  ein Spiel mit abzählbarem Strategieraum  $X := \{x^1, x^2, \dots\}$  und ohne Verbesserungszykel. Definiere die Funktion  $h : X \rightarrow \mathbb{R} : x^k \mapsto 2^{-k}$  sowie für jedes Strategieprofil  $x \in X$  die Menge  $Y_{>x} := \{y \in X \mid \exists \text{ Verbesserungspfad von } y \text{ nach } x\}$  und mit deren Hilfe

$$P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1 - \sum_{y \in Y_{>x}} h(y)$$

*Beweis.* Diese Funktion ist wohldefiniert, da  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$  absolut konvergiert. Sie ist außerdem ein verallgemeinertes ordinales Potential, denn gilt  $c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i)$  so ist  $(x, (x \mid \hat{x}_i))$  ein Verbesserungspfad. Außerdem gilt  $x \notin Y_{>x}$ , da es in  $\Gamma$  keine Verbesserungszykel gibt. Damit folgt:

$$P(x) = 1 - \sum_{y \in Y_{>x}} h(y) > 1 - \sum_{y \in Y_{>x}} h(y) - h(x) = 1 - \sum_{y \in Y_{>(x \mid \hat{x}_i)}} h(y) = P(x \mid \hat{x}_i) \quad \square$$

#### 2.4.5 Beste-Antwort-Potentiale

Ebenfalls analog zur Charakterisierung für ordinale Potentiale zeigt Voorneveld in [Voo00, Theorem 3.1] eine solche für Beste-Antwort-Potentiale. Dazu definiert man die Äquivalenzrelation:

$$x \approx^* y : \Longleftrightarrow \text{es gibt einen Beste-Antwort-Pfad von } x \text{ nach } y \text{ und umgekehrt}$$

und auf dem dadurch erzeugten Raum von Äquivalenzklassen  $X/\approx^* := \{[x] \mid x \in X\}$  erhält man eine transitive Ordnung

$$[x] \prec^* [y] : \Longleftrightarrow \text{Es gibt einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungspfad von } y \text{ nach } x$$

**Satz 2.24.** *Ein Spiel, in dem jeder Spieler zu jedem Strategieprofil wenigstens eine beste Antwort zur Verfügung hat, besitzt genau dann ein Beste-Antwort-Potential, wenn es keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel enthält und  $(X/\approx^*, \prec^*)$  reell geordnet ist.*

*Beweis.* Sei zunächst  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein Beste-Antwort-Potential eines Spiels  $\Gamma$ . Dann gilt:

1.  $\Gamma$  enthält keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel. Denn angenommen  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$  wäre ein schwacher Beste-Antwort-Verbesserungszykel in  $\Gamma$ , so gilt für alle  $0 < k \leq n$ :

$$c_{i(k)}(x^k) = \min_{\hat{x}_{i(k)} \in X_{i(k)}} c_{i(k)}(x^{k-1} \mid \hat{x}_i) \leq c_{i(k)}(x^{k-1})$$

und, da  $P$  ein Beste-Antwort-Potential ist, ebenso

$$P(x^k) = \min_{\hat{x}_{i(k)} \in X_{i(k)}} P(x^{k-1} \mid \hat{x}_i) \leq P(x^{k-1}).$$

Ferner gilt für ein solches  $k$  sogar  $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$ , also auch  $P(x^k) < P(x^{k-1})$  (da  $x_{i(k)}^{k-1}$  keine beste Antwort auf  $x^{k-1}$  ist). Zusammen folgt daher

$$P(x^0) \leq P(x^1) \leq \dots \leq P(x^k) < P(x^{k-1}) \leq \dots \leq P(x^n) = P(x^0).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Also kann es keinen solchen Verbesserungszykel geben.

2.  $\prec^*$  ist eine strikte Partialordnung auf  $X/\approx^*$ . Denn die Relation ist immer transitiv und in der Abwesenheit von schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykeln zudem irreflexiv. Gäbe es nämlich ein Strategieprofil mit  $[x] \prec^* [x]$ , so gäbe es einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungspfad von  $x$  nach  $x$ , also einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel.
3.  $(X/\approx^*, \prec^*)$  ist reell geordnet. Definiere dazu die Abbildung  $f : X/\approx^* \rightarrow \mathbb{R} : [x] \mapsto P(x)$ . Diese ist wohldefiniert, denn ist  $y \in [x]$ , so gibt es also Beste-Antwort-Pfade von  $x$  nach  $y$  und umgekehrt. Zusammen bilden dieses einen Beste-Antwort-Zykel und da es keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel in  $\Gamma$  gibt, muss in die diesem Zykel (und damit bereits in den beiden Pfaden) in jedem Schritt Gleichheit gelten. Insbesondere folgt damit  $P(x) = P(y)$ .

Ferner ist diese Abbildung streng monoton, denn gilt  $[x] \prec_{\uparrow} [y]$ , so gibt es einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungspfad  $\gamma$  von  $y$  nach  $x$ . Damit folgt analog zum ersten Punkt:  $P(x) < P(y)$

Ist umgekehrt  $\Gamma$  ein Spiel ohne schwache Beste-Antwort-Verbesserungszykel, so ist - wie bereits gezeigt -  $\prec^*$  eine strikte Partialordnung auf  $X/\approx^*$ . Sei nun  $(X/\approx^*, \prec^*)$  sogar reell geordnet mit Abbildung  $f : X/\approx^* \rightarrow \mathbb{R}$ , so definiere  $P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f([x])$ . Dies ist ein beste Antwort-Potential, denn es gilt  $\arg \min_{x'_i \in X_i} c_i(x \mid x'_i) = \arg \min_{x'_i \in X_i} P(x \mid x'_i)$ :

„ $\subseteq$ “: Ist  $\hat{x}_i \in \arg \min_{x'_i \in X_i} c_i(x \mid x'_i)$ , so ist also  $\hat{x}_i$  insbesondere auch eine beste Antwort auf alle Strategieprofile  $(x \mid x'_i)$  für  $x'_i \in X_i$ .

1. **Fall:** Gilt  $c_i(x \mid \hat{x}_i) < c_i(x \mid x'_i)$ , so ist  $((x \mid x'_i), (x \mid \hat{x}_i))$  ein Beste-Antwort-Verbesserungspfad, also  $[(x \mid \hat{x}_i)] \prec^* [(x \mid x'_i)]$  und damit  $P(x \mid \hat{x}_i) = f([(x \mid \hat{x}_i)]) < f([(x \mid x'_i)]) = P(x \mid x'_i)$ .
2. **Fall:** Gilt  $c_i(x \mid \hat{x}_i) = c_i(x \mid x'_i)$ , so sind sowohl  $((x \mid x'_i), (x \mid \hat{x}_i))$  als auch  $((x \mid \hat{x}_i), (x \mid x'_i))$  Beste-Antwort-Pfade und folglich  $(x \mid x'_i) \approx^* (x \mid \hat{x}_i)$ . Somit folgt  $P(x \mid \hat{x}_i) = f([(x \mid \hat{x}_i)]) = f([(x \mid x'_i)]) = P(x \mid x'_i)$ .

Insgesamt gilt also für alle  $x'_i \in X_i$ , dass  $P(x \mid \hat{x}_i) \leq P(x \mid x'_i)$  und daher  $\hat{x}_i \in \arg \min_{x'_i \in X_i} P(x \mid x'_i)$ .

„ $\supseteq$ “: Sei  $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} P(x \mid \hat{x}_i)$ . Angenommen es wäre  $\hat{x}_i \notin \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x \mid \hat{x}_i)$ , d.h. es gäbe es also eine beste Antwort  $x'_i \in X_i$  auf  $x$  mit  $c_i(x \mid x'_i) < c_i(x \mid \hat{x}_i)$ . Entsprechend wäre  $((x \mid \hat{x}_i), (x \mid x'_i))$  ein (schwacher) Beste-Antwort-Verbesserungspfad und daher  $[(x \mid x'_i)] \prec^* [(x \mid \hat{x}_i)]$ . Somit wäre nach Definition von  $P$  auch  $P(x \mid x'_i) = f([(x \mid x'_i)]) < f([(x \mid \hat{x}_i)]) = P(x \mid \hat{x}_i)$ , im Widerspruch zu  $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} P(x \mid \hat{x}_i)$ . Also gibt es kein solches  $x'_i$  und es gilt  $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x \mid \hat{x}_i)$ .  $\square$

In [Voo00] wird Satz 2.24 für allgemeine Spiele (also ohne die Zusatzvoraussetzung der Existenz bester Antworten) formuliert. Es ist allerdings nicht klar wie der Beweis von  $\arg \min_{x'_i \in X_i} c_i(x \mid x'_i) \supseteq \arg \min_{x'_i \in X_i} P(x \mid x'_i)$  in der Rückrichtung ohne diese Voraussetzung gelten kann. Denn wenn  $x'_i$  an dieser Stelle nur eine bessere, aber nicht notwendigerweise beste Antwort sein muss, so ist  $((x \mid \hat{x}_i), (x \mid x'_i))$  im Allgemeinen kein Beste-Antwort-Pfad und daher auch nicht zwangsläufig  $[(x \mid x'_i)] \prec^* [(x \mid \hat{x}_i)]$ .

Das folgende Beispiel enthält genau einen solchen Fall und ist damit zwar kein Gegenbeispiel zu dem in [Voo00] gezeigten Satz, aber zu dem dort geführten Beweis hierzu:

**Beispiel 2.25.** Wir betrachten das 1-Personenspiel  $\Gamma := (\{*\}, \mathbb{Z}, (\text{id}))$ . Dieses hat zwar offenbar ein exaktes und damit erst recht Beste-Antwort-Potential, es steht aber trotzdem im Widerspruch zu obigem Beweis. Da es keinerlei Beste Antworten besitzt, ist nämlich  $\mathbb{Z}/\approx^* = \mathbb{Z}$  und  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto 0$  zeigt, dass der Strategieraum reell geordnet ist. Aber im Gegensatz zur Aussage in obigem Beweis liefert  $f$  kein Beste-Antwort-Potential für  $\Gamma$ .

## 2.4.6 Nash-Potentiale

Die Existenz eines verallgemeinerten Nash-Potentials (und gleichzeitig auch der anderen beiden Nash-Potentiale) schließlich lässt sich für endliche Spiele trivialerweise dadurch charakterisieren, dass das entsprechende Spiel ein Nash-Gleichgewicht besitzt. Und unendliche Spiele besitzen immer alle Nash-Potentiale.

*Beobachtung 2.26.* Wie bereits in Beobachtung 1.2 festgestellt ist der Strategieprofilraum  $X := \prod_{i \in I} X_i$  eines Spiels genau dann endlich, wenn alle Strategiemengen  $X_i$  endlich sind und nur endlich viele davon mehr als eine Strategie enthalten. Umgekehrt muss ein Spiel mit unendlich großem Strategieprofilraum mindestens eine unendlich große Strategiemenge oder aber unendlich viele Spieler mit zwei oder mehr Strategien haben.

In beiden Fällen enthält automatisch jede Pfadzusammenhangskomponente einen Pfad unendlicher Länge ohne Wiederholungen: Entweder indem ein Spieler unendlich oft seine Strategie wechselt oder unendlich viele verschiedene Spieler nacheinander je einmal ihre Strategie ändern. Insbesondere sind in diesem Fall auch alle Pfadzusammenhangskomponenten unendlich groß.

Denn auf jeder Pfadzusammenhangskomponente, welche mindestens ein Nash-Gleichgewicht enthält, können wir folgendes lokale Nash-Potential und Nash-Potential definieren:

$$P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \min \{ |\gamma| \mid \gamma \text{ (endlicher) Pfad von } x \text{ zu einem Nash-Gleichgewicht} \}$$

Denn die Nash-Gleichgewichte sind nun genau die Strategieprofile mit  $P(x) = 0$  und für alle anderen Strategieprofile fällt das Potential entlang jedes kürzesten Pfades zum nächsten Nash-Gleichgewicht in jedem Schritt strikt ab (befindet sich als nicht in einem (lokalen) Minimum).

Für unendliche Pfadzusammenhangskomponenten *ohne* Nash-Gleichgewicht können wir ferner wie folgt ein lokales Nash-Potential und Nash-Potential finden. Wir wählen einen festen, unendlichen Pfad  $\hat{\gamma} = (x^0, x^1, \dots)$  in dieser Zusammenhangskomponente, welcher kein Strategieprofil mehrfach enthält. Dann definieren wir:

$$P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1/k, & x = x^{k-1} \text{ auf dem Pfad } \hat{\gamma} \\ \min \{ |\gamma| \mid \gamma \text{ Pfad von } x \text{ zu einem Profil auf } \hat{\gamma} \}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion besitzt keine (lokalen) Minima und erfüllt daher trivialerweise alle Bedingungen an die verschiedenen Nash-Potentiale.

Nicht einmal ein verallgemeinertes Nash-Potential besitzt ein Spiel hingegen dann, wenn es eine endliche Pfadzusammenhangskomponente ohne Nash-Gleichgewichte enthält<sup>3</sup>. Denn gäbe es ein solches, so würde es auch ein (globales) Minimum annehmen und dieses müsste folglich einem Nash-Gleichgewicht in der Zusammenhangskomponente entsprechen. Insgesamt erhalten wir damit die folgende Charakterisierung:

**Satz 2.27.** *Ein Spiel besitzt genau dann ein Nash-Potential/verallgemeinertes/lokales Nash-Potential, wenn alle endlichen Pfadzusammenhangskomponenten mindestens ein Nash-Gleichgewicht besitzen.*

### 2.4.7 Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung aller in diesem Abschnitt beschriebenen Charakterisierungen findet sich in Tabelle 2H

---

<sup>3</sup>Tatsächlich besitzt ein Spiel genau dann eine (und in diesem Fall auch nur eine) endliche Pfadzusammenhangskomponente, wenn es selbst schon endlich ist. Denn um einen unendlichen Strategieprofilraum besitzen zu können, muss es mindestens einen Spieler mit unendlichem Strategieraum oder unendlich viele Spieler mit mehr als einer Strategie geben. Beides führt automatisch dazu, dass alle Pfadzusammenhangskomponenten unendlich groß sind.

Ein Spiel  $\Gamma$  hat ein...

exaktes Potential	$\iff$	f.a. 4-Zykel $\gamma$ ist $\delta(\gamma) = 0$	(Satz 2.9)
	$\iff$	die Kostenfunktionen von $\Gamma$ lassen sich als Summe der Kostenfunktionen eines Dummyspiels und eines Koordinationsspiels darstellen.	(Satz 2.10)
gewichtetes Potential	$\iff$	es gibt einen positiven Gewichtsvektor $w$ sodass f.a. 4-Zykel $\gamma$ gilt $\delta_w(\gamma) = 0$	(Satz 2.11)
skaliertes Potential	$\iff$	die Kostenfunktionen von $\Gamma$ lassen sich als Summe der Kostenfunktionen eines Dummyspiels und eines skalierten Koordinationsspiels darstellen.	(Satz 2.13)
ordinales Potential	$\iff$	$\Gamma$ enthält keine schwachen Verbesserungszykel und $(X/\approx, \prec_+)$ ist reell geordnet	(Satz 2.15)
verallg. ord. Potential	$\iff$	$(X, \prec_+)$ ist reell geordnet	(Satz 2.17)
Beste-Antwort-Potential	$\Leftarrow$	es existieren immer beste Antworten, $\Gamma$ enthält keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel und $(X/\approx^*, \prec^*)$ ist reell geordnet	(Satz 2.24)
	$\Rightarrow$	$\Gamma$ enthält keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel und $(X/\approx^*, \prec^*)$ ist reell geordnet	(Satz 2.24)
(lok/verallg.) Nash-Potential	$\iff$	jede endliche Pfadzusammenhangskomponente besitzt mindestens ein Nash-Gleichgewicht	(Satz 2.27)

Tabelle 2: Übersicht der Charakterisierungen von Potentials

Tabelle korrigieren, erweitern, erklären...

### 3 Morphismen und Isomorphismen von Spielen

Motivation: Warum betrachtet man überhaupt Morphismen von Spielen. Wie induzieren diese Isomorphismen?

Mögliche Motivationen:

- Jedes Potential definiert selbst wieder ein Spiel mit einer gemeinsamen Kostenfunktion für alle Spieler. Und in einem gewissen Sinne ist dieses Spiel „äquivalent“ zum ursprünglichen Spiel (z.B. gleiche Gleichgewichtspunkte). Das Hin- und Herwechseln zwischen diesen beiden Versionen eines Spiels kann man durch Morphismen beschreiben und die Äquivalenz der beiden wird dann dadurch sichtbar, dass diese Morphismen *Isomorphismen* sind.

Umgekehrt kann man aus Isomorphiebegriffen neue Potentialbegriffe definieren (vgl. [MU04])

- Die Äquivalenz zwischen exakten Potentialspielen und Auslastungsspielen wird durch Morphismen beschrieben.
- Kategorientheoretische Sicht: Um eine Kategorie (hier: die der Spiele) zu verstehen, muss man ihre Morphismen kennen. Kennt man diese, so ergeben sich aus diesen auf natürliche Weise weitere Begriffe wie Isomorphismen von Spielen, Summen oder Produkte von Spielen.

Diese Punkte (insbesondere den letzten) näher ausführen?

#### 3.1 Definitionen

Zu zwei gegebenen Spielen  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  und  $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$  kann man wie folgt eine Abbildung  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  zwischen diesen beiden definieren:

- Eine Abbildung  $\sigma : J \rightarrow I$  zwischen den Spielermengen und
- für jeden Spieler  $j \in J$  eine Abbildung  $\phi_j : X_{\sigma(j)} \rightarrow Y_j$  seiner Strategien.

Diese Art und Weise Abbildungen zwischen zwei Spielen zu definieren ergibt sich aus dem - noch deutlich allgemeineren - Ansatz hierzu von Lapitsky in [Lap99]<sup>4</sup>. Hierbei orientieren wir uns vor allem an dem dort in Kapitel 4 vorgestellten Morphismusbegriff für topologische Spiele (in denen die Spielermenge ein topologischer Raum und der Strategieraum eine Garbe über diesem ist) bzw. dessen Spezialisierung für Spiele mit diskreter Spielermenge aus Kapitel 5.

In diesem Kontext ergibt es sich etwas natürlicher, dass die Abbildung zwischen den Spielermengen in die entgegengesetzte Richtung zu der zwischen den Strategieräumen

<sup>4</sup>Lapitsky lässt in seiner Definition allerdings alle beteiligten Abbildungen in die jeweils umgekehrte Richtung gehen. Wir betrachten hier also gewissermaßen die zur dort definierten duale Kategorie.

verläuft. Eine andere, auch im hier vorliegenden Kontext sinnvolle Begründung hierfür liefert aber die folgende Bemerkung:

**Bemerkung 3.1.** Alle Strategieabbildungen  $\phi_j$  zusammen induzieren eine *Strategieprofilabbildung*

$$\phi : X \rightarrow Y : x = (x_i)_{i \in I} \mapsto \phi(x) := \left( \phi_j(x_{\sigma(j)}) \right)_{j \in J}$$

Würde die Abbildung  $\sigma$  zwischen den Spielermengen in die andere, „natürlichere“ Richtung verlaufen (also von  $I$  nach  $J$ ), so müssten wir zusätzlich fordern, dass diese bijektiv ist, damit in der obigen Form Strategieprofile auf Strategieprofile abgebildet werden (vgl. etwa [Jim14]). Denn nur dann wäre  $\phi(x) := (\phi_i(x_i))$  wieder ein vollständiges Strategieprofil in  $Y$ .

**Bemerkung 3.2.** Möchte man trotzdem Spieler- und Strategieabbildungen in die gleiche Richtung haben, so kann man einem alternativen Ansatz zur Definition von Morphismen von Spielen folgen, welcher von Vorob'ev in [Vor94] verwendet wird. Darin werden einzelne Strategien nicht zwangsläufig wieder auf einzelne Strategien abgebildet, sondern können gleich auf ganze Teilmengen des Bildstrategieraums abgebildet werden. Von diesem Morphismen-typ werden dann verschiedene „approximativ kostenerhaltende“ Varianten betrachtet und die sich dadurch ergebende Kategorie studiert.

Genauer beschreiben...

**Notation 3.3.** In den meisten Fällen wird die Abbildung zwischen den Spielermengen bijektiv sein. In diesen Fällen werden wir zur Vereinfachung der Notation ohne Einschränkung davon ausgehen, dass die Spielermengen beider an der Abbildung beteiligten Spiele bereits gleich und geeignet permutiert sind, sodass  $\sigma$  die Identitätsabbildung ist. Damit kann diese in der Notation weggelassen werden und die Abbildung zwischen den Spielen besteht nur noch aus den Abbildungen  $\phi_i : X_i \rightarrow Y_i$  zwischen den Strategieräumen.

Abbildungen der obigen Form nehmen noch keinerlei Rücksicht auf die Kostenfunktionen der jeweiligen Spiele. Da diese aber in der Regel die interessierenden Eigenschaften eines Spiels (wie beispielsweise Gleichgewichte) festlegen, werden derartige Abbildungen im Allgemeinen noch wenig Aussagen über die beteiligten Spiele ermöglichen. So besagt der durch diese Art Abbildungen induzierte Isomorphiebegriff bspw. nur, dass zwei Spiele Spieler- und Strategiemengen gleicher Kardinalität besitzen.

Echte Morphismen zwischen Spielen sollten folglich noch mehr der Struktur eines Spiels erhalten, insbesondere in irgendeiner Form „verträglich“ mit den Kostenfunktionen sein. Je nach dem, welche Eigenschaften die Morphismen (und insbesondere die dadurch induzierten Isomorphismen) erhalten sollen, erhält man so unterschiedlich starke Verträglichkeitsbedingungen. Einige Möglichkeiten dafür werden wir nun kennenlernen.

Eine relative starke Forderung ist die, dass Morphismen *kostenerhaltend* sein müssen, wie sie in [Mil13] gestellt wird:

**Definition 3.4.** Ein Morphismus  $(\sigma, \phi_j)$  von  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  nach  $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$  heißt *kostenerhaltend*, wenn für alle Strategieprofile  $x \in X$  und jeden Spieler  $j \in J$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) = d_j(\phi(x))$$

Ist ein solcher Morphismus gleichzeitig ein Isomorphismus, so nennen wir  $\Gamma$  und  $\Delta$  *äquivalent*.

**Bemerkung 3.5.** Zwei Spiele sind also genau dann äquivalent, wenn sie sich ausschließlich durch Umbenennung der Strategien ineinander überführen lassen. In [MS96b] (S. 133) wird dies als Isomorphie von Spielen bezeichnet.

**Beispiel 3.6.** Ein Spiel  $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$  ist genau dann ein Koordinationsspiel, wenn es einen kostenerhaltenden Morphismus mit surjektiver Strategieprofilabbildung von einem 1-Personenspiel nach  $\Delta$  gibt.

Ist nämlich  $\Delta$  ein Koordinationsspiel, so definiert man ein 1-Personenspiel  $K := (\{*\}, X, (c_*))$  mit  $X = X_* := Y$  und  $c_*(y) := d_{\hat{j}}(y)$  für einen beliebigen, aber festen Spieler  $\hat{j} \in J$ . Ferner definiert man den folgenden Morphismus  $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Delta$ :

$$\begin{array}{lll} \sigma : & J \rightarrow \{*\} : & j \mapsto * \\ \phi_j : & X_* \rightarrow Y_j : & y \mapsto y_j \end{array}$$

Dieser ist kostenerhaltend, denn für jedes Strategieprofil  $y \in X = Y$  und jeden Spieler  $j \in J$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(y) = c_*(y) = d_{\hat{j}}(y) \stackrel{\Gamma \text{ Koord.spiel}}{=} d_j(y) = d_j(\phi(y))$$

Zudem ist offenbar die Strategieprofilabbildung  $\phi$  surjektiv.

Sind umgekehrt ein 1-Personenspiel  $K = (\{*\}, X, (c_*))$  sowie ein kostenerhaltender Morphismus  $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Delta$  mit surjektiven Strategieabbildungen gegeben, dann ist  $\Delta$  bereits ein Koordinationsspiel. Denn aufgrund der Surjektivität von  $\phi$  gibt es zu jedem Strategieprofil  $y \in Y$  ein Strategieprofil  $x \in X$  mit  $\phi(x) = y$ . Da  $(\sigma, \phi)$  außerdem kostenerhaltend ist, folgt dann für je zwei Spieler  $j, \hat{j} \in J$ :

$$d_{\hat{j}}(y) = d_{\hat{j}}(\phi(x)) = c_{\sigma(\hat{j})}(x) = c_*(x) = c_{\sigma(j)}(x) = d_j(\phi(x)) = d_j(y)$$

Also ist  $\Gamma$  tatsächlich ein Koordinationsspiel.

Dieses Beispiel formalisiert die Intuition, dass in einem Koordinationsspiel alle Spieler ein gemeinsames Ziel haben und daher zusammen „wie ein Spieler“ spielen (d.h. das Koordinationsspiel kann durch ein 1-Personenspiel simuliert werden).

Stimmt das so?

**Beispiel 3.7.** .

Kann man auch Dummy-Spiele auf derartige Weise beschreiben?

**Beispiel 3.8.** Gegeben zwei Spiele  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  und  $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$ , so können wir daraus ein neues Spiel konstruieren: Das Produkt bezüglich kostenerhaltenden Morphismen:  $\Gamma \times \Delta := (K := I \dot{\cup} J, X \times Y, (e_k)_{k \in K})$ . Dabei ist  $e_k(x, y) := c_k(x)$  für  $k \in K$  und analog für  $k \in J$ .

Gibt es irgendeine anschauliche Konstruktion von Spielen, die sich als Produkt beschreiben lässt? Falls nicht, eher weglassen.

In [Lap99] stellt Lapitsky folgende schwächere Verträglichkeitsbedingung:



**Definition 3.9.** Ein Morphismus  $(\sigma, \phi_j)$  von  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  nach  $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$  heißt *monoton*, wenn es für jeden Spieler  $j \in J$  eine monotone *Kostenabbildung*  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \downarrow c_{\sigma(j)} & & \downarrow d_j \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f_j} & \mathbb{R} \end{array}$$

*Bemerkung 3.10.* Gibt es eine derartige Abbildung  $f_j$  für einen Spieler  $j \in J$ , so gilt für je zwei Strategieprofile  $x, \hat{x} \in X$ :

$$c_{\sigma(j)}(x) \leq c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \implies d_j(\phi(x)) \leq d_j(\phi(\hat{x})) \quad (1)$$

Ist umgekehrt diese Bedingung für je zwei Strategieprofile eines Spielers  $j \in J$  erfüllt und zudem  $d_j(\phi(X)) \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt oder  $c_{\sigma(j)}(X) \subseteq \mathbb{R}$  in beide Richtungen unbeschränkt, so gibt es eine solche Abbildung  $f_j$ .

*Beweis.* Existiert eine Abbildung  $f_j$ , so gilt für zwei Strategieprofile  $x, \hat{x} \in X$  mit  $c_{\sigma(j)}(x) \leq c_{\sigma(j)}(\hat{x})$ :

$$d_j(\phi(x)) = f_j \circ c_{\sigma(j)}(x) \leq f_j \circ c_{\sigma(j)}(\hat{x}) = d_j(\phi(\hat{x}))$$

Ist  $d_j(\phi(X)) \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt oder  $c_{\sigma(j)}(X) \subseteq \mathbb{R}$  in beide Richtungen unbeschränkt, so können wir folgende Abbildung  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren:

$$f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} \sup \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X \}, & \nexists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \geq t \\ \inf \left\{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X, c_{\sigma(j)}(x) \geq t \right\}, & t \geq 0 \text{ und } \exists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \geq t \\ \sup \left\{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X, c_{\sigma(j)}(x) \leq t \right\}, & t < 0 \text{ und } \exists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \leq t \\ \inf \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X \}, & \nexists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \leq t \end{cases}$$

Gilt Eigenschaft (1), so ist diese Abbildung monoton und es gilt  $f_j \circ c_{\sigma(j)} = d_j \circ \phi$ , denn für ein festes Strategieprofil  $\hat{x} \in X$  mit  $c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \geq 0$  gilt dann:

$$\forall x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \geq c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \xrightarrow{(1)} d_j(x) \geq d_j(\hat{x})$$

Also nach Definition von  $f_j$ :

$$f_j \circ c_{\sigma(j)}(\hat{x}) = f_j(c_{\sigma(j)}(\hat{x})) = \inf \left\{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X, c_{\sigma(j)}(x) \geq c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \right\} = d_j(\phi(\hat{x})) = d_j \circ \phi(\hat{x})$$

Analog folgt dies für Strategieprofile  $\hat{x} \in X$  mit  $c_{\sigma(j)}(\hat{x}) < 0$ .  $\square$

**Proposition 3.11.** *Ist ein Spiel monoton isomorph zu einem Koordinationsspiel, so besitzt es ein skaliertes Potential.*

*Beweis.* Sei also  $(\sigma, \phi) : \Gamma = (I, X, (c_i)) \rightarrow K = (J, Y, (d))$  ein solcher monotoner Isomorphismus. Dann gibt es folglich monotone Abbildungen  $f_j$  und  $g_i$ , sodass alle Diagramme der folgenden Form kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{\phi} & Y & \xrightarrow{\phi^{-1}} & X \\
 \downarrow c_i & & \downarrow d(i) & & \downarrow c_i \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f_{\sigma^{-1}(i)}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g_i} & \mathbb{R} \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id} & & 
 \end{array}$$

Dann ist  $P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d \circ \phi(x)$  ein skaliertes Potential mit Skalierungsfunktionen  $g_i$ , denn es gilt allgemein

$$g_i \circ d \circ \phi = c_i \circ \phi^{-1} \circ \phi = c_i \circ \text{id} = c_i$$

und damit im Besonderen

$$g_i \circ d \circ \phi(x) - g_i \circ d \circ \phi(x \mid \hat{x}_i) = c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i).$$

Ferner sind die  $g_i$  nach Voraussetzung monoton und wegen  $f_{\sigma^{-1}(i)} \circ g_i = \text{id}$  injektiv, also insgesamt streng monoton.  $\square$

**Korollar 3.12.** *Sei  $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Gamma$  ein monotoner Morphismus mit surjektiver Strategieprofilabbildung und bijektiven Kostenabbildungen von einem 1-Personenspiel  $K$  nach  $\Gamma$ . Dann besitzt  $\Gamma$  ein skaliertes Potential.*

*Beweis.* Wir konstruieren ein zu  $\Gamma$  monoton isomorphes Spiel  $\Delta$  und einen kostenerhaltenden Morphismus mit surjektiver Strategieprofilabbildung von  $K$  nach  $\Delta$ . Mit Beispiel 3.6 ist  $\Delta$  dann ein Koordinationsspiel und nach Proposition 3.11 besitzt  $\Gamma$  folglich ein skaliertes Potential.

Diagramm zur Veranschaulichung des Beweises. Wie beschriftet man die Pfeile vernünftig?

Seien also  $\Gamma = (I, X, (c_i))$  und  $K = (\{*\}, Z_*, (e_*))$  die gegebenen Spiele und  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die (bijektiven) Kostenabbildungen zu  $(\sigma, \phi)$ . Dann definieren wir  $\Delta := (I, X, (f_i^{-1} \circ c_i)_{i \in I})$ . Nun hat  $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Delta$  nach Voraussetzung eine surjektive Strategieprofilabbildung und ist ferner kostenerhaltend, denn für jedes  $z \in Z_*$  gilt:

$$f_i^{-1} \circ c_i \circ \phi(z) = f_i^{-1} \circ f_i \circ e_*(z) = e_*(z) = e_{\sigma(i)}(z)$$

Weiter sind  $(\text{id}, \text{id}) : \Delta \rightarrow \Gamma$  und die Umkehrabbildung  $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow \Delta$  monoton, denn

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\text{id}} & X \\
f_i^{-1} \circ c_i \downarrow & & \downarrow c_i \\
\mathbb{R} & \xrightarrow{f_i} & \mathbb{R}
\end{array}
\quad \text{und} \quad
\begin{array}{ccc}
X & \xleftarrow{\text{id}} & X \\
f_i^{-1} \circ c_i \downarrow & & \downarrow c_i \\
\mathbb{R} & \xleftarrow{f_i^{-1}} & \mathbb{R}
\end{array}$$

kommutieren offenbar. Also sind  $\Delta$  und  $\Gamma$  tatsächlich monoton isomorph.  $\square$

Ist dieser Satz wirklich sinnvoll? Insbesondere mit diesem Beweis?

Dies ist also bereits ein Beispiel dafür, wie man die Existenz eines Potentials durch die Existenz eines passenden Isomorphismus zu einem Koordinationsspiel ausdrücken kann. Allerdings ist die Verträglichkeitsbedingung an monotone Morphismen noch zu stark um auf diesem Weg auch eine notwendige Bedingung für die Existenz eines skalierten zu erhalten. Dies liegt daran, dass hier eine globale Monotonie gefordert wird, während die meisten Potentiale lediglich lokale Monotonie benötigen.

Beispiel für die Nicht-Notwendigkeit finden!

Wir schränken nun also die Verträglichkeitsbedingung auf Nachbarschaften ein und kommen so zum Begriff eines ordinalen Morphismus. Einen entsprechenden (Iso-)Morphismusbegriff für exakte Potentiale definiert Milchtaich in [Mil13]. Und analog hierzu lassen sich auch für die anderen Potentialbegriffe passende Begriffe eines Morphismus (und damit eines Isomorphismus) definieren:

**Definition 3.13.** Ein Morphismus  $(\sigma, \phi)$  von  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  nach  $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$  heißt

- *exakt*, wenn für alle Strategieprofile  $x \in X$ , Spieler  $j \in J$  und Strategien  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = d_j(\phi(x)) - d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$$

- *gewichtend*, wenn es einen Vektor  $(w_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^J$  gibt, sodass für alle Strategieprofile  $x \in X$ , Spieler  $j \in J$  und Strategien  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = w_j \cdot (d_j(\phi(x)) - d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})))$$

- *skalierend*, wenn es streng monotone Funktionen  $f_j$  gibt, sodass für alle Strategieprofile  $x \in X$ , Spieler  $j \in J$  und Strategien  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = f_j(d_j(\phi(x))) - f_j(d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})))$$

- *ordinal*, wenn für alle Strategieprofile  $x \in X$ , Spieler  $j \in J$  und Strategien  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) < c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) \implies d_j(\phi(x)) < d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$$

- *beste Antwort-erhaltend*, wenn für alle Spieler  $j \in J$  und Strategieprofile  $x \in X$  gilt:

$$\phi(\arg \min_{x_{\sigma(j)} \in X_{\sigma(j)}} c_{\sigma(j)}(x \mid x_{\sigma(j)})) \subseteq \arg \min_{y_j \in Y_j} d_j(\phi(x) \mid y_j)$$

Während die Verknüpfung zweier kostenerhaltender Morphismen wieder einen kostenerhaltenden Morphismus gibt und die zweier monotonen wieder einen monotonen, ist dies bei exakten/gewichteten/... im Allgemeinen nicht der Fall.

**Beispiel 3.14.** Betrachte die folgenden drei 1- bzw. 2-Personenspiele:

Als Auszahlungsmatrizen darstellen?

- $\Gamma := (\{1\}, \{t, b\}, c_1)$ , wobei die Kostenfunktion  $c_1$  wie folgt definiert ist:  $c(t) = 0, c(b) = 1$ .
- $\Delta := (\{1, 2\}, \{t, b\} \times \{l, r\}, (d_1, d_2))$  mit Kostenfunktionen definiert durch folgende Auszahlungsmatrix (mit Einträgen  $(d_1(-), d_2(-))$ ):

	l	r
t	(0,0)	(0,1)
b	(1,0)	(1,1)

- $E := (\{1, 2\}, \{t, b\} \times \{l, r\}, (e_1, e_2))$  mit Kostenfunktionen definiert durch folgende Auszahlungsmatrix (mit Einträgen  $(e_1(-), e_2(-))$ ):

	l	r
t	(1,1)	(0,1)
b	(1,0)	(0,0)

Dann sind sowohl die Abbildung  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  mit  $\sigma(1) = \sigma(2) = 1$  und  $\phi_1(t) = t, \phi_1(b) = b, \phi_2(t) = l, \phi_2(b) = r$  als auch die Abbildung  $(\tau, \psi) : \Delta \rightarrow E$  mit  $\tau = \text{id}$  und  $\psi_i = \text{id}$  exakt, wie man durch einfaches Nachprüfen der jeweiligen Bedingungen sieht. Gleichzeitig ist aber die Verknüpfung der beiden Abbildungen  $(\tau, \psi) \circ (\sigma, \phi) = (\sigma \circ \tau, \psi \circ \phi)$  nicht einmal ordinal, denn es gilt

Nachprüfen!!!

$$c_{\sigma \circ \tau(1)}(t) = c_1(t) = 0 < 1 = c_1(b) = c_{\sigma \circ \tau(1)}(b) = c_1(b),$$

aber gleichzeitig

$$e_1(\psi \circ \phi(t)) = e_1(t, l) = 1 > 0 = e_1(b, r) = e_1(\psi \circ \phi(b)).$$

Insbesondere erhält man also keine Kategorie von Spielen im Sinne der Kategorientheorie, wenn man sich nur auf exakte/gewichtete/... Morphismen beschränkt (was für kostenerhaltende/monotone Morphismen der Fall ist und für monotone Morphismen in [Lap99] auch weiter untersucht wird). Man kann den Erhalt von Exaktheit/Gewichtetheit/... allerdings wieder sicherstellen, wenn man sich noch weiter auf Morphismen mit injektiver Spielerabbildung einschränkt:

bessere Formulierung

**Lemma 3.15.** Die Verknüpfung zweier exakter/gewichteter/skalierter/ordinaler/Bester-Antwort-Morphismen mit injektiven Spielerabbildungen ist wieder ein solcher Morphismus.

*Beweis.* Die Aussage des Lemmas ergibt sich aus folgender Beobachtung: □

Weiter...

einer der beiden/beide bijektiv auf ... sind?

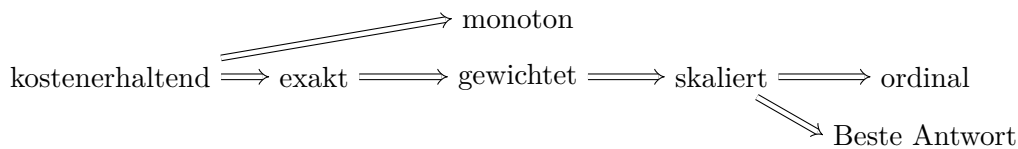
Es ist nun leicht zu sehen, dass diese Isomorphismusbegriffe tatsächlich dazu definiert werden können, die Existenz der verschiedenen Potentiale zu definieren:

*Bemerkung 3.16.* Ein Spiel  $\Delta$  besitzt genau dann ein exaktes/gewichtetes/ordinales/Beste-Antwort-Potential, wenn es exakt/gewichtet/ordinal/beste Antwort-isomorph zu einem Koordinationsspiel ist.

Beweis?

Zu beste Antwort: vgl. [MS96a], [MU04]

*Beobachtung 3.17.* Es gelten folgende Beziehungen zwischen den verschiedenen Morphem-begriffen:



## 3.2 Beweise der Potentialsätze

Ordinale Morphismen erhalten Verbesserungen und reflektieren Nicht-Verschlechterung:

Wie sieht es mit Isomorphismen aus? Speziell auf Zusammenhang von skaliert und monoton eingehen!

**Proposition 3.18.** Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein ordinaler Morphismus mit surjektiver Spielerabbildung  $\sigma$  und  $\gamma = (x^0, x^1, \dots)$  ein Pfad in  $X$ , sodass auch  $\phi(\gamma) := (\phi(x^0), \phi(x^1), \dots)$  ein Pfad in  $Y$  ist. Ist dann  $\phi(\gamma)$  ein Nicht-Verschlechterungspfad, so auch  $\gamma$ . Ist  $\gamma$  sogar ein Verbesserungspfad, so auch  $\phi(\gamma)$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $\phi(\gamma)$  ein Nicht-Verschlechterungspfad. Angenommen  $\gamma$  wäre kein Nicht-Verschlechterungspfad, dann gäbe es also ein  $k$ , sodass sich der im  $k$ -ten Schritt abweichende Spieler echt verschlechtert, d.h.  $c_{i(k)}(x^k) > c_{i(k)}(x^{k-1})$ . Da  $\sigma : J \rightarrow I$  surjektiv ist, gibt es nun einen Spieler  $j \in J$  mit  $\sigma(j) = i(k)$  und wegen der Ordinalität von  $\phi$  gilt für diesen, dass er sich im  $k$ -ten Schritt von  $\phi(\gamma)$  echt verschlechtert, d.h.  $d_j(\phi(x^k)) > d_j(\phi(x^{k-1}))$ .

Insbesondere wissen wir damit, dass es auch in  $\phi(\gamma)$  einen Spieler  $j(k)$  geben muss, der im  $k$ -ten Schritt seine Strategie echt ändert. Damit gilt

$$\phi_{\sigma(j(k))} \left( x_{\sigma(j(k))}^k \right) = \left( \phi(x^k) \right)_{\sigma(j(k))} \neq \left( \phi(x^{k-1}) \right)_{\sigma(j(k))} = \phi_{\sigma(j(k))} \left( x_{\sigma(j(k))}^{k-1} \right)$$

Daraus folgt  $x_{\sigma(j(k))}^k \neq x_{\sigma(j(k))}^{k-1}$  und, da es in einem Pfad pro Schritt höchstens einen abweichenden Spieler geben kann, auch  $i(k) = \sigma(j(k))$ . Aus der Ordinalität von  $\phi$  folgt dann aber aus  $c_{i(k)}(x^k) > c_{i(k)}(x^{k-1})$ , dass sich aus  $j(k)$  echt verschlechtert, d.h.  $d_{j(k)}(\phi(x^k)) > d_{j(k)}(\phi(x^{k-1}))$  - im Widerspruch dazu, dass  $\phi(\gamma)$  ein Nicht-Verschlechterungspfad ist.

Ist nun  $\gamma$  ein Verbesserungspfad, gilt in jedem Schritt  $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$  und daher - mit dem gleichen Argument wie eben - auch  $d_{j(k)}(\phi(x^{k+1})) < d_{j(k)}(\phi(x^k))$ . Also ist auch  $\phi(\gamma)$  ein Verbesserungspfad.  $\square$

Im Allgemeinen bilden (ordinale) Morphismen Pfade nicht wieder auf Pfade ab. Ist nämlich  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein solcher Morphismus und gibt es zwei Spieler  $j$  und  $j'$  mit  $\sigma(j) = \sigma(j') =: i$ , dann kann eine einseitige Abweichung von Spieler  $i$  in  $\Gamma$  zu einer gleichzeitigen Abweichung der beiden Spieler  $j$  und  $j'$  in  $\Delta$  führen. Dies kann allerdings nicht passieren, wenn die Spielerabbildung  $\sigma$  injektiv ist.

*Beobachtung 3.19.* Morphismen  $(\sigma, \phi)$  mit injektivem  $\sigma$  bilden Pfade auf Pfade ab.

Dies erlaubt uns folgendes Korollar:

**Korollar 3.20.** Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein ordinaler Morphismus mit bijektiver Spielerabbildung  $\sigma$  und  $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$  ein Verbesserungspfad in  $X$ . Ist dann  $\phi(\gamma)$  abgeschlossen in  $\Delta$ , so ist auch  $\gamma$  in  $\Gamma$  abgeschlossen.

*Beweis.* Nehmen wir im Widerspruch zur Behauptung an,  $\gamma$  wäre nicht abgeschlossen. Dann gäbe es folglich ein Strategieprofil  $x^{n+1} \in X$ , welches  $\gamma$  zu einem Verbesserungspfad  $\gamma' := (x^0, \dots, x^n, x^{n+1})$  in  $\Gamma$  verlängert. Nach Beobachtung 3.19 ist dann auch  $\phi(\gamma')$  ein Pfad in  $\Delta$  und mit Proposition 3.18 sogar ein Verbesserungspfad, also insbesondere eine Verlängerung des Pfades  $\phi(\gamma)$  - ein Widerspruch zu dessen Abgeschlossenheit.  $\square$

**Korollar 3.21.** Ordinale Morphismen mit bijektiver Spielerabbildung reflektieren Nash-Gleichgewichte. Das heißt, ist  $x \in X$  ein Strategieprofil in  $\Gamma$  und  $(\sigma, \phi)$  ein ordinaler Morphismus in ein Spiel  $\Delta$ , sodass  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht in diesem ist, dann war bereits  $x$  ein Nash-Gleichgewicht von  $\Gamma$ .

*Beweis.* Es ist  $x$  ein trivialer Verbesserungspfad in  $\Gamma$ , dessen Bild  $\phi(x)$  in  $\Delta$  abgeschlossen ist. Daher ist mit Korollar 3.20  $x$  in  $\Gamma$  abgeschlossen und folglich (vgl. Beobachtung 1.12)  $x$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$ .  $\square$

Zu obigen Sätzen jeweils Beispiele für Notwendigkeit der Voraussetzungen finden

Aus diesem Korollar folgt insbesondere, dass Nash-Gleichgewichte in von einem verallgemeinerten ordinalen Potential induzierten Koordinationsspiel auch Nash-Gleichgewichte im Ausgangsspiel sind.

Näher ausführen - auf entsprechende Sätze im Potential-Kapitel verweisen

**Beispiel 3.22.** Ordinale Isomorphismen haben insbesondere injektive Spieler- und Strategieabbildungen. Damit erfüllen sie die Voraussetzungen von Korollar 3.21, d.h. ordinal isomorphe Spiele haben die gleichen Nash-Gleichgewichte.

Dies wiederum zeigt, dass ordinale Potentiale lokale Nash-Potentiale sind.

### 3.3 Weitere Sätze mit Morphismen

Weitere unsortierte Sätze...:

**Proposition 3.23.** Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein biordinaler Morphismus mit injektiver Spielerabbildung und surjektiven Strategieabbildungen. Seien ferner alle Spieler in  $I \setminus \sigma(J)$  Dummy-Spieler. Dann ist ein Strategieprofil  $x \in X$  genau dann ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$ , wenn  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Delta$  ist.

Begriff definieren!

Begriff definieren! Evtl. zusammen mit Dummy-Spielen

Kann man das noch schöner ausdrücken (mit Retrakten o.ä.)?

*Beweis.* Sei zunächst  $x \in X$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Gamma$  und  $y_j \in Y_j$ . Da  $\phi_j$  surjektiv ist, gibt es dann ein  $\hat{x}_{\sigma(j)}$  mit  $\phi_j(\hat{x}_{\sigma(j)}) = y_j$ . Wegen der Injektivität von  $\sigma$  gilt ferner  $\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = (\phi(x) \mid y_j)$ .

Da  $x$  ein Nash-Gleichgewicht ist, gilt nun  $c_{\sigma(j)}(x) \leq c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})$  und folglich wegen der Biordinalität von  $\phi$  auch  $d_j(\phi(x)) \leq d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})) = d_j(\phi(x) \mid y_j)$ . Also ist auch  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Delta$ .

Ist umgekehrt  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht in  $\Delta$  und  $\hat{x}_i$  eine alternative Strategie von Spieler  $i \in I$ .

1. **Fall:** Liegt  $i$  in  $I \setminus \sigma(J)$ , so ist  $i$  nach Voraussetzung ein Dummy-Spieler und folglich gilt:  $c_i(x) = c_i(x \mid \hat{x}_i)$ .
2. **Fall:** Liegt  $i$  hingegen in  $\sigma(J)$ , so gibt es also einen Spieler  $j \in J$  mit  $\sigma(j) = i$ . Aus der Injektivität von  $\sigma$  und dem Wissen, dass  $\phi(x)$  ein Nash-Gleichgewicht ist, folgt nun  $d_j(\phi(x \mid \hat{x}_i)) = d_j(\phi(x) \mid \phi_j(\hat{x}_{\sigma(j)})) \geq d_j(\phi(x))$ . Über die Biordinalität von  $\phi$  erhalten wir schließlich  $c_i(x \mid \hat{x}_i) = c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_i) \geq c_{\sigma(j)}(x) = c_i(x)$ .

Insgesamt ist also auch  $x$  ein Nash-Gleichgewicht. □

Mit dieser Proposition können wir nun die in Beobachtung 1.2 gemachte Beobachtung formalisieren (und beweisen), dass Spieler mit nur einer einzigen Strategie beim Untersuchen von Nash-Gleichgewichten immer ignoriert werden können:

**Beispiel 3.24.** Spieler mit nur einer einzigen Strategie können immer entfernt werden ohne die Nash-Gleichgewichte zu verändern.

Sei dazu  $\Gamma$  ein beliebiges Spiel und  $I' \subseteq I$  eine solche Teilmenge von Spielern, dass alle Spieler  $i$  in  $I \setminus I'$  genau eine Strategie  $*_i$  besitzen. Dann betrachten wir die Einschränkung von  $\Gamma$  auf die Spieler in  $I'$ , nämlich  $\Gamma' := (I', \prod_{i \in I'} X_i, (c'_i)_{i \in I'})$ , wobei die Kostenfunktionen wie folgt definiert sind:

$$c'_i(x') := c_i(x), \text{ wobei } x \in X \text{ definiert ist durch } x_i = \begin{cases} x'_i, & i \in I' \\ *_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

und den folgenden Morphismus  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  zwischen den beiden Spielen:

$$\begin{array}{lll} \sigma : & I \setminus I' \rightarrow I : & i \mapsto i \\ \phi_i : & X_i \rightarrow X_i : & x_i \mapsto x_i \end{array}$$

Dieser ist offenbar kostenerhaltend, also insbesondere biordinal, und  $I \setminus \sigma(I') = I \setminus I'$  enthält nur Dummy-Spieler. Damit folgt die Behauptung aus Proposition 3.23.

Kein Zusammenhang zum Vorhergehenden:

**Korollar 3.25.** Seien  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwei ordinal-isomorphe Spiele. Dann hat  $\Gamma$  genau dann die FIP, wenn  $\Gamma'$  diese besitzt.

Eine Verallgemeinerung von Beobachtung 2.12 lautet

**Proposition 3.26.** Seien  $\Gamma$  und  $\Delta$  zwei Spiele. Dann gibt es genau dann einen gewichteten Morphismus  $\Gamma \rightarrow \Delta$ , wenn es Gewichte  $(w_i)_{i \in I}$  und einen exakten Morphismus  $\Gamma \rightarrow w_i \cdot \Delta$  gibt.

**Korollar 3.27.** Zwei Spiele  $\Gamma$  und  $\Delta$  sind genau dann gewichtet isomorph, wenn ... usw.

Ist der folgende Satz hilfreich? Wenn ja, wo unterbringen (eig. kein Potentialsatz!)

**Proposition 3.28.** Sei  $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$  ein monotoner Morphismus und  $\gamma = (x^0, x^1, \dots)$  ein Pfad in  $X$ , sodass auch  $\phi(\gamma) := (\phi(x^0), \phi(x^1), \dots)$  ein Pfad in  $Y$  ist. Ist dann  $\gamma$  ein Nicht-Verschlechterungspfad, so auch  $\phi(\gamma)$ . Ist  $\phi(\gamma)$  sogar ein Verbesserungspfad, so auch  $\gamma$ .

*Beweis.* Zunächst beobachten wir, dass  $\sigma$  immer den in  $\phi(\gamma)$  im  $k$ -ten Schritt abweichenden Spieler (sofern es einen solchen gibt) auf den im gleichen Schritt abweichenden Spieler in  $\gamma$  abbildet. Ist nämlich  $j(k)$  der entsprechende Spieler aus  $\Delta$ , so gilt:

$$\phi_{\sigma(j(k))}(x^k_{\sigma(j(k))}) = (\phi(x^k))_{\sigma(j(k))} \neq (\phi(x^{k-1}))_{\sigma(j(k))} = \phi_{\sigma(j(k))}(x^{k-1}_{\sigma(j(k))})$$

Daraus folgt  $x^k_{\sigma(j(k))} \neq x^{k-1}_{\sigma(j(k))}$  und, da es in einem Pfad pro Schritt höchstens einen abweichenden Spieler geben kann, auch  $i(k) = \sigma(j(k))$ .



Ist nun  $\gamma$  ein Nicht-Verschlechterungspfad und es gibt im  $k$ -ten Schritt einen (echt) abweichenden Spieler  $j(k)$ , so ist also  $\sigma(j(k)) = i(k)$  und daher  $c_{\sigma(j(k))}(x^k) \leq c_{\sigma(j(k))}(x^{k-1})$ . Mit der Monotonie von  $\phi$  folgt daraus direkt auch  $d_{j(k)}(\phi(x^k)) \leq d_{j(k)}(\phi(x^{k-1}))$ .

Ist  $\phi(\gamma)$  ein Verbesserungspfad, gilt in jedem Schritt  $d_{j(k)}(\phi(x^{k+1})) < d_{j(k)}(\phi(x^k))$  und daher - erneut wegen der Monotonie von  $\phi$  - auch  $c_{\sigma(j(k))}(x^{k+1}) < c_{\sigma(j(k))}(x^k)$ .  $\square$

## 4 Zusammenhänge von Auslastungs- und Potentialspielen

Welche Endlichkeitsvoraussetzungen benötigt man hier jeweils?

In [Ros73] führte Rosenthal Auslastungsspiele als Klasse von endlichen Spielen ein, welche immer ein exaktes Potential (und damit ein Nash-Gleichgewicht) besitzen. Später zeigten Monderer und Shapley in [MS96b, Theorem 3.2], dass diese Klasse bis auf (kostenerhaltende) Isomorphie bereits *alle* endlichen Spiele mit exaktem Potential umfasst. Zusammengefasst und etwas verallgemeinert gilt also:

Mit Einleitung von Kapitel 1.3 vergleichen.

**Satz 4.1.** *Jedes  $N$ -Personen-Auslastungsspiel besitzt ein exaktes Potential und jedes exakte  $N$ -Personen-Potentialspiel ist äquivalent zu einem Auslastungsspiel.*

*Beweis.* Sei  $\Gamma(M)$  ein beliebiges Auslastungsspiel. Dann definieren wir wie folgt die Rosenthal-Potentialfunktion:

$$P : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} g_r(k)$$

Die Funktion ist wohldefiniert, da die insgesamt  $N$  Spieler zusammen nur endlich viele Ressourcen nutzen können und daher beide Summen endlich sind. Sie ist ferner ein exaktes Potential, denn zu einem Strategieprofil  $s \in S$  und einer weiteren Strategie  $\hat{s}_i$  von Spieler  $i$  gilt:

$$\begin{aligned} P(s) - P(s \mid \hat{s}_i) &= \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} g_r(k) - \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s \mid \hat{s}_i)} g_r(k) = \sum_{r \in s_i \setminus \hat{s}_i} g_r(l_r(s)) - \sum_{r \in \hat{s}_i \setminus s_i} g_r(l_r(s) + 1) = \\ &= \sum_{r \in s_i \setminus \hat{s}_i} g_r(l_r(s)) + \sum_{r \in s_i \cap \hat{s}_i} g_r(l_r(s)) - \sum_{r \in s_i \cap \hat{s}_i} g_r(l_r(s \mid \hat{s}_i)) - \sum_{r \in \hat{s}_i \setminus s_i} g_r(l_r(s \mid \hat{s}_i)) = \\ &= \sum_{r \in s_i} g_r(l_r(s)) - \sum_{r \in \hat{s}_i} g_r(l_r(s \mid \hat{s}_i)) = c_i(s) - c_i(s \mid \hat{s}_i) \end{aligned}$$

Für die umgekehrte Richtung orientieren wir uns an dem Beweis in [Mon06, Theorem 1]. Gegeben also ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  mit einem exakten Potential  $P$ . Hierzu definieren wir folgendes Auslastungsmodell  $M = (I, R, (S_i)_{i \in I}, (g_r)_{r \in R})$ :

- $R := R_K \cup R_D \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X_i)$ , wobei  $R_K := \{ (\{x_i\})_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$  und  $R_D := \{ (Y_i)_{i \in I} \mid \exists \hat{i} \in I : Y_{\hat{i}} = X_{\hat{i}}, \forall i \neq \hat{i} : |X_i \setminus Y_i| = 1 \}$ .

•

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_K \text{ und } k = N \\ c_i(x) - P(x), & r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \hat{i}} \times X_{\hat{i}} \in R_D \text{ und } k = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wohldefiniertheit!

- $S_i := \{ \{ r \in R \mid x_i \in r_i \} \mid x_i \in X_i \}$

Die induzierten Lastfunktionen sind automatisch wohldefiniert, da die Spielermenge endlich ist, die Wohldefiniertheit der Kostenfunktionen  $d_i$  folgt dann aus dem Beweis der Äquivalenz der Spiele  $\Gamma$  und  $\Gamma(M)$ . Dazu betrachten wir den Morphismus  $(\text{id}, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma(M)$ , wobei  $\phi_i(x) := s(x_i) := \{ r \in R \mid x_i \in r_i \}$ . Dieser ist offenbar bijektiv auf allen Mengen und zudem kostenerhaltend, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
d_i(\phi(x)) &= \sum_{r \in \phi(x)_i = \phi_i(x_i)} g_r(l_r(\phi(x))) = \\
&= \sum_{r \in R_K : x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{=N \iff r = (\{x_i\})_{i \in I}}) + \sum_{r \in R_D : x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{=1 \iff r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus i} \times X_i}) = \\
&= g_{(\{x_i\})_{i \in I}}(N) + g_{(X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus i} \times X_i}(1) = \\
&= P(x) + c_i(x) - P(x) = c_i(x) \quad \square
\end{aligned}$$

*Bemerkung 4.2.* Berücksichtigt man nur die Ressourcen aus  $R_K$ , so erhält man ein Koordinationsspiel, nimmt man nur die aus  $R_D$  so erhält man ein Dummy-Spiel. Aus dieser Beobachtung ergibt sich der in [Voo+99] beschriebene alternative Beweis für die Rückrichtung: Man zerlegt das exakte Potentialspiel zunächst in ein Koordinations- und ein Dummispiel (siehe Satz 2.10), konstruiert für jedes der beiden ein äquivalentes Auslastungsspiel (mit Ressourcenn Mengen  $R_K$  bzw.  $R_D$ ) und erhält schließlich die Summe der beiden Auslastungsspiele als zum Ausgangsspiel kostenerhaltend isomorphes Auslastungsspiel.

Auslastungsspiele sind also nicht nur *ein* Beispiel für Spiele mit exaktem Potential, sondern in gewissem Sinne (nämlich bis auf Isomorphie) sogar *das* Beispiel für solche Spiele. Eine naheliegende Frage ist nun, ob es ähnliche Klassen von „auslastungsartigen“ Spielen gibt, welche genau den Spielen mit allgemeineren Potentials entsprechen. Im Folgenden werden wir versuchen eine zu gewichteten Potentialspielen passende Verallgemeinerung von Auslastungsspielen zu finden.

## 4.1 Von ungewichtet zu gewichtet

### 4.1.1 Gewichtete Auslastungsspiele

Für gewichtete Auslastungsspiele zeigen Harks, Klimm und Möhring in [HKM11, Theorem 3.9], dass die einzigen beiden Klassen stetiger Funktionen, die (als Kostenfunktionen verwendet) ausschließlich endliche Spiele mit gewichtetem Potential erzeugen, affin lineare Funktionen bzw. exponentielle Funktionen (mit gemeinsamem Exponenten) sind:

**Satz 4.3.** *Gegeben eine Menge von stetigen Funktionen  $C$ . Dann besitzt genau dann jedes endliche gewichtete Auslastungsspiel, welches nur Funktionen aus  $C$  als Kostenfunktionen verwendet, ein gewichtetes Potential, wenn  $C$*

- *entweder ausschließlich affin lineare Funktionen enthält*

Fälle: Exaktes Potential/  
gewichtetes Potential  
unterscheiden

- oder ausschließlich Funktionen der Form  $c(l) = a_c \cdot b^l + d_c$  enthält.

In [HK12, Theorem 5.1] zeigen Harks und Klimm weiter, dass diese beiden Klassen von Kostenfunktionen unter allen Klassen *stetiger* Funktionen gleichzeitig auch die einzigen sind, die die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes garantieren.<sup>5</sup>

Da nun für endliche Spiele alle der in Abschnitt 2 definierten Potentiale die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes garantieren, folgt hiermit direkt, dass es auch für die allgemeineren Potentialbegriffe keine größeren oder anderen Klassen von stetigen Funktionen gibt, die immer die Existenz eines entsprechenden Potentials sicher stellen.

Zusammen zeigen diese beiden Sätze bereits deutlich, dass der Schritt vom ungewichteten Fall zum gewichteten auf Seite der Auslastungsspiele erheblich größer ist als auf Seite der Potentiale. Tatsächlich zeigt Milchtaich in [Mil13], dass dieser Verallgemeinerungsschritt für Auslastungsspiele bereits der größtmögliche ist, denn es gilt:

**Satz 4.4.** *Jedes endliche Spiel ist äquivalent zu einem gewichteten Auslastungsspiel.*

(sogar Netzwerkauslastungsspiel mit ...)

Die Menge der gewichteten Auslastungsspiele umfasst also (bis auf kostenerhaltende Isomorphie) bereits *alle* (endlichen) Spiele in strategischer Form. Möchte man daher eine wirklich analoge Verallgemeinerung von Auslastungsspielen passend zu gewichteten Potentialspielen finden, muss man also andere Varianten betrachten Gewichte ins Spiel zu bringen. In Definition 1.18 hatten wir bereits zwei solche gesehen, welche wir nun näher untersuchen wollen:

#### 4.1.2 Lastgewichtete Auslastungsspiele

Die erste alternative Klasse von Auslastungsspielen sind die lastgewichteten Auslastungsspiele. Harks, Klimm und Möhring beobachten in [HKM11], dass lastgewichtete Auslastungsspiele (die dort als normalisierte Auslastungsspiele bezeichnet werden) zwar nicht äquivalent, aber doch unter verschiedenen Aspekten sehr ähnlich zu allgemeinen gewichteten Auslastungsspielen sind. Dieser Zusammenhang lässt sich nun leicht durch einen passenden Isomorphiebegriff formalisieren - es gilt nämlich:

**Lemma 4.5.** *Jedes lastgewichtete Auslastungsspiel ist gewichtet isomorph zu einem gewichteten Auslastungsspiel und umgekehrt. Die beiden Spiele basieren dabei jeweils auf dem gleichen Auslastungsmodell und der Gewichtsvektor des Morphismus von gewichteten zum lastgewichteten Auslastungsspiel ist der Gewichtsvektor des Auslastungsmodells.*

*Beweis.* Sei  $M = (I, R, (S_i), (G_r))$  ein Auslastungsmodell und  $w = (w_i)$  ein Gewichtsvektor. Dann ist  $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma(M, w) \rightarrow \Gamma_l(M, w)$  offenbar ein Isomorphismus und ferner gewichtet,

<sup>5</sup> zudem sind es auch noch die einzigen Klassen, welche für jedes gewichtete Auslastungsspiel das Erfüllen der FIP sicherstellen.

denn sind  $c_i$  die Kostenfunktionen von  $\Gamma(M, w)$  und  $d_i$  die von  $\Gamma_l(M, w)$ , so gilt sogar für jedes Strategieprofil  $s$ :

$$c_i(s) = \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(s)) = w_i \cdot \sum_{r \in R} g_r(l_r(s)) = w_i \cdot d_i(s) \quad \square$$

Hieraus ergeben sich dann direkt die in [HKM11] beobachteten Zusammenhänge zwischen gewichteten und lastgewichteten Auslastungsspielen:

**Korollar 4.6.** *Sei  $M = (I, R, (S_i), (G_r))$  ein Auslastungsmodell und  $w = (w_i)$  ein Gewichtsvektor. Dann gilt:*

- *Die Nash-Gleichgewichte von  $\Gamma(M, w)$  und  $\Gamma_l(M, w)$  stimmen überein.*
- *Eine Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann ein gewichtetes/ordinales/verallgemeinert ordinales/Beste Antwort/lokales Nash-Potential von  $\Gamma(M, w)$ , wenn es ein solches für  $\Gamma_l(M, w)$  ist.*
- *Eine Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann ein exaktes Potential von  $\Gamma(M, w)$ , wenn sie ein  $w$ -Potential von  $\Gamma_l(M, w)$  ist.*
- *Eine Funktion  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann ein exaktes Potential von  $\Gamma_l(M, w)$ , wenn sie ein  $(1/w_i)$ -Potential von  $\Gamma(M, w)$  ist.*

Insbesondere sehen wir damit aber auch, dass lastgewichtete Auslastungsspiele ebenfalls eine zu starke Verallgemeinerung von ungewichteten Auslastungsspielen sind, um eine Entsprechung der gewichteten Potentialspiele sein zu können.

#### 4.1.3 Kostengewichtete Auslastungsspiele

Wie sich herausstellt sind kostengewichtete Auslastungsspiele hingegen eine geeignete Klasse:

**Satz 4.7.** *Jedes kostengewichtete Auslastungsspiel besitzt ein gewichtetes Potential und jedes Spiel mit einem gewichteten Potential ist äquivalent zu einem kostengewichteten Auslastungsspiel.*

Nicht nur entspricht dieser Satz genau dem von Monderer und Shapley bewiesenen Satz für ungewichtete Auslastungsspiele und exakte Potentiale (Satz 4.1), auch der Beweis erfolgt völlig analog.

*Beweis.* Sei  $\Gamma$  ein kostengewichtetes Auslastungsspiel mit Gewichtsvektor  $w := (w_i)_{i \in I}$ . Dann ist die Rosenthal-Potentialfunktion (vgl. [Ros73])  $P(x) := \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(x)} g_r(k)$  ein  $w$ -Potential für  $\Gamma$ .

Ist umgekehrt  $\Gamma$  ein Spiel mit einem gewichteten Potential  $P$  (mit Gewichtsvektor  $w$ ), so definieren wir das gleiche Auslastungsmodell  $M = (I, R, (S_i)_{i \in I}, (g_r)_{r \in R})$  wie im Beweis zu Satz 4.1 mit dem einzigen Unterschied in den Ressourcenkosten:

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_k \text{ und } k = N \\ \frac{1}{w_i} c_i(x) - P(x), & r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \hat{i}} \times X_{\hat{i}} \in R_D \text{ und } k = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Rest des Beweises erfolgt dann genauso wie zuvor.  $\square$

Zusammen mit Satz 4.3 wissen wir nun

...  
Jedes kostengewichtete Auslastungsspiel ist gewichtet isomorph zu einem ungewichteten?!  
Kann später bei BA-Potential verwendet werden.

## 4.2 Weitere Zusammenhänge

Direkte Konstruktion eines ungewichteten Auslastungsspiels zu gew. mit affin-linearen Kosten (wie ähnlich ist diese zu dem Beweis der Existenz eines exakten Potentials von Fotakis et al?)  
Kann man irgendwas zu Spielen mit exponentiellen Kosten sagen?

**Satz 4.8.** Sei  $\Gamma(M, w)$  ein gewichtetes Auslastungsspiel, in dem alle Kostenfunktionen affin linear sind. Dann gibt es ein dazu äquivalentes (ungewichtetes) Auslastungsspiel  $\Gamma(N)$ .

*Beweis.* Seien also die Kostenfunktionen aus  $M$  von der Form  $g_r(k) = a_r k + b_r$ .

Definiere eine Ressourcenmenge  $Q := \{ (r, \{i, i'\}) \mid r \in R, i, i' \in I \}$  mit Kostenfunktionen  $h_{(r, \{i, i'\})}$  darauf so, dass gilt:

$$h_{(r, \{i, i'\})}(k) = \begin{cases} 0, & k = 1, i \neq i' \\ a_r w_i w_{i'}, & k = 2, i \neq i' \\ a_r w_i^2 + b_r w_i & k = 1, i = i' \end{cases}$$

Schließlich ist der Strategieraum von Spieler  $i \in I$  gegeben durch  $T_i := \{ \{ (r, \{i, i'\}) \mid r \in S_i, i' \in I \} \mid s_i \in S_i \}$ . Dadurch erhalten wir das Auslastungsmodell  $N := (I, Q, (T_i)_{i \in I}, (h_q)_{q \in Q})$ .

Wir zeigen nun noch die Äquivalenz von  $\Gamma(M, w)$  und  $\Gamma(N)$ . Dazu betrachten wir den folgenden Morphismus  $(\text{id}, \phi) : \Gamma(M, w) \rightarrow \Gamma(N)$  zwischen den beiden Spielen:

Wohldefiniertheit von  $\Gamma(N)$

$$\phi_i : S_i \rightarrow T_i : s_i \mapsto \{ (r, \{i, i'\}) \mid r \in s_i, i' \in I \}$$

Dieser Morphismus ist offensichtlich auf allen Mengen bijektiv und zudem kostenerhaltend, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
d_i(\phi(s)) &= \sum_{q \in \phi(s)_{i=\phi_i(s_i)}} h_q(l_q(\phi(s))) = \sum_{r \in s_i, i' \in I} h_{(r, \{i, i'\})}(l_{(r, \{i, i'\})}(\phi(s))) = \\
&= \sum_{r \in s_i} \left( h_{(r, \{i\})}(\underbrace{l_{(r, \{i\})}(\phi(s))}_{=1}) + \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} h_{(r, \{i, i'\})}(\underbrace{l_{(r, \{i, i'\})}(\phi(s))}_{=2 \iff r \in s_{i'}}) \right) = \\
&= \sum_{r \in s_i} \left( a_r w_i^2 + b_r w_i + \sum_{i' \in I \setminus \{i\}: r \in s_{i'}} a_r w_i w_{i'} \right) = \\
&= \sum_{r \in s_i} w_i \left( b_r + a_r \sum_{i' \in I: r \in s_{i'}} w_{i'} \right) = \sum_{r \in s_i} w_i (b_r + a_r l_r(s)) = \\
&= \sum_{r \in s_i} w_i g_r(l_r(s)) = c_i(s) \quad \square
\end{aligned}$$

*Bemerkung 4.9.* Da immer nur an höchstens zwei Stellen Bedingungen an die Ressourcenkosten gestellt werden, lassen sich diese insbesondere immer als affin-lineare Funktionen realisieren. Im Gegensatz dazu ist das bei dem Auslastungsspiel, welches man über den Umweg eines exakten Potentials und Satz 4.1 erhalten würde, im Allgemeinen nicht der Fall.

**Satz 4.10.** *Jedes skalierte Potentialspiel ist exakt isomorph zu einem skalierten Auslastungsspiel.*

*Beweis.* Gegeben also ein Spiel  $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$  mit einem skalierten Potential  $P$  sowie entsprechenden Skalierungsfunktionen  $f_i$ . Hierzu definieren analog zu dem Beweis von Satz 4.1 folgendes Auslastungsmodell  $M = (I, R, (S_i)_{i \in I}, (g_r)_{r \in R})$ :

- $R := \{ (\{x_i\})_{i \in I} \mid x_i \in X_i \} \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X_i)$ .

- 

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_k \text{ und } k = N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wohldefiniertheit!

- $S_i := \{ \{ r \in R \mid x_i \in r_i \} \mid x_i \in X_i \}$

Die induzierten Lastfunktionen sind automatisch wohldefiniert, da die Spielermenge endlich ist, die Wohldefiniertheit der Kostenfunktionen  $d_i$  folgt dann aus dem Beweis der exakten Isomorphie der Spiele  $\Gamma$  und  $\Gamma(M, (f_i))$ . Dazu betrachten wir den Morphismus  $(\text{id}, \phi)$  :

$\Gamma \rightarrow \Gamma(M)$ , wobei  $\phi_i(x) := s(x_i) := \{r \in R \mid x_i \in r_i\}$ . Dieser ist offenbar bijektiv auf allen Mengen und zudem exakt, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
d_i(\phi(x)) - d_i(\phi(x \mid \hat{x}_i)) &= \sum_{r \in \phi(x)_i = \phi_i(x_i)} f_i \circ g_r(l_r(\phi(x))) - \sum_{r \in \phi_i(\hat{x}_i)} f_i \circ g_r(l_r(\phi(x \mid \hat{x}_i))) = \\
&= \sum_{r \in R_K: x_i \in r_i} f_i \circ g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{=N \iff r=(\{x_i\})_{i \in I}}) - \sum_{r \in R_K: \hat{x}_i \in r_i} f_i \circ g_r(\underbrace{l_r(\phi(\hat{x}))}_{=N \iff r=(\{x_i\})_{i \in I}}) = \\
&= f_i \circ g_{(\{x_i\})_{i \in I}}(N) - f_i \circ g_{(\{x_i\})_{i \in I}}(N) = \\
&= f_i \circ P(x) - f_i \circ P(x \mid \hat{x}_i) = c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i)
\end{aligned}$$

□

**Satz 4.11.** *Jedes skalierte Singelton-Auslastungsspiel hat ein ordinales Potential.*

*Beweis.* Die Rosenthal-Potentialfunktion ist ein ordinales Potential, denn es gilt (für  $s_i = \{r\}$ ,  $\hat{s}_i = \{\hat{r}\}$ ):

$$\begin{aligned}
c_i(s) < c_i(s \mid \hat{s}_i) &\iff f_i \circ g_r(l_r(s)) < f_i \circ g_{\hat{r}}(l_{\hat{r}}(s) + 1) \iff g_r(l_r(s)) < g_{\hat{r}}(l_{\hat{r}}(s) + 1) \\
&\iff P(s) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} g_r(k) < \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s \mid \hat{s}_i)} g_r(k) = P(s \mid \hat{s}_i)
\end{aligned}$$

□

**Satz 4.12.** *Jedes nicht-anonyme Auslastungsspiel mit abzählbarer Spielermenge ist äquivalent zu einem lastgewichteten Auslastungsspiel und jedes nicht-anonyme gewichtete Auslastungsspiel mit abzählbarer Spielermenge ist gewichtet isomorph zu einem (anonymen) gewichteten Auslastungsspiel. Dabei verwenden jeweils beide Spiele die gleiche Ressourcenmenge.*

*Beweis.* Sei die Spielermenge  $I \subseteq \mathbb{N}$ , dann definiere einen Gewichtsvektor  $v := (1/3^n)_{n \in I}$ . Dann entspricht jede (endliche) Teilmenge  $J \subseteq I$  einer eindeutigen Zahl  $v(J) := \sum_{n \in J} 1/3^n$  und wir definieren damit neue (anonyme) Ressourcenkosten  $h_r$ :

$$h_r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : k \mapsto \begin{cases} g_r(l_r(J)), & k = v(J) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

□

Im Unterschied zu Satz 4.4 bleibt hier die Ressourcenmenge gleich groß

#### 4.2.1 Schnelle Beste-Antwort-Dynamik in Auslastungsspielen

Da endliche Auslastungsspiele nach Satz 4.1 ein exaktes und damit insbesondere ein Beste-Antwort-Potential besitzt, wissen wir bereits, dass in solchen Spielen jede Beste-Antwort-Dynamik nach endlicher Zeit ein Nash-Gleichgewicht erreicht. Allerdings kann diese Suche im Allgemeinen sehr lange dauern. Für die Teilklasse der Matroidspiele kann

[citation needed] - wie lang genau? Exponentiell in ???



man allerdings zeigen, dass diese Konvergenz immer bereits in polynomieller Zeit erfolgt. Ein leichte Modifikation des Beweises hierzu in [Har16][Satz 3.10] erlaubt sogar die folgender noch etwas stärkere Aussage:

**Satz 4.13.** *Sei  $M = (I, R, (S_i), (g_r))$  ein endliches Matroidspiel. Dann ist  $\Gamma(M)$  Beste-Antwort-isomorph zu einem Auslastungsspiel mit selber Ressourcenmenge, in dem alle Ressourcenkosten nur Werte zwischen 1 und  $|I| \cdot |R|$  annehmen.*

Was ist mit gewichteten Matroidspielen? Zumindest Kostengewichtete könnten funktionieren?

*Beweis.* Wir definieren zunächst das Auslastungsmodell  $N := (I, R, (S_i), (h_r))$ , wobei die Ressourcenkosten  $h_r$  wie folgt definiert sind:

$$h_{\hat{r}}(\hat{k}) := \# \left\{ (r, k) \in R \times \{1, \dots, |I|\} \mid c_r(k) \leq c_{\hat{r}}(\hat{k}) \right\}$$

Das heißt also wir ordnen alle möglichen Werte, welche die Ressourcenkostenfunktionen annehmen können und ersetzen dann die tatsächlichen Kosten durch die Position dieser Kosten in der Liste aller Kosten. Das von  $N$  induzierte Auslastungsspiel  $\Gamma(N) =: (I, R, (S_i), (d_i))$  hat nun offenbar die gewünschten Eigenschaften.

Noch zu zeigen ist, dass  $\Gamma(N)$  tatsächlich Beste-Antwort-isomorph zu  $\Gamma(M)$  ist. Dazu betrachten wir den Identitätsmorphismus zwischen den beiden Spielen (der offensichtlich bijektiv ist) und zeigen, dass die besten Antworten in  $\Gamma(N)$  genau den besten Antworten in  $\Gamma(M)$  entsprechen. Dazu benötigen wir die folgende Proposition:

**Proposition 4.14.** *Sei  $s \in S$  ein beliebiges Strategieprofil und  $s_i^* \in S_i$  eine beste Antwort von Spieler  $i$  auf  $s$  in  $\Gamma(M)$ . Dann gilt*

- $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s) \implies d_i(s \mid s_i^*) < d_i(s)$  und
- $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s) \implies d_i(s \mid s_i^*) = d_i(s)$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt dem in [Har16][Lemma 3.3]. Es sind sowohl  $s_i^*$  als auch  $s_i$  Basen im Matroid von Spieler  $i$ . Daher gibt es der Basen-Matching-Eigenschaft (Korollar 1.27) zu Folge eine Partitionierung der symmetrischen Differenz  $s_i^* \triangle s_i$  in eine Menge von Tupeln der Form  $(r, t)$  mit  $r \in s_i \setminus s_i^*$  und  $t \in s_i^* \setminus s_i$ , sodass  $s_i^{+t-r} := s_i^* \setminus \{t\} \cup \{r\}$  ebenfalls eine Basis ist (d.h. eine zulässige Ressourcenmenge von Spieler  $i$ ).

Da nun  $s_i^*$  eine beste Antwort auf  $s$  ist, muss die Antwort  $s_i^{+t-r}$  zu mindestens ebenso hohen Kosten für Spieler  $i$  führen, es muss also gelten:

$$0 \leq c_i(s \mid s_i^{+t-r}) - c_i(s \mid s_i^*) = g_t(l_t(s \mid s_i^*) + 1) - g_r(l_r(s \mid s_i^*))$$

und damit (für jedes solche Tupel aus der Partitionierung)

$$g_r(l_r(s \mid s_i^*)) \leq g_t(l_t(s \mid s_i^*) + 1). \quad (2)$$

Insbesondere werden somit auch die alternativen Ressourcenkosten bei jedem solchen Ressourcenwechsel höchstens kleiner.

Gilt nun zusätzlich  $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s)$ , so muss die Ungleichung (2) für wenigstens ein solches Tupel  $(r, t)$  sogar strikt sein. Und sinken mindestens für diesen Ressourcenwechsel auch die alternativen Kosten echt ab. Also gilt insgesamt  $d_i(s \mid s_i^*) < d_i(s)$ .

Gilt hingegen  $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s)$ , so muss auch in jeder Ungleichung der Form (2) Gleichheit gelten, womit auch alle alternativen Ressourcenkosten gleich bleiben. Folglich gilt in diesem Fall  $d_i(s \mid s_i^*) = d_i(s)$ .  $\square$

*Beweis von Satz 4.13 (Forts.)* Sei zunächst  $s \in S$  ein beliebiges Strategieprofil,  $s_i^*$  eine Beste Antwort von Spieler  $i$  auf  $s$  im Spiel  $\Gamma(M)$  (also bezüglich  $c_i$ ) und  $s'_i$  eine Beste Antwort im Spiel  $\Gamma(N)$  (also bezüglich der alternativen Kosten  $d_i$ ). Wir werden nun zeigen, dass  $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s \mid s'_i)$  gilt. Mit Proposition 4.14 erhalten wir dann auch  $d_i(s \mid s_i^*) = d_i(s)$  und folglich ist sowohl  $s'_i$  eine Beste Antwort in  $\Gamma(M)$  als auch  $s_i^*$  eine Beste Antwort in  $\Gamma(N)$ . Das zeigt, dass die Identitätsabbildung zwischen den beiden Spielen beste Antworten in beide Richtungen erhält und daher ein Beste-Antwort-Morphismus ist.

Wir untersuchen dazu, welcher der drei theoretisch möglichen Fälle tatsächlich eintreten kann:

1. **Fall:**  $c_i(s \mid s_i^*) > c_i(s \mid s'_i)$ . Dann wäre  $(s \mid s'_i)$  eine bessere Antwort auf  $s$  als  $s_i^*$  (bzgl.  $c_i$ ) - ein Widerspruch dazu, dass  $s_i^*$  eine *beste* Antwort auf  $s$  ist. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
2. **Fall:**  $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s \mid s'_i)$ . Nach Proposition 4.14 gilt dann auch  $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s \mid s'_i)$ , was analog zum ersten Fall ein Widerspruch dazu ist, dass  $s'_i$  eine Beste Antwort auf  $s$  bezüglich  $d_i$  ist.
3. **Fall:**  $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s \mid s'_i)$  ist also die einzige verbleibende Möglichkeit.

Das beschließt den Beweis von Satz 4.13.  $\square$

**Korollar 4.15.** *Sei  $\Gamma(M)$  ein Matroidspiel. Dann erreicht jede Beste-Antwort-Dynamik in höchstens  $|I|^2 |R|^2$  ein Nash-Gleichgewicht.*

Evtl. Korollar vor den Beweis des Satzes stellen um Bezug zur Motivation zu behalten.

*Beweis.* Die Rosenthalpotentialfunktion  $P : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} h_r(k)$  ist (wie in Satz 4.1 gezeigt) ein exaktes Potential für das Auslastungsspiel  $\Gamma(N)$ , insbesondere also auch ein Beste-Antwort-Potential. Ferner sieht man leicht, dass diese Potentialfunktion höchstens  $|R| \cdot |I| \cdot |I| |R|$  viele verschiedene Werte annehmen kann.

Zusammen mit Satz 4.13 wissen wir zudem, dass  $P$  auch ein Beste-Antwort-Potential für  $\Gamma(M)$  ist. Mit Satz 2.7 ist dann jeder Beste-Antwort-Verbesserungspfad in  $\Gamma(M)$  auch ein solcher im von  $P$  induzierten Koordinationsspiel. In diesem kann aber kein solcher Pfad länger als  $|I|^2 |R|^2$ , was somit auch für alle Beste-Antwort-Verbesserungspfade in  $\Gamma(M)$  gelten muss.  $\square$

### 4.3 Überblick

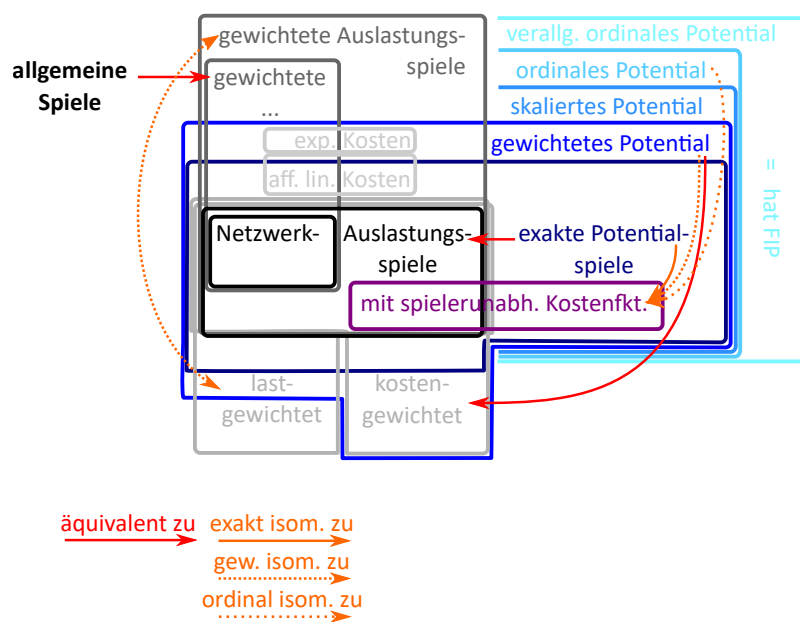


Abbildung 3: Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Spieleklassen für endliche Spiele

## Literatur

- [FKS04] Dimitris Fotakis, Spyros Kontogiannis und Paul Spirakis. „Selfish Unsplittable Flows“. In: *Automata, Languages and Programming: 31st International Colloquium, ICALP 2004, Turku, Finland, July 12-16, 2004. Proceedings*. Hrsg. von Josep Díaz u. a. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004, S. 593–605. ISBN: 978-3-540-27836-8. DOI: [10.1007/978-3-540-27836-8\\_51](https://doi.org/10.1007/978-3-540-27836-8_51). URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-27836-8\\_51](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-27836-8_51).
- [Har16] Tobias Harks. „Skript zur Vorlesung: Mathematische Spieltheorie im WS 15/16“. 4. Feb. 2016.
- [HK12] Tobias Harks und Max Klimm. „On the Existence of Pure Nash Equilibria in Weighted Congestion Games“. In: *Mathematics of Operations Research* 37.3 (2012), S. 419–436. DOI: [10.1287/moor.1120.0543](https://doi.org/10.1287/moor.1120.0543). eprint: <http://dx.doi.org/10.1287/moor.1120.0543>. URL: <http://dx.doi.org/10.1287/moor.1120.0543>.
- [HKM11] Tobias Harks, Max Klimm und Rolf H. Möhring. „Characterizing the Existence of Potential Functions in Weighted Congestion Games“. In: *Theory of Computing Systems* 49.1 (2011), S. 46–70. ISSN: 1433-0490. DOI: [10.1007/s00224-011-9315-x](https://doi.org/10.1007/s00224-011-9315-x). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00224-011-9315-x>.
- [Jim14] Alfi Jiménez. *Game Theory from the Category Theory Point of View*. 2014. URL: <https://www.gtcenter.org/Archive/2014/Conf/Jimenez1880.pdf> (besucht am 15.01.2017).
- [Lap99] Victor Lapitsky. „On some Categories of Games and Corresponding Equilibria“. In: *International Game Theory Review* 1.2 (1999), S. 169–185.
- [Mil13] Igal Milchtaich. „Representation of finite games as network congestion games“. In: *International Journal of Game Theory* 42.4 (2013), S. 1085–1096. ISSN: 1432-1270. DOI: [10.1007/s00182-012-0363-5](https://doi.org/10.1007/s00182-012-0363-5). URL: <https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/03.html>.
- [Mil15] Igal Milchtaich. „Polyequilibrium“. Bar-Ilan University, Department of Economics, 2015. URL: <https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/30.html>. Working Paper.
- [Mil96] Igal Milchtaich. „Congestion Games with Player-Specific Payoff Functions“. In: *Games and Economic Behavior* 13.1 (1996), S. 111–124. ISSN: 0899-8256. DOI: [10.1006/game.1996.0027](https://doi.org/10.1006/game.1996.0027). URL: <https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/20.html>.
- [Mon06] Dov Monderer. „Multipotential Games“. In: *Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 2006. URL: [https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/dov/image/bce0fb629a68f9b2e9bd487ebb73356d/multi\\_potential\\_games--monderer.pdf](https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/dov/image/bce0fb629a68f9b2e9bd487ebb73356d/multi_potential_games--monderer.pdf).

- [MS96a] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Fictitious Play Property for Games with Identical Interests“. In: *Journal of Economic Theory* 68.1 (1996), S. 258–265. ISSN: 0022-0531. DOI: <http://dx.doi.org/10.1006/jeth.1996.0014>. URL: [https://www.researchgate.net/profile/Dov\\_Monderer/publication/4977154\\_Fictitious\\_Play\\_Property\\_for\\_Games\\_with\\_Identical\\_Interests/links/55b77cb408aed621de04635f.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Dov_Monderer/publication/4977154_Fictitious_Play_Property_for_Games_with_Identical_Interests/links/55b77cb408aed621de04635f.pdf).
- [MS96b] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Potential Games“. In: *Games and Economic Behaviour* (1996), S. 124–143.
- [MU04] Stephen Morris und Takashi Ui. „Best response equivalence“. In: *Games and Economic Behavior* 49.2 (2004), S. 260–287. ISSN: 0899-8256. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geb.2003.12.004>. URL: [https://www.princeton.edu/~smorris/pdfs/paper\\_40\\_Best\\_Response\\_Equivalence.pdf](https://www.princeton.edu/~smorris/pdfs/paper_40_Best_Response_Equivalence.pdf).
- [Ros73] Robert W. Rosenthal. „A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria“. In: *International Journal of Game Theory* 2.1 (1973), S. 65–67. ISSN: 1432-1270. DOI: [10.1007/BF01737559](http://dx.doi.org/10.1007/BF01737559). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01737559>.
- [VN97] Mark Voorneveld und Henk Norde. „A Characterization of Ordinal Potential Games“. In: *Games and Economic Behavior* 19.2 (1997), S. 235–242. ISSN: 0899-8256. DOI: <http://dx.doi.org/10.1006/game.1997.0554>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825697905546>.
- [Voo+99] Mark Voorneveld u. a. „Congestion games and potentials reconsidered“. In: *International Game Theory Review* 1.03n04 (1999), S. 283–299. URL: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219198999000219>.
- [Voo00] Mark Voorneveld. „Best-response potential games“. In: *Economics Letters* 66.3 (2000), S. 289–295. ISSN: 0165-1765. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1765\(99\)00196-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1765(99)00196-2). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165176599001962>.
- [Vor94] Nicolai N. Vorob’ev. *Foundations of Game Theory. Noncooperative Games*. Englisch. Übers. von Ralph P. Boas. Birkhäuser Basel, 1994. DOI: [10.1007/978-3-0348-8514-0](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-8514-0).