Universität Augsburg

Institut für Mathematik

Masterarbeit

Insert Title

von:
Lukas Graf

Betreut von:
Prof. Dr. Tobias Harks

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **3**

2 Potentiale **5**
- 2.1 Definitionen 5
- 2.2 Erste Sätze 6

3 Auslastungsspiele **7**

4 Morphismen **9**
- 4.1 Definitionen 9
- 4.2 Erste Sätze 10

Literatur **12**

1 Grundlagen

Definition 1.1. Ein *Spiel* Γ *in strategischer Form* ist ein Tupel $(I, X = (X_i)_{i \in I}, (K_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$. Dabei ist

- I die Menge der Spieler,
- X_i die Menge der (reinen) Strategien von Spieler i,
- $(K_i, \preccurlyeq)$, eine total geordnete Menge, der Kostenraum von Spieler i und
- $c_i : X \to K_i$ die Kostenfunktion von Spieler i.

Das eigentliche Spiel besteht nun daraus, dass jeder Spieler versucht durch die Wahl seiner Strategie seine Kosten zu minimieren.

Beobachtung 1.2. Klassische Kostenminimierungsspiele erhält man durch Wahl von $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \leq)$ als Kostenraum für alle Spieler, Nutzenmaximierungsspiele durch Wahl von $(\mathbb{R}, \geq)$ als „Kosten“raum.

Notation 1.3. Zu einem festen Spieler i bezeichne $X_{-i} := \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j$ das Produkt aller Strategieräume außer dem von Spieler i. Zu jedem Strategieprofil $x \in X$ bezeichne dann x_{-i} die Projektion dieses Profils auf den Raum X_{-i} und x_i die Projektion auf X_i (also die von Spieler i gewählte Strategie). Wir schreiben dann auch (x_i, x_{-i}) für das Strategieprofil x.

Sollte der Begriff Strategieprofil eigens definiert werden?

Definition 1.4. Ein Strategieprofil $x \in X$ ist ein *Nash-Gleichgewicht*, wenn für jeden Spieler $i \in I$ und jede seiner Strategien $\hat{x}_i$ gilt:

$$c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) \succcurlyeq c_i(x)$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist also ein Strategieprofil, aus dem heraus kein Spieler einen Anreiz für einen einseitigen Strategiewechsel hat.

Aus [MS96]:

Definition 1.5. Eine Folge von Strategieprofilen $x^0, x^1, x^2, \ldots$ ist ein *Verbesserungspfad*, wenn folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für jede Stelle n gibt es einen Spieler $i(n) \in I$, sodass das Profil x^{n+1} aus x^n durch alleinige Abweichung dieses Spielers entsteht, d.h. $x^{n+1} = (x^{n+1}_{i(n)}, x^n_{-i(n)})$
2. Der abweichende Spieler $i(n)$ verbessert sich, d.h. $u_{i(n)}(x^{n+1}) \prec u_{i(n)}(x^n)$.

Definition 1.6. Ein Spiel Γ hat die *finite improvement property (FIP)*, wenn jeder Verbesserungspfad endlich ist.

Beobachtung 1.7. Jedes Ende eines maximalen Verbesserungspfades ist ein Nash-Gleichgewicht. Denn wäre dem nicht so, dann gäbe es wenigstens einen Spieler, der sich durch Abweichen noch verbessern kann - was zu einer Verlängerung des Verbesserungspfades führen würde.

Umgekehrt ist offenkundig auch jedes Nash-Gleichgewicht Ende wenigstens eines maximalen Verbesserungspfades - nämlich des trivialen, nur aus diesem Strategieprofil bestehenden Verbesserungspfades.

Korollar 1.8. *Ein Spiel Γ besitzt genau dann (mindestens) ein Nash-Gleichgewicht, wenn es (mindestens) einen endlichen, maximalen Verbesserungspfad besitzt. Ein Spiel mit FIP besitzt dementsprechend immer wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.*

Sollte eine Beobachtung wirklich ein Korrolar haben?

Aus [Voo00]

Definition 1.9. Eine Verbesserungspfad $x^0, x^1, x^2, \ldots$ heißt *Beste Antwort-Pfad*, wenn der abweichende Spieler jeweils eine beste Alternativstrategie wählt, d.h.

Voorneveld nennt es (ohne Verbesserungsbedinung) beste Antwort-kompatibel

$$u_{i(n)}(x^{n+1}) = \max_{\hat{x}_{i(n)} \in X_{i(n)}} u_{i(n)}(\hat{x}_i, x^n_{-i(n)}).$$

Insbesondere setzt das natürlich voraus, dass ein solches Maximum auf dem Pfad immer existiert.

2 Potentiale

2.1 Definitionen

Definition 2.1. Eine Funktion $P : X \to \mathbb{R}$ heißt

Verallgemeinern? (total geordnete Menge K statt $\mathbb{R}$?)

- *Beste Antwort-Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ gilt:
$$\arg\max_{x_i \in X_i} c_i(x) = \arg\max_{x_i \in X_i} P(x)$$
- *verallgemeinertes ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i, x_{-i}) > c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) \implies P(x_i, x_{-i}) > P(\hat{x}_i, x_{-i})$$
- *ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i, x_{-i}) > c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) \iff P(x_i, x_{-i}) > P(\hat{x}_i, x_{-i})$$

Sind die K_i zudem geordnete abelsche Gruppen, so heißt P

- *skaliertes Potential*, wenn es streng monotone Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to K_i$ gibt, sodass für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i, x_{-i}) - c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) = f_i(P(x_i, x_{-i}) - P(\hat{x}_i, x_{-i}))$$

Sind die K_i Teilmengen einer gemeinsamen geordneten abelschen Gruppe K, so heißt P

- *gewichtetes Potential*, wenn es einen Gewichtsvektor $(w_i)_{i \in I}$ gibt, sodass für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i, x_{-i}) - c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) = w_i \cdot (P(x_i, x_{-i}) - P(\hat{x}_i, x_{-i}))$$
- *exaktes Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i, x_{-i}) - c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) = P(x_i, x_{-i}) - P(\hat{x}_i, x_{-i})$$

Kann man diese Definition irgendwie kompakter/übersichtlicher machen?

Exakte, gewichtete, ordinale und verallgemeinerte ordinale Potentiale wurden erstmals in [MS96] definiert, beste Antwort-Potentiale erstmals in [Voo00].

Anschauung

Zusammenhänge (evtl. schon nächstes Kapitel?)

2.2 Erste Sätze

Zu einem gegebenen Strategieprofil $x \in X$ sei dessen *Nachbarschaft* die Menge aller durch höchstens eine Abweichung erreichbarer Strategieprofile, d.h. die Menge $\{(\hat{x}_i, x_{-i}) | i \in N, \hat{x}_i \in X_i\}$. Wir nennen x dann ein *lokales Minimum* einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, wenn es ein Minimum innerhalb seiner Nachbarschaft ist.

Satz 2.2. *Sei Γ ein Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential P. Dann ist jedes lokale Minimum von P ein Nash-Gleichgewicht von Γ. Ist P sogar ein ordinales Potential, so gilt auch die umgekehrte Richtung.*

Dieser Satz zeigt also, dass man Nash-Gleichgewichte allein durch Betrachten einer Potentialfunktion finden kann. Insbesondere folgt daraus direkt die Existenz von Nash-Gleichgewichten in einer Vielzahl von Potentialspielen:

Korollar 2.3. *Sei Γ ein Spiel mit einem kompakten Strategieraum und einer stetigen verallgemeinerten ordinalen Potentialfunktion. Dann hat Γ wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.*

Insbesondere also haben endliche Potentialspiele immer ein Nashgleichgewicht. Satz 2.2 folgt mit Hilfe von Korollar 1.8 direkt aus dem folgenden Satz:

Streng genommen nicht wirklich, da das Korollar nur für Spiele gilt!?

Satz 2.4. *Sei Γ ein Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential P. Dann ist jeder Verbesserungspfad in Γ auch ein Verbesserungspfad bezüglich P. Ist P sogar ein ordinales Potential, so gilt auch die umgekehrte Richtung.*

Beweis. .

Beweis

$\square$

Was kann man über Beste-Antwort-Potentiale sagen (vermtl. Zusammenhang zu Beste-Antwort-Pfade?)

3 Auslastungsspiele

Definition 3.1. Ein *Auslastungsmodell* M ist gegeben durch ein Tupel $(I, R, (S_i)_{i\in I}, K, (g_r)_{r\in R})$. Dabei ist

- I die Menge der Spieler,
- R die Menge der zur Verfügung stehenden Ressourcen,
- $S_i \subseteq \mathcal{P}(R)$ die Menge von Teilmengen der Ressourcenmenge, unter denen sich der Spieler i entscheiden kann,
- K, eine geordnete abelsche Gruppe, der Kostenraum der Ressourcen und
- $g_r : \mathbb{R} \to K$ eine Funktion, welche die Kosten der Ressource $r \in R$ in Abhängigkeit von ihrer Auslastung beschreibt.

Definition 3.2. Jedes Auslastungsmodell M induziert ein *Auslastungsspiel* $\Gamma(M) := (I, S = (S_i)_{i\in I}, (K)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r\in R} g_r(l_r(x))$$

wobei $l_r : S \to \mathbb{N} : s \mapsto |\{i \in I \mid r \in s_i\}|$ die *Lastfunktion* der Ressource ist.

Hier bekommt man wohl Probleme, wenn Spieler- bzw. Ressourcenmenge unendlich ist.

Definition 3.3. Zusammen mit einem Gewichtsvektor $(w_i)_{i\in I}$ induziert ein Auslastungsmodell M

- ein *kostengewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma_c(M, w) := (I, S, (K)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ durch die Kostenfunktion:
  $$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r\in R} w_i \cdot g_r(l_r(x))$$
  und die gleiche Lastfunktion wie im ungewichteten Fall.
- ein *lastgewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma_l(M, w) := (I, S, (K)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ durch die Kostenfunktion wie im ungewichteten Fall und die Lastfunktion $l_r : S \to \mathbb{N} : s \mapsto \sum\{w_i \mid r \in s_i\}$.
- ein *gewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma(M, w) := (I, S, (K)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ durch die Kostenfunktion:
  $$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r\in R} w_i \cdot g_r(l_r(x))$$
  und die Lastfunktion $l_r : S \to \mathbb{N} : s \mapsto \sum\{w_i \mid r \in s_i\}$.

Definition 3.4. Zusammen mit einer Skalierungsfunktionen $(f_i : K \to K_i)_{i\in I}$ und verallgemeinerten Lastfunktionen $(h_r : X \to \mathbb{R})_{r\in R}$ induziert ein Auslastungsmodell M

Ist diese Definition wirklich sinnvoll?

- ein *kostenskaliertes Auslastungsspiel* $\Gamma_c(M, f_i) := (I, S, (K)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ durch die Kostenfunktion:
  $$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r\in R} f_i(g_r(l_r(x)))$$

und die gleiche Lastfunktion wie im ungewichteten Fall.

- ein *lastskaliertes Auslastungsspiel* $\Gamma_l(M, h_r) := (I, S, (K)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ durch die Kostenfunktion:
$$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r\in R} g_r(h_r(x))$$
- ein *gewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma(M, f_i, h_r := (I, S, (K)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ durch die Kostenfunktion:
$$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r\in R} f_i(g_r(h_r(x))).$$

4 Morphismen und Isomorphismen von Spielen

Motivation: Warum betrachtet man überhaupt Morphismen von Spielen. Wie induzieren diese Isomorphismen?

4.1 Definitionen

Zu zwei gegebenen Spielen $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ und $\Gamma' = (I', X', (K_i)_{i\in I}, (c_i')_{i\in I})$ kann man wie folgt eine Abbildung zwischen diesen beiden definieren:

- Eine bijektive Abbildung $\sigma : I \to I'$ zwischen den Spielermengen und
- für jeden Spieler $i \in I$ eine Abbildung $\phi_i : X_i \to X'_{\sigma(i)}$ seiner Strategien.

[Mil] bezeichnet derartige Abbildungen *Strategieersetzungsvorschriften.*

Mehr dazu schreiben - erst später bei rationalen SEVs erwähnen?

Beobachtung 4.1. Mit dieser Definition ist es also nur möglich Abbildungen zwischen Spielen mit Spielermengen gleicher Kardinalität zu definieren. Im Folgenden werden wir auch nur solche Abbildungen betrachten (vergleiche aber Bemerkung 4.5 dazu wie auch in anderen Fällen Abbildungen zwischen Spielen definiert werden können). Zur Vereinfachung der Notation werden wir daher ab sofort immer davon ausgehen, dass die Spielermengen beider an einer Abbildung beteiligten Spiele bereits gleich und geeignet permutiert sind.

Abbildungen der obigen Form nehmen noch keinerlei Rücksicht auf die Kostenfunktionen der jeweiligen Spiele. Da diese aber in der Regel die interessierenden Eigenschaften eines Spiels (wie beispielsweise Gleichgewichte) festlegen, werden derartige Abbildungen im Allgemeinen noch wenig Aussagen über die beteiligten Spiele ermöglichen. So besagt der durch diese Art Abbildungen induzierte Isomorphiebegriff bspw. nur, dass zwei Spiele Spieler- und Strategiemengen gleicher Kardinalität besitzen.

Echte Morphismen zwischen Spielen sollten folglich noch mehr der Struktur eines Spiels erhalten, insbesondere in irgendeiner Form „verträglich“ mit den Kostenfunktionen sein. Je nach dem, welche Eigenschaften die Morphismen (und insbesondere die dadurch induzierten Isomorphismen) erhalten sollen, erhält man so unterschiedlich starke Einschränkungen daran, welche Abbildungen zwischen Spielen als *Morphismen zwischen Spielen* bezeichnet werden dürfen. Einige Möglichkeiten dafür werden wir nun kennenlernen:

Definition 4.2. Zwei Spiele $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K_i)_{i\in I}, (c_i')_{i\in I})$ heißen *äquivalent*, wenn es für jeden Spieler i eine bijektive Abbildung $\phi_i : X_i \to X_i'$ gibt, sodass gilt:

$$\forall x \in X : c_i(x) = c_i'(\phi(x))$$

Permutation von Spielern erlauben? Das entspricht dann einer bereits von Nash verwendeten Definition!

Bemerkung 4.3. Zwei Spiele sind also genau dann äquivalent, wenn sie sich ausschließlich durch Umbenennung der Strategien ineinander überführen lassen. In [MS96] (S. 133) wird dies als Isomorphie von Spielen bezeichnet.

Definition 4.4. Zwei Spiele $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i\in I}, (c'_i)_{i\in I})$ heißen *isomorph*, falls es bijektive Abbildungen $\phi_i : X_i \to X'_i$ sowie bijektive und monotone Abbildungen $\psi_i : K_i \to K'_i$ gibt, sodass alle Diagramme der folgenden Form kommutieren:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "c_i"] & X' \arrow[d, "c'_i"] \\ K_i \arrow[r, "\psi_i"] & K'_i \end{tikzcd}$$

Bemerkung 4.5. Diese Definition ergibt sich aus der abstrakteren Definition für in [Lap99].

...

Auch auf Verallgemeinerung mit Garben hinweisen (erlaubt Abbildungen zwischen Spielen mit Spielermengen unterschiedlicher Kardinalität!)

Definition 4.6. Zwei im Sinne von Definition 4.4 isomorphe Spiele heißen *sozial isomorph*, wenn zusätzlich die Funktion

$$\sum \psi_i : \prod_{i\in I} K_i \to \prod_{i\in I} K'_i$$

monoton ist.

Das macht natürlich nur Sinn, wenn auf den beiden Produkträumen auch totale (?) Ordnungen existieren

Beispiel 4.7. lineare Funktionen

Definition 4.8. Ein *Nash-Morphismus* $\gamma : \Gamma \to \Gamma'$ zwischen zwei Spielen $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i\in I}, (c'_i)_{i\in I})$ ist gegeben durch Abbildungen $\phi_i : X_i \to X'_i$ sodass gilt:

$$\forall x \in X, i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(\hat{x}_i{,}x_{-i}) > c_i(x) \Rightarrow c'_i(\phi(\hat{x}_i{,}x_{-i})) > c'_i(\phi(x))$$

Der Morphismus γ heißt *Nash-Isomorphismus* (und die beiden Spiele dann *Nash-isomorph*), wenn die ϕ_i bijektiv sind und gilt:

$$\forall x \in X, i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(\hat{x}_i{,}x_{-i}) > c_i(x) \iff c'_i(\phi(\hat{x}_i{,}x_{-i})) > c'_i(\phi(x))$$

Beobachtung 4.9. Es gilt:

äquivalent $\Rightarrow$ sozial isomorph $\Rightarrow$ isomorph $\Rightarrow$ Nash-isomorph

4.2 Erste Sätze

Lemma 4.10. *Seien Γ und Γ' zwei Nash-isomorphe Spiele. Dann ist $x \in X$ genau dann ein Nashgleichgewicht von Γ, wenn $\phi(x) \in X'$ ein Nashgleichgewicht von Γ' ist.*

Beweis. .

folgt direkt mit Definitionen

$\square$

Lemma 4.11. *Seien Γ und Γ' zwei Nash-isomorphe Spiele. Dann hat Γ genau dann die FIP, wenn Γ' diese besitzt.*

Beweis. .

Beweis über Verbesserungspfad im einen entspricht Verbesserungspfad im anderen. Evtl. direkt das als Lemma formulieren und dann die beiden vorherigen Lemmas als Korollare daraus?

□

Lemma 4.12. *Sei $\gamma : \Gamma \to \Gamma'$ ein Nash-Morphismus und $x \in X$. Ist dann $\phi(x) \in X'$ ein Nashgleichgewicht von Γ', so ist auch x selbst schon ein Nashgleichgewicht (von Γ).*

Beweis. .

Nachrechnen - evtl. mit vorherigen Sätzen verbinden bzw. schon davor zeigen, damit diese ein Korollar werden?

□

Lemma 4.13. *Seien Γ und Γ' zwei sozial isomorphe Spiele. Dann ist $x \in X$ genau dann ein soziales Optimum von Γ, wenn $\phi(x) \in X'$ ein soziales Optimum von Γ' ist.*

Beweis. .

Folgt direkt mit Definitionen

□

Satz 4.14. *Besitzt ein Spiel Γ ein ordinales Potential, so ist es isomorph zu einem Auslastungsspiel.*

Beweis. Analog zum Beweis der Äquivalenz von Spielen mit exaktem Potential und Auslastungsspielen in [MS96], Beweis orientiert sich an [Mon]. □

Beobachtung 4.15. Besitzt ein Spiel ein verallgemeinertes ordinales Potential, so gibt es einen Nash-Morphismus in/von ein Auslastungsspiel.

Was von beidem?

Beweis. .

Proofmining in oberem Beweis

□

Beobachtung 4.16. Nach [MS96] Lemma 2.5 hat jedes Spiel mit FIP ein verallgemeinertes Potential, also

in/von...

Literatur

[Jim14] Alfi Jiménez. *Game Theory from the Category Theory Point of View*. 2014. URL: https://www.gtcenter.org/Archive/2014/Conf/Jimenez1880.pdf (besucht am 15. 01. 2017).

[Lap99] Victor Lapitsky. „On some Categories of Games and Corresponding Equilibria". In: *International Game Theory Review* 1.2 (1999), S. 169–185.

[Mil] Igal Milchtaich. „Polyequilibrium". Bar-Ilan University, Department of Economics. URL: https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/30.html. Working Paper.

[Mon] Dov Monderer. *Multipotential Games*.

[MS96] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Potential Games". In: *Games and Economic Behaviour* (1996), S. 124–143.

[Voo00] Mark Voorneveld. „Best-response potential games". In: *Economics Letters* 66.3 (2000), S. 289 –295. ISSN: 0165-1765. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1765(99)00196-2. URL: http//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165176599001962.