

UNIVERSITÄT AUGSBURG

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Masterarbeit

Insert Title

von:
Lukas GRAF

Betreut von:
Prof. Dr. Tobias HARKS

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
1 Grundlagen	5
1.1 Spiele in strategischer Form	5
1.2 Abweichungspfade	6
1.3 Auslastungsspiele	9
2 Potentiale	13
2.1 Definitionen	13
2.2 Anschauung	14
2.3 Eigenschaften der Potentiale	16
2.4 Charakterisierungen der Potentiale	19
2.4.1 Exakte Potentiale	19
2.4.2 Gewichtete und skalierte Potentiale	21
2.4.3 Ordinale Potentiale	22
2.4.4 Verallgemeinerte ordinale Potentiale	25
2.4.5 Beste-Antwort-Potentiale	27
2.4.6 Nash-Potentiale	29
2.4.7 Zusammenfassung	30
3 Morphismen	32
3.1 Definitionen	32
3.2 Beweise der Potentialsätze	42
3.3 Weitere Sätze mit Morphismen	45
4 Zusammenhänge von Auslastungs- und Potentialspielen	48
4.1 Von ungewichtet zu gewichtet	49
4.1.1 Gewichtete Auslastungsspiele	49
4.1.2 Lastgewichtete Auslastungsspiele	50
4.1.3 Kostengewichtete Auslastungsspiele	52
4.2 Schnelle Beste-Antwort-Dynamik in Matroidspielen	52
4.3 Weitere Zusammenhänge	55
4.4 Überblick	58
Ausblick	60
Literatur	61

Liste der noch zu erledigenden Punkte

Insert Title	1
------------------------	---

Einleitung schreiben	4
Beispiel für diese Notation? Gefangenendilemma/Schere-Stein-Papier/irgendein Spiel, das im weiteren Verlauf interessant sein kann?	5
Besseres Bild!	16
Korrektheit des Beispiels prüfen!	44
Mit Einleitung von Kapitel 1.3 vergleichen.	48
Verallgemeinerung für unendliche Spiele?	50
Kann man Fotakis, Kontogiannis und Spirakis verwenden um den Satz zu stärken? .	51
Gegenbeispiel für stärkere Aussage?	57
Zeichnung aktualisieren oder weglassen?	59
Ausblick schreiben	60

Einleitung

Einleitung schreiben

Satz von Monderer und Shapley.

Überblick:

Nachdem wir in Abschnitt 1 einige Grundbegriffe der Spieltheorie definiert haben, werden wir uns zunächst in Abschnitt 2 dem Konzept der Potentialfunktionen für Spiele zuwenden. Wir werden eine ganze Reihe derartiger Potentiale kennenlernen und jeweils notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zeigen, dass ein Spiel ein entsprechendes Potential besitzt.

Morphismen-Kapitel

Diese Morphismen werden wir schließlich in Abschnitt 4 nutzen um verschiedene Beziehungen zwischen unterschiedlichen Klassen von Auslastungs- und Potentialspielen zu formulieren und zu zeigen.

1 Grundlagen

1.1 Spiele in strategischer Form

Definition 1.1. Ein (*nichtkooperatives*) *Spiel in strategischer Form* ist ein Tupel $\Gamma = (I, X = (X_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$. Dabei ist

- I die Menge der Spieler,
- X_i die nicht-leere Menge der (reinen) Strategien von Spieler i ,
- $c_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$ die Kostenfunktion von Spieler i .

Das eigentliche Spiel besteht nun daraus, dass jeder Spieler versucht durch die Wahl einer Strategie $x_i \in X_i$ aus seinem Strategieraum die eigenen Kosten $c_i((x_j)_{j \in I})$ zu minimieren. Das Tupel $x := (x_j)_{j \in I}$ bezeichnen wir dabei als *Strategieprofil*.

Wir nennen ein solches Spiel *endlich*, wenn der gesamte Strategieraum X endlich ist und N -Personenspiel, wenn $|I| = N \in \mathbb{N}$ gilt.

Notation 1.2. Ein endliches 2-Personenspiel lässt sich leicht als Matrix darstellen. Deren Zeilen werden durch die Strategien von Spieler 1 indiziert, ihre Spalten durch die Strategien von Spieler 2. Jedem Tupel (x_1, x_2) aus je einer Strategie der beiden Spieler (also einem Strategieprofil) entspricht dann genau ein Eintrag der Matrix, welcher das Tupel $(c_1(x_1, x_2), c_2(x_1, x_2))$ ist.

Beispiel für diese Notation? Gefangenendilemma/Schere-Stein-Papier/irgendein Spiel, das im weiteren Verlauf interessant sein kann?

Beobachtung 1.3. Ist ein Spiel endlich, so können wir in der Regel ohne Einschränkung annehmen, dass auch die Menge der Spieler endlich ist. Denn die Menge $X = \prod_{i \in I} X_i$ kann nur endlich sein, wenn alle bis auf endliche viele X_i einelementig sind. Also haben in einem endlichen Spiel nur endlich viele Spieler mehr als eine Strategie. Für die Suche beispielsweise nach Nash-Gleichgewichten oder Verbesserungspfaden spielen aber nur solche Spieler eine Rolle. Wir werden dies später in Abschnitt 3 formal zeigen (siehe Korollar 3.34).

Notation 1.4. Zu einem Strategieprofil $x \in X$ und einer einzelnen Strategie $\hat{x}_i \in X_i$ bezeichnen wir einer Konvention aus [Mil15] folgend mit $(x \mid \hat{x}_i)$ das Strategieprofil, das aus x entsteht, wenn Spieler i einseitig seine Strategie von x_i auf \hat{x}_i ändert.

Definition 1.5. Ein Strategieprofil $x \in X$ ist ein (*reines*) *Nash-Gleichgewicht*, wenn für jeden Spieler $i \in I$ und jede seiner Strategien \hat{x}_i gilt:

$$c_i(x \mid \hat{x}_i) \geq c_i(x)$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist also ein Strategieprofil, aus dem heraus kein Spieler einen Anreiz für einen einseitigen Strategiewechsel hat.

In [Voo+99, Definition 2.2] werden Koordinations- und Dummy-Spiele definiert. Daran anlehnend definieren wir hier zusätzlich skalierte Koordinationsspiele und Dummy-Spieler:

Definition 1.6. Ein Spiel $\Gamma = (I, X = (X_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ heißt

- *Koordinationsspiel*, wenn alle Spieler eine gemeinsame Kostenfunktion nutzen, wenn also gilt $c_i = c_j$ für alle Spieler $i, j \in I$.
- *skaliertes Koordinationsspiel*, wenn jeder Spieler eine streng monoton skalierte Variante einer gemeinsamen Kostenfunktion verwendet, d.h. wenn es eine Funktion $c : X \rightarrow \mathbb{R}$ und streng monotone Funktionen $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass für jeden Spieler $c_i = f_i \circ c$ gilt.

Ein Spieler $i \in I$ heißt *Dummy-Spieler*, wenn die alleinige Abweichung dieses Spielers von einem gegebenen Strategieprofil nie zu einer Änderung seiner Kosten führt. D.h. wenn für alle $x \in X, i \in I$ und $\hat{x}_i \in X_i$ gilt $c_i(x) = c_i(x \mid \hat{x}_i)$.

Das ganze Spiel Γ heißt *Dummy-Spiel*, wenn alle Spieler des Spiels Dummy-Spieler sind.

Beobachtung 1.7. In einem (skalierten) Koordinationsspiel sind globale Minima der gemeinsamen Kostenfunktion Nash-Gleichgewichte des Spiels. Insbesondere haben damit endliche (skalierte) Koordinationsspiele immer mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

In einem Dummy-Spiel ist *jedes* Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht, da ein einzelner Spieler durch einseitige Abweichung seine Kosten nie verändern und daher insbesondere nicht verringern kann.

1.2 Abweichungspfade

Eine natürliche Methode Nash-Gleichgewichte in Spielen zu finden ist die folgende: Man beginnt bei einem beliebigen Strategieprofil und prüft, ob dieses bereits ein Nash-Gleichgewicht ist. Ist dies der Fall, ist man bereits fertig. Andernfalls gibt es wenigstens einen Spieler, der seine Kosten durch einen einseitigen Strategiewechsel verbessern kann. Dadurch erhält man ein neues Strategieprofil, für das man erneut prüft, ob es ein Nash-Gleichgewicht ist usw. Terminiert dieses Verfahren, so hat man ein Nash-Gleichgewicht gefunden.

Durch dieses Verfahren erhält man eine Folge von Strategieprofilen, die jeweils durch Abweichung eines einzelnen Spielers auseinander hervorgehen, wobei dieser Spieler dabei seine Kosten senkt. Eine solche Folge bezeichnen Monderer und Shapley in [MS96b] als „Verbesserungspfad“. Stellt man andere Bedingungen an die Kostenveränderung für den abweichenden Spieler, so erhält man analog andere Arten von Pfaden im Strategieraum (vergleiche etwa [VN97] und [Voo00]).

Definition 1.8. Ein Tupel von Strategieprofilen $(x^0, x^1) \in X \times X$ nennen wir einen *Schritt*, wenn x^1 durch Abweichung eines einzelnen Spielers aus x^0 entsteht. Das heißt also, wenn es einen Spieler $i \in I$ gibt, sodass $x^1 = (x^0 \mid x_i^1)$ gilt.

Ein solcher Schritt heißt

- *Nichtverschlechterungsschritt*, wenn sich der abweichende Spieler nicht verschlechtert, d.h. $c_i(x^0) \geq c_i(x^1)$.

- *Verbesserungsschritt*, wenn sich der abweichende Spieler echt verbessert, wenn also $c_i(x^0) > c_i(x^1)$ gilt.
- *Beste-Antwort-Schritt*, wenn der abweichende Spieler eine für ihn bestmögliche Antwort wählt, d.h. $\min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x^0 \mid \hat{x}_i) = c_i(x^1)$.

Definition 1.9. Eine Folge von Strategieprofilen $\gamma = (x^0, x^1, x^2, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$ ist ein *Pfad*, wenn je zwei aufeinanderfolgende Strategieprofile einen Schritt bildet. Das heißt wenn es für jeden Schritt k einen Spieler $i(k) \in I$ gibt, sodass das Profil x^k aus x^{k-1} durch alleinige Abweichung dieses Spielers entsteht, also $x^k = (x^{k-1} \mid x_{i(k)}^k)$.

Ein solcher Pfad heißt

- *Nichtverschlechterungspfad*, wenn jeder Schritt ein Nichtverschlechterungsschritt ist, d.h. für alle k gilt $c_{i(k)}(x^{k-1}) \geq c_{i(k)}(x^k)$.
- *schwacher Verbesserungspfad*, wenn er ein Nichtverschlechterungspfad ist und mindestens ein Schritt ein Verbesserungsschritt ist.
- *Verbesserungspfad*, wenn jeder Schritt ein Verbesserungsschritt ist.
- *Beste-Antwort-Pfad*¹, jeder Schritt ein Beste-Antwort-Schritt ist, d.h. $\min_{\hat{x}_{i(k)} \in X_{i(k)}} c_{i(k)}(x^{k-1} \mid \hat{x}_{i(k)}) = c_{i(k)}(x^k)$.
- *schwacher Beste-Antwort-Verbesserungspfad*, wenn er ein schwacher Verbesserungspfad und ein Beste-Antwort-Pfad ist.
- *Beste-Antwort-Verbesserungspfad*, wenn er ein Verbesserungspfad und ein Beste-Antwort-Pfad ist.

Definition 1.10. Für einen endlichen Pfad $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$ ist

- die *Gesamtänderung* entlang des Pfades $\delta(\gamma)$ definiert als die Summe aller Änderungen für die jeweils abweichenden Spieler:

$$\delta(\gamma) := \sum_{k=1}^n (c_{i(k)}(x^k) - c_{i(k)}(x^{k-1}))$$

- γ ein *abgeschlossener Verbesserungspfad*, wenn er ein Verbesserungspfad ist, der nicht mehr nach hinten verlängert werden kann, d.h. es keine Strategie \hat{x}_i gibt, mit $c_i(x^n) > c_i(x^n \mid \hat{x}_i)$.
- γ ein *n-Zykel*, wenn $x^0 = x^n$ gilt.
- $\overleftarrow{\gamma} := (x^n, x^{n-1}, \dots, x^0)$ der in die andere Richtung durchlaufende Pfad.

Ist zusätzlich $\mu = (y^0, y^1, \dots)$ ein beliebiger Pfad, so ist $\gamma \cdot \mu := (x^0, \dots, x^n, y^0, y^1, \dots)$ die Verknüpfung der beiden Pfade (und offensichtlich selbst wieder ein Pfad).

Beobachtung 1.11. Einige einfache Beobachtungen über Pfade:

¹In [Voo00] werden solche Pfade als „Beste-Antwort-kompatibel“ bezeichnet.

- Ein endlicher Nichtverschlechterungspfad γ ist genau dann ein schwacher Verbesserungspfad, wenn $\overleftarrow{\gamma}$ kein Nichtverschlechterungspfad ist.
- Zwei Pfade γ und μ von x nach y haben genau dann die gleiche Gesamtänderung, wenn $\gamma \cdot \overleftarrow{\mu}$ eine Gesamtänderung von 0 hat. Es gilt also für zwei solche Pfade:

$$\delta(\gamma) = \delta(\mu) \iff \delta(\gamma \cdot \overleftarrow{\mu}) = 0$$

- Jeder Beste-Antwort-Pfad ist automatisch ein Nichtverschlechterungspfad.

Der eingangs beschriebene natürliche Algorithmus zum Finden eines Nash-Gleichgewichtes terminiert genau dann immer, wenn alle Verbesserungspfade in dem gegebenen Spiel endlich sind. Diese Eigenschaft bezeichnen wir als *finite improvement property*:

Definition 1.12. Ein Spiel Γ hat die *finite improvement property (FIP)*, wenn jeder Verbesserungspfad endlich ist.

Beobachtung 1.13. Das Ende eines abgeschlossenen Verbesserungspfades ist immer ein Nash-Gleichgewicht. Denn wäre dem nicht so, dann gäbe es wenigstens einen Spieler, der sich durch Abweichen noch verbessern kann - was zu einer Verlängerung des Verbesserungspfades führen würde.

Umgekehrt ist offenkundig auch jedes Nash-Gleichgewicht Ende wenigstens eines abgeschlossenen Verbesserungspfades (sogar Beste-Antwort-Verbesserungspfades) - nämlich des trivialen, nur aus diesem Strategieprofil bestehenden Verbesserungspfades.

Korollar 1.14. Ein Spiel Γ besitzt genau dann (mindestens) ein Nash-Gleichgewicht, wenn es (mindestens) einen endlichen, maximalen (Beste-Antwort-)Verbesserungspfad besitzt. Ein Spiel mit FIP besitzt dementsprechend immer wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.

Alternativ können auch Beste-Antwort-Schritte dazu verwendet werden Nash-Gleichgewichte zu charakterisieren:

Beobachtung 1.15. Eine Strategieprofil $x \in X$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn (x, x) für jeden Spieler ein Beste-Antwort-Schritt ist.

Beste-Antwort-Pfade treten bei sogenannten Beste-Antwort-Dynamiken auf: Bei diesen handelt es sich ebenfalls um Verfahren zum Auffinden von Nash-Gleichgewichten, im Unterschied zum zuvor beschriebenen Verfahren wechselt der abweichende Spieler hierbei allerdings nicht zu irgendeiner für ihn besseren Strategie, sondern wählt direkt die (momentan) beste der ihm zur Verfügung stehenden Strategien.

Schließlich führen wir noch eigene Bezeichnungen für den Bereich eines Strategieraums ein, der von einem gegebenen Strategieprofil aus überhaupt mit Hilfe von Pfaden erreicht werden kann.

Definition 1.16. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ des Strategieraumes bezeichnen wir als *Pfadzusammenhangskomponente*, wenn es für je zwei $x, y \in Y$ einen Pfad von x nach y in Y gibt.

Zu einem gegebenen Strategieprofil $x \in X$ ist die *Pfadzusammenhangskomponente* von x die (bezüglich Inklusion) maximale Pfadzusammenhangskomponente $Y_x \subseteq X$, welche x enthält.

Beobachtung 1.17. Die Pfadzusammenhangskomponente eines Strategieprofils x besteht aus allen Strategieprofilen, die sich an höchstens endlich vielen Stellen von x unterscheiden, d.h.

$$Y_x = \{y \in X \mid \exists J \subseteq I : |J| < \infty \text{ und } \forall i \in I \setminus J : x_i = y_i\}$$

Insbesondere ist also für N -Personenspiele der gesamte Strategieraum eine einzige Zusammenhangskomponente.

1.3 Auslastungsspiele

Eine Klasse von Spielen, welche (im endlichen Fall) immer ein Nash-Gleichgewicht besitzt, bilden die sogenannten Auslastungsspiele, welche erstmals von Rosenthal in [Ros73] definiert wurden. Im folgenden wollen wir diese Klasse sowie einige Varianten davon definieren. Verschiedene Eigenschaften dieser Spiele sowie insbesondere ihre Beziehungen zu Potentialspielen werden wir später in Abschnitt 4 diskutieren.

Definition 1.18. Ein *Auslastungsmodell* M ist gegeben durch ein Tupel $(I, R, (S_i)_{i \in I}, (g_r)_{r \in R})$. Dabei ist

- I die Menge der Spieler,
- R die Menge der zur Verfügung stehenden Ressourcen,
- $g_r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche die Kosten der Ressource $r \in R$ in Abhängigkeit von ihrer Auslastung beschreibt, und
- $S_i \subseteq \mathcal{P}(R)$ eine Menge von Teilmengen der Ressourcenmenge, unter denen sich der Spieler i für eine Teilmenge entscheiden kann.

Definition 1.19. Ein Auslastungsmodell M induziert durch die Lastfunktionen

$$l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto |\{i \in I \mid r \in s_i\}|$$

und die Kostenfunktionen

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} g_r(l_r(s))$$

ein *Auslastungsspiel* $\Gamma(M) := (I, S = (S_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$, wenn alle c_i und alle l_r auf ganz S wohldefiniert sind (also die entsprechenden Summen für jedes $s \in S$ absolut konvergieren).

Bemerkung 1.20. Eine Lastfunktion l_r ist genau dann wohldefiniert, wenn diese Ressource r von höchstens endlich vielen verschiedenen Spielern benutzt werden kann. Das heißt wenn gilt: $|\{i \in I \mid \exists s_i \in S_i : r \in s_i\}| < \infty$. Sind alle l_r bereits wohldefiniert, so ist eine hinreichende

Bedingung für die Wohldefiniertheit von c_i , dass alle diesem Spieler zur Auswahl stehende Teilmengen von R endlich sind. Diese Bedingung ist aber nicht notwendig.

Insbesondere induzieren Auslastungsmodelle mit endlicher Ressourcen- und Spielerzahl immer ein Auslastungsspiel.

Ist die Ressourcenmenge R endlich, so ist das induzierte Auslastungsspiel ein endliches Spiel (d.h. dessen Strategieraum ist endlich). Ist umgekehrt der Strategieraum endlich, so können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass auch R endlich ist. Denn in diesem Fall tauchen nur endlich viele der Ressourcen in einer Strategie wenigstens eines der Spieler auf - und alle anderen Ressourcen können für die Betrachtung des Spiels ignoriert werden.

Beispiel 1.21. Ein Beispiel für Auslastungsmodelle sind *Netzwerkauslastungsmodelle*. Diese sind gegeben durch einen (nicht notwendigerweise endlichen) Multigraphen $G = (V, E)$, eine Kostenfunktion $g_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ für jede Kante $e \in E$ und für jeden Spieler $i \in I$ je ein ausgezeichneter Start- und Endknoten $s_i, t_i \in V$. Die Ressourcen sind dann die Kanten des Graphen, die Strategien von Spieler $i \in I$ entsprechen den endlichen s_i, t_i -Pfaden in G .

Zusätzlich ist es möglich bestimmte Kanten nur für einen Teil der Spieler zuzulassen. Dadurch wird dann der Strategieraum der anderen Spieler entsprechend eingeschränkt.

Verallgemeinerungen von Auslastungsspielen erhalten wir durch das Einführen von Spielergewichten bzw. dem Abändern der Form, in der die Kosten berechnet werden:

Definition 1.22. Zusammen mit einem positiven Gewichtsvektor $(w_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_{>0}^I$ induziert ein Auslastungsmodell M (wiederum unter der Voraussetzung, dass alle beteiligten Funktionen wohldefiniert sind)

- ein *kostengewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma_c(M, w) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(s))$$

und die gleiche Lastfunktion wie im ungewichteten Fall.

- ein *lastgewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma_l(M, w) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion wie im ungewichteten Fall und die Lastfunktion $l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto \sum \{w_i \mid r \in s_i\}$.
- ein *gewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma(M, w) := (I, S, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(s))$$

und die Lastfunktion $l_r : S \rightarrow \mathbb{N} : s \mapsto \sum \{w_i \mid r \in s_i\}$.

Beobachtung 1.23. Für (last-)gewichtete Auslastungsspiele ist es auch möglich, dass abzählbar unendlich viele Spieler eine Ressource nutzen können (und die entsprechende Lastfunktion dennoch wohldefiniert ist) - beispielsweise dann, wenn der Gewichtsvektor von der Form $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Einige weitere Varianten von Auslastungsspielen sind:

Definition 1.24. • Zusammen mit einer streng monotonen Skalierungsfunktionen $(f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$ erhält man aus einem Auslastungsmodell ein *skaliertes Auslastungsspiel* durch die Kostenfunktionen:

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} f_i(g_r(l_r(s)))$$

- Ein *Auslastungsmodell/-spiel mit playerspezifischen Ressourcenkosten* erhält man, wenn es zu jeder Ressource $r \in R$ und jedem Spieler $i \in I$ eine eigene Funktion $g_r^i : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt und die Kostenfunktionen der Spieler definiert sind als

$$c_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} g_r^i(l_r(s))$$

Bemerkung 1.25. Jedes skalierte Auslastungsspiel ist insbesondere ein Auslastungsspiel mit playerspezifischen Ressourcenkosten: Setze dazu $g_r^i := f_i \circ g_r$.

Definition 1.26. Ein Auslastungsmodell/-spiel heißt *nicht-anonym*, wenn die Kosten einer Ressource nicht nur von der Zahl bzw. dem Gesamtgewicht der sie nutzenden Spieler, sondern auch von deren Identität abhängt. Die Lastfunktionen sind dann also definiert als

$$l_r : S \rightarrow \mathcal{P}(I) : s \mapsto \{ i \in I \mid r \in s_i \}$$

und die Ressourcenkostenfunktionen sind von der Form

$$g_r : \mathcal{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Speziellere Klassen von Auslastungsspielen erhalten wir hingegen, wenn die Mengen der zulässigen Teilmengen der einzelnen Spieler zusätzliche Struktur besitzen. Der einfachste Fall hierfür ist, dass jeder Spieler immer nur genau eine Ressource auf einmal wählen kann:

Definition 1.27. Ein Auslastungsmodell/-spiel heißt *Singelton-Auslastungsmodell/-spiel*, wenn jede Strategie jedes Spielers aus genau einer Ressource besteht.

Eine andere Möglichkeit ist, dass die zulässigen Teilmengen eines Spielers Basen eines Matroids auf der Ressourcenmenge bilden:

Definition 1.28. Ein ungewichtetes Auslastungsmodell/-spiel heißt *Matroidmodell/-spiel*, wenn es für jeden Spieler $i \in I$ einen Matroid M_i auf der Ressourcenmenge gibt, sodass S_i gerade die Basen dieses Matroids sind.

Definition 1.29. Ein Teilmengensystem $M \subseteq \mathcal{P}(R)$ auf einer endlichen Menge R heißt Matroid, wenn es die folgenden drei Axiome erfüllt (vgl. [Sch03, Abschnitt 39.1])

1. $\emptyset \in M$ (oder äquivalent dazu: $M \neq \emptyset$)

2. M ist abgeschlossen unter Inklusion, d.h. $\forall S \in M, T \subseteq M : T \subseteq S \implies T \in M$.
3. $\forall S, T \in M : |T| < |S| \implies \exists r \in S \setminus T : T \cup \{r\} \in M$.

Die Mengen in M bezeichnen wir dann als *unabhängige Mengen*, die bezüglich Inklusion maximalen Mengen unter diesen nennen wir *Basen des Matroids*.

Eine wichtige Eigenschaft, welche alle Matroide erfüllen, ist der starke Basisaustauschsatz (vgl. [Sch03, Theorem 29.12]):

Satz 1.30. *Seien M ein Matroid, B_1, B_2 zwei Basen von M und $r \in B_1 \setminus B_2$ beliebig. Dann gibt es ein Element $q \in B_2 \setminus B_1$, sodass das Vertauschen dieser beiden Elemente wieder zwei Basen ergibt, d.h. sowohl $B_1 \setminus \{r\} \cup \{q\}$ als auch $B_2 \setminus \{q\} \cup \{r\}$ sind ebenfalls Basen von M .*

Mittels Induktion ergibt sich daraus die Basen-Matching-Eigenschaft ([Sch03, Korollar 39.12a]):

Korollar 1.31. *Seien M ein Matroid und B_1, B_2 zwei Basen von M . Dann gibt es eine Partitionierung der symmetrischen Differenz $B_1 \triangle B_2 := B_1 \setminus B_2 \cup B_2 \setminus B_1$ in eine Menge von Tupeln der Form (q, r) mit $q \in B_1 \setminus B_2$ und $r \in B_2 \setminus B_1$, sodass $B_1 \setminus \{q\} \cup \{r\}$ ebenfalls eine Basis von M ist. Es gibt also eine Menge von Tupeln $A \subseteq (B_1 \setminus B_2) \times (B_2 \setminus B_1)$, sodass gilt:*

- $\forall q \in B_1 \setminus B_2 \exists! r \in B_2 \setminus B_1 : (q, r) \in A$
- $\forall r \in B_2 \setminus B_1 \exists! q \in B_1 \setminus B_2 : (q, r) \in A$
- $\forall (q, r) \in A : B_1 \setminus \{q\} \cup \{r\}$ ist eine Basis von M

2 Potentiale

Eine Schwierigkeit bei der Analyse von Spielen bildet der Umstand, dass jeder Spieler eine eigene Kostenfunktion und damit ein eigenes Optimierungsziel hat. Möchte man also beispielsweise Gleichgewichtspunkte finden, so muss man alle diese Funktionen gleichzeitig (lokal) optimieren. Diese Aufgabe wird wesentlich einfacher, wenn das Spiel eine sogenannte *Potentialfunktion* besitzt. Das ist eine Funktion auf dem Strategieraum des Spieles, die ein alternatives Koordinationsspiel darauf definiert, welches gewisse Eigenschaften mit dem ursprünglichen Spiel teilt (etwa die Lage der Gleichgewichtspunkte).

In diesem Kapitel werden wir einige Varianten von Potentialfunktionen kennenlernen und feststellen, welche Spiele diese jeweils besitzen. In Abschnitt 3 werden wir dann die Beziehung zwischen Ausgangsspiel und dem von einer Potentialfunktion beschriebenen Koordinationsspiel durch Morphismen zwischen den beiden Spielen formalisieren und dadurch zeigen, welche Eigenschaften beim Wechsel zwischen den beiden Spielen erhalten bleiben.

2.1 Definitionen

Zunächst definieren wir eine Auswahl verschiedener Typen von Potentialfunktionen:

Definition 2.1. Zu einem Spiel $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$ heißt eine Funktion $P : X \rightarrow \mathbb{R}$

- *verallgemeinertes Nash-Potential*, wenn jedes Minimum von P ein Nash-Gleichgewicht in Γ ist, d.h. für alle $x \in X$ gilt:

$$P(x) = \min_{\hat{x} \in X} P(\hat{x}) \implies \forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(x) \leq c_i(x \mid \hat{x}_i)$$

- *Nash-Potential*, wenn jedes Minimum von P ein Nash-Gleichgewicht in Γ ist und umgekehrt, d.h. für alle $x \in X$ gilt:

$$P(x) = \min_{\hat{x} \in X} P(\hat{x}) \iff \forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(x) \leq c_i(x \mid \hat{x}_i)$$

- *lokales Nash-Potential*, wenn jedes lokale Minimum von P ein Nash-Gleichgewicht in Γ ist und umgekehrt, d.h. für alle $x \in X$ gilt:

$$\forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : P(x) \leq P(x \mid \hat{x}_i) \iff \forall i \in I, \hat{x}_i \in X_i : c_i(x) \leq c_i(x \mid \hat{x}_i)$$

- *Beste-Antwort-Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x \in X$ gilt:

$$\arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x \mid \hat{x}_i) = \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} P(x \mid \hat{x}_i)$$

- *verallgemeinertes ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x \in X$ sowie $\hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i) \implies P(x) > P(x \mid \hat{x}_i)$$

- *ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x \in X$ sowie $\hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i) \iff P(x) > P(x \mid \hat{x}_i)$$

- *skaliertes Potential*, wenn es streng monotone Funktionen $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x \in X$ sowie $\hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = f_i(P(x)) - f_i(P(x \mid \hat{x}_i))$$

- *gewichtetes Potential*, wenn es einen Gewichtsvektor $(w_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_{>0}^I$ gibt, sodass für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x \in X$ sowie $\hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = w_i \cdot (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i))$$

- *exaktes Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x \in X$ sowie $\hat{x}_i \in X_i$ gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)$$

Exakte, gewichtete, ordinale und verallgemeinerte ordinale Potentiale wurden erstmals in [MS96b] definiert, beste Antwort-Potentiale erstmals in [Voo00]. Die Begriffe verallgemeinertes und lokales Nash-Potential dürften für die Anwendung eher weniger interessant sein, sondern sollen vor allem das grundlegende Konzept eines Potentials formalisieren und umfassen daher auch (fast) alle anderen Potentiale. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Potentialbegriffen werden in dem an [Voo00, Abbildung 1] angelehnten Euler-Diagramm (Abbildung 1) dargestellt.

Beispiel 2.2. Jedes Koordinationsspiel besitzt ein exaktes Potential (nämlich die gemeinsame Kostenfunktion). Ebenso besitzt jedes Dummenspiel ein exaktes Potential (nämlich die konstante 0-Funktion).

Entsprechend besitzt jedes skalierte Koordinationsspiel ein skaliertes Potential.

2.2 Anschauung

Verallgemeinerte Nash-Potentiale (und damit alle oben beschriebenen Potentiale) formalisieren die Idee ein Spiel durch irgendein anderes mit einer einzigen Funktion beschriebenes Optimierungsproblem zu ersetzen, dessen Optima Nash-Gleichgewichte im ursprünglichen Spiel sind. Im Falle eines Nash-Potentials entsprechen diese Optima sogar allen Nash-Gleichgewichten. Findet man nun ein solches Optimierungsproblem und kann von diesem

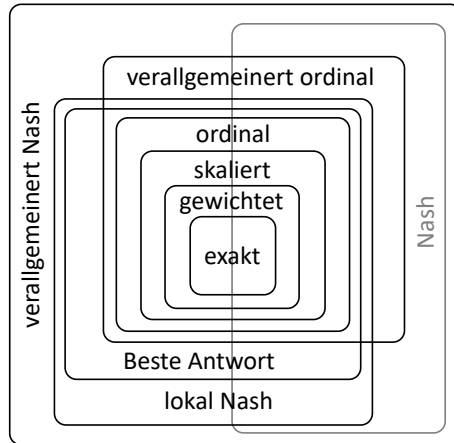


Abbildung 1: Beziehungen zwischen den einzelnen Potentialbegriffen

zeigen, dass es immer ein Optimum besitzt (etwa weil es durch eine stetige Funktion beschrieben wird und der Strategieraum kompakt ist), so zeigt dies, dass das ursprüngliche Spiel mindestens ein Nash-Gleichgewicht besitzt. Außerdem kann man dieses durch Lösen des Optimierungsproblems bestimmen.

Versteht man zu einem gegebenen Strategieprofil $x \in X$ dessen *Nachbarschaft* als die Menge aller durch höchstens einen Schritt erreichbarer Strategieprofile, d.h. die Menge $\{(x \mid \hat{x}_i) \mid i \in I, \hat{x}_i \in X_i\}$, so nennen wir x ein *lokales Minimum* einer Funktion $P : X \rightarrow \mathbb{R}$, wenn es ein Minimum innerhalb seiner Nachbarschaft ist. Ein lokales Nash-Potential beschreibt damit ein Optimierungsproblem, dessen *lokale* Minima den Nash-Gleichgewichten des Ausgangsspiels entsprechen.

Die Nachbarschaft eines Strategieprofils x besteht nun gerade aus den Profilen, die man mit x vergleichen muss, um festzustellen, ob es sich bei x um ein Nash-Gleichgewicht handelt. Hat man also ein Spiel $\Gamma = (I, X, (c_i))$ mit einem lokalen Nash-Potential P , so induziert dieses ein Koordinationsspiel $K := (I, X, (P))$ auf dem selben Strategieraum, dessen Nash-Gleichgewichte gerade mit denen des Spiels Γ übereinstimmen.

Weitere Spezialisierungen dieses Potentialbegriffs führen dann zu induzierten Koordinationsspielen, welche noch mehr Eigenschaften des Ausgangsspiels übernehmen: So hat das durch ein Beste-Antwort-Potential beschriebene Spiel etwa die gleichen Beste-Antwort-Pfade und eignet sich daher beispielsweise zur Analyse von Beste-Antwort-Dynamiken. Durch ein ordinales Potential erhält man ein Spiel, welches auch die gleichen Verbesserungs- und Nichtverschlechterungspfade enthält. Bei einem verallgemeinerten ordinalen Potential bleiben diese hingegen jeweils nur in eine Richtung erhalten: Ein Verbesserungspfad im Ausgangsspiel ist auch einer im Koordinationsspiel und ein Nichtverschlechterungspfad im Koordinationsspiel entspricht einem solchen im ursprünglichen Spiel (vgl. Satz 2.7).

Für skalierte, gewichtete und exakte Potentiale gibt es eine noch anschaulichere Betrachtungsweise für den Fall (endlicher) 2-Personenspiele. Deren Strategieraum kann man als Gitternetz in der Ebene auffassen, wobei jede Strategie von Spieler 1 einer senkrechten und

jede Strategie von Spieler 2 einer waagerechten Gitterlinie entspricht. Kreuzungspunkte von zwei Geraden entsprechen dann gerade vollständige Strategieprofilen. Kostenfunktionen (ebenso wie Potentiale) sind dann „Reliefkarten“, deren Höhe den jeweiligen Kosten entspricht.

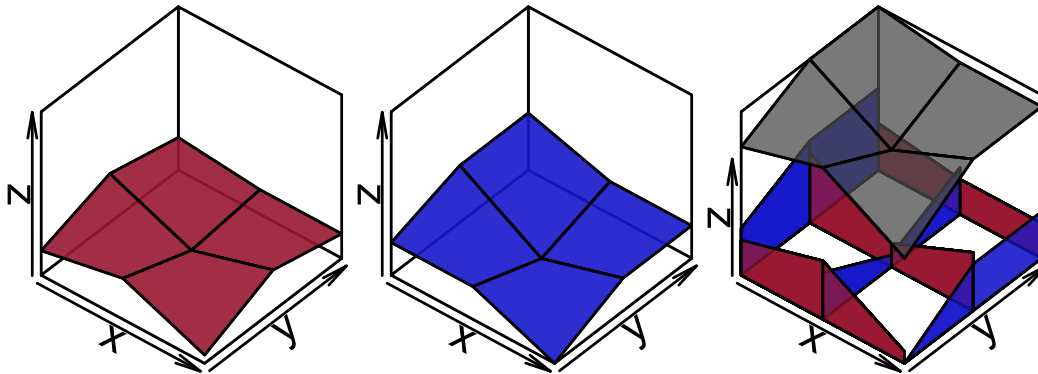


Abbildung 2: Ein 2-Personenspiel mit exaktem Potential (grau): Spieler 1: rot, Spieler 2: blau

Besseres Bild!

Ein Potential entspricht in diesem Bild einer gemeinsamen Reliefkarte für beide Spieler, die - im Falle eines exakten Potentials - „scheibenweise“ bis auf eine additive Konstante mit der eigentlichen Kostenfunktion übereinstimmt. Anders formuliert: Wird die Strategie eines Spielers festgehalten, so kann der andere Spieler seine Kostenveränderungen bei der Wahl der verschiedenen ihm zur Verfügung stehenden Strategien auch anhand der Potentialfunktion ablesen.

Geht man nun über zu einem skalierten Potential, so lesen die beiden Spieler das Potential sozusagen in verschiedenen Einheiten ab (müssen den erhaltenen Wert also noch passend skalieren um ihre tatsächliche Veränderung zu bekommen). Sind die Skalierungsfunktionen linear (das Potential also sogar ein gewichtetes), dann sind die verschiedenen Einheiten proportional zueinander.

2.3 Eigenschaften der Potentiale

Wir wollen hier noch einige Eigenschaften der verschiedenen Potentiale zusammenfassen - beweisen werden wir sie dann aber erst in Abschnitt 3.

Satz 2.3. *Es gelten die in Abbildung 1 dargestellten Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Potentialen.*

Die Zusammenhänge lassen sich alle leicht direkt beweisen. Wir werden diese Beweise hier allerdings nicht führen, da sich die Aussagen auch aus den allgemeineren Sätzen über die entsprechenden Morphismen ergeben, die wir in Abschnitt 3 definieren werden (die Beweise finden sich dann in Abschnitt 3.2). Dass die unterschiedlichen Potentiale auch tatsächlich echt verschiedene Klassen von Spielen beschreiben, zeigen die folgenden Beispiele:

Beispiel 2.4. In allen folgenden Beispielen sei $\gamma := ((t,l), (t,r), (b,r), (b,l))$ der 4-Zykel, der den Strategieraum im Uhrzeigersinn durchläuft. Zum Beweis, dass ein Spiel kein bestimmtes Potential besitzen kann, verwenden wir zum Teil bereits die entsprechenden Charakterisierungen aus Abschnitt 2.4.

- Γ_1 besitzt ein gewichtetes, aber kein exaktes Potential:

$$\Gamma_1 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & (0,0) & (0,0) \\ \hline b & (0,0) & (1,2) \end{array} \quad P_1 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & 1 \end{array}$$

P_1 ist ein gewichtetes Potential (mit Gewichtsvektor $(1,2)$), aber Γ_1 kann nach Satz 2.10 kein exaktes Potential besitzen, da $\delta(\gamma) = 0 + 1 - 2 + 0 \neq 0$ gilt.

- Γ_2 besitzt ein skaliertes, aber kein gewichtetes Potential:

$$\Gamma_2 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & (0,0) & (0,1) \\ \hline b & (1,0) & (2,1) \end{array} \quad P_2 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & 0 & 1 \\ \hline b & 1 & 2 \end{array}$$

P_2 ist ein skaliertes Potential (mit den Skalierungsfunktionen $f_1(0) := 0, f_1(1) = 1, f_1(2) = 3$ und $f_2 := \text{id}$). Γ_2 kann aber kein gewichtetes Potential besitzen. Denn gäbe es ein solches und wäre $w = (w_1, w_2)$ der zugehörige Gewichtsvektor, so würde nach Satz 2.12 gelten:

$$0 = \delta_w(\gamma) = w_2(1 - 0) + w_1(2 - 0) + w_2(0 - 1) + w_1(0 - 1) = w_1$$

Das aber wäre ein Widerspruch dazu, dass Gewichtsvektoren positiv sein müssen.

- Γ_3 besitzt ein ordinales, aber kein skaliertes Potential:

$$\Gamma_3 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & (0,0) & (0,0) \\ \hline b & (1,0) & (2,0) \end{array} \quad P_3 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & 0 & 0 \\ \hline b & 1 & 1 \end{array}$$

P_3 ist ein ordinales Potential, Γ_3 besitzt aber kein skaliertes Potential. Denn wäre P ein solches skaliertes Potential, dann müsste wegen der strengen Monotonie der Skalierungsfunktion f_2 gelten:

$$P(t,l) = P(t,r) \text{ und } P(b,l) = P(b,r)$$

Daraus ergäbe sich dann aber der folgende Widerspruch:

$$\begin{aligned} 1 &= c_1(b,l) - c_1(t,l) = f_1(P(b,l)) - f_1(P(t,l)) = \\ &= f_1(P(b,r)) - f_1(P(t,r)) = c_1(b,r) - c_1(t,r) = 2 \end{aligned}$$

Die folgenden drei Beispiele sind [Voo00, Beispiele 4.1, 4.2 und 4.3] entnommen:

- Γ_4 besitzt ein verallgemeinert ordinales und ein Beste-Antwort-Potential (P_4), aber kein ordinales Potential:

$$\Gamma_4 : \begin{array}{c|c|c|c} & l & m & r \\ \hline t & (1,2) & (2,0) & (2,1) \\ \hline b & (2,2) & (2,0) & (1,2) \end{array}$$

$$P_4 : \begin{array}{c|c|c|c} & l & m & r \\ \hline t & 3 & 0 & 2 \\ \hline b & 4 & 0 & 1 \end{array}$$

P_4 ist sowohl ein verallgemeinertes ordinales als auch ein Beste-Antwort-Potential für Γ_4 , ein ordinales Potential kann es allerdings nach Satz 2.16 nicht geben, da γ ein schwacher Verbesserungszykel ist.

- Γ_5 besitzt ein verallgemeinertes ordinales Potential (P_5), aber kein Beste-Antwort-Potential:

$$\Gamma_5 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & (1,1) & (1,0) \\ \hline b & (1,0) & (0,1) \end{array}$$

$$P_5 : \begin{array}{c|c|c} & l & r \\ \hline t & 3 & 2 \\ \hline b & 0 & 1 \end{array}$$

P_5 ist ein verallgemeinertes ordinales Potential für Γ_5 . Ein Beste-Antwort-Potential hierzu kann es aber nach Satz 2.30 nicht geben, da γ ein schwacher Beste-Antwort-Verbesserungszykel ist.

- Γ_6 besitzt ein Beste-Antwort-Potential (P_6), aber kein verallgemeinertes ordinales Potential:

$$\Gamma_6 : \begin{array}{c|c|c|c} & l & m & r \\ \hline t & (1,2) & (0,0) & (2,1) \\ \hline b & (2,1) & (2,2) & (1,2) \end{array}$$

$$P_6 : \begin{array}{c|c|c|c} & l & m & r \\ \hline t & 1 & 0 & 4 \\ \hline b & 2 & 4 & 3 \end{array}$$

P_6 ist ein Beste-Antwort-Potential zu Γ_6 , ein verallgemeinertes ordinales Potential kann es hingegen laut Korollar 2.26 nicht geben, da γ ein Verbesserungszykel ist.

Direkt aus der Definition ergibt sich die folgende Beobachtung über lokale Nash-Potentiale:

Beobachtung 2.5. Ist Γ ein Spiel mit einem lokalen Nash-Potential P . Dann ist jedes lokale Minimum von P ein Nash-Gleichgewicht von Γ und umgekehrt.

Wir können also Nash-Gleichgewichte allein durch Betrachten einer Potentialfunktion finden. Daraus folgt direkt die Existenz von Nash-Gleichgewichten in einer Vielzahl von Potentialspielen, nämlich all diejenigen deren Potentialfunktion mindestens ein globales (und damit erst recht lokales) Minimum haben. Beispielsweise also:

Korollar 2.6. *Sei Γ ein Spiel mit einem kompakten Strategieraum und einem stetigen verallgemeinerten Nash-Potential. Dann hat Γ wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.*

Insbesondere haben endliche Potentialspiele immer ein Nash-Gleichgewicht. Wie bereits erwähnt bewahren ordinale Potentiale zudem auch Verbesserungspfade:

Satz 2.7. *Sei Γ ein Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential P . Dann ist jeder Verbesserungspfad in Γ auch ein Verbesserungspfad bezüglich P . Ist P sogar ein ordinales Potential, so gilt auch die umgekehrte Richtung.*

Analog zu diesem Satz gilt für Beste-Antwort-Pfade und Beste-Antwort-Potentiale:

Satz 2.8. Sei Γ ein Spiel mit einem Beste-Antwort-Potential P . Dann ist jeder Beste-Antwort-(Verbesserungs-)Pfad in Γ auch ein Beste-Antwort-(Verbesserungs-)Pfad bezüglich P und umgekehrt.

Tabelle 1 fasst einige der von Potentialen erhaltenen Eigenschaften zusammen.

	Nash-Gl.	FIP	Nichtverschl.pfad	Verb.pfad	Beste-Antwort-Pfad
exakt	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow
gewichtet	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow
skaliert	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow
ordinal	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow
verallg. ordinal	\Leftarrow	\Leftarrow	\Leftarrow	\Rightarrow	\Rightarrow
Beste Antwort	\Leftrightarrow				\Leftrightarrow
lokal Nash	\Leftrightarrow				

Tabelle 1: Welche Eigenschaft bleibt beim Übergang von einem Spiel auf das von einem entsprechenden Potential induzierte Koordinationsspiel erhalten (\Rightarrow) und welche bei der umgekehrten Richtung (\Leftarrow)?

Für Spiele mit unendlicher Spielermenge wird sich im folgenden Abschnitt die Beobachtung als hilfreich erweisen, dass wir die meisten Potentiale pfadzusammenhangskomponentenweise definieren können:

Beobachtung 2.9. Sei Γ ein beliebiges Spiel und $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Erfüllt P dann die Bedingung eines exakten/ordinalen/verallgemeinerten ordinalen/Beste-Antwort/lokalen Nash-Potentials für jede (maximale) Pfadzusammenhangskomponente, so ist P ein entsprechendes Potential für ganz Γ .

Für gewichtete/skalierte Potentiale gilt die entsprechende Aussage nur mit der Zusatzbedingung, dass die verschiedenen Potentiale auf den Pfadzusammenhangskomponenten jeweils die gleichen Gewichte bzw. Skalierungsfunktionen verwenden.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Umstand, dass die definierende Eigenschaft für alle aufgezählten Potentiale immer nur entlang eines Pfades (der Länge 1) und damit innerhalb einer Zusammenhangskomponente geprüft werden muss. \square

2.4 Charakterisierungen der Potentiale

In diesem Abschnitt wollen wir für einige der zuvor beschriebenen Potentiale notwendige und hinreichende Anforderungen an ein Spiel beschreiben, damit dieses ein entsprechendes Potential besitzt.

2.4.1 Exakte Potentiale

Satz 2.10. Ein Spiel besitzt genau dann ein exaktes Potential, wenn alle 4-Zykel im Strategieraum eine Gesamtänderung von 0 haben.

Beweis. Wir folgen dem Beweis aus [MS96b, Anhang A]. Dort wird der Satz zwar nur für N -Personenspiele gezeigt, mit Beobachtung 2.9 überträgt sich dieser Beweis aber direkt auch auf allgemeine Spiele.

Sei zunächst $\gamma := (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$ ein beliebiger 4-Zykel in einem Spiel mit Potential P . Dann gilt für die Gesamtänderung:

$$\delta(\gamma) = \sum_{i=1}^4 \left(c_{i(k)}(x^k) - c_{i(k)}(x^{k-1}) \right) = \sum_{k=1}^4 \left(P(x^k) - P(x^{k-1}) \right) = P(x^4) - P(x^0) = 0$$

Ist umgekehrt Γ ein Spiel, in dem für alle 4-Zykel γ gilt $\delta(\gamma) = 0$, x ein beliebiges, aber festes Strategieprofil in Γ und Y_x dessen Pfadzusammenhangskomponente, dann definiere wie folgt eine Funktion P_x auf Y_x :

$$P : Y_x \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \delta(\gamma), \gamma \text{ beliebiger Pfad von } x \text{ nach } y$$

Damit diese Funktion tatsächlich wohldefiniert ist, muss für je zwei Pfade γ_1 und γ_2 von \hat{x} nach x gelten, dass die jeweiligen Gesamtänderungen gleich sind, d.h. $\delta(\gamma_1) = \delta(\gamma_2)$. Dies ist nach Beobachtung 1.11 äquivalent zu

$$\delta(\gamma_1 \cdot \overleftarrow{\gamma_2}) = 0.$$

Dazu zeigen wir nun mittels Induktion über deren Länge, dass für alle Zykel μ gilt $\delta(\mu) = 0$:

IA ($|\mu| = 4$)² D.h. μ ist ein 4-Zykel und damit $\delta(\mu) = 0$ nach Voraussetzung.

IS ($|\mu| = n$) Vorausgesetzt es gibt einen Pfad $\mu' = (x'^0, \dots, x'^n)$ gleicher Länge und Gesamtänderung wie μ , sodass in den ersten beiden Schritten der gleiche Spieler seine Strategie wechselt, d.h. $i(1) = i(2)$. Dann erhält man durch Weglassen des ersten Schrittes einen *kürzeren* Pfad $\mu'' := (x'^0, x'^2, \dots, x'^n)$ mit gleicher Gesamtänderung, welche dann nach Induktion bereits 0 ist. In diesem Fall haben wir dann wie gewünscht $\delta(\mu) = \delta(\mu') = \delta(\mu'') = 0$.

Die Existenz eines solchen Pfades μ' zeigen wir nun mittels Induktion über $k := \min \{1 < l \leq n \mid i(l) = i(1)\}$. Ein solches k existiert immer, da Spieler $i(1)$ bereits im ersten Schritt seine Strategie wechselt und dies daher im Verlauf des Zyklus noch mindestens ein weiteres Mal tun muss, damit der Zykel geschlossen werden kann.

IA ($k = 2$) Dann gilt bereits $i(1) = i(2)$ und wir sind fertig mit $\mu' := \mu$.

IS ($k - 1 \rightarrow k$) Wir ändern μ so ab, dass Spieler $i(1)$ bereits im $(k - 1)$ -ten Schritt der abweichende Spieler ist. Dann sind wir fertig nach Induktionsvoraussetzung. Dazu ersetzen wir in μ das Strategieprofil x^k durch $(x^{k-1} \mid x_{i(1)}^{k+1})$, sodass also Spieler $i(1)$ bereits einen Schritt früher (im $(k - 1)$ -ten) seine Strategie wechselt und der Spieler, der dies zuvor in diesem Schritt getan hat, einen Schritt später.

²Zykel der Längen 0, 1, 2 und 3 haben automatisch immer Gesamtänderung 0, da in ihnen alle Abweichungen vom gleichen Spieler vorgenommen werden müssen.

Bei dieser Anpassung bleibt die Gesamtänderung des Pfades μ gleich, denn wir ersetzen lediglich ein Pfadstück der Länge 2 durch ein anderes Pfadstück der Länge 2. Und da sich diese beiden Pfade zu einem 4-Zykel zusammensetzen lassen, haben diese nach Voraussetzung die gleiche Gesamtänderung.

Auf dieses abgeänderte μ können wir nun die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten dadurch einen neuen Pfad μ' mit den gewünschten Eigenschaften.

Hiermit können wir auch den Induktionsschritt der äußeren Induktion und damit den Nachweis der Wohldefiniertheit von P abschließen.

Wählen wir nun für jede maximale Pfadzusammenhangskomponente ein einziges x in dieser und definieren wie oben eine Funktion P_x , so lassen sich alle diese Funktionen zu einer Funktion P auf ganz X zusammensetzen. Nach Definition erfüllt diese auf jeder Pfadzusammenhangskomponente die Bedingung eines exakten Potentials. Also ist nach Beobachtung 2.9 P ein exaktes Potential auf X . \square

Eine alternative Charakterisierung für die Existenz eines exakten Potentials zeigen Voorneveld u. a. in [Voo+99, Theorem 2.1]:

Satz 2.11. *Ein Spiel $\Gamma = (I, X, (c_i))$ besitzt genau dann ein exaktes Potential, wenn es ein Koordinationsspiel $K = (I, X, (p))$ und ein Dummy-Spiel $D = (I, X, (d_i))$ auf dem selben Strategieraum gibt, sodass die Kostenfunktionen in Γ die Summe der Kostenfunktionen aus K und D sind, d.h. $c_i = p + d_i$.*

Beweis. Ist Γ ein Spiel mit einem exakten Potential P , so definiert dieses ein Koordinationsspiel $K := (I, X, (P))$. Ferner ist $D := (I, X, (P - c_i))$ ein dazu passendes Dummy-Spiel, denn es gilt für jeden Spieler $i \in I$ und alle Strategien/Strategieprofile $x \in X, \hat{x}_i \in X_i$:

$$(P - c_i)(x) - (P - c_i)(x \mid \hat{x}_i) = (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)) - (c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i)) = 0$$

Daraus erhalten wir $(P - c_i)(x) = (P - c_i)(x \mid \hat{x}_i)$.

Umgekehrt haben sowohl ein Koordinations- als auch ein Dummy-Spiel ein exaktes Potential. Die Summe der beiden Potentialfunktionen ist dann ein exaktes Potential für die Summe der beiden Spiele. \square

2.4.2 Gewichtete und skalierte Potentiale

Satz 2.12. *Ein Spiel besitzt genau dann ein gewichtetes Potential mit Gewichtsvektor $w = (w_i)_{i \in I}$, wenn die w -gewichtete Gesamtänderung entlang jedes 4-Zykels 0 ist, d.h. für jeden 4-Zykel $\gamma := (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$ gilt:*

$$\delta_w(\gamma) = \sum_{i=1}^4 w_{i(k)} \cdot (c_{i(k)}(x^k) - c_{i(k)}(x^{k-1})) = 0$$

Diese Charakterisierung folgt direkt aus der folgenden Beobachtung aus [HKM11, Kapitel 3.2]

Beobachtung 2.13. Zu einem Spiel $\Gamma = (I, X, (c_i))$ ist eine Funktion $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann ein gewichtetes Potential mit Gewichtsvektor $w = (w_i)$, wenn P ein exaktes Potential zum Spiel $\Gamma_{1/w} := (I, X, (c_i/w_i))$ ist.

Beweis. Für jedes Strategieprofil $x \in X$, jeden Spieler $i \in I$ und jede Strategie \hat{x}_i gilt:

$$c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i) = w_i \cdot (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)) \iff \frac{c_i(x)}{w_i} - \frac{c_i(x \mid \hat{x}_i)}{w_i} = P(x) - P(x \mid \hat{x}_i) \quad \square$$

Für skalierte Potentiale erhalten wir ganz analog zu Satz 2.11 eine Charakterisierung durch eine Zerlegung des Spiels in ein Dummy- und ein skaliertes Koordinationsspiel:

Satz 2.14. *Ein Spiel $\Gamma = (I, X, (c_i))$ besitzt genau dann ein skaliertes Potential, wenn es ein skaliertes Koordinationsspiel $K = (I, X, (p_i))$ und ein Dummy-Spiel $D = (I, X, (d_i))$ auf dem selben Strategieraum gibt, sodass die Kostenfunktionen in Γ die Summe der Kostenfunktionen aus K und D sind, d.h. $c_i = p_i + d_i$.*

Beweis. Ist Γ ein Spiel mit einem skalierten Potential P und entsprechenden Skalierungsfunktionen f_i , so definiert dieses ein skaliertes Koordinationsspiel $K := (I, X, (f_i \circ P))$. Ferner ist $D := (I, X, (f_i \circ P - c_i))$ ein dazu passendes Dummy-Spiel, denn es gilt für jeden Spieler $i \in I$ und alle Strategien/Strategieprofile $x \in X, \hat{x}_i \in X_i$:

$$(f_i \circ P - c_i)(x) - (f_i \circ P - c_i)(x \mid \hat{x}_i) = (f_i \circ P(x) - f_i \circ P(x \mid \hat{x}_i)) - (c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i)) = 0$$

Starten wir umgekehrt mit einem skalierten Koordinationsspiel $K = (I, X, (f_i \circ P))$ und einem Dummy-Spiel $D = (I, X, (d_i))$, so ist P ein skaliertes Potential zu dem Spiel $\Gamma := (I, X, (f_i \circ P + d_i))$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} (f_i \circ P + d_i)(x) - (f_i \circ P + d_i)(x \mid \hat{x}_i) &= (f_i \circ P)(x) - (f_i \circ P)(x \mid \hat{x}_i) + d_i(x) - d_i(x \mid \hat{x}_i) \\ &= (f_i \circ P)(x) - (f_i \circ P)(x \mid \hat{x}_i) \end{aligned} \quad \square$$

2.4.3 Ordinale Potentiale

Definition 2.15. Eine Menge X mit einer strikten Partialordnung \prec (irreflexiv und transitiv) heißt *reell geordnet*³, wenn es eine strikt monotone Abbildung von X in die reellen Zahlen gibt, also $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \prec x' \implies f(x) < f(x')$.

Wir definieren nun eine Äquivalenzrelation auf dem Strategieraum:

$$x \approx y : \iff \text{es gibt einen Nicht-Verschlechterungspfad von } x \text{ nach } y \text{ und umgekehrt}$$

³Voorneveld und Norde bezeichnen solche Mengen in [VN97] als „properly ordered“

Auf dem dadurch erzeugten Raum von Äquivalenzklassen $X/\approx := \{[x] \mid x \in X\}$ erhält man eine transitive Ordnung

$[x] \prec_{\uparrow} [y] : \iff$ Es gibt einen schwachen Verbesserungspfad d. Länge ≥ 1 von y nach x

Sowohl Wohldefiniertheit als auch Transitivität dieser Relation ergeben sich aus der Beobachtung, dass die Verknüpfung eines nicht-Verschlechterungspfades mit einem schwachen Verbesserungspfad wieder einen schwachen Verbesserungspfad ergibt.

Damit zeigen Voorneveld und Norde in [VN97, Theorem 3.1] folgende Charakterisierung der Existenz von ordinalen Potentialen:

Satz 2.16. *Ein Spiel besitzt genau dann ein ordinales Potential, wenn $(X/\approx, \prec_{\uparrow})$ reell geordnet ist.*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zwei Propositionen:

Proposition 2.17. *\prec_{\uparrow} ist genau dann eine strikte Partialordnung auf X/\approx , wenn X keine schwachen Verbesserungszykel enthält.*

Beweis. Wie wir bereits gesehen haben, ist \prec_{\uparrow} immer transitiv. Es bleibt also die Irreflexivität der Relation zu zeigen. Dazu genügt die Beobachtung, dass für ein Strategieprofil $x \in X$ genau dann $[x] \prec_{\uparrow} [x]$ gilt, wenn es einen schwachen Verbesserungspfad von x nach x gibt, was gerade einem schwachen Verbesserungszykel entspricht. \square

Proposition 2.18. *Hat ein Spiel Γ ein ordinales Potential P , so gibt es in dessen Strategieraum X keine schwachen Verbesserungszykel.*

Beweis. Angenommen $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$ wäre ein schwacher Verbesserungszykel in Γ , so gilt für alle $0 < k \leq n$: $c_{i(k)}(x^k) \leq c_{i(k)}(x^{k-1})$ und für ein solches k sogar $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$. Da ferner P ein ordinales Potential ist, folgt daraus:

$$P(x^0) \leq P(x^1) \leq \dots \leq P(x^{k-1}) < P(x^k) \leq \dots \leq P(x^n) = P(x^0)$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Also kann es keinen solchen Verbesserungszykel geben. \square

Beweis von Satz 2.16. Sei zunächst $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein ordinales Potential eines Spiels Γ . Nach Proposition 2.18 gibt es in X dann keine schwachen Verbesserungszykel, woraus mit Proposition 2.17 folgt, dass \prec_{\uparrow} eine strikte Partialordnung ist. Wir müssen also noch zeigen, dass $(X/\approx, \prec_{\uparrow})$ reell geordnet ist.

Definiere dazu die Abbildung $f : X/\approx \rightarrow \mathbb{R} : [x] \mapsto P(x)$. Diese ist wohldefiniert, denn ist $y \in [x]$, so gibt es Nichtverschlechterungspfade von x nach y und umgekehrt. Zusammen bilden dieses einen Nichtverschlechterungszykel und da es keine schwachen Verbesserungszykel in Γ gibt, muss in die diesem Zykel (und damit bereits in den beiden Pfaden) in jedem Schritt Gleichheit gelten. Insbesondere folgt damit $P(x) = P(y)$.

Ferner ist diese Abbildung streng monoton, denn gilt $[x] \prec_{\uparrow} [y]$, so gibt es einen schwachen Verbesserungspfad γ von y nach x . Damit folgt analog zum ersten Punkt: $P(x) < P(y)$

Ist umgekehrt $(X/\approx, \prec_{\uparrow})$ reell-geordnet mit Abbildung $f : X/\approx \rightarrow \mathbb{R}$, so definiere $P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f([x])$. Dies ist ein ordinales Potential, denn es gilt:

1. Gilt $c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i)$, so ist $(x, (x \mid \hat{x}_i))$ ein schwacher Verbesserungspfad, also $[x] \succ [(x \mid \hat{x}_i)]$. Daraus wiederum folgt $P(x) = f([x]) > f([(x \mid \hat{x}_i)]) = P(x \mid \hat{x}_i)$.
2. Gilt $c_i(x) = c_i(x \mid \hat{x}_i)$, so sind sowohl $(x, (x \mid \hat{x}_i))$ als auch $((x \mid \hat{x}_i), x)$ nicht-Verschlechterungspfade, also $[x] = [(x \mid \hat{x}_i)]$ und damit $P(x) = f([x]) = f([(x \mid \hat{x}_i)]) = P(x \mid \hat{x}_i)$. \square

In dieser Form ist dies noch eine wenig hilfreiche Charakterisierung, denn um zu zeigen, dass der Strategieraum reell geordnet ist, muss man im Wesentlichen bereits die Potentialfunktion angeben. Allerdings erhält man daraus mit Hilfe der folgenden Propositionen einfachere Charakterisierungen für gewisse Teilklassen von Spielen:

Proposition 2.19. *Jede abzählbare Menge mit einer strikten Partialordnung ist bereits reell geordnet.*

Ein Beweis dazu findet sich in [VN97, Lemma 2.2]. Voorneveld und Norde zitieren dort sogar ein noch allgemeineres Resultat, nach dem es bereits genügt, wenn die partiell geordnete Menge eine bezüglich dieser Ordnung dichte, abzählbare Teilmenge hat.

Korollar 2.20. *Ein Spiel mit abzählbarem Strategieraum besitzt genau dann ein ordinales Potential, wenn der Strategieraum keine schwachen Verbesserungszykel enthält.*

Beweis. Nach Proposition 2.19 ist jede abzählbare Menge mit einer strikten Partialordnung bereits reell geordnet. Also macht \prec_{\uparrow} die abzählbar große Menge X/\approx genau dann zu einer reell geordneten Menge, wenn \prec_{\uparrow} eine strikte Partialordnung ist. Und dies ist nach Proposition 2.17 genau dann der Fall, wenn das Spiel keine schwachen Verbesserungszykel enthält. \square

Laut Beobachtung 2.9 gilt diese Charakterisierung sogar für die größere Klasse der Spiele mit abzählbar großen Pfadzusammenhangskomponenten. Insbesondere gilt damit:

Korollar 2.21. *Ein Spiel mit abzählbar vielen Spielern und abzählbar großen playerspezifischen Strategieräumen besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es keine Verbesserungskreise enthält.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass in einem solchen Spiel jede Pfadzusammenhangskomponente abzählbar groß ist. Seien dazu also $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Dann ist

$$Y_x^n := \{y \in X \mid \exists \gamma \text{ Pfad der Länge } n \text{ von } x \text{ nach } y\},$$

die Menge aller von x aus durch Pfade der Länge n erreichbaren Strategieprofile, abzählbar. Denn es gilt induktiv:

IA ($n = 1$) Es ist

$$Y_x^1 = \{y \in X \mid \exists i \in I : y = (x \mid y_i)\} = \{(x \mid y_i) \mid i \in I, y_i \in Y_i\} = \bigcup_{i \in I} \{(x \mid y_i) \mid y_i \in Y_i\}$$

eine abzählbare Vereinigung (da die Spielermenge abzählbar ist) von abzählbar großen Mengen (den spieterspezifischen Strategieräumen), also selbst abzählbar groß.

IS ($< n \rightarrow n$) Es ist

$$Y_x^n = \bigcup_{y \in Y_x^{n-1}} Y_y^1$$

eine (nach Induktionsvoraussetzung) abzählbare Vereinigung abzählbar großer Mengen und daher selbst wieder abzählbar.

Folglich ist auch $Y_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_x^n$ abzählbar und besitzt daher nach Korollar 2.20 ein ordinales Potential. \square

Bemerkung 2.22. Im Gegensatz zur Charakterisierung von exakten Potentialspielen in Satz 2.10 genügt es für die Existenz eines ordinalen Potentials nicht, nur Zykel der Länge 4 zu betrachten. Voorneveld und Norde geben dafür in [VN97, Beispiel 3.1] ein Gegenbeispiel mit zwei Spielern und je drei Strategien an.

2.4.4 Verallgemeinerte ordinale Potentiale

Vollkommen analog zu Satz 2.16 erhält man unter Verwendung der Relation

$$x <_{\uparrow} y : \Longleftrightarrow \text{es gibt einen Verbesserungspfad der Länge } \geq 1 \text{ von } y \text{ nach } x$$

eine Charakterisierung der Existenz eines verallgemeinerten ordinalen Potentials:

Satz 2.23. *Ein Spiel besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn $(X, <_{\uparrow})$ reell geordnet ist.*

Zum Beweis benötigen wir die folgenden Propositionen:

Proposition 2.24. *Die Relation $<_{\uparrow}$ ist genau dann eine strikte Partialordnung, wenn Γ keine Verbesserungszykel enthält.*

Beweis. Da die Verknüpfung eines Verbesserungspfades von z nach y mit einem von y nach x einen Verbesserungspfad von z nach x ergibt, ist $<_{\uparrow}$ automatisch immer transitiv.

Ferner ist $<_{\uparrow}$ genau dann irreflexiv, wenn für alle $x \in X$ gilt, dass $x \not<_{\uparrow} x$, es also keinen Verbesserungspfad von x nach x gibt. Und letzteres entspricht gerade einem (bei x beginnenden) Verbesserungskreis. \square

Proposition 2.25. *Hat ein Spiel Γ ein verallgemeinertes ordinales Potential P , so gibt es in dessen Strategieraum X keine Verbesserungszykel.*

Beweis. Angenommen Γ enthielte einen Verbesserungszykel $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$, d.h. für alle $0 < k \leq n$ gilt $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$. Da P ein verallgemeinertes ordinales Potential ist, folgt daraus $P(x^0) > P(x^1) > \dots > P(x^n) = P(x^0)$, ein Widerspruch. Also kann es keinen solchen Verbesserungszykel geben \square

Beweis von Satz 2.23. $(X, <_{\uparrow})$ reell geordnet mit streng monotoner Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, so sieht man direkt, dass f auch ein verallgemeinertes Potential ist. Denn für $x \in X, \hat{x}_i \in X_i$ mit $c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i)$ ist $(x, (x \mid \hat{x}_i))$ ein Verbesserungspfad, also $(x \mid \hat{x}_i) <_{\uparrow} x$ und damit $f(x \mid \hat{x}_i) < f(x)$.

Haben wir hingegen ein Spiel Γ mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential P , so ist $(X, <_{\uparrow})$ reell geordnet, denn:

1. $<_{\uparrow}$ ist eine strikte Partialordnung auf X : Nach Proposition 2.25 enthält X keine Verbesserungszykel, womit wir aus Proposition 2.24 folgern können, dass $<_{\uparrow}$ tatsächlich eine strikte Partialordnung ist.
2. $(X, <_{\uparrow})$ ist reell geordnet durch die Funktion $P : X \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt nämlich $x <_{\uparrow} y$, so gibt es also einen Verbesserungspfad von y nach x . Da P ein verallgemeinertes ordinales Potential ist, nimmt es entlang dieses Pfades in jedem Schritt ab, und folglich gilt $P(y) > P(x)$. Damit ist P streng monoton auf $(X, <_{\uparrow})$. \square

Erneut können wir daraus für „kleine“ Spiele einfachere Charakterisierungen erhalten (die Beweise sind ganz analog zu denen von Korollar 2.20 und Korollar 2.21):

Korollar 2.26. *Ein Spiel mit abzählbarem Strategieraum besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es keine Verbesserungskreise enthält.*

Korollar 2.27. *Ein Spiel mit abzählbar vielen Spielern und abzählbar großen playerspezifischen Strategieräumen besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es keine Verbesserungskreise enthält.*

Beschränkt man sich hingegen auf die Klasse der endlichen Spiele, so erhält man die (auf anderem Wege) erstmals von Monderer und Shapley in [MS96b, Lemma 2.5] gezeigte Charakterisierung der Existenz von verallgemeinerten ordinalen Potentialen:

Korollar 2.28. *Ein endliches Spiel besitzt genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es die FIP besitzt.*

Beweis. In einem Spiel mit endlichem Strategieraum sind unendliche Verbesserungspfade genau die Verbesserungskreise. Damit folgt die Aussage direkt aus Korollar 2.26. \square

Bemerkung 2.29. Möchte man in den oben beschriebenen Fällen eine konkrete Potentialfunktion angeben, so kann man dies analog zu einer alternativen, konstruktiven Beweisidee für endliche Spiele aus [Mil96, Abschnitt 5] tun:

Sei dazu Γ ein Spiel mit abzählbarem Strategieraum $X := \{x^1, x^2, \dots\}$ und ohne Verbesserungszykel. Definiere die Funktion $h : X \rightarrow \mathbb{R} : x^k \mapsto 2^{-k}$ sowie für jedes Strategieprofil $x \in X$ die Menge $Y_{>x} := \{y \in X \mid \exists \text{ Verbesserungspfad von } y \text{ nach } x\}$ und mit deren Hilfe

$$P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1 - \sum_{y \in Y_{>x}} h(y)$$

Beweis. Diese Funktion ist wohldefiniert, da $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ absolut konvergiert. Sie ist außerdem ein verallgemeinertes ordinales Potential, denn gilt $c_i(x) > c_i(x \mid \hat{x}_i)$ so ist $(x, (x \mid \hat{x}_i))$ ein Verbesserungspfad. Außerdem gilt $x \notin Y_{>x}$, da es in Γ keine Verbesserungszykel gibt. Damit folgt:

$$P(x) = 1 - \sum_{y \in Y_{>x}} h(y) > 1 - \sum_{y \in Y_{>x}} h(y) - h(x) = 1 - \sum_{y \in Y_{>(x \mid \hat{x}_i)}} h(y) = P(x \mid \hat{x}_i) \quad \square$$

2.4.5 Beste-Antwort-Potentiale

Ebenfalls analog zur Charakterisierung für ordinale Potentiale zeigt Voorneveld in [Voo00, Theorem 3.1] eine solche für Beste-Antwort-Potentiale. Dazu definiert man die Äquivalenzrelation:

$$x \approx^* y : \iff \text{es gibt einen Beste-Antwort-Pfad von } x \text{ nach } y \text{ und umgekehrt}$$

und auf dem dadurch erzeugten Raum von Äquivalenzklassen $X/\approx^* := \{[x] \mid x \in X\}$ erhält man eine transitive Ordnung

$$[x] \prec^* [y] : \iff \text{Es gibt einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungspfad von } y \text{ nach } x$$

Satz 2.30. *Ein Spiel, in dem jeder Spieler zu jedem Strategieprofil wenigstens eine beste Antwort zur Verfügung hat, besitzt genau dann ein Beste-Antwort-Potential, wenn $(X/\approx^*, \prec^*)$ reell geordnet ist.*

Proposition 2.31. *Die Relation \prec^* ist genau dann eine strikte Partialordnung auf X/\approx^* , wenn Γ keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel enthält.*

Beweis. Für ein Strategieprofil $x \in X$ gilt genau dann $[x] \prec^* [x]$ gilt, wenn es einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungspfad von x nach x gibt, was gerade einem schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel entspricht. \square

Proposition 2.32. *Hat ein Spiel Γ ein Beste-Antwort-Potential P , so gibt es in dessen Strategieraum X keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel.*

Beweis. Angenommen Γ enthielte einen Verbesserungszykel $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$ wäre ein schwacher Beste-Antwort-Verbesserungszykel in Γ , so gilt für alle $0 < k \leq n$:

$$c_{i(k)}(x^k) = \min_{\hat{x}_{i(k)} \in X_{i(k)}} c_{i(k)}(x^{k-1} \mid \hat{x}_i) \leq c_{i(k)}(x^{k-1})$$

und, da P ein Beste-Antwort-Potential ist, ebenso

$$P(x^k) = \min_{\hat{x}_{i(k)} \in X_{i(k)}} P(x^{k-1} \mid \hat{x}_i) \leq P(x^{k-1}).$$

Ferner gilt für ein solches k sogar $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$, also auch $P(x^k) < P(x^{k-1})$ (da $x_{i(k)}^{k-1}$ keine beste Antwort auf x^{k-1} ist). Zusammen folgt daher

$$P(x^0) \leq P(x^1) \leq \dots \leq P(x^k) < P(x^{k-1}) \leq \dots \leq P(x^n) = P(x^0).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Also kann es keinen solchen Verbesserungszykel geben. \square

Beweis von Satz 2.30. Sei zunächst $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Beste-Antwort-Potential eines Spiels Γ . Dann gibt es in Γ Proposition 2.32 keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel und daher ist \prec^* nach Proposition 2.31 eine strikte Partialordnung auf X/\approx^* .

Ferner ist $(X/\approx^*, \prec^*)$ reell geordnet. Definiere dazu die Abbildung $f : X/\approx^* \rightarrow \mathbb{R} : [x] \mapsto P(x)$. Diese ist wohldefiniert, denn ist $y \in [x]$, so gibt es also Beste-Antwort-Pfade von x nach y und umgekehrt. Zusammen bilden diese einen Beste-Antwort-Zykel und da es keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel in Γ gibt, muss in diesem Zykel (und damit bereits in den beiden Pfaden) in jedem Schritt Gleichheit gelten. Insbesondere folgt damit $P(x) = P(y)$.

Schließlich ist diese Abbildung streng monoton, denn gilt $[x] \prec_\uparrow [y]$, so gibt es einen schwachen Beste-Antwort-Verbesserungspfad γ von y nach x . Damit folgt analog zum Beweis von Proposition 2.32 $P(x) < P(y)$.

Ist umgekehrt Γ ein Spiel, für das $(X/\approx^*, \prec^*)$ reell geordnet ist mit Abbildung $f : X/\approx^* \rightarrow \mathbb{R}$, so definiere $P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f([x])$. Dies ist ein beste Antwort-Potential, denn es gilt $\arg \min_{x'_i \in X_i} c_i(x \mid x'_i) = \arg \min_{x'_i \in X_i} P(x \mid x'_i)$:

„ \subseteq “: Ist $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x \mid \hat{x}_i)$, so ist also \hat{x}_i insbesondere auch eine beste Antwort auf alle Strategieprofile $(x \mid x'_i)$ für $x'_i \in X_i$.

1. Fall: Gilt $c_i(x \mid \hat{x}_i) < c_i(x \mid x'_i)$, so ist $((x \mid x'_i), (x \mid \hat{x}_i))$ ein Beste-Antwort-Verbesserungspfad, also $[(x \mid \hat{x}_i)] \prec^* [(x \mid x'_i)]$ und damit $P(x \mid \hat{x}_i) = f([(x \mid \hat{x}_i)]) < f([(x \mid x'_i)]) = P(x \mid x'_i)$.

2. Fall: Gilt $c_i(x \mid \hat{x}_i) = c_i(x \mid x'_i)$, so sind sowohl $((x \mid x'_i), (x \mid \hat{x}_i))$ als auch $((x \mid \hat{x}_i), (x \mid x'_i))$ Beste-Antwort-Pfade und folglich $(x \mid x'_i) \approx^* (x \mid \hat{x}_i)$. Somit folgt $P(x \mid \hat{x}_i) = f([(x \mid \hat{x}_i)]) = f([(x \mid x'_i)]) = P(x \mid x'_i)$.

Insgesamt gilt also für alle $x'_i \in X_i$, dass $P(x \mid \hat{x}_i) \leq P(x \mid x'_i)$ und daher $\hat{x}_i \in \arg \min_{x'_i \in X_i} P(x \mid x'_i)$.

„ \supseteq “: Sei $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} P(x \mid \hat{x}_i)$. Angenommen es wäre $\hat{x}_i \notin \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x \mid \hat{x}_i)$, d.h. es gäbe es also eine beste Antwort $x'_i \in X_i$ auf x mit $c_i(x \mid x'_i) < c_i(x \mid \hat{x}_i)$. Entsprechend wäre $((x \mid \hat{x}_i), (x \mid x'_i))$ ein (schwacher) Beste-Antwort-Verbesserungspfad und daher $[(x \mid x'_i)] \prec^* [(x \mid \hat{x}_i)]$. Somit wäre nach Definition von P auch $P(x \mid x'_i) =$

$f([x \mid x'_i]) < f([x \mid \hat{x}_i]) = P(x \mid \hat{x}_i)$, im Widerspruch zu $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} P(x \mid \hat{x}_i)$. Also gibt es kein solches x'_i und es gilt $\hat{x}_i \in \arg \min_{\hat{x}_i \in X_i} c_i(x \mid \hat{x}_i)$. \square

Bemerkung 2.33. In [Voo00] wird Satz 2.30 für allgemeine Spiele (also ohne die Zusatzvoraussetzung der Existenz bester Antworten) formuliert. Es ist allerdings nicht klar wie der Beweis von $\arg \min_{x'_i \in X_i} c_i(x \mid x'_i) \supseteq \arg \min_{x'_i \in X_i} P(x \mid x'_i)$ in der Rückrichtung ohne diese Voraussetzung gelten kann. Denn wenn x'_i an dieser Stelle nur eine bessere, aber nicht notwendigerweise beste Antwort sein muss, so ist $((x \mid \hat{x}_i), (x \mid x'_i))$ im Allgemeinen kein Beste-Antwort-Pfad und daher auch nicht zwangsläufig $[(x \mid x'_i)] \prec^* [(x \mid \hat{x}_i)]$.

Das folgende Beispiel enthält genau einen solchen Fall und ist damit zwar kein Gegenbeispiel zu dem in [Voo00] gezeigten Satz, aber zu dem dort geführten Beweis hierzu:

Beispiel 2.34. Wir betrachten das 1-Personenspiel $\Gamma := (\{*\}, \mathbb{Z}, (\text{id}))$. Dieses hat zwar offenbar ein exaktes und damit erst recht Beste-Antwort-Potential, es steht aber trotzdem im Widerspruch zu obigem Beweis. Da es keinerlei Beste Antworten besitzt, ist nämlich $\mathbb{Z}/\approx^* = \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto 0$ zeigt, dass der Strategieraum reell geordnet ist. Aber im Gegensatz zur Aussage in obigem Beweis liefert f kein Beste-Antwort-Potential für Γ .

2.4.6 Nash-Potentiale

Die Existenz eines verallgemeinerten Nash-Potentials (und gleichzeitig auch der anderen beiden Nash-Potentiale) schließlich lässt sich für endliche Spiele trivialerweise dadurch charakterisieren, dass das entsprechende Spiel ein Nash-Gleichgewicht besitzt. Und unendliche Spiele besitzen immer alle NashPotentiale.

Beobachtung 2.35. Wie bereits in Beobachtung 1.3 festgestellt ist der Strategieprofilraum $X := \prod_{i \in I} X_i$ eines Spiels genau dann endlich, wenn alle Strategiemengen X_i endlich sind und nur endlich viele davon mehr als eine Strategie enthalten. Umgekehrt muss ein Spiel mit unendlich großem Strategieprofilraum mindestens eine unendlich große Strategiemenge oder aber unendlich viele Spieler mit zwei oder mehr Strategien haben.

In beiden Fällen enthält automatisch jede Pfadzusammenhangskomponente einen Pfad unendlicher Länge ohne Wiederholungen: Entweder indem ein Spieler unendlich oft seine Strategie wechselt oder unendlich viele verschiedene Spieler nacheinander je einmal ihre Strategie ändern. Insbesondere sind in diesem Fall auch alle Pfadzusammenhangskomponenten unendlich groß.

Denn auf jeder Pfadzusammenhangskomponente, welche mindestens ein Nash-Gleichgewicht enthält, können wir folgendes lokale Nash-Potential und Nash-Potential definieren:

$$P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \min \{ |\gamma| \mid \gamma \text{ (endlicher) Pfad von } x \text{ zu einem Nash-Gleichgewicht} \}$$

Denn die Nash-Gleichgewichte sind nun genau die Strategieprofile mit $P(x) = 0$ und für alle anderen Strategieprofile fällt das Potential entlang jedes kürzesten Pfades zum nächsten

Nash-Gleichgewicht in jedem Schritt strikt ab (befindet sich als nicht in einem (lokalen) Minimum).

Für unendliche Pfadzusammenhangskomponenten *ohne* Nash-Gleichgewicht können wir ferner wie folgt ein lokales Nash-Potential und Nash-Potential finden. Wir wählen einen festen, unendlichen Pfad $\hat{\gamma} = (x^0, x^1, \dots)$ in dieser Zusammenhangskomponente, welcher kein Strategieprofil mehrfach enthält. Dann definieren wir:

$$P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1/k, & x = x^{k-1} \text{ auf dem Pfad } \hat{\gamma} \\ \min \{ |\gamma| \mid \gamma \text{ Pfad von } x \text{ zu einem Profil auf } \hat{\gamma} \}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion besitzt keine (lokalen) Minima und erfüllt daher trivialerweise alle Bedingungen an die verschiedenen Nash-Potentiale.

Nicht einmal ein verallgemeinertes Nash-Potential besitzt ein Spiel hingegen dann, wenn es eine endliche Pfadzusammenhangskomponente ohne Nash-Gleichgewichte enthält⁴. Denn gäbe es ein solches, so würde es auch ein (globales) Minimum annehmen und dieses müsste folglich einem Nash-Gleichgewicht in der Zusammenhangskomponente entsprechen. Insgesamt erhalten wir damit die folgende Charakterisierung:

Satz 2.36. *Ein Spiel besitzt genau dann ein Nash-Potential/verallgemeinertes/lokales Nash-Potential, wenn alle endlichen Pfadzusammenhangskomponenten mindestens ein Nash-Gleichgewicht besitzen.*

2.4.7 Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung aller in diesem Abschnitt beschriebenen Charakterisierungen findet sich in Tabelle 2

⁴Tatsächlich besitzt ein Spiel genau dann eine (und in diesem Fall auch nur eine) endliche Pfadzusammenhangskomponente, wenn es selbst schon endlich ist. Denn um einen unendlichen Strategieprofilraum besitzen zu können, muss es mindestens einen Spieler mit unendlichem Strategieraum oder unendlich viele Spieler mit mehr als einer Strategie geben. Beides führt automatisch dazu, dass alle Pfadzusammenhangskomponenten unendlich groß sind.

Ein Spiel Γ hat ein...

exaktes Potential	\iff	f.a. 4-Zykel γ ist $\delta(\gamma) = 0$	(Satz 2.10)
	\iff	die Kostenfunktionen von Γ lassen sich als Summe der Kostenfunktionen eines Dummyspiels und eines Koordinationsspiels darstellen.	(Satz 2.11)
gewichtetes Potential	\iff	es gibt einen positiven Gewichtsvektor w , sodass f.a. 4-Zykel γ gilt $\delta_w(\gamma) = 0$	(Satz 2.12)
	\iff	es gibt einen positiven Gewichtsvektor w , sodass $\Gamma_{1/w}$ ein exaktes Potential besitzt.	(Beob. 2.13)
skaliertes Potential	\iff	die Kostenfunktionen von Γ lassen sich als Summe der Kostenfunktionen eines Dummyspiels und eines skalierten Koordinationsspiels darstellen.	(Satz 2.14)
ordinales Potential	\iff	$(X/\approx, \prec_+)$ ist reell geordnet	(Satz 2.16)
-f. I und X_i abzählbar:	\iff	Γ enthält keine schwachen Verbesserungszykel	(Kor. 2.21)
verallg. ord. Potential	\iff	$(X, <_+)$ ist reell geordnet	(Satz 2.23)
-f. I und X_i abzählbar:	\iff	Γ enthält keine Verbesserungszykel	(Kor. 2.27)
-f. Γ endlich:	\iff	Γ hat FIP	(Kor. 2.28)
Beste-Antwort-Potential	\Leftarrow	es existieren immer beste Antworten, Γ enthält keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel und $(X/\approx^*, \prec^*)$ ist reell geordnet	(Satz 2.30)
	\Rightarrow	Γ enthält keine schwachen Beste-Antwort-Verbesserungszykel und $(X/\approx^*, \prec^*)$ ist reell geordnet	(Satz 2.30)
(lok/verallg.) Nash-Potential	\iff	jede endliche Pfadzusammenhangskomponente besitzt mindestens ein Nash-Gleichgewicht	(Satz 2.36)

Tabelle 2: Übersicht der Charakterisierungen von Potentialen aus diesem Abschnitt

3 Morphismen und Isomorphismen von Spielen

Wie wir im vorherigen Kapitel gesehen haben definieren Potentiale ein Koordinationsspiel, welches in einer „gewissen Beziehung“ zu dem Ausgangsspiel steht (etwa die gleichen Nash-Gleichgewichte besitzt). Diese Beziehung wollen wir nun mit Hilfe eines Morphismus bzw. eines Isomorphismus zwischen den beiden Spielen präziser beschreiben. Die Eigenschaften, die Ausgangs- und Koordinationsspiel gemeinsam haben, sind dann genau die, die von den jeweiligen (Iso-)Morphismen bewahrt werden. Umgekehrt ist es auch möglich zuerst eine bestimmte Art von Isomorphismus zu definieren und daraus dann einen neuen Potentialbegriff zu erhalten wie das beispielsweise in [MU04, Definitionen 5/6] getan wird.

Darüber hinaus helfen Morphismen dabei auch andere Beziehungen zwischen verschiedenen Spielen zu verstehen. Beispielsweise wird die von Monderer und Shapley gefundene Äquivalenz von Auslastungsspielen und Spielen mit exaktem Potential durch einen passenden Isomorphiebegriff beschrieben und in Abschnitt 4 werden wir noch weitere Beispiele für derartige Verbindungen kennenlernen. Schließlich ist es aus kategorientheoretischer Sicht auch allgemein wichtig die Morphismen der Kategorie, in der man arbeitet, zu verstehen, da diese die Struktur dieser Kategorie festlegen und etwa dazu verwendet werden abstrakte Konstruktionen durchzuführen. Diesen Ansatz werden wir hier allerdings nicht fortführen und verweisen dazu auf [Lap99].

3.1 Definitionen

Definition 3.1. Zu zwei gegebenen Spielen $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$ und $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$ kann man wie folgt einen *Morphismus* $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ zwischen diesen beiden definieren:

- Eine Abbildung $\sigma : J \rightarrow I$ zwischen den Spielermengen, die *Spielerabbildung*, und
- für jeden Spieler $j \in J$ eine Abbildung $\phi_j : X_{\sigma(j)} \rightarrow Y_j$ seiner Strategien, die *Strategieabbildungen*.

Ist $(\tau, \psi) : \Delta \rightarrow E$ ein weiterer Morphismus, so ist die Verknüpfung der beiden Morphismen $(\sigma, \phi) \circ (\tau, \psi) : \Gamma \rightarrow E = (K, Z, (e_k)_{k \in K})$ gegeben durch

- die Spielerabbildung $\sigma \circ \tau : K \rightarrow I$ und
- die Strategieabbildungen $\psi_k \circ \phi_{\tau(k)} : X_{\sigma(\tau(k))} \rightarrow Z_k$.

(σ, ϕ) heißt *Isomorphismus von Spielen*, wenn er einen inversen Morphismus besitzt, d.h. einen Morphismus $(\tau, \psi) : \Delta \rightarrow \Gamma$ mit $(\sigma, \phi) \circ (\tau, \psi) = (\text{id}, \text{id})$ und $(\tau, \psi) \circ (\sigma, \phi) = (\text{id}, \text{id})$, wobei (id, id) , der Identitätsmorphismus auf dem jeweiligen Spiel, durch die Identität als Spielerabbildung und Identitäten für alle Strategieabbildungen gegeben ist.

Diese Art und Weise Abbildungen zwischen zwei Spielen zu definieren ergibt sich aus dem - noch deutlich allgemeineren - Ansatz hierzu von Lapitsky in [Lap99]⁵. Wir orientieren uns

⁵Lapitsky lässt in seiner Definition allerdings alle beteiligten Abbildungen in die jeweils umgekehrte Richtung gehen. Wir betrachten hier also gewissermaßen die zur dort definierten duale Kategorie.

dabei vor allem an dem dort in Kapitel 4 vorgestellten Morphismusbegriff für topologische Spiele (in denen die Spielermenge ein topologischer Raum und der Strategieraum eine Garbe über diesem ist) bzw. dessen Spezialisierung für Spiele für diskrete Spielermengen aus Kapitel 5.

In dortigen Kontext ergibt es sich etwas natürlicher, dass die Abbildung zwischen den Spielermengen in die entgegengesetzte Richtung zu denen zwischen den Strategieräumen verläuft. Eine andere, auch im hier vorliegenden Kontext sinnvolle Begründung hierfür liefert aber die folgende Bemerkung:

Bemerkung 3.2. Alle Strategieabbildungen ϕ_j zusammen induzieren eine *Strategieprofilabbildung*

$$\phi : X \rightarrow Y : x = (x_i)_{i \in I} \mapsto \phi(x) := \left(\phi_j(x_{\sigma(j)}) \right)_{j \in J}$$

Würde die Abbildung σ zwischen den Spielermengen in die andere, „natürlichere“ Richtung verlaufen (also von I nach J), so müssten wir zusätzlich fordern, dass diese bijektiv ist, damit in der obigen Form Strategieprofile auf Strategieprofile abgebildet werden (vgl. etwa [Jim14]). Denn nur dann wäre $\phi(x) := (\phi_i(x_i))$ wieder ein vollständiges und wohldefiniertes Strategieprofil in Y .

Bemerkung 3.3. Möchte man Spieler- und Strategieabbildungen in die gleiche Richtung haben und trotzdem Morphismen zwischen Spielen mit unterschiedlich großen Spielermengen erlauben, so kann man einem alternativen Ansatz zur Definition von Morphismen von Spielen folgen, welcher von Vorob’ev in [Vor94, Kapitel 1, Abschnitt 1.14] verwendet wird: Hierbei wird als Spielerabbildung eine mengenwertige Abbildung verwendet, die also einen einzelnen Spieler nicht zwangsläufig wieder auf einen einzelnen Spieler abbildet, sondern gleich auf eine ganze Teilmengen der Bildspielermenge. Von diesem Morphemtyp werden dann verschiedene „approximativ kostenerhaltende“ Varianten betrachtet und die sich dadurch ergebende Kategorie untersucht.

Notation 3.4. In den meisten Fällen wird die Abbildung zwischen den Spielermengen allerdings doch bijektiv sein. In diesen Fällen werden wir zur Vereinfachung der Notation ohne Einschränkung davon ausgehen, dass die Spielermengen beider an der Abbildung beteiligten Spiele bereits gleich und geeignet permutiert sind, sodass σ die Identitätsabbildung ist. Damit kann diese in der Notation weggelassen werden und die Abbildung zwischen den Spielen besteht nur noch aus den Abbildungen $\phi_i : X_i \rightarrow Y_i$ zwischen den Strategieräumen.

Morphismen der in Definition 3.1 beschriebenen Form nehmen noch keinerlei Rücksicht auf die Kostenfunktionen der jeweiligen Spiele. Da gerade diese aber in der Regel die interessierenden Eigenschaften eines Spiels (wie beispielsweise Gleichgewichte) festlegen, werden derartige Abbildungen im Allgemeinen noch wenig Aussagen über die beteiligten Spiele ermöglichen. So besagt der durch diese Art Abbildungen induzierte Isomorphismebegriff bspw. nur, dass zwei Spiele Spieler- und Strategiemengen gleicher Kardinalität besitzen.

Sinnvollerweise sollten Morphismen zwischen Spielen folglich noch mehr der Struktur eines Spiels erhalten, insbesondere in irgendeiner Form „verträglich“ mit den Kostenfunktionen sein. Je nach dem, welche Eigenschaften die Morphismen (und insbesondere die

dadurch induzierten Isomorphismen) erhalten sollen, erhält man so unterschiedlich starke Verträglichkeitsbedingungen. Einige Möglichkeiten dafür werden wir nun kennenlernen.

Eine relative starke Forderung ist die, dass Morphismen *kostenerhaltend* sein müssen, wie sie etwa in [Mil13, Abschnitt 2.1] gestellt wird:

Definition 3.5. Ein Morphismus (σ, ϕ_j) von $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$ nach $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$ heißt *kostenerhaltend*, wenn für alle Strategieprofile $x \in X$ und jeden Spieler $j \in J$ gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) = d_j(\phi(x))$$

Ist ein solcher Morphismus gleichzeitig ein Isomorphismus, so nennen wir Γ und Δ *äquivalent*.

Bemerkung 3.6. Zwei Spiele sind also genau dann äquivalent, wenn sie sich ausschließlich durch Umbenennung der Strategien ineinander überführen lassen. In [MS96b, S. 133] wird dies als Isomorphie von Spielen bezeichnet.

Beispiel 3.7. Ein Spiel $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$ ist genau dann ein Koordinationsspiel, wenn es einen kostenerhaltenden Morphismus mit surjektiver Strategieprofilabbildung von einem 1-Personenspiel nach Δ gibt.

Ist nämlich Δ ein Koordinationsspiel, so definiert man ein 1-Personenspiel $K := (\{*\}, X, (c_*))$ mit $X = X_* := Y$ und $c_*(y) := d_j(y)$ für einen beliebigen, aber festen Spieler $\hat{j} \in J$. Ferner definiert man den folgenden Morphismus $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Delta$:

$$\begin{array}{lll} \sigma : & J \rightarrow \{*\} : & j \mapsto * \\ \phi_j : & X_* \rightarrow Y_j : & y \mapsto y_j \end{array}$$

Dieser ist kostenerhaltend, denn für jedes Strategieprofil $y \in X = Y$ und jeden Spieler $j \in J$ gilt:

$$c_{\sigma(j)}(y) = c_*(y) = d_{\hat{j}}(y) \stackrel{\Gamma \text{ Koord.spiel}}{=} d_j(y) = d_j(\phi(y))$$

Zudem ist offenbar die Strategieprofilabbildung ϕ surjektiv.

Sind umgekehrt ein 1-Personenspiel $K = (\{*\}, X, (c_*))$ sowie ein kostenerhaltender Morphismus $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Delta$ mit surjektiven Strategieabbildungen gegeben, dann ist Δ bereits ein Koordinationsspiel. Denn aufgrund der Surjektivität von ϕ gibt es zu jedem Strategieprofil $y \in Y$ ein Strategieprofil $x \in X$ mit $\phi(x) = y$. Da (σ, ϕ) außerdem kostenerhaltend ist, folgt dann für je zwei Spieler $j, \hat{j} \in J$:

$$d_j(y) = d_{\hat{j}}(\phi(x)) = c_{\sigma(\hat{j})}(x) = c_*(x) = c_{\sigma(j)}(x) = d_j(\phi(x)) = d_j(y)$$

Also ist Γ tatsächlich ein Koordinationsspiel.

Dieses Beispiel formalisiert die Intuition, dass in einem Koordinationsspiel alle Spieler ein gemeinsames Ziel haben und daher zusammen „wie ein Spieler“ spielen (d.h. das Koordinationsspiel kann durch ein 1-Personenspiel simuliert werden).

In [Lap99] stellt Lapitsky, Definition 4.1 folgende schwächere Verträglichkeitsbedingung:

Definition 3.8. Ein Morphismus (σ, ϕ_j) von $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$ nach $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$ zusammen mit monotonen *Kostenabbildung* $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für jeden Spieler $j \in J$ heißt *monoton*, wenn für jeden Spieler das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \downarrow c_{\sigma(j)} & & \downarrow d_j \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f_j} & \mathbb{R} \end{array}$$

Ein solcher Morphismus heißt *monotoner Isomorphismus*, wenn er ein Isomorphismus ist und auch die Verknüpfung der Kostenabbildungen die Identität gibt.

Bemerkung 3.9. Gibt es eine derartige Abbildung f_j für einen Spieler $j \in J$, so gilt für je zwei Strategieprofile $x, \hat{x} \in X$:

$$c_{\sigma(j)}(x) \leq c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \implies d_j(\phi(x)) \leq d_j(\phi(\hat{x})) \quad (1)$$

Ist umgekehrt diese Bedingung für je zwei Strategieprofile eines Spielers $j \in J$ erfüllt und zudem $d_j(\phi(X)) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt oder $c_{\sigma(j)}(X) \subseteq \mathbb{R}$ in beide Richtungen unbeschränkt, so gibt es eine solche Abbildung f_j .

Beweis. Existiert eine Abbildung f_j , so gilt für zwei Strategieprofile $x, \hat{x} \in X$ mit $c_{\sigma(j)}(x) \leq c_{\sigma(j)}(\hat{x})$:

$$d_j(\phi(x)) = f_j \circ c_{\sigma(j)}(x) \leq f_j \circ c_{\sigma(j)}(\hat{x}) = d_j(\phi(\hat{x}))$$

Ist $d_j(\phi(X)) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt oder $c_{\sigma(j)}(X) \subseteq \mathbb{R}$ in beide Richtungen unbeschränkt, so können wir folgende Abbildung $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren:

$$f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} \sup \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X \}, & \nexists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \geq t \\ \inf \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X, c_{\sigma(j)}(x) \geq t \}, & t \geq 0 \text{ und } \exists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \geq t \\ \sup \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X, c_{\sigma(j)}(x) \leq t \}, & t < 0 \text{ und } \exists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \leq t \\ \inf \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X \}, & \nexists x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \leq t \end{cases}$$

Gilt Eigenschaft (1), so ist diese Abbildung monoton und es gilt $f_j \circ c_{\sigma(j)} = d_j \circ \phi$, denn für ein festes Strategieprofil $\hat{x} \in X$ mit $c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \geq 0$ gilt dann:

$$\forall x \in X : c_{\sigma(j)}(x) \geq c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \xrightarrow{(1)} d_j(x) \geq d_j(\hat{x})$$

Also nach Definition von f_j :

$$f_j \circ c_{\sigma(j)}(\hat{x}) = f_j(c_{\sigma(j)}(\hat{x})) = \inf \{ d_j(\phi(x)) \mid x \in X, c_{\sigma(j)}(x) \geq c_{\sigma(j)}(\hat{x}) \} = d_j(\phi(\hat{x})) = d_j \circ \phi(\hat{x})$$

Analog folgt dies für Strategieprofile $\hat{x} \in X$ mit $c_{\sigma(j)}(\hat{x}) < 0$. \square

Der Begriff eines monotonen Isomorphismus liefert uns nun das erste Beispiel eines Zusammenhangs zwischen Morphismen und Potentialen:

Proposition 3.10. *Ist ein Spiel monoton isomorph zu einem Koordinationsspiel, so besitzt es ein skaliertes Potential.*

Beweis. Sei $(\sigma, \phi) : \Gamma = (I, X, (c_i)) \rightarrow K = (\{*\}, Y, (d_*))$ ein solcher monotoner Isomorphismus. Dann gibt es folglich monotone Abbildungen f_j und g_i , sodass alle Diagramme der folgenden Form kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{\phi} & Y & \xrightarrow{\phi^{-1}} & X \\
 \downarrow c_i & & \downarrow d_* & & \downarrow c_i \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f_{\sigma^{-1}(i)}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g_i} & \mathbb{R} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id} & &
 \end{array}$$

Es ist $P : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d_* \circ \phi(x)$ ein skaliertes Potential mit Skalierungsfunktionen g_i , denn es gilt allgemein

$$g_i \circ d_* \circ \phi = c_i \circ \phi^{-1} \circ \phi = c_i \circ \text{id} = c_i$$

und damit im Besonderen

$$g_i \circ d_* \circ \phi(x) - g_i \circ d_* \circ \phi(x \mid \hat{x}_i) = c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i).$$

Ferner sind die g_i nach Voraussetzung monoton und wegen $f_{\sigma^{-1}(i)} \circ g_i = \text{id}$ injektiv, also insgesamt streng monoton. \square

Korollar 3.11. *Sei $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Gamma$ ein monotoner Morphismus mit surjektiver Strategieprofilabbildung und bijektiven Kostenabbildungen von einem 1-Personenspiel K nach Γ . Dann besitzt Γ ein skaliertes Potential.*

Beweis. Wir konstruieren ein zu Γ monoton isomorphes Spiel Δ und einen kostenerhaltenden Morphismus mit surjektiver Strategieprofilabbildung von K nach Δ . Mit Beispiel 3.7 ist Δ dann ein Koordinationsspiel und nach Proposition 3.10 besitzt Γ folglich ein skaliertes Potential. Seien also $\Gamma = (I, X, (c_i))$ und $K = (\{*\}, Z_*, (e_*))$ die gegebenen Spiele und $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die (bijektiven) Kostenabbildungen zu (σ, ϕ) . Dann definieren wir $\Delta := (I, X, (f_i^{-1} \circ c_i)_{i \in I})$. Nun hat $(\sigma, \phi) : K \rightarrow \Delta$ nach Voraussetzung eine surjektive Strategieprofilabbildung und ist ferner kostenerhaltend, denn für jedes $z \in Z_*$ gilt:

$$f_i^{-1} \circ c_i \circ \phi(z) = f_i^{-1} \circ f_i \circ e_*(z) = e_*(z) = e_{\sigma(i)}(z)$$

Weiter sind $(\text{id}, \text{id}) : \Delta \rightarrow \Gamma$ und die Umkehrabbildung $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow \Delta$ monoton, denn

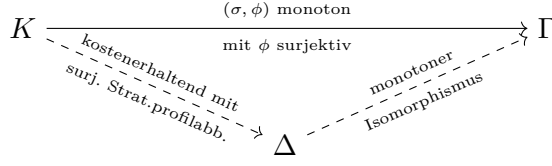


Abbildung 3: Die in diesem Beweis verwendeten Spiele und Morphismen.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{id}} & X \\
 f_i^{-1} \circ c_i \downarrow & & \downarrow c_i \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f_i} & \mathbb{R}
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{\text{id}} & X \\
 f_i^{-1} \circ c_i \downarrow & & \downarrow c_i \\
 \mathbb{R} & \xleftarrow{f_i^{-1}} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

kommutieren offenbar. Also sind Δ und Γ tatsächlich monoton isomorph. \square

Dies ist also ein Beispiel dafür, wie man eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials durch die Existenz eines passenden Isomorphismus zu einem Koordinationsspiel ausdrücken kann. Allerdings ist die Verträglichkeitsbedingung an monotone Morphismen noch zu stark um auf diesem Weg auch eine notwendige Bedingung für die Existenz eines skalierten Potentials zu erhalten. Dies liegt daran, dass hier eine globale Monotonie gefordert wird, während die meisten Potentiale lediglich lokale Monotonie benötigen.

Beispiel 3.12. Das folgende Spiel Γ besitzt ein exaktes (und damit erst recht skaliertes) Potential P .

$$\Gamma : \quad \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & l & r \\ \hline t & (1,0) & (0,1) \\ \hline \end{array}}{\quad} \quad \quad P : \quad \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & l & r \\ \hline t & 0 & 1 \\ \hline \end{array}}{\quad}$$

Gleichzeitig kann Γ aber nicht monoton isomorph zu einem Koordinationsspiel sein. Denn, wie wir bereits gesehen haben, müssten die Kostenabbildungen f_i eines solchen Isomorphismus sogar streng monoton sein. Dadurch erhielten wir die beiden einander widersprechenden Anforderungen an die gemeinsame Kostenfunktion d des hypothetischen Koordinationsspiels:

$$c_1(t,l) > c_1(t,r) \implies f_1(c_1(t,l)) > f_1(c_1(t,r)) \implies d(\phi(t,l)) > d(\phi(t,r))$$

und

$$c_2(t,l) < c_2(t,r) \implies f_2(c_2(t,l)) < f_2(c_2(t,r)) \implies d(\phi(t,l)) < d(\phi(t,r))$$

Wir schränken daher die Verträglichkeitsbedingung auf Nachbarschaften ein, ersetzen Monotonie durch strenge Monotonie und kommen so zum Begriff eines skalierten Morphismus. Analog hierzu lassen sich auch für die anderen Potentialbegriffe passende Begriffe eines Morphismus (und damit eines Isomorphismus) definieren - wie das etwa Milchtaich in [Mil13, Abschnitt 2.1] für exakte Potentiale tut⁶.

⁶Milchtaich bezeichnet zwei exakt isomorphe Spiele dann als „ähnlich“.

Definition 3.13. Ein Morphismus (σ, ϕ) von $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$ nach $\Delta = (J, Y, (d_j)_{j \in J})$ heißt

- *exakt*, wenn für alle Strategieprofile $x \in X$, Spieler $j \in J$ und Strategien $\hat{x}_{\sigma(j)}$ gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = d_j(\phi(x)) - d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$$

- *gewichtend*, wenn es einen Vektor $(w_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^J$ gibt, sodass für alle Strategieprofile $x \in X$, Spieler $j \in J$ und Strategien $\hat{x}_{\sigma(j)}$ gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = w_j \cdot (d_j(\phi(x)) - d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})))$$

- *skalierend*, wenn es streng monotone Funktionen f_j gibt, sodass für alle Strategieprofile $x \in X$, Spieler $j \in J$ und Strategien $\hat{x}_{\sigma(j)}$ gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = f_j(d_j(\phi(x))) - f_j(d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})))$$

- *ordinal*, wenn für alle Strategieprofile $x \in X$, Spieler $j \in J$ und Strategien $\hat{x}_{\sigma(j)}$ gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) < c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) \implies d_j(\phi(x)) < d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$$

Gilt die Implikation auch in die umgekehrte Richtung, so bezeichnen wir den Morphismus als *biordinal*.

- *beste Antwort-erhaltend*, wenn für alle Spieler $j \in J$ und Strategieprofile $x \in X$ gilt:

$$\phi_j(\arg \min_{x'_{\sigma(j)} \in X_{\sigma(j)}} c_{\sigma(j)}(x' \mid x_{\sigma(j)})) \subseteq \arg \min_{y_j \in Y_j} d_j(\phi(x) \mid y_j)$$

Ein exakter/gewichteter/... Morphismus heißt *exakter/gewichteter/... Isomorphismus*, wenn er ein Isomorphismus ist und der inverse Morphismus ebenfalls exakt/gewichtet/... ist.

Bemerkung 3.14. Ist ein Morphismus exakt/gewichtet und ein Isomorphismus so ist er automatisch ein exakter/gewichteter Isomorphismus (analog etwa zu Gruppenhomomorphismen). Bei skalierenden, ordinalen oder Beste-Antwort-Morphismen muss zusätzlich geprüft werden, ob auch der inverse Morphismus ordinal bzw. Beste-Antwort ist (analog beispielsweise zu stetigen Abbildungen).

Beispiel 3.15. Für den Fall ordinaler bzw. Beste-Antwort-Morphismen betrachten wir die Spiele

$$\Gamma := (\{*\}, \{t, b\}, (c_*)) \text{ mit } c_*(t) := 0, c_*(b) := 0$$

und

$$\Delta := (\{*\}, \{t, b\}, (d_*)) \text{ mit } d_*(t) := 0, d_*(b) := 1.$$

Dann ist $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ein ordinaler, aber kein Beste-Antwort-Morphismus, während $(\text{id}, \text{id}) : \Delta \rightarrow \Gamma$ ein Beste-Antwort-, aber kein ordinaler Morphismus ist.

Beispiel 3.16. Für skalierte Morphismen betrachten wir die folgenden beiden 2-Personenspiele:

		l	r			l	r
$\Gamma :$	t	(0,0)	(0,0)	$\Delta :$	t	(0,0)	(2,0)
	b	(1,1)	(1,1)		b	(1,2)	(4,2)

Dann ist die Abbildung $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ein skaliertes Morphismus mit Skalierungsfunktionen

$$f_1(0) = 0, \quad f_1(1) = 1, \quad f_1(2) = 2, \quad f_1(4) = 3 \quad \text{und} \quad f_2 := \text{id}.$$

Der Morphismus in die umgekehrte $(\text{id}, \text{id}) : \Delta \rightarrow \Gamma$ ist hingegen kein skaliertes Morphismus.

Beobachtung 3.17. Das Inverse eines Isomorphismus, welcher zudem ein skaliertes Morphismus ist, ist also nicht zwangsläufig selbst wieder skaliert. Zumindest ist das Inverse aber noch ordinal und somit ein ordinaler Isomorphismus (das ergibt sich direkt aus der strengen Monotonie der Skalierungsfunktionen).

Während, wie man leicht zeigen kann, die Verknüpfung zweier kostenerhaltender Morphismen wieder einen kostenerhaltenden Morphismus ergibt und die zweier monotonen wieder einen monotonen, ist dies bei exakten/gewichteten/... Morphismen im Allgemeinen nicht der Fall:

Beispiel 3.18. Betrachte die folgenden drei 1- bzw. 2-Personenspiele:

- $\Gamma := (\{1\}, \{t, b\}, c_1)$, wobei die Kostenfunktion c_1 wie folgt definiert ist:

$$c_1(t) = 0, c_1(b) = 1$$

- $\Delta := (\{1, 2\}, \{t, b\} \times \{l, r\}, (d_1, d_2))$ mit Kostenfunktionen definiert durch folgende Auszahlungsmatrix (mit Einträgen $(d_1(-), d_2(-))$):

	l	r
t	(0,0)	(1,0)
b	(0,1)	(1,1)

- $E := (\{1, 2\}, \{t, b\} \times \{l, r\}, (e_1, e_2))$ mit Kostenfunktionen definiert durch folgende Auszahlungsmatrix (mit Einträgen $(e_1(-), e_2(-))$):

	l	r
t	(1,1)	(0,1)
b	(1,0)	(0,0)

Dann sind sowohl die Abbildung $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ mit $\sigma(1) = \sigma(2) = 1$ und $\phi_1(t) = t, \phi_1(b) = b, \phi_2(t) = l, \phi_2(b) = r$ als auch die Abbildung $(\tau, \psi) : \Delta \rightarrow E$ mit $\tau = \text{id}$ und $\psi_i = \text{id}$ exakt, wie man durch einfaches Nachprüfen der jeweiligen Bedingungen sieht. Gleichzeitig ist aber die Verknüpfung der beiden Abbildungen $(\tau, \psi) \circ (\sigma, \phi) = (\sigma \circ \tau, \psi \circ \phi)$ nicht einmal ordinal, denn es gilt

$$c_{\sigma \circ \tau(1)}(t) = c_1(t) = 0 < 1 = c_1(b) = c_{\sigma \circ \tau(1)}(b) = c_{\sigma \circ \tau(1)}(t \mid b),$$

aber gleichzeitig

$$e_1(\psi \circ \phi(t)) = e_1(t, l) = 1 > 0 = e_1(b, r) = e_1(\psi \circ \phi(b)) = e_1(\psi \circ \phi(t \mid b)).$$

Insbesondere erhält man also keine Kategorie von Spielen im Sinne der Kategorientheorie, wenn man sich nur auf exakte/gewichtete/... Morphismen beschränkt (was für kostenerhaltende/monotone Morphismen der Fall ist). Man kann allerdings sicherstellen, dass die Komposition zweier exakter/gewichteter/ordinaler/Beste-Antwort-Morphismen wieder die jeweilige Eigenschaft hat, wenn man sich auf Morphismen mit injektiver Spielerabbildung beschränkt:

Lemma 3.19. *Die Verknüpfung zweier exakter/gewichteter/ordinaler/Bester-Antwort-Morphismen mit injektiven Spielerabbildungen ist wieder ein solcher Morphismus.*

Beweis. Die Aussage des Lemmas ergibt sich aus folgender Beobachtung: Für einen Morphismus $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ mit injektiver Spielerabbildung gilt für jeden Spieler j , jedes Strategieprofil x und jede Strategie $\hat{x}_{\sigma(j)}$ von Spieler $\sigma(j)$

$$\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = (\phi(x) \mid \phi_j(\hat{x}_{\sigma(j)})). \quad (2)$$

Die Injektivität der Spielerabbildung stellt nämlich gerade sicher, dass die Strategie von Spieler $\sigma(j)$ ausschließlich die Strategie von Spieler j und keinem anderen beeinflusst.

Wir zeigen das Lemma nun für exakte Morphismen - der Beweis für die anderen Morphismenarten geht dann völlig analog. Seien also zwei exakte Morphismen mit injektiver Spielerabbildung gegeben:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma = (I, X, (c_i)) & \xrightarrow{(\sigma, \phi)} & \Delta = (J, Y, (d_j)) \xrightarrow{(\tau, \psi)} E = (K, Z, (e_k)) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & (\sigma \circ \tau, \psi \circ \phi) \end{array}$$

Dann ist auch die Verknüpfung der beiden Morphismen exakt, denn es gilt:

$$\begin{aligned} e_k(\psi \circ \phi(x)) - e_k(\psi \circ \phi(x \mid \hat{x}_{\sigma \circ \tau(k)})) &= \\ &\stackrel{(2)}{=} e_k(\psi(\phi(x))) - e_k(\psi(\phi(x) \mid \phi_{\tau(k)}(\hat{x}_{\sigma(\tau(k))}))) = \\ &\stackrel{\substack{(\tau, \psi) \\ \text{exakt}}}{=} d_{\tau(k)}(\phi(x)) - d_{\tau(k)}(\phi(x) \mid \phi_{\tau(k)}(\hat{x}_{\sigma(\tau(k))})) = \\ &\stackrel{(2)}{=} d_{\tau(k)}(\phi(x)) - d_{\tau(k)}(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(\tau(k))})) = \\ &\stackrel{\substack{(\sigma, \phi) \\ \text{exakt}}}{=} c_{\sigma(\tau(k))}(x) - c_{\sigma(\tau(k))}(x \mid \hat{x}_{\sigma(\tau(k))}) \quad \square \end{aligned}$$

Lediglich bei skalierten Morphismen ist die Komposition zweier solcher auch in diesem Fall und sogar für bijektive Spieler- und Strategieabbildungen im Allgemeinen nicht wieder skaliert, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.20. Betrachte die folgenden drei 2-Personenspiele:

	l	r		l	r		l	r			
$\Gamma :$	t	(0,0)	(0,0)	$\Delta :$	t	(0,0)	(2,0)	$E :$	t	(0,0)	(0,0)
	b	(1,1)	(1,1)		b	(1,2)	(4,2)		b	(1,0)	(2,0)

Dass $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ein skalierter Morphismus ist, haben wir bereits in Beispiel 3.20 gesehen und $(\text{id}, \text{id}) : \Delta \rightarrow E$ ist ein skalierter Morphismus mit Skalierungsfunktionen $f'_1 := \text{id}$ und $f'_2 := \text{id}$.

Die Verknüpfung der beiden Morphismen (also $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma \rightarrow E$) ist zwar noch ein ordinaler, aber kein skalierter Morphismus mehr, denn eine Skalierungsfunktion für Spieler 1 müsste dazu 1 und 2 auf den gleichen Wert abbilden - ein Widerspruch dazu, dass Skalierungsfunktionen *streng* monoton sein müssen.

Da der in Beispiel 3.7 zur Charakterisierung von Koordinationsspielen verwendete Morphismus gerade keine injektive Spielerabbildung verwendet, können die Morphismenbegriffe aus Definition 3.13 nicht dazu verwendet werden um eine zu Korollar 3.11 analoge Bedingung für die Existenz der verschiedenen Potentiale zu finden. Dafür erhalten wir aber eine stärkere Form von Proposition 3.10 zur Charakterisierung von Potentialen:

Proposition 3.21. *Ein Spiel Γ besitzt genau dann ein exaktes/gewichtetes/ordinales/Beste-Antwort-Potential, wenn es exakt/gewichtet/ordinal/Beste-Antwort-isomorph zu einem Koordinationsspiel ist. Es besitzt genau dann ein skaliertes/verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es einen skalierten/ordinalen Morphismus mit bijektiven Spieler- und Strategieabbildungen von Γ in ein Koordinationsspiel gibt.*

Beweis. Besitzt ein Spiel $\Gamma = (I, X, (c_i))$ ein exaktes/gewichtetes/ordinales/Beste-Antwort-Potential P , so definieren wir das Koordinationsspiel $K = (I, X, (P))$. Dieses ist offenbar isomorph zu Γ mittels des Identitätsmorphismus, wobei sich die entsprechende Eigenschaft des Morphismus aus der des Potentials ergibt.

Ist umgekehrt $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow K$ ein exakter/gewichteter/ordinaler/Beste-Antwort-Isomorphismus von Γ in ein Koordinationsspiel mit einheitlicher Kostenfunktion p , dann ist $P := p \circ \phi$ ein entsprechendes Potential auf Γ .

Analog beweist man die Aussage für skalierte bzw. verallgemeinerte ordinale Potentiale. \square

Korollar 3.22. *Ist ein Spiel Γ exakt/gewichtet/ordinal/Beste-Antwort-isomorph zu einem Spiel Δ mit exaktem/gewichtetem/ordinalen/Beste-Antwort-Potential, so hat auch Γ selbst ein entsprechendes Potential.*

Beweis. Nach Proposition 3.21 ist Δ exakt/gewichtet/ \dots isomorph zu einem Koordinationsspiel und da wir laut Lemma 3.19 Isomorphismen verknüpfen können, gilt dies auch für Γ , welches damit - erneut nach Proposition 3.21 - ein exaktes/gewichtetes/ \dots Potential besitzt. \square

3.2 Beweise der Potentialsätze

Wie wir gesehen haben hängen die verschiedenen Morphismen (und insbesondere Isomorphismen) eng mit den entsprechenden Potentialen zusammen. In diesem Kapitel werden wir dies ausnutzen um mit Hilfe der analogen Eigenschaften der Morphismen die Aussagen aus Abschnitt 2 zu zeigen (insbesondere Satz 2.3).

Proposition 3.23. *Es gelten folgende Beziehungen zwischen den verschiedenen Morphismenbegriffen:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \nearrow & \text{monoton} & \\ \text{kostenerhaltend} & \implies & \text{exakt} & \implies & \text{gewichtet} & \implies & \text{skaliert} \implies \text{ordinal} \end{array}$$

Für die entsprechenden Isomorphismen gilt sogar:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \nearrow & \text{monoton} & \searrow \\ \text{kostenerhaltend} & \implies & \text{exakt} & \implies & \text{gewichtet} & \implies & \text{skaliert} \implies \text{ordinal} \implies \text{Beste Antwort} \end{array}$$

Beweis. Die meisten der Folgerungen ergeben sich direkt aus den Definitionen. Für die Morphismen ist:

kostenerh. \Rightarrow exakt: klar

kostenerh. \Rightarrow monoton: mit Kostenabbildungen $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

exakt \Rightarrow gew: mit Gewichten $w_j := 1$

gew \Rightarrow skaliert: $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto w_j \cdot t$ sind streng monotone Skalierungsfunktionen.

skaliert \Rightarrow ordinal: Gilt $c_{\sigma(j)}(x) < c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})$ so auch $f_j \circ d_j(\phi(x)) < f_j \circ d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$ und (wegen strenger Monotonie von f_j) $d_j(\phi(x)) < d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$.

Die zusätzlichen Zusammenhänge von Isomorphismen sind:

monoton \Rightarrow skaliert: mit dem gleichen Beweis wie Proposition 3.10 (wir haben dabei nirgends verwendet, dass eines der beteiligten Spiele ein Koordinationsspiel ist)

skaliert \Rightarrow BA: Ist (σ, ϕ) ein skaliertes Isomorphismus, so gilt

$$\begin{aligned} c_{\sigma(j)}(x) < c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) &\iff f_j \circ d_j(\phi(x)) < f_j \circ d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})) \iff \\ &\iff d_j(\phi(x)) < d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})). \end{aligned}$$

Da sowohl ϕ_j als auch σ bijektiv sind, folgt damit bereits, dass (σ, ϕ) auch ein Beste-Antwort-Isomorphismus ist. \square

Mit Proposition 3.21 erhalten wir aus der vorherigen Proposition einen Großteil der in Abbildung 1 dargestellten Beziehungen zwischen den verschiedenen Potentialbegriffen. Um zu zeigen, dass skalierte Potentiale auch ordinale sind, verwenden wir hierbei zusätzlich noch Beobachtung 3.17. Es bleibt noch zu zeigen, dass Beste-Antwort-Potentiale lokale Nash und verallgemeinert ordinale Potentiale verallgemeinert Nash sind. Dies werden wir erneut aus allgemeineren Sätzen über ordinale bzw. Beste-Antwort-Morphismen folgern.

Wie wir bereits in Beobachtung 1.13 gesehen haben, hängen Nash-Gleichgewichte eng mit (abgeschlossenen) Verbesserungspfaden zusammen. Wir zeigen daher zunächst wie diese sich mit ordinalen Morphismen vertragen.

Proposition 3.24. *Sei $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ein ordinaler Morphismus mit surjektiver Spielerabbildung σ und $\gamma = (x^0, x^1, \dots)$ ein Pfad in X , sodass auch $\phi(\gamma) := (\phi(x^0), \phi(x^1), \dots)$ ein Pfad in Y ist. Ist dann $\phi(\gamma)$ ein Nicht-Verschlechterungspfad, so auch γ . Ist γ sogar ein Verbesserungspfad, so auch $\phi(\gamma)$.*

Ordinale Morphismen mit surjektiver Spielerabbildung erhalten also Verbesserungspfade und reflektieren Nicht-Verschlechterungspfade. Daraus folgt dann insbesondere Satz 2.7, der dies für (verallgemeinerte) ordinale Potentiale behauptet.

Beweis. Sei zunächst $\phi(\gamma)$ ein Nicht-Verschlechterungspfad. Angenommen γ wäre kein Nicht-Verschlechterungspfad, dann gäbe es also ein k , sodass sich der im k -ten Schritt abweichende Spieler echt verschlechtert, d.h. $c_{i(k)}(x^k) > c_{i(k)}(x^{k-1})$. Da $\sigma : J \rightarrow I$ surjektiv ist, gibt es nun einen Spieler $j \in J$ mit $\sigma(j) = i(k)$ und wegen der Ordinalität von ϕ gilt für diesen, dass er sich im k -ten Schritt von $\phi(\gamma)$ echt verschlechtert, d.h. $d_j(\phi(x^k)) > d_j(\phi(x^{k-1}))$.

Insbesondere wissen wir damit, dass es auch in $\phi(\gamma)$ einen Spieler $j(k)$ geben muss, der im k -ten Schritt seine Strategie echt ändert. Damit gilt

$$\phi_{\sigma(j(k))}(x_{\sigma(j(k))}^k) = (\phi(x^k))_{\sigma(j(k))} \neq (\phi(x^{k-1}))_{\sigma(j(k))} = \phi_{\sigma(j(k))}(x_{\sigma(j(k))}^{k-1})$$

Daraus folgt $x_{\sigma(j(k))}^k \neq x_{\sigma(j(k))}^{k-1}$ und, da es in einem Pfad pro Schritt höchstens einen abweichenden Spieler geben kann, auch $i(k) = \sigma(j(k))$. Aus der Ordinalität von ϕ folgt dann aber aus $c_{i(k)}(x^k) > c_{i(k)}(x^{k-1})$, dass sich aus $j(k)$ echt verschlechtert, d.h. $d_{j(k)}(\phi(x^k)) > d_{j(k)}(\phi(x^{k-1}))$ - im Widerspruch dazu, dass $\phi(\gamma)$ ein Nicht-Verschlechterungspfad ist.

Ist nun γ ein Verbesserungspfad, gilt in jedem Schritt $c_{i(k)}(x^k) < c_{i(k)}(x^{k-1})$ und daher - mit dem gleichen Argument wie eben - auch $d_{j(k)}(\phi(x^{k+1})) < d_{j(k)}(\phi(x^k))$. Also ist auch $\phi(\gamma)$ ein Verbesserungspfad. \square

Im Allgemeinen bilden (ordinale) Morphismen Pfade nicht wieder auf Pfade ab. Ist nämlich $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ein solcher Morphismus und gibt es zwei Spieler j und j' mit $\sigma(j) = \sigma(j') =: i$, dann kann eine einseitige Abweichung von Spieler i in Γ zu einer gleichzeitigen Abweichung der beiden Spieler j und j' in Δ führen. Wie wir bereits im Beweis von Lemma 3.19 gesehen haben, kann dies allerdings nicht passieren, wenn die Spielerabbildung σ injektiv ist.

Beobachtung 3.25. Morphismen (σ, ϕ) mit injektivem σ bilden Pfade auf Pfade ab.

Dies erlaubt uns folgendes Korollar:

Korollar 3.26. *Sei $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ein ordinaler Morphismus mit bijektiver Spielerabbildung σ und $\gamma = (x^0, \dots, x^n)$ ein Verbesserungspfad in X . Ist dann $\phi(\gamma)$ abgeschlossen in Δ , so ist auch γ in Γ abgeschlossen.*

Beweis. Nehmen wir im Widerspruch zur Behauptung an, γ wäre nicht abgeschlossen. Dann gäbe es folglich ein Strategieprofil $x^{n+1} \in X$, welches γ zu einem Verbesserungspfad $\gamma' := (x^0, \dots, x^n, x^{n+1})$ in Γ verlängert. Nach Beobachtung 3.25 ist dann auch $\phi(\gamma')$ ein Pfad in Δ und mit Proposition 3.24 sogar ein Verbesserungspfad, also insbesondere eine Verlängerung des Pfades $\phi(\gamma)$ - ein Widerspruch zu dessen Abgeschlossenheit. \square

Korollar 3.27. *Ordinale Morphismen mit bijektiver Spielerabbildung reflektieren Nash-Gleichgewichte. Das heißt, ist $x \in X$ ein Strategieprofil in Γ und (σ, ϕ) ein ordinaler Morphismus in ein Spiel Δ , sodass $\phi(x)$ ein Nash-Gleichgewicht in diesem ist, dann war bereits x ein Nash-Gleichgewicht von Γ .*

Beweis. Es ist x ein trivialer Verbesserungspfad in Γ , dessen Bild $\phi(x)$ in Δ abgeschlossen ist. Daher ist mit Korollar 3.26 x in Γ abgeschlossen und folglich (vgl. Beobachtung 1.13) x ein Nash-Gleichgewicht in Γ . \square

Zur Notwendigkeit der Bijektivität der Spielerabbildung betrachten wir das folgende Beispiel:

Beispiel 3.28. Wir definieren die folgenden drei Spiele:

Korrektheit des Beispiels prüfen!

	l	r		a	b		l	r		
Γ :	t	(2,2)	(1,1)	Δ :	1	0	E :	t	(1,1)	(2,2)
	b	(1,1)	(0,0)					b	(2,2)	(0,0)

- Der Morphismus $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ mit $\sigma(1) = 1$ und $\phi_1(t) = a, \phi_1(b) = b$ ist ein ordinaler Morphismus, dessen Spielerabbildung nicht surjektiv ist. Und tatsächlich gilt hier die Aussage von Korollar 3.27 nicht: Denn (b, l) ist kein Nash-Gleichgewicht von Γ , obwohl $\phi(b, l) = b$ ein Nash-Gleichgewicht von Δ ist.
- Der Morphismus $(\tau, \psi) : \Delta \rightarrow E$ mit $\tau(1) = \tau(2) = 1$ und $\psi_1(a) = l, \psi_1(b) = r, \psi_2(a) = t, \psi_2(b) = r$ ist ein ordinaler Morphismus, dessen Spielerabbildung nicht injektiv ist. Und in der Tat gilt auch hier die Aussage des Korollars nicht: Denn a ist kein Nash-Gleichgewicht von Δ , obwohl $\psi(a) = (t, l)$ ein Nash-Gleichgewicht von E ist.

Aus diesem Korollar folgt insbesondere, dass Nash-Gleichgewichte in von einem verallgemeinerten ordinalen Potential induzierten Koordinationsspiel auch Nash-Gleichgewichte im Ausgangsspiel sind. Also sind verallgemeinerte ordinale Potentiale verallgemeinerte Nash-Potentiale.

Beispiel 3.29. Ordinale Isomorphismen haben insbesondere injektive Spieler- und Strategieabbildungen. Damit erfüllen sie die Voraussetzungen von Korollar 3.27, d.h. ordinal isomorphe Spiele haben die gleichen Nash-Gleichgewichte.

Dies zeigt also nochmal, dass ordinale Potentiale lokale Nash-Potentiale sind. Es verbleibt die entsprechende Aussage für Beste-Antwort-Potentiale. Dazu stellen wir zunächst fest, dass Beste-Antwort-Morphismen mit bijektiver Spielerabbildung Beste-Antwort-Schritte (und damit auch -Pfade und Nash-Gleichgewichte) erhalten.

Proposition 3.30. *Sei $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ein Beste-Antwort-Morphismus mit bijektiver Spielerabbildung σ und (x^0, x^1) ein Beste-Antwort-Schritt von Spieler $\sigma(i)$ in Γ , so auch $\phi((x^0, x^1))$ von Spieler i in Δ .*

Beweis. Da σ bijektiv ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass σ die Identität ist. Ferner wissen wir damit, dass aus $x^1 = (x^0 \mid x_i^1)$ auch $\phi(x^1) = \phi((x^0 \mid x_i^1)) = (\phi(x^0) \mid \phi_i(x_i^1))$ folgt. Da dieser Schritt sogar ein Bester-Antwort-Schritt ist, gilt $x_i^1 \in \arg \max_{x_i \in X_i} c_i(x^0 \mid x_i)$ und daher mit der definierenden Eigenschaft von Beste-Antwort-Morphismen auch $\phi_i(x_i^1) \in \arg \max_{y_i \in Y_i} d_i(\phi(x^0) \mid y_i)$. Also ist $\phi((x^0, x^1))$ ebenfalls ein Beste-Antwort-Schritt (von Spieler i). \square

Korollar 3.31. *Beste-Antwort-Morphismen mit bijektiver Spielerabbildung bewahren Besten-Antwort-Pfade und Nash-Gleichgewichte.*

Beweis. Der erste Teil der Aussage ergibt sich direkt aus der vorangegangenen Proposition 3.30. Sei also x ein Nash-Gleichgewicht von Γ , dann ist (x, x) ein Beste-Antwort-Schritt für alle Spieler $i \in I$. Damit ist $(\phi(x), \phi(x))$ ebenfalls ein Beste-Antwort-Schritt für jeden Spieler und daher insbesondere ein Nash-Gleichgewicht (vgl. Beobachtung 1.15). \square

Beste-Antwort-isomorphe Spiele haben damit sogar die gleichen Nash-Gleichgewichte, womit Beste-Antwort-Potentiale lokale Nash-Potentiale sind. Außerdem folgt hieraus Satz 2.8, sodass wir nun den Beweis von Satz 2.3 vervollständigt haben.

3.3 Weitere Sätze mit Morphismen

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch einige weitere Beobachtungen über bzw. mit Morphismen festhalten:

Für monotone Morphismen gibt es einen zu Proposition 3.24 analogen Satz über Nicht-Verschlechterungs- und Verbesserungspfade.

Proposition 3.32. *Sei $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ein monotoner Morphismus und $\gamma = (x^0, x^1, \dots)$ ein Pfad in X , sodass auch $\phi(\gamma) := (\phi(x^0), \phi(x^1), \dots)$ ein Pfad in Y ist. Ist dann γ ein Nicht-Verschlechterungspfad, so auch $\phi(\gamma)$. Ist $\phi(\gamma)$ sogar ein Verbesserungspfad, so auch γ .*

Das heißt monotone Morphismen erhalten Nicht-Verschlechterungspfade und reflektieren Verbesserungspfade - also genau umgekehrt zu ordinalen Morphismen.

Beweis. Zunächst beobachten wir, dass σ immer den in $\phi(\gamma)$ im k -ten Schritt abweichenden Spieler (sofern es einen solchen gibt) auf den im gleichen Schritt abweichenden Spieler in γ abbildet. Ist nämlich $j(k)$ der entsprechende Spieler aus Δ , so gilt:

$$\phi_{\sigma(j(k))} \left(x_{\sigma(j(k))}^k \right) = \left(\phi(x^k) \right)_{\sigma(j(k))} \neq \left(\phi(x^{k-1}) \right)_{\sigma(j(k))} = \phi_{\sigma(j(k))} \left(x_{\sigma(j(k))}^{k-1} \right)$$

Daraus folgt $x_{\sigma(j(k))}^k \neq x_{\sigma(j(k))}^{k-1}$ und, da es in einem Pfad pro Schritt höchstens einen abweichenden Spieler geben kann, auch $i(k) = \sigma(j(k))$.

Ist nun γ ein Nicht-Verschlechterungspfad und es gibt im k -ten Schritt einen (echt) abweichenden Spieler $j(k)$, so ist also $\sigma(j(k)) = i(k)$ und daher $c_{\sigma(j(k))}(x^k) \leq c_{\sigma(j(k))}(x^{k-1})$. Mit der Monotonie von ϕ folgt daraus direkt auch $d_{j(k)}(\phi(x^k)) \leq d_{j(k)}(\phi(x^{k-1}))$.

Ist $\phi(\gamma)$ ein Verbesserungspfad, gilt in jedem Schritt $d_{j(k)}(\phi(x^{k+1})) < d_{j(k)}(\phi(x^k))$ und daher - erneut wegen der Monotonie von ϕ - auch $c_{\sigma(j(k))}(x^{k+1}) < c_{\sigma(j(k))}(x^k)$. \square

Der folgende Satz zeigt, wann man Spieler weglassen kann, ohne dadurch die Nash-Gleichgewichte des Spiels zu beeinflussen.

Satz 3.33. *Sei $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ein biordinaler Morphismus mit injektiver Spielerabbildung und surjektiven Strategieabbildungen. Seien ferner alle Spieler in $I \setminus \sigma(J)$ Dummy-Spieler. Dann ist ein Strategieprofil $x \in X$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht in Γ , wenn $\phi(x)$ ein Nash-Gleichgewicht in Δ ist.*

Beweis. Sei zunächst $x \in X$ ein Nash-Gleichgewicht in Γ und $y_j \in Y_j$. Da ϕ_j surjektiv ist, gibt es dann ein $\hat{x}_{\sigma(j)}$ mit $\phi_j(\hat{x}_{\sigma(j)}) = y_j$. Wegen der Injektivität von σ gilt ferner $\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = (\phi(x) \mid y_j)$.

Da x ein Nash-Gleichgewicht ist, gilt nun $c_{\sigma(j)}(x) \leq c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})$ und folglich wegen der Biordinalität von ϕ auch $d_j(\phi(x)) \leq d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})) = d_j(\phi(x) \mid y_j)$. Also ist auch $\phi(x)$ ein Nash-Gleichgewicht in Δ .

Ist umgekehrt $\phi(x)$ ein Nash-Gleichgewicht in Δ und \hat{x}_i eine alternative Strategie von Spieler $i \in I$.

1. **Fall:** Liegt i in $I \setminus \sigma(J)$, so ist i nach Voraussetzung ein Dummy-Spieler und folglich gilt: $c_i(x) = c_i(x \mid \hat{x}_i)$.
2. **Fall:** Liegt i hingegen in $\sigma(J)$, so gibt es also einen Spieler $j \in J$ mit $\sigma(j) = i$. Aus der Injektivität von σ und dem Wissen, dass $\phi(x)$ ein Nash-Gleichgewicht ist, folgt nun $d_j(\phi(x \mid \hat{x}_i)) = d_j(\phi(x) \mid \phi_j(\hat{x}_{\sigma(j)})) \geq d_j(\phi(x))$. Über die Biordinalität von ϕ erhalten wir schließlich $c_i(x \mid \hat{x}_i) = c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_i) \geq c_{\sigma(j)}(x) = c_i(x)$.

Insgesamt ist also auch x ein Nash-Gleichgewicht. \square

Mit diesem Satz können wir nun die in Beobachtung 1.3 gemachte Beobachtung formalisieren (und beweisen), dass Spieler mit nur einer einzigen Strategie beim Untersuchen von Nash-Gleichgewichten immer ignoriert werden können:

Korollar 3.34. *Spieler mit nur einer einzigen Strategie können immer entfernt werden ohne die Nash-Gleichgewichte zu verändern.*

Beweis. Sei dazu Γ ein beliebiges Spiel und $I' \subseteq I$ eine solche Teilmenge von Spielern, dass alle Spieler i in $I \setminus I'$ genau eine Strategie $*_i$ besitzen. Dann betrachten wir die Einschränkung von Γ auf die Spieler in I' , nämlich $\Gamma' := (I', \prod_{i \in I'} X_i, (c'_i)_{i \in I'})$, wobei die Kostenfunktionen wie folgt definiert sind:

$$c'_i(x') := c_i(x), \text{ wobei } x \in X \text{ definiert ist durch } x_i = \begin{cases} x'_i, & i \in I' \\ *_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

und den folgenden Morphismus $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ zwischen den beiden Spielen:

$$\begin{array}{lll} \sigma : & I \setminus I' \rightarrow I : & i \mapsto i \\ \phi_i : & X_i \rightarrow X_i : & x_i \mapsto x_i \end{array}$$

Dieser ist offenbar kostenerhaltend, also insbesondere biordinal, die Spielerabbildung ist injektiv, die Strategieabbildungen sind surjektiv und $I \setminus \sigma(I') = I \setminus I'$ enthält nur Dummy-Spieler. Damit folgt die Behauptung mit Satz 3.33. \square

Schließlich wollen wir noch eine Verallgemeinerung von Beobachtung 2.13 beweisen:

Lemma 3.35. *Seien $\Gamma = (I, X, (c_i))$ und $\Delta = (J, Y, (d_j))$ zwei Spiele. Dann gibt es genau dann einen gewichteten Morphismus $\Gamma \rightarrow \Delta$, wenn es positive Gewichte $(w_j)_{j \in J}$ und einen exakten Morphismus $\Gamma \rightarrow \Delta_w := (J, Y, (w_j \cdot d_j))$ gibt.*

Beweis. Ein Morphismus $(\sigma, \phi) : \Gamma \rightarrow \Delta$ ist genau dann ein exakter Morphismus zwischen Γ und Δ_w , wenn für alle Strategieprofile $x \in X$, Spieler $j \in J$ und Strategien $\hat{x}_{\sigma(j)}$ gilt:

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = w_j \cdot d_j(\phi(x)) - w_j \cdot d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}))$$

Und dies ist offenbar äquivalent zu

$$c_{\sigma(j)}(x) - c_{\sigma(j)}(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)}) = w_j \cdot \left(d_j(\phi(x)) - d_j(\phi(x \mid \hat{x}_{\sigma(j)})) \right),$$

also dazu, dass (σ, ϕ) ein gewichteter Morphismus zwischen Γ und Δ ist. \square

4 Zusammenhänge von Auslastungs- und Potentialspielen

In [Ros73] führte Rosenthal Auslastungsspiele als Klasse von endlichen Spielen ein, welche immer ein exaktes Potential (und damit ein Nash-Gleichgewicht) besitzen. Später zeigten Monderer und Shapley in [MS96b, Theorem 3.2], dass diese Klasse bis auf (kostenerhaltende) Isomorphie bereits *alle* endlichen Spiele mit exaktem Potential umfasst. Zusammengefasst und etwas verallgemeinert gilt also:

Mit Einleitung von Kapitel 1.3 vergleichen.

Satz 4.1. *Jedes N -Personen-Auslastungsspiel besitzt ein exaktes Potential und jedes exakte N -Personen-Potentialspiel ist äquivalent zu einem Auslastungsspiel.*

Beweis. Sei $\Gamma(M)$ ein beliebiges Auslastungsspiel. Dann definieren wir wie folgt die Rosenthal-Potentialfunktion:

$$P : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} g_r(k)$$

Die Funktion ist wohldefiniert, da die insgesamt N Spieler zusammen nur endlich viele Ressourcen nutzen können und daher beide Summen endlich sind. Sie ist ferner ein exaktes Potential, denn zu einem Strategieprofil $s \in S$ und einer weiteren Strategie \hat{s}_i von Spieler i gilt:

$$\begin{aligned} P(s) - P(s \mid \hat{s}_i) &= \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} g_r(k) - \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s \mid \hat{s}_i)} g_r(k) = \sum_{r \in s_i \setminus \hat{s}_i} g_r(l_r(s)) - \sum_{r \in \hat{s}_i \setminus s_i} g_r(l_r(s) + 1) = \\ &= \sum_{r \in s_i \setminus \hat{s}_i} g_r(l_r(s)) + \sum_{r \in s_i \cap \hat{s}_i} g_r(l_r(s)) - \sum_{r \in s_i \cap \hat{s}_i} g_r(l_r(s \mid \hat{s}_i)) - \sum_{r \in \hat{s}_i \setminus s_i} g_r(l_r(s \mid \hat{s}_i)) = \\ &= \sum_{r \in s_i} g_r(l_r(s)) - \sum_{r \in \hat{s}_i} g_r(l_r(s \mid \hat{s}_i)) = c_i(s) - c_i(s \mid \hat{s}_i) \end{aligned}$$

Für die umgekehrte Richtung orientieren wir uns an dem Beweis in [Mon06, Theorem 1]. Gegeben also ein Spiel $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$ mit einem exakten Potential P . Hierzu definieren wir folgendes Auslastungsmodell $M = (I, R, (S_i)_{i \in I}, (g_r)_{r \in R})$:

- $R := R_K \cup R_D \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X_i)$, wobei $R_K := \{ (\{x_i\})_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$ und $R_D := \{ (Y_i)_{i \in I} \mid \exists \hat{i} \in I : Y_{\hat{i}} = X_{\hat{i}}, \forall i \neq \hat{i} : |X_i \setminus Y_i| = 1 \}$.
- Die Ressourcenkosten sind jeweils nur für genau eine Auslastung nicht 0: Ressourcen aus R_K genau dann, wenn alle Spieler sie nutzen, Ressourcen aus R_D , wenn sie genau ein Spieler nutzt:

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_K \text{ und } k = N \\ c_i(x) - P(x), & r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \hat{i}} \times X_{\hat{i}} \in R_D, x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}} \text{ bel. und } k = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zweite Fall hängt tatsächlich nicht von der Wahl der Strategie $x_i \in X_i$ ab, denn ist \hat{x}_i eine andere solche Strategie, so gilt (da P ein exaktes Potential ist):

$$(c_i(x) - P(x)) - (c_i(x \mid \hat{x}_i) - P(x \mid \hat{x}_i)) = (c_i(x) - c_i(x \mid \hat{x}_i)) - (P(x) - P(x \mid \hat{x}_i)) = 0$$

- $S_i := \{ \{ r \in R \mid x_i \in r_i \} \mid x_i \in X_i \}$

Die induzierten Lastfunktionen sind automatisch wohldefiniert, da die Spielermenge endlich ist, die Wohldefiniertheit der Kostenfunktionen d_i folgt dann aus dem Beweis der Äquivalenz der Spiele Γ und $\Gamma(M)$. Dazu betrachten wir den Morphismus $(\text{id}, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma(M)$, wobei $\phi_i(x) := s(x_i) := \{ r \in R \mid x_i \in r_i \}$. Dieser ist offenbar bijektiv auf allen Mengen und zudem kostenerhaltend, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d_i(\phi(x)) &= \sum_{r \in \phi(x)_i = \phi_i(x_i)} g_r(l_r(\phi(x))) = \\ &= \sum_{r \in R_K : x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{=N \iff r = (\{x_i\})_{i \in I}}) + \sum_{r \in R_D : x_i \in r_i} g_r(\underbrace{l_r(\phi(x))}_{=1 \iff r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus i} \times X_i}) = \\ &= g(\{x_i\}_{i \in I})(N) + g_{(X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus i} \times X_i}(1) = \\ &= P(x) + c_i(x) - P(x) = c_i(x) \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 4.2. Berücksichtigt man nur die Ressourcen aus R_K , so erhält man ein Koordinationsspiel, nimmt man nur die aus R_D , so erhält man ein Dummy-Spiel. Aus dieser Beobachtung ergibt sich der in [Voo+99] beschriebene alternative Beweis für die Rückrichtung: Man zerlegt das exakte Potentialspiel zunächst in ein Koordinations- und ein Dummispiel (siehe Satz 2.11), konstruiert für jedes der beiden ein äquivalentes Auslastungsspiel (mit Ressourcenn Mengen R_K bzw. R_D) und erhält schließlich die Summe der beiden Auslastungsspiele als zum Ausgangsspiel kostenerhaltend isomorphes Auslastungsspiel.

Auslastungsspiele sind also nicht nur *ein* Beispiel für Spiele mit exaktem Potential, sondern in gewissem Sinne (nämlich bis auf Isomorphie) sogar *das* Beispiel für solche Spiele. Eine naheliegende Frage ist nun, ob es ähnliche Klassen von „auslastungsartigen“ Spielen gibt, welche genau den Spielen mit allgemeineren Potentials entsprechen. Im Folgenden werden wir versuchen eine zu gewichteten Potentialspielen passende Verallgemeinerung von Auslastungsspielen zu finden.

4.1 Von ungewichtet zu gewichtet

4.1.1 Gewichtete Auslastungsspiele

Für endliche gewichtete Auslastungsspiele zeigen Harks, Klimm und Möhring in [HKM11, Theorem 3.9], dass die einzigen beiden Klassen stetiger Funktionen, die (als Kostenfunktionen verwendet) ausschließlich endliche Spiele mit gewichtetem Potential erzeugen, affin lineare Funktionen bzw. exponentielle Funktionen (mit gemeinsamem Exponenten) sind:

Satz 4.3. *Gegeben eine Menge von stetigen Funktionen C . Dann besitzt genau dann jedes endliche gewichtete Auslastungsspiel, welches nur Funktionen aus C als Kostenfunktionen verwendet, ein gewichtetes Potential, wenn C*

- *entweder ausschließlich affin lineare Funktionen, also Funktionen der Form $c(l) = a_c \cdot l + d_c$,*
- *oder ausschließlich Funktionen der Form $c(l) = a_c \cdot b^l + d_c$ enthält (mit gemeinsamem $b > 0$).*

Alle mit Kostenfunktionen aus C erzeugten gewichteten Auslastungsspiele besitzen genau dann sogar ein exaktes Potential, wenn C ausschließlich affin lineare Funktionen enthält (vgl. [HKM11, Theorem 3.7]).

Verallgemeinerung für unendliche Spiele?

In [HK12, Theorem 5.1] zeigen Harks und Klimm weiter, dass diese beiden Klassen von Kostenfunktionen unter allen Klassen stetiger Funktionen gleichzeitig auch die einzigen sind, die die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes garantieren.⁷

Da nun für endliche Spiele alle der in Abschnitt 2 definierten Potentiale die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes garantieren, folgt hiermit direkt, dass es auch für die allgemeineren Potentialbegriffe keine größeren Klassen von stetigen Funktionen gibt, die immer die Existenz eines entsprechenden Potentials sicher stellen.

Zusammen zeigen diese beiden Sätze bereits deutlich, dass der Schritt vom ungewichteten Fall zum gewichteten auf Seite der Auslastungsspiele erheblich größer ist als auf Seite der Potentiale. Tatsächlich zeigt Milchtaich in [Mil13, Theorem 1], dass dieser Verallgemeinerungsschritt für Auslastungsspiele bereits der größtmögliche ist, denn es gilt:

Satz 4.4. *Jedes endliche Spiel ist äquivalent zu einem gewichteten Auslastungsspiel.*⁸

Die Menge der gewichteten Auslastungsspiele umfasst also (bis auf kostenerhaltende Isomorphie) bereits *alle* endlichen Spiele in strategischer Form. Möchte man daher eine wirklich analoge Verallgemeinerung von Auslastungsspielen passend zu gewichteten Potentialspielen finden, muss man also andere Varianten betrachten Gewichte ins Spiel zu bringen. In Definition 1.22 hatten wir bereits zwei solche gesehen, welche wir nun näher untersuchen wollen:

4.1.2 Lastgewichtete Auslastungsspiele

Die erste alternative Klasse von Auslastungsspielen sind die lastgewichteten Auslastungsspiele. Harks, Klimm und Möhring beobachten in [HKM11, S. 53], dass lastgewichtete

⁷zudem sind es auch noch die einzigen Klassen, welche für jedes gewichtete Auslastungsspiel das Erfüllen der FIP sicherstellen.

⁸Milchtaich zeigt sogar, dass jedes endliche Spiel äquivalent zu einem gewichteten Netzwerkauslastungsspiel mit privaten Kanten und einheitlichem Start- und Zielknoten ist.

Auslastungsspiele (die dort als normalisierte Auslastungsspiele bezeichnet werden) zwar nicht äquivalent, aber doch unter verschiedenen Aspekten sehr ähnlich zu allgemeinen gewichteten Auslastungsspielen sind. Diesen Zusammenhang können wir nun leicht durch einen passenden Isomorphismusbegriff formalisieren - es gilt nämlich:

Lemma 4.5. *Jedes lastgewichtete Auslastungsspiel ist gewichtet isomorph zu einem gewichteten Auslastungsspiel und umgekehrt. Die beiden Spiele basieren dabei jeweils auf dem gleichen Auslastungsmodell und der Gewichtsvektor des Morphismus von gewichteten zum lastgewichteten Auslastungsspiel ist der Gewichtsvektor des Auslastungsmodells.*

Beweis. Sei $M = (I, R, (S_i), (G_r))$ ein Auslastungsmodell und $w = (w_i)$ ein Gewichtsvektor. Dann ist $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma(M, w) \rightarrow \Gamma_l(M, w)$ offenbar ein Isomorphismus und ferner gewichtet, denn sind c_i die Kostenfunktionen von $\Gamma(M, w)$ und d_i die von $\Gamma_l(M, w)$, so gilt sogar für jedes Strategieprofil s :

$$c_i(s) = \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(s)) = w_i \cdot \sum_{r \in R} g_r(l_r(s)) = w_i \cdot d_i(s) \quad \square$$

Hieraus ergeben sich dann direkt die in [HKM11] beobachteten Zusammenhänge zwischen gewichteten und lastgewichteten Auslastungsspielen:

Korollar 4.6. *Sei $M = (I, R, (S_i), (G_r))$ ein Auslastungsmodell und $w = (w_i)$ ein Gewichtsvektor. Dann gilt:*

- *Die Nash-Gleichgewichte von $\Gamma(M, w)$ und $\Gamma_l(M, w)$ stimmen überein.*
- *Eine Funktion $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein gewichtetes/ordinales/verallgemeinert ordinales/Beste Antwort/lokales Nash-Potential von $\Gamma(M, w)$, wenn es ein solches für $\Gamma_l(M, w)$ ist.*
- *Eine Funktion $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein exaktes Potential von $\Gamma(M, w)$, wenn sie ein w -Potential von $\Gamma_l(M, w)$ ist.*
- *Eine Funktion $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein exaktes Potential von $\Gamma_l(M, w)$, wenn sie ein $(1/w_i)$ -Potential von $\Gamma(M, w)$ ist.*

Außerdem übersetzt sich damit Satz 4.3 zu

Korollar 4.7. *Gegeben eine Menge von stetigen Funktionen C . Dann besitzt genau dann jedes endliche lastgewichtete Auslastungsspiel, welches nur Funktionen aus C als Kostenfunktionen verwendet, ein gewichtetes Potential, wenn C*

- *entweder ausschließlich affin lineare Funktionen*
- *oder ausschließlich Funktionen der Form $c(l) = a_c \cdot b^l + d_c$ enthält.*

Kann man Fotakis, Kontogiannis und Spirakis verwenden um den Satz zu stärken?

Insbesondere sehen wir damit aber auch, dass lastgewichtete Auslastungsspiele ebenfalls eine zu starke Verallgemeinerung von ungewichteten Auslastungsspielen sind, um eine Entsprechung der gewichteten Potentialspiele sein zu können.

4.1.3 Kostengewichtete Auslastungsspiele

Wie sich herausstellt sind kostengewichtete Auslastungsspiele hingegen eine geeignete Klasse:

Satz 4.8. *Jedes kostengewichtete N -Personen-Auslastungsspiel besitzt ein gewichtetes Potential und jedes N -Personen-Spiel mit einem gewichteten Potential ist äquivalent zu einem kostengewichteten Auslastungsspiel.*

Nicht nur entspricht dieser Satz genau dem von Monderer und Shapley bewiesenen Satz für ungewichtete Auslastungsspiele und exakte Potentiale (Satz 4.1), auch der Beweis erfolgt völlig analog.

Beweis. Sei Γ ein kostengewichtetes Auslastungsspiel mit Gewichtsvektor $w := (w_i)_{i \in I}$. Dann ist die Rosenthal-Potentialfunktion (vgl. [Ros73]) $P(x) := \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(x)} g_r(k)$ ein w -Potential für Γ .

Ist umgekehrt Γ ein Spiel mit einem gewichteten Potential P (mit Gewichtsvektor w), so definieren wir das gleiche Auslastungsmodell $M = (I, R, (S_i)_{i \in I}, (g_r)_{r \in R})$ wie im Beweis zu Satz 4.1 mit dem einzigen Unterschied in den Ressourcenkosten:

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_k \text{ und } k = N \\ \frac{1}{w_i} c_i(x) - P(x), & r = (X_i \setminus \{x_i\})_{i \in I \setminus \hat{i}} \times X_{\hat{i}} \in R_D \text{ und } k = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Rest des Beweises erfolgt dann genauso wie zuvor. \square

Lemma 4.9. *Jedes kostengewichtete Auslastungsspiel ist gewichtet isomorph zum (ungewichteten) Auslastungsspiel auf dem selben Auslastungsmodell (sofern dieses existiert).*

Beweis. Sei als M ein Auslastungsmodell und w ein positiver Gewichtsvektor, sodass sowohl das ungewichtete Spiel $\Gamma(M)$ als auch das kostengewichtete $\Gamma_c(M, w)$ existieren. Dann ist $(\text{id}, \text{id}) : \Gamma_c(M, w) \rightarrow \Gamma(M)$ offenbar ein gewichteter Isomorphismus mit Gewichtsvektor w . \square

4.2 Schnelle Beste-Antwort-Dynamik in Matroidspielen

Da endliche Auslastungsspiele nach Satz 4.1 ein exaktes und damit insbesondere ein Beste-Antwort-Potential besitzt, wissen wir bereits, dass in solchen Spielen jede Beste-Antwort-Dynamik nach endlicher Zeit ein Nash-Gleichgewicht erreicht. Allerdings kann diese Suche im Allgemeinen sehr lange dauern. Zum Beispiel stellen Ackermann, Röglin und Vöcking in [ARV08, Theorem 3.1] ein N -Personen-Auslastungsspiel vor, welches einen Beste-Antwort-Verbesserungspfad der Länge 2^N besitzt.

Für die Teilklasse der Matroidspiele kann man jedoch zeigen, dass diese Konvergenz immer bereits in polynomieller Zeit erfolgt. Ein leichte Modifikation des Beweises hierzu in [ARV08, Theorem 2.5] erlaubt sogar die folgender noch etwas stärkere Aussage:

Satz 4.10. *Sei $M = (I, R, (S_i), (g_r))$ ein endliches Matroidspiel. Dann ist $\Gamma(M)$ Beste-Antwort-isomorph zu einem Auslastungsspiel mit selber Ressourcenmenge, in dem alle Ressourcenkosten nur Werte zwischen 1 und $|R| \cdot |I|$ annehmen.*

Beweis. Wir definieren zunächst das Auslastungsmodell $N := (I, R, (S_i), (h_r))$, wobei die Ressourcenkosten h_r wie folgt definiert sind:

$$h_{\hat{r}}(\hat{k}) := \# \left\{ (r, k) \in R \times \{1, \dots, |I|\} \mid c_r(k) \leq c_{\hat{r}}(\hat{k}) \right\}$$

Das heißt also wir ordnen alle möglichen Werte, welche die Ressourcenkostenfunktionen annehmen können und ersetzen dann die tatsächlichen Kosten durch die Position dieser Kosten in der Liste aller Kosten. Das von N induzierte Auslastungsspiel $\Gamma(N) =: (I, R, (S_i), (d_i))$ hat nun offenbar die gewünschten Eigenschaften.

Noch zu zeigen ist, dass $\Gamma(N)$ tatsächlich Beste-Antwort-isomorph zu $\Gamma(M)$ ist. Dazu betrachten wir den Identitätsmorphimus zwischen den beiden Spielen (der offensichtlich bijektiv ist) und zeigen, dass die besten Antworten in $\Gamma(N)$ genau den besten Antworten in $\Gamma(M)$ entsprechen. Dazu benötigen wir die folgende Proposition:

Proposition 4.11. *Sei $s \in S$ ein beliebiges Strategieprofil und $s_i^* \in S_i$ eine beste Antwort von Spieler i auf s in $\Gamma(M)$. Dann gilt*

- $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s) \implies d_i(s \mid s_i^*) < d_i(s)$ und
- $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s) \implies d_i(s \mid s_i^*) = d_i(s)$.

Beweis. Der Beweis folgt dem in [ARV08, Lemma 2.6]. Es sind sowohl s_i^* als auch s_i Basen im Matroid von Spieler i . Daher gibt es der Basen-Matching-Eigenschaft (Korollar 1.31) zu Folge eine Partitionierung der symmetrischen Differenz $s_i^* \triangle s_i$ in eine Menge von Tupeln der Form (q, r) mit $q \in s_i^* \setminus s_i$ und $r \in s_i \setminus s_i^*$, sodass $s_i^{+r-q} := s_i^* \setminus \{q\} \cup \{r\}$ ebenfalls eine Basis ist (d.h. eine zulässige Ressourcenmenge von Spieler i).

Da nun s_i^* eine beste Antwort auf s ist, muss die Antwort s_i^{+r-q} zu mindestens ebenso hohen Kosten für Spieler i führen, es muss also gelten:

$$0 \leq c_i(s \mid s_i^{+r-q}) - c_i(s \mid s_i^*) = g_r(l_r(s \mid s_i^*) + 1) - g_q(l_q(s \mid s_i^*))$$

und damit (für jedes solche Tupel aus der Partitionierung)

$$g_q(l_q(s \mid s_i^*)) \leq g_r(l_r(s \mid s_i^*) + 1). \quad (3)$$

Insbesondere werden somit auch die alternativen Ressourcenkosten bei jedem solchen Ressourcenwechsel höchstens kleiner.

Gilt nun zusätzlich $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s)$, so muss die Ungleichung (3) für wenigstens ein solches Tupel (q, r) sogar strikt sein. Und sinken mindestens für diesen Ressourcenwechsel auch die alternativen Kosten echt ab. Also gilt insgesamt $d_i(s \mid s_i^*) < d_i(s)$.

Gilt hingegen $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s)$, so muss auch in jeder Ungleichung der Form (3) Gleichheit gelten, womit auch alle alternativen Ressourcenkosten gleich bleiben. Folglich gilt in diesem Fall $d_i(s \mid s_i^*) = d_i(s)$. \square

Beweis von Satz 4.10 (Forts.) Sei zunächst $s \in S$ ein beliebiges Strategieprofil, s_i^* eine Beste Antwort von Spieler i auf s im Spiel $\Gamma(M)$ (also bezüglich c_i) und s'_i eine Beste Antwort im Spiel $\Gamma(N)$ (also bezüglich der alternativen Kosten d_i). Wir werden nun zeigen, dass $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s \mid s'_i)$ gilt. Mit Proposition 4.11 erhalten wir dann auch $d_i(s \mid s_i^*) = d_i(s)$ und folglich ist sowohl s'_i eine Beste Antwort in $\Gamma(M)$ als auch s_i^* eine Beste Antwort in $\Gamma(N)$. Das zeigt, dass die Identitätsabbildung zwischen den beiden Spielen beste Antworten in beide Richtungen erhält und daher ein Beste-Antwort-Morphismus ist.

Wir untersuchen dazu, welcher der drei theoretisch möglichen Fälle tatsächlich eintreten kann:

- 1. Fall:** $c_i(s \mid s_i^*) > c_i(s \mid s'_i)$. Dann wäre $(s \mid s'_i)$ eine bessere Antwort auf s als s_i^* (bzgl. c_i) - ein Widerspruch dazu, dass s_i^* eine *beste* Antwort auf s ist. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
- 2. Fall:** $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s \mid s'_i)$. Nach Proposition 4.11 gilt dann auch $c_i(s \mid s_i^*) < c_i(s \mid s'_i)$, was analog zum ersten Fall ein Widerspruch dazu ist, dass s'_i eine Beste Antwort auf s bezüglich d_i ist.
- 3. Fall:** $c_i(s \mid s_i^*) = c_i(s \mid s'_i)$ ist also die einzige verbleibende Möglichkeit.

Das beschließt den Beweis von Satz 4.10. \square

Korollar 4.12. *Sei $\Gamma(M)$ ein endliches Matroidspiel. Dann erreicht jede Beste-Antwort-Dynamik in höchstens $|I|^2 |R|^2$ Schritten ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Die Rosenthalpotentialfunktion $P : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} h_r(k)$ ist (wie in Satz 4.1 gezeigt) ein exaktes Potential für das Auslastungsspiel $\Gamma(N)$, insbesondere also auch ein Beste-Antwort-Potential. Ferner sieht man leicht, dass diese Potentialfunktion höchstens $|R| \cdot |I| \cdot |R| \cdot |I|$ viele verschiedene Werte annehmen kann.

Zusammen mit Korollar 3.22 können wir nun aus Satz 4.10 folgern, dass P auch ein Beste-Antwort-Potential für $\Gamma(M)$ ist. Mit Satz 2.8 ist dann jeder Beste-Antwort-Verbesserungspfad in $\Gamma(M)$ auch ein solcher im von P induzierten Koordinationsspiel. In diesem kann aber kein solcher Pfad länger als $|I|^2 |R|^2$ sein, was somit auch für alle Beste-Antwort-Verbesserungspfade in $\Gamma(M)$ gelten muss. \square

Korollar 4.13. *Sei $\Gamma_c(M, w)$ ein endliches kostengewichtetes Matroidspiel. Dann erreicht jede Beste-Antwort-Dynamik in höchstens $|I|^2 |R|^2$ Schritten ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Nach Lemma 4.9 ist $\Gamma_c(M, w)$ gewichtet (und damit auch Beste-Antwort-)isomorph zu $\Gamma(M)$ und dieses nach Satz 4.10 zu einem Auslastungsspiel mit selber Ressourcenmenge, in dem alle Ressourcenkosten nur Werte zwischen 1 und $|R| \cdot |I|$ annehmen. Da die Verknüpfung von Beste-Antwort-Isomorphismen wieder ein Beste-Antwort-Isomorphismus ist, folgt die zu zeigende Aussage dann analog zu Korollar 4.12. \square

Auf lastgewichtete bzw. gewichtete Matroidspiele lässt sich diese Aussage hingegen nicht verallgemeinern. Zwar funktioniert der Beweis von Satz 4.10 weiterhin (wenn auch mit größerem Bild der Kostenfunktionen), aber das dabei erhaltene alternative Auslastungsspiel ist dann ebenfalls gewichtet und hat daher im Allgemeinen kein Potential. Ackermann, Röglin und Vöcking geben in [ARV06, Theorem 14] ein lastgewichtetes⁹ Matroidspiel mit zwei Spielern, vier Ressourcen und monoton wachsenden Kostenfunktionen an, welches kein Beste-Antwort-Potential besitzt. Wegen Lemma 4.5 kann auch die gewichtete Version davon kein Beste-Antwort-Potential besitzen.

4.3 Weitere Zusammenhänge

Aus Satz 4.3 wissen wir bereits, dass jedes endliche gewichtete Auslastungsspiel mit affin linearen Kostenfunktionen ein exaktes Potential hat und daher nach Satz 4.1 äquivalent zu einem (ungewichteten) Auslastungsspiel ist. Der folgende Satz enthält im Wesentlichen die gleiche Aussage, allerdings auch für nicht-endliche Spiele und das konstruierte Auslastungsspiel ist etwas einfacher.

Satz 4.14. *Sei $\Gamma(M, w)$ ein gewichtetes Auslastungsspiel, in dem alle Kostenfunktionen affin linear sind. Dann gibt es ein dazu äquivalentes (ungewichtetes) Auslastungsspiel $\Gamma(N)$.*

Beweis. Seien also die Kostenfunktionen aus M von der Form $g_r(k) = a_r k + b_r$.

Definiere eine Ressourcenmenge $Q := \{ (r, \{i, i'\}) \mid r \in R, i, i' \in I \}$ mit Kostenfunktionen $h_{(r, \{i, i'\})}$ darauf so, dass gilt:

$$h_{(r, \{i, i'\})}(k) = \begin{cases} 0, & k = 1, i \neq i' \\ a_r w_i w_{i'}, & k = 2, i \neq i' \\ a_r w_i^2 + b_r w_i & k = 1, i = i' \end{cases}$$

Schließlich ist der Strategieraum von Spieler $i \in I$ gegeben durch

$$T_i := \{ \{ (r, \{i, i'\}) \mid r \in s_i, i' \in I \} \mid s_i \in S_i \}.$$

Dadurch erhalten wir das Auslastungsmodell $N := (I, Q, (T_i)_{i \in I}, (h_q)_{q \in Q})$. Die Lastenfunktionen des davon erzeugten Auslastungsspiel sind offensichtlich wohldefiniert, da keine Ressource von mehr als zwei Spielern genutzt werden kann. Die Wohldefiniertheit der Kostenfunktionen ergibt sich aus der Äquivalenz von $\Gamma(N)$ zu $\Gamma(M)$.

⁹Dort werden lastgewichtete Auslastungsspiele als „weighted congestion games“ bezeichnet.

Um diese Äquivalenz zu zeigen, betrachten wir den folgenden Morphismus $(\text{id}, \phi) : \Gamma(M, w) \rightarrow \Gamma(N)$ zwischen den beiden Spielen:

$$\phi_i : S_i \rightarrow T_i : s_i \mapsto \{ (r, \{i, i'\}) \mid r \in s_i, i' \in I \}$$

Dieser Morphismus ist offensichtlich auf allen Mengen bijektiv und zudem kostenerhaltend, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d_i(\phi(s)) &= \sum_{q \in \phi(s)_i = \phi_i(s_i)} h_q(l_q(\phi(s))) = \sum_{r \in s_i, i' \in I} h_{(r, \{i, i'\})}(l_{(r, \{i, i'\})}(\phi(s))) = \\ &= \sum_{r \in s_i} \left(h_{(r, \{i\})}(\underbrace{l_{(r, \{i\})}(\phi(s))}_{=1}) + \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} h_{(r, \{i, i'\})}(\underbrace{l_{(r, \{i, i'\})}(\phi(s))}_{=2 \iff r \in s_{i'}}) \right) = \\ &= \sum_{r \in s_i} \left(a_r w_i^2 + b_r w_i + \sum_{i' \in I \setminus \{i\} : r \in s_{i'}} a_r w_i w_{i'} \right) = \\ &= \sum_{r \in s_i} w_i \left(b_r + a_r \sum_{i' \in I : r \in s_{i'}} w_{i'} \right) = \sum_{r \in s_i} w_i (b_r + a_r l_r(s)) = \\ &= \sum_{r \in s_i} w_i g_r(l_r(s)) = c_i(s) \quad \square \end{aligned}$$

Beobachtung 4.15. Da immer nur an höchstens zwei Stellen Bedingungen an die Ressourcenkosten gestellt werden, lassen sich diese insbesondere immer als affin-lineare Funktionen realisieren. Im Gegensatz dazu ist das bei dem Auslastungsspiel, welches man über den Umweg eines exakten Potentials und Satz 4.1 erhalten würde, im Allgemeinen nicht der Fall.

Außerdem wird die Ressourcengröße dabei auf die Größe des Strategieraums des Ausgangsspiels vergrößert (welcher theoretisch $\mathcal{P}(R)^I$ sein kann). Bei dem hier konstruierten Auslastungsspiel ist die neue Ressourcenmenge hingegen lediglich $R \times I^2$.

Nachdem wir die Äquivalenz von ungewichteten Auslastungs- und exakten Potentialspielen in Satz 4.8 bereits auf kostengewichtete Auslastungs- und gewichtete Potentialspiele übertragen haben, werden wir nun untersuchen inwieweit sich dies auch für skalierte Auslastungs- und Potentialspiele fortsetzen lässt. Die eine Richtung gilt dabei weiterhin mit einem leicht schwächeren Isomorphiebegriff:

Satz 4.16. *Jedes skalierte N -Personen-Potentialspiel ist exakt isomorph zu einem skalierten Auslastungsspiel.*

Beweis. Gegeben also ein Spiel $\Gamma = (I, X, (c_i)_{i \in I})$ mit einem skalierten Potential P sowie entsprechenden Skalierungsfunktionen f_i . Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass es einen Wert $t \in \mathbb{R}$ gibt, der von allen Skalierungsfunktionen auf 0 abgebildet wird. Ist dies nämlich nicht der Fall, so wählen wir ein beliebiges aber festes Strategieprofil $\tilde{x} \in X$,

setzen $t := P(\tilde{x})$ und verwenden alternative Skalierungsfunktionen $f'_i(-) := f_i(-) - f_i(t)$. Diese sind offensichtlich immer noch streng monoton und bilden t auf 0 ab. Ferner sind sie weiterhin Skalierungsfunktionen zu dem gegebenen Potential P , denn es gilt:

$$\begin{aligned} f'_i(P(x)) - f'_i(P(x | \hat{x}_i)) &= (f_i(P(x)) - f_i(t)) - (f_i(P(x | \hat{x}_i)) - f_i(t)) = \\ &= f_i(P(x)) - f_i(P(x | \hat{x}_i)) = c_i(x) - c_i(x | \hat{x}_i) \end{aligned}$$

Nun definieren analog zu dem Beweis von Satz 4.1 folgendes Auslastungsmodell $M = (I, R, (S_i)_{i \in I}, (g_r)_{r \in R})$:

- $R := \{ (\{x_i\})_{i \in I} \mid x_i \in X_i \} \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X_i)$.
- Für die Ressourcenkosten definieren wir:

$$g_r(k) := \begin{cases} P(x), & r = (\{x_i\})_{i \in I} \in R_k \text{ und } k = N \\ t, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $S_i := \{ \{ r \in R \mid x_i \in r_i \} \mid x_i \in X_i \}$

Die induzierten Lastfunktionen sind automatisch wohldefiniert, da die Spielermenge endlich ist, die Wohldefiniertheit der Kostenfunktionen d_i folgt dann aus dem Beweis der exakten Isomorphie der Spiele Γ und $\Gamma(M, (f_i))$. Dazu betrachten wir den Morphismus $(\text{id}, \phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma(M)$, wobei $\phi_i(x) := s(x_i) := \{ r \in R \mid x_i \in r_i \}$. Dieser ist offenbar bijektiv auf allen Mengen und zudem exakt, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d_i(\phi(x)) - d_i(\phi(x | \hat{x}_i)) &= \sum_{r \in \phi(x)_i = \phi_i(x_i)} f_i \circ g_r(l_r(\phi(x))) - \sum_{r \in \phi_i(\hat{x}_i)} f_i \circ g_r(l_r(\phi(x | \hat{x}_i))) = \\ &= \sum_{r \in R_K : x_i \in r_i} f_i \circ \underbrace{g_r(l_r(\phi(x)))}_{=t \leftarrow r \neq (\{x_i\})_{i \in I}} - \sum_{r \in R_K : \hat{x}_i \in r_i} f_i \circ \underbrace{g_r(l_r(\phi(x | \hat{x}_i)))}_{=t \leftarrow r \neq (\{x_i\})_{i \in I} \cup \{\hat{x}_i\}} = \\ &= f_i \circ g_{(\{x_i\})_{i \in I}}(N) - f_i \circ g_{(\{x_i\})_{i \in I} \cup \{\hat{x}_i\}}(N) = \\ &= f_i \circ P(x) - f_i \circ P(x | \hat{x}_i) = c_i(x) - c_i(x | \hat{x}_i) \quad \square \end{aligned}$$

Die Rückrichtung hingegen können wir zumindest unter Zuhilfenahme der Rosenthal-Potentialfunktion nur in einer deutlich abgeschwächten Form zeigen:

Gegenbeispiel für stärkere Aussage?

Satz 4.17. *Jedes skalierte N -Personen-Singleton-Auslastungsspiel hat ein ordinales Potential.*

Beweis. Die Rosenthal-Potentialfunktion ist ein ordinales Potential, denn es gilt (für $s_i = \{r\}$, $\hat{s}_i = \{\hat{r}\}$):

$$\begin{aligned} c_i(s) < c_i(s | \hat{s}_i) &\iff f_i \circ g_r(l_r(s)) < f_i \circ g_{\hat{r}}(l_{\hat{r}}(s) + 1) \iff g_r(l_r(s)) < g_{\hat{r}}(l_{\hat{r}}(s) + 1) \\ &\iff P(s) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s)} g_r(k) < \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{l_r(s | \hat{s}_i)} g_r(k) = P(s | \hat{s}_i) \quad \square \end{aligned}$$

Schließlich wollen wir noch die allgemeinste Form der in dieser Arbeit definierten Auslastungsspiele betrachten: Gewichtete Auslastungsspiele mit nicht-anonymen Ressourcenkosten. Da endliche Spiele Satz 4.4 zufolge immer äquivalent zu einem gewichteten Auslastungsspiel sind, lassen sich insbesondere nicht-anonyme gewichtete Auslastungsspiele immer auch als solche darstellen. Dabei wird allerdings die Ressourcenmenge im Allgemeinen erheblich größer.

Begnügen wir uns allerdings mit gewichteter Isomorphie (statt kostenerhaltender) so ist ein entsprechender Wechsel zu gewichteten Auslastungsspielen ohne Vergrößerung der Ressourcenmenge und selbst bei abzählbar unendlichen Spielermengen möglich:

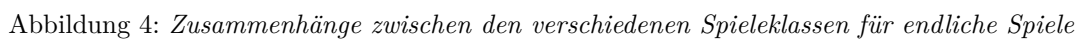
Satz 4.18. *Jedes nicht-anonyme Auslastungsspiel mit abzählbarer Spielermenge ist äquivalent zu einem lastgewichteten Auslastungsspiel und jedes nicht-anonyme gewichtete Auslastungsspiel mit abzählbarer Spielermenge ist gewichtet isomorph zu einem (anonymen) gewichteten Auslastungsspiel. Dabei verwenden jeweils beide Spiele die gleiche Ressourcenmenge.*

Beweis. Sei $M = (I, R, S, (g_r))$ das gegebene nicht-anonyme Auslastungsmodell. Da I abzählbar ist, können wir ohne Einschränkung $I \subseteq \mathbb{N}$ annehmen. Wir definieren nun einen Gewichtsvektor $v := (1/3^n)_{n \in I}$. Damit entspricht jede (endliche) Teilmenge $J \subseteq I$ einer eindeutigen Zahl $v(J) := \sum_{n \in J} 1/3^n$ und wir können neue (anonyme) Ressourcenkosten h_r definieren:

$$h_r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : k \mapsto \begin{cases} g_r(l_r(J)), & k = v(J) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir erhalten so ein (anonymes) Auslastungsmodell $N := (I, R, S, (h_r))$ und sehen leicht, dass $\Gamma(M)$ und $\Gamma_l(N, v)$ äquivalent sind. Ist ein zusätzlicher Gewichtsvektor $w = (w_i)_{i \in I}$ gegeben, so ist das nicht-anonyme gewichtete Auslastungsspiel $\Gamma(M, w)$ gewichtet isomorph zum gewichteten Auslastungsspiel $\Gamma(N, v)$, wobei $(w_i/v_i)_{i \in I}$ der Gewichtsvektor des Isomorphismus ist. \square

4.4 Überblick



59

Ausblick

Ausblick schreiben

Literatur

- [ARV06] Heiner Ackermann, Heiko Röglin und Berthold Vöcking. „Pure Nash Equilibria in Player-Specific and Weighted Congestion Games“. In: *Internet and Network Economics: Second International Workshop, WINE 2006, Patras, Greece, December 15-17, 2006. Proceedings*. Hrsg. von Paul Spirakis, Marios Mavronicolas und Spyros Kontogiannis. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006, S. 50–61. ISBN: 978-3-540-68141-0. DOI: [10.1007/11944874_6](https://doi.org/10.1007/11944874_6). URL: http://dx.doi.org/10.1007/11944874_6.
- [ARV08] Heiner Ackermann, Heiko Röglin und Berthold Vöcking. „On the Impact of Combinatorial Structure on Congestion Games“. In: *J. ACM* 55.6 (Dez. 2008), 25:1–25:22. ISSN: 0004-5411. DOI: [10.1145/1455248.1455249](https://doi.org/10.1145/1455248.1455249). URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1455248.1455249>.
- [FKS04] Dimitris Fotakis, Spyros Kontogiannis und Paul Spirakis. „Selfish Unsplittable Flows“. In: *Automata, Languages and Programming: 31st International Colloquium, ICALP 2004, Turku, Finland, July 12-16, 2004. Proceedings*. Hrsg. von Josep Díaz u. a. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004, S. 593–605. ISBN: 978-3-540-27836-8. DOI: [10.1007/978-3-540-27836-8_51](https://doi.org/10.1007/978-3-540-27836-8_51). URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-27836-8_51.
- [Har16] Tobias Harks. „Skript zur Vorlesung: Mathematische Spieltheorie im WS 15/16“. 4. Feb. 2016.
- [HK12] Tobias Harks und Max Klimm. „On the Existence of Pure Nash Equilibria in Weighted Congestion Games“. In: *Mathematics of Operations Research* 37.3 (2012), S. 419–436. DOI: [10.1287/moor.1120.0543](https://doi.org/10.1287/moor.1120.0543). eprint: <http://dx.doi.org/10.1287/moor.1120.0543>. URL: <http://dx.doi.org/10.1287/moor.1120.0543>.
- [HKM11] Tobias Harks, Max Klimm und Rolf H. Möhring. „Characterizing the Existence of Potential Functions in Weighted Congestion Games“. In: *Theory of Computing Systems* 49.1 (2011), S. 46–70. ISSN: 1433-0490. DOI: [10.1007/s00224-011-9315-x](https://doi.org/10.1007/s00224-011-9315-x). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00224-011-9315-x>.
- [Jim14] Alfi Jiménez. *Game Theory from the Category Theory Point of View*. 2014. URL: <https://www.gtcenter.org/Archive/2014/Conf/Jimenez1880.pdf> (besucht am 15.01.2017).
- [Lap99] Victor Lapitsky. „On some Categories of Games and Corresponding Equilibria“. In: *International Game Theory Review* 1.2 (1999), S. 169–185.
- [Mil13] Igal Milchtaich. „Representation of finite games as network congestion games“. In: *International Journal of Game Theory* 42.4 (2013), S. 1085–1096. ISSN: 1432-1270. DOI: [10.1007/s00182-012-0363-5](https://doi.org/10.1007/s00182-012-0363-5). URL: <https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/03.html>.

- [Mil15] Igal Milchtaich. „Polyequilibrium“. Bar-Ilan University, Department of Economics, 2015. URL: <https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/30.html>. Working Paper.
- [Mil96] Igal Milchtaich. „Congestion Games with Player-Specific Payoff Functions“. In: *Games and Economic Behavior* 13.1 (1996), S. 111–124. ISSN: 0899-8256. DOI: <http://dx.doi.org/10.1006/game.1996.0027>. URL: <https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/20.html>.
- [Mon06] Dov Monderer. „Multipotential Games“. In: *Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 2006. URL: https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/dov/image/bce0fb629a68f9b2e9bd487ebb73356d/multi_potential_games--monderer.pdf.
- [MS96a] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Fictitious Play Property for Games with Identical Interests“. In: *Journal of Economic Theory* 68.1 (1996), S. 258–265. ISSN: 0022-0531. DOI: <http://dx.doi.org/10.1006/jeth.1996.0014>. URL: https://www.researchgate.net/profile/Dov_Monderer/publication/4977154_Fictitious_Play_Property_for_Games_with_Identical_Interests/links/55b77cb408aed621de04635f.pdf.
- [MS96b] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Potential Games“. In: *Games and Economic Behaviour* (1996), S. 124–143.
- [MU04] Stephen Morris und Takashi Ui. „Best response equivalence“. In: *Games and Economic Behavior* 49.2 (2004), S. 260–287. ISSN: 0899-8256. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geb.2003.12.004>. URL: https://www.princeton.edu/~smorris/pdfs/paper_40_Best_Response_Equivalence.pdf.
- [Ros73] Robert W. Rosenthal. „A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria“. In: *International Journal of Game Theory* 2.1 (1973), S. 65–67. ISSN: 1432-1270. DOI: [10.1007/BF01737559](https://doi.org/10.1007/BF01737559). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01737559>.
- [Sch03] Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency*. Bd. B. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. ISBN: 978-3-540-44389-6.
- [VN97] Mark Voorneveld und Henk Norde. „A Characterization of Ordinal Potential Games“. In: *Games and Economic Behavior* 19.2 (1997), S. 235–242. ISSN: 0899-8256. DOI: <http://dx.doi.org/10.1006/game.1997.0554>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825697905546>.
- [Voo+99] Mark Voorneveld u. a. „Congestion games and potentials reconsidered“. In: *International Game Theory Review* 1.03n04 (1999), S. 283–299. URL: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219198999000219>.
- [Voo00] Mark Voorneveld. „Best-response potential games“. In: *Economics Letters* 66.3 (2000), S. 289–295. ISSN: 0165-1765. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1765\(99\)00196-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1765(99)00196-2). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165176599001962>.

- [Vor94] Nicolai N. Vorob'ev. *Foundations of Game Theory. Noncooperative Games*. Englisch. Übers. von Ralph P. Boas. Birkhäuser Basel, 1994. DOI: [10.1007/978-3-0348-8514-0](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8514-0).