Universität Augsburg

Institut für Mathematik

Masterarbeit

Insert Title

von:
Lukas Graf

Betreut von:
Prof. Dr. Tobias Harks

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Definition 1.1. Ein *Spiel* Γ *in strategischer Form* ist ein Tupel $(I, X = (X_i)_{i\in I}, (K_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$. Dabei ist

- I die Menge der Spieler,
- X_i die Menge der (reinen) Strategien von Spieler i,
- $(K_i, \preccurlyeq)$, eine total geordnete Menge, der Kostenraum von Spieler i und
- $c_i : X_i \to K_i$ die Kostenfunktion von Spieler i.

Das eigentliche Spiel besteht nun daraus, dass jeder Spieler versucht durch die Wahl seiner Strategie die eigenen Kosten zu minimieren.

wir nennen ein solches Spiel *endlich*, wenn der gesamte Strategieraum X endlich ist.

Beobachtung 1.2. Klassische Kostenminimierungsspiele erhält man durch Wahl von $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \leq)$ als Kostenraum für alle Spieler, Nutzenmaximierungsspiele durch Wahl von $(\mathbb{R}, \geq)$ als „Kosten"raum.

Beobachtung 1.3. Ist ein Spiel endlich, so können wir in der Regel ohne Einschränkung annehmen, dass auch die Menge der Spieler endlich ist. Denn die Menge $X = \prod_{i\in I} X_i$ kann nur endlich sein, wenn höchsten endliche viele X_i einelementig sind. Also haben in einem endlichen Spiel nur endlich viele Spieler mehr als eine Strategie. Für die Suche beispielsweise nach Nash-Gleichgewichten oder Verbesserungspfaden spielen aber nur solche Spieler eine Rolle.

Kann man diese Erkenntnis irgendwie mit Morphismen formalisieren (evtl. über Retrakte?)

Notation 1.4. Zu einem festen Spieler i bezeichne $X_{-i} := \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j$ das Produkt aller Strategieräume außer dem von Spieler i. Zu jedem Strategieprofil $x \in X$ bezeichne dann x_{-i} die Projektion dieses Profils auf den Raum X_{-i} und x_i die Projektion auf X_i (also die von Spieler i gewählte Strategie). Wir schreiben dann auch (x_i, x_{-i}) für das Strategieprofil x.

Sollte der Begriff Strategieprofil eigens definiert werden?

Später werden wir auch Abbildungen $\phi_i : X_i \to Y_i$ zwischen den spielerspezifischen Strategieräumen betrachten und die durch diese induzierte Abbildung $X \to Y : x = (x_i)_{i\in I} \mapsto \phi(x) := (\phi_i(x_i))_{i\in I}$ mit ϕ bezeichnen. Analog zur Notation für Strategieräume werden wir außerdem die Notation $\phi_{-i} : X_{-i} \to Y_{-i}$ verwenden.

Definition 1.5. Ein Strategieprofil $x \in X$ ist ein *Nash-Gleichgewicht*, wenn für jeden Spieler $i \in I$ und jede seiner Strategien $\hat{x}_i$ gilt:

$$c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) \succcurlyeq c_i(x)$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist also ein Strategieprofil, aus dem heraus kein Spieler einen Anreiz für einen einseitigen Strategiewechsel hat.

Aus [MS96b]:

Definition 1.6. Eine Folge von Strategieprofilen $x^0, x^1, x^2, \ldots$ ist ein *Verbesserungspfad*, wenn folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für jede Stelle n gibt es einen Spieler $i(n) \in I$, sodass das Profil x^{n+1} aus x^n durch alleinige Abweichung dieses Spielers entsteht, d.h. $x^{n+1} = (x^{n+1}_{i(n)}, x^n_{-i(n)})$

2. Der abweichende Spieler $i(n)$ verbessert sich, d.h. $c_{i(n)}(x^{n+1}) \prec c_{i(n)}(x^n)$.

Wir nennen einen endlichen Verbesserungspfad $x^0, x^1, \ldots, x^n$ *abgeschlossen*, wenn er nicht mehr nach hinten verlängert werden kann, d.h. es keine Strategie $\hat{x}_i$ gibt, mit $c_i(x^n_{-i}, \hat{x}_i) \prec c_i(x^n)$.

Definition 1.7. Ein Spiel Γ hat die *finite improvement property (FIP)*, wenn jeder Verbesserungspfad endlich ist.

Beobachtung 1.8. Jedes Ende eines abgeschlossenen Verbesserungspfades ist ein Nash-Gleichgewicht. Denn wäre dem nicht so, dann gäbe es wenigstens einen Spieler, der sich durch Abweichen noch verbessern kann - was zu einer Verlängerung des Verbesserungspfades führen würde.

Umgekehrt ist offenkundig auch jedes Nash-Gleichgewicht Ende wenigstens eines abgeschlossenen Verbesserungspfades - nämlich des trivialen, nur aus diesem Strategieprofil bestehenden Verbesserungspfades

Korollar 1.9. *Ein Spiel Γ besitzt genau dann (mindestens) ein Nash-Gleichgewicht, wenn es (mindestens) einen endlichen, maximalen Verbesserungspfad besitzt. Ein Spiel mit FIP besitzt dementsprechend immer wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.*

Sollte eine Beobachtung wirklich ein Korrolar haben?

Aus [Voo00]

Definition 1.10. Ein Verbesserungspfad $x^0, x^1, x^2, \ldots$ heißt *Beste Antwort-Pfad*, wenn der abweichende Spieler jeweils eine beste Alternativstrategie wählt, d.h.

Voorneveld nennt es (ohne Verbesserungsbedinung) beste Antwort-kompatibel

$$c_{i(n)}(x^{n+1}) = \min_{\hat{x}_{i(n)} \in X_{i(n)}} c_{i(n)}(\hat{x}_i, x^n_{-i(n)}).$$

Insbesondere setzt das natürlich voraus, dass ein solches Maximum auf dem Pfad immer existiert.

2 Potentiale

2.1 Definitionen

Definition 2.1. Eine Funktion $P : X \to \mathbb{R}$ heißt

Verallgemeinern? (total geordnete Menge K statt $\mathbb{R}$?)

- *Beste Antwort-Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ gilt:
$$\arg\min_{x_i \in X_i} c_i(x) = \arg\min_{x_i \in X_i} P(x)$$
- *verallgemeinertes ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i,x_{-i}) > c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) \implies P(x_i,x_{-i}) > P(\hat{x}_i, x_{-i})$$
- *ordinales Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i,x_{-i}) > c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) \iff P(x_i,x_{-i}) > P(\hat{x}_i, x_{-i})$$

Sind die K_i zudem geordnete abelsche Gruppen, so heißt P

- *skaliertes Potential*, wenn es streng monotone Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to K_i$ gibt, die 0 auf 0 abbilden, sodass für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i,x_{-i}) - c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) = f_i(P(x_i,x_{-i}) - P(\hat{x}_i, x_{-i}))$$

Sind die K_i Teilmengen eines gemeinsamen geordneten Rings K, so heißt P

- *gewichtetes Potential*, wenn es einen Gewichtsvektor $(w_i)_{i \in I}$ gibt, sodass für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i,x_{-i}) - c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) = w_i \cdot (P(x_i,x_{-i}) - P(\hat{x}_i, x_{-i}))$$
- *exaktes Potential*, wenn für jeden Spieler i und alle Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ sowie $x_i, \hat{x}_i \in X_i$ gilt:
$$c_i(x_i,x_{-i}) - c_i(\hat{x}_i, x_{-i}) = P(x_i,x_{-i}) - P(\hat{x}_i, x_{-i})$$

Kann man diese Definition irgendwie kompakter/übersichtlicher machen?

Exakte, gewichtete, ordinale und verallgemeinerte ordinale Potentiale wurden erstmals in [MS96b] definiert, beste Antwort-Potentiale erstmals in [Voo00].

2.2 Anschauung

In einem gewissem Sinne definiert jedes Potential ein alternatives Spiel mit gleichem Strategieraum, aber einer anderen, für alle Spieler einheitlichen Kostenfunktion (nämlich der Potentialfunktion). In einem solchen Spiel ist es nun viel einfacher beispielsweise Gleichgewichts- oder Optimalitätspunkte zu finden (da hierzu nur eine einzige Funktion betrachtet werden muss). Eigenschaften, die beim Übergang zurück zum ursprünglichen Spiel erhalten bleiben, kann man dann einfach in dem einfacheren Spiel überprüfen. Diesen Übergang werden wir später mit Hilfe von (Iso-)Morphismen formal fassen (siehe Abschnitt 4).

Hier wollen wir nun noch kurz darauf eingehen, wie sich die verschiedenen Potentialbegriffe anschaulich untereinander unterscheiden. Wir betrachten dazu (endliche) 2-Personenspiele. Deren Strategieraum kann man dann als Gitternetz in der Ebene auffassen, wobei jede Strategie von Spieler 1 einer senkrechten und jede Strategie von Spieler 2 einer waagerechten Gitterlinie entspricht. Kreuzungspunkte von zwei Gerade entsprechen dann gerade vollständige Strategieprofilen. Kostenfunktionen (ebenso wie Potentiale) sind dann „Reliefkarten“, deren Höhe den jeweiligen Kosten entspricht.

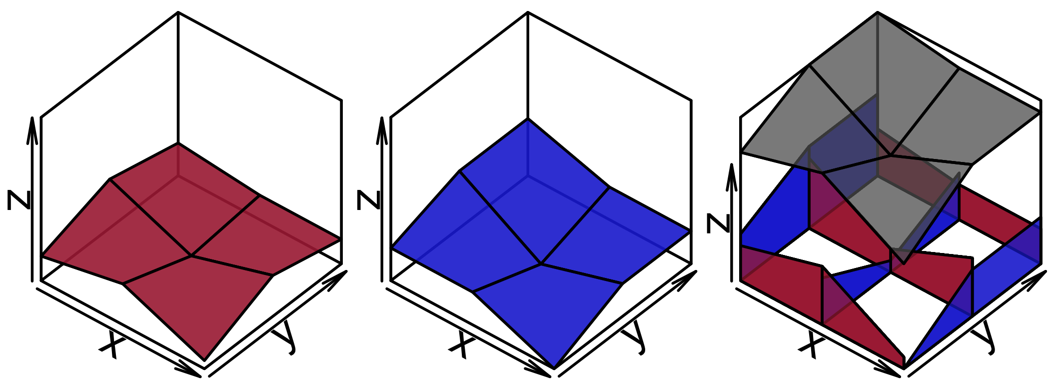

Abbildung 1: *Ein 2-Personenspiel mit exaktem Potential (grau): Spieler 1: rot, Spieler 2: blau*

Ein exaktes Potential entspricht dann einer gemeinsamen Reliefkarte für beide Spieler, die - im Falle eines exakten Potentials - „scheibenweise“ bis auf eine additive Konstante mit der eigentlichen Kostenfunktion übereinstimmt. Anders formuliert: Wird dies Strategie eines Spieler festgehalten, so kann der andere Spieler seine Kostenveränderungen bei der Wahl der verschiedenen ihm zur Verfügung stehenden Strategien auch anhand der Potentialfunktion ablesen.

Geht man nun über zu einem gewichteten Potential, so lesen die beiden Spieler das Potential sozusagen in verschiedenen Einheiten. Das heißt die Kostenveränderungen eines Spielers sind nur noch proportional zu den Potentialänderungen. Ein skaliertes Potential zeigt jedem Spieler noch an, welche der Kostenveränderungen eher groß und welche klein sind. Ordinale Potentiale zeigen nur noch die Richtung der Kostenveränderung an („wird teurer“ / „wird billiger“ / „Kosten bleiben konstant“) und verallgemeinerte ordinale Potentiale zeigen nur

eigentlich müssen verchiedene Einheiten nicht zwangsläufig proportional zueinander sein - für Längeneinheiten sollte es typischerweise aber stimmen noch echte Steigungen korrekt an. Beste-Antwort-Potentiale schließlich zeigen immer die beste Antwort an.

Zusammenhänge (evtl. schon nächstes Kapitel?)

2.3 Erste Sätze

Zu einem gegebenen Strategieprofil $x \in X$ sei dessen *Nachbarschaft* die Menge aller durch höchstens eine Abweichung erreichbarer Strategieprofile, d.h. die Menge $\{(\hat{x}_i, x_{-i}) | i \in N, \hat{x}_i \in X_i\}$. Wir nennen x dann ein *lokales Minimum* einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, wenn es ein Minimum innerhalb seiner Nachbarschaft ist.

Satz 2.2. *Sei Γ ein Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential P. Dann ist jedes lokale Minimum von P ein Nash-Gleichgewicht von Γ. Ist P sogar ein ordinales Potential, so gilt auch die umgekehrte Richtung.*

Diese Sätze hier evtl. nur erwähnen und erst später (nach der Definition von Morphismen) formalisieren (und beweisen)

Dieser Satz zeigt also, dass man Nash-Gleichgewichte allein durch Betrachten einer Potentialfunktion finden kann. Insbesondere folgt daraus direkt die Existenz von Nash-Gleichgewichten in einer Vielzahl von Potentialspielen:

Korollar 2.3. *Sei Γ ein Spiel mit einem kompakten Strategieraum und einer stetigen verallgemeinerten ordinalen Potentialfunktion. Dann hat Γ wenigstens ein Nash-Gleichgewicht.*

Insbesondere also haben endliche Potentialspiele immer ein Nashgleichgewicht. Satz 2.2 folgt mit Hilfe von Korollar 1.9 direkt aus dem folgenden Satz:

Streng genommen nicht wirklich, da das Korollar nur für Spiele gilt!?

Satz 2.4. *Sei Γ ein Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential P. Dann ist jeder Verbesserungspfad in Γ auch ein Verbesserungspfad bezüglich P. Ist P sogar ein ordinales Potential, so gilt auch die umgekehrte Richtung.*

Beweis. .

Beweis

□

Was kann man über Beste-Antwort-Potentiale sagen (vermtl. Zusammenhang zu Beste-Antwort-Pfade?)

Satz 2.5. *Hat ein Spiel die FIP, so besitzt es auch ein verallgemeinertes ordinales Potential.*

Umgekehrt besitzt jedes endliche *Spiel mit einem verallgemeinerten ordinalen Potential auch die FIP.*

Beweis. [MS96b]/[Mil96] (konstruktiver Beweis) □

3 Auslastungsspiele

3.1 Definitionen

Definition 3.1. Ein *Auslastungsmodell* M ist gegeben durch ein Tupel $(I, R, (S_i)_{i \in I}, K, (g_r)_{r \in R})$. Dabei ist

- I die Menge der Spieler,
- R die Menge der zur Verfügung stehenden Ressourcen,
- $S_i \subseteq \mathcal{P}(R)$ die Menge von endlichen Teilmengen der Ressourcenmenge, unter denen sich der Spieler i für eine Teilmenge entscheiden kann,
- K, eine geordnete abelsche Gruppe, der Kostenraum der Ressourcen und
- $g_r : \mathbb{R} \to K$ eine Funktion, welche die Kosten der Ressource $r \in R$ in Abhängigkeit von ihrer Auslastung beschreibt.

Definition 3.2. Jedes Auslastungsmodell M induziert ein *Auslastungsspiel* $\Gamma(M) := (I, S = (S_i)_{i \in I}, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:

$$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r \in R} g_r(l_r(s))$$

wobei $l_r : S \to \mathbb{N} : s \mapsto |\{i \in I \mid r \in s_i\}|$ die *Lastfunktion* der Ressource ist.

Hier bekommt man wohl Probleme, wenn Spieler- bzw. Ressourcenmenge unendlich ist.

Beispiel 3.3. .

Netzwerkauslastungsspiel

Definition 3.4. Zusammen mit einem Gewichtsvektor $(w_i)_{i \in I}$ induziert ein Auslastungsmodell M

- ein *kostengewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma_c(M, w) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:
  $$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(s))$$
  und die gleiche Lastfunktion wie im ungewichteten Fall.
- ein *lastgewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma_l(M, w) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion wie im ungewichteten Fall und die Lastfunktion $l_r : S \to \mathbb{N} : s \mapsto \sum\{w_i \mid r \in s_i\}$.
- ein *gewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma(M, w) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:
  $$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r \in R} w_i \cdot g_r(l_r(x))$$
  und die Lastfunktion $l_r : S \to \mathbb{N} : s \mapsto \sum\{w_i \mid r \in s_i\}$.

Beispiel 3.5. .

gewichtetes Netzwerkauslastungsspiel

Definition 3.6. Zusammen mit einer Skalierungsfunktionen $(f_i : K \to K_i)_{i \in I}$ und verallgemeinerten Lastfunktionen $(h_r : X \to \mathbb{R})_{r \in R}$ induziert ein Auslastungsmodell M

Ist diese Definition wirklich sinnvoll?

- ein *kostenskaliertes Auslastungsspiel* $\Gamma_c(M, f_i) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:
$$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r \in R} f_i(g_r(l_r(s)))$$
und die gleiche Lastfunktion wie im ungewichteten Fall.
- ein *lastskaliertes Auslastungsspiel* $\Gamma_l(M, h_r) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:
$$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r \in R} g_r(h_r(s))$$
- ein *verallgemeinertes gewichtetes Auslastungsspiel* $\Gamma(M, f_i, h_r) := (I, S, (K)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ durch die Kostenfunktion:
$$c_i : S \to K : s \mapsto \sum_{r \in R} f_i(g_r(h_r(s))).$$

3.2 Zusammenhänge zu anderen Spielen

Sinnvollerweise eher nach Morphismen-Kapitel? Oder hier bereits als Motivation für dieses?

Welche Endlichkeitsvoraussetzungen benötigt man hier jeweils?

Berühmter Satz von [MS96b]

Satz 3.7. *Jedes Auslastungsspiel besitzt ein exaktes Potential und jedes exakte Potentialspiel ist äquivalent zu einem Auslastungsspiel.*

Für gewichtete Auslastungsspiele zeigen Harks, Klimm und Möhring in [HKM11]:

Satz 3.8. *Gegeben eine Menge von stetigen Funktionen C. Dann besitzt genau dann jedes gewichtete Auslastungsspiel, welches nur Funktionen aus C als Kostenfunktionen verwendet, ein exaktes Potential, wenn C ausschließlich affin lineare Funktionen enthält.*

Und genau dann besitzt jedes gewichtete Auslastungsspiel, welches nur Funktionen aus C als Kostenfunktionen verwendet, ein gewichtetes Potential, wenn C ausschließlich affin lineare Funktionen oder ausschließlich Funktionen der Form $c(l) = a_c \cdot b^l + d_c$ enthält.

Für allgemeine Spiele gilt nach [Mil13]

Satz 3.9. *Jedes Spiel ist äquivalent zu einem gewichteten Auslastungsspiel (sogar Netzwerkauslastungsspiel mit ...).*

4 Morphismen und Isomorphismen von Spielen

Motivation: Warum betrachtet man überhaupt Morphismen von Spielen. Wie induzieren diese Isomorphismen?

Mögliche Motivationen:

- Jedes Potential definiert selbst wieder ein Spiel mit einer gemeinsamen Kostenfunktion für alle Spieler. Und in einem gewissen Sinne ist dieses Spiel „äquivalent"zum ursprünglichen Spiel (z.B. gleiche Gleichgewichtspunkte). Das Hin- und Herwechseln zwischen diesen beiden Versionen eines Spiels kann man durch Morphismen beschreiben und die Äquivalenz der beiden wird dann dadurch sichtbar, dass diese Morphismen *Isomorphismen* sind.
- Die Äquivalenz zwischen exakten Potentialspielen und Auslastungsspielen wird durch Morphismen beschrieben.
- Kategorientheoretische Sicht: Um eine Kategorie (hier: die der Spiele) zu verstehen, muss man ihre Morphismen kennen. Kennt man diese, so ergeben sich aus diesen auf natürliche Weise weitere Begriffe wie Isomorphismen von Spielen, Summen oder Produkte von Spielen.

Diese Punkte (insbesondere den letzten) näher ausführen?

4.1 Definitionen

Zu zwei gegebenen Spielen $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ und $\Gamma' = (I', X', (K'_i)_{i\in I'}, (c'_i)_{i\in I})$ kann man wie folgt eine Abbildung zwischen diesen beiden definieren:

- Eine bijektive Abbildung $\sigma : I \to I'$ zwischen den Spielermengen und
- für jeden Spieler $i \in I$ eine Abbildung $\phi_i : X_i \to X'_{\sigma(i)}$ seiner Strategien.

[Mil15] bezeichnet derartige Abbildungen *Strategieersetzungsvorschriften*.

Mehr dazu schreiben - erst später bei rationalen SEVs erwähnen?

Beobachtung 4.1. Mit dieser Definition ist es also nur möglich Abbildungen zwischen Spielen mit Spielermengen gleicher Kardinalität zu definieren. Im Folgenden werden wir ausschließlich solche Abbildungen betrachten (vergleiche aber Bemerkung 4.6 dazu wie auch in anderen Fällen Abbildungen zwischen Spielen definiert werden können). Zur Vereinfachung der Notation werden wir daher ab sofort immer davon ausgehen, dass die Spielermengen beider an einer Abbildung beteiligten Spiele bereits gleich und geeignet permutiert sind.

Abbildungen der obigen Form nehmen noch keinerlei Rücksicht auf die Kostenfunktionen der jeweiligen Spiele. Da diese aber in der Regel die interessierenden Eigenschaften eines Spiels (wie beispielsweise Gleichgewichte) festlegen, werden derartige Abbildungen im Allgemeinen noch wenig Aussagen über die beteiligten Spiele ermöglichen. So besagt der durch diese Art Abbildungen induzierte Isomorphiebegriff bspw. nur, dass zwei Spiele Spieler- und Strategiemengen gleicher Kardinalität besitzen.

Echte Morphismen zwischen Spielen sollten folglich noch mehr der Struktur eines Spiels erhalten, insbesondere in irgendeiner Form „verträglich“ mit den Kostenfunktionen sein. Je nach dem, welche Eigenschaften die Morphismen (und insbesondere die dadurch induzierten Isomorphismen) erhalten sollen, erhält man so unterschiedlich starke Einschränkungen daran, welche Abbildungen zwischen Spielen als *Morphismen zwischen Spielen* bezeichnet werden dürfen. Einige Möglichkeiten dafür werden wir nun kennenlernen.

Eine relative starke Forderung ist die, dass Morphismen *kostenerhaltend* sein müssen, wie sie in [Mil13] gestellt wird:

Definition 4.2. Ein Morphismus ϕ von $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ nach $\Gamma' = (I, X', (K_i)_{i\in I}, (c'_i)_{i\in I})$ heißt *kostenerhaltend*, wenn für alle Strategieprofile $x \in X$ und jeden Spieler $i \in I$ gilt:

$$c_i(x) = c'_i(\phi(x))$$

Ist ein solcher Morphismus gleichzeitig ein Isomorphismus, so nennen wir Γ und Γ' *äquivalent*.

Bemerkung 4.3. Zwei Spiele sind also genau dann äquivalent, wenn sie sich ausschließlich durch Umbenennung der Strategien ineinander überführen lassen. In [MS96b] (S. 133) wird dies als Isomorphie von Spielen bezeichnet.

Eine auf das Untersuchen von Nash- und Polygleichgewichten zugeschnittene Form von Morphismen wird in [Mil15] wie folgt definiert:

dort allerdings nur für Endomorphismen definiert

Definition 4.4. Ein Morphismus ϕ von $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ nach $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i\in I}, (c'_i)_{i\in I})$ heißt *rational*, wenn für alle Strategieprofile $x \in X$, jeden Spieler $i \in I$ und jede Strategie $x'_i \in X'_i$ gilt:

$$c'_i(\phi(x)) \leq c'_i(\phi_{-i}(x_{-i}), x'_i)$$

Ist diese Definition sinnvoll/zielführend?

Definition 4.5. Zwei Spiele $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I})$ und $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i\in I}, (c'_i)_{i\in I})$ heißen *isomorph*, falls es bijektive Abbildungen $\phi_i : X_i \to X'_i$ sowie bijektive und monotone Abbildungen $\psi_i : K_i \to K'_i$ gibt, sodass alle Diagramme der folgenden Form kommutieren:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "c_i"] & X' \arrow[d, "c'_i"] \\ K_i \arrow[r, "\psi_i"] & K'_i \end{tikzcd}$$

Bemerkung 4.6. Diese Definition ergibt sich aus der abstrakteren Definition für in [Lap99].

...

Auch auf Verallgemeinerung mit Garben hinweisen (erlaubt Abbildungen zwischen Spielen mit Spielermengen unterschiedlicher Kardinalität!)

Definition 4.7. Zwei im Sinne von Definition 4.5 isomorphe Spiele heißen *sozial isomorph*, wenn zusätzlich die Funktion

$$\sum \psi_i : \prod_{i \in I} K_i \to \prod_{i \in I} K'_i$$

monoton ist.

Das macht natürlich nur Sinn, wenn auf den beiden Produkträumen auch totale (?) Ordnungen existieren

Beispiel 4.8. lineare Funktionen

Eine ganze Familie von Morphismen erhält man zudem aus den in Abschnitt 2 beschriebenen Potentialen: Milchtaich definiert in [Mil13] einen Isomorphismusbegriff der dazu führt, dass jedes exakte Potentialspiel isomorph zu dem Spiel ist, bei dem die Potentialfunktion als für alle Spieler einheitliche Kostenfunktion verwendet wird. Analog hierzu lassen sich auch für die anderen Potentialbegriffe passende Begriffe eines Morphismus (und damit eines Isomorphismus) definieren:

Definition 4.9. Ein Morphismus ϕ von $\Gamma = (I, X, (K_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I})$ nach $\Gamma' = (I, X', (K'_i)_{i \in I}, (c'_i)_{i \in I})$ heißt

- *exakt*, wenn für alle Strategieprofile $x \in X$, Spieler $i \in I$ und Strategien $\hat{x}_i$ gilt:

$$c_i(x) - c_i(x_{-i}, \hat{x}_i) = c'_i(\phi(x)) - c'_i(\phi(x_{-i}, \hat{x}_i))$$

- *gewichtend*, wenn es einen Vektor $(w_i)_{i \in I}$ gibt, sodass für alle Strategieprofile $x \in X$, Spieler $i \in I$ und Strategien $\hat{x}_i$ gilt:

$$c_i(x) - c_i(x_{-i}, \hat{x}_i) = w_i \cdot \left(c'_i(\phi(x)) - c'_i(\phi(x_{-i}, \hat{x}_i))\right)$$

- *skalierend*, wenn es streng monotone Funktionen f_i gibt, sodass für alle Strategieprofile $x \in X$, Spieler $i \in I$ und Strategien $\hat{x}_i$ gilt:

$$c_i(x) - c_i(x_{-i}, \hat{x}_i) = f_i(c'_i(\phi(x)) - c'_i(\phi(x_{-i}, \hat{x}_i)))$$

- *ordinal*, wenn für alle Strategieprofile $x \in X$, Spieler $i \in I$ und Strategien $\hat{x}_i$ gilt:

$$c_i(x) < c_i(x_{-i}, \hat{x}_i) \implies c'_i(\phi(x)) < c'_i(\phi(x_{-i}, \hat{x}_i))$$

- *beste Antwort-erhaltend*, wenn für alle Spieler $i \in i$ und Strategieprofile $x_{-i} \in X_{-i}$ gilt:

$$\phi(\arg\min_{x_i \in X_i} c_i(x)) \subseteq \arg\min_{x'_i \in X'_i} c'_i(\phi_{-i}(x_{-i}), x'_i)$$

Bemerkung 4.10. Umgekehrt könnte man nun auch ausgehend von diesen Morphismen-Begriffen definieren, wann ein Spiel ein Potentialspiel ist: Ein Spiel ist nämlich genau dann ein exaktes/gewichtetes/ordinales/beste-Antwort-Potentialspiel, wenn es exakt/gewichtet/ordinal isomorph zu einem Spiel mit einer gemeinsamen Kostenfunktion für alle Spieler ist. Ein Spiel hat genau dann ein verallgemeinertes ordinales Potential, wenn es einen ordinalen Morphismus in ein solches Spiel gibt.

Zu beste Antwort: vgl. [MS96a], [MU04]

Induzieren diese Morphismen jetzt wirklich die behaupteten Isomorphismen?

Beobachtung 4.11. Es gelten folgende Beziehungen zwischen den verschiedenen Morphismenbegriffen:

$$\text{kostenerhaltend} \implies \text{exakt} \implies \text{gewichtend} \implies \text{skalierend} \implies \text{ordinal}$$

$$\text{rational} \implies \text{beste Antwort-erhaltend}$$

weitere Zusammenhänge? Evtl. dann als Diagramm?

Bemerkung 4.12. Ein alternativer Ansatz zur Definition von Morphismen von Spielen verwendet Vorob'ev in [Vor94]. Darin werden einzelne Strategien nicht zwangsläufig wieder auf einzelne Strategien abgebildet, sondern können gleich auf ganze Teilmengen des Bildstrategieraums abgebildet werden. Von diesem Morphismentyp werden dann verschiedene „approximativ kostenerhaltende“ Varianten betrachtet und die sich dadurch ergebende Kategorie studiert.

4.2 Erste Sätze

Proposition 4.13. *Sei $\phi : \Gamma \to \Gamma'$ ein ordinaler Morphismus und $x^0, x^1, \dots$ ein Verbesserungspfad in Γ. Dann ist $\phi(x^0), \phi(x^1), \dots$ ein Verbesserungspfad in Γ'. Ist der Pfad endlich und in Γ' abgeschlossen, so auch in Γ.*

Beweis. Da Morphismen spielerweise definiert sind, erhalten sie die Eigenschaft der unilateralen Abweichung. Die Ordinalität des Morphismus stellt ferner sicher, dass jeder Verbesserungsschritt ein Verbesserungsschritt bleibt.

Nehmen wir nun an $\phi(x^0), \dots, \phi(x^n)$ wäre ein abgeschlossener Verbesserungspfad in Γ', aber $x^0, \dots, x^n$ nicht abgeschlossen in Γ. Dann gäbe es folglich ein Strategieprofil $x^{n+1} \in X$, welches diesen Pfad in Γ verlängert. Aber wie wir gerade gezeigt haben wäre dann auch $\phi(x^0), \dots, \phi(x^n), \phi(x^{n+1})$ ein Verbesserungspfad in Γ', insbesondere also eine Verlängerung des ursprünglichen Pfades - im Widerspruch zu dessen vorausgesetzter Abgeschlossenheit. □

Korollar 4.14. *Ordinale Morphismen reflektieren Nash-Gleichgewichte. Das heißt, ist $x \in X$ ein Strategieprofil in Γ und ϕ ein ordinaler Morphismus in ein Spiel Γ', sodass $\phi(x)$ ein Nash-Gleichgewicht in diesem ist, dann war bereits x ein Nash-Gleichgewicht von Γ.*

Beweis. Es ist x ein trivialer Verbesserungspfad in Γ, dessen Bild $\phi(x)$ in Γ' abgeschlossen ist. Daher ist mit Proposition 4.13 x in Γ abgeschlossen und folglich (vgl. Beobachtung 1.8) x ein Nash-Gleichgewicht in Γ. □

Korollar 4.15. *Seien Γ und Γ' zwei ordinal-isomorphe Spiele. Dann ist $x \in X$ genau dann ein Nashgleichgewicht von Γ, wenn $\phi(x) \in X'$ ein Nashgleichgewicht von Γ' ist.*

Ordinal-isomorphe Spiele haben also die gleichen Nash-Gleichgewichte. Selbiges gilt auch für Verbesserungpfade, das heißt insbesondere, dass die FIP eines Spiels unter ordinaler Isomorphie erhalten bleibt.

Korollar 4.16. *Seien Γ und Γ' zwei ordinal-isomorphe Spiele. Dann hat Γ genau dann die FIP, wenn Γ' diese besitzt.*

Lemma 4.17. *Seien Γ und Γ' zwei sozial isomorphe Spiele. Dann ist $x \in X$ genau dann ein soziales Optimum von Γ, wenn $\phi(x) \in X'$ ein soziales Optimum von Γ' ist.*

Beweis. .

Folgt direkt mit Definitionen

□

Satz 4.18. *Besitzt ein Spiel Γ ein ordinales Potential, so ist es ordinal-isomorph zu einem Auslastungsspiel.*

Beweis. Analog zum Beweis der Äquivalenz von Spielen mit exaktem Potential und Auslastungsspielen in [MS96b], Beweis orientiert sich an [Mon06]. □

Beobachtung 4.19. Besitzt ein Spiel ein verallgemeinertes ordinales Potential, so gibt es einen ordinalen Morphismus in/von ein Auslastungsspiel. Was von beidem?

Beweis. .

Proofmining in oberem Beweis

□

Beobachtung 4.20. Nach [MS96b] Lemma 2.5 hat jedes Spiel mit FIP ein verallgemeinertes Potential, also

in/von...

4.3 Überblick

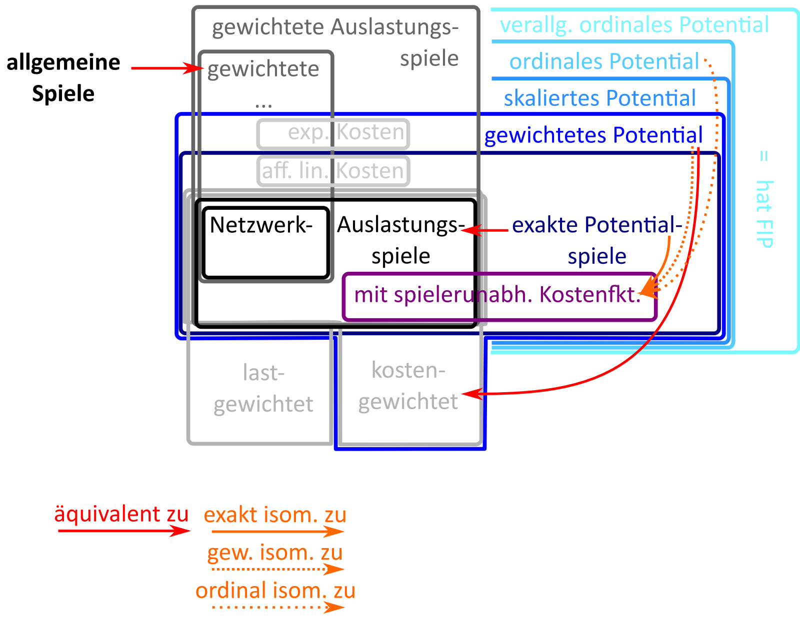

Abbildung 2: *Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Spieleklassen*

Literatur

[HKM11] Tobias Harks, Max Klimm und Rolf H. Möhring. „Characterizing the Existence of Potential Functions in Weighted Congestion Games“. In: *Theory of Computing Systems* 49.1 (2011), S. 46–70. ISSN: 1433-0490. DOI: 10.1007/s00224-011-9315-x. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00224-011-9315-x.

[Jim14] Alfi Jiménez. *Game Theory from the Category Theory Point of View*. 2014. URL: https://www.gtcenter.org/Archive/2014/Conf/Jimenez1880.pdf (besucht am 15. 01. 2017).

[Lap99] Victor Lapitsky. „On some Categories of Games and Corresponding Equilibria“. In: *International Game Theory Review* 1.2 (1999), S. 169–185.

[Mil13] Igal Milchtaich. „Representation of finite games as network congestion games“. In: *International Journal of Game Theory* 42.4 (2013), S. 1085–1096. ISSN: 1432-1270. DOI: 10.1007/s00182-012-0363-5. URL: https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/03.html.

[Mil15] Igal Milchtaich. „Polyequilibrium“. Bar-Ilan University, Department of Economics, 2015. URL: https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/30.html. Working Paper.

[Mil96] Igal Milchtaich. „Congestion Games with Player-Specific Payoff Functions“. In: *Games and Economic Behavior* 13.1 (1996), S. 111 –124. ISSN: 0899-8256. DOI: http://dx.doi.org/10.1006/game.1996.0027. URL: https://faculty.biu.ac.il/~milchti/papers/20.html.

[Mon06] Dov Monderer. „Multipotential Games“. In: *Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 2006. URL: https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/dov/image/bce0fb629a68f9b2e9bd487ebb73356d/multi_potential_games--monderer.pdf.

[MS96a] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Fictitious Play Property for Games with Identical Interests“. In: *Journal of Economic Theory* 68.1 (1996), S. 258 –265. ISSN: 0022-0531. DOI: http://dx.doi.org/10.1006/jeth.1996.0014. URL: https://www.researchgate.net/profile/Dov_Monderer/publication/4977154_Fictitious_Play_Property_for_Games_with_Identical_Interests/links/55b77cb408aed621de04635f.pdf.

[MS96b] Dov Monderer und Lloyd S. Shapley. „Potential Games“. In: *Games and Economic Behaviour* (1996), S. 124–143.

[MU04] Stephen Morris und Takashi Ui. „Best response equivalence“. In: *Games and Economic Behavior* 49.2 (2004), S. 260 –287. ISSN: 0899-8256. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.geb.2003.12.004. URL: https://www.princeton.edu/~smorris/pdfs/paper_40_Best_Response_Equivalence.pdf.

[Voo00] Mark Voorneveld. „Best-response potential games“. In: *Economics Letters* 66.3 (2000), S. 289 –295. ISSN: 0165-1765. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1765(99)00196-2. URL: http//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165176599001962.

[Vor94] Nicolai N. Vorob'ev. *Foundations of Game Theory. Noncooperative Games*. Englisch. Übers. von Ralph P. Boas. Birkhäuser Basel, 1994. DOI: 10.1007/978-3-0348-8514-0.