Formulario Fenomeni Ondulatori

Marco Caporale

1 Matematica

- $z = re^{i\varphi} = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ Rappresentazioni del numero complesso z
- $z^* = \overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ Complesso coniugato
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ Prodotto fra numeri complessi
- $z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ Rapporto fra numeri complessi
- $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi]$ Potenza di numero complesso
- $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ Identità di de Moivre
- $x = \Re(z)$ Parte reale del complesso
- $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ Rappresentazioni complesse di seno e coseno
  $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$
- Operatore lineare $\hat{L}(x)$
  $\rightarrow \forall x, y; \quad \hat{L}(x+y) = \hat{L}(x) + \hat{L}(y)$
  $\rightarrow \forall x, \forall a; \quad \hat{L}(ax) = a\hat{L}(x)$
- Integrali notevoli di seni e coseni; T periodo; $n, m \in \mathbb{N}$
  $\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \frac{T}{2}\delta_{nm}$
  $\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \frac{T}{2}\delta_{nm}$
  $\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0$
- Serie di Fourier, $f(t)$ limitata, periodica di periodo T
  $f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos n\omega t + b_n \sin n\omega t]$
  $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$
  $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt$
  $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$
- Serie complessa di Fourier
  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$
  $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt$
- Trasformata e antitrasformata di Fourier
  $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$
  $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

2 Oscillazioni Lineari

- $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{x}$ Legge di Hooke
- $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Moto armonico semplice
  $x(t) = l\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ Equazione oraria
  $l = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$
  $\varphi_0 = -\arctan(\frac{v_0}{\omega_0 x_0})$
  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
  (Nel caso del circuito LC avremo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)
  $z(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$ Soluzione dell'equazione differenziale

- $\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x$ Oscillatore armonico smorzato
  $\Delta = \frac{\beta}{m}^2 - 4\frac{k}{m}$
  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\frac{\beta}{m} \pm \sqrt{\Delta})$

  $\rightarrow \Delta > 0$ Moto sovrasmorzato
  $x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} + c_2 e^{-|\lambda_2|t}$

  $\rightarrow \Delta = 0$ Moto smorzato critico $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\beta}{2m} = -\eta$
  $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\eta t}$

  $\rightarrow \Delta < 0$ Moto oscillatorio smorzato $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\frac{\beta}{m} + i\sqrt{|\Delta|}) = -\eta \pm i\omega$
  $x(t) = c_1 e^{-\eta t + i\omega t} + c_2 e^{-\eta t - i\omega t} = e^{-\eta t}(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t) = Ae^{-\eta t}\cos(\omega t + \phi_0)$
  $x(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega t + \varphi_0)$ avendo usato $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{\beta}$

- Oscillazioni forzate $x(t) = x_{omo}(t) + x_{part}(t)$
  Forzante periodica
  $A = \frac{F_0/m}{(-\Omega^2+\omega_0^2)+i\gamma\Omega} = \frac{F_0}{\chi} = \frac{F_0}{i\Omega Z_m}$ ampiezza oscillazione da forzante periodica di pulsazione Ω
  $\delta = \arctan\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$
  $z(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}e^{i(\Omega t-\delta)}$
  $x(t) = \Re(z(t)) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}\cos(\Omega t - \delta)$
  $\dot{x(t)} = \Re(\dot{z(t)}) = -\frac{F_0\Omega}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}\sin(\Omega t - \delta)$
  Andamenti caratteristici della soluzione stazionaria (particolare)
  $\rightarrow \Omega << \omega_0$
  $A \simeq \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$; $\delta \simeq 0$
  $x(t) = \frac{F_0}{k}\cos\Omega t$ in fase con la forzante
  $\rightarrow \Omega >> \omega_0$
  $A \simeq \frac{F_0}{m\Omega^2}$; $\delta \simeq \pi$
  $x(t) = -\frac{F_0}{m\Omega^2}\cos\Omega t$ in opposizione di fase con la forzante
  $\rightarrow \Omega \approx \omega_0$
  $A \simeq \frac{F_0}{\beta\Omega}$; $\delta \simeq \frac{\pi}{2}$
  $x(t) = \frac{F_0}{\beta\omega_0}\sin\Omega t$ in quadratura di fase con la forzante

- $Z_m = \frac{f(t)}{\dot{z}(t)}$ Impedenza meccanica

- $R(\Omega) = \frac{(\gamma\Omega)^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}$ Funzione di risposta

- $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ Fattore di qualità
  RLC serie $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, RLC parallelo $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

- $x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}\cos(\Omega t - \delta) = |A|\cos(\Omega t - \delta) = A_{el}\cos\Omega t + A_{ass}\sin\Omega t$
  $A_{el}(\Omega) = \frac{F_0(\omega_0^2-\Omega^2)}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2]}$ Ampiezza elastica
  $A_{ass}(\Omega) = \frac{F_0\gamma\Omega}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2]}$ Ampiezza assorbitiva

3 Onde Meccaniche

- $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ Equazione delle onde di D'Alembert

- $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ Onda su corda, dati μ densità della corda e T tensione della corda

- $\xi(x,t) = A\sin(kx \mp \omega t)$ Onde Armoniche
  $\xi(x,t) = A\cos(kx \mp \omega t) = \Re(Ae^{i(kx\mp\omega t)})$

- $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Velocità delle onde meccaniche su corda

- $v_f = \frac{\omega}{k}(= v)$ Velocità di fase, v è quella di eq. D'Alembert

- $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v = vT_p$ Relazione lunghezza d'onda λ, periodo T_p, pulsazione ω e velocità v

- $\omega(k) = f(k)$ Relazione di dispersione
  $\omega(k) = v_f k$ Mezzi non dispersivi $\rightarrow$ eq. di D'Alembert è esatta
  $\omega(k) \neq v_f k$ Mezzi dispersivi $\rightarrow$ eq. di D'Alembert prima approssimazione

- $\xi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} + d_n e^{i(k_n x + \omega_n t)}]$
  Generalizzazione serie di Fourier complessa con onde progressive e regressive

- **Onde progressive su corda**

- $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x}$ Relazione derivate parziali per onda progressiva

- $F_y = -T \frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x=0} = +\frac{T}{v} \frac{\partial \xi(0,t)}{\partial t}$ Deformazione all'inizio della corda

- $Z = \frac{F_y(t)}{v_c(t)}$ Impedenza meccanica della corda
  $Z = \frac{T}{v} = T\sqrt{\frac{\mu}{T}} = \sqrt{T\mu}$

- $P(x,t) = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -T \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}$ Potenza nella corda
  $P(x,t) = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{T}{v} (\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t})^2 = Tv(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x})^2$
  $P(x,t) = Z(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t})^2$ Formula valida per le onde meccaniche

- $u_K(x,t) = \frac{1}{2}\mu(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2$ Densità lineare di energia cinetica
  $u_P(x,t) = \frac{1}{2}T(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2$ Densità lineare di energia potenziale
  $u_K(x,t) = u_P(x,t)$
  $u(x,t) = u_K(x,t) + u_P(x,t) = 2u_K(x,t) = 2u_P(x,t)$ Densità lineare energia meccanica onda
  $P(x,t) = vu(x,t)$ Legame potenza ed energia trasmessa

- Onde di trasporto Potenza ed Energia per onde meccaniche
  $\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2}$
  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$
  Mediate sul periodo
  $\langle P(x,t) \rangle = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} P(x,t)dt = \frac{1}{2} Z\omega^2 A^2 \neq 0$
  $\langle u(x,t) \rangle = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} u(x,t)dt = \frac{1}{2} \mu\omega^2 A^2 \neq 0$
  Energia trasportata in un periodo ($vT_P = \lambda, \lambda\mu = m$)
  $E = \int_0^{T_P} P(x,t)dt = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ (Uguale a quella dell'oscillatore armonico)

- Intensità per onde periodiche
  $I = \frac{E(\Delta t)}{\Delta t}$
  Per corda ed enti unidimensionali
  $I = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} P(x,t)dt = \langle P \rangle = \langle Z(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t})^2 \rangle$ ($= \frac{1}{2} Z\omega^2 A^2$ Per onda armonica)
  $I = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} P(x,t)dt = \frac{1}{2} Z \sum_{n=-1}^{+\infty} \omega_n^2 (a_n^2 + b_n^2)$
  $I = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n$ con $I_n = \frac{1}{2} Z\omega_n^2 (a_n^2 + b_n^2)$; I_n spettro di potenza dell'onda

- Onde su corda con discontinuità di Z ($Z_1 \neq Z_2$), i onda incidente, t trasmessa, r riflessa
  $A_t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} A_i$
  $A_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} A_i$
  $I_i = I_t + I_r$ Conservazione energia
  $T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$ Coefficiente di trasmissione
  $R = \frac{I_r}{I_i} = (\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2})^2$ Coefficiente di riflessione

- **Onde acustiche**

- $\rho(x,t) - \rho_0 = -\rho_0 (\frac{\partial \xi}{\partial x})_x$ Variazione di densità al passaggio dell'onda di compressione

- $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ Eq. D'Alembert per onda acustica

- $\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ Velocità onda acustica

- $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$ Onda di densità associata
  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ Onda di pressione associata

- $Z = \frac{\gamma P_0}{v} = \sqrt{\gamma P_0 \rho_0}$ Impedenza acustica specifica
  $\delta p = Z\frac{\partial \xi}{\partial t}$ Relazione causa-effetto fra passaggio dell'onda e variazione di pressione

- $I = \langle \frac{\mathcal{P}}{S} \rangle = \langle Z(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2 \rangle$ Intensità dell'onda acustica (attenzione ha udm diversa da onda su corda)

- $\beta_s = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$ Livello sonoro in deciBel

- Interferenza per onde con stesso ω (*Onde coerenti*); ampiezze A_1, A_2; seconda onda sfasata di φ_0

  $\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = \Re(Ae^{i\varphi_0}e^{i(kx-\omega t)})$
  con $A = |A_1 + A_2 e^{i\varphi_0}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi_0}$
  $2A_1A_2\cos\varphi_0$ Termine d'interferenza
  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\varphi_0$ Intensità onda risultante

- Battimenti
  Onde con stessa ampiezza (A); pulsazioni simili ($\omega_1 \approx \omega_2$); numeri d'onda simili ($k_1 \approx k_2$)
  $\Delta k = \frac{k_2-k_1}{2}$ $\Delta\omega = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ $k_0 = \frac{k_2+k_1}{2}$ $\omega_0 = \frac{\omega_2+\omega_1}{2}$
  $\xi(x,t) = 2A\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)\cos(k_0x - \omega_0 t)$
  $2A\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$ Componente *modulante*
  $\cos(k_0x - \omega_0 t)$ Componente *portante*
  $v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$ Velocità di fase
  $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$ Velocità di gruppo
  Per mezzi non dispersivi $v_f = v_g$; per mezzi dispersivi $v_f \neq v_g$ (generalmente osserviamo $v_g < v_f$)

- Effetto doppler (S sorgente, R ricevente; in avvicinamento)
  $f_R = f_m(1 + \frac{v_R}{v_m}) = f_S\frac{1+\frac{v_R}{v_m}}{1-\frac{v_S}{v_m}} = f_S\frac{v_m+v_R}{v_m-v_S}$
  (dove v_m velocità onda nel mezzo)

- Generalizzazione in 3D
  $\nabla^2\xi(\overrightarrow{r},t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi(\overrightarrow{r},t)}{\partial t^2}$ D'Alembert
  $\xi(\overrightarrow{r},t) = f(\hat{u}\cdot\overrightarrow{r} - vt)$ Onde piane
  $\xi(\overrightarrow{r},t) = A\cos(k\hat{u}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t)$ Onde armoniche piane (vale principio sovrapposizione)
  $\overrightarrow{k} = k\hat{u}$ Vettore d'onda $k = \frac{\omega}{v}$ Numero d'onda

- Onde sferiche (passaggio alla rappresentazione polare) $(x,y,z,t) \to (r,\theta,\varphi,t)$
  $\xi(\overrightarrow{r},t) = \xi(r,\theta,\varphi,t) = \frac{f(r\mp vt)}{r}Y_l^m(\theta,\varphi)$
  $f(r-vt) = A\cos(kr - \omega t + \alpha)$ Onde armoniche sferiche
  Periodicità temporale $T_p = \frac{2\pi}{\omega}$
  Periodicità spaziale scala con $\frac{1}{r}$, abbiamo pseudoperiodo $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

- Onde piane vettoriali

$$\begin{cases} \xi_x(z,t) = f_x(z-vt) \\ \xi_y(z,t) = f_y(z-vt) \\ \xi_z(z,t) = f_z(z-vt) \end{cases}$$

  Per onda generica $\overrightarrow{\xi}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{f}(\hat{u}\cdot\overrightarrow{r} - vt)$
  Onda trasversale $\hat{u}\cdot\overrightarrow{f}(\hat{u}\cdot\overrightarrow{r} - vt) = 0$
  Onda longitudinale $\hat{u}\times\overrightarrow{f}(\hat{u}\cdot\overrightarrow{r} - vt) = 0$

- Polarizzazione lineare

$$\begin{cases} \xi_x(z,t) = f_x(z-vt) = A_xf(z-vt) \\ \xi_y(z,t) = f_y(z-vt) = A_yf(z-vt) \\ \xi_z(z,t) = f_z(z-vt) = 0 \end{cases} \iff \frac{\xi_x(z,t)}{\xi_y(z,t)} = \frac{A_x}{A_y}$$

- Polarizzazione circolare ed ellittica

$$\begin{cases} \xi_x(z,t) = f_x(z-vt) = A_x\cos(kz-\omega t) \\ \xi_y(z,t) = f_y(z-vt) = A_y\cos(kz-\omega t+\beta) \\ \xi_z(z,t) = f_z(z-vt) = 0 \end{cases} \iff ((\frac{\xi_x}{A_x})^2 + (\frac{\xi_y}{A_y})^2 - 2\cos(\beta\frac{\xi_x}{A_x}\frac{\xi_y}{A_y}) = \sin^2\beta)$$

  Casi

- $\beta = 0 \Rightarrow \frac{\xi_y}{A_y} = \frac{\xi_x}{A_x}$ Polarizzazione lineare
- $\beta = \pm\pi/2 \Rightarrow ((\frac{\xi_x}{A_x})^2 + (\frac{\xi_y}{A_y})^2 = 1)$ Assi paralleli agli assi coordinati
- $\beta = \pm\pi/2; A_x = A_y \Rightarrow ((\frac{\xi_x}{A_x})^2 + (\frac{\xi_y}{A_y})^2 = 1)$ Polarizzazione circolare

Polarizzazione destrorsa $-\pi \leq \beta \leq 0$ (Vedendolo arrivare, antiorario)
Polarizzazione sinistrorsa $0 \leq \beta \leq \pi$ (Vedendolo arrivare, orario)

- Huygens-Fresnel
  $f(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ Fattore correttivo per la propagazione
- Interferenza onde sonore
  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi_0 = 4I_0\cos^2\frac{\varphi}{2}$

4 Onde Elettromagnetiche

- Equazioni di Maxwell (forma locale)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Nel vuoto

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{E} = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases} \iff (\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{H}) \begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{E} = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{E} = -\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \overrightarrow{H} = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Che contengono le Eq di D'Alembert

  - $\nabla^2 \overrightarrow{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$
  - $\nabla^2 \overrightarrow{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}$
  - $\nabla^2 \overrightarrow{H} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{H}}{\partial t^2}$

- $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$
  $\nabla \cdot = i\overrightarrow{k} \cdot$
  $\nabla \times = i\overrightarrow{k} \times$
  $\nabla = i\overrightarrow{k}$

- Onde in mezzi senza cariche e senza correnti ($\mu = \mu_r\mu_0,\ \varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{E} = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{E} = -\mu\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \overrightarrow{H} = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{H} = \varepsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$|\overrightarrow{E}| = v|\overrightarrow{B}| = v\mu|\overrightarrow{H}|$
$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}}$

Impedenza elettromagnetica del mezzo $Z = v\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ $\quad [Z] = [R]$ misurata in Ohm
$|\overrightarrow{E}| = Z|\overrightarrow{H}|$ causa effetto $\rightarrow E$ causa H
Impedenza del vuoto $Z_0 = c\mu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$

- Mezzi ottici ($\mu_r \approx 1$)
  $v \approxeq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$
  Indice di rifrazione n $\qquad n = \frac{c}{v} \approxeq \sqrt{\varepsilon_r}$
  $Z = v\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approxeq \frac{Z_0}{n}$

- Vettore di Poynting
$\overrightarrow{S} = \frac{\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{E}\times\overrightarrow{H} \qquad [\overrightarrow{S}] = W/m^2$
Conservazione energia elettromagnetica in forma locale $\quad \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla\cdot\overrightarrow{S} = 0$
$u_{EM} = \frac{1}{vZ}E^2 = \frac{Z}{v}H^2 = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu}B^2 = \mu H^2$
$|\overrightarrow{S}| = ZH^2 = \frac{1}{Z}E^2 = vu_{EM}$

- Intensità per onde elettromagnetiche
$I = \langle|\overrightarrow{S}|\rangle = \langle\frac{1}{Z}E^2\rangle = \langle ZH^2\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z} = \frac{1}{2}ZH_0^2 = v\langle u_{EM}\rangle$

- Pressione di radiazione $p = \frac{I}{c} = \frac{|\overrightarrow{S}|}{c}$

- Campo di radiazione $E_\theta(r,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{c^2 r}a(t-\frac{r}{c})$
Carica oscillante di moto armonico
$E_\theta(r,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{\omega}{c})^2\frac{\sin\theta}{r}A\cos[\omega\cdot(t-\frac{r}{c})]$

- Legge di Lambert
$I(z) = I_0 e^{-\mu z}$
μ coefficiente di assorbimento, $\mu = 2\beta$, $\beta = k_I = \frac{\omega n_I(\omega)}{c}$

- Velocità di gruppo
$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n_r + \omega\frac{dn_r}{d\omega}}$
$\frac{dn_r}{d\omega} \geq 0 \Rightarrow v_g \leq v_f$ Dispersione normale
$\frac{dn_r}{d\omega} \leq 0 \Rightarrow v_g \geq v_f$ Dispersione anomala

- Eq. di Maxwell nei metalli ($\overrightarrow{J} = \sigma\overrightarrow{E}$)

$$\begin{cases} \nabla\cdot\overrightarrow{E} = 0 \\ \nabla\times\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\overrightarrow{B} = 0 \\ \nabla\times\overrightarrow{B} = \mu\sigma\overrightarrow{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Da cui eq. del campo elettrico (non di D'Alembert, solo nel limite $\sigma\to 0$)
$\nabla^2\overrightarrow{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$
$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 + i\frac{\mu\sigma v^2}{\omega}} = k_r + ik_I$
Il mezzo risulta dispersivo e vale Legge di Lambert ($\mu = 2k_I$)
Generalmente $\overrightarrow{E}\perp\overrightarrow{B}$, non in fase
$\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{E} = \omega\overrightarrow{B} \to B_0 = E_0|\overrightarrow{k}|\frac{e^{i\delta}}{\omega}$

- Legge di Malus per i polarizzatori (onda ruotata di φ_0 rispetto asse polarizzatore, E oscilla su x)
$I(\varphi_0) = \langle\frac{E_t^2}{Z}\rangle = \langle\frac{E_x^2\cos^2\varphi_0}{Z}\rangle = I_0\cos^2\varphi_0$

- Riflessione e Rifrazione per onde EM
In incidenza normale

$$\begin{cases} E_t = \frac{2n_1}{n_1+n_2}E_i \\ E_r = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}E_i \end{cases} \iff \begin{cases} E_t = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}E_i \\ E_r = \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}E_i \end{cases} \iff \begin{cases} H_t = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}H_i \\ H_r = \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}H_i \end{cases}$$

$I_r + I_t = I_i$ Conservazione energia nell'interfaccia tra i due mezzi non conduttori
$T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$ Coefficiente di trasmissione, $I_t = TI_i$
$R = (\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2})^2$ Coefficiente di trasmissione, $I_r = RI_i$
$R + T = 1$

- Incidenza non normale
$n_1\sin\theta_i = n_2 sin\theta_t$ Legge di Snell

- Definito *Piano Incidente* il piano definito dalla normale alla superficie e la direzione del moto dell'onda.
Posti $\alpha = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$, $\quad\beta = \frac{n_2}{n_1}$, $\quad$ Pedici: i=incidente, r=riflesso, t=trasmesso
Polarizzazione sul piano incidente

$$\begin{cases} E_{i\parallel} + E_{r\parallel} = \alpha E_{t\parallel} \\ E_{i\parallel} - E_{r\parallel} = \beta E_{t\parallel} \end{cases} = \begin{cases} E_{t\parallel} = \frac{2}{\alpha+\beta}E_{i\parallel} \\ E_{r\parallel} = \frac{\alpha-\beta}{2}E_{t\parallel} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}E_{i\parallel} \end{cases} \Rightarrow$$

→Formule di Fresnel per $E_\parallel$

$$\begin{cases} E_{t\parallel} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i}E_{i\parallel} \\ E_{r\parallel} = \frac{n_1\cos\theta_t-n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i}E_{i\parallel} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_\parallel = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i} \\ r_\parallel = \frac{n_1\cos\theta_t-n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i} \end{cases} \begin{cases} E_{t\parallel} = t_\parallel E_{i\parallel} \\ E_{r\parallel} = r_\parallel E_{i\parallel} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_\parallel = (\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta})^2 = (\frac{n_1\cos\theta_t-n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i})^2 = (r_\parallel)^2 \\ T_\parallel = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \end{cases} \begin{cases} I_{r\parallel} = R_\parallel I_{i\parallel} \\ I_{t\parallel} = T_\parallel I_{i\parallel}\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} \end{cases}$$

$\frac{I_{i\parallel}}{\cos\theta_i} = \frac{I_{r\parallel}}{\cos\theta_i} + \frac{I_{t\parallel}}{\cos\theta_t}$ (non si conserva l'intensità)

Polarizzazione sul piano perpendicolare al piano incidente

$$\begin{cases} E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{tperp} \\ E_{i\perp} - E_{r\perp} = \alpha\beta E_{t\perp} \end{cases} = \begin{cases} E_{t\perp} = \frac{2}{(1+\alpha\beta)}E_{i\perp} \\ E_{r\perp} = \frac{(1-\alpha\beta)}{2}E_{t\perp} = \frac{(1-\alpha\beta)}{(1+\alpha\beta)}E_{i\perp} \end{cases} \Rightarrow$$

→Formule di Fresnel per $E_\perp$

$$\begin{cases} E_{t\perp} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t}E_{i\perp} \\ E_{r\perp} = \frac{n_1\cos\theta_i-n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t}E_{i\perp} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_\perp = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t} \\ r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_i-n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t} \end{cases} \begin{cases} E_{t\perp} = t_\perp E_{i\perp} \\ E_{r\perp} = r_\perp E_{i\perp} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_\perp = (\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta})^2 = (\frac{n_1\cos\theta_i-n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t})^2 = (r_\perp)^2 \\ T_\perp = \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha\beta)^2} \end{cases} \begin{cases} I_{r\perp} = R_\perp I_{i\perp} \\ I_{t\perp} = T_\perp I_{i\perp}\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} \end{cases}$$

$\frac{I_{i\perp}}{\cos\theta_i} = \frac{I_{r\perp}}{\cos\theta_i} + \frac{I_{t\perp}}{\cos\theta_t}$ (non si conserva l'intensità)

Angolo di Brewster θ_B $\quad(r_\parallel = 0)$
$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

- Interferenza di Young

  $\rightarrow \sin\theta_{max} = \frac{n\lambda}{d}$, Interferenza costruttiva, campo massimo $|\overrightarrow{E}(P)| = 2E'_0$, $I(P) = 4I_0$
  $\Delta\varphi = kd\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = 2n\pi$

  $\rightarrow \sin\theta_{min} = (n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{d}$, Interferenza costruttiva, campo massimo $|\overrightarrow{E}(P)| = 0$, $I(P) = 0$
  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = (2n+1)\pi$

  Intensità: $I(\Delta\varphi) = I_0|1+e^{i\Delta\varphi}|^2 = 4I_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2} = 4I_0\cos^2(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta)$
  Controllo dell'interferenza dato dal fattore $\frac{d}{\lambda}$
  $d \ll \lambda$ Un solo massimo di interferenza
  $d \gg \lambda$ Non posso considerare le sorgenti puntiformi
  $d > \lambda$ Interferenza alla Young

  Interferenza con più sorgenti ($\varphi = k(r_2 - r_1) = kd\sin\theta$)
  $\overrightarrow{E}(P) = \frac{e^{\frac{N}{2}i\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}\frac{\sin(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$
  $I(\Delta\varphi) = I_0|\frac{e^{\frac{N}{2}i\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}\frac{\sin(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin\frac{\varphi}{2}}|^2 = I_0\frac{\sin^2(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = I_0\frac{\sin^2(N\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta)}{\sin^2(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta)}$
  $I_{max} = N^2I_0$
  $\sin\theta_{max} = \frac{m\lambda}{d}$ Posizione dei massimi principali
  $\sin\theta_{min} = \frac{n\lambda}{Nd}$ Posizione dei minimi (eliminare dal computo quelli coincidenti coi massimi principali $\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta = m\pi$)
  $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}$ Larghezze a mezza altezza

- Reticolo (dispositivo di N fenditure grandi, N' fenditure per unità di lunghezza)
  $\mathcal{D} = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta_{max}}$ Dispersione, capacità di deviare la luce al variare della λ
  $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{Nm}{\cos\theta_{max}} \approx Nm$ Potere risolutivo, capacità di vedere separati massimi a lunghezze d'onda vicine

- Diffrazione da Fenditura
  Regime di Fresnel $\rightarrow$ vicino
  Regime di Fraunhofer $\rightarrow$ lontano
  a ampiezza della fenditura, $\Delta\varphi = ka\sin\theta$
  $\sin\theta_{min} = n\frac{\lambda}{a}$ Minimi di intensità a $\Delta\varphi = ka\sin\theta = 2n\pi = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta$, $n \neq 0$ che è massimo
  $I(\theta) = I_0\frac{\sin^2(\alpha/2)}{(\frac{\alpha}{2})^2} = I_0\frac{\sin^2(\frac{ka\sin\theta}{2})}{(\frac{ka\sin\theta}{2})^2}$ Intensità
  Larghezza del massimo centrale:
  -Come distanza fra 2 minimi $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$
  -Come altezza a mezza altezza $\Delta\theta = \frac{\lambda}{2a}$

- Diffrazione da foro circolare
  $I(\theta) = I_0\frac{J_1^2(\alpha)}{(\frac{\alpha}{2})^2} = 4I_0\frac{J_1^2(\frac{kD\sin\theta}{2})}{(\frac{kD\sin\theta}{2})^2}$ $J_1(\alpha)$ Funzione di Bessel di ordine 1
  Posizione del primo minimo $\sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{d}$

- Potere separatore (o risolutivo), risoluzione
  $\frac{1}{\gamma_R} = \frac{D}{1.22\lambda}$ capacità di spostare il minimo di una sorgente sul minimo dell'altra (limite teorico)

5 Ottica Geometrica

- $\theta_i = \theta_r$ Riflessione
- $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$ Legge di Snell
- Specchio piano $\rightarrow m = 1$ Ingrandimento

Se il formulario ti è piaciuto considera di supportarmi con una donazione al link paypal.me/gorsedh
Fa un po' schifo il formulario ma almeno ci si passa l'esame ecco
I soldi sono comunque ben graditi grz