Appunti dal corso Introduzione ai Sistemi Complessi

Grufoony

1 novembre 2021

1 Sistema Complesso

Definizione 1.1. *Sistema Complesso è un sistema dinamico composto da sottosistemi interagenti tra loro.*

Per lo studio di un sistema complesso si usa solitamente un approccio olistico, ossia studiando prevalentemente le proprietà macroscopiche del sistema totale, senza considerare i singoli sottosistemi. Un'osservazione importante che va effettuata è che un sistema complesso **prevede**, non descrive. Alcune delle proprietà principali sono:

- **complessità**: presenza di molti d.o.f. (molti sottosistemi)
- **proprietà emergenti**: derivano dal grande numero di sottosistemi. Ad esempio possiamo definire *fluido* un insieme di molte particelle ma la particella singola non può essere fluida.
- **autorganizzazione**: i sistemi complessi sono ibridi, ossia metà stocastici e metà deterministici. Per studiarli devo dare ugual peso a entrambi gli aspetti.

2 Distribuzioni

Vediamo ora una serie di distribuzioni e teoremi ad esse legati che ci aiuteranno nell'analisi dei sistemi.

Definizione 2.1.

- *Gaussiana*
  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- *Esponenziale*
  $\rho(x) = \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{k}}$
- *Potenza*
  $\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}$, *con* $a > 0$

Definizione 2.2. *Momenti di una distribuzione:*
$< x^k >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \rho(x) dx$

Teorema 2.1. *Invarianza di scala:*
se $\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}$ *allora posto* $y = \lambda x$ *si ha* $\rho(y) = \frac{\lambda^a}{x^a} \propto \frac{1}{y^a}$

Teorema 2.2. *Limite centrale:*
Siano x_k *variabili casuali indipendenti, allora:*
$\lim_{N\to\infty} z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} x_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

Ora possiamo dare una definizione di probabilità:

Definizione 2.3. *Probabilità:*
$p(x \in [a, b]) = \int_a^b \rho(x)dx$

Definizione 2.4. *Probabilità cumulata:*
$p(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \rho(x)dx$

3 Costruzione di un modello

Punto fondamentale di un sistema complesso è costruire un modello matematico che riesca a riprodurre le sue caratteristiche fondamentali, per poi studiarlo. La prima cosa da definire è l'*ambiente* in cui ci troviamo. Questo può essere neutro o avere caratteristiche, ad esempio una distribuzione di nutrimento (per sistemi biologici). Altro punto fondamentale è definire *spazio e tempo*. Spesso non fa differenza la scelta di spazi e tempi discreti rispetto ai continui, quindi è preferibile assumere una discretizzazione iniziale per poi passare al continuo successivamente. Una volta definito lo spazio bisogna poi decidere le condizioni al contorno, ossia il comportamento ai bordi. Posso a questo punto avere *barriere* di tre tipi:

- **riflettenti**, dove ho un bordo *non* oltrepassabile. Si crea quindi un fenomeno di **attrattività delle pareti**.
- **periodico**, dove ho i bordi coincidenti (esco da una parte e rientro dall'altra). Lo spazio assume in questo caso una forma toroidale.
- **assorbenti**, dove gli oggetti "uscenti" vengono distrutti. In questo caso bisogna di introdurre delle *sorgenti* nel modello per evitare di perdere tutti i soggetti.

Si nota facilmente come più piccolo sia il modello, più importante sia il contributo degli effetti di bordo.
Nella maggior parte dei sistemi non tutti i soggetti hanno le stesse caratteristiche: si definiscono allora **classi** di appartenenza, legate tra loro da relazioni matematiche.

3.1 Random Walk 1D

Il modello più basilare di sistema complesso è sicuramente la random walk su una retta, ossia un punto che ogni istante di tempo decide in maniera casuale se spostarsi a destra o a sinistra. Sia $p = \frac{1}{2}$ la probabilità di muoversi verso destra (quindi anche a sinistra) di un passo Δx. Si hanno:

- {R}: $p(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x$
- {L}: $p(t+\Delta t) = x(t) - \Delta x$

Dopo n passi si ha quindi $p(n\Delta t) = x_0 + \sum_k \xi_k \Delta x$ con $\xi(t) = \pm 1$. Inoltre si può verificare che $< \xi_k >= 0$, $< \xi_k^2 >= 1$, $< \xi_k \xi_h >=< \xi_k >< \xi_h >, k \neq h$. Per il teorema del limite centrale si ha:
$\sum_k^n \xi_k \Delta x = \sqrt{n\Delta t} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k^n \xi_k \right) \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$, con z variabile gaussiana. Introducendo il concetto di diffusione:

Definizione 3.1. *Diffusione.* $D = \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$

si può descrivere l'evoluzione del sistema come $x(t) = x_0 + z\sqrt{Dt}$ Si utilizza $\sqrt{n}$ per normalizzare in quanto è l'unico esponente non divergente. La varianza della gaussiana cresce nel tempo, infatti calcolando i momenti della distribuzione si trova $< x(t) >= x_0$, $< (x(t) - x_0)^2 >= Dt$. Se la topologia del sistema fosse una circonferenza (e non una retta), si avrebbe un rilassamento esponenziale a una situazione stazionaria.