Formulario Fenomeni Ondulatori

Marco Caporale

1 Matematica

- $z = re^{i\varphi} = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ Rappresentazioni del numero complesso z
- $z^* = \overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ Complesso coniugato
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ Prodotto fra numeri complessi
- $z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ Rapporto fra numeri complessi
- $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi]$ Potenza di numero complesso
- $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ Identità di de Moivre
- $x = \Re(z)$ Parte reale del complesso
- $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ Rappresentazioni complesse di seno e coseno
  $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$
- Operatore lineare $\hat{L}(x)$
  $\rightarrow \forall x, y; \quad \hat{L}(x+y) = \hat{L}(x) + \hat{L}(y)$
  $\rightarrow \forall x, \forall a; \quad \hat{L}(ax) = a\hat{L}(x)$
- Integrali notevoli di seni e coseni; T periodo; $n, m \in \mathbb{N}$
  $\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \frac{T}{2}\delta_{nm}$
  $\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \frac{T}{2}\delta_{nm}$
  $\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0$
- Serie di Fourier, $f(t)$ limitata, periodica di periodo T
  $f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t]$
  $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$
  $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt$
  $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$
- Serie complessa di Fourier
  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$
  $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt$
- Trasformata e antitrasformata di Fourier
  $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$
  $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

2 Oscillazioni Lineari

- $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{x}$ Legge di Hooke
- $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Moto armonico semplice
  $x(t) = l\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ Equazione oraria
  $l = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$
  $\varphi_0 = -\arctan(\frac{v_0}{\omega_0 x_0})$
  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
  (Nel caso del circuito LC avremo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)
  $z(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$ Soluzione dell'equazione differenziale

- $\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x$ Oscillatore armonico smorzato
  $\Delta = \frac{\beta}{m}^2 - 4\frac{k}{m}$
  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\frac{\beta}{m} \pm \sqrt{\Delta})$

  $\rightarrow \Delta > 0$ Moto sovrasmorzato
  $x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} + c_2 e^{-|\lambda_2|t}$

  $\rightarrow \Delta = 0$ Moto smorzato critico $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\beta}{2m} = -\eta$
  $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\eta t}$

  $\rightarrow \Delta < 0$ Moto oscillatorio smorzato $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\frac{\beta}{m} + i\sqrt{|\Delta|}) = -\eta \pm i\omega$
  $x(t) = c_1 e^{-\eta t + i\omega t} + c_2 e^{-\eta t - i\omega t} = e^{-\eta t}(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t) = Ae^{-\eta t}\cos(\omega t + \phi_0)$
  $x(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega t + \varphi_0)$ avendo usato $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{\beta}$

- Oscillazioni forzate $x(t) = x_{omo}(t) + x_{part}(t)$
  Forzante periodica
  $A = \frac{F_0/m}{(-\Omega^2 + \omega_0^2) + i\gamma\Omega} = \frac{F_0}{\chi} = \frac{F_0}{i\Omega Z_m}$ ampiezza oscillazione da forzante periodica di pulsazione Ω
  $\delta = \arctan\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$
  $z(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}e^{i(\Omega t - \delta)}$
  $x(t) = \Re(z(t)) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}\cos(\Omega t - \delta)$
  $\dot{x(t)} = \Re(\dot{z(t)}) = -\frac{F_0\Omega}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}\sin(\Omega t - \delta)$
  Andamenti caratteristici della soluzione stazionaria (particolare)
  $\rightarrow \Omega << \omega_0$
  $A \simeq \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$; $\delta \simeq 0$
  $x(t) = \frac{F_0}{k}\cos\Omega t$ in fase con la forzante
  $\rightarrow \Omega >> \omega_0$
  $A \simeq \frac{F_0}{m\Omega^2}$; $\delta \simeq \pi$
  $x(t) = -\frac{F_0}{m\Omega^2}\cos\Omega t$ in opposizione di fase con la forzante
  $\rightarrow \Omega \approx \omega_0$
  $A \simeq \frac{F_0}{\beta\Omega}$; $\delta \simeq \frac{\pi}{2}$
  $x(t) = \frac{F_0}{\beta\omega_0}\sin\Omega t$ in quadratura di fase con la forzante

- $Z_m = \frac{f(t)}{\dot{z}(t)}$ Impedenza meccanica

- $R(\Omega) = \frac{(\gamma\Omega)^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}$ Funzione di risposta

- $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ Fattore di qualità
  RLC serie $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, RLC parallelo $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

- $x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}\cos(\Omega t - \delta) = |A|\cos(\Omega t - \delta) = A_{el}\cos\Omega t + A_{ass}\sin\Omega t$
  $A_{el}(\Omega) = \frac{F_0(\omega_0^2-\Omega^2)}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2]}$ Ampiezza elastica
  $A_{ass}(\Omega) = \frac{F_0\gamma\Omega}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2]}$ Ampiezza assorbitiva

3 Onde Meccaniche

- $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ Equazione delle onde di D'Alembert

- $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ Onda su corda, dati μ densità della corda e T tensione della corda

- $\xi(x,t) = A\sin(kx \mp \omega t)$ Onde Armoniche
  $\xi(x,t) = A\cos(kx \mp \omega t) = \Re(Ae^{i(kx \mp \omega t)})$

- $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Velocità delle onde meccaniche su corda

- $v_f = \frac{\omega}{k}(= v)$ Velocità di fase, v è quella di eq. D'Alembert

- $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}v = vT_p$ Relazione lunghezza d'onda λ, periodo T_p, pulsazione ω e velocità v

- $\omega(k) = f(k)$ Relazione di dispersione
  $\omega(k) = v_f k$ Mezzi non dispersivi $\rightarrow$ eq. di D'Alembert è esatta
  $\omega(k) \neq v_f k$ Mezzi dispersivi $\rightarrow$ eq. di D'Alembert prima approssimazione

- $\xi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}[c_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} + d_n e^{i(k_n x + \omega_n t)}]$
  Generalizzazione serie di Fourier complessa con onde progressive e regressive

- **Onde progressive su corda**

- $\frac{\partial\xi}{\partial t} = -v\frac{\partial\xi}{\partial x}$ Relazione derivate parziali per onda progressiva

- $F_y = -T\frac{\partial\xi}{\partial x}|_{x=0} = +\frac{T}{v}\frac{\partial\xi(0,t)}{\partial t}$ Deformazione all'inizio della corda

- $Z = \frac{F_y(t)}{v_c(t)}$ Impedenza meccanica della corda
  $Z = \frac{T}{v} = T\sqrt{\frac{\mu}{T}} = \sqrt{T\mu}$

- $P(x,t) = -T\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -T\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t}$ Potenza nella corda
  $P(x,t) = -T\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{T}{v}(\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t})^2 = Tv(\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x})^2$
  $P(x,t) = Z(\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t})^2$ Formula valida per le onde meccaniche

- $u_K(x,t) = \frac{1}{2}\mu(\frac{\partial\xi}{\partial t})^2$ Densità lineare di energia cinetica
  $u_P(x,t) = \frac{1}{2}T(\frac{\partial\xi}{\partial x})^2$ Densità lineare di energia potenziale
  $u_K(x,t) = u_P(x,t)$
  $u(x,t) = u_K(x,t) + u_P(x,t) = 2u_K(x,t) = 2u_P(x,t)$ Densità lineare energia meccanica onda
  $P(x,t) = vu(x,t)$ Legame potenza ed energia trasmessa

- Onde di trasporto Potenza ed Energia per onde meccaniche
  $\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2}$
  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$
  Mediate sul periodo
  $\langle P(x,t)\rangle = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(x,t)dt = \frac{1}{2}Z\omega^2A^2 \neq 0$
  $\langle u(x,t)\rangle = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} u(x,t)dt = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2 \neq 0$
  Energia trasportata in un periodo ($vT_P = \lambda, \lambda\mu = m$)
  $E = \int_0^{T_P} P(x,t)dt = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$ (Uguale a quella dell'oscillatore armonico)

- Intensità per onde periodiche
  $I = \frac{E(\Delta t)}{\Delta t}$
  Per corda ed enti unidimensionali
  $I = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(x,t)dt = \langle P\rangle = \langle Z(\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t})^2\rangle$ ($= \frac{1}{2}Z\omega^2A^2$ Per onda armonica)
  $I = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(x,t)dt = \frac{1}{2}Z\sum_{n=-1}^{+\infty}\omega_n^2(a_n^2 + b_n^2)$
  $I = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n$ con $I_n = \frac{1}{2}Z\omega_n^2(a_n^2 + b_n^2)$; I_n spettro di potenza dell'onda

- Onde su corda con discontinuità di Z ($Z_1 \neq Z_2$), i onda incidente, t trasmessa, r riflessa
  $A_t = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}A_i$
  $A_r = \frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}A_i$
  $I_i = I_t + I_r$ Conservazione energia
  $T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$ Coefficiente di trasmissione
  $R = \frac{I_r}{I_i} = (\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2})^2$ Coefficiente di riflessione

- **Onde acustiche**

- $\rho(x,t) - \rho_0 = -\rho_0(\frac{\partial\xi}{\partial x})_x$ Variazione di densità al passaggio dell'onda di compressione

- $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ Eq. D'Alembert per onda acustica

- $\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ Velocità onda acustica

- $\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$ Onda di densità associata
  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ Onda di pressione associata

- $Z = \frac{\gamma P_0}{v} = \sqrt{\gamma P_0 \rho_0}$ Impedenza acustica specifica
  $\delta p = Z \frac{\partial \xi}{\partial t}$ Relazione causa-effetto fra passaggio dell'onda e variazione di pressione

- $I = \langle \frac{\mathcal{P}}{S} \rangle = \langle Z (\frac{\partial \xi}{\partial t})^2 \rangle$ Intensità dell'onda acustica (attenzione ha udm diversa da onda su corda)

- $\beta_s = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$ Livello sonoro in deciBel

- Interferenza per onde con stesso ω (*Onde coerenti*); ampiezze A_1, A_2; seconda onda sfasata di φ_0

  $\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = \Re(A e^{i\varphi_0} e^{i(kx - \omega t)})$
  con $A = |A_1 + A_2 e^{i\varphi_0}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\varphi_0}$
  $2A_1A_2\cos\varphi_0$ Termine d'interferenza
  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi_0$ Intensità onda risultante

- Battimenti
  Onde con stessa ampiezza (A); pulsazioni simili ($\omega_1 \approx \omega_2$); numeri d'onda simili ($k_1 \approx k_2$)
  $\Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2}$ $\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ $k_0 = \frac{k_2 + k_1}{2}$ $\omega_0 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$
  $\xi(x,t) = 2A\cos(\Delta k x - \Delta\omega t)\cos(k_0 x - \omega_0 t)$
  $2A\cos(\Delta k x - \Delta\omega t)$ Componente *modulante*
  $\cos(k_0 x - \omega_0 t)$ Componente *portante*
  $v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$ Velocità di fase
  $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$ Velocità di gruppo
  Per mezzi non dispersivi $v_f = v_g$; per mezzi dispersivi $v_f \neq v_g$ (generalmente osserviamo $v_g < v_f$)

- Effetto doppler (S sorgente, R ricevente; in avvicinamento)
  $f_R = f_m(1 + \frac{v_R}{v_m}) = f_S \frac{1 + \frac{v_R}{v_m}}{1 - \frac{v_S}{v_m}} = f_S \frac{v_m + v_R}{v_m - v_S}$
  (dove v_m velocità onda nel mezzo)

- Generalizzazione in 3D
  $\nabla^2 \xi(\overrightarrow{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\overrightarrow{r}, t)}{\partial t^2}$ D'Alembert
  $\xi(\overrightarrow{r}, t) = f(\hat{u} \cdot \overrightarrow{r} - vt)$ Onde piane
  $\xi(\overrightarrow{r}, t) = A\cos(k\hat{u} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t)$ Onde armoniche piane (vale principio sovrapposizione)
  $\overrightarrow{k} = k\hat{u}$ Vettore d'onda $k = \frac{\omega}{v}$ Numero d'onda

- Onde sferiche (passaggio alla rappresentazione polare) $(x, y, z, t) \to (r, \theta, \varphi, t)$
  $\xi(\overrightarrow{r}, t) = \xi(r, \theta, \varphi, t) = \frac{f(r \mp vt)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi)$
  $f(r - vt) = A\cos(kr - \omega t + \alpha)$ Onde armoniche sferiche
  Periodicità temporale $T_p = \frac{2\pi}{\omega}$
  Periodicità spaziale scala con $\frac{1}{r}$, abbiamo pseudoperiodo $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

4 Onde Elettromagnetiche

5 Ottica

Se il formulario ti è piaciuto considera di supportarmi con una donazione al link paypal.me/gorsedh