Appunti dal corso Introduzione ai Sistemi Complessi

Grufoony

4 novembre 2021

1 Sistema Complesso

Definizione 1.1. *Sistema Complesso è un sistema dinamico composto da sottosistemi interagenti tra loro.*

Per lo studio di un sistema complesso si usa solitamente un approccio olistico, ossia studiando prevalentemente le proprietà macroscopiche del sistema totale, senza considerare i singoli sottosistemi. Un'osservazione importante che va effettuata è che un sistema complesso **prevede**, non descrive. Alcune delle proprietà principali sono:

- **complessità**: presenza di molti d.o.f. (molti sottosistemi)
- **proprietà emergenti**: derivano dal grande numero di sottosistemi. Ad esempio possiamo definire *fluido* un insieme di molte particelle ma la particella singola non può essere fluida.
- **autorganizzazione**: i sistemi complessi sono ibridi, ossia metà stocastici e metà deterministici. Per studiarli devo dare ugual peso a entrambi gli aspetti.

2 Distribuzioni

Vediamo ora una serie di distribuzioni e teoremi ad esse legati che ci aiuteranno nell'analisi dei sistemi.

Definizione 2.1.

- *Gaussiana*
  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- *Esponenziale*
  $\rho(x) = \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{k}}$
- *Potenza*
  $\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}$*, con* $a > 0$

Definizione 2.2. *Momenti di una distribuzione:*
$< x^k >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \rho(x) dx$

Teorema 2.1. *Invarianza di scala:*
se $\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}$ *allora posto* $y = \lambda x$ *si ha* $\rho(y) = \frac{\lambda^a}{x^a} \propto \frac{1}{y^a}$

Teorema 2.2. *Limite centrale:*
Siano x_k *variabili casuali indipendenti, allora:*
$\lim_{N\to\infty} z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} x_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

Ora possiamo dare una definizione di probabilità:

Definizione 2.3. *Probabilità:*
$p(x \in [a,b]) = \int_a^b \rho(x)dx$

Definizione 2.4. *Probabilità cumulata:*
$p(x \leq a) = \int_{-\infty}^a \rho(x)dx$

3 Costruzione di un modello

Punto fondamentale di un sistema complesso è costruire un modello matematico che riesca a riprodurre le sue caratteristiche fondamentali, per poi studiarlo. La prima cosa da definire è l'*ambiente* in cui ci troviamo. Questo può essere neutro o avere caratteristiche, ad esempio una distribuzione di nutrimento (per sistemi biologici). Altro punto fondamentale è definire *spazio e tempo*. Spesso non fa differenza la scelta di spazi e tempi discreti rispetto ai continui, quindi è preferibile assumere una discretizzazione iniziale per poi passare al continuo successivamente. Una volta definito lo spazio bisogna poi decidere le condizioni al contorno, ossia il comportamento ai bordi. Posso a questo punto avere *barriere* di tre tipi:

- **riflettenti**, dove ho un bordo *non* oltrepassabile. Si crea quindi un fenomeno di **attrattività delle pareti**.
- **periodico**, dove ho i bordi coincidenti (esco da una parte e rientro dall'altra). Lo spazio assume in questo caso una forma toroidale.
- **assorbenti**, dove gli oggetti "uscenti" vengono distrutti. In questo caso bisogna di introdurre delle *sorgenti* nel modello per evitare di perdere tutti i soggetti.

Si nota facilmente come più piccolo sia il modello, più importante sia il contributo degli effetti di bordo.
Nella maggior parte dei sistemi non tutti i soggetti hanno le stesse caratteristiche: si definiscono allora **classi** di appartenenza, legate tra loro da relazioni matematiche.

3.1 Random Walk 1D

Il modello più basilare di sistema complesso è sicuramente la random walk su una retta, ossia un punto che ogni istante di tempo decide in maniera casuale se spostarsi a destra o a sinistra. Sia $p = \frac{1}{2}$ la probabilità di muoversi verso destra (quindi anche a sinistra) di un passo Δx. Si hanno:

- {R}: $p(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x$
- {L}: $p(t+\Delta t) = x(t) - \Delta x$

Dopo n passi si ha quindi $p(n\Delta t) = x_0 + \sum_k \xi_k \Delta x$ con $\xi(t) = \pm 1$. Inoltre si può verificare che $< \xi_k >= 0$, $< \xi_k^2 >= 1$, $< \xi_k \xi_h >=< \xi_k >< \xi_h >, k \neq h$. Per il teorema del limite centrale si ha: $\sum_k^n \xi_k \Delta x = \sqrt{n\Delta t}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k^n \xi_k\right) \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D t}} e^{-\frac{z^2}{2Dt}}$, con z variabile gaussiana. Introducendo il concetto di diffusione:

Definizione 3.1. *Diffusione.* $D = \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$

si può descrivere l'evoluzione del sistema come $x(t) = x_0 + z\sqrt{Dt}$ Si utilizza $\sqrt{n}$ per normalizzare in quanto è l'unico esponente non divergente. La varianza della gaussiana cresce nel tempo, infatti calcolando i momenti della distribuzione si trova $< x(t) >= x_0$, $< (x(t) - x_0)^2 >= Dt$. Se la topologia del sistema fosse una circonferenza (e non una retta), si avrebbe un rilassamento esponenziale a una situazione stazionaria.

3.2 Random Walk 2D

Volendo espandere il modello di random walk ad uno spazio 2D si nota subito come, essendo ogni asse indipendente dall'altro, si possa semplicemente comporre due gaussiane:

$$(x, y) \simeq \frac{1}{2\pi\Delta t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\Delta t}} = \rho(x, y, t) \tag{1}$$

Dove la diffusione segue la definizione precedente ed è la stessa in tutte le direzioni. La funzione $\rho(x, y, t)$ rappresnta di fatto la probabilità che la il soggetto in analisi si trovi in un volume $\Delta x \Delta y$. Si può riscrivere la relazione precedente in coorfinate polari ottenendo:

$$\rho(r, \theta, t) = \frac{r}{2\pi\Delta t} e^{-\frac{r^2}{2\Delta t}} \tag{2}$$

studiando più semplicemente l'allontanamento dall'origine. In particolare, l'allontanamento medio risulta:

$$< r >= \int_0^\infty \rho(r, \theta, t) r dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}\Delta t} \tag{3}$$

e la densità diminuisce quindi esponenzialmente.

3.3 Modello Economico

Si vuole ora costruire un primo modello legato alla realtà simulando, per quanto grossolanamente, l'economia globale.
Supponiamo di avere M individui con n soldi ciascuno, che si muovono su una griglia secondo una Random Walk 2D. Ogni qualvolta due individui si trovino sulla stessa

cella questi si scambiano 1 soldo con probabilità $p = \frac{1}{2}$. **Caso limite**: se si incontra un povero ($n = 0$), si gioca lo stesso (gioco scorretto) per permettere a tutti di uscire dalla povertà. Il sistema ha quindi i seguenti limiti:

$$\begin{cases} \sum_k n_k = N \\ n_k \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

con N costante, quindi non si ha creazione/distruzione di denaro. La probabilità di trovare un individuo con n soldi è:

$$p(n) = \frac{\binom{M+N-2-n}{M-2}}{\binom{M+N-1}{N-1}} \tag{5}$$

e, ponendo $\overline{n} = \frac{N}{M}$, si può calcolare:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{\overline{n}} \left(1 - \frac{n}{M}\right)^M = \frac{1}{\overline{n}} e^{-\frac{n}{\overline{n}}} \tag{6}$$

quindi la probabilità segue un decadimento esponenziale.
Il modello prevede quindi:

- molti poveri e pochi ricchi (ma praticamente nessun super-ricco)
- esiste un tempo in cui un povero diventa ricco (e viceversa)
- simile alla distribuzione di energia di Maxwell-Boltzmann
- se chi è ricco pagasse di più si otterrebbe una curva a campana

Tuttavia osservando i dati sperimentali si nota una discrepanza: nella realtà la probabilità sembra seguire una legge a potenza piuttosto che esponenziale.