

# Soluzioni esercizi Meccanica Quantistica

Grufoony

[https://github.com/Grufoony/Fisica\\_UNIBO](https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO)

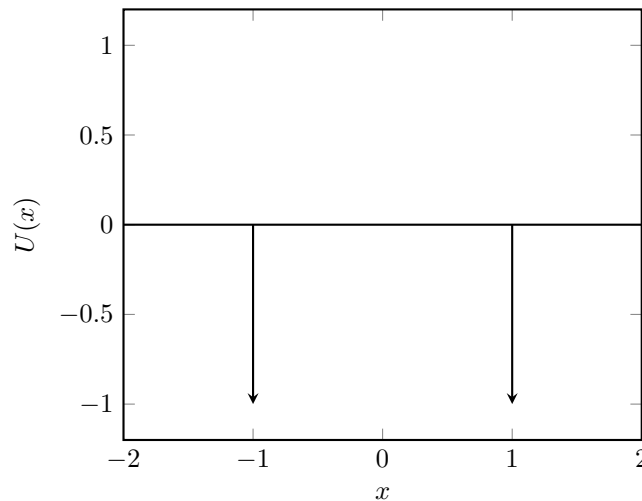
7 febbraio 2022

## Esercizio 1 (esame del 09/01/2017)

Una molecola di idrogeno ionizzata può essere descritta come un sistema unidimensionale formato da un singolo elettrone soggetto al potenziale

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \Omega}{m} [\delta(x-a) + \delta(x+a)]$$

ove  $a > 0$  è la semidistanza dei due protoni pensati fissi e  $\Omega > 0$  ha le dimensioni di una lunghezza inversa. Trovare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia dello spettro discreto.



Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \{k^2 - 2\Omega [\delta(x-a) + \delta(x+a)]\} \Phi = 0$$

La soluzione è nota

$$\Phi^\pm(x) = \begin{cases} A^\pm e^{ikx} + B^\pm e^{-ikx} & x < -a \\ C^\pm e^{ikx} + D^\pm e^{-ikx} & -a < x < a \\ E^\pm e^{ikx} + F^\pm e^{-ikx} & a < x \end{cases}$$

Notiamo che il potenziale ha parità definita  $U(-x) = U(x)$  allora possiamo imporre la condizione  $\Phi^\pm(-x) = \pm \Phi^\pm(x)$ , ottenendo

$$\begin{cases} E^\pm = \pm A^\pm \\ F^\pm = \pm B^\pm \\ D^\pm = \pm C^\pm \end{cases}$$

La funzione assume ora la forma più semplice

$$\Phi^\pm(x) = \begin{cases} C^\pm (e^{ik|x|} \pm e^{-ik|x|}) & |x| < a \\ \sigma_\pm(x) [A^\pm e^{ik|x|} + B^\pm e^{-ik|x|}] & a < |x| \end{cases}$$

con

$$\sigma_\pm(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \pm 1 & x < 0 \end{cases}$$

Notiamo però che lo spettro discreto si avrà per  $w < 0$ , quindi  $k = i\tilde{k}$ , ma la funzione d'onda non può esplodere all'infinito, quindi necessariamente si avrà  $B^\pm = 0$  e, riscalandolo  $A^\pm = A^\pm e^{-ika}$

$$\Phi^\pm(x) = \begin{cases} C^\pm (e^{-\tilde{k}|x|} \pm e^{\tilde{k}|x|}) & |x| < a \\ \sigma_\pm(x) A^\pm e^{-\tilde{k}(|x|-a)} & a < |x| \end{cases}$$

Ora imponiamo la continuità della funzione e della sua derivata

$$\begin{cases} \sigma_\pm(x) A^\pm = C^\pm (e^{-\tilde{k}a} \pm e^{\tilde{k}a}) \\ -\sigma_\pm(x) A^\pm - C^\pm (e^{-\tilde{k}a} \mp e^{\tilde{k}a}) = -\frac{2\Omega}{\tilde{k}} \sigma_\pm(x) A^\pm \end{cases}$$

Si può riscrivere il tutto nella forma

$$\begin{cases} \sigma_\pm(x) A^\pm = C^\pm (e^{-\tilde{k}a} \pm e^{\tilde{k}a}) \\ \sigma_\pm(x) A^\pm \left( \frac{2\Omega}{\tilde{k}} - 1 \right) = C^\pm (e^{-\tilde{k}a} \mp e^{\tilde{k}a}) \end{cases}$$

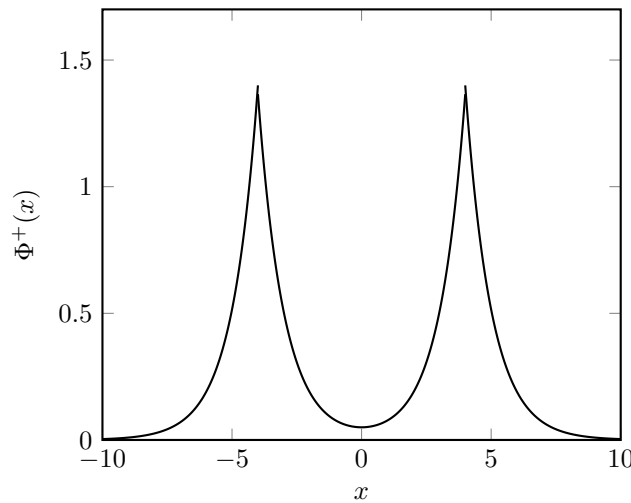
Dividendo la seconda per la prima si ottiene

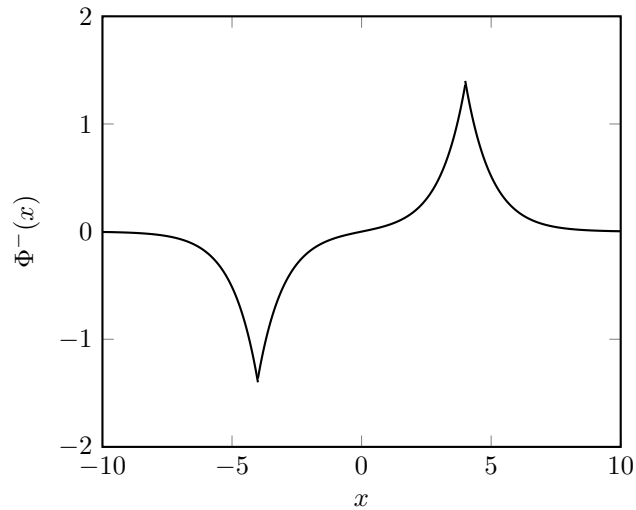
$$\frac{e^{-\tilde{k}a} \mp e^{\tilde{k}a}}{e^{-\tilde{k}a} \pm e^{\tilde{k}a}} = \frac{2\Omega}{\tilde{k}} - 1$$

Si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} \tanh(\tilde{k}a) = 1 - \frac{2\Omega}{\tilde{k}} \\ \coth(\tilde{k}a) = 1 - \frac{2\Omega}{\tilde{k}} \end{cases}$$

ognuna delle quali mi fornisce una soluzione unica quindi ho due soli livelli energetici corrispondenti ai valori di  $\tilde{k}_0^\pm$ .



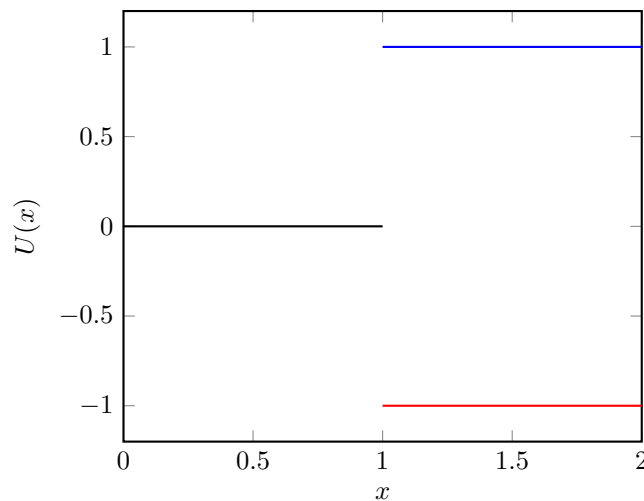


### Esercizio 1 (esame del 19/06/2017)

Trovare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia di una particella unidimensionale confinata nell'intervallo  $0 \leq x \leq a$  e soggetta al potenziale

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ U_0 & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

ove  $U_0 \neq 0$  è una costante con le dimensioni dell'energia.



Suggerimento: Non tentare di risolvere l'equazione trascendente degli autovalori.

Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \left[ k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} U(x) \right] \Phi = 0$$

la cui soluzione generale è (con  $k'^2 = k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} U_0$ )

$$\Phi(x) = \begin{cases} A \sin(kx) + B \cos(kx) & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ C \sin(k'x) + D \cos(k'x) & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

Condizione al bordo  $\Phi(0) = 0$  che implica  $B = 0$ . Condizione al bordo  $\Phi(a) = 0$  che implica  $C \sin(k'a) + D \cos(k'a) = 0$ . Poniamo quindi

$$\begin{cases} C = E \cos(k'a) \\ D = -E \sin(k'a) \end{cases}$$

e possiamo riscrivere la soluzione come

$$\Phi(x) = \begin{cases} A \sin(kx) & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ E \sin[k'(x-a)] & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

Continuità della funzione (ponendo  $x_k = \frac{ka}{2}$  e  $x_{k'} = \frac{k'a}{2}$ ):

$$A \sin(x_k) = -E \sin(x_{k'})$$

Continuità della derivata:

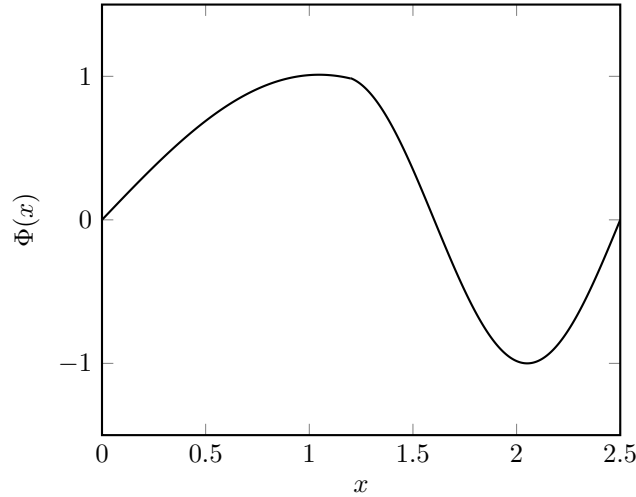
$$Ax_k \cos(x_k) = Ex_{k'} \cos(x_{k'})$$

Dividendo la prima per la seconda si trova l'equazione agli autovalori

$$\frac{\tan(x_k)}{x_k} = -\frac{\tan(x_{k'})}{x_{k'}}$$

che fornisce valori  $k_n$  per lo spettro discreto  $w_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2$ , come previsto dal TSS. La soluzione è quindi (con un  $k_n$  qualsiasi)

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} -E \frac{\sin(x_{k'_n})}{\sin(x_{k_n})} \sin(k_n x) & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ E \sin[k'_n(x-a)] & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$



Nel caso in cui si abbia  $U_0 < 0$ ,  $k = i\tilde{k}$  immaginario puro (con  $\tilde{k} \in \mathbb{R}$ ) per  $w < 0$ . L'equazione agli autovalori diventa quindi

$$\frac{\tan(x_{\tilde{k}})}{x_{\tilde{k}}} = -\frac{\tanh(x_{k'})}{x_{k'}}$$

L'equazione è trascendente e possiamo ordinare le soluzioni  $k_n$  anche in questo caso (spettro discreto non degenero). In entrambi i casi si avrà uno spettro continuo non degenero per  $E \pm U_0 \geq 0$ .

## Esercizio 1 (esame del 03/07/2017)

Una particella è confinata in una regione sferica di raggio  $R$  ed è soggetta ad un campo di forza centrale con potenziale

$$U(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \\ U_0 & \frac{R}{2} < r \leq R \end{cases} \quad U_0 \neq 0$$

ove  $U_0 > 0$  è una costante con le dimensioni di un'energia. Calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia della particella. Suggerimento: Derivare ma non tentare di risolvere l'equazione agli autovalori trascendente.

Per il TSS notiamo subito come tutto lo spettro energetico sia discreto non degenero. Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger radiale

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l-1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U(r) \right] \chi = 0$$

la cui soluzione è

$$\chi(r) = \begin{cases} Akrj_l(kr) + Bkrn_l(kr) & 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \\ Ck'rj_l(k'r) + Dk'rn_l(k'r) & \frac{R}{2} < r \leq R \end{cases}$$

con  $k'^2 = k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}U_0$  Condizione al bordo  $\chi(0) = 0$  quindi  $B = 0$ . Continuità della funzione

$$Ak\frac{R}{2}j_l(k\frac{R}{2}) = Ck'\frac{R}{2}j_l(k'\frac{R}{2}) + Dk'\frac{R}{2}n_l(k'\frac{R}{2})$$

Ponendo  $x_k = \frac{kR}{2}$ ,  $x_{k'} = \frac{k'R}{2}$ ,  $C = En_l(2x_{k'})$  e  $D = -Ej_l(2x_{k'})$  si ottengono le autofunzioni energetiche

$$\chi(r) = \begin{cases} Akrj_l(kr) & 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \\ Ek'r[n_l(2x_{k'})j_l(k'r) - j_l(2x_{k'})n_l(k'r)] & \frac{R}{2} < r \leq R \end{cases}$$

Continuità della derivata

$$A \{x_k j_l(x_k) + x_k^2 j_l'(x_k)\} = E \{n_l(2x_{k'}) [x_{k'} j_l(x_{k'}) + x_{k'}^2 j_l'(x_{k'})] - j_l(2x_{k'}) [x_{k'} n_l(x_{k'}) + x_{k'}^2 n_l'(x_{k'})]\} \\ Ax_k^2 j_l'(x_k) = E [n_l(2x_{k'}) x_{k'}^2 j_l'(x_{k'}) - j_l(2x_{k'}) x_{k'}^2 n_l'(x_{k'})]$$

I  $k_n$  sono forniti quindi dal sistema di equazioni (risolvibile)

$$\begin{cases} Ax_k j_l(x_k) &= E [n_l(2x_{k'}) x_{k'} j_l(x_{k'}) - j_l(2x_{k'}) x_{k'} n_l(x_{k'})] \\ Ax_k^2 j_l'(x_k) &= E [n_l(2x_{k'}) x_{k'}^2 j_l'(x_{k'}) - j_l(2x_{k'}) x_{k'}^2 n_l'(x_{k'})] \end{cases}$$

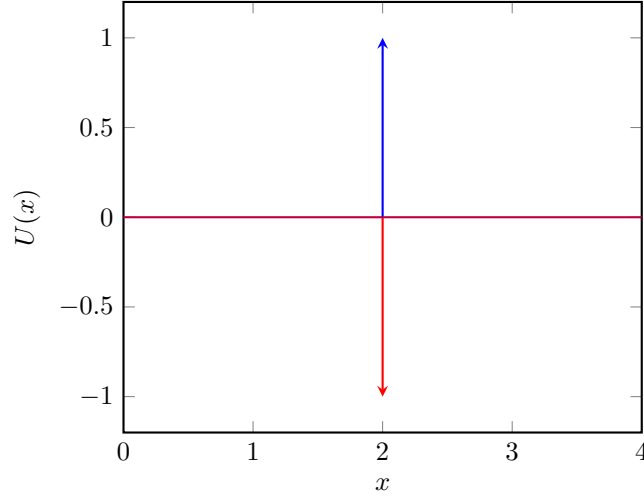
quindi gli autovalori dell'energia sono semplicemente  $w_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2$ .

## Esercizio 1 (esame del 15/01/2018)

Una particella di massa  $m$  è confinata nello semispazio unidimensionale  $x \geq 0$  ed è soggetta al potenziale

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{m} \Omega \delta(x - a)$$

ove  $a > 0$  e  $\Omega \neq 0$  sono costanti con le dimensioni di una lunghezza ed una lunghezza inversa, rispettivamente. Trovare gli autovalori e le autofunzioni della energia.



Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi + \{k^2 + 2\Omega \delta(x - a)\} \Phi = 0$$

La soluzione generica è

$$\Phi(x) = \begin{cases} A \sin(kx) + B \cos(kx) & 0 < x < a \\ C e^{ikx} + D e^{-ikx} & a < x \end{cases}$$

Condizioni al bordo  $\Phi(0) = 0$  quindi  $B = 0$ . Imponiamo ora la continuità

$$\begin{cases} A \sin(ka) = C e^{ika} + D e^{-ika} \\ ik [C e^{ika} - D e^{-ika}] - Ak \cos(ka) = 2\Omega A \sin(ka) \end{cases}$$

Facendo qualche conto si ottiene l'equazione agli autovalori ( $\Omega > 0$ )

$$k \left\{ -\cot(ka) + i \left[ 1 - \frac{2D e^{-ika}}{A \sin(ka)} \right] \right\} = 2\Omega$$

Che fornisce valori continui di  $k$  come previsto dal TSS (spettro continuo non degenero).

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{C e^{ika} + D e^{-ika}}{\sin(ka)} \sin(kx) & 0 < x < a \\ C e^{ikx} + D e^{-ikx} & a < x \end{cases}$$

Considerando ora il caso in cui  $\Omega < 0$  notiamo che è possibile avere  $w < 0$  quindi  $k = i\tilde{k}$ . La funzione d'onda deve essere limitata all'infinito quindi necessariamente si deve avere  $D = 0$ . L'equazione agli autovalori diviene

$$\tilde{k} [\coth(\tilde{k}a) + 1] = -2\Omega$$

trascendente, che fornisce l'unico valore discreto  $\tilde{k}$ . Lo spettro energetico in questo caso è discreto non degenero per  $w < 0$  (con un unico livello) e continuo non degenero altrimenti, come previsto dal TSS.

L'autofunzione energetica nello spettro discreto è

$$\Phi_{\tilde{k}}(x) = \begin{cases} \frac{C e^{-\tilde{k}a}}{\sinh(\tilde{k}a)} \sinh(\tilde{k}x) & 0 < x < a \\ C e^{-\tilde{k}x} & a < x \end{cases}$$

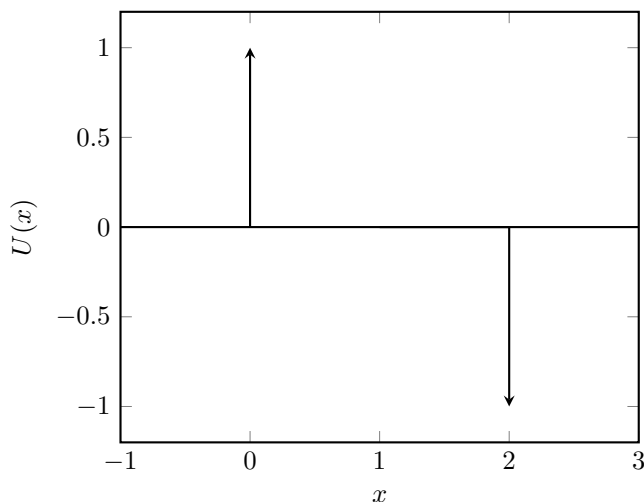
con corrispondente autovalore  $w_{\tilde{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{k}^2$ .

## Esercizio 2 (esame del 18/06/2019)

Trovare le espressioni dei coefficienti di riflessione e trasmissione della barriera di potenziale unidimensionale

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{m} \Omega [\delta(x) - \delta(x - a)]$$

ove  $a > 0$  e  $\Omega > 0$  sono costanti con le dimensioni di una lunghezza ed una lunghezza inversa, rispettivamente.



Supponiamo una soluzione del tipo

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r_k e^{-ikx} & x < 0 \\ Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & 0 < x < a \\ t_k e^{ik(x-a)} & a < x \end{cases}$$

Impongo la continuità della funzione

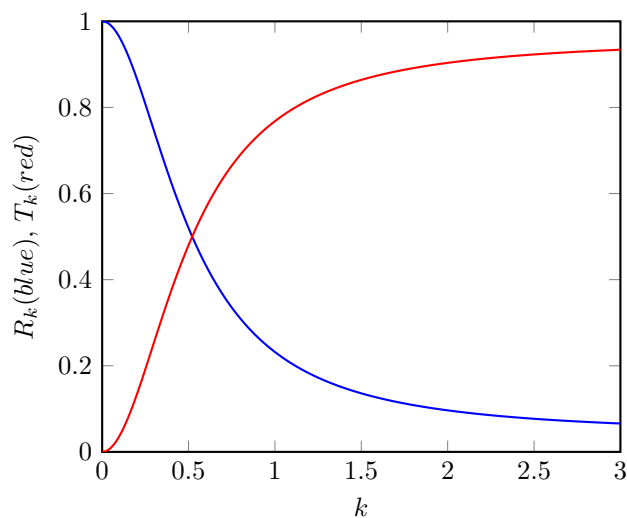
$$\begin{aligned} 1 + r_k &= A + B \\ Ae^{ika} + Be^{-ika} &= t_k \end{aligned}$$

e la continuità della derivata prima

$$\begin{aligned} ik(A - B) - ik(1 - r_k) &= 2\Omega(1 + r_k) \\ ikt_k - ik(Ae^{ika} - Be^{-ika}) &= -2\Omega t_k \end{aligned}$$

Usando le precedenti relazioni è possibile ricavare i coefficienti

$$\begin{aligned} r_k &= \frac{\Omega - ikB}{ik - \Omega} \\ t_k &= -ik \frac{B}{\Omega} e^{-ika} \end{aligned}$$

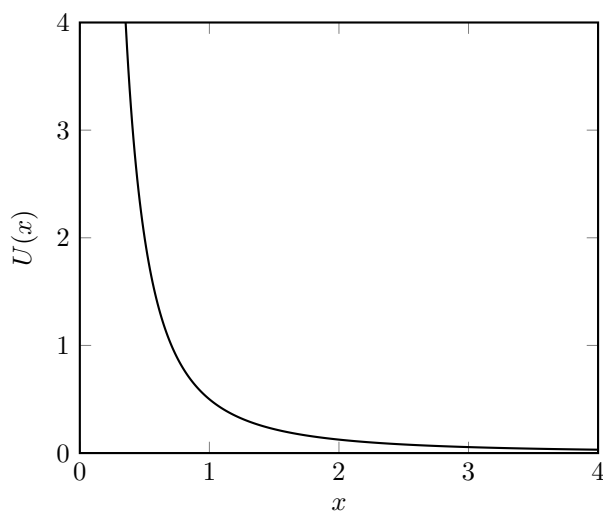


### Esercizio 1 (esame del 08/11/2019)

Una particella è soggetta ad un campo di forza centrale di tipo armonico

$$U(r) = \frac{U_0}{2a^2} r^2$$

ove  $U_0 > 0$  e  $a$  sono costanti con le dimensioni di un'energia e una lunghezza, rispettivamente. Calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia per il numero quantico orbitale  $l = 0$ .



L'equazione di Schroedinger diventa

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left( k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{U_0}{2a^2} r^2 \right) \chi = 0$$

conviene porre  $l = \sqrt{\frac{\hbar a}{\sqrt{mU_0}}}$ ,  $k^2 l^2 = 2n + 1$  e  $x = \frac{r}{l}$  ottenendo

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + (2n + 1 - x^2)\chi = 0$$



Studiamo l'equazione asintotica per  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{d^2 \chi_{as}}{dx^2} - x^2 \chi_{as} = 0$$

che ha come soluzione

$$\chi_{as}(x) \simeq e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La soluzione generale sarà un'equazione del tipo

$$\chi(x) \simeq e^{-\frac{x^2}{2}} H(x)$$

dove  $H(x)$  è determinata dalla

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - 2x \frac{dH}{dx} + 2nH = 0$$

ed è quindi un polinomio di Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Notiamo ora che la nostra funzione d'onda deve annullarsi in zero, quindi necessariamente si deve avere  $n$  dispari. Conviene ora riscrivere  $n \rightarrow 2n + 1$  e scrivere le autofunzioni energetiche

$$\chi(r) = A e^{-\frac{r^2}{2l^2}} H_{2n+1} \left( \frac{r}{l} \right)$$

Gli autovalori dell'energia saranno quindi

$$w_{2n+1} = \sqrt{\frac{U_0}{m}} \frac{\hbar}{a} \left( 2n + \frac{3}{2} \right)$$

## Esercizio 1 (esame del 08/01/2020)

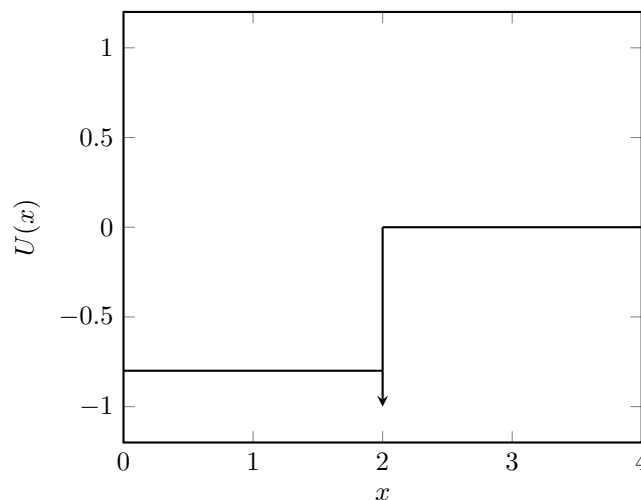
Trovare gli autovalori ed autofunzioni dell'energia di una particella confinata nella regione unidimensionale  $0 < x < \infty$  e soggetta al potenziale

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{m} \Omega \delta(x - a) + U_0(x)$$

con

$$U_0(x) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < a \\ 0 & a < x \end{cases}$$

ove  $a > 0$ ,  $\Omega < 0$  and  $U_0 < 0$  sono costanti con le dimensioni di una lunghezza, lunghezza inversa ed energia, rispettivamente. Suggerimento: Non tentare di risolvere l'equazione trascendente degli autovalori.



Scriviamo l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \left( k^2 - 2\Omega\delta(x-a) - \frac{2m}{\hbar^2}U(x) \right) \Phi = 0$$

e supponiamo una soluzione generale del tipo (con  $k'^2 = k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}U_0$ )

$$\Phi(x) = \begin{cases} A \sin(k'x) + B \cos(k'x) & 0 < x < a \\ C e^{ik(x-a)} + D e^{-ik(x-a)} & a < x \end{cases}$$

La funzione deve annullarsi nell'origine, quindi  $B = 0$ . Imponiamo ora la continuità della funzione

$$A \sin(k'a) = C + D$$

e della derivata

$$ik(C - D) - Ak' \cos(k'a) = 2\Omega A \sin(k'a)$$

Da cui si ricava l'equazione agli autovalori

$$ik \left[ 1 - \frac{2D}{A} \frac{1}{\sin(k'a)} \right] - 2\Omega = k' \cot(k'a)$$

che fornisce le soluzioni per lo spettro continuo  $w \geq 0$ .

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{C+D}{\sin(k'a)} \sin(k'x) & 0 < x < a \\ C e^{ik(x-a)} + D e^{-ik(x-a)} & a < x \end{cases}$$

Poniamoci ora nel caso  $w < 0$ , ossia quando  $k = i\tilde{k}$ . L'equazione agli autovalori diventa

$$k' \cot(k'a) = -2\Omega - \tilde{k}$$

che, essendo trascendente, fornisce soluzioni discrete  $\tilde{k}_n$  come previsto dal TSS.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{C}{\sin(k'a)} \sin(k'x) & 0 < x < a \\ C e^{-\tilde{k}(x-a)} & a < x \end{cases}$$

## Esercizio 1 (esame del 14/01/2022)

Una particella è confinata in un intervallo spaziale di raggio  $R$  ed è soggetta ad un campo di forza centrale con potenziale

$$U(r) = \frac{\hbar^2}{m} \Omega \delta(r - \frac{R}{2})$$

dove  $\Omega \neq 0$  è una costante con le dimensioni di una lunghezza inversa. Calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia della particella.

Equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2\Omega\delta(r-R) \right) \chi = 0$$

con soluzione generica

$$\chi(r) = \begin{cases} Akr j_l(kr) + Bkr n_l(kr) & 0 \leq r < \frac{R}{2} \\ Ckr j_l(kr) + Dkr n_l(kr) & \frac{R}{2} < r \leq R \end{cases}$$

Poniamo ora  $x = \frac{kR}{2}$ . Condizione al contorno  $\chi(0) = 0$  implica  $B = 0$ . Condizione al contorno  $\chi(R) = 0$  implica  $Cj_l(2x) + Dn_l(2x) = 0$ . Poniamo quindi

$$\begin{cases} C = En_l(2x) \\ D = -Ej_l(2x) \end{cases}$$

e la funzione diventa

$$\chi(r) = \begin{cases} Akrj_l(kr) & 0 \leq r < \frac{R}{2} \\ Ekr [n_l(2x)j_l(kr) - j_l(2x)n_l(kr)] & \frac{R}{2} < r \leq R \end{cases}$$

Continuità della funzione:

$$Aj_l(x) = E [n_l(2x)j_l(x) - j_l(2x)n_l(x)]$$

Continuità della derivata:

$$Ex [n_l(2x)j'_l(x) - j_l(2x)n'_l(x)] - Ax [j'_l(x)] = 2\Omega Aj_l(x)$$

Si ottiene quindi il sistema risolvibile

$$\begin{cases} Aj_l(x) & = E [n_l(2x)j_l(x) - j_l(2x)n_l(x)] \\ A [2\Omega Aj_l(x) + xj'_l(x)] & = Ex [n_l(2x)j'_l(x) - j_l(2x)n'_l(x)] \end{cases}$$

che fornisce soluzioni  $k_n$  ordinate per lo spettro energetico discreto ad autovalori  $w_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2$ .