

Appunti dal corso Introduzione ai Sistemi Complessi

Grufoony

1 novembre 2021

1 Sistema Complesso

Definizione 1.1. *Sistema Complesso è un sistema dinamico composto da sottosistemi interagenti tra loro.*

Per lo studio di un sistema complesso si usa solitamente un approccio olistico, ossia studiando prevalentemente le proprietà macroscopiche del sistema totale, senza considerare i singoli sottosistemi. Un'osservazione importante che va effettuata è che un sistema complesso **prevede**, non descrive. Alcune delle proprietà principali sono:

- **complessità:** presenza di molti d.o.f. (molti sottosistemi)
- **proprietà emergenti:** derivano dal grande numero di sottosistemi. Ad esempio possiamo definire *fluida* un insieme di molte particelle ma la particella singola non può essere fluida.
- **autorganizzazione:** i sistemi complessi sono ibridi, ossia metà stocastici e metà deterministici. Per studiarli devo dare ugual peso a entrambi gli aspetti.

2 Distribuzioni

Vediamo ora una serie di distribuzioni e teoremi ad esse legati che ci aiuteranno nell'analisi dei sistemi.

Definizione 2.1.

- *Gaussiana*
$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
- *Esponenziale*
$$\rho(x) = \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{k}}$$
- *Potenza*
$$\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}, \text{ con } a > 0$$

Definizione 2.2. *Momenti di una distribuzione:*

$$\langle x^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \rho(x) dx$$

Teorema 2.1. *Invarianza di scala:*

se $\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}$ allora posto $y = \lambda x$ si ha $\rho(y) = \frac{\lambda^a}{x^a} \propto \frac{1}{y^a}$

Teorema 2.2. *Limite centrale:*

Siano x_k variabili casuali indipendenti, allora:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N x_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

Ora possiamo dare una definizione di probabilità:

Definizione 2.3. *Probabilità:*

$$p(x \in [a, b]) = \int_a^b \rho(x) dx$$

Definizione 2.4. *Probabilità cumulata:*

$$p(x \leq a) = \int_{-\infty}^a \rho(x) dx$$

3 Costruzione di un modello

Punto fondamentale di un sistema complesso è costruire un modello matematico che riesca a riprodurre le sue caratteristiche fondamentali, per poi studiarlo. La prima cosa da definire è l'*ambiente* in cui ci troviamo. Questo può essere neutro o avere caratteristiche, ad esempio una distribuzione di nutrimento (per sistemi biologici). Altro punto fondamentale è definire *spazio e tempo*. Spesso non fa differenza la scelta di spazi e tempi discreti rispetto ai continui, quindi è preferibile assumere una discretizzazione iniziale per poi passare al continuo successivamente. Una volta definito lo spazio bisogna poi decidere le condizioni al contorno, ossia il comportamento ai bordi. Posso a questo punto avere *barriere* di tre tipi:

- **riflettenti**, dove ho un bordo *non* oltrepassabile. Si crea quindi un fenomeno di **attrattività delle pareti**.
- **periodico**, dove ho i bordi coincidenti (esco da una parte e rientro dall'altra). Lo spazio assume in questo caso una forma toroidale.
- **assorbenti**, dove gli oggetti "uscenti" vengono distrutti. In questo caso bisogna di introdurre delle *sorgenti* nel modello per evitare di perdere tutti i soggetti.

Si nota facilmente come più piccolo sia il modello, più importante sia il contributo degli effetti di bordo. Nella maggior parte dei sistemi non tutti i soggetti hanno le stesse caratteristiche: si definiscono allora **classi** di appartenenza, legate tra loro da relazioni matematiche.