Foglio per esame scritto di Analisi 1

Niccolò Zanotti

10 settembre 2021

Successioni in $\mathbb{R}$

Criterio. *Del rapporto*
Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}^+$, ed esista $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Allora se

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, *allora* $a_n\to 0$;
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, *allora* $a_n\to +\infty$;

Criterio. *Siano $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ e sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora se*

$$\alpha\le a_n\le\beta\quad\forall n\in\mathbb{N}\Longrightarrow\sqrt[n]{a_n}\to 1\ \textit{per}\ n\to+\infty$$

Inoltre se

$$a_n\to\lambda\in\mathbb{R}^+\Longrightarrow\sqrt[n]{a_n}\to 1$$

Criterio. *Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora se*

$$a_n\to\lambda\in\bar{R}\Longrightarrow\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\to\lambda$$

Criterio. *Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora se*

$$a_{n+1}-a_n\to\lambda\in\bar{R}\Longrightarrow\frac{a_n}{n}\to\lambda$$

Criterio. *Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}^+$. Allora se*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\lambda\in\bar{R}\Longrightarrow\sqrt[n]{a_n}\to\lambda$$

Approssimazione di Stirling

$$n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

$$log(n!)=nlog(n)-n+\frac{1}{2}log(n)+log(\sqrt{2\pi})+o(1)$$

Serie numeriche in $\mathbb{R}$

Serie notevole. *Geometrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty}c^n\begin{cases}\textit{converge}\quad \textit{se}\ |c|<1, & s_n=\frac{1}{1-c}\\ \textit{diverge}\quad \textit{se}\ c\ge 1\\ \textit{indeterminata}\quad \textit{se}\ c\le -1\end{cases}$$

Serie notevole. *Armonica Generalizzata*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\begin{cases}\textit{converge}\quad \textit{se}\ \alpha>1\\ \textit{diverge}\quad \textit{se}\ \alpha\le 1\end{cases}\qquad\alpha\in\mathbb{R}$$

Serie notevole. *Di Abel o Armonica Generalizzata di tipo* 2

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha\log^\beta(n)}\begin{cases}\textit{converge}\quad \textit{se}\ \alpha>1\ \wedge\forall\beta\\ \textit{converge}\quad \textit{se}\ \alpha>1\ \vee\alpha=1\ \wedge\beta>1\\ \textit{diverge}\quad \textit{se}\ \alpha<1\ \vee\alpha=1\ \wedge\beta\le 1\end{cases}\qquad\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Criterio. *Del confronto*
Siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$ due serie a termini in $\mathbb{R}^+$ tali che

$$0\le a_n\le b_n\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

Allora:

1. $\sum b_k$ *convergente* $\Longrightarrow\sum a_k$ *convergente;*

2. $\sum a_k$ *divergente* $\Longrightarrow \sum b_k$ *divergente.*

Criterio. *Del confronto asintontico*
Siano $\sum a_k$ *e* $\sum b_k$ *due serie a termini in* $\mathbb{R}^+$. *Allora se*

$$a_n \sim b_n \Longrightarrow a_n \text{ e } b_n \quad \textit{hanno lo stesso carattere}$$

Criterio. *Della radice*
Sia $\sum a_n$ *una serie a termini in* $\mathbb{R}_0^+$. *Allora se esiste* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$

1. $\lambda > 1 \Longrightarrow a_n$ *convergente;*

2. $\lambda < 1 \Longrightarrow a_n$ *divergente;*

Criterio. *Di Leibniz*
Sia $\sum(-1)^n a_n$ *una serie a termini di segno alterno. Allora se*

1. $a_{n+1} < a_n$ *(a_n è definitivamente decrescente);*

2. $a_n \to 0$ *(a_n è infinitesima);*

la serie è convergente.

Criterio. *Di condensazione(Cauchy)*
Sia $\{a_n\}$ *una successione a termini in* $\mathbb{R}^+$.*Allora se*

1. $a_{n+1} < a_n$ *(a_n è definitivamente decrescente);*

2. $a_n \to 0$ *(a_n è infinitesima);*

$$\sum a_n \quad \textit{converge} \Longleftrightarrow \sum 2^n a_{2^n} \quad \textit{converge.}$$

Criterio. *Del rapporto*
Sia $\sum a_n$ *una serie a termini in* $\mathbb{R}^+$ *tale che esista* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. *Allora se*

1. $\lambda > 1 \Longrightarrow$ *la serie non è convergente;*

2. $\lambda < 1 \Longrightarrow$ *la serie è convergente.*

Criterio. *Di Raabe*
Sia $\sum a_n$ *una serie a termini in* $\mathbb{R}^+$ *tale che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n}) \quad , \alpha \in \mathbb{R} \quad \textit{per } n \to +\infty$$

Allora se

1. $\alpha > 1 \Longrightarrow$ *la serie è convergente;*

2. $\alpha < 1 \Longrightarrow$ *la serie non è convergente.*

Criterio. *Di Dirichlet*
Siano $\{\alpha_n\}$ *una successione in* $\mathbb{C}$ *e* $\{\beta_n\}$ *una successione in* $\mathbb{R}^+$ *tali che*

1. $\sum \alpha_n$ *è limitata;*

2. $\{\beta_n\}$ *è monotona descrescente ed infinitesima.*

Allora la serie $\sum \alpha_n \beta_n$ *è convergente.*

Sviluppi di MacLaurin delle principali funzioni

Resto in forma di Peano

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{n!} + o(x^{2n+2})$$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + o(x^{2n+1})$$

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \quad \text{per } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!\ x^{2k+1}}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + ... + \frac{(2n)!\ x^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } |x| < 1$$

$$sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{n!} + o(x^{2n+2})$$

$$cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n+1})$$

$$log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n) \text{ per} |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) \text{ per} |x| < 1$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}x^3 + ... + \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n + o(x^n)$$

Resto in forma O(·) utile per serie numeriche

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{n!} + O(x^{2n+3})$$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + O(x^{2n+2})$$

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7) \quad \text{per } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!\ x^{2k+1}}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + ... + \frac{(2n)!\ x^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} + O(x^{2n+2}) \quad \text{per} |x| < 1$$

$$sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{n!} + O(x^{2n+3})$$

$$cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!} + O(x^{2n+2})$$

$$log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + O(x^{n+1}) \text{ per } |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... + \binom{\alpha}{n} x^n + O(x^{n+1}) \text{ per} |x| < 1$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}x^3 + ... + \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n + O(x^{n+1})$$

Integrali in $\mathbb{R}$

Integrale notevole. *Per integrazione di funzioni razionali*

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2 + c^2} = \frac{1}{bc} arctg(\frac{ax+b}{c}) + c$$

Integrali notevoli. *Funzioni goniometriche al quadrato*

$$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2}$$

Integrale notevole. *dalle sostituzioni iperboliche*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = log(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C = Sett\, sinh(\frac{x}{a}) + C$$

Integrali notevoli. *Delle funzioni iperboliche*

$$\int sinh\, cx\, dx = \frac{1}{c} cosh\, cx \qquad \int cosh\, cx\, dx = \frac{1}{c} sinh\, cx$$

$$\int sinh^2\, cx\, dx = \frac{1}{4c} sinh\, 2cx - \frac{x}{2} \qquad \int cosh^2\, cx\, dx = \frac{1}{4c} sinh\, 2cx + \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{sinh\, cx} = \frac{1}{c} log(tanh(\frac{cx}{2})) \quad o \quad \int \frac{dx}{sinh\, cx} = \frac{1}{c} log(\frac{cosh\, cx - 1}{cosh\, cx - 1})$$

$$\int \frac{dx}{cosh\, cx} = \frac{2}{c} arctg(e^{cx})$$

Tecnica di integrazione. *Funzioni razionali composte da funzioni goniometriche di grado 1*
Integrali del tipo:

$$\int R(sinx, cosx)\, dx$$

si razionalizzano con la sostituzione $t = tg(\frac{x}{2})$ *e si sfruttano le formule parametriche di sinx e cosx:*

$$cosx = \frac{1 - tg^2(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})} \qquad sinx = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})}$$

$$t = tg(\frac{x}{2}) \quad \rightarrow \quad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad sinx = \frac{2t}{1+t^2} \quad x = 2arctg(t) \quad dx = \frac{2dt}{t^2+1}$$

Riconducendosi ad un integrale del tipo:

$$\int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \frac{2dt}{t^2+1}$$

Tecnica di integrazione. *Funzioni razionali composte da funzioni goniometriche di grado 2*
Integrali del tipo:

$$\int R(sin^2x, cos^2x, sinxcosx)\, dx$$

si razionalizzano con la sostituzione $t = tg(x)$ *e si sfruttano le formule parametriche :*

$$t = tg(x) \quad \rightarrow \quad cos^2x = \frac{1}{1+t^2} \quad sin^2x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad sinxcosx = \frac{t}{1+t^2} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Riconducendosi ad un integrale del tipo:

$$\int R(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})\, \frac{dt}{t^2+1}$$

Tecnica di integrazione. *Integrali del tipo*

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

si risolvono con la sostituzione

$$x = a\sin(t) \rightarrow t = \arcsin(x) \quad dx = \cos(t)dt$$

Tecnica di integrazione. *Sostituzioni iperboliche:1*
Integrali del tipo

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\, dx$$

si razionalizzano con la sostituzione $x = asinh(t)$*, per cui:*

$$x = asinh(t) \quad dx = acosh(t) \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2 + a^2} = acosh(t)$$

Tecnica di integrazione. *Sostituzioni iperboliche:2*
Integrali del tipo

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$$

si razionalizzano con la sostituzione $x = acosh(t)$*, per cui:*

$$x = acosh(t) \quad dx = asinh(t) \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2 - a^2} = asinh(t)$$

Tecnica di integrazione. *Funzioni razionali trascendenti*
Integrali del tipo

$$\int R(e^{ax})\, dx$$

si razionalizzano con la sostituzione $e^{ax} = t$.

Tecnica di integrazione. *Integrazione di funzioni irrazionale tipo 1*
Integrali del tipo

$$\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{r_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{r_2}, ..., (\frac{ax+b}{cx+d})^{r_n})\, dx \qquad r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{Q}$$

dove R *è una funzione razionale, si integrano tramite la sostituzione*

$$t^N = \frac{ax+b}{cx+d}$$

dove N *è il minimo comune multiplo dei denominatori dei numeri* $r_1, r_2, ..., r_n$.
Esempio:

$$\int \frac{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{1 - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}}\, dx, \qquad \frac{x+1}{x+2} = t^6$$

Tecnica di integrazione. *Sostituzioni di Euler*

Integrali del tipo

$$\int R(x, (\sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$$

dove R è una funzione razionale. Le sostituzioni dipendono dai tre casi:

$a > 0$

$$x = \frac{at^2}{b-2at} \ , \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}\frac{at^2-bt+c}{b-2at} \ , \quad dx = -2a\frac{at^2-bt+c}{(b-2at)^2}dt$$

$$-2a\int R(\frac{at^2}{b-2at}, -\sqrt{a}(\frac{at^2-bt+c}{b-2at}))\, dt$$

Esempio:

$$\int \frac{1+\sqrt{x^2+3x}}{2-\sqrt{x^2+3x}}\, dx, \qquad x = \frac{t^2}{3-2t} \Longrightarrow -2\int \frac{(t^2-3t)(3+t-t^2)}{(3-2t)^2(t^2-7t+6)}\, dt$$

$a < 0$

$$x = \frac{1}{2a}(\alpha\frac{1-t^2}{1+t^2} - b) \ , \ \alpha = \sqrt{b^2-4ac} \ , \ dx = \frac{-2\alpha t dt}{\alpha(t^2+1)^2}$$

$$\Longrightarrow -\int R(\frac{1}{2a}(\alpha\frac{1-t^2}{1+t^2} - b), \frac{t\alpha}{\sqrt{-a}(1+t^2)}) \cdot \frac{2\alpha t}{\alpha(t^2+1)^2}\, dt$$

Esempio:

$$\int \frac{\sqrt{2x-x^2}+x}{2-\sqrt{2x-x^2}}\, dx \quad a=-1, b=2, c=0, \alpha=2 \longrightarrow x = 1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t^2}{1+t^2}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{4t^2(1+t)}{(t-1)^2(1+t^2)^2}\, dt$$

$a = 0$ *L'integrale rientra nel caso trattato dalla tecnica precedente (funzioni irrazionali di tipo 1).*

Equazioni differenziali

Lineari del I ordine

Omogenee Equazioni nella forma:

$$x'(t) + a(t)y(t) = 0$$

hanno un integrale generale del tipo

$$y = ce^{-A(t)} \quad \textit{dove } A(t) = \int a(t)dt$$

Non omogenee Equazioni nella forma:

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t)$$

dove se $a(t) = 0$ l'equazioni differenziale è lineare, hanno una soluzione particolare x_p

$$x_p = e^{-A(t)}(\int e^{A(t)}f(t)dt) \quad \textit{dove } A(t) = \int a(t)dt$$

per cui l'integrale generale è

$$x(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)}(\int e^{A(t)}f(t)dt) = e^{-A(t)}(c + (\int e^{A(t)}f(t)dt))$$

II ordine

Omogenee Equazioni nella forma:

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$$

L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2. Per cui la soluzione generale sarà

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

dove $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono basi dello spazio delle soluzioni e c_1, c_2 sono parametri liberi.
Si trovano le soluzioni dell'equazione caratteristica in $\mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0$$

Si hanno tre casi:

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \ \rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ | Base: $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_1 = \lambda_2 \ \rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$ | Base: $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \ \rightarrow x(t) = c_1 e^{\alpha t} cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} sin(\beta t)$ | Base: $e^{\alpha t} cos(\beta t), e^{\alpha t} sin(\beta t)$

Non omogenee:Variazione delle costanti Equazioni nella forma:

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$$

1)Si determina la soluzione generale dell'omogenea associata:

$$x_0(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

2) Si trova una soluzione particolare nella forma

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

Dal seguente sistema si ricavano le espressioni di $c_1'(t), c_2'(t)$:

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

per poi trovare $c_1(t), c_2(t)$ integrando:

$$c_1(t) = \int c_1'(t)\, dt \qquad c_2(t) = \int c_2'(t)\, dt$$

3)La soluzione generale è

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$$