

Formulario Fenomeni Ondulatori

Marco Caporale

1 Matematica

- $z = re^{i\varphi} = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ Rappresentazioni del numero complesso z
- $z^* = \bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$ Complesso coniugato
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ Prodotto fra numeri complessi
- $z_1 / z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ Rapporto fra numeri complessi
- $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n [\cos n\varphi + i \sin n\varphi]$ Potenza di numero complesso
- $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ Identità di de Moivre
- $x = \Re(z)$ Parte reale del complesso
- $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ Rappresentazioni complesse di seno e coseno
 $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$
- Operatore lineare $\hat{L}(x)$
 $\rightarrow \forall x, y; \quad \hat{L}(x + y) = \hat{L}(x) + \hat{L}(y)$
 $\rightarrow \forall x, \forall a; \quad \hat{L}(ax) = a\hat{L}(x)$
- Integrali notevoli di seni e coseni; T periodo; $n, m \in \mathbb{N}$
 $\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \frac{T}{2} \delta_{nm}$
 $\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \frac{T}{2} \delta_{nm}$
 $\int_0^T \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0$
- Serie di Fourier, $f(t)$ limitata, periodica di periodo T
 $f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t]$
 $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$
 $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$
 $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$
- Serie complessa di Fourier
 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$
 $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$
- Trasformata e antitrasformata di Fourier
 $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

2 Oscillazioni Lineari

- $\vec{F} = -k \vec{x}$ Legge di Hooke
- $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Moto armonico semplice
 $x(t) = l \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ Equazione oraria
 $l = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$
 $\varphi_0 = -\arctan\left(\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)$
 $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
(Nel caso del circuito LC avremo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)
 $z(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$ Soluzione dell'equazione differenziale

- $\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x$ Oscillatore armonico smorzato
 $\Delta = \frac{\beta^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$
 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\beta}{m} \pm \sqrt{\Delta}\right)$
 $\rightarrow \Delta > 0$ Moto sovrasmorzato
 $x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} + c_2 e^{-|\lambda_2|t}$
 $\rightarrow \Delta = 0$ Moto smorzato critico $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\beta}{2m} = -\eta$
 $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\eta t}$
 $\rightarrow \Delta < 0$ Moto oscillatorio smorzato $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\beta}{m} + i\sqrt{|\Delta|}\right) = -\eta \pm i\omega$
 $x(t) = c_1 e^{-\eta t + i\omega t} + c_2 e^{-\eta t - i\omega t} = e^{-\eta t}(D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t) = A e^{-\eta t} \cos(\omega t + \phi_0)$
 $x(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega t + \varphi_0)$ avendo usato $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{\beta}$
- Oscillazioni forzate $x(t) = x_{omo}(t) + x_{part}(t)$
Forzante periodica
 $A = \frac{F_0/m}{(-\Omega^2 + \omega_0^2) + i\gamma\Omega} = \frac{F_0}{\chi} = \frac{F_0}{i\Omega Z_m}$ ampiezza oscillazione da forzante periodica di pulsazione Ω
 $\delta = \arctan \frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$
 $z(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} e^{i(\Omega t - \delta)}$
 $x(t) = \Re(z(t)) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} \cos(\Omega t - \delta)$
 $\dot{x}(t) = \Re(\dot{z}(t)) = -\frac{F_0\Omega}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} \sin(\Omega t - \delta)$
Andamenti caratteristici della soluzione stazionaria (particolare)
 $\rightarrow \Omega < \omega_0$
 $A \simeq \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}; \delta \simeq 0$
 $x(t) = \frac{F_0}{k} \cos \Omega t$ in fase con la forzante
 $\rightarrow \Omega > \omega_0$
 $A \simeq \frac{F_0}{m\Omega^2}; \delta \simeq \pi$
 $x(t) = -\frac{F_0}{m\Omega^2} \cos \Omega t$ in opposizione di fase con la forzante
 $\rightarrow \Omega \approx \omega_0$
 $A \simeq \frac{F_0}{\beta\Omega}; \delta \simeq \frac{\pi}{2}$
 $x(t) = \frac{F_0}{\beta\omega_0} \sin \Omega t$ in quadratura di fase con la forzante
- $Z_m = \frac{f(t)}{\dot{z}(t)}$ Impedenza meccanica
- $R(\Omega) = \frac{(\gamma\Omega)^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}$ Funzione di risposta
- $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ Fattore di qualità
RLC serie $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, RLC parallelo $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$
- $x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} \cos(\Omega t - \delta) = |A| \cos(\Omega t - \delta) = A_{el} \cos \Omega t + A_{ass} \sin \Omega t$
 $A_{el}(\Omega) = \frac{F_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2]}$ Ampiezza elastica
 $A_{ass}(\Omega) = \frac{F_0\gamma\Omega}{m[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2]}$ Ampiezza assorbitiva

3 Onde Meccaniche

- $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ Equazione delle onde di D'Alembert
- $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ Onda su corda, dati μ densità della corda e T tensione della corda
- $\xi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t)$ Onde Armoniche
 $\xi(x, t) = A \cos(kx \mp \omega t) = \Re(Ae^{i(kx \mp \omega t)})$
- $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Velocità delle onde meccaniche su corda
- $v_f = \frac{\omega}{k} (= v)$ Velocità di fase, v è quella di eq. D'Alembert

- $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v = v T_p$ Relazione lunghezza d'onda λ , periodo T_p , pulsazione ω e velocità v
- $\omega(k) = f(k)$ Relazione di dispersione
 $\omega(k) = v_f k$ Mezzi non dispersivi \rightarrow eq. di D'Alembert è esatta
 $\omega(k) \neq v_f k$ Mezzi dispersivi \rightarrow eq. di D'Alembert prima approssimazione
- $\xi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} + d_n e^{i(k_n x + \omega_n t)}]$
 Generalizzazione serie di Fourier complessa con onde progressive e regressive
- **Onde progressive su corda**
- $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x}$ Relazione derivate parziali per onda progressiva
- $F_y = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \big|_{x=0} = + \frac{T}{v} \frac{\partial \xi(0, t)}{\partial t}$ Deformazione all'inizio della corda
- $Z = \frac{F_y(t)}{v_c(t)}$ Impedenza meccanica della corda
 $Z = \frac{T}{v} = T \sqrt{\frac{\mu}{T}} = \sqrt{T\mu}$
- $P(x, t) = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -T \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t}$ Potenza nella corda
 $P(x, t) = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{T}{v} \left(\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 = T v \left(\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)^2$
 $P(x, t) = Z \left(\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2$ Formula valida per le onde meccaniche
- $u_K(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$ Densità lineare di energia cinetica
 $u_P(x, t) = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$ Densità lineare di energia potenziale
 $u_K(x, t) = u_P(x, t)$
 $u(x, t) = u_K(x, t) + u_P(x, t) = 2u_K(x, t) = 2u_P(x, t)$ Densità lineare energia meccanica onda
 $P(x, t) = v u(x, t)$ Legame potenza ed energia trasmessa
- Onde di trasporto Potenza ed Energia per onde meccaniche
 $\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2}$
 $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$
 Mediate sul periodo
 $\langle P(x, t) \rangle = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(x, t) dt = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2 \neq 0$
 $\langle u(x, t) \rangle = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} u(x, t) dt = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \neq 0$
 Energia trasportata in un periodo ($v T_p = \lambda, \lambda \mu = m$)
 $E = \int_0^{T_p} P(x, t) dt = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ (Uguale a quella dell'oscillatore armonico)
- Intensità per onde periodiche
 $I = \frac{E(\Delta t)}{\Delta t}$
 Per corda ed enti unidimensionali
 $I = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(x, t) dt = \langle P \rangle = \langle Z \left(\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 \rangle$ ($= \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2$ Per onda armonica)
 $I = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(x, t) dt = \frac{1}{2} Z \sum_{n=-1}^{+\infty} \omega_n^2 (a_n^2 + b_n^2)$
 $I = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n$ con $I_n = \frac{1}{2} Z \omega_n^2 (a_n^2 + b_n^2)$; I_n spettro di potenza dell'onda
- Onde su corda con discontinuità di Z ($Z_1 \neq Z_2$), i onda incidente, t trasmessa, r riflessa
 $A_t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} A_i$
 $A_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} A_i$
 $I_i = I_t + I_r$ Conservazione energia
 $T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$ Coefficiente di trasmissione
 $R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$ Coefficiente di riflessione
- **Onde acustiche**
- $\rho(x, t) - \rho_0 = -\rho_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x$ Variazione di densità al passaggio dell'onda di compressione
- $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ Eq. D'Alembert per onda acustica
- $\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ Velocità onda acustica
- $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$ Onda di densità associata
 $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ Onda di pressione associata

- $Z = \frac{\gamma P_0}{v} = \sqrt{\gamma P_0 \rho_0}$ Impedenza acustica specifica
 $\delta p = Z \frac{\partial \xi}{\partial t}$ Relazione causa-effetto fra passaggio dell'onda e variazione di pressione
- $I = \langle \frac{P}{S} \rangle = \langle Z (\frac{\partial \xi}{\partial t})^2 \rangle$ Intensità dell'onda acustica (attenzione ha udm diversa da onda su corda)
- $\beta_s = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$ Livello sonoro in decibel
- Interferenza per onde con stesso ω (*Onde coerenti*); ampiezze A_1, A_2 ; seconda onda sfasata di φ_0

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = \Re(A e^{i\varphi_0} e^{i(kx - \omega t)}) \\ \text{con } A &= |A_1 + A_2 e^{i\varphi_0}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi_0} \\ 2A_1 A_2 \cos \varphi_0 &\quad \text{Termine d'interferenza} \\ I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi_0 \quad \text{Intensità onda risultante}\end{aligned}$$

- Battimenti
 Onde con stessa ampiezza (A); pulsazioni simili ($\omega_1 \approx \omega_2$); numeri d'onda simili ($k_1 \approx k_2$)
 $\Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2} \quad \Delta \omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad k_0 = \frac{k_2 + k_1}{2} \quad \omega_0 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$
 $\xi(x, t) = 2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \cos(k_0 x - \omega_0 t)$
 $2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t)$ Componente *modulante*
 $\cos(k_0 x - \omega_0 t)$ Componente *portante*
 $v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$ Velocità di fase
 $v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$ Velocità di gruppo
 Per mezzi non dispersivi $v_f = v_g$; per mezzi dispersivi $v_f \neq v_g$ (generalmente osserviamo $v_g < v_f$)

- Effetto doppler (S sorgente, R ricevente; in avvicinamento)

$$f_R = f_m \left(1 + \frac{v_R}{v_m}\right) = f_S \frac{1 + \frac{v_R}{v_m}}{1 - \frac{v_S}{v_m}} = f_S \frac{v_m + v_R}{v_m - v_S}$$

(dove v_m velocità onda nel mezzo)

- Generalizzazione in 3D
 $\nabla^2 \xi(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$ D'Alembert
 $\xi(\vec{r}, t) = f(\hat{u} \cdot \vec{r} - vt)$ Onde piane
 $\xi(\vec{r}, t) = A \cos(k\hat{u} \cdot \vec{r} - \omega t)$ Onde armoniche piane (vale principio sovrapposizione)
 $\vec{k} = k\hat{u}$ Vettore d'onda $k = \frac{\omega}{v}$ Numero d'onda

- Onde sferiche (passaggio alla rappresentazione polare) $(x, y, z, t) \rightarrow (r, \theta, \varphi, t)$

$$\begin{aligned}\xi(\vec{r}, t) &= \xi(r, \theta, \varphi, t) = \frac{f(r \mp vt)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) \\ f(r - vt) &= A \cos(kr - \omega t + \alpha) \text{ Onde armoniche sferiche} \\ \text{Periodicità temporale } T_p &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \text{Periodicità spaziale scala con } \frac{1}{r}, &\text{ abbiamo pseudoperiodo } \lambda = \frac{2\pi}{k}\end{aligned}$$

- Onde piane vettoriali

$$\begin{cases} \xi_x(z, t) = f_x(z - vt) \\ \xi_y(z, t) = f_y(z - vt) \\ \xi_z(z, t) = f_z(z - vt) \end{cases}$$

Per onda generica $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{f}(\hat{u} \cdot \vec{r} - vt)$
 Onda trasversale $\hat{u} \cdot \vec{f}(\hat{u} \cdot \vec{r} - vt) = 0$
 Onda longitudinale $\hat{u} \times \vec{f}(\hat{u} \cdot \vec{r} - vt) = 0$

- Polarizzazione lineare

$$\begin{cases} \xi_x(z, t) = f_x(z - vt) = A_x f(z - vt) \\ \xi_y(z, t) = f_y(z - vt) = A_y f(z - vt) \\ \xi_z(z, t) = f_z(z - vt) = 0 \end{cases} \iff \frac{\xi_x(z, t)}{\xi_y(z, t)} = \frac{A_x}{A_y}$$

- Polarizzazione circolare ed ellittica

$$\begin{cases} \xi_x(z, t) = f_x(z - vt) = A_x \cos(kz - \omega t) \\ \xi_y(z, t) = f_y(z - vt) = A_y \cos(kz - \omega t + \beta) \\ \xi_z(z, t) = f_z(z - vt) = 0 \end{cases} \iff \left(\frac{\xi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{A_y}\right)^2 - 2 \cos(\beta) \frac{\xi_x}{A_x} \frac{\xi_y}{A_y} = \sin^2(\beta)$$

Casi

- $\beta = 0 \Rightarrow \frac{\xi_y}{A_y} = \frac{\xi_x}{A_x}$ Polarizzazione lineare
- $\beta = \pm\pi/2 \Rightarrow ((\frac{\xi_x}{A_x})^2 + (\frac{\xi_y}{A_y})^2 = 1)$ Assi paralleli agli assi coordinati
- $\beta = \pm\pi/2; A_x = A_y \Rightarrow ((\frac{\xi_x}{A_x})^2 + (\frac{\xi_y}{A_y})^2 = 1)$ Polarizzazione circolare

Polarizzazione destrorsa $-\pi \leq \beta \leq 0$ (Vedendolo arrivare, antiorario)

Polarizzazione sinistrorsa $0 \leq \beta \leq \pi$ (Vedendolo arrivare, orario)

- Huygens-Fresnel
 $f(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ Fattore correttivo per la propagazione
- Interferenza onde sonore
 $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi_0 = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$

4 Onde Elettromagnetiche

- Equazioni di Maxwell (forma locale)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Nel vuoto

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \iff (\vec{B} = \mu_0 \vec{H}) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Che contengono le Eq di D'Alembert

$$\begin{aligned} * \nabla^2 \vec{E} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ * \nabla^2 \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ * \nabla^2 \vec{H} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

- $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$
 $\nabla \cdot = i \vec{k} \cdot$
 $\nabla \times = i \vec{k} \times$
 $\nabla = i \vec{k}$

- Onde in mezzi senza cariche e senza correnti ($\mu = \mu_r \mu_0, \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$|\vec{E}| = v |\vec{B}| = v \mu |\vec{H}|$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}}$$

Impedenza elettromagnetica del mezzo $Z = v\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ $[Z] = [R]$ misurata in Ohm

$|\vec{E}| = Z |\vec{H}|$ causa effetto $\rightarrow E$ causa H

Impedenza del vuoto $Z_0 = c\mu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega$

- Mezzi ottici ($\mu_r \approx 1$)
 $v \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$
Indice di rifrazione $n \quad n = \frac{c}{v} \approx \sqrt{\epsilon_r}$
 $Z = v\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \approx \frac{Z_0}{n}$

- Vettore di Poynting

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [\vec{S}] = W/m^2$$

Conservazione energia elettromagnetica in forma locale $\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$

$$u_{EM} = \frac{1}{2} E^2 = \frac{Z}{2} H^2 = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2 = \mu H^2$$

$$|\vec{S}| = Z H^2 = \frac{1}{Z} E^2 = v u_{EM}$$

- Intensità per onde elettromagnetiche

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle \frac{1}{Z} E^2 \rangle = \langle Z H^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z} = \frac{1}{2} Z H_0^2 = v \langle u_{EM} \rangle$$

- Pressione di radiazione $p = \frac{I}{c} = \frac{|\vec{S}|}{c}$

- Campo di radiazione $E_\theta(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{c^2 r} a(t - \frac{r}{c})$

Carica oscillante di moto armonico

$$E_\theta(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin\theta}{r} A \cos[\omega \cdot (t - \frac{r}{c})]$$

- Legge di Lambert

$$I(z) = I_0 e^{-\mu z}$$

$$\mu \text{ coefficiente di assorbimento, } \mu = 2\beta, \beta = k_I = \frac{\omega n_I(\omega)}{c}$$

- Velocità di gruppo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n_r + \omega \frac{dn_r}{d\omega}}$$

$$\frac{dn_r}{d\omega} \geq 0 \Rightarrow v_g \leq v_f \text{ Dispersione normale}$$

$$\frac{dn_r}{d\omega} \leq 0 \Rightarrow v_g \geq v_f \text{ Dispersione anomala}$$

- Eq. di Maxwell nei metalli ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu\sigma \vec{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Da cui eq. del campo elettrico (non di D'Alembert, solo nel limite $\sigma \rightarrow 0$)

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + i \frac{\mu\sigma v^2}{\omega}} = k_r + i k_I$$

Il mezzo risulta dispersivo e vale Legge di Lambert ($\mu = 2k_I$)

Generalmente $\vec{E} \perp \vec{B}$, non in fase

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \rightarrow B_0 = E_0 |\vec{k}| \frac{e^{i\delta}}{\omega}$$

- Legge di Malus per i polarizzatori (onda ruotata di φ_0 rispetto asse polarizzatore, E oscilla su x)

$$I(\varphi_0) = \langle \frac{E_x^2}{Z} \rangle = \langle \frac{E_x^2 \cos^2 \varphi_0}{Z} \rangle = I_0 \cos^2 \varphi_0$$

- Riflessione e Rifrazione per onde EM

In incidenza normale

$$\left\{ \begin{array}{l} E_t = \frac{2n_1}{n_1+n_2} E_i \\ E_r = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} E_i \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} E_t = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2} E_i \\ E_r = \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} E_i \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} H_t = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2} H_i \\ H_r = \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} H_i \end{array} \right.$$

$I_r + I_t = I_i$ Conservazione energia nell'interfaccia tra i due mezzi non conduttori

$$T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} \text{ Coefficiente di trasmissione, } I_t = T I_i$$

$$R = \left(\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}\right)^2 \text{ Coefficiente di riflessione, } I_r = R I_i$$

$$R + T = 1$$

- Incidenza non normale

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \text{ Legge di Snell}$$

- Definito *Piano Incidente* il piano definito dalla normale alla superficie e la direzione del moto dell'onda.

Posti $\alpha = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$, $\beta = \frac{n_2}{n_1}$, Pedici: i=incidente, r=riflesso, t=trasmesso

Polarizzazione sul piano incidente

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{i\parallel} + E_{r\parallel} = \alpha E_{t\parallel} \\ E_{i\parallel} - E_{r\parallel} = \beta E_{t\parallel} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} E_{t\parallel} = \frac{2}{\alpha+\beta} E_{i\parallel} \\ E_{r\parallel} = \frac{\alpha-\beta}{2} E_{t\parallel} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} E_{i\parallel} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

→Formule di Fresnel per E_{\parallel}

$$\begin{cases} E_{t\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} E_{i\parallel} \\ E_{r\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} E_{i\parallel} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \begin{cases} E_{t\parallel} = t_{\parallel} E_{i\parallel} \\ E_{r\parallel} = r_{\parallel} E_{i\parallel} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{\parallel} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}\right)^2 = (r_{\parallel})^2 \\ T_{\parallel} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \end{cases} \begin{cases} I_{r\parallel} = R_{\parallel} I_{i\parallel} \\ I_{t\parallel} = T_{\parallel} I_{i\parallel} \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t} \end{cases}$$

$$\frac{I_{i\parallel}}{\cos \theta_i} = \frac{I_{r\parallel}}{\cos \theta_i} + \frac{I_{t\parallel}}{\cos \theta_t} \quad (\text{non si conserva l'intensità})$$

Polarizzazione sul piano perpendicolare al piano incidente

$$\begin{cases} E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp} \\ E_{i\perp} - E_{r\perp} = \alpha\beta E_{t\perp} \end{cases} = \begin{cases} E_{t\perp} = \frac{2}{(1+\alpha\beta)} E_{i\perp} \\ E_{r\perp} = \frac{(1-\alpha\beta)}{2} E_{t\perp} = \frac{(1-\alpha\beta)}{(1+\alpha\beta)} E_{i\perp} \end{cases} \Rightarrow$$

→Formule di Fresnel per E_{\perp}

$$\begin{cases} E_{t\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} E_{i\perp} \\ E_{r\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} E_{i\perp} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \begin{cases} E_{t\perp} = t_{\perp} E_{i\perp} \\ E_{r\perp} = r_{\perp} E_{i\perp} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{\perp} = \left(\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}\right)^2 = (r_{\perp})^2 \\ T_{\perp} = \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha\beta)^2} \end{cases} \begin{cases} I_{r\perp} = R_{\perp} I_{i\perp} \\ I_{t\perp} = T_{\perp} I_{i\perp} \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t} \end{cases}$$

$$\frac{I_{i\perp}}{\cos \theta_i} = \frac{I_{r\perp}}{\cos \theta_i} + \frac{I_{t\perp}}{\cos \theta_t} \quad (\text{non si conserva l'intensità})$$

Angolo di Brewster θ_B ($r_{\parallel} = 0$)

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

- Interferenza di Young

→ $\sin \theta_{max} = \frac{n\lambda}{d}$, Interferenza costruttiva, campo massimo $|\vec{E}(P)| = 2E'_0$, $I(P) = 4I_0$
 $\Delta\varphi = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2n\pi$

→ $\sin \theta_{min} = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{d}$, Interferenza costruttiva, campo massimo $|\vec{E}(P)| = 0$, $I(P) = 0$
 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = (2n + 1)\pi$

Intensità: $I(\Delta\varphi) = I_0 |1 + e^{i\Delta\varphi}|^2 = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 4I_0 \cos^2(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta)$

Controllo dell'interferenza dato dal fattore $\frac{d}{\lambda}$

$d \ll \lambda$ Un solo massimo di interferenza

$d \gg \lambda$ Non posso considerare le sorgenti puntiformi

$d > \lambda$ Interferenza alla Young

Interferenza con più sorgenti ($\varphi = k(r_2 - r_1) = kd \sin \theta$)

$$\vec{E}(P) = \frac{e^{\frac{N}{2}i\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} \frac{\sin(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$I(\Delta\varphi) = I_0 \left| \frac{e^{\frac{N}{2}i\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} \frac{\sin(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin\frac{\varphi}{2}} \right|^2 = I_0 \frac{\sin^2(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = I_0 \frac{\sin^2(N\frac{\pi}{\lambda}d \sin \theta)}{\sin^2(\frac{\pi}{\lambda}d \sin \theta)}$$

$$I_{max} = N^2 I_0$$

$$\sin \theta_{max} = \frac{m\lambda}{d} \quad \text{Posizione dei massimi principali}$$

$$\sin \theta_{min} = \frac{n\lambda}{Nd} \quad \text{Posizione dei minimi (eliminare dal computo quelli coincidenti coi massimi principali)}$$

$$\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta = m\pi$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd} \quad \text{Larghezze a mezza altezza}$$

- Reticolo (dispositivo di N fenditure grandi, N' fenditure per unità di lunghezza)

$$\mathcal{D} = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta_{max}} \quad \text{Dispersione, capacità di deviare la luce al variare della } \lambda$$

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{Nm}{\cos \theta_{max}} \approx Nm \quad \text{Potere risolutivo, capacità di vedere separati massimi a lunghezze d'onda vicine}$$

- Diffrazione da fenditura
Regime di Fresnel \rightarrow vicino
Regime di Fraunhofer \rightarrow lontano
 a ampiezza della fenditura, $\Delta\varphi = ka \sin \theta$
 $\sin \theta_{min} = n \frac{\lambda}{a}$ Minimi di intensità a $\Delta\varphi = ka \sin \theta = 2n\pi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$, $n \neq 0$ che è massimo
 $I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\frac{\alpha}{2})}{(\frac{\alpha}{2})^2} = I_0 \frac{\sin^2(\frac{ka \sin \theta}{2})}{(\frac{ka \sin \theta}{2})^2}$ Intensità
Larghezza del massimo centrale:
-Come distanza fra 2 minimi $\Delta\theta = 2 \frac{\lambda}{a}$
-Come altezza a mezza altezza $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$
Larghezza degli altri massimi $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$
- Diffrazione da foro circolare
 $I(\theta) = I_0 \frac{J_1^2(\alpha)}{(\frac{\alpha}{2})^2} = 4I_0 \frac{J_1^2(\frac{kD \sin \theta}{2})}{(\frac{kD \sin \theta}{2})^2}$ $J_1(\alpha)$ Funzione di Bessel di ordine 1
Posizione del primo minimo $\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$
- Potere separatore (o risolutivo), risoluzione
 $\frac{1}{\gamma_R} = \frac{D}{1.22\lambda}$ capacità di spostare il minimo di una sorgente sul minimo dell'altra (limite teorico)

5 Ottica Geometrica

Siano p la distanza dell'oggetto dal vertice, q la distanza dell'immagine, R il raggio, f distanza focale ($D = \frac{1}{f}$ è detta diottria), n_i gli indici di rifrazione

- $\theta_i = \theta_r$ Riflessione
- $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ Legge di Snell
- Specchio piano $\rightarrow m = 1$ Ingrandimento
- Equazione degli specchi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} = -\frac{1}{f}$
Specchi concavi $R < 0$, specchi convessi $R > 0$
- Diottero sferico $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = (\frac{n_2 - n_1}{R})$ $\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1$
- Equazione dei costruttori di lenti $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (\frac{n_2}{n_1} - 1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = \frac{1}{f}$
- Per lenti sottili $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$
- Lenti sottili vicine $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$

6 Accattonaggio

Se il formulario ti è piaciuto considera di supportarmi con una donazione al link paypal.me/gorsedh

Se ci fosse un qualsiasi errore che volete segnalare o volete solo scrivermi per raccontarmi una storia buffa su vostro zio con un alluce solo t.me/gorsedh