

Soluzioni esercizi Meccanica Quantistica

Grufoony

https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO

24 gennaio 2022

Esercizio 1 (esame del 09/01/2017)

Una molecola di idrogeno ionizzata pu' essere descritta come un sistema unidimensionale formato da un singolo elettrone soggetto al potenziale

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \Omega}{m} [\delta(x-a) + \delta(x+a)]$$

ove $a > 0$ è la semidistanza dei due protoni pensati fissi e $\Omega > 0$ ha le dimensioni di una lunghezza inversa. Trovare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia dello spettro discreto.

Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi + \{k^2 - 2\Omega [\delta(x-a) + \delta(x+a)]\} \Phi = 0$$

La soluzione è nota

$$\Phi^\pm(x) = \begin{cases} A^\pm e^{ikx} + B^\pm e^{-ikx} & x < -a \\ C^\pm e^{ikx} + D^\pm e^{-ikx} & -a < x < a \\ E^\pm e^{ikx} + F^\pm e^{-ikx} & a < x \end{cases}$$

Notiamo che il potenziale ha parità definita $U(-x) = U(x)$ allora possiamo imporre la condizione $\Phi^\pm(-x) = \pm \Phi^\pm(x)$, ottenendo

$$\begin{cases} E^\pm = \pm A^\pm \\ F^\pm = \pm B^\pm \\ D^\pm = \pm C^\pm \end{cases}$$

La funzione assume ora la forma più semplice

$$\Phi^\pm(x) = \begin{cases} C^\pm (e^{ik|x|} \pm e^{-ik|x|}) & |x| < a \\ \sigma_\pm(x) [A^\pm e^{ik|x|} + B^\pm e^{-ik|x|}] & a < |x| \end{cases}$$

Notiamo però che la funzione d'onda non può esplodere all'infinito, quindi necessariamente si avrà $A^\pm = 0$ e, riscalandolo $B^\pm = B^\pm e^{ika}$

$$\Phi^\pm(x) = \begin{cases} C^\pm (e^{ik|x|} \pm e^{-ik|x|}) & |x| < a \\ \sigma_\pm(x) B^\pm e^{-ik(|x|-a)} & a < |x| \end{cases}$$

Ora imponiamo la continuità della funzione e della sua derivata

$$\begin{cases} \sigma_\pm(x) B^\pm = C^\pm (e^{ika} \pm e^{-ika}) \\ -\sigma_\pm(x) B^\pm - C^\pm (e^{ika} \mp e^{-ika}) = \frac{2i\Omega}{k} \sigma_\pm(x) B^\pm \end{cases} \quad (1)$$

Si può riscrivere il tutto nella forma

$$\begin{cases} \sigma_{\pm}(x)B^{\pm} = C^{\pm} (e^{ika} \pm e^{-ika}) \\ \sigma_{\pm}(x)B^{\pm} (1 + \frac{2i\Omega}{k}) = C^{\pm} (e^{-ika} \mp e^{ika}) \end{cases} \quad (2)$$

Dividendo la seconda per la prima si ottiene

$$\frac{e^{-ika} \mp e^{ika}}{e^{ika} \pm e^{-ika}} = 1 + \frac{2i\Omega}{k}$$

Le soluzioni in k per le due parità sono

$$\begin{cases} \tanh(ika) = -\frac{2i\Omega+k}{k} \\ \tanh(ika) = \frac{k}{2i\Omega+k} \end{cases} \quad (3)$$

