Soluzioni esercizi Fisica della Materia

Grufoony
https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO

16 gennaio 2022

Ricavare Sackur-Tetrode

Per un gas perfetto è nota la

$$F = Nk_BT\left[\ln\left(\frac{n}{n_Q}\right) - 1\right]$$

Per calcolare l'entropia è sufficiente utilizzare la relazione

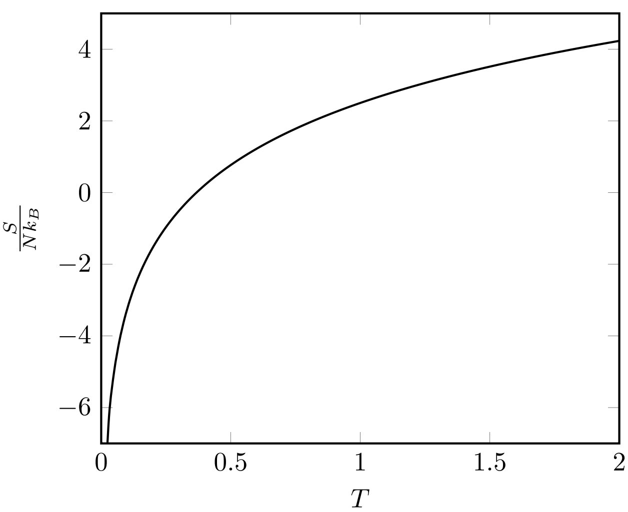
$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

ricordandosi che la concentrazione quantistica è definita

$$n_Q = \left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Svolgendo i calcoli

$$\begin{aligned} S &= -\left\{Nk_B\left[\ln\left(\frac{n}{n_Q}\right) - 1\right] - Nk_BT\frac{1}{n_Q}\left(\frac{mk_B}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}T^{\frac{1}{2}}\right\} \\ &= -\left\{Nk_B\left[\ln\left(\frac{n}{n_Q}\right) - 1 - \frac{3}{2}\right]\right\} = \\ &= Nk_B\left[\ln\left(\frac{n_Q}{n}\right) + \frac{5}{2}\right] \end{aligned}$$



Integrale di Bose

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1}dx = \int_0^\infty \frac{x^n e^{-x}}{1 - e^{-x}}dx = \\ &= \int_0^\infty x^n e^{-x} \sum_{k=0}^\infty e^{-kx} dx = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty x^n e^{-x(k+1)} dx\end{aligned}$$

Ponendo ora $h = k + 1$ e $y = hx$ e si ottiene

$$\begin{aligned}I &= \sum_{h=1}^\infty \int_0^\infty \frac{y^n}{h^{n+1}} e^{-y} dy = \\ &= \sum_{h=1}^\infty \frac{1}{h^{n+1}} \int_0^\infty y^n e^{-y} dy = \\ &= \zeta(n+1)\Gamma(n+1)\end{aligned}$$

Esercizio 4.17 (Kennett)

Considerare un sistema di spin non interagenti, ciascuno con energia $\epsilon = -s\mu B$, con $s = \pm 1$. Trovare l'energia libera di Helmholtz per un sistema di N spin in un solido.

Cominciamo con lo scrivere la funzione di partizione di unaparticella singola

$$Z_1 = e^{\beta\mu B} + e^{-\beta\mu B} = 2\cosh(\beta\mu B)$$

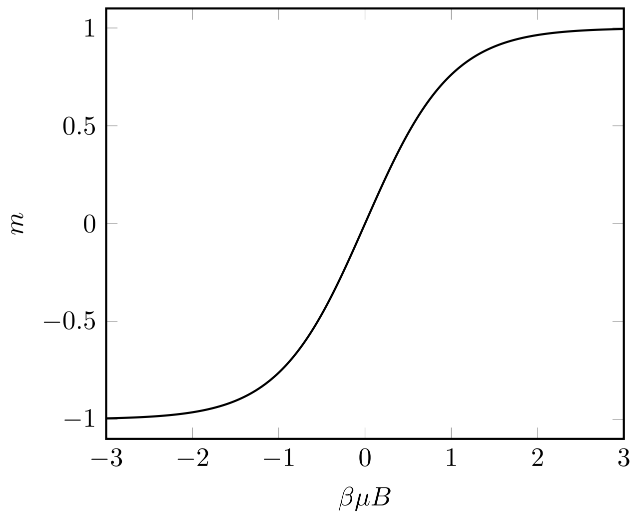
Trovandoci in un solido gli spin sono disposti a reticolo, quindi distinguibili. L'energia libera di Helmholtz è

$$F = -k_B T \ln(Z_1^N) = -N k_B T \ln[2\cosh(\beta\mu B)]$$

(a) Sapendo che la magnetizzazione si può esprimere come $M = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial B}$, trovare la magnetizzazione per spin m.

Avendo già l'energia di Helmholtz possiamo procedere con il calcolo

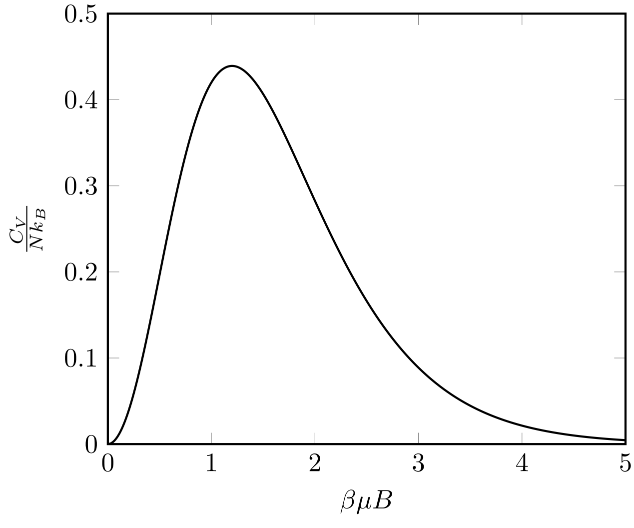
$$\begin{aligned}M &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial B} = \frac{N k_B T}{\mu}\frac{\partial \ln[2\cosh(\beta\mu B)]}{\partial B} \\ m &= \frac{k_B T}{\mu}\frac{2\sinh(\beta\mu B)\beta\mu}{2\cosh(\beta\mu B)} = \tanh(\beta\mu B)\end{aligned}$$



(b) Trovare la capacità termica a campo magnetico costante e verificare la presenza di un'anomalia di Schottky.

Per il calcolo useremo questa volta la funzione di partizione

$$
\begin{aligned}
C_V = \frac{\partial U}{\partial T} &= -\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial \ln(Z_1^N)}{\partial \beta} = \\
&= -N\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial \ln(2\cosh(\beta\mu B))}{\partial \beta} = \\
&= -N\frac{\partial}{\partial T}\frac{2\sinh(\beta\mu B)\mu B}{2\cosh(\beta\mu B)} = -N\mu B\frac{\partial}{\partial T}\tanh(\beta\mu B) = \\
&= -N\mu B\frac{(-\mu B)}{k_B T^2\cosh^2(\beta\mu B)} = Nk_B\frac{(\beta\mu B)^2}{\cosh^2(\beta\mu B)}
\end{aligned}
$$



Esercizio 5.4 (Kennett)

La pressione sul monte Everest è $P_{Ev} = \frac{1}{3}P_{atm}$ con $P_{atm} = 101.3kPa$ e la temperatura è $T_{Ev} \simeq 243K$. Calcolare il libero cammino medio.

Dalla teoria è nota la formula per il libero cammino medio

$$l = \frac{1}{n\pi d^2}$$

Dato che sempre di aria si tratta (sia sull'Everest che al livello del mare) e che non sappiamo d, risulta più comodo trovare

$$\frac{l_{Ev}}{l_{atm}} = \frac{n_{atm}}{n_{Ev}}$$

Essendo l'aria in buona approssimazione un gas perfetto si può scrivere la densità come $n = \frac{P}{k_B T}$ e, inserendo il tutto nella relazione precedente (assumendo $T_{atm} \simeq 300K$)

$$\frac{l_{Ev}}{l_{atm}} = \frac{T_{Ev} P_{atm}}{T_{atm} P_{Ev}} = 3\frac{T_{Ev}}{T_{atm}} = 2.67$$

Dalla teoria è noto $l_{atm} \simeq 1\mu m$ quindi $l_{Ev} \simeq 2.67\mu m$

Esercizio 5.5 (Kennett)

Nello spazio intersetllare sono presenti giganti nubi di idrogeno molecolare (lunghezza di legame $0.74 \times 10^{-10} m$). Sapendo che la massa di una nube è $m \sim 4 \times 10^{45} kg$, il diametro è $D \sim 1.42 \times 10^{18} m$ e la temperatura è $T \sim 10K$ calcolare il libero cammino medio e il tempo di collisione medio.

Calcolando il volume della nube

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} D^3$$

e il numero di molecole $N = \frac{A}{2N_A}$ si ottiene

$$l = \frac{V}{N\pi d^2} = \frac{D^3}{3N_A d^2} = 7.24 \times 10^{11} m$$

Il tempo di collisione analogamente è

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{3k_B T}} l = l\sqrt{\frac{A}{3N_A k_B T}} = 6.48 \times 10^{10} s$$

Esercizio 6.4 (Kennett)

Calcolare U e C_V per un sistema a due livelli popolato da bosoni.

Dalla teoria è nota la

$$\Xi_b = \prod_s \left[\frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_s)}}\right]$$

Assumiamo i due livelli energetici come

$$\begin{cases} \epsilon_0 = 0 \\ \epsilon_1 = \epsilon \end{cases}$$

e in questo caso la funzione di partizione gran canonica diviene

$$\Xi = \frac{1}{(1 - e^{\beta\mu})(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})}$$

Dalla definizione di energia interna si può utilizzare il trucco di Feynman

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{\Xi} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s}^{N} s\epsilon e^{\beta(N\mu - s\epsilon)} = \\
&= -\frac{1}{\Xi} \frac{\epsilon}{\beta} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s}^{N} \frac{\partial}{\partial \epsilon} e^{\beta(N\mu - s\epsilon)} = \\
&= -\frac{1}{\Xi} \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s}^{N} e^{\beta(N\mu - s\epsilon)} = \\
&= -\frac{1}{\Xi} \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \Xi}{\partial \epsilon} = \\
&= -\frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \epsilon}
\end{aligned}
$$

Possiamo ora calcolare l'energia interna

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \epsilon} = \\
&= \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \ln(1 - e^{\beta\mu})(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})}{\partial \epsilon} = \\
&= \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \ln(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})}{\partial \epsilon} = \\
&= \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\beta e^{\beta(\mu - \epsilon)}}{(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})} = \\
&= \epsilon \frac{e^{\beta(\mu - \epsilon)}}{(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})} = \\
&= \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}
\end{aligned}
$$

Per la capacità termica è sufficiente utilizzare la relazione

$$
\begin{aligned}
C_V &= \frac{\partial U}{\partial T} = \\
&= -\frac{\epsilon}{(e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1)^2} \frac{\epsilon - \mu}{k_B} \left(-\frac{1}{T^2} \right) e^{\beta(\epsilon - \mu)} = \\
&= \frac{k_B \beta^2 \epsilon(\epsilon - \mu)}{(e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1)(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})}
\end{aligned}
$$

Esercizio 9.5 (Kennett)

(a) Mostrare che la funzione di partizione gran canonica per la radiazione di corpo nero assume la forma

$$
\Xi = \prod_s \frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon_s}} \tag{1}
$$

La radiazione di corpo nero è costituita da fotoni, ossia bosoni. Dalla teoria (vista in classe) è nota la funzione di partizione gran canonica bosonica:

$$
\Xi_b = \prod_s \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_s)}}
$$

Osservando ora come si possano aggiungere/rimuovere fotoni ad un corpo nero senza alcun costo energetico ($\mu = 0$) la 1 diviene ovvia.

(b) Usando l'equazione 1 oppure in altro modo si dimostri che l'entropia per unità di volume della radiazione di corpo nero a temperatura T assume la forma

$$s = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45\hbar^3 c^3} \tag{2}$$

Richiamiamo ora l'energia per unità di volume della radiazione di corpo nero (eq. 9.20 Kennett)

$$u = \frac{\pi^2}{15}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}$$

e anche la sua pressione (eq. 9.29 Kennett)

$$P = \frac{u}{3}$$

Richiamando ora la relazione termodinamica

$$U = TS - PV - \mu N \tag{3}$$

ponendo $\mu = 0$ (vedi punto a) e dividendo per il volume V, si ottiene

$$s = \frac{u + P}{T}$$

che unita alle precedenti conclude la dimostrazione

$$s = s = \frac{u + \frac{u}{3}}{T} = \frac{4}{3}\frac{u}{T} = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45\hbar^3 c^3}$$

Esercizio 9.9 (Kennett)

Calcolare la temperatura critica per un BEC in 2 dimensioni.

Richiamiamo ora la densità degli stati 2D calcolata in precedenza:

$$g(\epsilon) = g_s \frac{m}{2\pi\hbar^2} L^2$$

Possiamo calcolare il numero medio di particelle con la classica formula

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

la quale, posto $n = \frac{N}{L^2}$ diventa

$$n = g_s \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon$$

Per la temperatura critica si ha $e^{\beta_0} >> 1$ e si può approssimare

$$n \approx g_s \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty e^{-\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon$$

la cui soluzione è

$$n = g_s \frac{m k_B}{2\pi\hbar^2} T_0$$

Invertendo l'equazione precedente si ottiene la relazione desiderata

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m k_B} \frac{n}{g_s}$$

Esercizio 1 (esame del 13/01/2022)

(a) Calcolare la capacitá termica C_V per un sistema di N oscillatori armonici distinguibili, ciascuno con energia $\epsilon_s = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ studiandone i limiti a basse ($k_B T << \hbar\omega$) e alte ($k_B T >> \hbar\omega$) temperature.

Si può subito calcolare la funzione di partizione dalla definizione

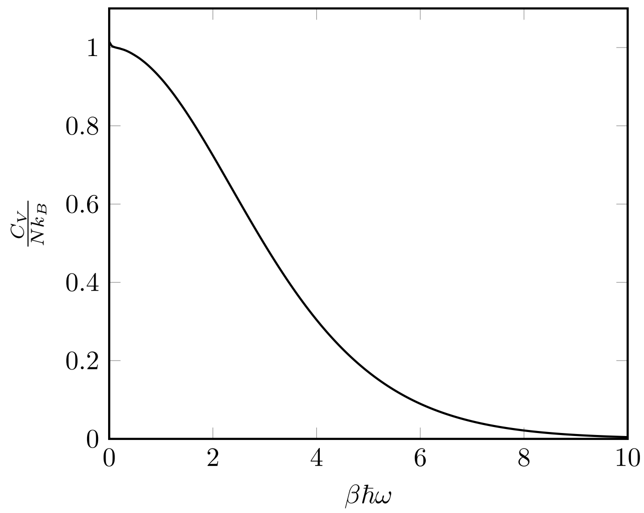
$$\begin{aligned}
Z_1 &= \sum_s e^{-\beta\epsilon_s} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \\
&= e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} = -\frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{e^{-\beta\hbar\omega} - 1} \\
&= \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}
\end{aligned}$$

Richiamiamo ora la formula per l'energia interna

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{\partial \ln(Z_1^N)}{\partial\beta} = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\ln(e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}}) - \ln(e^{\beta\hbar\omega} - 1)\right] = \\
&= -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\beta\frac{\hbar\omega}{2} - \ln(e^{\beta\hbar\omega} - 1)\right] = \\
&= -N\left[\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega}}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right] = \\
&= -N\hbar\omega\left[\frac{1}{2} - \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right] = \\
&= N\hbar\omega\left[\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} - \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

Da qui è possibile ricavare la capacità termica

$$\begin{aligned}
C_V &= \frac{\partial U}{\partial T} = N\hbar\omega\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} - \frac{1}{2}\right] = \\
&= N\hbar\omega\frac{\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B}\right)\left(-\frac{1}{T^2}\right)\left(-e^{-\beta\hbar\omega}\right)}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})^2} = \\
&= -\frac{Nk_B(\beta\hbar\omega)^2(e^{-\beta\hbar\omega})}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})^2} = \\
&= \frac{Nk_B(\beta\hbar\omega)^2}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)(1 - e^{-\beta\hbar\omega})}
\end{aligned}$$



(b) Paragonare graficamente il risultato ottenuto con il caso del sistema a due livelli (con energie $\epsilon_1 = -\frac{\hbar\omega}{3}$ e $\epsilon_2 = \frac{\hbar\omega}{3}$) evidenziandone analogie e differenze.

Analogamente a prima

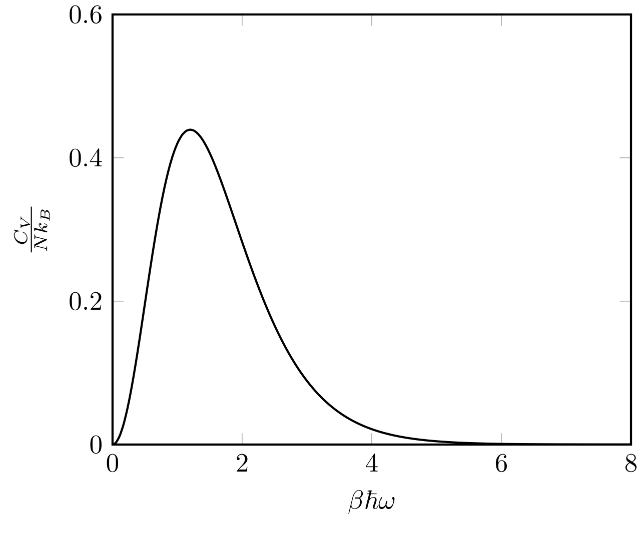
$$Z_1 = e^{\beta\frac{\hbar\omega}{3}} + e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{3}} = 2\cosh\beta\frac{\hbar\omega}{3}$$

L'energia interna viene

$$U = -N\frac{\hbar\omega}{3}\tanh\beta\frac{\hbar\omega}{3}$$

e di conseguenza la capacità termica

$$C_V = Nk_B\frac{\left(\beta\frac{\hbar\omega}{3}\right)^2}{\cosh^2\beta\frac{\hbar\omega}{3}}$$



(c) *Opzionale* Interpretare l'andamento alle alte T attraverso il teorema dell'equipartizione dell'energia.

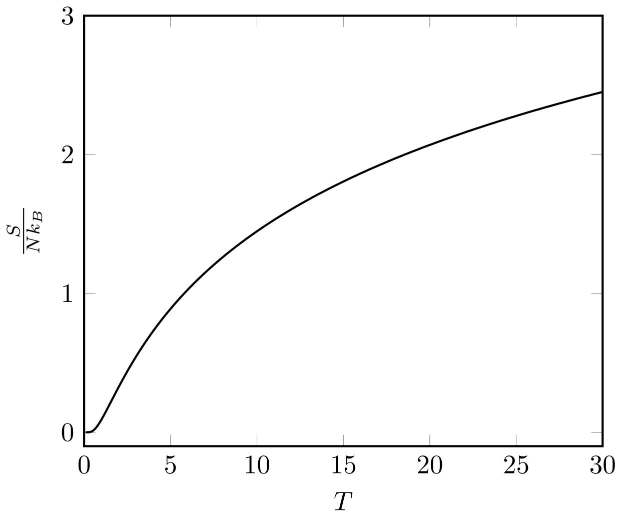
Avendo N oscillatori armonici con 2 gradi di libertà quadratici ciascuno con contributo $\frac{1}{2}k_BT$ ritroviamo la capacità termica a Nk_B.

Esercizio 2 (esame del 13/01/2022)

(a) Calcolare l'entropia S per un sistema di N oscillatori armonici distinguibili, spiegando perché allo zero assoluto ($T = 0$) $S = 0$ e studiandone l'andamento (e la dipendenza da T) alle alte T.

Dalla teoria usiamo la formula dell'entropia

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk_B \frac{\partial}{\partial T} T \left[\ln e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} - \ln(e^{\beta\hbar\omega} - 1) \right] = \\
&= Nk_B \frac{\partial}{\partial T} T \left[\beta \frac{\hbar\omega}{2} - \ln(e^{\beta\hbar\omega} - 1) \right] = \\
&= -Nk_B \frac{\partial}{\partial T} \left[T \ln(e^{\beta\hbar\omega} - 1) \right] = \\
&= -Nk_B \left[\ln(e^{\beta\hbar\omega} - 1) + T \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{k_B}\right) \left(-\frac{1}{T^2}\right) (e^{\beta\hbar\omega})}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right] = \\
&= Nk_B \left[\frac{\beta\hbar\omega}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} - \ln(e^{\beta\hbar\omega} - 1) \right]
\end{aligned}$$



Per $T = 0$, $S = 0$ in quanto avendo tutte le particelle allo stesso livello energetico ho solo una disposizione possibile $S = k \ln \Omega = k \ln 1 = 0$.

(b) *Opzionale* Stimare il numero di stati occupati ad alte temperature.

Non avendo restrizioni sul numero di oscillatori per livello energetico possiamo considerare questi come bosoni. Dalla teoria l'occupazione dei bosoni è data dalla

$$\langle n_s \rangle_b = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_s} - 1}$$

Inserendo nella formula precedente l'espressione dell'energia fornita nell'esercizio 1 e facendo il limite per alte temperature si trova

$$\begin{aligned}
\langle n_s \rangle &= \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega\left(s+\frac{1}{2}\right)} - 1} \approx \frac{1}{1 + \beta\hbar\omega\left(s + \frac{1}{2}\right) - 1} = \\
&= \frac{1}{\beta\hbar\omega\left(s + \frac{1}{2}\right)} = \frac{k_B T}{\hbar\omega\left(s + \frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

(c) Paragonare graficamente il risultato ottenuto con il caso di un gas di molecole diatomiche. Per il calcolo dell'entropia del gas di molecole diatomiche considerare solo i contributi dovuti al moto traslazionale (Z_t) e rotazionale (Z_r), considerando che per temperature superiori alla temperatura caratteristica del moto rotazionale θ_r la funzione Z_r si puó approssimare a $\frac{T}{\theta_r}$.

Ricaviamo innanzitutto la funzione di partizione

$$Z = Z_t Z_r = n_Q V \frac{T}{\theta_r}$$

Analogamente al punto precedente

$$\begin{aligned}
S = -\frac{\partial F}{\partial T} &\approx N k_B \frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\ln n_Q V \frac{T}{\theta_r} - \ln(N) + 1\right)\right] = \\
&= N k_B \frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\ln \frac{n_Q}{n} + \ln \frac{T}{\theta_r} + 1\right)\right] = \\
&= N k_B \left(\ln \frac{n_Q}{n} + \ln \frac{T}{\theta_r} + 1\right) + N k_B T \left(\frac{3}{2}\frac{1}{T} + \frac{1}{T}\right) = \\
&= N k_B \left(\ln \frac{n_Q}{n} + \ln \frac{T}{\theta_r} + \frac{7}{2}\right)
\end{aligned}$$