Appunti dal corso Introduzione ai Sistemi Complessi

Grufoony

10 novembre 2021

1 Sistema Complesso

Definizione 1.1. *Sistema Complesso è un sistema dinamico composto da sottosistemi interagenti tra loro.*

Per lo studio di un sistema complesso si usa solitamente un approccio olistico, ossia studiando prevalentemente le proprietà macroscopiche del sistema totale, senza considerare i singoli sottosistemi. Un'osservazione importante che va effettuata è che un sistema complesso **prevede**, non descrive. Alcune delle proprietà principali sono:

- **complessità**: presenza di molti d.o.f. (molti sottosistemi)
- **proprietà emergenti**: derivano dal grande numero di sottosistemi. Ad esempio possiamo definire *fluido* un insieme di molte particelle ma la particella singola non può essere fluida.
- **autorganizzazione**: i sistemi complessi sono ibridi, ossia metà stocastici e metà deterministici. Per studiarli devo dare ugual peso a entrambi gli aspetti.

2 Distribuzioni

Vediamo ora una serie di distribuzioni e teoremi ad esse legati che ci aiuteranno nell'analisi dei sistemi.

Definizione 2.1.

- *Gaussiana*
  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- *Esponenziale*
  $\rho(x) = \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{k}}$
- *Potenza*
  $\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}$*, con* $a > 0$

Definizione 2.2. *Momenti di una distribuzione:*
$< x^k >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \rho(x) dx$

Teorema 2.1. *Invarianza di scala:*
se $\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}$ *allora posto* $y = \lambda x$ *si ha* $\rho(y) = \frac{\lambda^a}{x^a} \propto \frac{1}{y^a}$

Teorema 2.2. *Limite centrale:*
Siano x_k *variabili casuali indipendenti, allora:*
$\lim_{N\to\infty} z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} x_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

Ora possiamo dare una definizione di probabilità:

Definizione 2.3. *Probabilità:*
$p(x \in [a,b]) = \int_a^b \rho(x)dx$

Definizione 2.4. *Probabilità cumulata:*
$p(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \rho(x)dx$

3 Informazione ed entropia

Definizione 3.1. *Una variabile* x *a valori discreti* $\{x_0, x_1, ...\}$ *è detta variabile di CODING*

Considerando una sequenza (*codifica*) $\{x_k\}_1^N$ si può assumere $P(\{x_k\}) = p(x_1)...p(x_N)$. Una codifica è detta **ottimale** se può descrivere in maniera univoca un'orbita.

Definizione 3.2. $-\ln(x)$ *informazione portata dal carattere* x

Definizione 3.3. *Probabilità stazionaria*
La probabilità stazionaria è il numero di volte che questo evento accade in una sequenza.

Definizione 3.4. $S = -\sum_k p(x_k)\ln(p(x_k))$ *entropia di informazione (informazione media portata dale variabili* x_k*)*

Si nota subito come più un valore della variabile di coding è probabile, minor informazione questo porti. Informaticamente, la misura è circa il numero di bit necessari per memorizzare la sequenza. Non bisogna confondere entropia con informazione: la variabile deve avere un significato!

Teorema 3.1. *legge dei grandi numeri*
Siano A *e* B *due eventi distinti (osservati* N *volte), allora si ha che*
$\lim_{N\to\infty} \frac{p(AB)}{p(A)} = p(B/A)$

Per capire la sequenza bisogna conoscerne la *memoria*, ossia tutte le dipendenze di un evento dagli altri. L'*irreversibilità* di un evento si ha quando la coppia di eventi AB è diversa dalla coppia di eventi BA.

Definizione 3.5. $p_{ij} = p(x_j/x_i)$ *matrice stocastica*

La matrice stocastica ha per definizione le seguenti proprietà:

- $0 \leq p_{ij} \leq 1$
- $\sum_j p_{ij} = 1$

Questa matrice è molto importante, essento intrinsecamente legata alla probabilità condizionata, ed è alla base di ogni problema di trasporto. Si consideri ora una sequenza infinita e sia p_i la probabilità di avere l'elemento x_i in quella posizione. Qual è la probabilità p_j di avere l'elemento successivo? Sia n il numero di passi per arrivare in posizione i, allora:

$$p_j^{n+1} = \sum_i p_{ij} p_j^n \tag{1}$$

Risulta quindi utile il seguente teorema:

Teorema 3.2. *Esiste un autovettore con autovalore* $\lambda_0 = 1$*, ossia* $p_j^s = \sum_i p_{ij} p_j^s$

Corollari:

- è un vettore stazionario situato nel primo quadrante
- gli iperpiani sono invarianti per p_{ij}
- $\lambda_i < 1 \quad \forall i \neq 0$
- $p_j^{n+1} = \sum_i p_{ij} p_j^n = 1 \Leftrightarrow \sum_i p_i^n = 1$

A questo punto si può calcolare come cambi l'entropia di informazione di una catena aggiungendo un carattere.

Definizione 3.6. *Proprietà di Markov (di tempo presente)* $P(\{x_1, ..., x_{n+1}\}) = P(x_{n+1}/P x_n) P(\{x_1, ..., x_n\})$

Si può quindi scrivere l'entropia dell'(N+1)esimo passo come:

$$S_{N+1} = S_N - \sum_{ij} p_j^s p_{ij} \ln p_j \tag{2}$$

Nei linguaggi l'aggiunta di un carattere non cambia di molto l'entropia (per fortuna, altrimenti sarebbe molto difficile parlarsi). Questa entropia fornisce tuttavia un'importante risultato sulla reversibilità del processo: se invertendo il tempo non ho differenza di entropia, allora il processo è *reversibile*, altrimenti no. Le **fluttuazioni** di un sistema **all'equilibrio** sono sempre un processo **reversibile**, infatti osservando tale sistema non si riesce a distinguere tra passato e futuro. Come esempio per giustificare la precedente affermazione si può prendere un pendolo fisico in assenza di attriti/forse esterne, oppure un *moto borwniano.*
In conclusione, la teoria dell'informazione è applicabile quasi in ogni ambito. Sono stati effettuati studi sui linguaggi, premiando finlandese e tedesco come lingue più entropiche, e studi sulla musica, che vedono Bach meno entropico di Hindemith.

4 Networks e problemi di trasporto

Teorema 4.1. *Un grafico random ha un numero esponenziale di LOOP rispetto ai nodi.*

Corollario: si creano delle *correnti*.

5 Costruzione di un modello

Punto fondamentale di un sistema complesso è costruire un modello matematico che riesca a riprodurre le sue caratteristiche fondamentali, per poi studiarlo. La prima cosa da definire è l'*ambiente* in cui ci troviamo. Questo può essere neutro o avere caratteristiche, ad esempio una distribuzione di nutrimento (per sistemi biologici). Altro punto fondamentale è definire *spazio e tempo*. Spesso non fa differenza la scelta di spazi e tempi discreti rispetto ai continui, quindi è preferibile assumere una discretizzazione iniziale per poi passare al continuo successivamente. Una volta definito lo spazio bisogna poi decidere le condizioni al contorno, ossia il comportamento ai bordi. Posso a questo punto avere *barriere* di tre tipi:

- **riflettenti**, dove ho un bordo *non* oltrepassabile. Si crea quindi un fenomeno di **attrattività delle pareti**.
- **periodico**, dove ho i bordi coincidenti (esco da una parte e rientro dall'altra). Lo spazio assume in questo caso una forma toroidale.
- **assorbenti**, dove gli oggetti "uscenti" vengono distrutti. In questo caso bisogna di introdurre delle *sorgenti* nel modello per evitare di perdere tutti i soggetti.

Si nota facilmente come più piccolo sia il modello, più importante sia il contributo degli effetti di bordo.
Nella maggior parte dei sistemi non tutti i soggetti hanno le stesse caratteristiche: si definiscono allora **classi** di appartenenza, legate tra loro da relazioni matematiche.

5.1 Random Walk 1D

Il modello più basilare di sistema complesso è sicuramente la random walk su una retta, ossia un punto che ogni istante di tempo decide in maniera casuale se spostarsi a destra o a sinistra. Sia $p = \frac{1}{2}$ la probabilità di muoversi verso destra (quindi anche a sinistra) di un passo Δx. Si hanno:

- {R}: $p(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x$
- {L}: $p(t + \Delta t) = x(t) - \Delta x$

Dopo n passi si ha quindi $p(n\Delta t) = x_0 + \sum_k \xi_k \Delta x$ con $\xi(t) = \pm 1$. Inoltre si può verificare che $< \xi_k >= 0$, $< \xi_k^2 >= 1$, $< \xi_k \xi_h >=< \xi_k >< \xi_h >, k \neq h$. Per il teorema del limite centrale si ha: $\sum_k^n \xi_k \Delta x = \sqrt{n\Delta t} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k^n \xi_k \right) \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D t}} e^{-\frac{z^2}{2Dt}}$, con z

variabile gaussiana. Introducendo il concetto di diffusione:

Definizione 5.1. *Diffusione.* $D = \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$

si può descrivere l'evoluzione del sistema come $x(t) = x_0 + z\sqrt{Dt}$ Si utilizza $\sqrt{n}$ per normalizzare in quanto è l'unico esponente non divergente. La varianza della gaussiana cresce nel tempo, infatti calcolando i momenti della distribuzione si trova $< x(t) >= x_0$, $< (x(t) - x_0)^2 >= Dt$. Se la topologia del sistema fosse una circonferenza (e non una retta), si avrebbe un rilassamento esponenziale a una situazione stazionaria.

5.2 Random Walk 2D

Volendo espandere il modello di random walk ad uno spazio 2D si nota subito come, essendo ogni asse indipendente dall'altro, si possa semplicemente comporre due gaussiane:

$$(x, y) \simeq \frac{1}{2\pi\Delta t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\Delta t}} = \rho(x, y, t) \tag{3}$$

Dove la diffusione segue la definizione precedente ed è la stessa in tutte le direzioni. La funzione $\rho(x, y, t)$ rappresnta di fatto la probabilità che la il soggetto in analisi si trovi in un volume $\Delta x \Delta y$. Si può riscrivere la relazione precedente in coorfinate polari ottenendo:

$$\rho(r, \theta, t) = \frac{r}{2\pi\Delta t} e^{-\frac{r^2}{2\Delta t}} \tag{4}$$

studiando più semplicemente l'allontanamento dall'origine. In particolare, l'allontanamento medio risulta:

$$< r >= \int_0^\infty \rho(r, \theta, t) r dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}\Delta t} \tag{5}$$

e la densità diminuisce quindi esponenzialmente.

5.3 Modello Economico

Si vuole ora costruire un primo modello legato alla realtà simulando, per quanto grossolanamente, l'economia globale.
Supponiamo di avere M individui con n soldi ciascuno, che si muovono su una griglia secondo una Random Walk 2D. Ogni qualvolta due individui si trovino sulla stessa cella questi si scambiano 1 soldo con probabilità $p = \frac{1}{2}$.
Caso limite: se si incontra un povero ($n = 0$), si gioca lo stesso (gioco scorretto) per permettere a tutti di uscire dalla povertà. Il sistema ha quindi i seguenti limiti:

$$\begin{cases} \sum_k n_k = N \\ n_k \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

con N costante, quindi non si ha creazione/distruzione di denaro. La probabilità di trovare un individuo con n soldi è:

$$p(n) = \frac{\binom{M+N-2-n}{M-2}}{\binom{M+N-1}{N-1}} \tag{7}$$

e, ponendo $\overline{n} = \frac{N}{M}$, si può calcolare:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{\overline{n}} \left(1 - \frac{n}{M}\right)^M = \frac{1}{\overline{n}} e^{-\frac{n}{\overline{n}}} \tag{8}$$

quindi la probabilità decresce esponenzialmente.
Il modello prevede quindi:

- molti poveri e pochi ricchi (ma praticamente nessun super-ricco)
- esiste un tempo in cui un povero diventa ricco (e viceversa)
- simile alla distribuzione di energia di Maxwell-Boltzmann
- se chi è ricco pagasse di più si otterrebbe una curva a campana

Tuttavia osservando i dati sperimentali si nota una discrepanza: nella realtà la probabilità sembra seguire una legge a potenza piuttosto che esponenziale.

5.4 Modello Economico Evoluto

Per adattare il modello precedente alla realtà si introduce una microdinamica sugli scambi di denaro.
Sia $\pi_\pm$ la probabilità di guadagnare ± 1 soldi se un soggetto ne possiede n. Il sistema possiede una *struttura di catena*:

Definizione 5.2. *Struttura di catena.*
Un modello ha struttura di catena quando il flusso in una direzione implica un secondo flusso nella direzione opposta.

A causa di questa struttura, all'equilibrio si deve avere:

$$\pi_+(n-1)p(n-1) + \pi_-(n+1)p(n+1) = \pi_+(n)p(n) + \pi_-(n)p(n) \tag{9}$$

e in particolare è verificato il *bilancio dettagliato*:

$$\pi_+(n-1)p(n-1) = \pi_-(n)p(n) \quad \forall n \geq 1 \tag{10}$$

Normalizzata la distribuzione è possibile iterare il tutto:

$$p(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\pi_+(k-1)}{1pi_-(k)} p(0) \tag{11}$$

Riscrivendo un maniera più comoda il bilancio dettagliato, si può poi procedere:

$$\pi_+(n-\frac{1}{2})p(n-\frac{1}{2}) = \pi_-(n+\frac{1}{2})p(n+\frac{1}{2}) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}[]
[\pi_+(n)-\pi_-(n)]p(n) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}[\pi_+(n)-\pi_-(n)]p(n) \simeq 0 \\
ap(n) + \frac{\partial}{\partial n}(bn)p(n) \simeq 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Si possono notare ora le seguenti dipendenze, introducendo la coppia di parametri costanti *(a, b)*:

$$\begin{cases} \pi_+(n-1) - \pi_-(n) \simeq a \\ \pi_+(n) \simeq bn - \frac{a}{2} \\ \pi_-(n) \simeq bn + \frac{a}{2} \end{cases} \tag{14}$$

Cercando ora l'andamento di $p(n)$:

$$\begin{aligned}
p(n) - p(n-1) &= \left(\frac{bn-\frac{a}{2}}{bn+\frac{a}{2}} - 1\right)p(n-1) \\
\frac{dp}{dn} &= -\frac{a}{bn}p(n-1) \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(n) &\propto n^{-\frac{a}{b}}
\end{aligned} \tag{15}$$

si ottiene esattamente l'andamento a potenza ricercato.

5.5 La rovina di un giocatore

Si consideri un giocatore d'azzardo con a disposizione un capitale k e che vuole arrivare ad un capitale M. Il gioco finisce ai "bordi" per $k = 0$ (giocatore rovinato) o per $k = M$ (giocatore felice). Siano p la probabilità di guadagnare, $q = 1 - p$ la probabilità di perdere, $P_M(k)$ la probabilità di arrivare al capitale M partendo da k. Come nel modello economico evoluto si ha:

$$P_M(k) = pP_M(k+1) + qP_M(k-1) \tag{16}$$

con i vincoli

$$\begin{cases} P_M(0) = 0 \\ P_M(M) = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Ragionando per induzione si ottiene:

$$P_M(k+1) - P_M(k) = \frac{q}{p}\left[P_M(k) - P_M(k-1)\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^k P_M(1) \tag{18}$$

$$P_M(k) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M} \tag{19}$$

Ponendo ora $p > q$,

$$P_\infty(k) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k \tag{20}$$

In particolare, considerando un gioco equo, si può notare come $P_M(k) = \frac{k}{M}$ e quindi:

- il gioco è alla pari solo se $k \simeq M$
- la probabilità di vincita aumenta all'aumentare del proprio capitale rispetto a quello avversario
- contro un casinò ($M \to \infty$) la probabilità di vincita è evidentemente nulla anche in caso di gioco equo (assunzione oltretutto inverosimile)

5.6 Broken Stick Model/Modello di Markov

Si consideri un segmento di lunghezza unitaria nel quale viene inserito casualmente un punto $x_1 \in [0, 1]$ secondo una distribuzione uniforme. Si scarti ora il segmeno $[0, x_1]$ e si iteri il processo per N volte: si tratta di un processo ricorsivo con memoria del passato. Essendo la distribuzione di probabilità uniforme risulta ovvio come $< x >= \frac{1}{2}$ quindi è possibile riscalare il tutto con una variabile $y \to \frac{y}{2}$ Definita la densità ρ del sistema si può scrivere:

$$\begin{aligned} &\rho_{N+1}\left(\frac{y}{2}\right)\frac{dy}{2} = \rho_N(y)dy \\ &\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \rho_N(y) \propto \frac{1}{y} \end{aligned} \tag{21}$$

Il risultato è una legge a potenza con $\alpha = -1$, quindi *non normalizzabile* in quanto l'integrale diverge. Il sistema ha un effetto di memoria assoluta: una volta tagliato il segmento non posso più riattaccarlo. Se il segmento non venisse tagliato si otterrebbe un andamento a potenza con $\alpha \geq 1$ e risulterebbe pertanto normalizzabile. Un'utile applicazione dei modelli di Markov si trova nel linguaggio (verbi) e in biologia (DNA).

5.7 Penney's game

Si prenda una moneta e la si lanci all'infinito. Si vuole scommettere con un'altra persona su una terna di uscite consecutive dai lanci e ci si chiede come si possa vincere più facilmente. Analizzando attentamente il problema si può notare come l'uscita delle sequenze non sia casuale ma segua un percorso ben preciso: l'unica sequenza casuale è quella data dalle prime tre uscite.

In questo modo risulta abbastanza semplice fregare l' avversario: facendolo scegliere per primo, è sempre possibile scegliere una sequenza più probabile della sua.

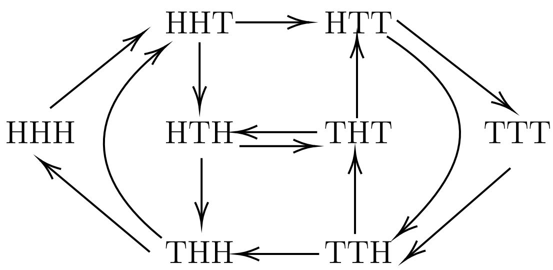

Figura 1: Schema del gioco di Penney

Eseguendo i calcoli si nota subito come la probabilità stazionaria del sistema sia data da $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 12.5\%$. Scegliendo per secondi si vince sempre a meno che la sequenza dell'avversario non esca dai primi tre lanci, quindi eseguendo i calcoli sulle probabilità si ottiene la seguente tabella:

1st player's choice	2nd player's choice	2nd player's winning chance
HHH	**T**HH	87.5%
HHT	**T**HH	75.0%
HTH	**H**HT	66.7%
HTT	**H**HT	66.7%
THH	**T**TH	66.7%
THT	**T**TH	66.7%
TTH	**H**TT	75.0%
TTT	**H**TT	87.5%

5.8 Random Walk non omogenea

Si consideri ora una random walk 1D con probabilità non uniforme in un reticolo di passo Δx. Sia ϵ un parametro e si definiscano le probabilità:

$$\begin{cases} p_{++} = p_{--} = \frac{1}{4}(1+\epsilon x) \quad x \geq 0 \quad \Rightarrow x \to x \pm 2\Delta x \\ p_{+} = p_{-} = \frac{1}{4}(1-\epsilon x) \quad x < 0 \quad \Rightarrow x \to x \pm \Delta x \end{cases} \tag{22}$$

Si può verificare facilmente come le probabilità siano ben definite. Il sistema tende a muoversi più velocemente nel verso positivo delle x e più lentamente nel verso opposto, assomigliando a una scatola con aria a diversa temperatura: vi è quindi un equilibrio locale (ogni nodo è identico). Si può osservare come:

$$\begin{aligned} &< \Delta x > = 0 \\ &< \Delta x^2 > = (4\Delta x^2)(p_{++} + p_{--}) + \Delta x^2(p_+ + p_-) = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\epsilon x\right)\Delta x^2 \end{aligned} \tag{23}$$

Ogni passo ho un *enemble* differente, quindi lo spazio non è omogeneo. Ponendo $T(x) =< \Delta x^2 >$ come funzione corrispondente alla temperatura fisica, si ottiene un gradiente costante:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{3}{2}\epsilon\Delta x^2 \tag{24}$$

Questo gradiente si ritrova spesso in natura, ad esempio i batteri variano la velocità di movimento (casuale) dei loro flagelli seguendo un gradiente di cibo. Per essere apprezzabile la variazione di temperatura deve essere tale che $\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x \propto \Delta x^3$ e in un limite continuo si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}T(x)\frac{\partial p}{\partial x}p(x,t) \\ \frac{d < x >}{dt} &= \frac{1}{2}\int x\frac{\partial p}{\partial x}T(x)\frac{\partial p}{\partial x}p(x,t) > 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} > 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Andando a calcolare media e mediana del sistema si nota come:

$$\begin{aligned} &\int xp(x,t)dx > 0 \\ -&\int_{-L}^{0} p(x,t)dx + \int_{0}^{L} p(x,t)dx < 0 \end{aligned} \tag{26}$$

In conclusione la maggior parte delle particelle si trova nella zona fredda ($x < 0$), come vuole la fisica, ma la media della distribuzione si trova nella zona calda ($x > 0$)