

Soluzioni esercizi Meccanica Quantistica

Grufoony

https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO

25 gennaio 2022

Esercizio 1 (esame del 09/01/2017)

Una molecola di idrogeno ionizzata può essere descritta come un sistema unidimensionale formato da un singolo elettrone soggetto al potenziale

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \Omega}{m} [\delta(x-a) + \delta(x+a)]$$

ove $a > 0$ è la semidistanza dei due protoni pensati fissi e $\Omega > 0$ ha le dimensioni di una lunghezza inversa. Trovare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia dello spettro discreto.

Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi + \{k^2 - 2\Omega [\delta(x-a) + \delta(x+a)]\} \Phi = 0$$

La soluzione è nota

$$\Phi^\pm(x) = \begin{cases} A^\pm e^{ikx} + B^\pm e^{-ikx} & x < -a \\ C^\pm e^{ikx} + D^\pm e^{-ikx} & -a < x < a \\ E^\pm e^{ikx} + F^\pm e^{-ikx} & a < x \end{cases}$$

Notiamo che il potenziale ha parità definita $U(-x) = U(x)$ allora possiamo imporre la condizione $\Phi^\pm(-x) = \pm \Phi^\pm(x)$, ottenendo

$$\begin{cases} E^\pm = \pm A^\pm \\ F^\pm = \pm B^\pm \\ D^\pm = \pm C^\pm \end{cases}$$

La funzione assume ora la forma più semplice

$$\Phi^\pm(x) = \begin{cases} C^\pm (e^{ik|x|} \pm e^{-ik|x|}) & |x| < a \\ \sigma_\pm(x) [A^\pm e^{ik|x|} + B^\pm e^{-ik|x|}] & a < |x| \end{cases}$$

Notiamo però che la funzione d'onda non può esplodere all'infinito, quindi necessariamente si avrà $A^\pm = 0$ e, riscalandolo $B^\pm = B^\pm e^{ika}$

$$\Phi^\pm(x) = \begin{cases} C^\pm (e^{ik|x|} \pm e^{-ik|x|}) & |x| < a \\ \sigma_\pm(x) B^\pm e^{-ik(|x|-a)} & a < |x| \end{cases}$$

Ora imponiamo la continuità della funzione e della sua derivata

$$\begin{cases} \sigma_\pm(x) B^\pm = C^\pm (e^{ika} \pm e^{-ika}) \\ -\sigma_\pm(x) B^\pm - C^\pm (e^{ika} \mp e^{-ika}) = \frac{2i\Omega}{k} \sigma_\pm(x) B^\pm \end{cases} \quad (1)$$

Si può riscrivere il tutto nella forma

$$\begin{cases} \sigma_{\pm}(x)B^{\pm} = C^{\pm} (e^{ika} \pm e^{-ika}) \\ \sigma_{\pm}(x)B^{\pm} (1 + \frac{2i\Omega}{k}) = C^{\pm} (e^{-ika} \mp e^{ika}) \end{cases} \quad (2)$$

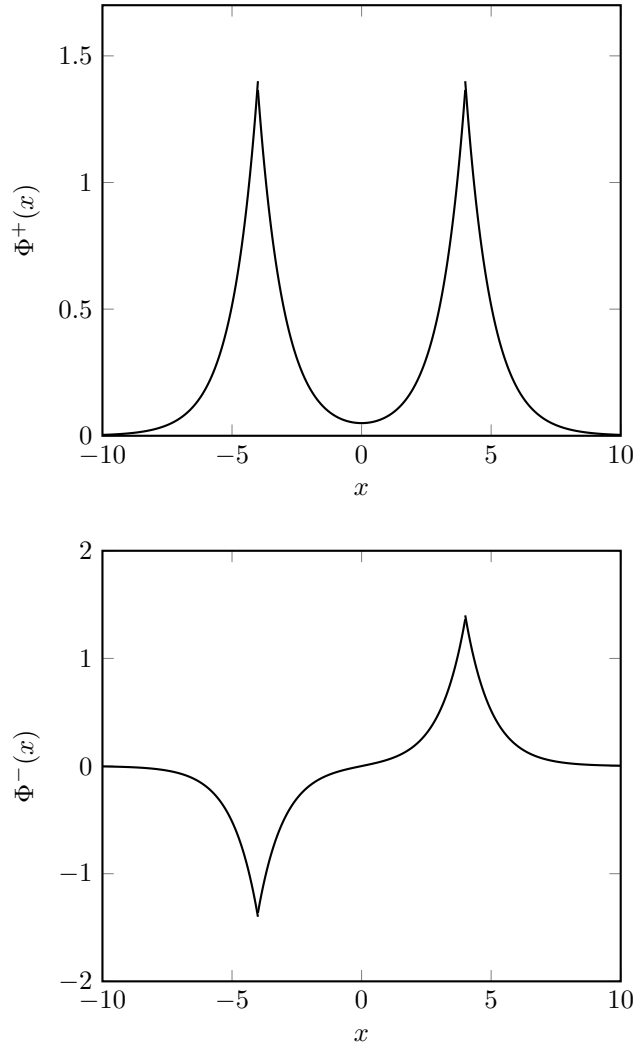
Dividendo la seconda per la prima si ottiene

$$\frac{e^{-ika} \mp e^{ika}}{e^{ika} \pm e^{-ika}} = 1 + \frac{2i\Omega}{k}$$

Le soluzioni in k per le due parità sono

$$\begin{cases} \tanh(ika) = -\frac{2i\Omega+k}{k} \\ \tanh(ika) = \frac{k}{2i\Omega+k} \end{cases} \quad (3)$$

Ogni equazione mi fornisce una soluzione quindi, posto $\tilde{k} = ik$, ho due soli livelli energetici corrispondenti ai valori di \tilde{k}_0^{\pm} .



Esercizio 1 (esame del 03/07/2017)

Una particella è confinata in una regione sferica di raggio R ed è soggetta ad un campo di forza centrale con potenziale

$$U(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \\ U_0 & \frac{R}{2} < r \leq R \end{cases} \quad U_0 \neq 0$$

ove $U_0 > 0$ è una costante con le dimensioni di un'energia. Calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia della particella. Suggerimento: Derivare ma non tentare di risolvere l'equazione agli autovalori trascendente.

Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger radiale

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l-1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right] \chi = 0$$

la cui soluzione è

$$\chi(r) = \begin{cases} Akr j_l(kr) + Bkr n_l(kr) & 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \\ Ck'r j_l(k'r) + Dk'r n_l(k'r) & \frac{R}{2} < r \leq R \end{cases}$$

con $k'^2 = k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} U_0$ Condizione al bordo $\chi(0) = 0$ quindi $B = 0$. Continuità della funzione

$$Ak \frac{R}{2} j_l(k \frac{R}{2}) = Ck' \frac{R}{2} j_l(k' \frac{R}{2}) + Dk' \frac{R}{2} n_l(k' \frac{R}{2})$$

Ponendo $x_k = \frac{kR}{2}$, $x_{k'} = \frac{k'R}{2}$, $C = En_l(2x_{k'})$ e $D = -Ej_l(2x_{k'})$ si ottiene

$$\chi(r) = \begin{cases} Akr j_l(kr) & 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \\ Ek'r [n_l(2x_{k'}) j_l(k'r) - j_l(2x_{k'}) n_l(k'r)] & \frac{R}{2} < r \leq R \end{cases}$$

Continuità della derivata

$$A \{x_k j_l(x_k) + x_k^2 j_l'(x_k)\} = E \{n_l(2x_{k'}) [x_{k'} j_l(x_{k'}) + x_{k'}^2 j_l'(x_{k'})] - j_l(2x_{k'}) [x_{k'} n_l(x_{k'}) + x_{k'}^2 n_l'(x_{k'})]\} \\ Ax_k^2 j_l'(x_k) = E [n_l(2x_{k'}) x_{k'}^2 j_l'(x_{k'}) - j_l(2x_{k'}) x_{k'}^2 n_l'(x_{k'})]$$

I k sono forniti quindi dal sistema di equazioni (risolvibile)

$$\begin{cases} Ax_k j_l(x_k) &= E [n_l(2x_{k'}) x_{k'} j_l(x_{k'}) - j_l(2x_{k'}) x_{k'} n_l(x_{k'})] \\ Ax_k^2 j_l'(x_k) &= E [n_l(2x_{k'}) x_{k'}^2 j_l'(x_{k'}) - j_l(2x_{k'}) x_{k'}^2 n_l'(x_{k'})] \end{cases}$$

Esercizio 1 (esame del 15/01/2018)

Una particella di massa m è confinata nello semispazio unidimensionale $x \geq 0$ ed è soggetta al potenziale

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{m} \Omega \delta(x - a)$$

ove $a > 0$ e $\Omega \neq 0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza ed una lunghezza inversa, rispettivamente. Trovare gli autovalori e le autofunzioni della energia.

Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi + \{k^2 + 2\Omega \delta(x - a)\} \Phi = 0$$

La soluzione generica è

$$\Phi(x) = \begin{cases} A \sin(kx) + B \cos(kx) & 0 < x < a \\ C \sin(kx) + D \cos(kx) & a < x \end{cases}$$

Condizioni al bordo $\Phi(0) = 0$ quindi $B = 0$. Imponiamo ora la continuità

$$\begin{cases} A \sin(ka) = C \sin(ka) + D \cos(ka) \\ Ck \cos(ka) - Dk \sin(ka) - Ak \cos(ka) = 2\Omega A \sin(ka) \end{cases}$$

Facendo qualche conto si ottiene

$$\begin{cases} A = C + D \cot(ka) \\ Ck - Dk \tan(ka) - Ak = 2\Omega A \tan(ka) \end{cases}$$

I k_n sono definiti quindi dall'equazione

$$\frac{Dk}{2\Omega} = -\frac{C \tan(ka) + D}{\tan(ka) + \cot(ka)}$$

e i livelli energetici sono dati da

$$w_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2$$

La funzione d'onda è infine

$$\Phi(x) = \begin{cases} [C + D \cot(ka)] \sin(kx) & 0 < x < a \\ C \sin(kx) + D \cos(kx) & a < x \end{cases}$$

