

# Analisi 1

Nicoló Montalti

## 1 Limiti di successioni

**Teorema 1.1** (Unicità del limite). *Sia  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ .*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \alpha, a_n \rightarrow \beta \implies \alpha = \beta$$

**Teorema 1.2** (TLS Limiti delle sottosuccessioni). *Sia  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ .*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \alpha \implies \forall (a_k)_n \text{ s.s di } a_n \text{ si ha } (a_k)_n \rightarrow \alpha$$

**Teorema 1.3** (TPS Permanenza del segno). *Siano  $(a_n), (b_n)$  s. in  $\mathbb{R}$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .*

$$\text{Se } a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$$

**Teorema 1.4** (T2C Due carabinieri). *Siano  $(a_n), (b_n), (c_n)$  s. in  $\mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \lambda, b_n \rightarrow \lambda, a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \rightarrow \lambda$$

**Teorema 1.5** (TSM Successioni monotone).

$$\begin{aligned} \text{Se } (a_n) \nearrow &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n) \\ \text{Se } (a_n) \searrow &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (a_n) \end{aligned}$$

**Teorema 1.6** (Criterio del rapporto). *Sia  $a_n > 0$  s. in  $\mathbb{R}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ .*

$$\begin{aligned} \text{Se } \lambda > 1 &\implies a_n \rightarrow +\infty \\ \text{Se } \lambda < 1 &\implies a_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Teorema 1.7** (CSE Continuità sequenziale dell'esponenziale). *Sia  $x_n$  s. in  $\mathbb{R}$ .*

$$\text{Se } x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \implies e^{x_n} \rightarrow e^{x_0}$$

**Teorema 1.8** (CSL Continuità sequenziale del logaritmo). *Sia  $x_n$  s. in  $\mathbb{R}$ .*

$$\text{Se } x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \implies \log_a(x_n) \rightarrow \log_a(x_0)$$

**Teorema 1.9** (Criterio di Cesaro). *Siano  $a_n, b_n$  s. in  $\mathbb{R}$ ,  $b_n \nearrow$  s.,  $b_n \rightarrow +\infty$ .*

$$\text{Se } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$$

## 2 Limiti di funzioni

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $\alpha \in D(A)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^M$  ( $\overline{\mathbb{R}}$  se  $M = 1$ )

**Teorema 2.1** (Unicità del limite).

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \mu \implies \lambda = \mu$$

**Teorema 2.2** (TLR Limite delle restrizioni). *Sia  $B \subseteq A$ ,  $\alpha \in D(B)$ .*

$$Se f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda \implies f|_B(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda$$

dove  $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $f|_B(x) := f(x)$

**Teorema 2.3** (CSL Caratterizzazione sequenziale del limite).

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda \iff f(x_n) \rightarrow \lambda \quad \forall (x_n) \text{ s. in } A \setminus \alpha, x_n \rightarrow \alpha$$

**Teorema 2.4** (TLM Limite delle funzioni monotone). *Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^M$ ,  $f \nearrow$*

$$Se x_0 \in D(A_{x_0}^-) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \sup_{A_{x_0}^-} f$$

$$Se x_0 \in D(A_{x_0}^+) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} \inf_{A_{x_0}^+} f$$

$$Se +\infty \in D(A) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sup_A f$$

$$Se -\infty \in D(A) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \inf_A f$$

dove  $A_{x_0}^- := A \cap ]-\infty, x_0[$ ,  $A_{x_0}^+ := A \cap ]x_0, +\infty[$ . Un risultato analogo vale per  $f \searrow$

### 3 Continuità

**Teorema 3.1** (CSC Caratterizzazione sequenziale della continuità). *Sia  $x_0 \in A$ . Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $x_0 \in A$ .*

$$f \text{ é continua in } x_0 \iff f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad \forall x_n \rightarrow x_0$$

**Teorema 3.2** (Bolzano). *Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ ,  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ .*

$$Se f(a)f(b) \leq 0 \implies \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$$

Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.3** (TVI Valore intermedio). *Sia  $f \in C(I, \mathbb{R})$ .*

$$\text{Dato } y \in \mathbb{R} : f(a) < f(y) < f(b) \implies \exists x_0 \in I : f(x_0) = y$$

$f(I)$  é un intervallo

**Teorema 3.4.** *Sia  $f \in C(I, \mathbb{R})$ ,  $f$  1-1, posto  $J = f(I)$ . Allora*

$$J \text{ é un intervallo, } f \xrightarrow[su]{1-1} J$$

$$f^{-1} \in C(J)$$

**Teorema 3.5** (Weierstrass). *Sia  $A \in \mathbb{R}$  chiuso e limitato,  $f \in C(A, \mathbb{R}) \implies \exists \max_A f, \exists \min_A f$*

### 4 Derivate

**Teorema 4.1** (Fermat). *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ ,  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ .*

$$Se x_0 \text{ é un p.to estremante locale} \implies f'(x_0) = 0$$

**Teorema 4.2** (Rolle). *Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ ,  $f$  derivabile in  $]a, b[$ .*

$$Se f(a) = f(b) \implies \exists x_0 \in ]a, b[ : f'(x_0) = 0$$

**Teorema 4.3** (TVML Valor medio di Lagrange). *Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ ,  $f$  derivabile in  $]a, b[$ .*

$$\text{Allora } \exists x_0 \in ]a, b[ : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Teorema 4.4** (TM Test monotonia). *Sia  $I$  un intervallo su  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $I$ .*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ é costante in } I \quad (1)$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f \nearrow \quad (2)$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f \nearrow s. \quad (3)$$

$$f \nearrow s. \iff \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ \text{int}(\{x \in \mathbb{R} / f'(x) = 0\}) = \emptyset \end{cases} \quad (4)$$

**Teorema 4.5** (Taylor con resto di Peano). *Siano  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f$  derivabile  $n$  volte in  $x_0$ . Allora*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x - x_0)^k}{k!} + o((x - x_0)^n)_{x \rightarrow x_0}$$

**Teorema 4.6** (Taylor con resto di Lagrange). *Siano  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f$  derivabile  $n$  volte in  $x_0$ . Allora  $\forall x \in I \quad \exists y_x \in (x_0, x)$  tale che*

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(y_x)}{n!}(x - x_0)^n$$

**Teorema 4.7** (TH De l'Hôpital). *Siano  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D(I)$ ,  $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili in  $I \setminus \{x_0\}$  con  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ .  $f(x), g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  o  $|g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ . Allora*

$$\text{se } \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda$$

**Teorema 4.8.** *Sia  $I$  intervallo non banale di  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $I$ . Allora  $f$  é convessa  $\iff f' \nearrow$*

**Teorema 4.9.** *Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte in  $I$ . Allora  $f$  é convessa  $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$*

**Teorema 4.10.** *Sia  $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$  con  $f^{(k)}(x_0) = 0$  per  $k \leq n$  e  $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ . Allora*

*$x_0$  é un punto di massimo locale forte di  $f$  se  $(n+1)$  é pari e  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$*

*$x_0$  é un punto di minimo locale forte di  $f$  se  $(n+1)$  é pari e  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$*

*$x_0$  non é un punto estremante se  $(n+1)$  é dispari*

## 5 Integrali

**Teorema 5.1.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e  $c \in ]a, b[$ .*

$$\text{Se } f \in C([a, b], \mathbb{R}) \implies f \in R_{[a, b]}$$

$$\text{Se } f \text{ é monotona} \implies f \in R_{[a, b]}$$

$$\{x \in [a, b] / f \text{ non é continua in } x\} \text{ é finito} \implies f \in R_{[a, b]}$$

$$f \in R_{[a, c]}, f \in R_{[c, b]} \iff f \in R_{[a, b]}$$

**Teorema 5.2.** *Siano  $f, g \in R_{[a, b]}$ . Allora*

$$\text{Se } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|dx \right|$$

**Teorema 5.3** (1TFC Primo teorema fondamentale del calcolo). *Siano  $f \in R_{[a,b]}$ ,  $F(X) = \int_a^x f(t)dt : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora*

$$F \in C([a,b], \mathbb{R})$$

$$\text{Se } f \text{ é continua in } x_0 \implies f(x_0) = F'(x_0)$$

**Teorema 5.4** (2TFC Secondo teorema fondamentale del calcolo). *Siano  $f \in R_{[a,b]}$  e  $\Phi$  una primitiva di  $f$ . Allora*

$$\int_a^b f(t)dt = [\Phi(t)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

**Teorema 5.5** (Taylor con resto integrale). *Sia  $f \in C^{n+1}([a,b], \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in [a,b]$ . Allora*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

## 6 Integrali generalizzati

Siano  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a < \beta$ ,  $f \in C([a, \beta[, \mathbb{R})$ .

**Teorema 6.1** (C $\exists$  Criterio di esistenza).

$$\text{Se } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, \beta[ \implies \exists \int_a^\beta f(x)dx \in [0, +\infty]$$

**Teorema 6.2** (CC Criterio del confronto). *Sia  $f(x) \geq 0$ ,  $g(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, \beta[$ .*

$$\text{Se } f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow \beta^-}(g(x)), \quad \int_a^\beta g \in \mathbb{R} \implies \int_a^\beta f \in \mathbb{R}$$

**Teorema 6.3** (CCA Criterio di convergenza assoluta).

$$\text{Se } \int_a^\beta |f| \in \mathbb{R} \implies \exists \int_a^\beta f \in \mathbb{R}$$

**Teorema 6.4** (CFO Criterio delle funzioni oscillanti). *Sia  $f \in C([a, \beta[, \mathbb{R}) : f$  abbia una primitiva limitata in  $[a, \beta[$ ,  $g \in C^1([a, \beta[, \mathbb{R}) : g \searrow_{x \rightarrow \beta^-} 0$ . Allora*

$$\exists \int_a^\beta fg \in \mathbb{R}$$

## 7 Serie

**Teorema 7.1** (CZ Criterio zero). *Sia  $a_n$  successione in  $\mathbb{R}$ .*

$$\text{Se } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ conv.} \implies a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Teorema 7.2** (C $\exists$  Criterio di esistenza). *Sia  $a_n$  successione in  $\mathbb{R}$ ,  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Allora*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ conv.}$$

**Teorema 7.3** (CI Criterio integrale). *Sia  $f \in C([1, +\infty[), f \searrow, f \geq 0$ . Allora*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \text{ conv.} \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ conv.}$$

**Teorema 7.4** (CAD Criterio di Abel-Dirichlet). *Siano  $a_n$  successione in  $\mathbb{R}$ ,  $b_n$  successione in  $\mathbb{C}$ . Allora*

$$\text{se } a_n \searrow 0, \sum_{k=1}^N b_k \text{ é limitata } \implies \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k \text{ conv.}$$

**Teorema 7.5** (CL Criterio di Leibnitz). *Siano  $a_n$  successione in  $\mathbb{R}$ ,  $a_n \searrow 0$ . Allora*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k \text{ conv.}$$