

Appunti di Meccanica Analitica

Kim Damiani

2° semestre 2020

Indice

1 Sistemi dinamici	3
1.1 Definizione	3
1.2 Campo vettoriale associato al flusso di fase	5
1.3 Equazioni differenziali lineari e rappresentazione del flusso di fase	6
1.3.1 Esempi: rotatore e oscillatore armonico	8
1.4 Conservazione dei volumi	9
1.5 Equazione di Newton	13
1.5.1 Leggi di conservazione e integrali primi	14
1.6 Esempi	14
1.6.1 Oscillatore armonico, oscillatore iperbolico	14
1.6.2 Modello di epidemia	16
1.7 Equazioni lineari forzate	17
1.7.1 Rotatore forzato	17
1.7.2 Un problema di controllo	19
Appendice A Spazio delle fasi	21
A.1 Stabilità secondo Lyapunov	23
A.2 Integrali primi	24
2 Studio di un sistema 1D	24
2.1 Oscillatore armonico	24
2.2 Caso generale	26
2.2.1 Schema dello spazio delle fasi	26
2.3 Linearizzazione di un sistema 1D	28
2.3.1 Punto ellittico	28
2.3.2 Punto iperbolico	29
2.4 Pendolo semplice	29
2.4.1 Spazio delle fasi e integrale di Jacobi	29
2.4.2 Approssimazione delle soluzioni	32
2.4.3 Divergenza del periodo alla separatrice	35
2.5 Variabili azione-angolo per sistemi 1D	38
2.5.1 Pendolo forzato	39
2.6 Altalena	41
2.6.1 Risonanza parametrica	41
2.6.2 Caso con frequenza discontinua	44
3 Coordinate generalizzate	46
3.0.1 Il problema del surfista	46
3.1 Componenti controvarianti e covarianti, matrice metrica	47
3.2 Rappresentazione intrinseca	49
3.2.1 Lunghezza di una curva	49
3.2.2 Curvatura, accelerazione tangenziale e centripeta	49
3.2.3 Rette come curve geodesiche	51
3.3 Accelerazione in coordinate generalizzate	51

3.4	Curve geodesiche (rette)	53
3.5	Equazione di Newton in coordinate polari	53
3.6	Sistemi dinamici sulla sfera	56
3.6.1	Geodesiche (rette) sulla sfera	57
4	Equazioni di Lagrange	59
4.1	Energia H	60
4.2	Momenti generalizzati e coordinate cicliche	61
5	Studio del campo centrale sul piano	62
5.1	Potenziale di Keplero	63
5.2	Orbite limitate	64
5.2.1	Chiusura di un'orbita limitata	64
5.2.2	Studio delle orbite vicino alle orbite circolari	65
5.3	Potenziale elastico sul piano	67
5.4	Considerazioni di similitudine	69
5.4.1	Angolo tra pericentro e apocentro nel limite $E \rightarrow 0$	71
5.4.2	Equazione dell'orbita del problema di Keplero	74
5.5	Leggi di Keplero	75
5.6	Problema dei due corpi	77
5.6.1	Calcolo sezione d'urto	79
6	Sistemi vincolati	83
6.1	Vincoli olonomi bilaterali	83
6.1.1	Principio dei lavori virtuali	85
6.2	Pendolo sferico	87
7	\mathcal{L} in sistemi non inerziali	89
7.1	Formula di Poisson	89
7.2	Potenziali generalizzati	92
7.3	Pendolo di Foucault	92
7.4	Potenziale vettore	94
7.4.1	Energia e momenti generalizzati	96
7.5	Teorema di Nöther	97
7.5.1	Rotazioni attorno a un asse	98
7.5.2	Particella libera in coordinate sferiche	99
8	Teoria delle piccole perturbazioni	102
8.1	Stabilità secondo Ljapounov	102
8.2	Lagrangiana delle piccole oscillazioni	102
8.3	Pendolo doppio	105
9	Dinamica corpo rigido	107
9.1	Tensore di inerzia	108
9.2	Momento d'inerzia rispetto a un asse fisso di rotazione	110
9.2.1	Teorema di Steiner	111
9.3	Ellissoide d'inerzia	111
9.4	Teorema di König	113
9.4.1	Rotolamento di un disco su una guida circolare rotante	114
9.4.2	Rotolamento del disco cavo	119
9.5	Corpo rigido libero: equazioni di Eulero	120
9.5.1	Dalle equazioni cardinali alle equazioni di Eulero	120
9.5.2	Spazio delle fasi delle equazioni di Eulero	122
9.5.3	Stabilità dei punti di equilibrio	123
9.5.4	Visualizzazione del moto del corpo rigido libero: Poinsot	124
9.6	Trottola	125
9.6.1	Assenza di forze esterne	125

9.6.2	Coordinate lagrangiane per SO_3	126
9.6.3	Energia cinetica di una trottola	128
9.6.4	Integrali primi e riduzione al problema 1D	129
10	Principi variazionali	132
10.1	Equazioni di Lagrange e principio di minima azione	132
10.1.1	Catenaria	134
10.1.2	Arbitrarietà di una derivata temporale in \mathcal{L}	136
10.2	Geodesiche: definizione geometrica e definizione fisica	136
10.2.1	Metrica di Poincaré	137
10.3	Princípio di Maupertuis	139
10.3.1	Problema di Keplero	141
10.3.2	Particella relativistica	143
11	Formulazione hamiltoniana	144
11.1	Equazioni canoniche	146
11.2	Princípio variazionale e forma differenziale fondamentale	147
11.3	Trasformazioni canoniche, parentesi di Poisson, integrali primi	148
11.3.1	Teorema di Nother per sistemi hamiltoniani	151
11.4	Arbitrarietà di un differenziale esatto nella forma fondamentale	152
11.4.1	Funzioni generatrici di I e II tipo	153
11.5	Equazione di Hamilton-Jacobi	156
11.5.1	Esempio	159

Nota: Gli appunti arrivano fino all'equazione di Hamilton-Jacobi (non ci sono gli esercizi delle ultime lezioni)

1 Sistemi dinamici

1.1 Definizione

Il concetto al denominatore di tutta la meccanica analitica è il concetto di sistema dinamico. Per capire lo stato dinamico di un sistema (es: particella in moto) dobbiamo sapere posizione e velocità, per l'equazione di Newton $\rightarrow F \rightarrow$ equazione differenziale che contiene l'accelerazione. Lo stato dinamico di un sistema meccanico è descritto da una coppia/insieme di coppie di variabili che sono le coordinate e le velocità o i momenti (meglio rispetto alla velocità, è legato all'evoluzione della meccanica analitica verso la meccanica quantistica). Spazio delle fasi: insieme di informazioni diviso in coppie di coordinate e momenti che descrive lo stato dinamico di un sistema. Note queste, per la dinamica di Newton possiamo fare previsioni dell'evoluzione. Ogni punto dello spazio delle fasi definisce lo stato dinamico del sistema fisico e ne definisce in maniera deterministica l'evoluzione. Data una condizione iniziale, cioè un punto dello spazio delle fasi, si può prevedere l'evoluzione tramite il flusso di fase.

- Flusso di fase $x_0 \in \Sigma$ spazio delle fasi

$$\Phi^t(x_0) = x(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} \Phi^0(x_0) = x_0 \\ \Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s} \end{cases} \quad (1.1)$$

- Esiste una misura nello spazio Σ conservata

$$\int_A d\mu = \int_{\Phi^t(A)} d\mu \quad (1.2)$$

Insieme di trasformazioni definite nello spazio delle fasi che agendo su un punto nello spazio delle fasi, cioè le condizioni iniziali, in dipendenza di t , restituisce l'evoluzione nel futuro/passato del sistema al tempo t . Quali sono le restrizioni alla trasformazione/dipendenza del tempo?

- a $t = 0$ il flusso di fase, che è applicato alle condizioni iniziali, dà le condizioni iniziali: è la trasformazione identità
- se facciamo evolvere il sistema da 0 a s , poi lo riazzero e lo facciamo evolvere fino a t , è come se facessimo due evoluzioni concatenate. Se il sistema è isolato, l'inizio del tempo è una scelta arbitraria, possiamo fissare un tempo 0 e poi successivamente fissare nuovamente lo 0. Sistema isolato è definito da simmetrie: invarianza per traslazione temporale, per traslazione spaziale, per rotazioni finite. Dalla composizione delle due trasformazioni del flusso di fase, una al tempo s , una a t , otteniamo una trasformazione di fase corrispondente a $t + s$ che deve dare l'evoluzione da 0 a $t + s$.

E' un gruppo commutativo di trasformazioni con regola di composizione. Ricapitolando, flusso di fase = insieme di trasformazioni che costituisce un gruppo abeliano e data una ci di un sistema dinamico/meccanico ne fornisce l'evoluzione al tempo t.

Nei sistemi meccanici si introduce una condizione in più, perché specifica meglio il sistema e dà più proprietà. Ci interessa lavorare nel caso più generale non in assoluto, ma per i sistemi fisici. La condizione 2) è sempre soddisfatta nei sistemi fondamentali isolati, non nei fluidi (non sono un sistema elementare). Nello spazio delle fasi c'è una misura (un modo di fare gli integrali): per noi misura di Riemann. Il flusso di fase conserva la misura. Volume di A nello spazio delle fasi = volume dell'evoluto. Flusso di fase conserva i volumi \Rightarrow non possiamo ridurre un insieme a un punto (mentre lo possiamo stirare e far passare per la cruna di un ago).

Esempio 1.1.1. $(x, p) \in \mathbb{R}^2$. Definiamo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}}_{\Phi^t(x_0)} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che (x, p) punto di \mathbb{R}^2 , sono da intendere con le loro dimensioni fisiche. E' un esempio di flusso di fase:

- a $t = 0$ è la matrice è l'identità
- composizione: si verifica facendo il prodotto di matrici di due rotazioni e usando le formule per trigonometriche di somma/differenza \Rightarrow matrice con la somma di angoli. Mettere in successione due matrici è come avere una matrice facendo la somma dei tempi.
- Conserva le aree? Sì. Perché una trasformazione lineare conservi le aree, il determinante deve essere 1.

La trasformazione del flusso di fase è una matrice di rotazione.

Determinismo e predicitività Anche se conosciamo perfettamente la trasformazione del flusso di fase, NON possiamo comprendere totalmente l'evoluzione del sistema.

- condizioni iniziali x_0, p_0 . Sono numeri reali ma nessuna misura può dare infinite cifre significative, la precisione dello strumento è limitata. Per quanto sia semplice il sistema è impossibile conoscere le condizioni iniziali; allora come ne prevediamo l'evoluzione? E' il problema di cui si occupa la meccanica analitica: Se le condizioni iniziali sono affette da un errore (errore di misura o incertezza intrinseca), determinare quando l'evoluzione è prevedibile e quando no. Discontinuità tra il modello e la realtà, in cui abbiamo una misura finita.
- Princípio di indeterminazione: non possiamo misurare x e p di una particella contemporaneamente, con precisione arbitraria.
- Sistemi a molti gradi di libertà. N di coordinate necessarie a descrivere un sistema: 1 nell'esempio $(x) \Rightarrow 2$ coordinate dinamiche. Galassie: d.o.f. sono n x per descrivere la posizione delle stelle. $3 \cdot 10^9$ stelle $\Rightarrow 9 \cdot 10^9 x + 9 \cdot 10^9 p$. Anche avendo strumenti di misura adeguati, il numero N di d.o.f. è così elevato che non possiamo conoscere contemporaneamente tutte le x e le v. Ma riusciamo a fare modelli di evoluzione delle galassie. La conoscenza delle misure necessarie ai modelli è approssimata: sia perché non riusciamo ad avere numeri reali, sia perché il numero di misure necessarie è troppo elevato. Questo ci dice perché in molti casi le teorie fondamentali non si possono applicare alla realtà: non posso descrivere la fluidodinamica con l'equazione di Schrödinger perché non posso avere ci per N_A molecole di H_2O . La meccanica giustifica com'è possibile l'approccio fluidodinamico partendo da equazione di meccanica classica gestendo che non abbiamo tutte le condizioni iniziali

- Non conosciamo quasi mai il flusso di fase di un sistema. Ci sono tecniche numeriche per approssimarla. Quello che abbiamo è il campo vettoriale e scriviamo un'equazione differenziale (che lega la derivata temporale della funzione incognita a un campo vettoriale dipendente dalla funzione stessa), che è l'oggetto da cui si parte in meccanica analitica.

Data un'equazione differenziale che proprietà deve avere il flusso di fase? Quando è possibile costruire il flusso di fase in maniera esatta e quando approssimata? Possiamo comunque fare una previsione di evoluzione? Delle equazioni differenziali fa parte intrinseca la condizione iniziale, perché un'equazione differenziale da sola definisce il flusso di fase ma non una soluzione. Per definire una soluzione serve la condizione iniziale. In tal caso in principio è possibile ricostruire un flusso di fase. Gauss, Poincaré. Data un'equazione differenziale a più variabili, non è possibile con tecniche algebriche e calcolo integrale, costruire il flusso di fase di un'equazione differenziale (così come non risolviamo un'equazione di 10° grado con tecniche algebriche). Vedremo quasi solo sistemi per cui è possibile un calcolo analitico perché i pochi sistemi sono pivot che permettono poi di costruire soluzioni per sistemi più complicati: teoria perturbativa. La meccanica analitica parte da un'equazione differenziale e cerca di sviluppare delle tecniche per risolverla in modo approssimato/riuscire a trovare soluzioni numeriche che controllino l'errore. Legame tra equazione differenziale e flusso di fase?

1.2 Campo vettoriale associato al flusso di fase

$$a(x) = \left. \frac{d}{dt} \Phi^t(x) \right|_{t=0} \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = a(x) \quad (1.4)$$

è soddisfatta dal flusso di fase

$x(0) = x_0$ definisce la condizione iniziale.

Per definizione

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi^t(x_0) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \Phi^s(\Phi^t(x_0)) \right|_{s=0} = a(\Phi^t(x_0)) \# \quad (1.5)$$

Per trovare il campo vettoriale associato al flusso di fase si calcola la derivata del flusso di fase al tempo t applicato a x (punto generico dello spazio delle fasi) in $t = 0$. Per calcolare la derivata rispetto al tempo del flusso di fase applicato invece alla condizione iniziale possiamo, grazie alle proprietà di composizione, calcolare la derivata in $s = 0$ del flusso che fa evolvere da 0 a s , non a partire da 0 ma da t : l'evoluzione è la stessa, che inizi da 0 o da un generico t . Quindi abbiamo che la derivata rispetto al tempo del flusso di fase in un tempo generico dell'evoluto di x_0 è il campo vettoriale calcolato nell'evoluto di x_0 allo stesso t , cioè la funzione $\Phi(t)$ applicata a x_0 è la soluzione dell'equazione differenziale con la condizione iniziale.

Legame tra flusso di fase e un campo vettoriale è dato dalla $\frac{d}{dt}$ calcolata in 0 del flusso di fase (matrice) applicata alle condizioni iniziali: è una matrice costante applicata a (x_0, p_0) che diventa un punto generico dello spazio delle fasi.

Esempio 1.2.1. Rotatore

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dot{x} = \omega p \\ \dot{p} = -\omega x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni differenziali lineari 1.4 ha come soluzione il flusso di fase. Un flusso di fase determina l'equazione differenziale tramite la derivazione, che si può sempre fare. Un'equazione differenziale (o un sistema di equazioni) ridetermina il flusso di fase almeno localmente date le condizioni iniziali; attraverso l'integrazione, che normalmente non si riesce a fare.

Curiosità:

- significato fisico del modulo di un vettore nello spazio delle fasi, dato che le dimensioni sono diverse? Ha un significato legato al problema della stabilità. Si calcola con un prodotto scalare che ne fornisce le dimensioni giuste introducendo la matrice metrica (in relatività questa mette insieme spazio e tempo: per le coordinate spaziali ho l'identità, per la temporale la velocità della luce, così il prodotto dà uno spazio).

- flusso di fase dà informazione completa sull'evoluzione. Il campo vettoriale è legame tra la condizione attuale e un campo vettoriale che definisce l'evoluzione locale: informazione locale. E' molto più facile costruire l'equazione differenziale, perché facciamo misure qui e ora. Flusso di fase: conoscenza globale del sistema. La difficoltà è passare dal locale al globale.

1.3 Equazioni differenziali lineari e rappresentazione del flusso di fase

Equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{M}^{n \times n} \quad (1.6)$$

A è costante \Rightarrow Il sistema si risolve. Cerchiamo una soluzione nella forma:

$$x(t) = v_\lambda e^{\lambda t} \quad v_\lambda \in \mathbb{R}^n \text{ costante}$$

$$e^{\lambda t} \lambda v_\lambda = e^{\lambda t} A v_\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\lambda v_\lambda = A v_\lambda \quad \lambda = \text{autovalore} \quad v_\lambda = \text{autovettore} \quad (1.7)$$

Imponiamo $\det[\lambda I - A] = 0$ per calcolare λ (spettro di A)

Lo spettro di A definisce le proprietà delle soluzioni

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \vec{v}_{\lambda} e^{\lambda t} \quad \vec{x}_0 = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \vec{v}_{\lambda}} \quad (1.8)$$

è invertibile se v_λ forma una base $\Rightarrow c_\lambda$ sono univocamente definite.

Equazione differenziale lineare (la somma di soluzioni è soluzione), come quella del rotatore: il campo vettoriale è una matrice applicata al (operatore lineare del) vettore dello spazio delle fasi. Considereremo quasi sempre la matrice A costante (non dipendente dal tempo).

Cerchiamo una soluzione nella forma di un vettore costante moltiplicato per un esponenziale dipendente da t , entrambi dipendenti da λ . \mathbb{R}^n è lo spazio delle fasi. Così riduciamo il problema di trovare le soluzioni al sistema di equazioni differenziali lineari costanti all'equazione agli autovalori e agli autovettori della matrice A : calcolare lo spettro di A . Imponiamo per l'equazione caratteristica $\det = 0$, necessario per avere autovettori diversi da 0 - ma $x = 0$ costante è comunque soluzione di un sistema lineare. Polinomio di grado n - complicato da risolvere per n grande.

I sistemi di equazioni differenziali lineari sono completamente risolubili. Ogni sistema anche non lineare può essere approssimato con sistemi lineari: tutti i metodi numerici che applichiamo sono basati su questa approssimazione: linearizziamo il modo di calcolare la soluzione.

λ può essere anche complesso. $v(\lambda)$ non deve dipendere dal tempo (la dipendenza dal tempo deve essere nell'esponente). Calcoliamo tutti gli autovettori associati allo spettro. Ogni matrice di ordine N ha N autovalori. Se sono semplici (molteplicità 1) gli autovettori sono linearmente indipendenti: costruiamo una base in cui la matrice è diagonalizzata. Fissiamo che gli autovettori abbiamo lunghezza unitaria. Per autovalori multipli: forme normali di Jordan. Caso importante: A è simmetrica \Rightarrow diagonalizzabile in una base ortonormale, λ reali.

Lo spettro della matrice dà molte informazioni sulle soluzioni. Sistema lineare \Rightarrow la soluzione generale è combinazione lineare su tutti i λ delle soluzioni particolari per ogni autovalore. La somma è efficace se le soluzioni sono linearmente indipendenti. Se prendiamo una base di autovettori per la combinazione lineare, i $c(\lambda)$ sono univocamente determinati quando imponiamo le condizioni iniziali per lo stato dinamico del sistema. Sistema lineare con termine noto, le incognite sono $c(\lambda)$. Sempre risolubile (abbiamo preso una base): possiamo invertire.

Teorema 1.1. Teorema di esistenza e unicità

$\dot{x} = a(x)$ ammette una sola soluzione locale $x(t)$ con condizione iniziale $x(0) = x_0$ purché $a(x)$ sia regolare.

- Se $\Re(\lambda) > 0 \Rightarrow e^{\lambda t}$ diverge
- Se $\Re(\lambda) < 0 \Rightarrow e^{\lambda t} \rightarrow 0$
- Se $\lambda = i\omega \Rightarrow e^{i\omega t}$ soluzioni oscillanti

$\dot{x} = Ax$ ha soluzione $x \equiv 0$ punto fisso. In generale $\dot{x} = a(x)$ ha punti fissi $a(x) = 0$.

Sistema di equazioni differenziali: data una c.i. esiste ed è unica una soluzione locale. Sistema di equazioni associato

a un campo vettoriale: a ogni punto è associato un vettore velocità. Estendere le soluzioni a tutto lo spazio? Se fissiamo una c.i., non sempre dall'esistenza in un intorno del punto iniziale possiamo estendere in tutto lo spazio. Regolare: differenziabile con derivate continue (th esistenza e unicità soddisfatti nei sistemi che analizzeremo). La soluzione è associata al flusso di fase. Misure locali costruiscono il campo vettoriale $\vec{a}(\vec{x}) \Rightarrow$ impostiamo l'equazione differenziale \Rightarrow definizione del modello. Il flusso di fase definisce in maniera univoca e globale il sistema di equazioni differenziali.

Che informazioni fornisce la conoscenza dell'insieme degli autovalori di A ? Anche senza arrivare alla soluzione, si ha una divergenza esponenziale all'infinito se per un autovalore si ha $\Re(\lambda) > 0$. Se tutte le parti reali sono < 0 , tutte le soluzioni convergono verso l'origine. In questi due casi so come possono andare le orbite senza aver risolto: casi estremi. Se siamo su una sfera andare all'infinito significa che la soluzione torna su se stessa. Se il tempo è negativo però i due casi visti prima si invertono. Evoluzione diversa a meno di simmetrie interne particolari, nel futuro e nel passato. Se vedo che nel caso 1 il sistema si contrae verso l'origine, va nel passato. Se tutti i λ hanno $\Re(\lambda) > 0$ riusciamo a capire lo scorrere del tempo. Il sistema NON è invertibile: no time reversal symmetry. Invece se filmiamo l'evoluzione di un sistema fisico (elementare, descritto dalla meccanica di Newton, es: palline) dal presente al futuro o viceversa non capiamo se il tempo scorre verso il futuro o passato. Es: Terra che ruota intorno al sole. La simmetria temporale è importante nei sistemi fisici. L'aumento di entropia è incompatibile con la simmetria del tempo. Un sistema newtoniano non può essere un sistema in cui l'entropia aumenta. Una meccanica analitica, con invertibilità temporale, come può essere conciliabile con la realtà quotidiana? (teoria ergodica; come interpretiamo la meccanica statistica con la meccanica analitica). λ immaginari puri. L'esponenziale di un numero immaginario puro è soluzione oscillante \Rightarrow non ci accorgiamo se il tempo scorre verso il futuro/passato: simmetria.

C'è una soluzione di equilibrio: punto fisso quando $x = 0$ costante è soluzione. Rispetto alle soluzioni $x(t)$, con $x(0) = 0$, tutti i c sono nulli.

Nota: In un tempo finito, non è possibile che $x(t)$ si annulli (solo nel limite $t \rightarrow \infty$) quindi non c'è violazione del teorema di esistenza e unicità (se la contrazione delle soluzioni richiedesse un tempo finito sarebbe violata l'unicità). Il punto fisso è separato dalle altre soluzioni!

Lo studio dei punti fissi o di equilibrio è fondamentale per capire i sistemi dinamici. Sono punti dello spazio delle fasi che ne vincolano la geometria. Abbiamo annullato la parte vettoriale e imposto che si annulli, supponendo A non degenere. Come individuare i punti fissi: operazione algebrica $a(x) = 0$ cerchiamo tutti i punti dello spazio delle fasi in cui il campo vettoriale si annulla. Ci sono dei teoremi di geometria differenziale che a priori dicono se i punti fissi esistono o no per un sistema. Sfera- a ogni punto attacchiamo un cappello (riccio di mare). Non riusciamo a pettinare il riccio: ci sarà sempre un cappello dritto: punto di equilibrio di un campo vettoriale qualsiasi sulla sfera.¹ Il piano è pettinabile: un campo vettoriale su un piano può non avere punti fissi. Non possiamo costruire una trasformazione differenziabile e invertibile che porti il piano sulla sfera perché il piano è piatto, la sfera ha curvatura positiva. Connessione tra meccanica (dinamica) e geometria: studio dei punti fissi sulle superficie legate alla geometria: relatività.

Rappresentazione formale flusso di fase $\dot{x} = Ax$

$$\boxed{\Phi^t(x) = \exp(At)x} \quad (1.9)$$

dove

$$\exp(At) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} t^k$$

¹Teorema della palla pelosa.

Data una sfera S e una funzione continua $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ che associa a ogni punto P della sfera un vettore tridimensionale tangente alla sfera stessa in P , esiste almeno un punto della sfera $Q \in S$ tale che $f(Q) = 0$.

Quindi non è possibile pettinare completamente una palla pelosa; i cappelli pettinati rappresentando il campo vettoriale continuo: non è possibile eseguire su una sfera una pettinatura che non abbia almeno una chierica o una riga.

Una conseguenza del teorema della palla pelosa è che qualunque funzione continua che mappa la sfera in sé stessa ha necessariamente un punto che viene mappato su sé stesso (punto fisso) o sul proprio punto antipodale:

$$\forall f: S \rightarrow S \text{ continua, } \exists P \in S: f(P) = \pm P$$

La dimostrazione di questa proprietà si ottiene associando alla funzione continua una funzione vettoriale tangente nel seguente modo: preso un punto P sulla sfera, si costruisce la proiezione stereografica di $f(P)$ usando P come polo della proiezione, e si prende come vettore tangente $v(P)$ il vettore posizione della proiezione rispetto a P .

I vettori tangenti così costruiti definiscono una funzione continua che rispetta le ipotesi del teorema: quindi esiste un punto P della sfera tale che $v(P) = 0$; questo implica che $f(P)$ coincide con P , oppure si trova al suo antipodo.

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\exp(At)x_0 = A\exp(At)x_0 = Ax(t)$$

ovvero è soluzione del sistema

Costruiamo il flusso di fase in maniera esplicita con l'esponenziale di matrice, ma è una serie \Rightarrow la tronchiamo dopo un certo N . Convergenza su tutti i valori di t . Per t grande, t^k è grande quindi se a t piccoli l'errore era trascurabile ora è alto! Per calcolare formalmente l'esponenziale in maniera corretta dobbiamo diagonalizzare la matrice; $\exp D$ è la matrice costruita con gli elementi diagonali della matrice. Sono approcci alternativi: calcoli oppure rappresentazione elegante, formale del flusso di fase con l'esponenziale che permette di fare considerazioni analitiche - ma poi la tecnica di troncare l'esponenziale non è una tecnica buona, quindi dobbiamo ricondurci alla tecnica precedente.

CURIOSITÀ:

- I sistemi meccanici possono ammettere trasmissioni di calore nei due sensi perché sono invertibili nel tempo.
- Un piano con un punto all'infinito è una sfera, senza no.
- Un pendolo ha una posizione di equilibrio se mettiamo la massa in verticale. Se lo facciamo oscillare con attrito, l'ampiezza diminuisce ma il pendolo si fermerà solo per un tempo infinito. Per violare l'unicità dovremmo passare attraverso una singolarità. La soluzione di punto fisso non deve essere raggiunta in un tempo finito partendo da una condizione iniziale diversa.
- Possiamo avere soluzioni in cui la parte reale è diversa da 0, ma devono comparire a coppie, così quando si inverte il tempo uno dei due autovalori cresce e l'altro cala. La simmetria temporale non impedisce di avere soluzioni che si contraggono a un punto fisso o divergono ma devono comparire a coppie- legato alla conservazione della misura. Simmetria del tempo: dietro c'è una misura conservata, ecco perché nella definizione di sistema dinamico introduciamo la misura conservata, perché contiene una proprietà fisica che è la simmetria.
- Il flusso di fase è un insieme di trasformazioni dipendente da t che ha una struttura di gruppo. Quando deriviamo questo gruppo in $t = 0$ costruiamo il campo vettoriale che genera il gruppo (generatore). 0 : derivata calcolata dall'identità del gruppo: evoluzione t iniziale. Se guardiamo l'evoluzione vicino all'identità, per molte volte, otteniamo un'evoluzione al tempo finito.
- Concetto di singolarità (relativamente al punto fisso). Un'orbita $x(t)$, soluzione generica del sistema, è una curva nello spazio delle fasi. Dimensione 1: corrispondenza con la retta temporale. Invece il punto fisso ha dimensione 0: abbiamo collassato la dimensione \Rightarrow singolarità.

1.3.1 Esempi: rotatore e oscillatore armonico

Esempio 1.3.1. Rotatore

$$A = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha le proprietà algebriche di unità immaginaria i

$$\begin{aligned} \exp\left(\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t\right) &\sim \exp(i\omega t) = \\ &= \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(\omega t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vogliamo trovare la matrice del flusso di fase che risolve l'equazione del rotatore. Se sappiamo calcolare $\exp(A)$ sappiamo scrivere il flusso di fase e ritroviamo la combinazione di seno e coseno. Se raccogliamo ω nel rotatore otteniamo una matrice di Pauli; il quadrato dà $-I$. Ci consente di calcolare l'esponenziale in modo esplicito: stessa algebra dell'unità immaginaria. Rappresentazione isomorfa dello spazio dei numeri complessi: unità reale, unità immaginaria. Si usano le matrici per rappresentare le strutture algebriche, es: quaternioni con matrici 3×3 per rotazioni. L'esponenziale della matrice che definisce il campo vettoriale associato al rotatore genera il flusso di fase associato al rotatore stesso.

Esempio 1.3.2. Oscillatore armonico (nel piano)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x\end{aligned}\quad \text{flusso di fase } \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi^t}{\partial x} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad \det \left| \frac{\partial \Phi^t}{\partial x} \right| = +1$$

Sia $m = 1$. Forza attrattiva. Il determinante anche in questo caso è 1. Gli autovalori sono immaginari puri, e gli stessi del rotatore. Essendo gli stessi, possiamo fare una trasformazione lineare che coniughi l'oscillatore armonico al rotatore, dipendente da ω . Il rotatore (più semplice, matrice ortogonale) non è un sistema fisico, l'oscillatore armonico sì - se ω è costante, equivalente a una matrice ortogonale.

1.4 Conservazione dei volumi

Conservazione dell'area Trasformazione nel piano

$$\boxed{\Phi^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \det \left| \frac{\partial \Phi^t}{\partial x} \right| = +1 \Rightarrow \text{Il flusso di fase conserva le aree}}$$

$$\Rightarrow \text{autovalori: } \lambda_1 \lambda_2 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$$

Abbiamo visto che per il rotatore e l'oscillatore armonico $\det = 1$: l'area sul piano se facciamo evolvere il sistema con queste equazioni deve essere conservata. Per un generico sistema lineare basta che sia soddisfatta $\det = 1 \Rightarrow$ il quadrato e_1, e_2 è trasformato in un parallelogramma con la stessa area (area sottesa dai due vettori colonna). Calcoliamo le soluzioni con la teoria degli autovalori e autovettori. Se $\phi(t)$ non è lineare, la condizione per la conservazione delle aree, dal teorema del cambio di variabili per l'integrale in due variabili, è $\det JT = 1$. Calcoliamo le derivate delle due componenti di $\Phi(t)$. Se la trasformazione è lineare, è la sua stessa J .

Nota: In meccanica analitica nei sistemi dinamici non mettiamo il valore assoluto: $\det JT = +1$, non -1

Specchio; rotazione di corpo rigido. Non possiamo fare un'operazione speculare, scambiando destra e sinistra, che equivale a passare da un sistema da un sistema destrogiro a levogiro. Il nostro mondo e quello dell'antimateria non sono equivalenti. Con l'evoluzione di un sistema dinamico non possiamo trasformare sistema destrogiro in levogiro: il determinante della jacobiana dovrebbe passare da +1 a -1, non equivalente per la meccanica di Newton. Il segno dell'area è legato al concetto di parità (avere un mondo e uno allo specchio). Non equivalenza scoperta dai neutrini. Rottura di simmetria avviene a livello proteico: non esistono proteine destrogiro (per polarizzazione della luce): morbo della mucca pazza- interferenza con il metabolismo. Sinteticamente le possiamo creare entrambe. Il fatto che $\det = 1$ impone che gli autovalori siano reciproci, non sono indipendenti. Se sono reali: $\lambda_1 > 1 \Rightarrow$ divergente $\lambda_2 < 1 \Rightarrow$ contraente. Se sono complessi $\lambda = e^{i\omega t}$. Questa proprietà limita la struttura delle soluzioni del sistema. Abbiamo una condizione sul flusso di fase - flusso che non conosciamo. Per dare una condizione sul campo vettoriale serve il lemma seguente:

condizione sul campo vettoriale

$$\text{caso lineare } \Phi^t(x_0) = e^{At} x_0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi^t}{\partial x} = e^{At}$$

Lemma 1.2.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(e^{At}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(I + At + \mathcal{O}(t^2)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (1 + \text{Tr } A t + \mathcal{O}(t^2)) \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(e^{At}) &= \text{Tr}(A)\end{aligned}$$

Per un t generico

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \det(e^{At}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \det(e^{At}) \det(e^{At_0}) = \text{Tr}(A) \det(e^{At_0}) \#$$

Teorema 1.3. Se $\text{Tr}(A) = 0 \Rightarrow \det(e^{At}) = 1, \forall t$

Da quanto detto

$$\frac{d}{dt} \det(e^{At}) = \text{Tr}(A) \det(e^{At}) = 0 \quad \text{e} \quad \det(e^{A \cdot 0}) = 1 \#$$

Sviluppiamo in serie di Taylor per t piccolo (vedi Turchetti, dimostrazione riportata nel paragrafo successivo). Flusso di fase rappresentato da $\exp(At)$, con A che descrive il campo. Quando $\text{tr } A = 0$ il flusso di fase associato al sistema lineare conserva le aree. Nei sistemi dinamici meccanici si ha conservazione delle aree: dato un flusso di fase lineare la matrice, lo jacobiano del gruppo delle trasformazioni ha $\det = 1$. Il collegamento tra il determinante e le proprietà del campo lineare associato ad A è esplicitato dal lemma 1.2. Dato il flusso di fase di un campo

We start by computing the term which is first order in ϵ .

Let A_1, A_2, \dots, A_N be the column vectors of the matrix A . Let e_1, e_2, \dots, e_N be the standard basis; note that these basis vectors form the columns of the identity matrix I . Then we recall that the determinant is an alternating multi-linear map on the column space.

$$\begin{aligned} \det(I + \epsilon A) &= \det(e_1 + \epsilon A_1, e_2 + \epsilon A_2, \dots, e_N + \epsilon A_N) \\ &= \det(e_1, e_2, \dots, e_N) + \epsilon \{ \det(A_1, e_2, \dots, e_N) + \det(e_1, A_2, \dots, e_N) + \dots \\ &\quad + \det(e_1, e_2, \dots, A_N) \} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

The first term is just the determinant of the identity matrix which is 1. The term proportional to ϵ is a sum of expressions like $\det(e_1, e_2, \dots, A_j, \dots, e_N)$ where the j 'th column of the identity matrix is replaced with the j 'th column of A . Expanding the determinant along the j 'th row we see that $\det(e_1, e_2, \dots, A_j, \dots, e_N) = A_{jj}$.

$$\det(I + \epsilon A) = 1 + \epsilon \sum_{j=1}^N A_{jj} + O(\epsilon^2) = 1 + \epsilon \text{Tr}(A) + O(\epsilon^2)$$

$$\boxed{f_1(A) = \text{Tr}(A)} \quad (1)$$

Figura 1.1: Dimostrazione del lemma

lineare A , matrice che definisce l'equazione lineare, calcoliamo il det in $t = 0$ (calcolo valido $\forall t$ essendo A costante). Nell'approssimazione t piccolo, sviluppiamo l'esponenziale della matrice e calcoliamo il determinante. Possiamo inserire solo gli elementi di una riga e colonna per volta, in una riga un solo elemento della matrice, gli altri dell'identità (vedasi la Fig. 1.1). 1 viene da I , poi sostituiamo i termini della diagonale dove c'è 1 in I ; gli altri termini sono di ordine superiore. Facendo la derivata rimane solo la traccia. Det costante 1 \Rightarrow derivata 0, traccia 0. Prodotto degli autovalori è 1: se reali uno è <1 , uno >1 , se no esponenziali di un numero immaginario puro, in cui quindi il complesso coniugato è l'inverso.

Vale per un t generico per la proprietà di gruppo del flusso di fase che permette di scomporre in due fattori. $\det(cd) = \det c \cdot \det d$ (consideriamo l'evoluzione fino a t_0 , riazzeriamo il tempo, e successivamente consideriamo l'evoluzione con parametro t piccolo). Nel lemma è sottinteso $\det I$. derivata nulla \Rightarrow costante. Basta calcolare in $t=0$: identità ha $\det = 1$. Se vogliamo che $\det JT$ di un flusso di fase che risolve sistema lineare faccia 1, la condizione sulla matrice del campo è $\text{tr } A = 0$. Se $\text{tr } A < 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \det \exp(At) < 0$, il det sta diminuendo in modo esponenziale. L'insieme del flusso di fase che costruisce il sistema sta contraendo le aree. Es: pendolo con attrito, descritto da A con traccia <0 : non è un sistema dinamico secondo la nostra definizione. Se 0: non distinguiamo se andiamo verso il passato/futuro perché conserviamo le aree.

Vediamo la condizione generica, non solo per campi lineari. Campo vettoriale

$$\dot{x} = a(x) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + a(x_0)t + \mathcal{O}(t^2)$$

Approssima il flusso di fase

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi^t}{\partial x_0} &= I + \frac{\partial a}{\partial x_0} t + \mathcal{O}(t^2), \quad \det\left(\frac{\partial \Phi^t}{\partial x_0}\right) = 1 + \text{Tr}\left(\frac{\partial a}{\partial x_0}\right)t + \mathcal{O}(t^2), \quad \text{ma} \\ \text{Tr}\left(\frac{\partial a}{\partial x_0}\right) &= \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x_0) = \text{div}[a(x_0)] \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det\left(\frac{\partial \Phi^t}{\partial x_0}\right) &= \text{Tr}\left(\frac{\partial a}{\partial x_0}\right) = \text{div}[a(x_0)]\end{aligned}$$

Teorema 1.4. Se $\text{div}[a(x_0)] = 0$ allora il flusso di fase conserva il volume

Possiamo linearizzare l'evoluzione, approssimazione vera localmente. Per t piccolo, facendo l'integrale: alla base degli integratori numerici di equazioni differenziali, che compone tanti passaggi di questo tipo. Calcoliamo $\frac{d}{dt}|_{t=0}$ del flusso di fase: rigeneriamo il campo vettoriale (vedasi definizione di campo vettoriale associato al flusso di fase). Così calcoliamo J .

$\frac{\partial a}{\partial x_0}$ è una matrice perché a è un campo vettoriale sul piano. La divergenza prende il posto della traccia della matrice nel caso lineare. Se la divergenza è nulla: conservazione area/volume. In meccanica quando costruiamo equazioni del moto con struttura di campo non lineare, dobbiamo verificare che la divergenza del campo sia 0 \Rightarrow il flusso di fase conserva la misura \Rightarrow simmetria rispetto all'inversione temporale.

I cambiamenti di coordinate fatti in maniera corretta vanno fatti non sui differenziali di area ma sulle forme differenziali che tengono conto dell'orientamento. Coordinate polari: r, ϕ hanno un orientamento. x, y relazione con ϕ, r non è come r, ϕ . La parità è legata all'ordine con cui inseriamo le coordinate. Quando facciamo il differenziale considerando le forme differenziali $dr d\phi = -d\phi dr$. $\det JT = 1$ garantisce che si conservino le aree e la parità del sistema. Nell'evoluzione del sistema non si possono scambiare destra e sinistra: per passare da $\det = 1$ a -1 deve esserci un punto in cui $\det = 0$, ma richiediamo che le trasformazioni di fase siano invertibili (c.i. ed evoluzione in corrispondenza 1-1). Quindi se il determinante vale 1 all'inizio (perché l'identità del gruppo ha determinante 1, deve continuare a valere 1. Cambio di variabili: se J ha $\det = -1$ abbiamo scambiato l'orientamento.

Perché un flusso di fase deve avere $\det J \neq 0$? Per il teorema di invertibilità locale: infatti vogliamo che la trasformazione sia localmente invertibile. I flussi di fase sono sempre soluzioni di equazioni differenziali, che soddisfano il criterio di esistenza e unicità, ossia date le condizioni iniziali (conosciamo lo stato dinamico del sistema: posizioni e momenti) c'è una e una sola soluzione dell'equazione, localmente (cioè per un intervallo di tempo finito). Ciò significa che il flusso di fase, che è una trasformazione da 0 a t , deve essere invertibile, se no potremmo avere soluzioni diverse che corrispondono alla stessa condizione iniziale. In particolare, richiediamo $\det J = 1$ perché i sistemi meccanici (il modello di epidemia non è un sistema meccanico) hanno questa proprietà ereditata dall'equazione di Newton. E la condizione $\det J = 1$, ovvero che la divergenza del campo associata all'equazione sia nulla, dice che il sistema conserva aree/volumi.

Matrice fondamentale Se $x_1(t_0), \dots, x_d(t_0)$ sono d vettori linearmente indipendenti, le soluzioni corrispondenti $x_1(t), \dots, x_d(t)$, che hanno quei vettori come dati iniziali a $t = t_0$, formano una base nello spazio delle soluzioni dell'Eq. 1.6. E' utile introdurre la matrice

$$X(t, t_0) = (x_1(t), \dots, x_d(t)), \quad X_{jk}(t, t_0) = (x_k(t))_j \quad (1.10)$$

Questa matrice soddisfa il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d}{dt} X(t, t_0) = A(t) X(t, t_0) \quad (1.11)$$

Se scegliamo $X(t_0, t_0) = I$, allora allora $X(t, t_0)$ viene detta *matrice fondamentale* e la soluzione del problema ai valori iniziali si scrive

$$x(t) \equiv S_{t, t_0}(x) = X(t, t_0)x \quad (1.12)$$

Dalle proprietà di gruppo del flusso segue che

$$X(t, t_0) = X(t, t_1)X(t_1, t_0), \quad X(t, t_0) = X(t_0, t)^{-1} \quad (1.13)$$

Proposizione 1.4.1. Il determinante $w(t) = \det X(t, t_0)$ della matrice soddisfa l'equazione

$$\frac{dw}{dt} = w \text{Tr } A \quad (1.14)$$

la cui soluzione è

$$w(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{Tr } A(s) ds} \quad (1.15)$$

Infatti applicando la definizione di determinante si ha

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{j_1, \dots, j_d} \epsilon_{j_1, \dots, j_d} X_{1j_1} \cdots X_{dj_d} = \sum_k \sum_{j_1, \dots, j_d} \epsilon_{j_1, \dots, j_d} X_{1j_1} \cdots \frac{dX_{kj_k}}{dt} \cdots X_{dj_d} = \\ &= \sum_k \sum_{\ell} A_{k\ell} \sum_{j_1, \dots, j_d} \epsilon_{j_1, \dots, j_d} X_{1j_1} \cdots X_{\ell j_k} \cdots X_{dj_d} = \sum_k \sum_{\ell} A_{k\ell} \delta_{k\ell} w \equiv w \text{Tr } A \end{aligned}$$

dove $\epsilon_{j_1, \dots, j_d}$ vale ± 1 a seconda che gli indici siano una permutazione pari o dispari di $1, \dots, d$, si è usata l'equazione 1.11 e nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che solo per $k = \ell$ la somma su j_1, \dots, j_d è non nulla perché altrimenti per $\ell \neq k$ in $1, \dots, \ell, \dots, d$ ci sono due indici uguali e la somma si annulla (determinante con due righe uguali).

Turchetti-Conservazione dei volumi pagg. 313-314

La forma canonica delle equazioni del moto di Hamilton conferisce al flusso alcune rilevanti proprietà geometriche, tra cui la conservazione dei volumi nello spazio delle fasi. Deduciamo questo risultato, dovuto a Liouville, dal teorema generale sulla trasformazione dei volumi per il flusso di un arbitrario campo vettoriale $\Phi(\mathbf{x}, t)$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Il flusso $\mathbf{x} = S(\mathbf{X}; t, t_0)$ della equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{x}, t)$ trasforma il punto iniziale \mathbf{X} in \mathbf{x} ed il suo jacobiano è

$$\mu_L(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{M} \quad \mathbf{M}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \equiv \frac{\partial S_i}{\partial X_j}(\mathbf{X}; t, t_0) \quad (1.16)$$

Come qualsiasi altra variabile dinamica lo Jacobiano può esprimersi come funzione del punto \mathbf{x} della traiettoria al tempo t (forma euleriana) $\mu_E(\mathbf{x}, t)$ oltre che come funzione del punto iniziale \mathbf{X} e di t (forma lagrangiana) $\mu_L(\mathbf{X}, t)$ dove

$$\mu_L(\mathbf{X}, t) = \mu_L(S^{-1}(\mathbf{x}; t, t_0), t) = \mu_E(\mathbf{x}, t) \quad (1.17)$$

Le derivate temporali hanno espressioni diverse perché nella forma euleriana x è un punto dell'orbita e varia con t

$$\frac{d\mu_L}{dt} = \frac{\partial \mu_L}{\partial t}, \quad \frac{d\mu_E}{dt} = \frac{\partial \mu_E}{\partial t} + \Phi \cdot \frac{\partial \mu_E}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.18)$$

Nel seguito ometteremo gli indici E, L essendo evidente che la dipendenza da \mathbf{x} o \mathbf{X} indicano la forma euleriana o quella lagrangiana.

Proposizione 1.4.2. La variazione dello jacobiano μ lungo l'orbita è data da

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu \text{div } \Phi \quad (1.19)$$

che in forma euleriana si scrive

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \Phi \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} = \mu \text{div } \Phi \quad (1.20)$$

Per dimostrare il risultato espresso da 1.19 scriviamo μ usando la definizione di determinante e cioè

$$\mu = \sum_{j_1, \dots, j_d} \epsilon_{j_1, \dots, j_d} M_{1j_1} \cdots M_{dj_d} \quad (1.21)$$

dove $\epsilon_{j_1, \dots, j_d}$ è il tensore completamente antisimmetrico di rango d : esso vale 1 o -1 se gli indici j_1, \dots, j_d sono una permutazione pari o dispari di $1, \dots, d$. Se $\Phi(\mathbf{x}, t)$ è sufficientemente regolare si ha

$$\frac{d}{dt} M_{kj_k} = \frac{\partial}{\partial X_{j_k}} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial X_{j_k}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\ell} \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_{\ell}} M_{\ell j_k} \quad (1.22)$$

Derivando la 1.21 rispetto a t si trova

$$\frac{d\mu}{dt} = \sum_{j_1, \dots, j_d} \epsilon_{j_1, \dots, j_d} \sum_k M_{1j_1} \cdots \left(\frac{d}{dt} M_{kj_k} \right) \cdots M_{dj_d} = \quad (1.23)$$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_d} \epsilon_{j_1, \dots, j_d} \sum_{k, \ell} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_{\ell}} M_{1j_1} \cdots M_{pj_k} \cdots M_{dj_d} \quad (1.24)$$

Se scambiamo gli ordini di somma, effettuando per prima la somma su j_1, \dots, j_d , il risultato è zero tranne che se $\ell = k$. Infatti per $\ell \neq k$ si hanno due righe uguali nella nuova matrice di cui stiamo calcolando il determinante. Il risultato si scrive nella forma seguente

$$\frac{d\mu}{dt} = \sum_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \sum_{j_1, \dots, j_d} \epsilon_{j_1, \dots, j_d} M_{1j_1} \cdots M_{kj_k} \cdots M_{dj_d} = \det M \operatorname{div} \Phi \quad (1.25)$$

Una conseguenza di questo teorema è che se la divergenza del campo è negativa i volumi si contraggono, se è positiva si espandono, se è nulla si conservano. Se l'equazione è lineare $x = Ax$ si verifica direttamente la 1.19 poiché $\mu = \det e^{At} = e^{t \operatorname{Tr} A}$, per una nota proprietà del determinante. Si noti che la contrazione dei volumi è condizione necessaria ma non sufficiente per la stabilità, che richiede invece la contrazione lungo una direzione qualunque. Come esempio del calcolo di μ consideriamo la equazione $x = x^2$ per la quale si ha $x = S_t(X) = X(1 - Xt)^{-1}$ da cui $X = S_{-t}(x) = x(1 + xt)^{-1}$. Lo jacobiano vale $\mu = dx/dX = (1 - Xt)^{-2}$ nella formulazione lagrangiana e $\mu = (1 + xt)^{-2}$ in quella euleriana. In entrambi i casi si verifica che $d\mu/dt = 2x\mu$ in accordo con 1.19.

1.5 Equazione di Newton

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}} \quad (1.26)$$

dove $(x, p) \in \mathbb{R}^2$ spazio delle fasi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \text{Il flusso di fase conserva i volumi}$$

La condizione che il campo abbia divergenza nulla implica che

1. le soluzioni sono trasformazioni del piano dello spazio delle fasi che conservano le aree
2. E' possibile cercare (condizione necessaria ma non sufficiente) un integrale primo del moto $H(x, p)$ cioè una funzione a un solo valore definita su tutto lo spazio delle fasi (può avere singolarità isolate ma non tagli) che non dipende esplicitamente dal tempo e rimane costante lungo le soluzioni

$$\boxed{\frac{d}{dt} H(x, p) = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{p}{m} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial x} = 0} \quad (1.27)$$

\Rightarrow

$$\boxed{H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)} \quad \text{energia} \quad (1.28)$$

L'Eq. 1.5 significa che il gradiente dell'integrale primo del moto deve essere ortogonale al campo che definisce il sistema dinamico attraverso equazioni differenziali. E' una condizione di chiusura, serve anche l'esattezza.

L'integrale primo energia costruisce un vincolo geometrico per il flusso di fase: siccome l'energia meccanica è costante lungo le soluzioni dell'equazione differenziale di Newton, allora la soluzione deve rimanere sulle curve di livello dell'energia. Sul piano determina le soluzioni. Ma se abbiamo 2 d.o.f., lo spazio ha 2 coordinate, 2 momenti \Rightarrow abbiamo superfici di livello 3d, su cui sta la soluzione, ma non sappiamo cosa fanno le soluzioni. L'esistenza dell'integrale primo è stata definita in modo da dare un vincolo geometrico. Ecco perché funzione a un solo valore: se no avremmo un vincolo geometrico locale, che non vincola le orbite. Differenza tra integrale primo del moto e una costante del moto. Non tutte sono integrali primi del moto, perché alcune sono collegate non a funzioni di un solo valore.

L'energia meccanica consente di integrare l'equazione di Newton

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E(x_0, p_0)$$

Separiamo le variabili

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \Rightarrow t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \quad (1.29)$$

da cui $x(t)\#$.

Le soluzioni stanno sulle curve $H(x, p) = E$. Nel caso di curve chiuse abbiamo moti periodici.

Riconduciamo il calcolo della soluzione al calcolo dell'integrale, che è una funzione ben definita $\Rightarrow t(x)$, e per invertirlo facciamo operazioni algebriche fattibili con precisione arbitraria a qualunque tempo per ottenere $x(t)$. Diremo che un sistema meccanico è integrabile quando riconduciamo il calcolo delle soluzioni al calcolo integrale e calcolo algebrico di inversione. Teorema: quasi tutti i sistemi meccanici sono non integrabili. Noi useremo quasi sempre un sistema integrabile. Se no: tecniche numeriche. Esempio di sistema non integrabile: pendolo doppio (due pendoli su un piano che oscillano sotto la forza di gravità). Poincaré. Nascita dell'idea dei sistemi caotici. Usiamo $\frac{p}{m}$, non v , così come si usa p in relatività ristretta. Meccanica newtoniana: massa inerziale tipica del sistema. Relatività: massa cambia a seconda dell'energia, è la massa a riposo invece che è intrinseca del sistema.

Assumiamo che i potenziali esistono: le forze fondamentali note per ora lo ammettono, se non lo ammettono non sono fondamentali, ma sono costruite in maniera efficace per descrivere il sistema. Interazione tra il sistema e l'ambiente: per non modellizzare l'ambiente introduciamo l'attrito, che descrive l'effetto, ma non è una forza fondamentale. Per sistemi newtoniani, per struttura stessa dell'equazione di newton, la divergenza del campo è nulla \Rightarrow la soluzione conserva la misura. Abbiamo visto che l'equazione di Newton definisce un campo vettoriale $(p/m, -\frac{\partial V}{\partial x})$ nello spazio delle fasi x, p . sistemi a 1 d.o.f.: descritti da una sola coordinata. A ogni coordinata è associato un momento \Rightarrow lo spazio delle fasi ha dimensione doppia dello spazio delle configurazioni. \Rightarrow I sistemi meccanici hanno spazi delle fasi a dimensione pari.

1.5.1 Leggi di conservazione e integrali primi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_x(x, y) & H(x, y) \text{ integrale primo} \\ \dot{y} &= a_y(x, y) \\ \Rightarrow \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} a_x + \frac{\partial H}{\partial y} a_y = 0 \end{aligned}$$

Se $a(x, y)$ conserva le aree $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ Le equazioni

$$\frac{\partial H}{\partial y} = a_x \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -a_y$$

possono essere integrate localmente (la chiusura è soddisfatta)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \text{ equivale a } \frac{\partial a_x}{\partial x} = -\frac{\partial a_y}{\partial y}$$

Quindi la conservazione delle aree dà la possibilità di calcolare un integrale primo del moto.

Per l'equazione di Newton

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

La forma chiusa di cui H è il corrispondente potenziale è quella associata al campo $(-a_y, a_x)$? Sì, ma ci potrebbe essere un fattore integrante come nel caso dell'epidemia

1.6 Esempi

1.6.1 Oscillatore armonico, oscillatore iperbolico

Esempio 1.6.1. *Oscillatore armonico con costante elastica k*

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \geq 0 & p = mv = m \frac{dx}{dt} \\ dt &= \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{kx^2}{2})}} \Rightarrow t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{kx^2}{2})}} \end{aligned}$$

Ponendo $x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta$, $dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta$ ($x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta_0$)

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{m}{k}} d\theta = \frac{1}{\omega} (\theta - \theta_0) \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t, \quad x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\theta_0 + \omega t)$$

da cui

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}(\sin \theta_0 \cos \omega t + \cos \theta_0 \sin \omega t) \\ p(t) = m \frac{dx}{dt} = m\omega \sqrt{\frac{2E}{k}}(-\sin \theta_0 \sin \omega t + \cos \theta_0 \cos \omega t) \end{cases}$$

Utilizziamo $x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta_0$, $p_0 = \sqrt{2Em} \cos \theta_0$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{\sqrt{km}} \sin \omega t \\ p(t) = -x_0 \sqrt{km} \sin \omega t + p_0 \cos \omega t \end{cases}$$

Il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ non dipende da E .

Esercizio 1.6.1. (Per casa) Costruire il flusso di fase di

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \omega^2 x \end{cases}$$

$$\dot{p} = m\dot{x} = m\omega^2 x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{2}kx^2.$$

In analogia con l'oscillatore armonico

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{kx^2}{2} \quad p = mv = m \frac{dx}{dt}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + \frac{kx^2}{2})}} \Rightarrow t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + \frac{kx^2}{2})}}$$

Consideriamo il caso $E < 0$ e poniamo $x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cosh \theta$, $dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sinh \theta d\theta$ ($x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cosh \theta_0$). Nel caso $E > 0$ il procedimento sarà analogo ma utilizzando la sostituzione $x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sinh \theta$

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{m}{k}} d\theta = \frac{1}{\omega}(\theta - \theta_0) \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t, \quad x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cosh(\theta_0 + \omega t)$$

da cui

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}(\cosh \theta_0 \cosh \omega t + \sinh \theta_0 \sinh \omega t) \\ p(t) = m \frac{dx}{dt} = m\omega \sqrt{\frac{2E}{k}}(\cosh \theta_0 \sinh \omega t + \sinh \theta_0 \cosh \omega t) \end{cases}$$

Utilizziamo $x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cosh \theta_0$, $p_0 = \sqrt{2Em} \sinh \theta_0$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cosh \omega t + \frac{p_0}{\sqrt{km}} \sinh \omega t \\ p(t) = x_0 \sqrt{km} \sinh \omega t + p_0 \cosh \omega t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) & \frac{\sinh(\omega t)}{\sqrt{km}} \\ \sqrt{km} \sinh(\omega t) & \cosh(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) & \frac{\sinh(\omega t)}{\omega m} \\ \omega m \sinh(\omega t) & \cosh(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Assumendo $m=1$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) & \frac{\sinh(\omega t)}{\omega} \\ \omega \sinh(\omega t) & \cosh(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) & \frac{\sinh(\omega t)}{\sqrt{\omega}} \\ \sqrt{\omega} \sinh(\omega t) & \sqrt{\omega} \cosh(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \sqrt{\omega} \\ \frac{p_0}{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) & \sinh(\omega t) \\ \sinh(\omega t) & \cosh(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ P_0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

1.6.2 Modello di epidemia

Modello fisico-matematico Data una popolazione $x+y=N$

x = individui sani y = individui malati

Il contagio avviene per contatto

βxy = numero di individui contagiati per unità di tempo

αy = numero di individui guariti per unità di tempo

Equazione di bilancio La popolazione si conserva.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha y - \beta xy \\ \dot{y} &= \beta xy - \alpha y\end{aligned}\tag{1.30}$$

$x+y$ integrale primo del moto

Pongo $x=N-y$ e ottengo

$$\dot{y} = -\alpha y + \beta(N-y)y = (\beta N - \alpha)y - \beta y^2\tag{1.31}$$

Definiamo il parametro $\gamma = \beta N - \alpha$. γ può essere > 0 o < 0

Punti fissi

$$\gamma y - \beta y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y = \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}\tag{1.32}$$

$y = \frac{\gamma}{\beta}$ è fisico solo se $\gamma > 0$.

Comportamento vicino ai punti fissi Linearizzazione di un campo vettoriale

- Se $y \ll 1 \Rightarrow \gamma y - \beta y^2 \approx \gamma y$

Approssimo

$$\dot{y} \approx \gamma y \Rightarrow y(t) = y_0 e^{\gamma t}\tag{1.33}$$

valida solo se $|y| \ll 1$.

caso $\gamma > 0$: $y(t) = y_0 e^{\gamma t}$ cresce esponenzialmente e abbiamo epidemia

caso $\gamma < 0$: $y(t) = y_0 e^{-|\gamma|t}$ non c'è epidemia

$\gamma = \beta N - \alpha \Rightarrow \gamma > 0 \quad \beta > \frac{\alpha}{N} \Rightarrow$ Se N è grande è sempre soddisfatta: $y=0$ è un punto fisso instabile

- Se $|y - \frac{\gamma}{\beta}| \ll 1$

$$\gamma y - \beta y^2 \approx (\gamma - 2\beta y) \Big|_{y=\frac{\gamma}{\beta}} \left(y - \frac{\gamma}{\beta} \right) = -\gamma \left(y - \frac{\gamma}{\beta} \right)\tag{1.34}$$

Effettuiamo un cambio di variabile: $u = y - \frac{\gamma}{\beta}$

$\dot{y} = \dot{u} \approx -\gamma u$ con soluzione $u = u_0 e^{-\gamma t}$

Quindi se $|y - \frac{\gamma}{\beta}| \ll 1$ approssimiamo

$$y(t) = \frac{\gamma}{\beta} + \left(y_0 - \frac{\gamma}{\beta} \right) e^{-\gamma t} \quad \gamma > 0\tag{1.35}$$

$y(t) \rightarrow \frac{\gamma}{\beta}$ punto di equilibrio attrattivo

Funzione logistica Integro l'equazione $\dot{y} = \gamma y - \beta y^2$

$$\frac{dy}{(\gamma - \beta y)y} = dt \Rightarrow \frac{\gamma - \beta y + \beta y}{\gamma y (\gamma - \beta y)} dy = \frac{dy}{\gamma y} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{dy}{(\gamma - \beta y)} = dt$$

Integrando,

$$t = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right) - \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{\gamma - \beta y}{\gamma - \beta y_0} \right)$$

Invertendo,

$$e^{\gamma t} = \frac{y(\gamma - \beta y_0)}{y_0(\gamma - \beta y)}, \quad e^{\gamma t} y_0(\gamma - \beta y) = y(\gamma - \beta y_0), \quad y(\gamma - \beta y_0 + \beta e^{\gamma t} y_0) = y_0 \gamma e^{\gamma t}, \quad y = \frac{y_0 \gamma e^{\gamma t}}{\gamma + y_0 \beta e^{\gamma t} - y_0 \beta}$$

$$\boxed{\text{Funzione logistica} \quad y(t) = \frac{y_0 e^{\gamma t}}{1 + y_0 \frac{\beta}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1)}} \quad (1.36)$$

Misura conservata

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha y - \beta x y & H &= x + y \\ \dot{y} &= \beta x y - \alpha y \end{aligned}$$

Il sistema si scrive

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} & \text{con } \mu(x, y) &= y(\alpha - \beta x) \\ \dot{y} &= -\mu(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

Dimostrare che

$$\frac{1}{y(\alpha - \beta x)} dx dy = \frac{1}{\mu(x, y)} dx dy$$

è una misura invariante.

Nota: data una misura $m(x, y)$ vale che per un flusso di fase

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} m(x, y) dx dy = \frac{dm}{dt} + m(x, y) \operatorname{div} a = \frac{\partial m}{\partial x} a_x + \frac{\partial m}{\partial y} a_y + m(x, y) \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \right)$$

1.7 Equazioni lineari forzate

$$\dot{x} = Ax + f(t) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Poniamo $x(t) = e^{At} y(t) \Rightarrow \dot{x} = A e^{At} y + e^{At} \dot{y}$

$$Ax + e^{At} \dot{y} = Ax + f(t) \Rightarrow \dot{y} = e^{-At} f(t)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t e^{-As} f(s) ds \quad \text{con } y_0 = y(0) = x(0) = x_0$$

$$\boxed{x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds} \quad (1.37)$$

1.7.1 Rotatore forzato

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

equivale a $\ddot{x} = -\omega^2 x + f(t)\omega$

Metodo generale flusso di fase omogeneo

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Soluzione particolare

$$\begin{pmatrix} x_*(t) \\ p_*(t) \end{pmatrix} = \int_0^t ds \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-s)) & \sin(\omega(t-s)) \\ -\sin(\omega(t-s)) & \cos(\omega(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix}$$

Abbiamo gli integrali

$$\begin{aligned} x_*(t) &= \int_0^t f(s) \sin(\omega(t-s)) ds \\ p_*(t) &= \int_0^t f(s) \cos(\omega(t-s)) ds \end{aligned}$$

Supponiamo $f(s) = a \sin(\Omega s)$. Calcoliamo il primo secondo integrale, per il momento, utilizzando le formule di prostaferesi ²

$$a \int_0^t \sin(\Omega s) \cos(\omega(t-s)) ds = \frac{a}{2} \int_0^t [\sin(\omega(t-s) + \Omega s) - \sin(\omega(t-s) - \Omega s)] ds$$

Esplicitiamo, utilizzando la formula per la somma del seno,

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(\omega t - (\omega + \Omega)s) ds &= \int_0^t [\sin(\omega t) \cos(-(\omega + \Omega)s) + \cos(\omega t) \sin(-(\omega + \Omega)s)] ds = \\ &= \sin(\omega t) \frac{\sin((\omega + \Omega)s)}{\omega + \Omega} \Big|_0^t + \cos(\omega t) \frac{\cos((\omega + \Omega)s)}{\omega + \Omega} \Big|_0^t = \sin(\omega t) \frac{\sin((\omega + \Omega)t)}{\omega + \Omega} + \cos(\omega t) \frac{\cos((\omega + \Omega)t) - 1}{\omega + \Omega} \end{aligned}$$

singolarità $\omega = -\Omega \Rightarrow$ risonanza lineare

$$\lim_{\omega + \Omega \rightarrow 0} \sin(\omega t) \frac{\sin((\omega + \Omega)t)}{\omega + \Omega} + \cos(\omega t) \frac{\cos((\omega + \Omega)t) - 1}{\omega + \Omega} = t \sin(\omega t)$$

Nel caso di risonanza abbiamo soluzioni con ampiezza crescente $\propto a t$

Metodo pratico

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + a \sin(\Omega t) \quad (1.38)$$

Soluzione dell'omogenea

$$x_h(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

se $\omega \neq \pm \Omega$ la soluzione particolare è $x(t) = c \sin(\Omega t)$, $c = \text{costante}$

$$\ddot{x} = -c\Omega^2 \sin(\Omega t) = -\omega^2 c \sin(\Omega t) + a \sin(\Omega t)$$

Otteniamo la relazione

$$(\omega^2 - \Omega^2)c = a \Rightarrow c = \frac{a}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)$$

soluzione generale

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{a}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t) \quad (1.39)$$

2

$$\text{Formula di prostaferesi: } \sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega s = \frac{p-q}{2} \\ \omega(t-s) = \frac{p+q}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 2\left(\Omega s + \frac{q}{2}\right) \\ \omega(t-s) = \Omega s + \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \omega(t-s) - \Omega s \\ p = 2\left(\Omega s + \frac{\omega(t-s) - \Omega s}{2}\right), p = \Omega s + \omega(t-s) \end{array} \right.$$

Possiamo generalizzare sovrapponendo le soluzioni, per una forzante del tipo

$$f(t) = \sum_{k=0} a_k \sin(\Omega_k t) + b_k \cos(\Omega_k t) \text{ con } \pm \Omega_k \neq \omega$$

Caso risonante $f(t) = a \sin(\omega t)$

Soluzione particolare: $x(t) = ct \cos(\omega t)$

$$\dot{x} = c \cos(\omega t) - ct\omega \sin(\omega t), \quad \ddot{x} = -2c\omega \sin(\omega t) - ct\omega^2 \cos(\omega t)$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale,

$$-2c\omega \sin(\omega t) - ct\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 ct \cos(\omega t) + a \sin(\omega t)$$

Otteniamo

$$c = -\frac{a}{2\omega} \Rightarrow x(t) = -\frac{at}{2\omega} \cos(\omega t)$$

Soluzione generale risonante

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) - \frac{at}{2\omega} \cos(\omega t)$$

Analogamente per forzature (quasi-) periodiche

Il metodo pratico visto fornisce regole semplici ma la dimostrazione viene dalla teoria. Funziona quando la forzatura è funzione periodica, o combinazione lineare di funzioni periodiche, essendo l'equazione lineare: consideriamo separatamente l'effetto di ogni forzatura e li sommiamo. Per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea, prendiamo la stessa funzione (seno o coseno o loro combinazione lineare) della forzante la moltiplichiamo per una costante c - questo vale per la condizione di non risonanza. Se invece ci sono frequenze risonanti, cioè la forzatura o una sua parte oscilla con la stessa frequenza dell'oscillatore si procede nel modo seguente: con un seno, cerchiamo una soluzione particolare come coseno (se coseno \Rightarrow seno: sfasamento di $\frac{\pi}{2}$ tra soluzione e forzante) con un termine lineare nel tempo: ci aspettiamo che l'ampiezza della soluzione cresca linearmente nel tempo. Nel caso ci siano sia forzature non risonanti che risonanti, bisogna trattarle separatamente (caso 1 e 2 rispettivamente).

1.7.2 Un problema di controllo

Esempio 1.7.1.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Oscillatore iperbolico (si potrebbe vedere come un oscillatore armonico con pulsazione immaginaria) $\ddot{x} = \omega^2 x$

$$\Phi^t \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) & \sinh(\omega t) \\ \sinh(\omega t) & \cosh(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Trovare $f(t)$ in modo che la soluzione con condizione iniziale $(0, p_0)$ sia periodica.

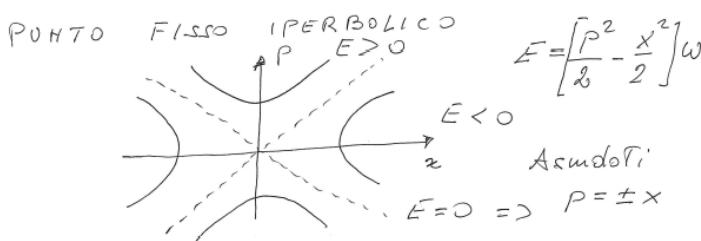


Figura 1.2: Oscillatore iperbolico

Possiamo costruire l'integrale primo del moto: l'energia.³ Le curve di livello dell'energia sono iperboli (equilatere),

³In coordinate non normali,

$$E = \frac{p^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2}$$

Con $x \mapsto X = \sqrt{\omega}x$, $p \mapsto P = \frac{p}{\sqrt{\omega}}$ abbiamo

$$E = \omega \left(\frac{P^2}{2} - \frac{X^2}{2} \right)$$

Sistema di equazioni differenziali a divergenza nulla, ottimo candidato ad essere applicato alla meccanica. Oscillatore iperbolico, chiamato così perché la soluzione si scrive esplicitamente come combinazione lineare di seni e coseni iperbolici, analogo dell'oscillatore armonico dove la soluzione era combinazione lineare di seni e coseni. Poi mettiamo una forzatura. Un sistema iperbolico tipicamente è instabile: facendo scorrere il tempo a partire da una condizione iniziale qualunque, in generale sinh e cosh divergono.

su cui stanno le soluzioni. Per $E = 0$ otteniamo gli asintoti, per $E < 0$ i rami che intersecano l'asse x , per $E > 0$ quelli che intersecano l'asse p . Sia nel futuro che nel passato, il sistema evolve all'infinito: ha la reversibilità temporale.

Data una condizione iniziale, cerchiamo una funzione tale che come forzante del sistema riesca ad equilibrarlo: usiamo una forzatura adattata alla condizione iniziale per stabilizzare il sistema, in particolare avere una soluzione periodica. Esempio del pendolo rovesciato. Il controllo funziona grazie al principio di feedback: osservabile (\vec{v} con cui cade la matita) e un sistema di controllo che può agire sul sistema, variando parametri. Dato l'osservabile calcoliamo come deve variare il parametro, e vi aggiungiamo per stabilizzare il sistema. È più vantaggioso come energia usare la teoria del controllo per volare, rispetto ad avere un aereo molto stabile difficile da fare curvare. Studio, ma non applicato, per le stazioni spaziali: mantenerla in un punto instabile e controllarne la stabilità permette di risparmiare energia, rispetto a metterla in un punto stabile, poi spendere molta energia per farla tornare lì nel caso vi si sposti.

Poniamo $f(t) = A \sin(\Omega t) \Rightarrow$ soluzione particolare: Soluzione non omogenea

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \cosh(\omega(t-s)) & \sinh(\omega(t-s)) \\ \sinh(\omega(t-s)) & \cosh(\omega(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A \sin(\Omega s) \end{pmatrix} ds = A \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(\Omega s) \sinh(\omega(t-s)) \\ \sin(\Omega s) \cosh(\omega(t-s)) \end{pmatrix} ds$$

La matita parte dall'origine con una certa v . Possiamo usare una forzante sinusoidale (per motivarne la scelta bisognerebbe studiare teoria del controllo) per stabilizzare il sistema per costruire una soluzione periodica? Dobbiamo determinare il parametro A . Per trovare la soluzione particolare, il metodo generale visto prevede di calcolare l'integrale di convoluzione della matrice che definisce la soluzione dell'equazione omogenea (definisce il flusso di fase), calcolata in $t-s$, e applicata alla funzione di controllo (forzatura), $(0, f(t))$.

Integrando la prima equazione per parti,

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(\Omega s) \sinh(\omega(t-s)) ds &= -\frac{\cos(\Omega s)}{\Omega} \sinh(\omega(t-s)) \Big|_0^t - \int_0^t -\frac{\cos(\Omega s)}{\Omega} \cosh(\omega(t-s))(-\omega) ds = \\ &= -\frac{\cos(\Omega s)}{\Omega} \sinh(\omega(t-s)) \Big|_0^t - \left[-\frac{\sin(\Omega s)}{\Omega^2} \cosh(\omega(t-s))(-\omega) \Big|_0^t - \int_0^t -\frac{\sin(\Omega s)}{\Omega^2} \sinh(\omega(t-s)) \omega^2 ds \right] \\ &\Rightarrow \int_0^t \sin(\Omega s) \sinh(\omega(t-s)) \left(1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) ds = -\frac{\cos(\Omega s)}{\Omega} \sinh(\omega(t-s)) + \frac{\sin(\Omega s)}{\Omega^2} \cosh(\omega(t-s))(-\omega) \Big|_0^t \\ &\Rightarrow \int_0^t \sin(\Omega s) \sinh(\omega(t-s)) ds = \frac{\Omega^2}{\omega^2 + \Omega^2} \left[0 - \omega \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega^2} + \frac{\sinh(\omega t)}{\Omega} - 0 \right] \\ x^*(t) &= \frac{A}{\omega^2 + \Omega^2} (-\omega \sin(\Omega t) + \Omega \sinh(\omega t)) \\ p^*(t) &= \frac{A}{\omega^2 + \Omega^2} (-\Omega \cos(\Omega t) + \Omega \cosh(\omega t)) \end{aligned}$$

Al denominatore del coefficiente c'è la somma delle pulsazioni (dell'oscillatore e della forzante) in quadratura, che non si può mai annullare, a differenza dell'oscillatore armonico per cui la differenza si poteva annullare dando la risonanza \Rightarrow per l'oscillatore iperbolico, con una forzante sinusoidale non ci può essere risonanza.

Soluzione equazione non omogenea

$$\begin{aligned} x(t) &= p_0 \sinh(\omega t) + \frac{A}{\omega^2 + \Omega^2} (-\omega \sin(\Omega t) + \Omega \sinh(\omega t)) \\ p(t) &= p_0 \cosh(\omega t) + \frac{A}{\omega^2 + \Omega^2} (-\Omega \cos(\Omega t) + \Omega \cosh(\omega t)) \end{aligned}$$

Eliminando le parti in cui compaiono le funzioni iperboliche, da cui dipende il fatto che la soluzione diverge

$$p_0 + \frac{A\Omega}{\omega^2 + \Omega^2} = 0 \Rightarrow A = -\frac{(\omega^2 + \Omega^2)p_0}{\Omega}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{p_0}{\Omega} \omega \sin(\Omega t) \\ p(t) = \frac{p_0 \cancel{\Omega} \cos(\Omega t)}{\cancel{\Omega}} \end{cases} \quad \text{soluzione periodica}$$

Abbiamo scritto la soluzione generale con condizioni iniziali $x_0 = 0, p_0 = 0$. Per stabilizzare tale soluzione bisogna scegliere l'ampiezza A che forzi il sistema, in modo da annulli le funzioni iperboliche (finché ci sono il sistema diverge). Possiamo farlo perché i coefficienti delle parti iperboliche sono gli stessi nelle due equazioni \Rightarrow soluzione periodica. La controllabilità di un sistema non è banale, dipende da teoremi difficili.

CURIOSITÀ:

- Lo sciatore applica la teoria del controllo per governare gli sci spostando il peso da una parte e dall'altra per cambiare la direzione e non cadere: teoria del controllo complicata, i movimenti sono veloci: controllo discontinuo.
- Forzature con multipli della frequenza sono pericolosi per sistemi non lineari: acceleratori di particelle: risonanza non lineare fa perdere il fascio. Mentre se il sistema è lineare non ci sono problemi.
- Quando linearizziamo un sistema bisogna farlo rispetto a un punto preciso, da cui le derivate rispetto a x_0 e non x generico.
- Punto fisso di un sistema dinamico: per il flusso di fase. \Rightarrow il campo associato al flusso di fase tramite l'equazione differenziale si deve annullare. Quindi non è l'equazione $x = Ax$, ma $Ax = 0$, che definisce i punti fissi. Perché i punti fissi si riferiscono alle soluzioni non alle equazioni. L'equazione del punto fisso deve essere tale che la derivata nel punto fisso deve essere nulla.

A Spazio delle fasi

(pg. 15 Arnold- ODE)

In meccanica classica lo stato di un processo che consiste nel moto di un sistema di n punti materiali è descritto dai valori delle coordinate e velocità di tutti i punti materiali. Quindi lo spazio delle fasi di tale sistema ha dimensione $6n$ (3 coordinate + 3 componenti delle velocità per ogni punto materiale). Lo spazio delle fasi di un sistema di n corpi rigidi ha dimensione $12n$.

Il moto di un intero sistema è descritto dal moto di un punto lungo una curva nello spazio delle fasi. La velocità del moto di un punto di fase lungo tale curva è definita dal punto stesso. Quindi a ogni punto dello spazio delle fasi è associato un vettore, detto vettore velocità di fase. L'insieme di tutti i vettori velocità di fase forma il campo vettoriale velocità di fase nello spazio delle fasi. Tale campo vettoriale definisce l'equazione differenziale del processo, cioè la dipendenza della velocità del moto di un punto di fase dalla sua posizione.

Il problema fondamentale della teoria delle equazioni differenziali è determinare o studiare il moto di un sistema usando il campo vettoriale velocità di fase. Il concetto di spazio delle fasi riduce lo studio di un processo evolutivo a un problema geometrico riguardo a curve definite da campi vettoriali.

Definizione A.1. Una linea che ad ogni punto è tangente a un campo vettoriale è detta curva integrale del campo direzionale.

Esempio A.0.1. Sia dato un campo direzionale continuo su un piano, invariante per traslazioni lungo una certa linea e che non contiene direzioni parallele a questa linea. Il problema di trovare le curve integrali per un campo

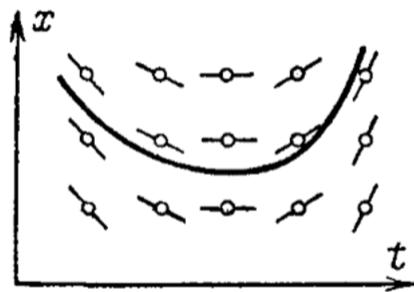


Figura A.1: Campo invariante rispetto a traslazioni verticali

di questo tipo (fig. A.1) è il problema di integrare una data funzione continua. Indichiamo con x l'ordinata e con t l'ascissa. La pendenza di una linea del campo è una nota funzione $v(t)$, e una curva integrale è il grafico di una funzione ignota φ . La curva $x = \varphi(t)$ è una curva integrale se e solo se $\frac{d\varphi}{dt} \equiv v(t)$. Allora si ha $\varphi = \int v dt + C$

Il problema geometrico di trovare le curve integrali si scrive analiticamente come il problema di trovare le soluzioni di un'equazione differenziale. Assumiamo che un campo nel piano (t,x) non contenga la direzione verticale. Allora la pendenza $v(t,x)$ della linea di campo passante per il punto (t,x) è finita e le curve integrali sono grafici delle funzioni $x = \varphi(t)$. Assumiamo che il dominio di definizione della funzione φ sia un intervallo I dell'asse t .

Teorema A.1. Condizione necessaria e sufficiente perché il grafico di una funzione φ sia una curva integrale è che per ogni t in I valga

$$\frac{d\varphi}{dt} = v(t, \varphi(t)) \quad (\text{A.1})$$

Definizione A.2. La funzione φ è detta soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = v(t, x) \quad (\text{A.2})$$

se soddisfa A.1. La soluzione φ soddisfa la condizione iniziale (t_0, x_0) se $\varphi(t_0) = x_0$.

Quindi una soluzione è una funzione definita nell'intervallo il cui grafico è una curva integrale; la soluzione soddisfa la condizione iniziale (t_0, x_0) se la curva integrale passa attraverso il punto dato.

Ogni equazione differenziale A.2 determina un campo direzionale nel piano: una linea associata al punto (t, x) ha pendenza $v(t, x)$. Tale campo è detto campo direzionale di v , o campo direzionale dell'equazione A.2.

(pg. 16 Arnold- MMCM)

L'equazione

$$\ddot{x} = f(x)$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Il piano con coordinate x e y è detto piano delle fasi; un suo punto è detto punto di fase. Il membro di destra del sistema A.3 determina un campo vettoriale sul piano delle fasi detto campo vettoriale della velocità di fase.

Una soluzione di A.3 è un cammino : $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ di un punto di fase nel piano delle fasi, tale che la velocità del punto in movimento a ogni istante è uguale al vettore velocità di fase calcolato nel punto di fase corrispondente a quell'istante.

L'immagine di è detta curva di fase. E' data dalle equazioni

$$x = \phi(t), \quad y = \dot{\phi}(t)$$

Ogni punto di fase è attraversato da una e una sola curva di fase (teorema di esistenza ed unicità).

Una curva di fase può essere costituita da un solo punto, che sarà un punto di equilibrio. Il vettore velocità di fase in un punto di equilibrio è nullo.

La conservazione dell'energia permette di trovare le curve di fase. Su ogni curva di fase l'energia totale è costante, perciò ogni curva giace in un insieme di livello dell'energia $E(x, y) = h$.

Sia data un'energia potenziale $U(x)$. Gli insiemi di livello dell'energia sono $\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E$.

- Ogni punto di equilibrio deve giacere sull'asse x del piano delle fasi. Il punto $x = \xi, y = 0$ è un punto di equilibrio se ξ è un punto critico del potenziale, cioè se $\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=\xi} = 0$
- Ogni insieme di livello è una curva regolare in un intorno di ogni punto che non è un punto di equilibrio (segue dal teorema delle funzioni implicite ⁴). In particolare, se il numero E non è il valore assunto dall'energia potenziale in un suo punto critico, allora l'insieme di livello in cui l'energia è uguale ad E è una curva regolare.

⁴Teorema del Dini

Siano $f \in C^k(\Omega), \Omega$ aperto di \mathbb{R}^2 . Se $(x_0, y_0) \in \Omega$ è tale che $f(x_0, y_0) \neq 0$, allora esiste una ed una sola funzione $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \mapsto [y_0 - h, y_0 + h]$, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - h, y_0 + h] \subset \Omega$

t.c.

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= y_0 \\ \varphi'(x) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ f(x, \varphi(x)) &= 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ \varphi &\in C^k([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \end{aligned}$$

L'energia cinetica è non negativa, quindi l'energia potenziale è minore o uguale dell'energia totale. Minore è l'energia potenziale, maggiore è la velocità. Perciò una palla in una buca di potenziale non può uscirne, salendo oltre il livello determinato dalla sua energia iniziale. Cadendo dentro la buca, la palla acquista velocità.

Riportiamo i seguenti risultati:

- La durata del moto lungo la separatrice è infinita; segue dal teorema di unicità.
- Il tempo di percorrenza da x_1 a x_2 in una direzione è pari a

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$$

- Le rette tangenti ai rami del livello critico corrispondente all'energia potenziale massima $E = U(\xi)$ (ξ punto iperbolico) hanno equazione $y = \pm \sqrt{-U''(\xi)}(x - \xi)$
- Sia $S(E)$ l'area racchiusa da una curva di fase chiusa corrispondente al livello di energia E . Allora il periodo del moto lungo la curva vale $T = \frac{dS}{dE}$.
- Sia E_0 il valore dell'energia potenziale al punto di minimo ξ . Allora il periodo delle piccole oscillazioni in un intorno di ξ è

$$T_0 = \lim_{E \rightarrow E_0} T(E) = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(\xi)}}$$

- Un moto periodico lungo la curva di fase chiusa corrispondente al livello di energia E NON è stabile secondo Lyapunov.

A.1 Stabilità secondo Lyapunov

(pg. 210 Arnold-Ordinary Differential Equations). Sia data l'equazione

$$\dot{x} = v(x), x \in U \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{A.4})$$

con v campo vettoriale differenziabile r volte ($r > 2$) nel dominio U . Assumiamo che A.4 abbia un punto di equilibrio. Scegliamo le coordinate x_i tali che la posizione di equilibrio sia l'origine $v(O) = O$. La soluzione con condizione iniziale $\varphi(t_0) = O$ è $\varphi = O$. Ci interessa il comportamento delle soluzioni con condizioni iniziali vicine.

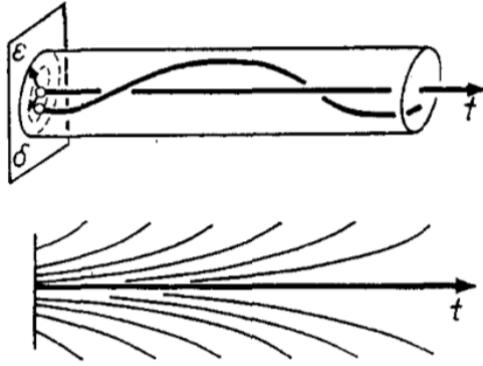


Figura A.2: Punti di equilibrio stabili e instabili- differenza nel comportamento delle curve integrali

Definizione A.3. La posizione di equilibrio $x = O$ dell'Eq. A.4 è detta stabile secondo Lyapunov se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ dipendente solo da ε e non da t tale che $\forall x_0$ t.c. $\|x_0\| < \delta$, la soluzione φ dell'Eq. A.4 con condizione iniziale $\varphi(0) = x_0$ può essere estesa a tutta la semirettta $t > 0$ e soddisfa $\|\varphi(t)\| < \varepsilon \forall t > 0$.

In altre parole, la stabilità secondo Lyapunov di un punto di equilibrio significa che le soluzioni i cui valori iniziali tendono al punto di equilibrio convergono uniformemente (cioè indipendentemente da t) sull'intervallo $[0, +\infty]$ (a una soluzione costante).

A.2 Integrali primi

I moti di un sistema meccanico con d gradi di libertà sono descritti da traiettorie nello spazio delle fasi \mathbb{R}^{2d} soluzione di equazioni differenziali del primo ordine

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$$

Ci proponiamo di determinare la soluzione che corrisponde ad un punto iniziale assegnato. La soluzione di questo problema ai valori iniziali o di Cauchy esiste ed è unica se \mathbf{a} è abbastanza regolare, ed ammette una semplice interpretazione geometrica nel caso autonomo. La soluzione $\mathbf{x}(t)$ definisce parametricamente una curva nello spazio delle fasi che passa per il punto iniziale e che in ogni punto risulta tangente al campo vettoriale \mathbf{a} . Infatti $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ è un vettore tangente alla traiettoria come nel caso di un punto che si muove nello spazio ordinario. Se in problema non è autonomo lo si può rendere autonomo allargando lo spazio delle fasi; allo spazio delle fasi esteso si applicano le precedenti considerazioni geometriche.

Si dicono variabili dinamiche le funzioni scalari $A(\mathbf{x})$ delle coordinate e delle velocità, ossia le applicazioni definite nello spazio delle fasi a valori in \mathbb{R} .

Definizione A.4. Una variabile che sia costante lungo ogni orbita e globalmente definita è un integrale primo del moto

(si escludono le funzioni costanti). Sia $\frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}}$ il gradiente di una funzione $A(\mathbf{x})$; si ha $dA = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}$. Segue che il gradiente è un vettore normale in ogni suo punto alla superficie definita $A(\mathbf{x}) = c$: infatti se \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ appartengono alla superficie si ha $A(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}) = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = 0$.

Dalla derivazione di funzioni composte si ha

$$\frac{d}{dt} A(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

quindi $A(\mathbf{x})$ è un integrale primo se e solo se il gradiente di A è ortogonale al campo vettoriale $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Geometricamente ciò significa che la traiettoria giace sulla superficie $A(\mathbf{x}) = c \equiv A(\mathbf{x}_0)$

L'esistenza di integrali primi è associata alle simmetrie del sistema e consente una riduzione della dimensionalità del problema.

2 Studio di un sistema 1D

2.1 Oscillatore armonico

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Gradi di libertà: numero di coordinate (spaziale) che definisce il sistema= 1. L'equazione di Newton, che è al secondo ordine, equivale al sistema al primo ordine (Eq. 2.1). Nello spazio delle fasi ci sono le coordinate x e il momento associato p .

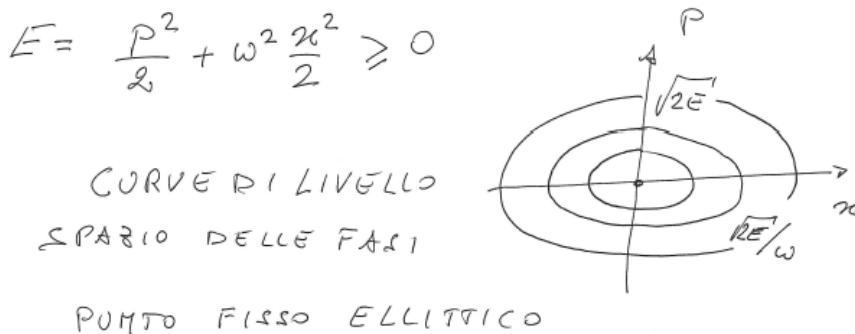


Figura 2.1: oscillatore armonico

Al sistema di equazioni differenziali è associata un'energia che è un integrale primo del moto. Potenziale in forma quadratica: armonico - è positivo perché la forza è attrattiva. Le soluzioni stanno sulle curve di livello dell'energia. Sono ellissi (quadriche con forma quadratica definita positiva) concentriche sull'origine. Curve di livello dell'integrale primo del moto= costante. Sono schiacciate sull'asse x se ω è piccolo, se $\omega = 1$ sono circonferenze. Dalla definizione di integrale primo del moto e dal fatto che $p = \dot{x}$, si trasforma la relazione con E costante, fissata la condizione iniziale, in un'equazione differenziale al primo ordine separabile, si integra e si scrive il flusso di fase. Ma anche senza aver integrato le equazioni del moto, sappiamo che fissare la condizione iniziale, quindi l'energia, corrisponde a fissare una delle curve \Rightarrow la soluzione dell'equazione di Newton si muove su tale curva (non può lasciarla perché è determinata dall'integrale primo del moto, che è costante su una soluzione per definizione). Essendo curve chiuse la soluzione è periodica. Pur tornando sulla condizione iniziale NON abbiamo violato il teorema di esistenza e unicità: se risolviamo localmente la soluzione è unica. E poi quando ritorniamo è la stessa soluzione che torna su se stessa, non è una seconda soluzione.

Periodo oscillatore è legato alla frequenza ω ed è lo stesso per tutte le curve: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

Area sottesa dalla curva $E = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2}$

$$A = \pi \sqrt{2E} \sqrt{\frac{2E}{\omega^2}} = \frac{2\pi}{\omega} E \quad \frac{dA}{dE} = \frac{2\pi}{\omega} = T$$

L'area sottesa dalle curve nello spazio delle fasi è una funzione solo dell'energia. $dA/dE = T$ relazione generale. La massa è normalizzata a 1.

Oscillatore sotto altri punti di vista

Introduciamo variabili anche di dimensioni diverse perché il sistema assuma una forma più semplice possibile. Non c'è simmetria tra il momento e la coordinata per la presenza di $\omega \Rightarrow$ introduciamo X e P. Così le orbite sono cerchi con $r^2 = 2E/\omega$ e le equazioni del moto così riscritte sono più simmetriche: equazioni del rotatore. Simmetria tra X e P, anche a livello di dimensioni fisiche, così mettiamo insieme coordinate e momenti. Ma se ω è dipendente dal tempo i sistemi non sono equivalenti. Cambio di variabili con $\det JT=1$: stessa misura conservata nel sistema dinamico. Misura invariante proprietà del sistema \Rightarrow cambio di variabile che mantiene la stessa misura: sistemi equivalenti.

$$E = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} \quad \dot{x} = p$$

Permette di integrare il sistema. Effettuiamo un cambio di variabili per rendere il sistema simmetrico:

$$\begin{cases} X = \sqrt{\omega}x \\ P = \frac{p}{\sqrt{\omega}} \end{cases} \quad E = \frac{\omega}{2}(P^2 + X^2) \quad \begin{cases} \dot{X} = \omega P \\ \dot{P} = -\omega X \end{cases}$$

Rotatore e curve invarianti: cerchi

Variabili azione-angolo

$$I = \frac{P^2 + X^2}{2} \quad \theta = \arctan \frac{X}{P} \quad (2.2)$$

1. conserviamo le aree

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{2I} \sin \theta \\ P &= \sqrt{2I} \cos \theta \end{aligned} \quad \det \begin{pmatrix} \sqrt{2I} \cos \theta & \frac{1}{\sqrt{2I}} \sin \theta \\ -\sqrt{2I} \sin \theta & \frac{1}{\sqrt{2I}} \cos \theta \end{pmatrix} = 1 \quad (2.3)$$

2. semplifichiamo energia ed equazione del moto

$$E = \omega I \quad \begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = I_0 \\ \theta = \theta_0 + \omega t \end{cases} \quad (2.4)$$

3. dimensioni

$$\theta = \text{adimensionale}, \quad [I] = [E][\omega^{-1}] = E \cdot t$$

Relazione con le variabili iniziali

$$\boxed{\begin{cases} x = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \\ p = \sqrt{2I\omega} \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} I = \frac{p^2}{2\omega} + \frac{\omega x^2}{2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{x\omega}{p}\right) \end{cases}} \quad \text{Variabili azione-angolo oscillatore} \quad (2.5)$$

2.2 Caso generale

Consideriamo un caso generale

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Le soluzioni sono sulle curve di livello $E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \Rightarrow p = \pm \sqrt{2m(E - V(x))}$
I punti fissi sono i punti critici del potenziale (figura 2.2):

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \Rightarrow p = 0 \\ \dot{p} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

2.2.1 Schema dello spazio delle fasi

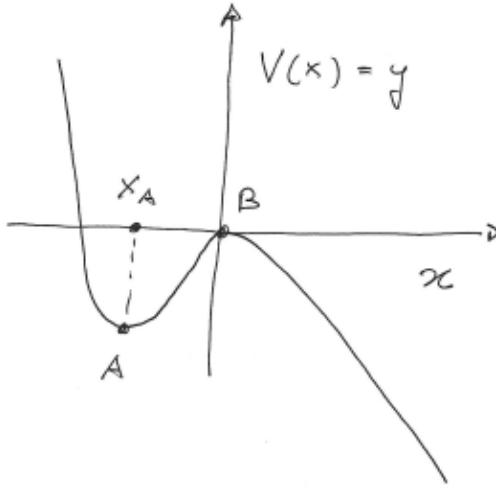


Figura 2.2: Studio del potenziale (la scelta di porre l'origine in B è arbitraria)

$A = (x_A, V_A), B = (x_B, V_B)$ sono punti critici: $\frac{\partial V}{\partial x}(x_A) = \frac{\partial V}{\partial x}(x_B) = 0$, con

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_A) > 0 \text{ minimo} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_B) < 0 \text{ massimo}$$

Essendo l'energia cinetica $T = \frac{p^2}{2m}$ definita positiva, i valori fisici sono tali che $E \geq V(x)$
Luogo dei punti $\{x_m | E = V(x_m)\}$

Nell'intorno di un punto ellittico abbiamo moti periodici

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \quad T(E) = \oint_{H=E} dt = \oint_{H=E} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 2 \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

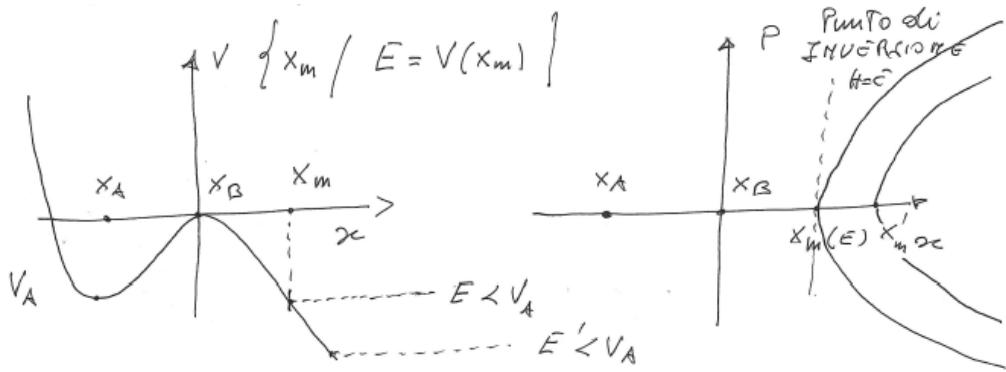


Figura 2.3: Schema dello spazio delle fasi per $E < V(x_A)$

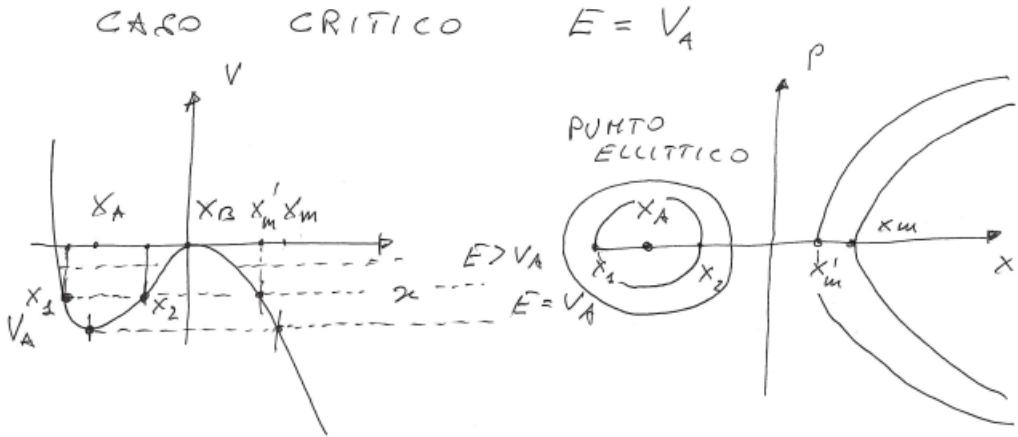


Figura 2.4: Schema dello spazio delle fasi per $E = V(x_A)$

Relazione con le aree⁵ (usando l'equazione del moto con $p = mv$)

$$A(E) = \oint_{H=E} pdx = 2m \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} dx$$

$$\frac{dA}{dE} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = T(E) \quad (2.6)$$

(DA SCRIVERE)

⁵ Formula di Gauss-Green nel piano
Se Ω è s-decomponibile e $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, $F = (P, Q)$, allora

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\delta^+ \Omega} Pdx + Qdy$$

Ricordiamo che per dominio s-decomponibile si intende un dominio

- la cui frontiera è unione disgiunta di un numero finito di curve di Jordan regolari a tratti
- decomponibile in un numero finito di sottodomini semplici rispetto a entrambi gli assi

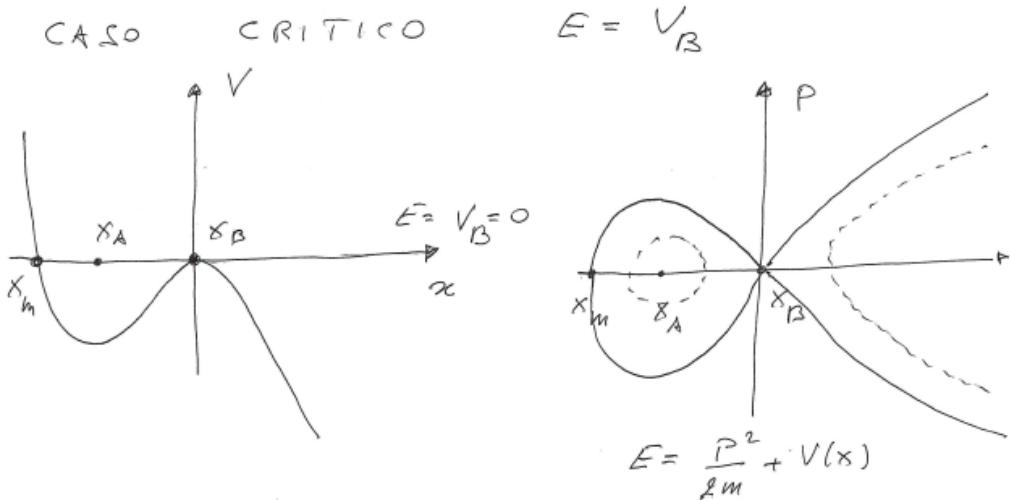


Figura 2.5: Schema dello spazio delle fasi per $E = V(x_B)$

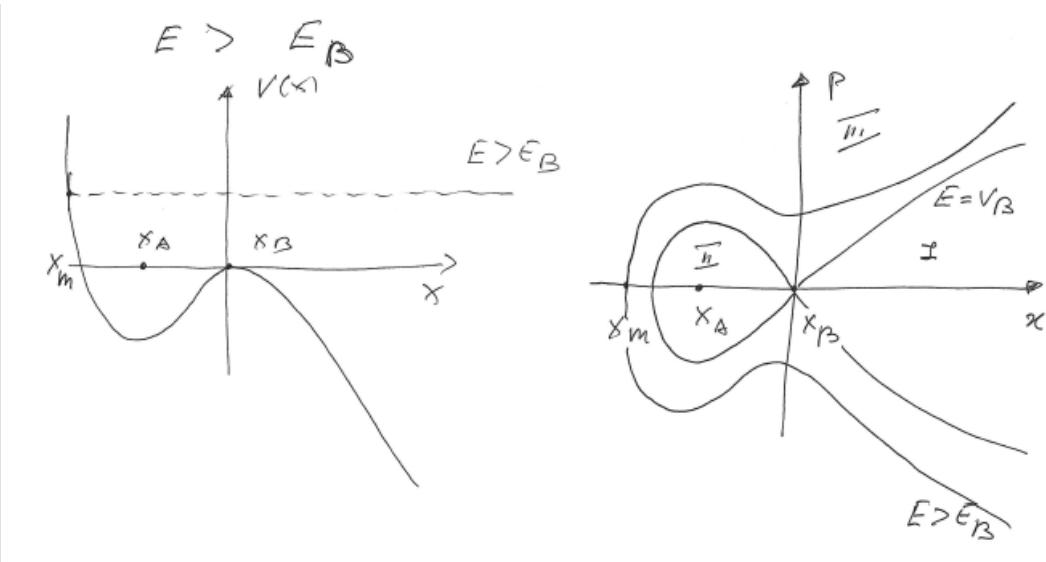


Figura 2.6: Schema dello spazio delle fasi per $E > V(x_B)$

2.3 Linearizzazione di un sistema 1D

2.3.1 Punto ellittico

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \approx \frac{p^2}{2m} + V(x_A) + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_A) \right| (x - x_A)^2 + \mathcal{O}((x - x_A)^3) \quad (2.7)$$

$$E - V_A = \Delta E \approx \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(x - x_A)^2 + \dots \quad k = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_A)$$

Abbiamo un oscillatore armonico con massa m e costante elastica k . $\omega^2 = \frac{k}{m}$ frequenza alle piccole oscillazioni

$$P = \frac{p}{\sqrt{m}}, \quad X = \sqrt{m}(x - x_A) \Rightarrow \quad \Delta E = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} X^2$$

2.3.2 Punto iperbolico

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \approx \frac{p^2}{2m} + V(x_B) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_B) \right| (x - x_B)^2 + \mathcal{O}((x - x_B)^3)$$

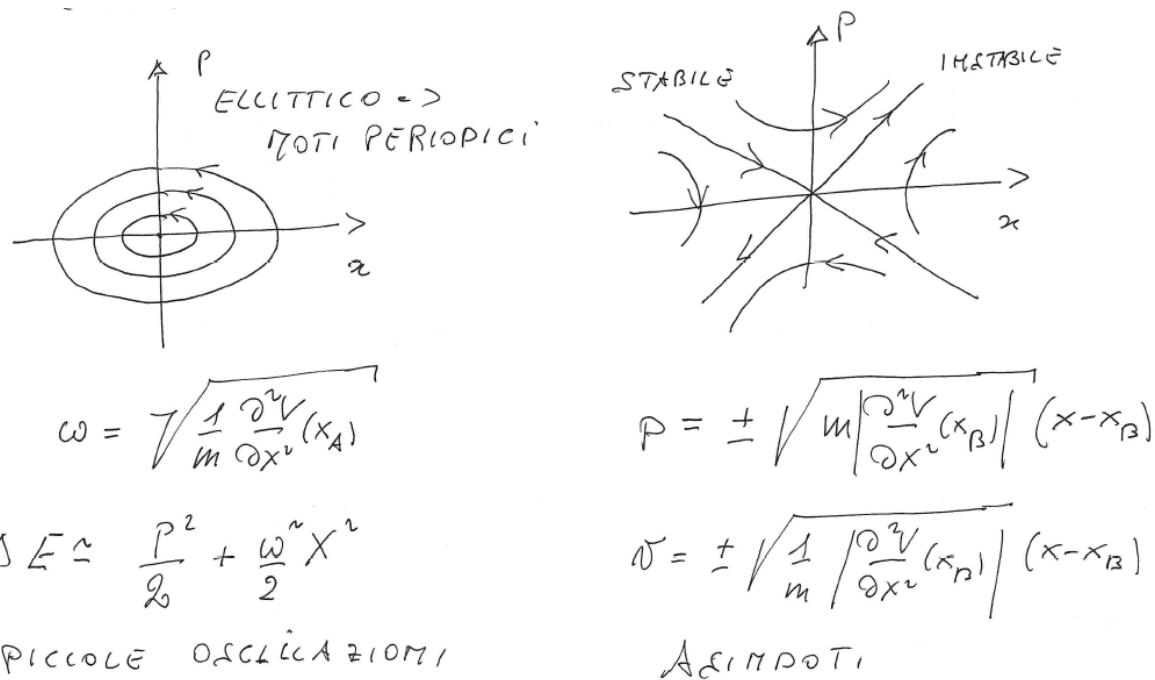
$$E - V_B = \Delta E \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{2} (x - x_B)^2 + \dots \quad k = \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_B) \right|$$
(2.8)

Abbiamo un oscillatore iperbolico con $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$P = \frac{p}{\sqrt{m}}, \quad X = \sqrt{m}(x - x_B) \Rightarrow \quad \Delta E = \frac{P^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} X^2$$

Asintoti: per calcolare queste dobbiamo impostare $\Delta E = 0$ cioè energia pari a quella del punto iperbolico

$$P = \pm \omega X, \quad p = \pm \sqrt{km}(x - x_B)$$



Attenzione i sistemi fisici vanno in senso orario (a differenza della figura per i punti ellittici): quando p è positiva, v è positiva, quindi x cresce. Nei punti iperbolici le frecce sono orientate con continuità: traiettorie da parti opposte dell'asintoto sono percorse nello stesso verso dell'asintoto. Gli asintoti prendono il posto delle separatrici, nel senso che è stato fatto un ingrandimento nell'intorno del punto iperbolico. Sono le tangenti alle separatrici nel punto fisso iperbolico. Le due separatrici sono una stabile, che tende al punto fisso per tempi crescenti, e una instabile, che si allontana. Si devono conservare le aree: in un sistema in cui si contrae l'area lungo la separatrice stabile, si dilata lungo quella instabile. Scambiando il verso del tempo, i ruoli della separatrice stabile/instabile si invertono, così come il verso di percorrenza in generale.

2.4 Pendolo semplice

2.4.1 Spazio delle fasi e integrale di Jacobi

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad H = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - k \cos \theta = \frac{p^2}{2} - k \cos \theta, \quad k = \frac{g}{l}, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$
(2.9)

punti critici del potenziale $\theta = 0, \theta = \pm\pi$

Frequenza piccole oscillazioni

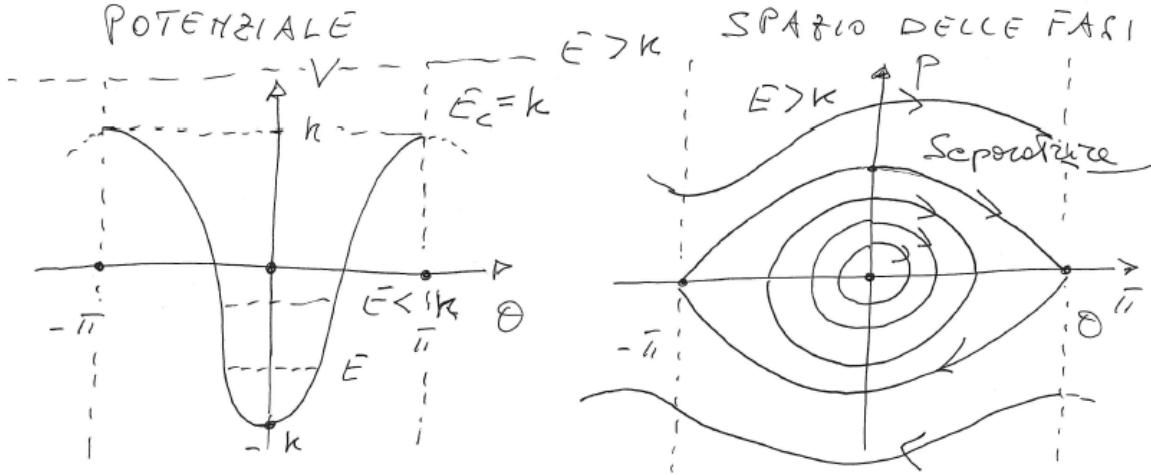


Figura 2.7: Potenziale e spazio delle fasi del pendolo semplice

$\theta \in (0, 2\pi)$: lo spazio delle configurazioni sarebbe una circonferenza: il potenziale e lo spazio delle fasi possono essere costruiti su un cilindro se identifichiamo i punti estremi di θ .

Per energie maggiori di k , massimo del potenziale, il pendolo continua a fare rotazioni complete, con energia cinetica pari al gap $E - k$

$$E \approx \frac{\dot{\theta}^2}{2} - k + \frac{k}{2}\theta^2 \quad \text{valida vicino all'origine}$$

$$\Delta E \approx \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{k}{2}\theta^2 \quad \omega = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Sviluppiamo nell'intorno dei punti iperbolici

$$E \approx \frac{\dot{\theta}^2}{2} + k - \frac{k}{2}(\theta \mp \pi)^2 \quad \text{valida nell'intorno di un punto iperbolico}$$

$$\Delta E \approx \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{k}{2}(\theta \mp \pi)^2$$

Tangenti alle separatrici: nello sviluppo imponiamo che l'energia sia pari a quella delle separatrici

$$\Delta E = 0 \Rightarrow p = \pm k(\theta \mp \pi)^2$$

Analizziamo ora il pendolo più nel dettaglio

$$H = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - k \cos \theta \quad \ddot{\theta} = -k \sin \theta$$

Integrazione delle soluzioni

$$\begin{aligned} E &= \frac{\dot{\theta}^2}{2} - k \cos \theta \quad dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2E + 2k \cos \theta}} \\ t &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2E + 2k \cos \theta}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(2E + 2k) - 4k \sin^2(\frac{\theta}{2})}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{2E + 2k}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{4k}{2E + 2k} \sin^2(\frac{\theta}{2})}} \\ \Rightarrow t &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2E + 2k \cos \theta}} = c \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2(\frac{\theta}{2})}} \end{aligned}$$

dove si è usata $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$, $m = \frac{2k}{E+k}$, $c = \frac{1}{\sqrt{2(E+k)}}$.

$E > -k$ o siamo sul punto ellittico. Otteniamo un integrale ellittico di Jacobi

$$t \propto \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-m\sin^2(\phi)}}, \quad \theta = 2\phi \quad (2.10)$$

Poniamo $u = \sin\phi$, $d\phi = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-mu^2)}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-(1+m)u^2 + mu^4}}$$

Consideriamo l'analogia con un potenziale quartico

$$V(x) = \frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}, \quad H = \frac{p^2}{2} + \frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \quad (2.11)$$

Punti critici $\frac{dV}{dx} = (a^2 - x^2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ minimo,} \\ x = \pm a \text{ massimo} \end{cases}$

Integrazione all'interno della buca

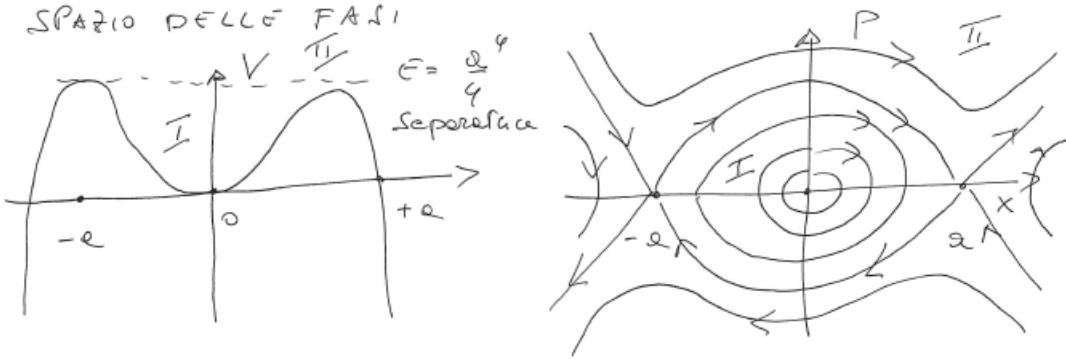


Figura 2.8: Schema dello spazio delle fasi di un potenziale quartico (analogia con il pendolo)

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2(E - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{x^4}{4})}} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_+^2 - x^2)(x_-^2 - x^2)}}$$

dove $x_\pm^2 = a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4|E|}$

$$= \sqrt{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{(x_+^2 - x^2)(x_-^2 - x^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{x_+} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - \frac{x^2}{x_+^2})(x_-^2 - x^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{x_+ x_-} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - \frac{x^2}{x_+^2})(1 - \frac{x^2}{x_-^2})}}$$

Usando il cambio di variabile $u = \frac{x}{x_-}$, $m = \frac{x_-^2}{x_+^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{x_-}$

$$t = \frac{\sqrt{2}x_-}{x_+ x_-} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-mu^2)}}$$

integrale ellittico ⁶

Corrispondenza tra un potenziale polinomiale e il potenziale trascendente del pendolo

Curiosità:

⁶La costante davanti al termine quartico ha dimensioni $\frac{k g m^2 s^{-2}}{kg^2 m^4} = \frac{s^{-2}}{kg m^2}$ quindi quando scomponiamo il trinomio e moltiplichiamo per il coefficiente del grado più alto, l'integrale viene moltiplicato per $\frac{\sqrt{kgm}}{s^{-1}} \Rightarrow$.

$$\frac{\sqrt{kgm}}{s^{-1}} \frac{[u]}{[x_+]} = \frac{\sqrt{kgm}}{s^{-1}} \frac{m\sqrt{kg}}{s^{-1}s^{-1}} \left(\frac{\sqrt{kgm}}{s^{-1}} \right)^{-2} = s$$

- La soluzione deve essere differenziabile nei punti di inversione. Punto nello spazio delle fasi in cui si annulla il momento, poi la velocità cambia di segno. Per l'orbita fisica il punto di inversione è come tutti gli altri, x_m appartiene a una singola orbita: il campo vettoriale che le genera è regolare. Non sulle separatrici, che sono più orbite. Per congiungere in maniera simmetrica passando attraverso l'asse in maniera regolare, l'unico modo è verticale. Avendo più curve, nel punto iperbolico non c'è la richiesta della regolarità.
- Il cilindro si può tagliare e appoggiare su un piano: non è un problema che lo spazio delle configurazioni sia cilindrico. Stesso periodo, stesso comportamento per le perturbazioni.
- Il passaggio da θ a $\frac{\theta}{2}$ fa sì che la periodicità cambi da 2π a 4π . Ma siccome ragioniamo sulle orbite limitate, che girano attorno al punto ellittico, il fatto che θ sia una variabile angolare è irrilevante: è limitato tra due valori, in cui resta limitato il coseno. Cambiare la periodicità della variabile fuori dall'occhio potrebbe essere problematico, mentre noi siamo dentro l'occhio.

2.4.2 Approssimazione delle soluzioni

Per il pendolo potremmo scrivere le soluzioni con le funzioni di Jacobi. Spesso però per sistemi più complessi non sappiamo calcolare esplicitamente le soluzioni \Rightarrow vogliamo approssimarle. Approssimazione delle soluzioni-idea della teoria delle perturbazioni: quantificare gli effetti che una piccola perturbazione su un sistema ha sulle soluzioni.

La tecnica di approssimazione di base sono gli sviluppi di Taylor. Sviluppiamo il potenziale- quindi il coseno, intorno al punto ellittico, cioè intorno a 0 (0=soluzione del punto ellittico). Intorno al punto ellittico θ rimane piccolo.

$$H = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - k \cos \theta \quad \theta \ll 1$$

$$\Rightarrow H \approx \frac{\dot{\theta}^2}{2} - k + \frac{k}{2} \theta^2 - \frac{k}{4!} \theta^4 \quad \Delta E \approx \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{k}{2} \theta^2 - \frac{k}{4!} \theta^4, \quad \Delta E = E + K \ll 1$$

Attenzione: il potenziale di ordine 4 che costituiva un'analogia meccanica NON ha niente a che vedere con lo sviluppo di Taylor del potenziale del pendolo fino al termine di quarto grado. Possiamo simulare il problema del pendolo studiando un potenziale quartico, per la struttura delle soluzioni- riconducibili all'integrale di Jacobi- che evidenza la corrispondenza delle orbite, che hanno stesse proprietà dinamiche. Questo invece è l'approssimazione del coseno. Troncando al termine quadratico, avremmo l'oscillatore armonico: qual è l'effetto di aver aggiunto il termine quartico, ad esempio sul periodo? $\omega^2 = k, X = \theta$. In fisica spesso si vuole approssimare la soluzione aggiungendo termini al potenziale, capita la parte di ordine 0, lineare, cioè quando l'energia è una forma quadratica.

Periodo delle orbite

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} x^2 - \frac{\omega^2}{4!} x^4$$

Usiamo le variabili azione-angolo per l'oscillatore (ricordiamo l'Eq. 2.5)

$$\begin{cases} x &= \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \\ p &= \sqrt{2I\omega} \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} I &= \frac{p^2}{2\omega} + \frac{\omega x^2}{2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{x\omega}{p}\right) \end{cases}$$

L'energia vale

$$H = \omega I - \frac{4I^2}{4!} \sin^4 \theta = \omega I - \frac{I^2}{6} \sin^4 \theta \quad (2.12)$$

Procedimento generale (anche per sistemi complicati): introduciamo variabili azione-angolo per il sistema noto, che qui è l'oscillatore. Abbiamo visto le soluzioni dell'equazione del moto per l'oscillatore: l'energia è integrale primo del moto \Rightarrow l'azione è costante; l'angolo fa un moto rettilineo uniforme. Riscriviamo energia ed equazione del moto in modo che la parte dell'oscillatore armonico sia più semplice. Nell'energia abbiamo quindi il termine $I\omega$ dell'oscillatore armonico, e un secondo termine in cui abbiamo sostituito l'espressione di x. Abbiamo semplificato le equazioni del moto anche per il sistema perturbato.

Equazioni del moto (da calcolare)

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega - \frac{I}{3} \sin^4 \theta \\ \dot{I} &= \frac{4I^2}{6} \sin^3 \theta \cos \theta \end{cases} \quad \text{da} \quad \begin{cases} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 x + \frac{\omega^2}{6} x^3 \end{cases} \quad (2.13)$$

Scritte le equazioni del moto nelle variabili azione-angolo per oscillatore (sono le variabili giuste per questo problema) le equazioni del moto anche per il problema perturbato si semplificano. L'idea alla base del modo con cui costruiamo le soluzioni approssimate dei sistemi meccanici è che abbiamo ensembles di sistemi equivalenti, riconducibili l'uno all'altro. Cerchiamo di trovare variabili adatte con cui riscrivere le equazioni del moto in modo più semplice. Stiamo sfruttando delle simmetrie dell'equazione di Newton, legate ad esempio alla conservazione della misura. Data l'energia nelle nuove variabili è molto semplice scrivere le equazioni del moto associate con il formalismo lagrangiano/hamiltoniano. Altrimenti, data l'equazione di Newton $\dot{x} = p, \dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, possiamo scrivere \dot{I} e $\dot{\theta}$ in funzione di \dot{x} e \dot{p} con la regola della catena, per poi riscrivere l'equazione di Newton sostituendo a I e θ a x e P :

$$\begin{aligned}
\dot{I} &= \frac{\partial I}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I}{\partial p} \dot{p} \\
\dot{\theta} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \theta}{\partial p} \dot{p} \\
\frac{\partial I}{\partial x} &= \omega x \quad \frac{\partial I}{\partial p} = \frac{p}{\omega} \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x\omega}{p}\right)^2} \frac{\omega}{p} \quad \frac{\partial \theta}{\partial p} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{x\omega}{p}\right)^2} \frac{x\omega}{p^2} \\
\Rightarrow \dot{I} &= (\omega x)p + \left(\frac{p}{\omega}\right) \left(-\omega^2 x + \frac{\omega^2}{6} x^3\right) = \\
&= \omega \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right) (\sqrt{2I\omega} \cos \theta) + \sqrt{2I\omega} \cos \theta \frac{1}{\omega} \left[-\omega^2 \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right) + \frac{\omega^2}{6} \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right)^3\right] = \\
&= \cancel{2I\omega \sin \theta \cos \theta} - \cancel{2I\omega \cos \theta \sin \theta} - \frac{4I^2}{\omega^2} \cos \theta \sin^3 \theta \\
\Rightarrow \dot{\theta} &= \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x\omega}{p}\right)^2} \frac{\omega}{p} \right) p + \left(-\frac{1}{1 + \left(\frac{x\omega}{p}\right)^2} \frac{x\omega}{p^2} \right) \left(-\omega^2 x + \frac{\omega^2}{6} x^3\right) = \\
&= \left(\frac{1}{1 + \left[\frac{\left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right) \omega}{\sqrt{2I\omega} \cos \theta} \right]^2} \frac{\omega}{\sqrt{2I\omega} \cos \theta} \right) (\sqrt{2I\omega} \cos \theta) + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{1 + \left[\frac{\left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right) \omega}{\sqrt{2I\omega} \cos \theta} \right]^2} \frac{\left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right) \omega}{\left(\sqrt{2I\omega} \cos \theta\right)^2} \right) \left[-\omega^2 \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right) + \frac{\omega^2}{6} \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right)^3\right] \\
&= \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \frac{\omega}{\sqrt{2I\omega} \cos \theta} \right) (\sqrt{2I\omega} \cos \theta) + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right) \omega}{\left(\sqrt{2I\omega} \cos \theta\right)^2} \right) \left[-\omega^2 \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right)\right] + \left(-\cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{2I\omega} \cos^2 \theta} \right) \left[\frac{\omega^2}{6} \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right)^3 \right] = \\
&= \cos^2 \theta \omega + \left(-\cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{2I\omega} \cos^2 \theta} \right) \left[-\omega^2 \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right)\right] + \left(-\cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{2I\omega} \cos^2 \theta} \right) \left[\frac{\omega^2}{6} \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right)^3 \right] =
\end{aligned}$$

$$= \cos^2 \theta \omega + \omega \sin^2 \theta - \frac{2I}{6} \sin^4 \theta = \omega - \frac{1}{3} I \sin^4 \theta$$

Il cambio di variabili non permette di calcolare in maniera esplicita l'integrale, che non si integrava analiticamente con le variabili iniziali. Ma vogliamo una soluzione approssimata vicino al punto ellittico, cioè la differenza di energia rispetto al minimo $\Delta E = E - (-K)$ è piccola ($-K$ = energia del minimo). Questo vale anche per l'energia perturbata \Rightarrow l'azione è piccola, in quanto è proporzionale alla parte di energia dell'oscillatore armonico, che è dominante rispetto alla perturbazione - per cui quando la parte principale dell'energia è vicina allo 0 siamo vicini al punto ellittico. H è la differenza rispetto all'energia del minimo che è 0: abbiamo riscalato. L'azione è una forma quadratica, il minimo si ottiene quando $x=0$ e $p=0$: $I \ll 1$ ci assicura che le soluzioni restino vicine al punto ellittico. Torniamo alle Eq.2.13. θ avrà un termine dovuto allo sviluppo di $\dot{\theta}$ all'ordine 0 (quando trascuriamo l'azione), pari a ω , poi un termine dipendente da I^1 , mentre trascuriamo i termini di ordine quadratico in I . Quando facciamo le approssimazioni, individuiamo qual è il parametro piccolo rispetto a cui facciamo gli sviluppi (I), e qual è l'ordine del parametro che dobbiamo considerare (I^1), e trascuriamo tutti i termini di ordine superiore: approssimazione in I al primo ordine.

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \omega t + If(t) + \mathcal{O}(I^2) \text{ in quanto } I \ll 1 \\ \dot{\theta}(t) &= \omega + I\dot{f}(t) + \mathcal{O}(I^2) = \omega - \frac{I}{3} \sin^4(\omega t) + \mathcal{O}(I^2)\end{aligned}$$

Proprietà dell'azione: la sua derivata dipende solo dal termine di perturbazione. L'azione ha una variazione molto più piccola dell'angolo: variazione con I^2 a posto che I^1 . I è molto meno influenzabile dalla perturbazione (è di ordine superiore): vantaggio. Se andassimo a ordini maggiore, dovremmo cambiare la definizione per avere le stesse proprietà. Non deriviamo I perché la sua derivata è di ordine successivo (vedi calcolo di $\dot{\theta}$). f è l'approssimazione delle soluzioni del sistema, e l'abbiamo calcolata. θ sarebbe solo ωt fermandoci all'oscillatore armonico. Sistema diventa quartico. Vogliamo risolvere il sistema vicino al punto ellittico (origine). Con le variabili azione-angolo per la parte dell'oscillatore armonico, otteniamo nuove equazioni del moto. Cerchiamo di risolverle per trovare una soluzione valida a meno di termine I^2 . Nuovo contributo alla parte di angolo, proporzionale a I, per I non c'è nuovo contributo. Prendiamo θ e sostituiamo in $\dot{\theta}$. Quando facciamo gli sviluppi continuiamo a trascurare i termini I^2 .

Otteniamo:

$$\begin{aligned}\dot{f}(t) &= -\frac{1}{3} \sin^4(\omega t) & f(t) &= -\frac{1}{3} \int_0^t \sin^4(\omega t) dt \\ \theta(t) &= \omega t - \frac{I}{3} \int_0^t \sin^4(\omega t) dt = 2\pi & \text{periodo}\end{aligned}$$

Risolviamo in modo perturbativo

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{approssimazione all'ordine 0} \\ T_1 \Rightarrow \omega T_1 &= 2\pi + \frac{I}{3} \int_0^{2\pi/\omega = T_0} \sin^4(\omega t) dt = 2\pi + \frac{I}{3} \frac{2\pi}{\omega} \frac{3}{8} = 2\pi \left(1 + \frac{I}{8\omega}\right) \\ T_1 &= \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{I}{8\omega}\right) \quad \text{aumento del periodo con l'ampiezza} \tag{2.14}\end{aligned}$$

Come abbiamo corretto il periodo? θ ogni 2π si chiude. Dobbiamo trovare t tale che sia vero: complicato, perché compare anche dentro l'integrale. Somma di termine di ordine 0 e 1. Partiamo dall'ordine 0 e vediamo cosa aggiungere per trovare la correzione. Al posto di t mettiamo il termine corretto T_1 . Se nell'integrale mettessimo l'approssimazione 0 e un pezzo piccolo che contiene I, avremmo una correzione di ordine superiore a I, ovvero I^2 - così come nello sviluppo di \sin^4 . Una volta che facciamo un calcolo perturbativo con un certo errore, non possiamo farne altri più precisi, perché magari la parte di termini più precisi non trascurata si sarebbe compensata con quella trascurata, quindi otterremmo un risultato sbagliato \Rightarrow manteniamo a tutti gli stadi la precisione scelta e continuiamo a trascurare i termini di ordine I^2 .

L'integrale adesso ha come estremo un periodo; per ottenere l'Eq.2.14 risolviamo con l'espressione complessa del

seno (oppure per parti) :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right)^4 dt &= \frac{1}{16} \int_0^{T_0} (e^{4i\omega t} + e^{-4i\omega t} - 4e^{i\omega t}e^{-3i\omega t} - 4e^{3i\omega t}e^{-i\omega t} + 6e^{2i\omega t}e^{-2i\omega t}) dt = \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{T_0} (e^{4i\omega t} + e^{-4i\omega t} - 4e^{-2i\omega t} - 4e^{2i\omega t} + 6) dt = \frac{1}{16} \left(\int_0^{T_0} 2\cos(4\omega t) dt + \int_0^{T_0} 8\cos(2\omega t) dt + \int_0^{T_0} 6 dt \right) = \frac{6}{16} T_0 = \frac{3}{8} T_0 \end{aligned}$$

I è legato all'ampiezza dell'oscillazione.

2.4.3 Divergenza del periodo alla separatrice

Ricordiamo lo spazio delle fasi del pendolo.

Il periodo aumenta con le oscillazioni. Più ci allontaniamo più dobbiamo aggiungere correzioni alla soluzione

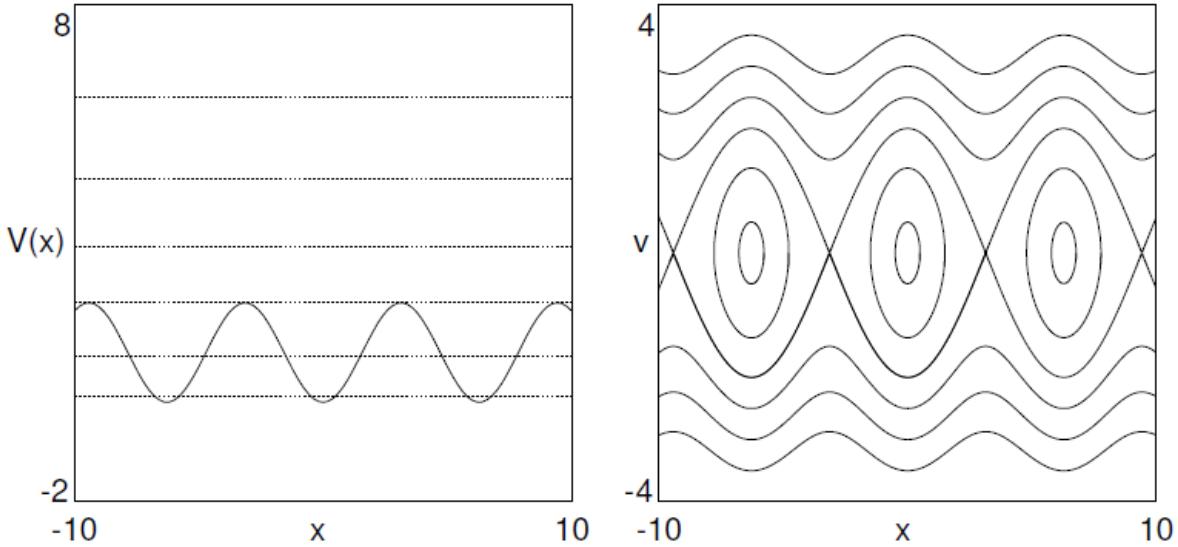
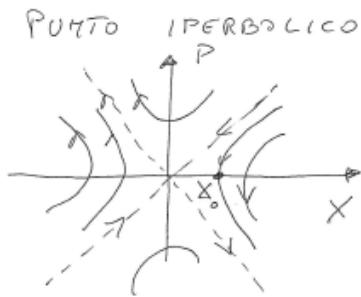


Figura 2.9: Potenziale del pendolo $V = 1 - \cos x$ e traiettorie del campo $\Phi = (v, \sin x)$

lineare, finché alla separatrice il periodo deve diventare infinito. Abbiamo calcolato la prima correzione al periodo, consideriamo ora la divergenza alla separatrice.

Curva separatrice: i punti iperbolici sono i pivot dove la curva si congiunge, le tangenti sono gli asintoti dell'iperbole. Il periodo delle orbite nell'occhio deve convergere al tempo di percorrenza della separatrice, cioè divergere, ma come? In che modo in una traiettoria chiusa il periodo aumenta? Se mascherassimo l'area vicino al punto iperbolico, non riusciremmo a distinguere tra essere sulla separatrice o una curva interna. Questo ci suggerisce che le peculiarità della curva separatrice che consentono di distinguerla da curve interne o esterne, si hanno vicino al punto iperbolico: la divergenza del periodo deve avvenire vicino al punto iperbolico. Guardando il movimento verso il basso del pendolo non sappiamo se sta andando a convergere verso l'equilibrio rovesciato, o se compie un moto di librazione o rotazione: dobbiamo guardare verso il punto iperbolico. Allora facciamo uno zoom della dinamica vicino al punto iperbolico (parte destra o sinistra).



Flusso di fase

$$H = \frac{\omega}{2}(P^2 - X^2)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = \omega P \\ \dot{P} = \omega X \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cosh \omega t & \sinh \omega t \\ \sinh \omega t & \cosh \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$$

X_0 punto di massimo avvicinamento (condizione iniziale)

La forma in cui abbiamo scritto H ci permette di scrivere il flusso di fase in maniera semplice. ω viene dalla derivata seconda nel punto iperbolico. Le equazioni del moto sono quelle dell'oscillatore iperbolico: le soluzioni sono una rotazione iperbolica, $\det = 1$. X_0 è il punto di massimo avvicinamento, cioè dove la traiettoria interseca l'asse delle x, cioè $P = 0$, quindi $P_0 = 0$. Il cerchio è l'intorno in cui possiamo applicare l'approssimazione. La traiettoria passa per il punto X_* , poi X_0 , poi esce dall'intorno in un punto simmetrico rispetto a X_* .

Sia T il tempo totale di percorrenza per il tratto di orbita compreso tra i due punti X_* . Per simmetria del moto sopra e sotto l'asse x, i due tempi per percorrere $X_{*1}X_0$ e $X_{*2}X_0$ sono uguali. Per trovare il tempo di percorrenza, usando l'equazione della traiettoria $X(t) = X_0 \cosh(\omega t)$, imponiamo che al tempo $\frac{T}{2}$ ci troviamo a X_* . Il tempo di percorrenza segue da:

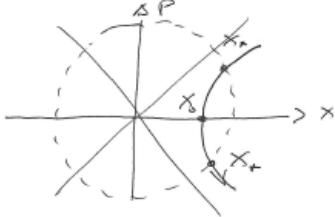


Figura 2.10: Divergenza del periodo del pendolo alle separatrici

$$X_0 \cosh\left(\frac{\omega T}{2}\right) = X_*$$

$X_0 e^{\omega t} + X_0 e^{-\omega t} = 2X_*$, usando la definizione di cosh

Definiamo $\lambda = e^{\omega t}$; moltiplichiamo per λ e dividiamo per X_0

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2 \frac{X_*}{X_0} \lambda + 1 = 0$$

$\frac{X_*}{X_0} > 1$ perché X_* è a destra del punto di massimo avvicinamento

$$\lambda = \frac{X_*}{X_0} \pm \sqrt{\frac{X_*^2}{X_0^2} - 1} \approx \frac{X_*}{X_0}$$

Dato che $\frac{X_*}{X_0} > 1$ ci sono due soluzioni per l'equazione di secondo grado. In prima approssimazione trascuriamo la radice, perché sviluppandola otterremmo un termine di ordine successivo rispetto alle correzioni date da $\frac{X_*}{X_0}$. Se volessimo una soluzione completa, il segno della radice da considerare sarebbe + perché ci stiamo allontanando da X_0 verso destra.

Dato $\lambda > 1$ prendiamo il segno +

$$T = \frac{2}{\omega} \ln \left(\frac{X_*}{X_0} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{X_0}{X_*} \right)^2} \right) \right)$$

$$T \approx -\frac{2}{\omega} \ln X_0 + \dots$$

Abbiamo usato la proprietà che il logaritmo del prodotto (divisione) è la somma (differenza) dei logaritmi e abbiamo tenuto solo i termini contenenti la distanza di massimo avvicinamento X_0 e il coefficiente $\frac{2}{\omega}$. T è effettivamente positivo perché essendo X_0 piccolo (ci stiamo avvicinando all'origine) il suo logaritmo è negativo. Come valutiamo X_0 ? $E = -\frac{\omega}{2} X_0^2$, o meglio ΔE : $|\Delta E|$ è il valore assoluto della differenza tra l'energia e quella delle separatrici ($E = 0$ sono gli asintoti: le separatrici). Per $E < 0$ le orbite tendono a iperboli che intersecano l'asse X , per $E > 0$ che intersecano l'asse P .

$$|E| = \frac{\omega X_0^2}{2}, X_0 = \sqrt{\frac{2|E|}{\omega}}$$

$T \approx -\frac{1}{\omega} \ln |E|$

(2.15)

Singolarità alla separatrice $|E| \rightarrow 0$.

Usando ancora le proprietà dei logaritmi, essendo 2 e ω fissati, nella somma di logaritmi teniamo solo il termine con $\ln|E|$. Troviamo che il periodo delle orbite nella buca del potenziale aumenta in maniera logaritmica con l'energia man mano che ci avviciniamo alla separatrice, cioè man mano che diminuisce la differenza di energia tra l'orbita e quella della separatrice- infatti $|\Delta E|$ misura la distanza dalla separatrice dato che ogni orbita è a energia costante. Il periodo tende a ∞ : origine dei moti caotici, ma la tendenza è lenta; se un sistema è regolare, prima di creare una situazione caotica dobbiamo perturbarlo molto. Nei pendoli veri non vediamo il moto caotico perché la singolarità che crea il caos è debole.

La radice non dà una singolarità quindi la trascuriamo; l'unica singolarità è data da $X_0 \rightarrow 0$, cioè va verso il punto iperbolico ($\ln(X_*)$ non dà nessun problema, perché X_* è un punto finito). X_* dipende dell'intorno scelto per applicare l'approssimazione, ed è fissato, mentre X_0 va verso l'origine, la separatrice. Un teorema afferma che esiste un intorno abbastanza piccolo tale che l'errore sulla traiettoria vera è controllabile.

Esempio 2.4.1. Pendolo

Scriviamo l'energia del pendolo. Identifichiamo il punto iperbolico: $\theta = \pi$ e sviluppiamo il potenziale vicino ad esso fino al secondo ordine.

$$H = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - k \cos \theta$$

$$\theta = \pi \quad \text{punto iperbolico} \quad \left. \frac{d^2}{d\theta^2} \right|_{\theta=\pi} -k \cos \theta = k \cos \pi = -k = -\omega^2$$

$$\Delta E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{k}{2}(\theta - \pi)^2$$

ΔE = differenza tra l'energia e quella del punto iperbolico. Il segno meno è perché siamo nel massimo.

$$\begin{cases} P &= \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\omega}} \\ Q &= (\theta - \pi)\sqrt{\omega} \end{cases} \quad \Delta E = \omega \frac{P^2 - Q^2}{2}$$

Con un cambio di variabili (da $\dot{\theta}$ e θ a P e Q) e la definizione di ω^2 (che consente di calcolare la divergenza del periodo vicino alla separatrice), ci riconduciamo al caso studiato.

Nota: Il metodo può essere applicato a qualsiasi potenziale. Sviluppiamo il potenziale nel punto iperbolico fino al secondo ordine. Inglobiamo la costante nell'energia \Rightarrow differenza di energia rispetto al punto iperbolico. Otteniamo che ΔE si scrive come energia cinetica - energia potenziale definita positiva quadratica. Identifichiamo la costante k (derivata seconda nel punto di massimo cambiata di segno) con ω^2 : è lo stesso ω che compare nella stima nel periodo (Eq. 2.15).

Il cambio di variabili ovviamente non ha effetto sul periodo: il tempo di percorrenza si può calcolare nelle variabili che si preferiscono, basta che le orbite siano in corrispondenza. Se la curva passa vicino a più punti iperbolici, la divergenza viene sommando quelle nei singoli tempi di percorrenza: abbiamo calcolato solo il contributo di un punto.

Moto sulla separatrice (pendolo)

$$E = k = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - k \cos \theta, \quad t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2k(1 + \cos \theta)}}$$

Ricordando che $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$, $k = \omega^2$, e ponendo $u = \frac{\theta}{2}$

$$t = \frac{1}{2\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\omega} \int_{u_0}^u \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{\omega} \int_{u_0}^u \frac{d \sin u}{1 - \sin^2 u} = \frac{1}{\omega} \int_{\sin(\theta_0/2)}^{\sin(\theta/2)} \frac{dw}{1 - w^2} = \operatorname{arctanh} w \Big|_{\sin(\theta_0/2)}^{\sin(\theta/2)} = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{1 + \sin \theta/2}{1 - \sin \theta/2} \Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

(ricordando che $\operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$).

Si ha $t \rightarrow \infty$ per $\theta \rightarrow \pi$.

Il pendolo dà integrali di tipo ellittico che non si calcolano in modo elementare, ma il moto si semplifica quando siamo esattamente sulla separatrice, cioè $E = k$. Abbiamo risolto per separazione delle variabili, integrando da $\theta = 0$ a π (valore alla separatrice). Singolarità del denominatore \Rightarrow il periodo va all'infinito. Questo calcolo esatto dice solo che il periodo diverge, ma non dice la dipendenza del periodo dalla differenza dall'orbita scelta alla separatrice in termini di energia, che è un'informazione dinamica più forte, e viene dal calcolo approssimato. Occorre un tempo infinito per raggiungere un punto iperbolico partendo da $\theta = 0$.

2.5 Variabili azione-angolo per sistemi 1D

Nascono per l'esigenza di sviluppare la teoria perturbativa, che ha mostrato che sono le variabili migliori per i calcoli perturbativi (es: variazione del moto della Luna attorno alla Terra -> variabili a.a. per il sistema Luna-Terra-Sole). Alle origini della meccanica quantistica: la prima quantizzazione di Bohr-Sommerfeld è partita da queste variabili. Hanno senso solo per studiare i sistemi nelle buche di potenziale: l'angolo non c'è per orbite non periodiche. Parleremo di variabili a.a. nelle vicinanze di un punto fisso ellittico, es. pendolo vicino al punto di stabilità.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad \text{nelle vicinanze di un punto ellittico}$$

Definizione 2.1. Definiamo azione

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint_{H=E} pdx = \frac{A(E)}{2\pi} \\ I &= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m(E-V(x))} dx \end{aligned}} \quad (2.16)$$

Definiamo l'azione come l'integrale di area della forma differenziale pdx su una curva chiusa ad energia costante $H = E$, diviso per 2π . $H = E$ definisce implicitamente la curva, di cui vogliamo calcolare l'area racchiusa. Variabili a.a. sono suggerite dalla struttura delle equazioni del moto che partono da quella di Newton. Sostituiamo al posto di p la sua espressione invertendo la formula dell'energia mettendo $H = E$ e calcoliamo l'integrale tra i punti di inversione, moltiplicando poi per 2.

Definizione 2.2. Definiamo angolo

$$\boxed{\theta = \frac{\partial}{\partial I} \int_{H=E}^X \sqrt{2m(E-V(x))} dx} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{dE}{dI} \frac{\partial}{\partial E} \int_{H=E}^X \sqrt{2m(E-V(x))} dx = \frac{dE}{dI} \int_{H=E}^x \frac{mdx}{\sqrt{2m(E-V(x))}} \\ \Rightarrow \boxed{\theta = \omega(E) \int_{H=E}^t dt} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\text{Dove } \frac{dA}{dE} = T(E) \Rightarrow \frac{dI}{dE} = \frac{T(E)}{2\pi} \Rightarrow \frac{dE}{dI} = \omega(E)$$

$\Rightarrow \theta$ è un angolo in quanto su un periodo $\Delta\theta = \omega(E)T(E) = 2\pi$.

La definizione di angolo viene dal volere trasformazioni di variabili con le stesse proprietà del flusso di fase, in particolare la conservazione della misura, cioè $\det(JT) = 1$ per sistemi 1d, come abbiamo sempre fatto. Così non alteriamo la conservazione della misura, proprietà dei sistemi dinamici. La variabile angolare è più intricata perché il cambio di variabile da p,x ad a.a. deve avere $\det JT = 1$ (in futuro dimostreremo che la definizione è corretta in maniera più furba che facendo i calcoli). Calcoliamo lo stesso integrale, non più su un ciclo completo, ma fino a un punto x , sempre su una curva di livello dell'energia $H = E$ (ci siamo già assicurati questo perché abbiamo parametrizzato la curva con x tenendo fissa E).

L'integrale, primitiva di $\sqrt{2m(E-V(x))}$, è funzione dell'estremo superiore x di integrazione. Essendo la curva chiusa, a ogni giro si ripercorrono gli stessi valori di x ; x può assumere solo valori contenuti nella curva $H = E$ che è limitata. Facciamo la derivata rispetto a I , ricordando che I è funzione di A , a sua volta funzione di E secondo l'Eq.2.16, che è invertibile. Infatti variando I variamo l'area in maniera monotona, da cui $E(I)$ invertendo la definizione di azione. Quindi l'integrale dipende sia da x che in modo implicito da I , perché $E = E(I)$. Derivata composta: deriviamo la funzione integranda rispetto a E , poi E rispetto a I .

Definiamo $\omega(E) = dE/dI$. Se al posto di p sostituiamo la sua definizione $p = m \frac{dx}{dt}$ poi facciamo la separazione di variabili a energia costante, troviamo che il differenziale nell'integrale è quello del tempo; perciò l'integrale esprime il tempo di percorrenza sull'orbita- curva $H = E$ - fino al punto x (partendo da un istante iniziale scelto arbitrariamente $t=0$).

Da $\frac{dA}{dE} = T(E)$ e $I = \frac{A(E)}{2\pi}$ segue che $\frac{dI}{dE}$ è l'inverso della frequenza media di percorrenza dell'orbita, quindi $\omega(E)$, che abbiamo definito $\frac{dE}{dT}$, è proprio la frequenza media. Per cui θ = frequenza media di percorrenza dell'orbita · tempo di percorrenza. Ricapitolando, l'azione è stata definita a priori in modo da usare la proprietà $dA/dE = T(E)$; di conseguenza la variabile angolare associata all'azione deve avere una certa definizione perché sia $\det JT = 1$. La variabile angolare evolve lungo l'orbita muovendosi di moto uniforme perché ω dipende solo dall'orbita cioè E . Ecco il suo vantaggio; mentre nelle variabili iniziali la curva NON era assolutamente percorsa a velocità costante. θ è effettivamente un angolo: la sua variazione su un periodo è 2π quando viene effettuato un giro dell'orbita: non era ovvio dalla definizione! Ecco perché abbiamo definito l'azione con il fattore $1/2\pi$, grazie a cui θ è un angolo. θ si adatta e cambia in maniera che l'orbita sia percorsa a velocità costante.

$\frac{dE}{dT}$ è singolare alla separatrice.

Infatti $dE/dI = \omega(E)$ che è legata al $1/\text{periodo}$, il quale diverge logaritmicamente (al denominatore).

Utilizzando le variabili azione angolo le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega(I) \end{cases} \quad \begin{cases} I(t) = I_0 \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega(I)t \end{cases} \quad (2.19)$$

Le variabili a.a. sono singolari sulla separatrice. L'area sottesa dalla separatrice è ben definita, ma non è ben definita la corrispondenza tra variabili iniziali e variabili a.a. perché JT ha una singolarità. Le variabili a.a. hanno il limite che si possono definire solo localmente sullo spazio delle fasi; se c'è una separatrice tra due zone limitate non si possono definire con continuità. L'integrazione dell'equazione del moto è banale usando le variabili a.a. Infatti I è costante: è funzione dell'energia, che è un integrale primo del moto \Rightarrow anche I è integrale primo. θ aumenta linearmente: infatti ω dipende solo dall'azione, cioè dal suo valore iniziale. La difficoltà dell'integrale del sistema è trovare le variabili a.a., quando è possibile, perché non tutti i sistemi sono integrabili. Per la maggior parte dei sistemi a più gradi di libertà non possiamo definirle: se ci proviamo troviamo delle singolarità, le quali però danno informazioni sulla dinamica del sistema e la natura di non integrabilità, traiettorie caotiche.

Curiosità:

- In un sistema integrabile come un pendolo il caos nasce in una regione di misura piccola. Sistema solare: sistema che può essere perturbato, ma se anche lo fosse l'effetto si potrebbe vedere solo con un tempo superiore all'età dell'universo.
- L'azione può essere definita solo per curve chiuse.

2.5.1 Pendolo forzato

$$H = \frac{p^2}{2} - k \cos \theta - f\theta \quad \ddot{\theta} = -k \sin \theta + f \quad (2.20)$$

Forza costante. Il prodotto $f\theta$ crea un termine di forzante nell'equazione di Newton nel pendolo semplice: lo spingiamo sempre dalla stessa parte. A livello dell'energia, viene rottata la periodicità (il termine $f\theta$ aumenta linearmente con θ) anche se l'equazione del moto resta periodica. Nello spazio delle fasi, siccome disegniamo le curve di livello dell'energia, dobbiamo tenere conto della non periodicità. Nel potenziale, alla funzione coseno si sovrappone una retta con coefficiente angolare $-f$. Annulliamo il gradiente del potenziale, che equivale ad annullare il campo vettoriale che genera l'equazione del moto. Regime: $\frac{f}{k} > 1$ cioè la pendenza è così elevata che le oscillazioni non riescono a creare punti estremanti locali. $\frac{f}{k} < 1$: massimi e minimi alternati.

Rappresentiamo lo spazio delle fasi (Fig.2.11). Massimi e minimi si alternano sull'asse di θ . In vicinanza dei minimi, punti ellittici: buche, l'energia è compresa tra il valore del minimo del potenziale e il valore massimo successivo (a destra), che dà l'energia della separatrice \Rightarrow orbite di tipo ellittico periodiche. A livello di un massimo, punto iperbolico, andando a sinistra c'è un punto di inversione (intersezione con il potenziale), mentre andando a destra l'orbita sarà illimitata. Partendo da un punto iperbolico- che è una soluzione, ci sono due tangent- si possono calcolare sviluppando il potenziale sul punto iperbolico e calcolando la derivata seconda. A sinistra: la separatrice gira attorno al punto ellittico, intersecando l'asse delle coordinate con tangenza verticale- soluzione che richiede un tempo infinito. Dal punto iperbolico partono altri due rami, una soluzione va verso $+\infty$, l'altro arriva da $-\infty$ verso il punto iperbolico. In entrambi i casi T aumenta perché la differenza tra il livello del massimo e quello dei minimi nelle buche di potenziale cresce, quindi l'orbita va all'infinito oscillando.

Il sistema ha invarianza per traslazione: lo spazio delle fasi si ripete, in modo che le separatrici di un anello contengano le curve che vanno all'infinito dell'anello successivo (a destra). Le curve che vanno all'infinito sono

PUNTI CRITICI DEL POTENZIALE SUD = $f/k < 1$

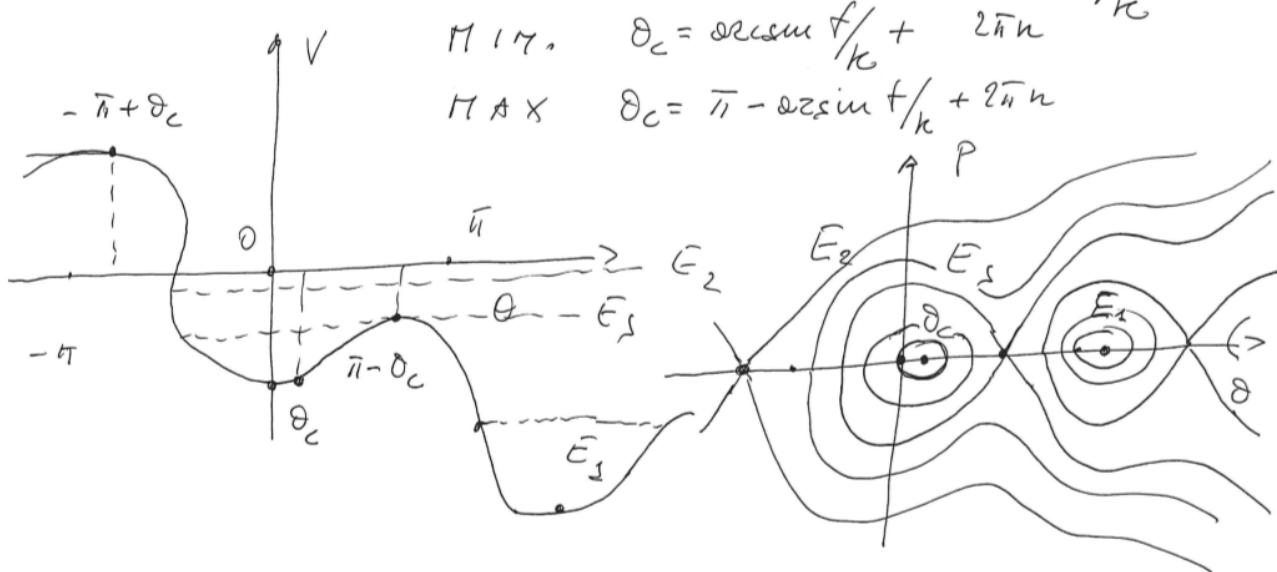


Figura 2.11: Potenziale e spazio delle fasi del pendolo forzato

diverse di volta in volta dato che sono diversi i livelli di energia.

Per $f \rightarrow 0$ si riottiene il pendolo, che aveva lo spazio delle fasi costituito da "occhi", in cui i punti iperbolici erano connessi dalla separatrice. Quindi l'aggiunta di una piccola forzatura, nel pendolo, crea uno sconquasso nello spazio delle fasi. Questo evidenzia che la struttura delle separatrici è delicata: quando si modificano i termini nell'energia, la struttura dello spazio delle fasi in vicinanza dei punti ellittici resta simile (oscillazioni attorno alla posizione stabile), mentre le separatrici sono cambiate profondamente- legato alla singolarità logaritmica di cui sopra. In presenza di perturbazioni, le separatrici sono le prime a cambiare: sono l'effetto di un equilibrio- infatti serve una condizione iniziale specifica per fare in modo che il pendolo faccia esattamente un giro completo tornando al punto di massimo. Separatrici: curve speciali, all'origine dell'instabilità strutturale dei sistemi, danno origine alle traiettorie caotiche.

E' il potenziale usato negli acceleratori circolari per accelerare i bunch di particelle: gruppi di particelle sono separati in gruppetti dentro le buche, simulato da un campo elettrico. Il sistema dinamico che descrive un fenomeno complicato come l'accelerazione di un bunch di particelle dentro una cavità di radiofrequenza dentro una macchina acceleratrice, ha le sue basi in un sistema 1d come il pendolo forzato.

CURIOSITÀ:

- La scelta del punto iniziale su cui faccio l'integrale è arbitraria, è come la scelta del tempo.
- Non è una coincidenza: è vero che possiamo calcolare le equazioni del moto sempre dalla forma di energia, perché stiamo usando variabili fatte apposta per questo- Hamilton fine '800. In generale è un integrale primo del moto, ma non un ingrediente fondamentale se non la riscriviamo in moto particolare. Variabili azioni angolo non si possono definire per sistemi dipendenti dal tempo, perché l'energia non deve dipendere dal tempo: le definiamo solo per la parte di energia che non dipende dal tempo. Equazioni lineari pdf Bazzani: altalena giusta. Arnold, Landau, ma la teoria perturbativa è in fondo, non c'è un testo specifico.
- Se l'hamiltoniana dipende dal tempo, non si possono definire le variabili azione angolo. Ma in questo caso non abbiamo definito le variabili a.a. per l'energia dipendente dal tempo, bensì per l'oscillatore armonico, indipendente dal tempo
- Se la curva è percorsa in senso antiorario, pdx è il differenziale di area, non c'è il segno meno.
- Oscillatore armonico: orbita percorsa in senso orario. Ma il senso antiorario è il senso positivo convenzionale, per la regola della mano destra, senso opposto della dinamica. Non è un problema la direzione. Basta che ci sia consistenza all'interno di una figura: una separatrice contraente e una dilatante. Essendo sistemi con reversibilità temporale, non c'è problema.

- Divergenza logaritmica del periodo. Regolarità di un sistema è legata all'esistenza delle variabili azione angolo: quando esistono i sistemi sono integrabili. Distruzione della regolarità delle variabili azioni angolo: introduciamo una singolarità, problema nelle trasformazioni di variabili. Il caos è indicatore della non integrabilità del sistema. Più debole è la singolarità più il caos nasce localmente, orbite caotiche confinate. È la singolarità che distrugge l'integrabilità del sistema. Prima di accorgerci della divergenza, nel caso del logaritmo, dobbiamo avvicinarci molto alla singolarità, rispetto a una singolarità polare.

2.6 Altalena

2.6.1 Risonanza parametrica

Altalena \sim pendolo; ci poniamo nell'approssimazione delle piccole oscillazioni perché ci interessa in particolare sapere perché alzando e abbassando le gambe riusciamo a partire da fermi. Noi siamo isolati sull'altalena. Infatti la tensione T del filo equilibra la forza di gravità, T è sempre normale alla traiettoria, quindi in linea di principio non può far lavoro: il filo dà reazione ortogonale alla circonferenza. Alzando e abbassando le gambe stiamo modulando la posizione del baricentro, che è il punto in cui applichiamo la forza di gravità: cambiamo la lunghezza del filo equivalente, e quindi la frequenza del pendolo alle piccole oscillazioni $\omega = \frac{g}{l}$. Quindi variamo in maniera parametrica e periodica il parametro che definisce la frequenza del pendolo alle piccole oscillazioni. Finora abbiamo visto problemi lineari a coefficienti costanti, con eventualmente una forzatura. Adesso il problema è sempre lineare - perché l'energia è una forma quadratica quindi l'equazione di Newton resta lineare- ma non è più costante perché c'è un parametro che dipende dal tempo. (Teoria di Mathieu sulle equazioni lineari è sulla soluzione di queste equazioni.) Cambiamo la posizione del centro di massa ma di poco: l'ampiezza della modulazione di ω , ε , è piccola, la variazione del cm è piccola rispetto alla lunghezza del filo \Rightarrow usiamo la teoria perturbativa. Il parametro di perturbazione ε (che nel calcolo della correzione al periodo del pendolo era legato alla distanza rispetto al punto ellittico) adesso esprime quanto siamo in grado di cambiare la posizione del centro di massa.

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega^2(1 + \varepsilon \sin \Omega t) \frac{x^2}{2} \quad (2.21)$$

Oscillatore armonico con frequenza variabile

(2.22)

Espandiamo il sistema rispetto al piccolo parametro e studiamo la prima correzione. All'ordine 0 in ε : oscillatore armonico. Quindi usiamo le variabili I e θ per l'oscillatore armonico e riscriviamo il sistema, sostituendo nell'energia. (In futuro impareremo a ricavare le equazioni del moto direttamente dall'energia).

$$\begin{cases} x &= \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \\ p &= \sqrt{2I\omega} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow H = I\omega \cos^2 \theta + \omega^2 \frac{I}{\omega} \sin^2 \theta (1 + \varepsilon \sin(\Omega t)) = I\omega + \varepsilon \omega \sin \Omega t I \sin^2 \theta$$

Esercizio 2.6.1. Date le equazioni di Newton in x e p

$$\begin{cases} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2(1 + \varepsilon \sin \Omega t)x \end{cases} \quad (2.23)$$

facendo il cambio di variabile $x(\theta, I), p(\theta, I)$, riscriverle per le variabili a.a. dell'oscillatore armonico I e θ . Queste equazioni permettono di applicare la teoria perturbativa.

Procediamo come avevamo già fatto per esercizio quando abbiamo calcolato la prima correzione per il periodo del

pendolo.

$$\begin{aligned}
\dot{I} &= \frac{\partial I}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I}{\partial p} \dot{p} \\
\dot{\theta} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \theta}{\partial p} \dot{p} \\
\frac{\partial I}{\partial x} &= \omega x & \frac{\partial I}{\partial p} &= \frac{p}{\omega} \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x\omega}{p}\right)^2} \frac{\omega}{p} & \frac{\partial \theta}{\partial p} &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{x\omega}{p}\right)^2} \frac{x\omega}{p^2} \\
\Rightarrow \dot{I} &= (\omega x)p + \left(\frac{p}{\omega}\right) (-\omega^2 x(1 + \varepsilon \sin \Omega t)) = \\
&= \omega \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \right) (\sqrt{2I\omega} \cos \theta) + \sqrt{2I\omega} \cos \theta \frac{1}{\omega} \left[-\omega^2 \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \right) (1 + \varepsilon \sin \Omega t) \right] = \\
&= \cancel{2I\omega \sin \theta \cos \theta} - \cancel{2I\omega \cos \theta \sin \theta} - 2I\omega \cos \theta \sin \theta \varepsilon \sin \Omega t \\
\Rightarrow \dot{\theta} &= \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x\omega}{p}\right)^2} \frac{\omega}{p} \right) p + \left(-\frac{1}{1 + \left(\frac{x\omega}{p}\right)^2} \frac{x\omega}{p^2} \right) (-\omega^2 x(1 + \varepsilon \sin \Omega t)) \\
&= \left(\frac{1}{1 + \left[\frac{\left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \right) \omega}{\sqrt{2I\omega} \cos \theta} \right]^2} \frac{\omega}{\sqrt{2I\omega} \cos \theta} \right) (\sqrt{2I\omega} \cos \theta) + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{1 + \left[\frac{\left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \right) \omega}{(\sqrt{2I\omega} \cos \theta)} \right]^2} \frac{\left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \right) \omega}{(\sqrt{2I\omega} \cos \theta)^2} \right) \left[-\omega^2 \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \right) (1 + \varepsilon \sin \Omega t) \right] \\
&= \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \frac{\omega}{\sqrt{2I\omega} \cos \theta} \right) (\sqrt{2I\omega} \cos \theta) + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \right) \omega}{(\sqrt{2I\omega} \cos \theta)^2} \right) \left[-\omega^2 \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \right) (1 + \varepsilon \sin \Omega t) \right] \\
&= \cos^2 \theta \omega + \left(-\frac{\sin \theta}{\sqrt{2I\omega} \cos^2 \theta} \right) \left[-\omega^2 \left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta (1 + \varepsilon \sin \Omega t) \right) \right] \\
&= \cos^2 \theta \omega + \omega \sin^2 \theta (1 + \varepsilon \sin \Omega t) = \omega + \omega \sin^2 \theta \varepsilon \sin \Omega t
\end{aligned}$$

Energia approssima il moto di un sistema con oscillazione che dipende dal tempo, periodicamente. Abbiamo le variabili a.a. del sistema che corrisponde all'ordine 0 in ε .

[Ricapitolando, abbiamo visto che la risonanza parametrica è un problema nuovo: non abbiamo una forzante esterna, ma il soggetto sull'altalena è isolato, perché l'unica forza che agisce è la gravità che è compensata all'equilibrio dalla reazione vincolare, che non fa lavoro. All'equilibrio muoviamo le gambe su e giù così spostiamo il baricentro \Rightarrow il punto di applicazione della forza di gravità, ma restiamo in verticale. E' una variazione (piccola) di un parametro: frequenza delle oscillazioni. Equazione lineare ma i coefficienti sono dipendenti dal tempo.]

Abbiamo visto che togliendo la perturbazione, cioè $\varepsilon = 0$, il sistema diventa l'oscillatore armonico, e abbiamo riscritto l'energia nelle variabili azione angolo del sistema imperturbato \Rightarrow equazioni del moto $\dot{\theta}$ e \dot{I} (ricavate per esercizio; alla fine del corso lo faremo più direttamente come $\frac{\partial H}{\partial I}$ e $-\frac{\partial H}{\partial \theta}$).

Equazioni del moto

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega + \varepsilon \omega \sin \Omega t \sin^2 \theta, & \varepsilon \ll 1 \\ \dot{I} = -2\varepsilon \omega I \sin(\Omega t) \sin \theta \cos \theta = -\varepsilon \omega I \sin(\Omega t) \sin(2\theta) \end{cases}$$

I termini in più rispetto a $\dot{I} = 0, \dot{\theta} = \omega$ sono dovuti alla perturbazione. Come calcolare correzioni all'ordine ε della soluzione (moto dell'angolo e dell'azione)? Fissiamo arbitrariamente $\theta_0 = 0$. Sostituendo all'interno dell'equazione del moto la soluzione di ordine 1 per θ , nella prima equazione il termine correttivo $O(\varepsilon)$ darebbe un effetto di ordine successivo, $\varepsilon^2 \Rightarrow$ basta mettere al posto di θ , ωt , che è la soluzione all'ordine 0. E analogamente per la seconda equazione:

Aampiezza \sim azione. Approssimando al primo ordine $\mathcal{O}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \omega t + \mathcal{O}(\varepsilon)(+\theta_0), \quad \theta_0 = 0 \\ \dot{I} &= -\varepsilon \omega I \sin \Omega t \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

Nel problema dell'altalena ci interessa sapere perché parte: quindi cosa succede all'ampiezza delle oscillazioni, non alla fase. Cioè ci interessa cosa succede all'azione $I = \frac{1}{2} p^2 / \omega + x^2 \omega$, collegata all'ampiezza in p e x rispetto all'origine, punto ellittico: conoscere l'azione permette di sapere se l'altalena parte o resta nell'intorno del punto ellittico. Consideriamo solo l'equazione del moto dell'azione. Ω è la frequenza con cui muoviamo le gambe. Usiamo la prostaferesi⁷.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln I &= \frac{+\varepsilon \omega}{2} (\cos(\Omega + 2\omega)t - \cos((\Omega - 2\omega)t)) \\ \ln I(t) - \ln I_0 &= \frac{+\varepsilon \omega}{2} \left[\frac{\sin(\Omega + 2\omega)t}{\Omega + 2\omega} - \frac{\sin(\Omega - 2\omega)t}{\Omega - 2\omega} \right] \end{aligned}$$

Attenzione: se partiamo dal punto fisso ellittico $I_0 = 0 \Rightarrow \ln I_0$ sarebbe infinito. Se siamo esattamente sulla posizione di equilibrio l'altalena non funziona: infatti ci diamo una piccola spinta da terra per partire (nella realtà partiamo anche se le gambe non toccano per terra, ma comunque sfruttiamo che l'altalena non sarà mai esattamente ferma). Quindi I_0 sarà piccolo ma non nullo $\Rightarrow \ln I_0$ è finito.

L'integrazione si può fare se il denominatore non si annulla: frequenza nulla \rightarrow stiamo integrando una costante \rightarrow il risultato è t. Il fattore 2 è dovuto al fatto di avere termini correttivi quadratici nelle equazioni del moto, che viene dal \sin^2 nell'energia- la variabile angolare entra a una potenza superiore dopo la perturbazione parametrica, non più linearmente.

Abbiamo quindi una soluzione periodica se $\Omega \neq \pm 2\omega$. Quindi

$$I(t) \approx I_0 \exp \frac{\varepsilon \omega}{2} f(t)$$

$f(t)$ è limitata \Rightarrow l'altalena non funziona

Risolvendo, l'esponenziale contiene funzioni periodiche \Rightarrow soluzione periodica. Cioè, se ε è piccolo, l'ampiezza si ripete e resta vicino a quella iniziale (siamo nella condizione in cui i denominatori sono di ordine 1 cioè non si annullano) \Rightarrow l'altalena non funziona, restiamo confinati in una regione limitata. Quindi se muoviamo le gambe in modo non consistente, con frequenza a caso, non riusciamo a partire. Lo abbiamo visto per la soluzione all'ordine 1; si dimostra che vale in generale.

⁷Prostaferesi:

$$\cos a + b = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos a - b = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

Vediamo ora il caso $\Omega = -2\omega$ (l'altro caso è analogo con il tempo invertito).

Se $\Omega = 2\omega$

$$\begin{aligned}\ln(I(t)) - \ln(I_0) &= \frac{\varepsilon\omega}{2}t - \frac{\varepsilon\omega}{2} \frac{\sin 4\omega t}{4\omega} \\ I(t) &\approx I_0 \exp \frac{\varepsilon\omega}{2}t\end{aligned}$$

risonanza parametrica \Rightarrow crescita esponenziale dell'ampiezza

Abbiamo un termine limitato che oscilla (che trascuriamo) e uno che cresce linearmente nel tempo (si annulla l'argomento del coseno \rightarrow integrazione di una costante). Risolvendo, abbiamo che l'ampiezza cresce esponenzialmente (ancora I_0 è piccola ma non 0). Ω è la frequenza con cui muoviamo le gambe, mentre ω è la frequenza dell'oscillatore imperturbato. Nella risonanza dovuta a una forzatura si aveva una crescita lineare: si era in grado di inserire energia nel sistema in modo che l'ampiezza crescesse linearmente. Nella risonanza parametrica invece si ha una crescita esponenziale (se ε è piccolo, possiamo fare un'approssimazione lineare all'inizio). Le risonanze parametriche generano instabilità esponenziale. In teoria dovremmo riespandere in ε la soluzione, perché ci siamo posti nella condizione $\varepsilon = 0$. L'instabilità esponenziale è estendibile a tutti gli ordini se controlliamo. Normalmente dato un sistema che al primo ordine in ε è limitato, è difficile affermare che sia per tutti gli ordini in ε , perché potremmo avere instabilità a ordini successivi che distruggono la stabilità. Se il sistema è già instabile all'ordine perturbativo, la crescita è dominante: i termini perturbativi successivi non riescono a compensare con cancellazioni infinito-infinito (se non casi costruiti ad hoc). La teoria perturbativa è usata per studiare sistemi reali, si usa per eliminare i termini instabili che vengono fuori dall'equazione del moto.

2.6.2 Caso con frequenza discontinua

$\Omega = 2\omega$ non è quello che facciamo perché quando muoviamo le gambe la frequenza è ω : il movimento mima l'oscillazione dell'altalena. Non introduciamo una perturbazione parametrica regolare nella realtà: moto discontinuo delle gambe \Rightarrow inseriamo in un'equazione che descrive la dinamica un processo discontinuo - cambio del cm in maniera rapida.

Le equazioni del moto si possono ricavare dall'energia scritta in forma opportuna. Per un integrale primo del moto qualunque, la derivata rispetto al tempo deve essere nulla, allora il gradiente deve essere ortogonale al campo. L'energia ci consente ANCHE di calcolare le equazioni del moto. Conoscenza dell'integrale primo del moto generico dice solo che è costante lungo le soluzioni. Per i sistemi 1d c'è un solo integrale primo del moto che è l'energia.

Da "Equazioni Lineari", pag 38.

Per un calcolo esplicito esatto della risonanza parametrica consideriamo l'equazione dell'oscillatore armonico modulato

$$\ddot{x} = -k(t)x$$

con k dipendente dal periodicamente dal tempo in modo discontinuo. Assumendo i valori $k_+ = \omega_+^2$ e $k_- = \omega_-^2$ in ogni intervallo τ , possiamo calcolare in modo esplicito la mappa di Poincaré $\Phi^{2\tau}$, ovvero la mappa che definisce l'evoluzione nello spazio delle fasi per un tempo 2τ corrispondente al periodo del sistema. Tenendo conto che $k(t)$ è costante in ogni intervallo τ , abbiamo

$$\Phi^{2\tau}(x, v) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_+\tau) & \frac{1}{\omega_+} \sin(\omega_+\tau) \\ -\omega_+ \sin(\omega_+\tau) & \cos(\omega_+\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_-\tau) & \frac{1}{\omega_-} \sin(\omega_-\tau) \\ -\omega_- \sin(\omega_-\tau) & \cos(\omega_-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

La stabilità dell'origine (soluzione di equilibrio per l'oscillatore armonico) si caratterizza con la condizione sulla traccia

$$\text{Tr } \Phi^{2\tau} = 2 \cos \omega_+ \tau \cos \omega_- \tau - \left(\frac{\omega_-}{\omega_+} + \frac{\omega_+}{\omega_-} \right) \sin \omega_+ \tau \sin \omega_- \tau < 2 \quad (2.25)$$

Studiamo la condizione 2.25 nel caso $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \epsilon$ con $\epsilon \ll 1$. Utilizzando la stima

$$\frac{\omega_-}{\omega_+} + \frac{\omega_+}{\omega_-} = 2 \frac{\omega_0^2 + \varepsilon^2}{\omega_0^2 - \varepsilon^2} \sim 2 \left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{\omega_0^2} \right)$$

la diseguaglianza 2.25 diventa

$$\cos(\omega_+\tau) \cos(\omega_-\tau) - \left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{\omega_0^2} \right) \sin(\omega_+\tau) \sin(\omega_-\tau)$$

$$= \left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{\omega_0^2}\right) \cos((\omega_+ + \omega_-)\tau) - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2} \cos((\omega_+ - \omega_-)\tau) < 1$$

All'ordine più basso in ε la condizione di stabilità porge, sviluppando

$$\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2}\right) \cos(2\omega_0\tau) - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2}(1 - 2\varepsilon^2\tau^2) < 1$$

nell'ipotesi $\varepsilon\tau \ll 1$. Osserviamo quindi che la scelta $2\omega_0\tau = 2\pi$ ovvero $\tau = \pi/\omega_0$, implica l'instabilità dell'origine in quanto

$$1 + \frac{2\varepsilon^4\tau^2}{\omega_0^2} > 1$$

La scelta di un periodo di perturbazione $2\tau = 2\pi/\omega_0$ pari al periodo dell'oscillatore armonico libero rende instabile l'origine a prescindere da ε ed una qualunque piccola oscillazione iniziale verrà amplificata in modo esponenziale.

Spostiamo le gambe in maniera discontinua $\Rightarrow k = \omega^2$ assume due valori ω^2+ – che cambiano in un intervallo τ in cui teniamo ferme le gambe, e il periodo è 2τ . Frequenza alta quando alziamo il baricentro, bassa quando lo abbassiamo. Equazione differenziale discontinua nel campo. Il flusso di fase è più potente del campo in sè. Integriamo un pezzo in cui teniamo la frequenza a ω_- , poi ω_+ . Abbiamo due pezzi di flusso di fase, che integra per τ l'oscillatore con ω_+ –. Costruiamo una soluzione che partendo dal tempo 0 dà la soluzione a 2τ componendo le due matrici del flusso di fase. Basta capire cosa succede alla composizione tra le due matrici per studiare l'altalena. Ciascuna matrice è la propagazione del flusso di fase per un tempo τ in cui teniamo fisse le gambe. Hanno determinante 1, quindi il prodotto degli autovalori anche della matrice prodotto è 1. Ci sono due possibilità:

1. i due autovalori sono reali, uno espande e uno contrae: abbiamo costruito un punto iperbolico. Se diagonalizziamo, la matrice è quella del moto iperbolico \Rightarrow il sistema diventa instabile e l'altalena parte;
2. due autovalori complessi coniugati come esponenziali immaginari puri, cioè il prodotto delle due matrici è un'oscillazione, moto periodico \Rightarrow costruiamo un sistema oscillatorio e otteniamo una soluzione periodica, e l'altalena non parte

Per sapere se gli autovalori sono reali o immaginari, se $\det = 1$, basta considerare la traccia del prodotto delle due matrici.

1. $x + 1/x > 2^8$
2. $e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2\cos\omega < 2$

Calcolare τ non è semplice perché l'equazione è trascendente. Consideriamo che variamo poco le frequenze \Rightarrow usiamo il parametro di perturbazione. Costruiamo una soluzione perturbativa rispetto al parametro ε . Vedi da eq 8.3 in poi. Quando muoviamo le gambe con la frequenza delle piccole oscillazioni del “pendolo” altalena, instabilità esponenziale. Crescita esponenziale dipende da ε^4 , non più epsilon, quindi più lenta, è meno efficiente (ma più naturale per noi).

Risonanza parametrica: lavatrici che camminano per la casa durante la centrifuga, meccanica celeste, acceleratori. Trasferimento energia da un grado di libertà a un altro. Il lavoro che facciamo muovendo le gambe, lo rendiamo energia cinetica. L'uso del flusso di fase semplifica il problema delle equazioni differenziali, in cui non sappiamo come trattare la discontinuità. Trasformazione che dà evoluzione per il periodo. Arnold: questo esempio come esercizio. Con la teoria perturbativa: studio a livello di equazioni differenziali. Movimenti discontinui anche quando si scia. Facciamo lavoro attraverso la gravità, spostiamo punto di applicazione della gravità. Ma chi trasferisce energia all'altalena? E' la reazione vincolare che fa lavoro sull'altalena: se restiamo con le gambe ferme, è diretta ortogonale alla traiettoria, ma quando alziamo le gambe, il movimento sposta la traiettoria del baricentro, semicerchio deformato \Rightarrow la reazione vincolare, diretta verso il centro, non è più ortogonale alla traiettoria del baricentro, e quindi fa lavoro.

La forza che fa lavoro sull'altalena, trasferendole energia, è la reazione vincolare. Diretta ortogonalmente alla traiettoria solo se restassimo con le gambe ferme. Quando alziamo le gambe, spostiamo la traiettoria del baricentro: il suo semicerchio è deformato. In quel momento la reazione vincolare, diretta verso il centro, non è più ortogonale alla traiettoria: la reazione vincolare fa lavoro.

Per una trattazione più completa vedasi il file "Equazioni differenziali lineari" su Physycom.

⁸ $x + 1/x \geq 2$, $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$

3 Coordinate generalizzate

3.0.1 Il problema del surfista

Si consideri un potenziale dipendente dal tempo, ovvero il sistema non è più isolato (e l'origine dei tempi non è arbitraria)

$$V(x, t) = V_0 \exp\left(-\frac{(x - v_a t)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\sigma = 1)$$

che diventa un'onda con picco $x = v_a t$ (una gaussiana che si muove a velocità costante v_a).

Si consideri un punto materiale ($m=1$) con condizione iniziale

$$x(0) = x_0 > 0 \text{ (l'onda deve ancora arrivare)} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Determinare l'evoluzione

$$\ddot{x} = -V_0 \frac{\partial}{\partial x} \exp\left(-\frac{(x - v_a t)^2}{2}\right)$$

$$H = \frac{\dot{x}^2}{2} + V_0 \exp\left(-\frac{(x - v_a t)^2}{2}\right)$$

Nota: La fisica è invariante per trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali. Scrivendo le equazioni del moto in una variabile specificata, la dipendenza dal tempo del potenziale può essere contenuta nelle equazioni. Le equazioni del moto sono una rappresentazione covariante dell'equazione di Newton, che è la vera legge invariante.

In questo caso ci stiamo muovendo di moto rettilineo uniforme rispetto al sistema del potenziale. Quando scriviamo le equazioni del moto, otteniamo una dipendenza esplicita rispetto al moto uniforme - il potenziale si muove nel tempo.

Siccome il potenziale contiene il tempo in maniera esplicita, non possiamo usare l'energia H come integrale primo del moto. L'utilizzo di H come integrale primo crea un vincolo nello spazio delle fasi, richiede di definire le curve di livello su cui stanno le soluzioni, ma come potremmo definire le curve di livello se c'è dipendenza temporale? Facciamo nell'equazione del moto un cambio di variabile che inglobi la dipendenza dal tempo, e costruiamo una nuova energia H' in y .

$x = y + v_a t$ cambio sistema di riferimento: ci mettiamo solidali all'onda

$$H' = \frac{\dot{y}^2}{2} + V_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad H' \neq H$$

$$\dot{y} = -V_0 \frac{\partial}{\partial x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Per il contributo cinetico H' sarà diversa da H - compare $\dot{y}v_a$ che non è costante. Quindi l'energia definita come $H = T + V$ NON è invariante per trasformazioni di sistemi galileiani (nonostante sia associata alla stessa dinamica). Le equazioni del moto nelle due variabili sono equivalenti; ma H mantiene la dipendenza del tempo mentre H' no, è integrale primo del moto e permette quindi di studiare il sistema più semplicemente. Dobbiamo capire più profondamente come si trasforma l'energia con cambi di variabile dipendenti dal tempo e associare all'energia il significato di funzione di Hamilton.

Condizione iniziale: $y(0) = x_0 \quad \dot{y}(0) = v_0 - v_a < 0$ (supponiamo che la velocità dell'onda sia molto maggiore di quella del surfista)

$$E'_0 = \frac{(v_0 - v_a)^2}{2} + V_0 \exp\left(-\frac{x_0^2}{2}\right) \simeq \frac{(v_0 - v_a)^2}{2}$$

$$\text{se } \frac{(v_0 - v_a)^2}{2} < V_0 \quad \text{il punto seguirà l'onda}$$

E'_0 energia iniziale, è costante: H' è un buon integrale primo del moto. Come si vede in figura 3.1, per un'energia

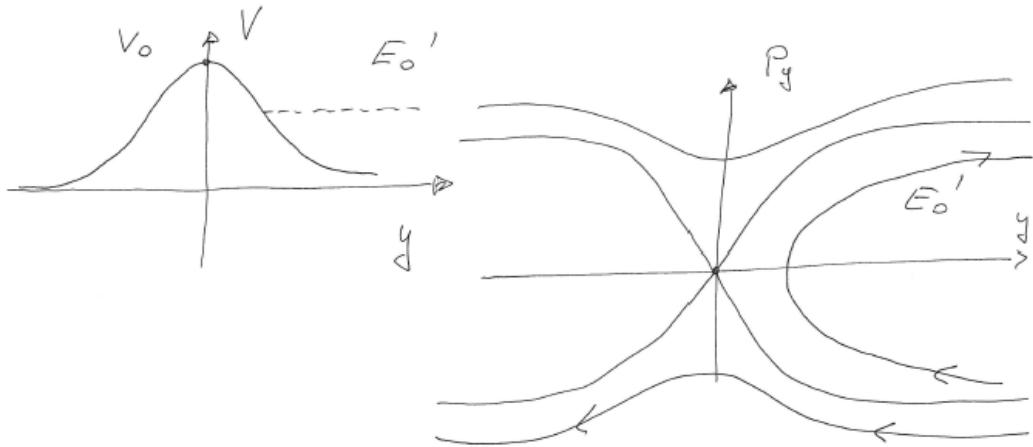


Figura 3.1: Spazio delle fasi per un potenziale gaussiano

iniziale minore di V_0 , massimo della gaussiana, c'è un punto di inversione: il punto arriva dall'infinito, curva e torna all'infinito. L'onda porta via con sè il punto. Se è uguale a V_0 , ci sono due rami di separatrice (quello che scende è contraente, quello che sale dilatante), connessi dal punto di equilibrio. Se è maggiore di V_0 , in corrispondenza di $y = 0$ c'è un'energia cinetica rimanente: il punto passa sopra l'onda e scende dall'altra parte, senza essere trascinato. Il caso 1 ricorda i surfisti che per prendere l'onda devono muoversi nello stesso verso dell'onda per diminuire $v_0 - v_a$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = -(v_0 - v_a) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = -v_0 + 2v_a$$

moto rettilineo uniforme: siccome il potenziale è limitato, la velocità è costante- è stata acquistata velocità doppia a quella dell'onda.

Nota: L'energia associata all'equazione del moto intesa come $K+U$ NON è un invariante rispetto a cambi di sistema galileiani dipendenti dal tempo. Se invece di fare la trasformazione di variabili sulle equazioni del moto, che sono i veri oggetti che definiscono la fisica, la facciamo a livello di energia, integrali primi del moto, allora sbagliamo: è l'equazione del moto ad essere invariante!!! In generale H e H' NON sono parenti. Solo DOPO aver fatto il cambio di variabili sulle equazioni del moto, per ciascuna equazione scriviamo l'integrale primo del moto. → Lagrange capì che l'invariante non è l'energia ma la lagrangiana. Hamilton dimostrò che si può ridefinire l'energia in modo che sia invariante: potenza della dinamica hamiltoniana.

3.1 Componenti controvarianti e covarianti, matrice metrica

Sia P punto dello spazio euclideo.

In quanto ente geometrico, esiste a priori dell'introduzione di coordinate, necessarie a individuarne la posizione in un sistema di riferimento.

$\vec{x}(P)$ sistema di riferimento cartesiano $\vec{x}(P) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $n =$ dimensione dello spazio.

Introduciamo delle nuove coordinate per esprimere la posizione P (in numero pari alle x : dimensione del sistema). q sono collegate con una trasformazione invertibile alle x .

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \beta \subset \mathbb{R}^N \text{ coordinate generalizzate per } P \quad \vec{x}(q_1, \dots, q_n)$$

Casi che vedremo: P punto dello spazio euclideo e le q ci permettono di riesprimere le x ($\vec{x}(\vec{q})$); oppure P punto di una varietà immersa in uno spazio di dimensione superiore - le entità geometriche che sono i punti della varietà (es: sfera) sono identificati da un sistema di coordinate cartesiane nello spazio a dimensione superiore, in cui i punti soddisfano un vincolo (es: R costante). Lo stesso formalismo basato sulla corrispondenza tra x e q permette quindi di descrivere non solo gli spazi euclidei ma superfici - varietà differenziabili immersibili in uno spazio euclideo.

Per affrontare la dinamica in coordinate generalizzate introduciamo il sistema di riferimento per vettori tangentи a

P

$$\boxed{\vec{e}_k(q) = \frac{\partial \vec{x}(q)}{\partial q_k} \quad \vec{x}(q) \equiv P} \quad (3.1)$$

Per una sfera lo spazio dei vettori tangenti è un piano, per lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 è lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 stesso: tutti i vettori che hanno origine in P sono tangenti a P. \vec{e}_k è associato a P essendo funzione delle coordinate generalizzate, le quali identificano P: origine in P.

$$\vec{e}_k(q) \text{ è una base perché } \det \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q} \right| \neq 0$$

per definizione di sistema di coordinate: la trasformazione tra \vec{x} e \vec{q} deve essere invertibile

Perché vettori tangenti? $q = q(t)$; se t varia $\Rightarrow q$ varia $\Rightarrow x$ varia \Rightarrow la posizione di P varia cioè costruiamo una curva nello spazio. La derivata rispetto al parametro di percorrenza alla curva \vec{x} definisce la tangente alla curva: v_P è rappresentante dei vettori tangenti al punto P. Con la derivazione composta vediamo che \vec{v}_P , quindi qualunque vettore tangente a P, si esprime come combinazione lineare dei vettori $\vec{e}_k(q)$

$$\begin{aligned} P(t) &= \vec{x}(t) = \vec{x}(q(t)) \text{ curva con parametrot} \in [a, b] \\ \vec{v}_P &= \frac{d\vec{x}}{dt}(q) \text{ vettore tangente a P} \\ \vec{v}_P &= \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \sum_k \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \sum_k \dot{q}_k \vec{e}_k(q) \\ \dot{q}_k &\text{ componenti generalizzate controvarianti della velocità} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Calcolo del modulo della velocità (dove si usa la convenzione di Einstein)

$$(\vec{v}_P \cdot \vec{v}_P) = \|\vec{v}_P\|^2 = \dot{q}_k \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} \right) \dot{q}_h = \dot{q}_k (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_h) \dot{q}_h = \dot{q}_k G_{kh} \dot{q}_h$$

Definizione 3.1. Matrice metrica $G_{kh}(q)$, simmetrica e definita positiva

$$G_{kh}(q) = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_h = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} \quad (3.3)$$

Describe la geometria dello spazio: calcolo delle lunghezze. E permettendo di calcolare il modulo della velocità, entra nella definizione di energia cinetica. Collegamento tra proprietà geometriche e dinamiche.

Definizione 3.2. Energia cinetica

$$T = \frac{m}{2} \|\vec{v}_P\|^2 = \frac{m}{2} \sum_{k,h} \dot{q}_k G_{k,h}(q) \dot{q}_h \quad (3.4)$$

Componenti covarianti di un campo vettoriale

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}(q)) \quad \vec{F} \text{ tangente al punto x e funzione regolare}$$

$$F_k = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} = \vec{F} \cdot \vec{e}_k \text{ componente covariante}$$

Componenti controvarianti di un vettore: coefficienti dell'espansione in una base. In un cambio di basi trovano applicando la matrice inversa. Componenti covarianti: prodotto scalare del vettore per la base. Sono definite negli spazi dotati di prodotto scalare: proiezione del vettore sul vettore di base, o dove c'è il duale. Cambiano da una base all'altra con la matrice di cambio di base.

Relazione con le componenti controvarianti (con la convenzione di Einstein):

$$\vec{F} = \sum_k F^k \vec{e}_k \Rightarrow F_h = \vec{F} \cdot \vec{e}_h = \sum_k F^k (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_h)$$

da cui $F_h = F^k G_{kh}$ con G matrice metrica. Se $G = I$ identità significa che la base è ortonormale: componenti covarianti e controvarianti coincidono

3.2 Rappresentazione intrinseca

3.2.1 Lunghezza di una curva

Definizione 3.3.

$$\begin{aligned} \gamma : t \in [a, b] &\rightarrow P \in E_h \\ L(\gamma) &= \int_a^b \|\vec{v}_p\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{q}_k G_{kh}(q) \dot{q}_h} dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

$ds = \sqrt{\dot{q}_k G_{kh}(q) \dot{q}_h} dt$ differenziale (o elemento) di lunghezza d'arco

$L(\gamma) = \int_\gamma ds$ questa scrittura evidenzia che la lunghezza è una proprietà della curva, invariante per cambiamento di coordinate.

3.2.2 Curvatura, accelerazione tangenziale e centripeta

$\hat{v} = \frac{d\vec{x}}{ds}$ versore tangente alla curva

$$\hat{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{ds} \quad \text{ma} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{q}_k G_{kh}(q) \dot{q}_h} = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| \Rightarrow \|\hat{v}\| = 1$$

$$\frac{d\hat{v}}{ds} \perp \hat{v}, \text{ infatti dato che } \hat{v} \cdot \hat{v} \text{ è costante, } 0 = \frac{d\hat{v} \cdot \hat{v}}{ds} = 2 \frac{d\hat{v}}{ds} \cdot \hat{v}$$

Poniamo

$$\frac{d\hat{v}}{ds} = \frac{1}{\rho} \hat{n} \quad \hat{n} \text{ normale principale, } \rho \text{ curvatura}$$

In \mathbb{R}^3 la definizione di normale a una curva sarebbe incerta perché dato un vettore tangente alla curva lo spazio ortogonale al vettore è un intero piano. Quindi il modo in cui percorriamo la curva sceglie un vettore tra tutti i vettori ortogonali al vettore tangente per ottenere il piano del cerchio osculatore. Introduciamo adesso una dinamica e osserviamo che tale vettore è scelto con un significato dinamico preciso:

$$\begin{aligned} \vec{x}(q) &\text{ posizione,} & \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} &\text{ velocità,} & \frac{d\vec{v}}{dt} &\text{ accelerazione, con } \vec{v} = v\hat{v}, v = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{dv}{dt} \hat{v} + v \underbrace{\left(\frac{ds}{dt} \right)}_v \frac{d\hat{v}}{ds} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dt} \hat{v} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n} \end{aligned} \quad (3.6)$$

accelerazione tangenziale e centripeta.

tangenziale: legata alla variazione del modulo della velocità del punto lungo la curva. centripeta: legata alla variazione della direzione della velocità; varia localmente con il raggio di curvatura e con v^2 quindi l'energia cinetica. E' l'accelerazione a cui il punto è soggetto per il fatto di stare sulla curva. L'introduzione di un oggetto geometrico come il parametro lunghezza d'arco consente di distinguere in maniera naturale tra accelerazione tangenziale e centripeta. Se non siamo su una retta - dove la curvatura è infinita, un vincolo o forza esterna deve fornire l'accelerazione centripeta altrimenti il punto non potrebbe restare sulla curva.

Esempio 3.2.1.

$$\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{x}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = a \frac{t^2}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{tangente} \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = (1, at) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{y}}{\partial t} \right)$$

$$\text{parametro lunghezza d'arco} \quad ds = \sqrt{1 + a^2 t^2} dt \quad \Rightarrow \quad L(A, B) = \int_A^B ds = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 + a^2 t^2} dt$$

$$\hat{v} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = (1, at) \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \quad \text{versore tangente}$$

Calcolo curvatura su una curva piana

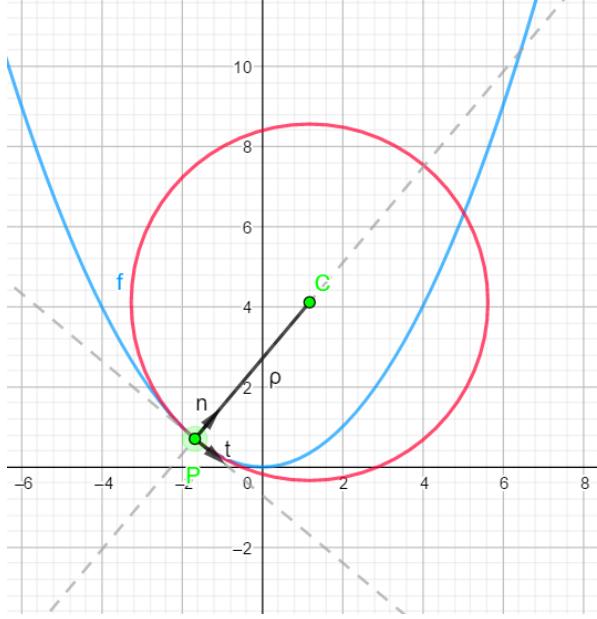


Figura 3.2: Cerchio osculatore per una parabola $y = a\frac{x^2}{2}$ con $a = \frac{1}{2}$.

$$\frac{d\hat{v}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2t^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2t^2}} \right) (1, at) + \frac{1}{(1+a^2t^2)} (0, a) = \frac{1}{\rho} \hat{n}$$

Parametrizziamo la parabola sul piano. Questo è un caso particolare in cui riusciamo a fare l'integrale della lunghezza, con funzioni iperboliche.

Per trovare la curvatura, deriviamo il versore tangente rispetto alla lunghezza d'arco (con la regola del prodotto). Essendo sul piano, sappiamo che \hat{n} è ortogonale a \hat{t} (versore della velocità), e diretto dalla parte della concavità: basta scambiare le componenti, e cambiare il segno di at per metterlo dalla parte interna. Se invece fossimo in \mathbb{R}^3 dovremmo fare tutti i conti. (Verifica per esercizio.) Quindi

$$\text{sul piano } \hat{n} = \frac{(-at, 1)}{\sqrt{1+a^2t^2}} \perp \hat{t}$$

Per trovare l'inverso di ρ , che è la proiezione di $\frac{d\hat{v}}{ds}$ lungo \hat{n} basta considerare un pezzo dell'espressione, perché il primo è ortogonale a \hat{n} .

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\hat{v}}{ds} \cdot \hat{n} = \frac{1}{(1+a^2t^2)^{\frac{3}{2}}} a \Rightarrow \rho = \frac{(1+a^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{a}$$

Vediamo che il raggio di curvatura è minimo nell'origine, e tende all'infinito per x che tende all'infinito: la parabola è approssimabile con una retta. Dal punto P , seguendo la normale principale per una distanza pari a ρ troviamo il centro del cerchio osculatore:

$$\vec{OC} = \vec{OP} + \vec{PC} = \left(t, \frac{at^2}{2} \right) + \frac{(1+a^2t^2)}{a} (-at, 1), \text{ dove } \vec{PC} = \rho \hat{n}$$

L'equazione del cerchio è una curva tangente alla parabola nel punto P e la approssima all'ordine 2. Un punto materiale sulla parabola a velocità costante v_0 ha accelerazione:

$$\vec{a}_c = \frac{v_0^2}{\rho} \hat{n} = \frac{v_0^2 a}{(1+a^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{(-at, 1)}{\sqrt{1+a^2t^2}}$$

Tale accelerazione è prodotta da una reazione vincolare o una forza esterna.

3.2.3 Rette come curve geodesiche

Definizione 3.4. Rette

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{caratterizza le rette}$$

Aggiungendo l'informazione del principio di inerzia

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 &\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \text{costante: moto rettilineo uniforme} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 &\quad \text{rette con } t \propto \text{parametro lunghezza d'arco} \end{aligned}$$

Definizione 3.5. Geodesiche

Sono curve estremali della lunghezza

$$L(\gamma_{AB}) = \underbrace{\int_A^B ds}_{\text{minima su una retta}}$$

Concetto dinamico: punto materiale isolato, in spazio omogeneo, isotropo \Rightarrow moto rettilineo uniforme. Il moto di tale punto definisce la retta (con in più l'informazione sulla velocità costante). In uno spazio euclideo la traiettoria percorsa dal punto è una retta secondo la nostra intuizione.

Più in generale introduciamo il concetto geometrico di curva geodesica. Presi due punti A, B nello spazio generico e una qualunque curva γ_{AB} che li connette, si dice geodesica quella per cui L è la minore possibile. Le possiamo esprimere in qualunque parametro dato che la lunghezza non ne dipende. L si calcola con la matrice metrica, il prodotto scalare. Costruiamo tutti gli integrali e consideriamo il minimo (dimostrando che esiste, il massimo no). Negli spazi euclidei la curva di minima lunghezza tra A e B è la retta. (Principio di Fermat: un raggio di luce minimizza non L ma il tempo di percorrenza). Corrispondenza tra moto rettilineo uniforme che definisce la retta, e curva geodesica che definisce la curva estremale della lunghezza. In relatività generale si ha che i raggi di luce seguono le geodesiche: la gravità cambia la metrica. Usando il concetto di metrica in 4d possiamo riformulare la gravità compatibilmente con l'equazione di Newton.

Come facciamo a definire una retta dal punto di vista fisico? Deve essere nulla la proiezione dell'accelerazione lungo la normale principale, cioè l'accelerazione centripeta: ρ deve essere infinito. Se non ci sono F_{est} : moto rettilineo uniforme per inerzia. E' un modo più formale rispetto all'esperimento per definire un'equazione differenziale che definisce la retta.

Punto di vista dinamico: rette, geometrico: geodesiche. Attenzione: in questo modo potremmo avere accelerazione tangenziale: variare il modulo della velocità non cambia la geometria. Invece dalla fisica sappiamo che il moto rettilineo deve essere anche uniforme quindi il modulo di v non cambia \Rightarrow il tempo che usiamo per definire il moto inerziale, è proporzionale alla lunghezza d'arco. Perché se il vettore \vec{v} è costante (sia direzione che modulo), lo spazio percorso è direttamente proporzionale al tempo. La dinamica caratterizza non solo le rette con l'equazione di Newton ma anche il tempo come parametro proporzionale alla lunghezza stessa.

3.3 Accelerazione in coordinate generalizzate

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \right) = \sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} + \sum_{k,h} \dot{q}_k \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_h$$

Abbiamo due contributi: un'accelerazione perché le $q_k(t)$ variano nel tempo e un'accelerazione dovuta al cambiamento della base $\vec{e}_k(q(t))$

Componenti covarianti dell'accelerazione

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_j = \sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} + \sum_{k,h} \dot{q}_k \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_k \partial q_h} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \dot{q}_h = \quad (3.7a)$$

$$= \sum_k \ddot{q}_k G_{kj} + \sum_{k,h} \dot{q}_k \dot{q}_h \left[\frac{\partial}{\partial q_h} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_h \partial q_j} \right] = \quad (3.7b)$$

$$= \left(\sum_k \ddot{q}_k G_{kj} + \sum_{k,h} \dot{q}_k \dot{q}_h \frac{\partial}{\partial q_h} G_{kj} \right) - \sum_{k,h} \dot{q}_k \dot{q}_h \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} G_{kh} \right) = \quad (3.7c)$$

$$= \left(\sum_k G_{jk} \frac{d\dot{q}_k}{dt} + \sum_k \dot{q}_k \frac{d}{dt} G_{jk} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k,h} \frac{\partial (\dot{q}_h G_{hk} \dot{q}_k)}{\partial q_j} = \quad (3.7d)$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \sum_k G_{jk} \dot{q}_k \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k,h} (\dot{q}_h G_{hk} \dot{q}_k) = \quad (3.7e)$$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_j = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \frac{1}{2} \sum_{k,h} \dot{q}_h G_{hk} \dot{q}_k \quad (3.7f)$$

$$\Rightarrow \boxed{m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_j = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \frac{m}{2} \|\vec{v}\|^2} \quad (3.7g)$$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}$ operatore di Lagrange. L'accelerazione in componenti covarianti è composta da due termini, che Lagrange intuì essere collegati: (eq. 3.7a):

- il primo contiene la componente generalizzata della velocità (proiettata sulla nuova base), cioè un'accelerazione;
- nel secondo vi è la derivata seconda delle coordinate di partenza (cartesiane) rispetto a quelle generalizzate. Non contiene accelerazioni: è una forma quadratica che contiene solo le velocità ed è legato al fatto che la base sia associata al punto. Siccome questo si muove, la base cambia, con una trasformazione lineare di base \Rightarrow cambiano le componenti. Quindi questo termine non è presente in coordinate cartesiane, che sono sempre parallele a se stesse.

Riconosciamo al primo termine la matrice metrica e al secondo un termine della derivata di un prodotto- scambiando h e k (eq. 3.7b). Al passaggio 3.7c, oltre a mettere in evidenza la matrice metrica, osserviamo che la terza espressione, essendo invariante per cambio di indici su cui sommiamo, possiamo pensarla come derivata rispetto a q_j del prodotto $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h}$, divisa per 2. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_j \partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_j \partial q_h} \right] = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_h \partial q_j}$$

e aver riconosciuto al passaggio 3.7d la derivata composta come derivata temporale rispetto alla matrice metrica, ci consente al passaggio 3.7e di evidenziare la derivata temporale del prodotto $G_{jk} \dot{q}_k$. Inoltre, sempre alla 3.7d, la derivata formale rispetto alle coordinate q_j lascia invariate le velocità \dot{q}_h, \dot{q}_k (non sono da intendersi come quantità fisiche collegate ma simboli diversi, indipendenti: si veda la nota). Ciò serve a evidenziare $\|\vec{v}\|^2$. Osserviamo che $G_{jk} \dot{q}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\dot{q}_h G_{hk} \dot{q}_k)$, cioè effettuiamo una derivata formale rispetto a \dot{q}_j (eq. 3.7f, analogamente a quanto fatto rispetto a q_j nell'eq. 3.7c).

L'espressione è svincolata dalle coordinate cartesiane di partenza. In un generico spazio, in un qualunque sistema di coordinate, possiamo scrivere l'equazione di Newton in forma covariante- basta conoscere G associata allo spazio delle configurazioni (le proprietà geometriche dello spazio sono definite dalla metrica). La componente covariante di \vec{a} - cioè \vec{a} proiettata lungo e_j - moltiplicata per m , è il risultato dell'operatore di Lagrange applicato all'energia cinetica T . Le componenti covarianti di \vec{a} sono ricavabili direttamente da T ! Possiamo avere un più ampio campo di applicazione: possiamo inserire la meccanica nella geometria differenziale.

Equazione di Newton in forma covariante

$$m\vec{a} \cdot \vec{e}_j = \vec{F} \cdot \vec{e}_j = Q_j \quad T = \frac{m}{2} \|v\|^2 \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) T = Q_j \quad (3.9)$$

componente generalizzata, o covariante, della forza, può essere funzione di q e \dot{q}

Nota: Quando scriviamo l'equazione in forma covariante, non abbiamo dato un significato a q e \dot{q} legato all'equazione differenziale ma li abbiamo maneggiati come simboli. Risentono delle libertà delle condizioni iniziali richieste per fissare la traiettoria, sulla posizione e sulla velocità: sono arbitrarie, indipendenti, rispecchiano che q e \dot{q} sono espressioni di qualcosa che contiene due variabili indipendenti. Quando scriviamo formalmente la forma covariante li trattiamo come simboli diversi. Solo quando interpretiamo la scrittura come equazione differenziale, diamo significato a q , \dot{q} e \ddot{q} come funzioni del tempo che sono l'una la derivata dell'altra. In realtà nel ricavare l'equazione c'è un punto in cui identifichiamo \dot{q} come la derivata fatta rispetto al tempo, ma è un'eguaglianza formale: la calcoliamo alla fine.

3.4 Curve geodesiche (rette)

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) T = 0 \quad \text{forma covariante} \quad (3.10)$$

t = tempo \propto parametro lunghezza d'arco

$$T = \frac{m}{2} \|v^2\| = E \text{ integrale primo del moto per conservazione energia}$$

Nella visione geometrica, l'equazione 3.10 definisce le curve geodesiche dello spazio, in forma covariante (c'è anche una forma controvariante- geometria differenziale); la lunghezza della curva che connette due punti è la minima possibile. Negli spazi euclidei le curve geodesiche sono le rette. Nella visione dinamica, le rette sono le traiettorie associate al moto di un punto materiale non soggetto a forze, isolato, in uno spazio omogeneo e isotropo: moto rettilineo uniforme, soluzione dell'equazione di Newton quando $Q = 0$. Vista come equazione dinamica t è il parametro tempo; l'interpretazione geometrica è che, risolvendo il moto del punto, t è proporzionale alla lunghezza d'arco: moto rettilineo uniforme \Rightarrow spazi uguali percorsi in tempi uguali (lunghezza d'arco = spazio percorso). v è costante $\Rightarrow T$ dev'essere un integrale primo del moto. Infatti non ci sono forze \Rightarrow non c'è potenziale \Rightarrow l'unica energia è cinetica, che si conserva. Verifichiamo la conservazione dell'energia:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \sum_{k,h} \dot{q}_k G_{kh} \dot{q}_h \right) = m \sum_{k,h} \ddot{q}_k G_{kh} \dot{q}_h + \frac{m}{2} \sum_{k,h,j} \dot{q}_k \frac{\partial G_{kh}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_h = \dots$$

Nota: al posto di svolgere tutti i calcoli, riconosciamo: $T = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - T$ forma quadratica omogenea

Infatti essendo una funzione omogenea di grado 2 delle \dot{q}_j , derivando rispetto a \dot{q}_j otteniamo 2 volte la funzione stessa \Rightarrow togliamo T per riottenere T

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T &= \frac{d}{dt} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - T = \sum_j \left(\ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \\ &= \sum_j \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j = 0 \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo usato che $T = T(q, \dot{q})$: oltre alla dipendenza esplicita da \dot{q} , c'è dipendenza implicita da q contenuta nella matrice metrica; il risultato è nullo perché le equazioni di Lagrange sono soddisfatte: siamo sulle soluzioni del moto

3.5 Equazione di Newton in coordinate polari

$$P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$$

$$G = \begin{pmatrix} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r & \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r & \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m}{2} \|v^2\| = \frac{m}{2} (\dot{r} \quad \dot{\theta}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)$$

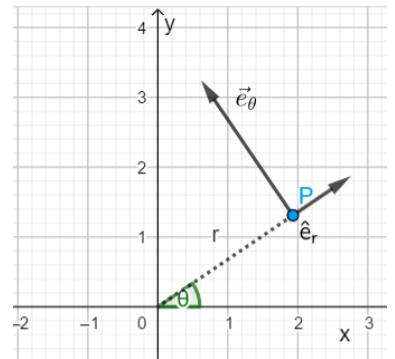


Figura 3.3: Versori in coordinate polari piane.

Mentre le coordinate cartesiane sono definite ovunque sul piano: c'è un'applicazione biunivoca tra i punti del piano (lo spazio vero delle configurazioni vero, euclideo) e i numeri reali x, y . In coordinate polari invece l'origine è un punto singolare perché θ può avere un valore qualunque: tutti i punti di $[0, 2\pi]$ per $r = 0$ corrispondono a un unico punto del piano. Le coordinate polari ricoprono tutto il piano tranne un punto: sono "locali", a differenza delle coordinate cartesiane. Non è un problema: a noi interessa solo un pezzo.

Base associata alle coordinate per descrivere qualunque v di una curva che passa per un punto P . Facendo la derivata di \vec{x} rispetto a r e θ otteniamo i vettori di base: \hat{e}_r è un versore, \vec{e}_θ è ruotato in senso antiorario di 90 gradi, è un vettore di modulo r , NON è un versore. Trasformazione conforme: i due vettori che otteniamo sono ortogonali (legame con la teoria delle funzioni analitiche).

Costruiamo la matrice metrica. I termini della diagonale secondaria sono 0 in quanto \hat{e}_r e \vec{e}_θ sono ortogonali. Quando $r = 0$ diventa singolare: è un punto singolare della trasformazione di coordinate da cartesiane a polari. Non abbiamo cambiato la geometria associata alla metrica: è sempre euclidea. Ma nelle coordinate generalizzate la matrice metrica dipende dalle coordinate (in questo caso da r ma non θ).

Quanto valutiamo v^2 dobbiamo mantenere l'ordine di r e θ tra la matrice metrica e l'ordine in cui mettiamo \dot{q} (devono tornare le dimensioni). Prima riga: r , seconda: θ , deriviamo prima rispetto a r poi a θ .

I due vettori della base NON devono per forza avere la stessa dimensione fisica (\hat{e}_r adimensionale, \vec{e}_θ di una lunghezza), le dimensioni tornano alla fine quando moltiplichiamo per la matrice metrica per trovare v^2 .

NB: le coordinate sono singolari nell'origine.

Equazioni del moto.

Scriviamo le equazioni del moto in forma covariante. Il termine $\frac{dT}{d\theta} = 0$ perché non compare esplicitamente θ : $mr^2\dot{\theta}$ resta costante lungo il moto: integrale primo del moto, è il momento della quantità di moto. Un punto isolato che si muove conserva il momento della quantità di moto. La forma covariante dà due equazioni.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{d}{dt} (mr) - m\dot{r}^2 = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Verifica. Partendo dall'equazione del moto in forma cartesiana, proiettiamo $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m(\ddot{x}, \ddot{y})$ sui 2 vettori della nuova base. Dobbiamo verificare che riotteniamo le equazioni sopra scrivendo \ddot{x} e \ddot{y} in coordinate polari (che calcoliamo partendo dalla definizione di x e y). Ma il primo metodo (calcolare T attraverso G e applicare l'operatore di Lagrange, facendo derivazione simbolica rispetto a q e \dot{q}) va bene per tutte le coordinate (es: ellittiche). Il secondo metodo, diretto, no: dobbiamo prima scrivere le quantità in coordinate cartesiane, poi fare il cambio variabili, e facciamo molti più calcoli.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_r = m(\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta)$$

$$\dot{x} = \dot{r}(\cos \theta, \sin \theta) + \dot{\theta}(-r \sin \theta, r \cos \theta)$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}(\cos \theta, \sin \theta) + \ddot{\theta}(-r \sin \theta, r \cos \theta) + \cancel{r \frac{\partial}{\partial r}(\cos \theta, \sin \theta) \dot{r}} + \dot{\theta}^2 \frac{\partial}{\partial \theta}(-r \sin \theta, r \cos \theta) +$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta, \sin \theta) + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial r} (-r \sin \theta, r \cos \theta) \dot{r} = \\
& = \ddot{r}(\cos \theta, \sin \theta) + \ddot{\theta}(-r \sin \theta, r \cos \theta) + \dot{\theta}^2(-r \cos \theta, -r \sin \theta) + 2\dot{r}\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta) \\
& \Rightarrow m[(\ddot{r} \cos^2 \theta - \ddot{\theta} r \sin \theta \cos \theta - \dot{\theta}^2 r \cos^2 \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) + \\
& + (\ddot{r} \sin^2 \theta + \ddot{\theta} r \cos \theta \sin \theta - \dot{\theta}^2 r \sin^2 \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta)] = \\
& = m[\ddot{r}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \dot{\theta}^2 r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] \\
& \Rightarrow \boxed{m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_r = m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r = 0} \\
& m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_\theta = m(-\ddot{x}r \sin \theta + \ddot{y}r \cos \theta) = \\
& = m[-\ddot{r}r \cos \theta \sin \theta + r^2 \ddot{\theta} \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} r \sin^2 \theta + \\
& + \ddot{r}r \sin \theta \cos \theta + r^2 \ddot{\theta} \cos^2 \theta - r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} r \cos^2 \theta] = \\
& = m[\ddot{\theta}r^2 + 2\dot{r}\dot{\theta}r] = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \\
& \Rightarrow \boxed{m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})}
\end{aligned}$$

Nota: $\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ quantità di moto radiale

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ momento della quantità di moto

$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = L$ integrale primo del moto, per il moto di un punto isolato sul piano

La derivata di T rispetto alle componenti generalizzate della velocità produrrà sempre un momento (p, L, \dots) \Rightarrow introduciamo i momenti come nuove coordinate per riscrivere le equazioni della meccanica analitica.

L è un integrale del moto per il moto di un punto materiale su un piano in assenza di forze. Due equazioni del moto al secondo ordine in 2 variabili, ma una si riduce all'esistenza dell'integrale primo del moto L che assume un valore che dipende solo dalle condizioni iniziali. Sostituendo nella prima equazione l'espressione di $\dot{\theta}$, che ricaviamo da L nella seconda, otteniamo un'equazione di una singola variabile. E' un'equazione di Newton di un sistema a 1 grado di libertà nella variabile radiale ($m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}$) \Rightarrow c'è un integrale primo del moto associato, un'energia efficace (unidimensionale) associata all'equazione (radiale) della dinamica.

$$\begin{aligned}
m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= 0 \quad mr^2\dot{\theta} = L \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \\
m\ddot{r} - mr \frac{L^2}{m^2r^4} &= 0 \quad m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} \quad \text{equazione di Newton radiale}
\end{aligned}$$

Energia associata

$$\begin{aligned}
E &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} \\
dt &= \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{L^2}{2mr^2})}}, \quad t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{L^2}{2mr^2})}}
\end{aligned}$$

Ponendo $u = \frac{1}{r}$, $du = -\frac{1}{r^2}dr$, $dr = -\frac{1}{u^2}du$

$$t = \int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{L^2}{2m}u^2)}}$$

$$\text{Ponendo } \frac{Lu}{\sqrt{2mE}} = \sin \phi, \frac{Lu}{\sqrt{2mE}} du = \cos \phi d\phi \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\cos \phi d\phi}{\sin^2 \phi} \frac{L}{\sqrt{2mE}}$$

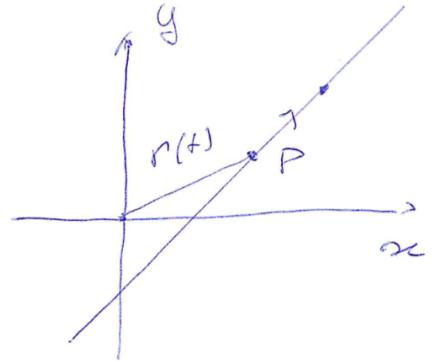
$$\begin{aligned} &= \int_{\phi}^{\phi_0} \frac{\cos \phi d\phi \frac{L}{\sqrt{2mE}}}{\sin^2 \phi \sqrt{\frac{2E}{m} \cos \phi}} = \frac{L}{2E} \frac{1}{\tan \phi} \Big|_{\phi_0}^{\phi} = \\ &= \frac{L}{2E} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \phi}}{\sin \phi} \Big|_{\phi_0}^{\phi} = \frac{L}{2E} \sqrt{1 - \frac{L^2 u^2}{2mE}} \frac{\sqrt{2mE}}{Lu} \Big|_{u_0}^u = r \sqrt{\frac{m}{2E} \left(1 - \frac{L^2}{2mr^2 E}\right)} \Big|_{r_0}^r \\ t &= \frac{m}{2E} r \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2}\right)} \Big|_{r_0}^r = \frac{m}{2E} \left[r \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2}\right)} - r_0 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2mr_0^2}\right)} \right] \end{aligned}$$

[...] da cui l'equazione di una retta (moto rettilineo uniforme)

Separazione di variabili. L'integrale si risolve con sostituzione e funzioni trigonometriche....

Ma possiamo già scrivere la soluzione dal problema fisico (non abbiamo cambiato la dinamica!): il punto percorre una retta, scritta in funzione della distanza dall'origine $r(t)$, percorsa a velocità costante. Scrivendo $r(t)$ e invertendo troviamo la primitiva dell'integrale. Moto libero di un punto su un piano. In questo caso le coordinate polari sono una complicazione, ma le useremo per il problema di Keplero: in meccanica lagrangiana ogni problema ha associato un insieme di coordinate adatto a risolverlo. Caso limite in cui L va a 0: rette per l'origine.

Le geodetiche in coordinate polari sono comunque rette, ma non c'è più una relazione lineare tra le coordinate, che hanno anche dimensioni diverse. L'accelerazione radiale dipende dal raggio e dipende dal momento: forza centripeta.



3.6 Sistemi dinamici sulla sfera

Abbiamo riscritto le equazioni di Newton - che erano in forma vettoriale, o in coordinate cartesiane - in coordinate generalizzate ottenendo la forma covariante. Abbiamo visto che se il termine al secondo membro è nullo, cioè assenza di forze, definisce le geodesiche. La forma covariante dell'equazione di Newton consente di affrontare problemi in maniera semplice, e di allargare il campo di applicazione della meccanica. Vediamo ora un esempio.

$$S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \begin{cases} x = \cos \phi \sin \theta & \phi \in [0, 2\pi] \\ y = \sin \phi \sin \theta & \theta \in [0, \pi] \\ z = \cos \theta & \end{cases}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta)$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = (-\sin \phi \sin \theta, \cos \phi \sin \theta, 0)$$

Lo spazio del problema è la sfera, bidimensionale. Non potendo mappare la sfera in uno spazio euclideo, aumentiamo il numero di dimensioni e vi immagiamo la sfera. Dobbiamo impostare un vincolo: le coordinate di \mathbb{R}^3 devono individuare un punto sulla sfera, non possono assumere qualunque valore perché non ci può essere una corrispondenza 1 – 1 tra uno spazio $2d$ e uno $3d$. Vogliamo scrivere equazioni intrinseche che descrivano il sistema dinamico sulla sfera, non tenendo conto del fatto che vediamo la sfera da uno spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Introduciamo delle coordinate locali adattate alla sfera: ϕ , angolo toroidale, che gira attorno alla sfera consentendo di definire i paralleli, e θ , angolo azimutale - non è una coordinata angolare periodica che torna continuamente su se stessa ma va da 0 a π - dà l'inclinazione rispetto a un asse z che sceglio, definendo il sistema di riferimento: non abbiamo una direzione privilegiata senza forze esterne (es: gravità).

La trasformazione tra ϕ, θ , e x,y,z non può essere estesa a tutta la sfera: è singolare per i due poli, cioè l'intersezione tra asse z e sfera. Il versore e_θ e il vettore e_ϕ formano la base per lo spazio tangente (piano) per un punto P sulla sfera, punto determinato da ϕ e θ , quindi x, y, z.

$$\text{Matrice metrica } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \text{singolarità polare } \theta = 0, \pi$$

Le coordinate sono locali

$$T = \frac{\|\vec{v}\|}{2} = \frac{1}{2} (\dot{\theta} \quad \dot{\phi}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)}{2}$$

Con t parametro $\vec{x}(\theta(t), \phi(t))$ definisce una curva su S^2 .

Costruiamo la matrice metrica con sulla diagonale il modulo dei vettori di base, sulla secondaria i prodotti misti (simmetrici perché lo è il prodotto scalare) \Rightarrow otteniamo 0: sono ortogonali. $\sin^2 \theta = 0$ singolarità al polo nord e polo sud; non perché siano punti particolari sulla sfera, ma per la scelta delle nostre coordinate: non possiamo avere un singolo sistema di coordinate che ricopre tutta la sfera, a differenza del piano, quindi ci deve essere la singolarità nelle coordinate. Se cambiamo la direzione dell'asse z, vanno su un altro punto- quindi non dipendono dal problema fisico, come ci capiterà ancora, quindi non sono "vere" singolarità- ma ne dobbiamo tener conto nell'integrazione numerica. Nascondono anche la problematica più profonda che la sfera è uno spazio a curvatura positiva.

Costruiamo l'energia cinetica ($m = 1$) scrivendo la forma quadratica in $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$ da G. v è la velocità di una curva che sta sulla sfera, dove al variare di t variano ϕ e θ , varia x sulla sfera $\Rightarrow v$ è un vettore tangente alla sfera \Rightarrow ne possiamo calcolare la norma usando la metrica sulla sfera.

3.6.1 Geodesiche (rette) sulla sfera

Geometria non euclidea. Con le Eq.3.12 facciamo una definizione matematica e fisica: definiamo le equazioni delle geodesiche su una sfera, il moto di un punto materiale su uno spazio sferico non soggetto a forze: moto rettilineo uniforme. Però considerando la sfera immersa in \mathbb{R}^3 , il punto non compie un moto rettilineo uniforme in \mathbb{R}^3 : c'è una forza vincolare. Il vincolo di stare sulla sfera genera una forza ortogonale al vincolo (non fa lavoro, se no sarebbe violata la conservazione dell'energia), responsabile del fatto di rimanere sulla sfera. Dallo spazio a dimensione più grande, la riduzione di dimensionalità fa sì che dobbiamo introdurre delle forze per vincolarmi sulla sfera: relatività. Possiamo interpretare la curvatura della sfera che crea una nuova metrica (nuove rette) come effetto della forza di gravità: non è più una forza esterna, ma modifica la metrica, creando nuove rette. Queste sono le curve del punto libero, ciò significa che le forze sono state inglobate dalla metrica. Vedremo esempi in meccanica di modifica della metrica legata all'introduzione di forze che mantengono il punto sulla superficie, e fanno percorrere le stesse traiettorie che se tenessimo conto delle forze esterne. Corrispondenza tra geometria e meccanica.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)}{2} = 0 \\ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \frac{(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)}{2} = 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

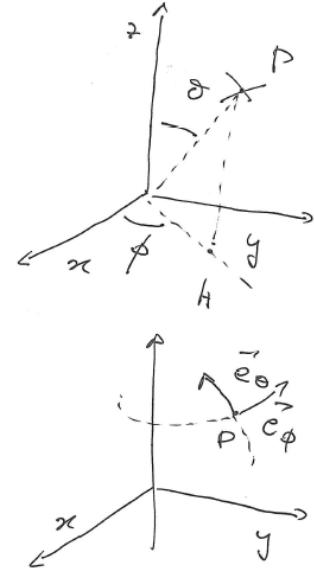


Figura 3.4: Coordinate polari sferiche

Scritte le equazioni del moto 3.12, introduciamo la dipendenza dal tempo \Rightarrow equazione differenziale 3.13.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{L^2}{\sin^3 \theta} \cos \theta = 0 \\ \frac{d}{dt}(\dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0 \Rightarrow L = \dot{\phi} \sin^2 \theta \text{ integrale primo del moto} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Il momento della quantità di moto è un integrale primo del moto: la derivata temporale è nulla, non ha una dipendenza esplicita dal tempo ed è una funzione ad un solo valore. Ricavare $\dot{\phi}$ da L e sostituire nella prima equazione, che non sapremmo risolvere, ci permette di trasformarla in un'equazione al secondo ordine in θ - dove non compaiono né ϕ né $\dot{\phi}$. Possiamo dunque interpretarla come un'equazione di Newton, in θ , (accelerazione=funzione della sola variabile: gradiente del potenziale), riconducendoci formalmente allo studio di un sistema unidimensionale. La presenza di un integrale primo del moto consente di ridurre la dimensionalità del sistema. La singolarità delle coordinate ricompare al denominatore all'equazione di Newton se $L^2 \neq 0$. (se L^2 fosse 0 potremmo fare una continuazione analitica). E' una singolarità da tenere in conto: se abbiamo una traiettoria per il polo nord, dobbiamo trovare una tecnica per continuare la traiettoria nel passaggio, ad esempio con un cambio di coordinate. Scriviamo l'"energia" associata al problema - le dimensioni però dipendono dalle variabili che usiamo e costanti. Dunque integriamo per separazione delle variabili: scritto l'integrale il sistema è già risolto, il calcolo è solo una questione tecnica.

$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{L^2}{2 \sin^2 \theta} \text{ energia efficace}$$

\Rightarrow separiamo le variabili

$$\int dt = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - \frac{L^2}{2 \sin^2 \theta})}}$$

Per sapere quali sono le "rette" su una sfera, risolviamo l'equazione differenziale dell'energia su un punto di equilibrio: deriviamo il "potenziale" rispetto alla variabile θ e imponiamo =0. Attenzione: trovare i punti critici delle funzioni usando le derivate va bene se la funzione è regolare: le singolarità dobbiamo considerarle a parte! Qui però non abbiamo ottenuto un punto di singolarità come soluzione quindi è accettabile. $\theta = \frac{\pi}{2}$ costante: posizione di equilibrio. Dall'espressione di L (Eq.3.13) con $\sin \theta = 1$ otteniamo che $\dot{\phi} = L$, cioè abbiamo trovato una soluzione, che è la rotazione a velocità angolare costante ($\dot{\phi}$) sull'equatore, che è il cerchio massimo ottenuto dalla sezione della sfera con il piano xy che passa per il suo centro. Ma il piano xy è definito da z, che scegliamo noi. Cioè basta prendere z ortogonale a \vec{v} iniziale e raggio, e abbiamo definito l'equazione della curva che sta sull'equatore, in altre parole l'asse z è arbitraria quindi l'equatore ha in realtà una qualsiasi inclinazione! La soluzione dell'integrale, che dà la dipendenza da t, è il cerchio massimo generico per un piano inclinato di una sfera, t sarebbe il parametro che ci consentirebbe di percorrerlo a v costante, essendo T una costante del moto (in assenza di V). Lo stesso problema con l'equazione di Newton invece che di Lagrange sarebbe stato molto più complicato. Vediamo come il quinto assioma di Euclide non funzioni per la sfera. Sappiamo trovare una soluzione particolare imponendo la condizione di equilibrio

relativo

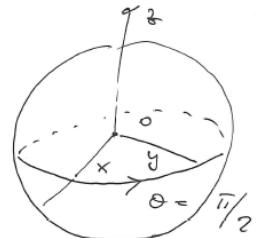
$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{L^2}{2 \sin^2 \theta} = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

ovvero $\dot{\phi} = L \Rightarrow \phi(t) = \phi_0 + Lt$ è soluzione.

Ma la sfera è invariante per rotazioni in \mathbb{R}^3 . Le rette sulla sfera sono i cerchi massimi. Basta "ruotare" l'equatore.

Curiosità:

- Qualunque sia la forma implicita con cui immergiamo una superficie in spazi euclidei con vincoli, è possibile formulare coordinate locali per la superficie in cui esprimere l'equazione di Lagrange per un sistema dinamico. Il vincolo隐式 è comodo per esprimere l'immersione, ci suggerisce poi la parametrizzazione: molte coordinate nascono per esplicitare dei vincoli.
- $L = 0$ è solo un problema matematico: per trattarlo basta trovare il modo di fare una continuazione analitica. Possiamo ricoprire tutta la sfera se prendiamo due set di coordinate con asse z orientate diversamente.
- Abbiamo sostituito un'equazione del moto dentro l'altra e ricalcolato l'energia. Scocciatoia: se prendiamo la funzione energia, e all'interno vi sostituiamo l'informazione di avere integrale primo del moto oltre all'energia, scriviamo direttamente l'energia equivalente del sistema 1D in θ .



- Trovare la geodetica con i punti di equilibrio del potenziale in θ : definisce una curva (ϕ continua a girare, quindi non è un punto di equilibrio di tutto il sistema!) NON è un metodo generale, ma in questo caso particolare stiamo sfruttando la simmetria della sfera (sull'ellissoide le geodesiche non sono i cerchi massimi).

4 Equazioni di Lagrange

Scriviamo l'equazione di Newton in forma vettoriale, aggiungendo che la forza è conservativa: viene dal gradiente di un potenziale (non indichiamo la derivata perché non abbiamo fissato delle coordinate).

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F} & \vec{F} &= -\text{grad } V \\ \vec{x} = \vec{x}(q) & \quad q \in A \text{ aperto} \subset \mathbb{R}^n & n &= \text{gradi di libertà} \\ \vec{e}_j &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} & m\vec{a} \cdot \vec{e}_j &= \vec{F} \cdot \vec{e}_j = Q_j \\ T &= \frac{m}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i G_{ij}(q) \dot{q}_j & G_{ij} &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \end{aligned}$$

Forma covariante per l'equazione di Newton

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) T = Q_j = - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Equazione di Newton in forma vettoriale. La forza è conservativa: gradiente di un potenziale (non indichiamo la derivata perché non indichiamo le coordinate). Q in un aperto contenuto in uno spazio che ha dimensione del sistema dinamico. Componente generalizzata della forza (F proiettata su e_j). Per calcolare la componente covariante della forza basta scrivere il potenziale in coordinate generalizzate, e derivarlo rispetto a queste: calcolare Q_j è semplice se la forza è conservativa (dalla derivazione composta).

Definizione 4.1. Funzione lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i G_{ij}(q) \dot{q}_j - V(q)} \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \mathcal{L} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) T + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

$$\boxed{\text{Equazioni di Lagrange} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \mathcal{L} = 0 \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \text{ funzione di Lagrange}} \quad (4.2)$$

$$\boxed{\text{Per un sistema fisico } \mathcal{L} = T(q, \dot{q}) - V(q)}$$

- La lagrangiana è uno scalare \Rightarrow è la stessa in ogni sistema di riferimento.
- \mathcal{L} ha le dimensioni di un'energia, ma NON è un'energia.
- Nota $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ sono note le equazioni del moto. Condizione iniziale $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$.

In fisica definiamo la lagrangiana $T - V$ (non con il $+$!!!). Il segno $-$ viene dalle strutture dell'equazione. L'operatore di Lagrange, lineare, applicato a T dà il primo membro. V dipende da q , non da \dot{q} , applicata a V il secondo: riotteniamo l'equazione di Newton in forma covariante per una forza conservativa. La lagrangiana NON dipende dalle coordinate che sceglio, ma dalla fisica del sistema.

E' una funzione scalare che si può definire su varietà. Dato un punto, una velocità, e il tempo, definiamo il valore numerico della lagrangiana. Nei sistemi fisici si scomponete in energia cinetica (forma quadratica definita positiva nelle velocità generalizzate, matrice simmetrica definita positiva quindi invertibile con autovalori positivi) e potenziale: funzione definita sul punto, dipende solo dal punto fisico, non dalle coordinate scelte. Data la configurazione nello spazio, il potenziale è definito. In matematica non c'è questo vincolo di avere T e V . \mathcal{L} è definita delle configurazioni del sistema. \mathcal{L} assume gli stessi valori per lo stesso punto in coordinate diverse. Invece le coordinate definiscono l'operatore di Lagrange. C'è un'arbitrarietà nella scelta della lagrangiana, arbitrarietà definita dall'operatore lineare:

\mathcal{L} è nota a meno di una funzione appartenente al nucleo dell'operatore. Sommiamo una derivata totale rispetto al tempo di F e verifichiamo che applicandoci l'operatore otteniamo 0.

La lagrangiana è nota a meno di una derivata totale rispetto a t (di una funzione di $F(q, t)$)

$$\boxed{\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt}} \quad (4.3)$$

Calcoliamo

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \left(\sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} - \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} = 0$$

$\frac{d}{dt} F(q, t)$: derivata composta - c'è sia dipendenza esplicita dal tempo che dipendenza di q dal tempo. L'aggiunta di $\frac{d}{dt} F(q, t)$ a \mathcal{L} non cambia la fisica del problema: non cambiano le equazioni del moto. F funzione di q , e t , NON di \dot{q} : se la lagrangiana dipendesse dall'accelerazione, le equazioni del moto sarebbero del terzo ordine.

4.1 Energia H

Sappiamo che l'equazione di Newton per un sistema conservativo ha come integrale primo l'energia. Vogliamo definire l'energia meccanica in un sistema conservativo usando il formalismo di Lagrange, non più passando per T e V . Partiamo dalle equazioni di Lagrange.

Definizione 4.2. Energia

$$\boxed{H = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L} \text{ data } \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)} \quad (4.4)$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k}}_{-\frac{d\mathcal{L}}{dt}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_k \underbrace{\left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \mathcal{L} \right] \dot{q}_k}_{=0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Abbiamo verificato che H così definita dia l'integrale primo del moto nel caso non ci sia dipendenza da t . Per avere integrale primo il sistema deve essere conservativo e indipendente dal tempo. Le equazioni di Lagrange implicano che un termine sia nullo: la derivata temporale è calcolata lungo le soluzioni dell'equazione di Lagrange.

Abbiamo dimostrato che

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}} \quad (4.5)$$

Perciò

$$\text{se } \mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}) \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \quad \text{cioè } H(q, \dot{q}) \text{ è un integrale primo del moto}$$

Nota: distinzione tra derivata parziale e totale (es: equazioni di Lagrange). Derivata totale rispetto al tempo: tutte le variabili q, \dot{q}, t sono funzioni del tempo, e in quanto tale sono tutte da derivare ($\frac{dH}{dt}$). Derivata parziale rispetto a t ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$). q e \dot{q} sono costanti, consideriamo solo la dipendenza esplicita di t per derivare. $\frac{d}{dt}$ è intrinseco, non dipende dalle coordinate: se una funzione è costante, lo è in tutte le coordinate. La derivata parziale DIPENDE dalle coordinate (dovremmo specificare quali stiamo usando), perché sottintendono di mantenere costante delle coordinate (quindi attenzione se si fa un cambio di variabili in cui cambia il tempo).

Verifichiamo che H è coincide con l'energia meccanica già nota Se $\mathcal{L} = T - V$ con $T = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i G_{ij}(q) \dot{q}_j$

$$\Rightarrow H = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - (T - V) = 2T - T + V \Rightarrow H = T + V \text{ energia meccanica}$$

Abbiamo usato che T è funzione omogenea di ordine 2 nelle velocità.

Curiosità:

- Esempio di potenziale dipendente da \dot{q} : potenziale vettore legato al campo magnetico.
- H non è necessariamente l'unico integrale per il sistema ma spesso è così. Sistemi integrabili: tanti integrali del moto quanti sono i d.o.f. Non integrabili: solo energia. Per sistemi complicati come il pendolo doppio: H è l'unico integrale primo globale (localmente magari no).

- Simboli di Kristoffel - permettono di scrivere simboli per l'operatore di Lagrange.
- G definita positiva è una proprietà geometrica: $v^2 > 0$ - partiamo dalla geometria euclidea estendendo a spazi curvi. Spazio di Minkowski è iperbolico, non più euclideo; la metrica non è più definita positiva.

\mathcal{L} Funzione definita nello spazio delle configurazioni e nel suo spazio tangente (\mathcal{L}) permette di scrivere in qualunque coordinate le equazioni di Lagrange: è una proprietà del sistema. I sistemi fisici inerziali hanno una lagrangiana che è $T - V$. In ogni sistema di coordinate, e di riferimento (inerziale o no), è la stessa: è intrinseca. Ma la definizione $T - V$ è valida nei sistemi inerziali. Nota la lagrangiana costruiamo le equazioni moto, e costruiamo la soluzione date le ci.

4.2 Momenti generalizzati e coordinate cicliche

Definizione 4.3. Momenti generalizzati associati alle coordinate

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

In meccanica analitica si introducono i momenti generalizzati p associati alle coordinate q . Data una lagrangiana, la sua derivata rispetto alla componente generalizzata della velocità fornisce il momento associato. Prendendo la classica $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, derivando la lagrangiana rispetto a \dot{x}_i otteniamo la quantità di moto p_i . Momento associato alla coordinata x_i è la quantità di moto lungo x_i ($m\dot{x}_i$). Il momento è una proprietà della sua coordinata. L'associazione tra il momento p_i e la coordinata q_j corrispondente si ritrova nel principio di indeterminazione di H : la meccanica quantistica si porta dietro in modo fondamentale questa relazione tra p e q . Non possiamo osservare contemporaneamente x , e $m\dot{x}$ a precisione arbitraria (mentre se osserviamo x e $m\dot{y}$, questo possiamo farlo con precisione arbitraria) perché sono coniugati: momenti associati alle coordinate. Se invece di x , usiamo la coordinata angolare, non posso misurare questa insieme al momento della quantità di moto rispetto all'asse di rotazione definito dall'angolo.

L'equazione di Lagrange si riscrive:

$$\frac{d}{dt} p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \quad (4.6)$$

Definizione 4.4. Se \mathcal{L} non dipende esplicitamente da q_j , q_j si dice ciclica

$$\Rightarrow \frac{dp_j}{dt} = 0, \text{ cioè } p_j \text{ è un integrale del moto se } q_j \text{ è ciclica.}$$

Abbiamo riscritto l'equazione di Lagrange in una forma che resta inalterata anche in relatività ristretta, grazie al fatto di non derivare la velocità ma il momento. Se \mathcal{L} non dipende esplicitamente da q_j (la derivata è fatta solo rispetto alla dipendenza esplicita) $\Rightarrow q_j$ è una coordinata ciclica: non entra esplicitamente nella lagrangiana. In tal caso abbiamo un integrale primo del moto che ci è dato naturalmente dalla forma della lagrangiana, l'integrale è collegato ai momenti associati a q_j .

Nota: La definizione di momento generalizzato associato alle coordinate non è univoca:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \rightarrow p_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \\ \mathcal{L} + \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k \rightarrow p'_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial F}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Nota: Se q_j è ciclica per \mathcal{L} , non lo è per $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}(q)$, ma p'_j è integrale primo del moto

La definizione del momento non è univoca, perché c'è un'arbitrarietà in \mathcal{L} : descrivono lo stesso sistema fisico. Ma alla stessa coordinata ci sono diversi momenti associati! Tuttavia se uno è integrale primo del moto, anche l'altro: la proprietà che il momento è integrale primo del moto, non viene toccato dall'arbitrarietà nella lagrangiana. Mentre può esserci una diversa definizione dei momenti; sceglieremo la forma più conveniente per il problema. Applicazione: potenziali dei campi magnetici.

5 Studio del campo centrale sul piano

Esempio: potenziale gravitazionale, potenziale elettrostatico, potenziale legato alle forze nucleari (in meccanica quantistica). Es di applicazione: calcolo sezione urto.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\text{Potenziale } V(r) \quad \vec{F} = -\frac{dV}{dr} \hat{r} = -\frac{dV}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \right), \hat{r} \text{ versore radiale}$$

I campi centrali radiali sono conservativi. Data $F = F(r)\hat{r}$ esiste sempre un potenziale che la genera che è la primitiva.

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) - V(r)$$

Coordinate polari sul piano: definite ovunque tranne nell'origine, in cui l'intero segmento angolare corrisponde a un punto. La maggior parte delle volte l'origine non fa parte della dinamica: o perché il campo centrale è singolare nell'origine, ad esempio problema di Keplero, oppure perché date le condizioni iniziali il punto non ci passa. Una traiettoria che facesse un'oscillazione attorno all'origine richiederebbe altre coordinate, es: cartesiane.

θ è una coordinata ciclica (\mathcal{L} non dipende da θ), quindi il (modulo del) momento della quantità di moto p_θ è un integrale primo del moto. $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \Rightarrow p_\theta = mr\dot{\theta}$ ($r\dot{\theta}$ velocità tangenziale). Il sistema è indipendente dal tempo $\Rightarrow H$ integrale primo

Possiamo allora studiare i 2 integrali primi del moto:

$$\begin{cases} p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ H &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) + V(r) \end{cases} \quad (5.1)$$

invece delle equazioni del moto (generalizzazione dell'equazione 3.11, equazione di Lagrange per il moto in assenza di forze):

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m\dot{\theta}^2 r + \frac{dV}{dr} = 0 \end{cases}} \quad (5.2)$$

Infatti il secondo è un sistema di equazioni differenziali in due variabili al secondo ordine. La struttura lagrangiana del sistema e la coordinata ciclica θ permette di sostituirlo con il primo sistema al primo ordine \Rightarrow lo integriamo: stesso numero di integrali del moto che di gradi di libertà (se no: sistema non integrabile).

Negli integrali primi effettuiamo la sostituzione (partendo da p_θ)

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) = E} \quad (5.3)$$

Nota: GRAVE ERRORE E ORRORE sostituire $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$ nella lagrangiana! E' una proprietà del sistema, non è un integrale del moto, e non va toccata

Così ci riconduciamo allo studio di un sistema unidimensionale, quindi separabile, con energia

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r)$$

dove abbiamo introdotto il potenziale efficace V_{eff} funzione di p_θ

V_{eff} ci consente di studiare la dinamica radiale come se la dinamica angolare non ci fosse. Poi bisogna integrare anche θ .

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_{\text{eff}}(r), \text{ dove } p = m\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}$$

p , il momento associato alla coordinata radiale, consente di riscrivere l'energia
Caduta di un oggetto in un campo centrale.

Consideriamo l'energia scritta in funzione di r (Eq.5.3). La caduta nel campo corrisponde al fatto che il raggio può assumere il valore $r = 0$: punto singolare per le coordinate polari. Normalmente il termine dovuto all'energia cinetica angolare, che usando la relazione tra $\dot{\theta}$ e p_θ introduce nell'energia un potenziale efficace, centrifugo, che va come $\frac{1}{r^2} \Rightarrow$ impedisce che la particella raggiunga lo 0, perché diverge all'origine: fa sì che ci sia un punto di inversione. (Ma gli oggetti hanno dimensione finita: se l'orbita della Luna fosse così eccentrica da passare vicino alla Terra, si scontrerebbero). Condizioni per cui la caduta nel centro è possibile. Se il momento della quantità di moto, che è dato dalle condizioni iniziali, fosse 0: una particella che venisse attratta dal centro del campo, farebbe un moto radiale verso il centro, acquistando velocità sempre maggiore: passerebbe attraverso la singolarità delle coordinate polari, e poi tornerebbe indietro passando ancora per la singolarità. Il passaggio attraverso la singolarità difficile da giustificare fisicamente: il potenziale diventa $-\infty$, quindi l'energia cinetica diventa infinita.

Un'altra possibilità, "accademica": se fosse il termine $V(r)$ a dominare, ad esempio perché $V(r) \propto \frac{1}{r^3}$, determinerebbe il potenziale efficace vicino all'origine, come singolarità dominante: il sistema sarebbe attratto verso il centro del campo, qualunque sia p_θ . Lo studio della caduta nel centro nel campo non può essere fatto in coordinate polari data la singolarità nel centro. Anche a livello numerico si può togliere la singolarità per evitare divergenze numeriche. Inoltre un potenziale cubico singolare nel centro del campo potrebbe non soddisfare condizioni di esistenza e unicità: orbita che cade nel centro del campo in un tempo finito, e se mettiamo un punto nel centro violeremo. Ma il teorema vale LONTANO dalle singolarità. Questi potenziali con potenza superiore a 2 si sono rivelati non fisici. Integrazione delle equazioni del moto (Eq.5.2) per separazione

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}} \Rightarrow r(t) \quad (5.4a)$$

$$\theta = \int_{t_0}^t \frac{p_\theta}{mr^2(t)} dt \quad (5.4b)$$

Punto materiale su un piano soggetto a campo centrale è un sistema integrabile

Punti critici $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}(r_c) = 0 \Rightarrow r(t) = r_c$.

r_c punto fisso del sistema radiale: il raggio è costante $\Rightarrow \theta$ varia a velocità costante. r_c sono orbite circolari: stabili - minimi, instabili - massimi di $V_{\text{eff}}(r)$

Curiosità: La singolarità introdotta dalle coordinate non cambia l'esattezza della forma differenziale legata ad F : lungo una qualsiasi curva chiusa intorno alla singolarità F fa lavoro nullo, come accade per una forza radiale lungo un circuito attorno all'origine, essendo la forza ortogonale allo spostamento. E' una singolarità isolata.

5.1 Potenziale di Keplero

Definizione 5.1. Potenziale di Keplero

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

$\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0$ caratteristica fisica: due oggetti infinitamente lontani sono da considerare isolati (c.e.s. quark - forza forte).

Divergenza all'origine per il termine centrifugo. Al crescere di r aumenta il contributo di $-k/r \Rightarrow V_{\text{eff}} < 0$; ha un minimo (r_c) poi tende asintoticamente a 0.

$$V_{\text{eff}} = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad \text{studio della dinamica radiale}$$

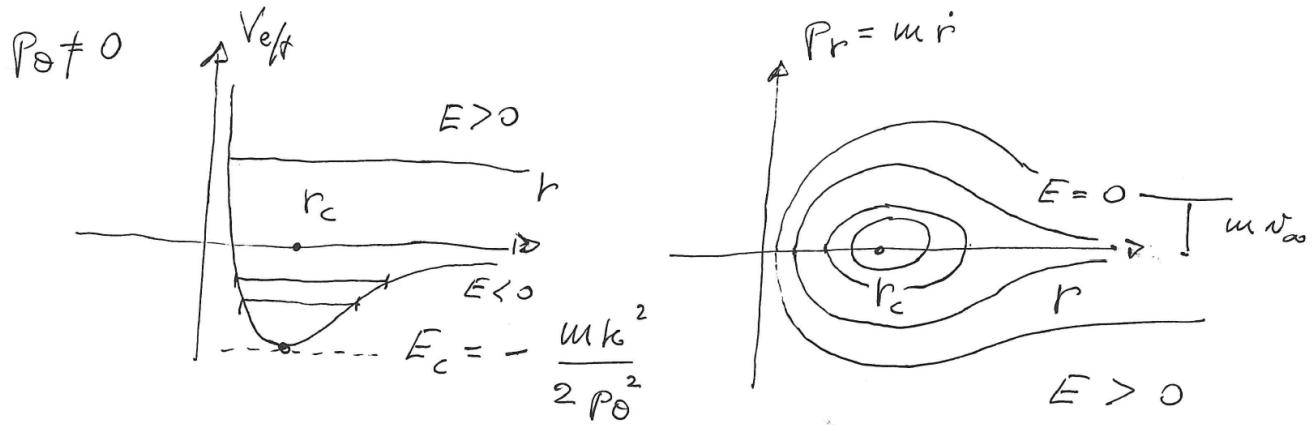


Figura 5.1: Spazio delle fasi radiale generato dal potenziale di Keplero

Nel punto di equilibrio r_c , orbita circolare, si ha

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} = 0 \Rightarrow r_c = \frac{p_\theta^2}{mk}$$

L'energia cinetica è nulla, quindi

$$E_c = V_{\text{eff}}(r_c) = \frac{mk^2}{2p_\theta^2} - \frac{mk^2}{p_\theta^2} = -\frac{mk^2}{2p_\theta^2}$$

è un minimo assoluto: minima energia del problema

Nello spazio delle fasi radiale per $E < 0$ si hanno orbite limitate; diversamente resta il punto di inversione a sinistra, e per $E = 0$ si ha un'orbita speciale, come una separatrice, con asintoto = asse $p = 0$; per $E > 0$ asintoto orizzontale $\frac{mv_\infty^2}{2} = E$ - cioè un punto parte dall'infinito e vi giunge nuovamente con velocità finita.

Mentre per sistemi 1D i punti critici erano fissati dalla fisica, dal potenziale, qui data la dipendenza di V_{eff} dall'integrale primo p_θ , la posizione dell'orbita circolare dipende dalle condizioni iniziali.

5.2 Orbite limitate

Ossia $E < 0$, $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ r_{\min} = pericentro, r_{\max} = apocentro

Dall'integrale energia quindi dall'Eq.5.4a otteniamo il periodo radiale

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}} \quad (5.5)$$

Ciò NON significa che l'orbita sia periodica: c'è anche l'angolo!

5.2.1 Chiusura di un'orbita limitata

Dall'integrale p_θ o Eq.5.4b si ha

$$dt = \left(\frac{p_\theta}{mr^2} \right)^{-1} d\theta$$

Sostituendo anche

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}}$$

possiamo definire l'angolo tra pericentro e apocentro - o viceversa per simmetria - $\Delta\theta$, come:

$$\Delta\theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{p_\theta}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}} \quad (5.6)$$

Se $\Delta\theta = \pi \frac{n}{m}$, $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ l'orbita si chiude dopo m giri (intesi come su e giù)

- perché si sono percorsi $2n$ giri completi cioè θ è variato di $2n\pi$ ($\Delta\theta$ è moltiplicato per $2m$). Ottenere $\Delta\theta$, risultato dell'integrale, razionale rispetto a π è un evento di misura nulla: numeri razionali hanno misura nulla rispetto ai reali. E' un problema matematico, mentre tutte le misure fisiche hanno una precisione finita, non ha senso distinguere tra razionali e reali, e la chiusura o meno di un'orbita dipende dal tempo di osservazione. Esistono potenziali le

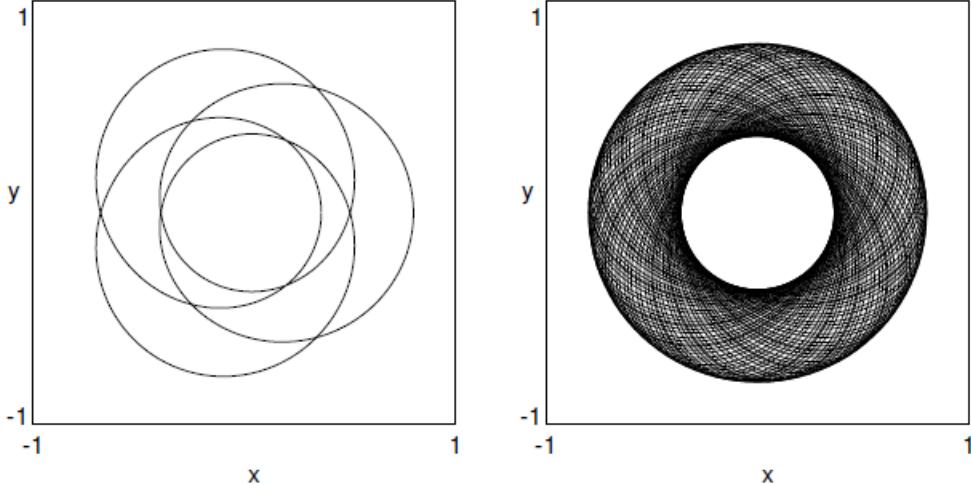


Figura 5.2: Orbita chiusa e orbita che riempie densamente la corona tra r_{min} e r_{max}

cui orbite limitate sono anche chiuse? Potenziale di Keplero (es: le orbite dei pianeti sono chiuse, se no ci sarebbe continua precessione delle stagioni), e potenziale armonico (non completamente fisico perché allontanando i punti l'interazione cresce all'infinito, ma può essere vero solo localmente; localmente approssima gli altri sistemi).

5.2.2 Studio delle orbite vicino alle orbite circolari

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}(r) = 0, \quad p_\theta = mr_c^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr_c^2}$$

$$\text{Periodo } T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi mr_c^2}{p_\theta}$$

$$E = \frac{mr^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)$$

Partendo dalla definizione di $\Delta\theta$, per calcolare l'integrale per orbite vicine a quelle circolari, facciamo ora un cambio di variabile (che scambia 0 e ∞ , punti in cui comunque non andiamo); e parametrizziamo la traiettoria con θ :

$$u = \frac{1}{r}, \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}; \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{\dot{\theta}r^2} \dot{r} = -\frac{m}{p_\theta} \dot{r}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione di p_θ . La parametrizzazione consente di conoscere $r(\theta)$ cioè l'orbita, dal punto di vista geometrico, non come viene percorsa (per quello serve l'integrale del tempo). Abbiamo ottenuto

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{m}{p_\theta} \dot{r} \tag{5.7}$$

che mette in relazione la quantità geometrica $\frac{du}{d\theta}$ con la quantità dinamica \dot{r} . Usiamola per sostituire nell'energia: avendo modificato il parametro dobbiamo lavorare sugli integrali primi del moto (non la lagrangiana, in cui compare il tempo).

$$E = \frac{m}{2} \frac{p_\theta^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\theta^2}{2m} u^2 + V\left(\frac{1}{u}\right)$$

Riscaliamo l'energia (moltiplicando per termini costanti) e riconosciamo che è data da una parte cinetica, un potenziale centripeto (oscillatore armonico) e il termine con il potenziale fisico.

$$E' = \left(\frac{m}{p_\theta^2} E \right) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{u^2}{2}}_{\text{oscillatore armonico}} + \underbrace{V\left(\frac{1}{u}\right) \frac{m}{p_\theta^2}}_{\widehat{V}_{\text{eff}}(u)} \quad (5.8)$$

dove la sostituzione $u = 1/r$ fa sì che, interpretando u come funzione di θ , la parte cinetica dell'energia del problema 1d si riconduca a un oscillatore armonico con $k = 1$ (e $\omega = 1$). E al potenziale abbiamo la variabile al numeratore. E' un'equazione differenziale per $u(\theta)$ nella stessa forma $T + V$ che per i sistemi 1d. Considerato come sistema 1d, troviamo i punti di equilibrio: punti critici di V_{eff} . I punti di equilibrio per r corrispondono a orbite circolari:

$$\frac{d\widehat{V}_{\text{eff}}}{du} = u - \frac{1}{u^2} V'\left(\frac{1}{u}\right) \frac{m}{p_\theta^2} = 0, \quad \frac{u^3 p_\theta^2}{m} = V'\left(\frac{1}{u}\right) \quad (5.9)$$

Sia u_c soluzione \Rightarrow sviluppiamo il potenziale (nell'intorno del punto di equilibrio u_c - perciò il primo termine non banale è di ordine 2) per linearizzare il sistema:

$$\frac{d^2\widehat{V}_{\text{eff}}}{du^2} = \frac{d}{du} \frac{d\widehat{V}_{\text{eff}}}{du} = 1 + 2 \underbrace{\frac{1}{u^3} V'\left(\frac{1}{u}\right) \frac{m}{p_\theta^2}}_1 + \left(\frac{1}{u^2}\right)^2 V''\left(\frac{1}{u}\right) \frac{m}{p_\theta^2}$$

Abbiamo, riconoscendo l'espressione di $V'(1/u)$ nel punto di equilibrio (Eq. 5.9) :

$$3 + \left(\frac{1}{u^4}\right) V''\left(\frac{1}{u}\right) \frac{m}{p_\theta^2} = \frac{d^2\widehat{V}_{\text{eff}}}{du^2} \quad (5.10)$$

Abbiamo l'energia linearizzata in funzione di u e θ : a parte una costante che riassorbiamo in E' , resta il termine cinetico e una derivata seconda di V_{eff} calcolato nel punto di equilibrio. Abbiamo quindi un oscillatore armonico con parametro θ , il cui semiperiodo è la variazione angolare tra pericentro e apocentro. Dividiamo per $\sqrt{\frac{k}{m}}$, con k costante elastica, e $m = 1$. Essendo u_c punto di minimo, $\frac{d^2\widehat{V}_{\text{eff}}}{du^2} > 0$: oscillatore armonico, non iperbolico.

$$E' = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\widehat{V}_{\text{eff}}}{du^2}(u_c)(u - u_c)^2 \quad (5.11)$$

Allora, nell'intorno dell'orbita circolare, $\Delta\theta$ si può approssimare con il "semiperiodo" dell'oscillatore in θ

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{d^2\widehat{V}_{\text{eff}}}{du^2}}} \quad \text{limite dell'angolo fra apocentro e pericentro} \quad (5.12)$$

Condizione di indipendenza di $\Delta\theta$ da p_θ In generale $\Delta\theta$ dipende da p_θ , che compare esplicitamente nella derivata seconda $\frac{d^2\widehat{V}_{\text{eff}}}{du^2}$ che serve per la linearizzazione ma anche implicitamente nella determinazione della posizione dell'orbita circolare. Problema: per quali potenziali $\Delta\theta$ non dipende da p_θ ? Cioè $\Delta\theta$ non dipende dalle condizioni iniziali, ma è una caratteristica del potenziale. Dall'Eq.5.10 imponiamo che sia costante la frequenza:

$$\begin{aligned} 3 + \left(\frac{1}{u^4}\right) V''\left(\frac{1}{u}\right) \frac{m}{p_\theta^2} &= c \Rightarrow \\ V''\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u} &= \frac{u^3 p_\theta^2}{m} (c - 3) = V'\left(\frac{1}{u}\right) (c - 3) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo nuovamente sostituito $V'(1/u)$ sull'orbita circolare (Eq. 5.9)

$$\begin{aligned} V''(r)r - V'(r)(c - 3) &= 0, \quad \frac{V''(r)}{V'(r)} = \frac{(c - 3)}{r} \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} \ln V'(r) &= \frac{(c - 3)}{r} \\ \ln(V'(r)) &= (c - 3) \ln r + \ln a \quad \text{a costante} \end{aligned}$$

Troviamo

$$V'(r) = ar^{(c-3)} \Rightarrow V(r) = \begin{cases} \frac{a}{c-2} r^{c-2} & \text{con } c \neq 2 \\ a \ln(r) & \text{con } c = 2 \end{cases} \quad (5.13)$$

$c > 0$ oppure possiamo cadere nell'origine (Fig. 5.3). In tal caso non sarebbe più definito $\Delta\theta$ secondo l'Eq. 5.12 (radice di un numero negativo).

Calcoliamo ora il valore limite di $\Delta\theta$ con orbite che tendono all'orbita circolare - orbita che invece non avrebbe pericentro e apocentro perché tutti i punti sono alla stessa distanza, ma $\Delta\theta$ ammette limite. Dobbiamo quindi determinare la costante c / la derivata seconda di V_{eff} . α è l'esponente del potenziale cambiato di segno (introdotto per scambiare r e u), $A = \frac{a}{c-2}$

$$\widehat{V_{\text{eff}}}(u) = \frac{u^2}{2} + Au^\alpha \frac{m}{p_\theta^2} \quad \alpha = 2 - c \quad \alpha < 2$$

La condizione che definisce l'orbita circolare è

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{V_{\text{eff}}}}{du} &= u + \alpha Au^{\alpha-1} \frac{m}{p_\theta^2} = 0 \quad \text{da cui } 1 = -\frac{\alpha Am}{p_\theta^2} u^{\alpha-2} \\ \frac{d}{du} \frac{d\widehat{V_{\text{eff}}}}{du} &= 1 + (\alpha-1) \alpha Au^{\alpha-2} \frac{m}{p_\theta^2} \Rightarrow \\ &\quad \underbrace{-1}_{=1-(\alpha-1)=2-\alpha} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2-\alpha}}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Keplero} & \alpha = 1 \quad \Delta\theta = \pi \\ \text{potenziale elastico} & \alpha = -2 \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{2} \end{array}} \quad (5.14)$$

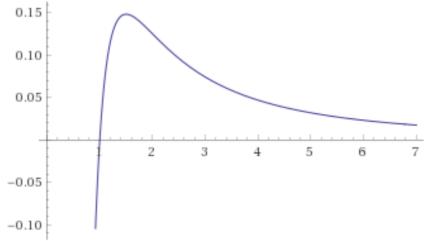


Figura 5.3: Andamento del potenziale efficace centrale $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3}$: tutte le orbite limitate cadono nel punto singolare del potenziale ossia l'origine

dove le relazioni per i potenziali elastico e di Keplero sono in realtà valide in generale, non solo vicino a orbite circolari. Vediamo che $\Delta\theta$ dipende solo da α , cioè dall'esponente del potenziale.

5.3 Potenziale elastico sul piano

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{k}{2} r^2 \text{ elastico} \\ \Rightarrow E &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{k}{2} r^2, \quad t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{2} r^2)}} \end{aligned}$$

Un potenziale elastico sul piano, radiale, scritto in coordinate polari, ha un'espressione dell'energia radiale con un termine non lineare (a differenza del caso 1D in cui le equazioni \mathcal{L} e quadratiche, le equazioni del moto sono lineari) e il calcolo della soluzione, ossia il calcolo dell'integrale non è semplice. La molla sul piano si studia più semplicemente in coordinate cartesiane, in cui vediamo che \mathcal{L} è sommabile: la lagrangiana del sistema unione di sistemi non interagenti è la somma delle lagrangiane dei singoli sistemi, che studiamo indipendentemente. Questo perché l'operatore di Lagrange è lineare, e abbiamo la somma di termini che dipendono da variabili diverse (x e y). Se i sistemi interagissero, dovremmo introdurre i potenziali di interazione \rightarrow lagrangiana di interazione.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{k}{2}r^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \\ \mathcal{L} &= \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \right] + \left[\frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{k}{2}y^2 \right] \\ \text{dove } \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 = \dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} \end{aligned}$$

Sovrapposizione di oscillatori indipendenti.

E_x, E_y sono i 2 integrali del moto, per 2 gradi di libertà: il sistema è risolubile. Gli altri due integrali, E e p_θ , in coordinate polari devono dipendere funzionalmente da E_x, E_y (per E è ovvio, basta sommarle).

$$E_x = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2, \quad E_y = \frac{m}{2} \dot{y}^2 + \frac{k}{2} y^2$$

Senza perdere di generalità, poniamo un punto sull'asse x con v diretta verso l'alto. I due oscillatori armonici hanno la stessa frequenza di oscillazione ω . $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0, y(0) = 0$

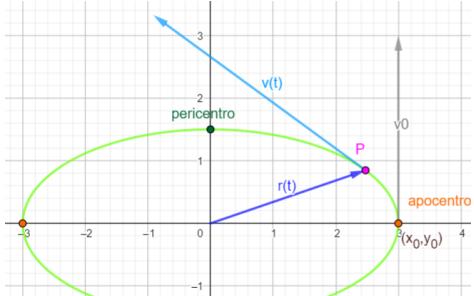


Figura 5.4: Oscillatore armonico sul piano

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \begin{cases} p_\theta = mx_0 v_0 \\ E = \frac{k}{2} x_0^2 + \frac{m}{2} v_0^2 \end{cases}$$

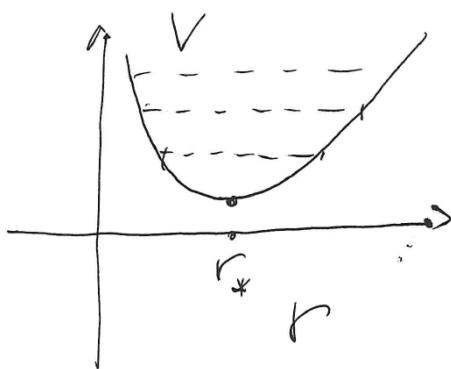
Le condizioni iniziali x_0, v_0 definiscono gli integrali primi del moto. p_θ possiamo scriverlo in funzione di $E_x(0), E_y(0)$. L'energia totale è data dall'energia potenziale nella x , e dall'energia cinetica nella y , al tempo 0.

$$r^2(t) = x_0^2 \cos^2(\omega t) + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) = r^2(E, p_\theta, t)$$

$$\text{orbite ellittiche} \quad \frac{x^2(t)}{x_0^2} + \omega^2 \frac{y^2(t)}{v_0^2} = 1$$

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 5.3.1. Si consideri un punto materiale (m) soggetto al potenziale $V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2, r > 0$. Consider-



$$P_r = m r \dot{r}$$

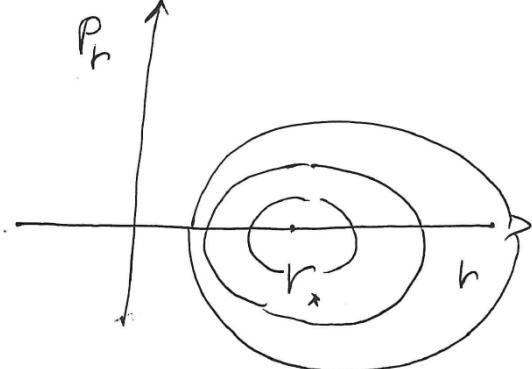


Figura 5.5: Potenziale centrale

riamo un problema 1d con l'energia scritta nella stessa forma di E radiale di prima, dove p_θ non è integrale primo del moto di un problema centrale 2d ma una costante. E è risolubile ma il potenziale apparentemente non è lineare, l'integrale è difficile da risolvere \Rightarrow ragioniamo per analogia: potenziale efficace di problema 2d di campo centrale, dove cambiando le variabili in x e y possiamo studiare 2 oscillatori separati. Lo pensiamo come problema a una dimensione in più ridotto. Il potenziale, che è definito solo per $r > 0$ e diventa singolare nell'origine, va all'infinito $\propto r^2$: oscillatore armonico. Oltre al punto fisso, costruisce solo orbite limitate tra 2 punti di inversione, orbite che nello spazio delle fasi si accumulano verso l'origine a sinistra (mentre a destra vanno all'infinito con una crescita parabolica). Vogliamo trovare il moto lungo queste curve.

Definiamo ora le variabili ausiliarie.

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \quad \text{con } L = mr^2(t) \dot{\theta}(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

Il problema sarebbe solo radiale, ma introduciamo una variabile θ in più, e scriviamo x e y in funzione di r , e della variabile non fisica θ . Con la definizione della costante fisica L , stabiliamo il legame tra la variabile fisica e quella

ausiliaria: l'allargamento delle dimensioni è fittizio, perché r e θ non sono indipendenti. Facendo nell'energia il cambio di variabili, torna quella di un oscillatore armonico 2d in coordinate cartesiane. Messe dentro le condizioni iniziali nelle nuove variabili scriviamo le soluzioni, da cui otteniamo la soluzione cercata $r(t)$ (senza risolvere l'integrale, ed è lo stesso risultato). Il fatto che allarghiamo la dimensionalità dello spazio e usiamo un'analogia con un problema 2d in cui abbiamo un integrale primo che permette di ridurre le dimensioni. E' lo stesso meccanismo che per l'integrazione della gaussiana passando a \mathbb{R}^2 in coordinate polari piuttosto che su \mathbb{R} .

Abbiamo

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} r(0) = r_0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r}(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \frac{L^2}{mr_0^2} \end{cases}, \quad E_0 = E(r_0)$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} x_0 = r_0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{r}(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\dot{\theta} \Big|_{t=0} = \dot{r}_0 = 0 \\ \dot{y}_0 = \dot{r}(t)\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\dot{\theta} \Big|_{t=0} = r_0\dot{\theta}_0 = \frac{L^2}{mr_0} \end{cases}$$

Soluzioni ($\omega^2 = \frac{k}{m}$)

$$\begin{cases} x(t) = r_0 \cos \omega t \\ y(t) = \frac{L^2}{mr_0 \omega} \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow r(t) = \sqrt{r_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{L^4}{m^2 r_0^2 \omega^2} \sin^2 \omega t}$$

$$\theta(t) \text{ si potrebbe risolvere come } \theta(t) = \int_0^t \frac{L}{mr^2(t)} dt \text{ ma risulta irrilevante}$$

5.4 Considerazioni di similitudine

Consideriamo il seguente potenziale, funzione omogenea di grado a ⁹:

$$V(r) = kr^a, \quad a > -2, \quad a \neq 0$$

La lagrangiana, che definisce in maniera univoca le equazioni del moto, si scrive:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}v^2 - kr^a$$

Ci interessa la forma funzionale, non il valore di k : non ci interessa se le orbite sono limitate o no.

Se scaliamo $\mathcal{L} \rightarrow c\mathcal{L}$ le equazioni del moto non cambiano. Le equazioni del moto dipendono dall'operatore di Lagrange, le equazioni di Lagrange derivano dalla lagrangiana in maniera lineare.

Cosa succede se rascaliamo le variabili spaziale e temporale? Riscalare una variabile può voler dire cambiare unità di misura, oppure osservare un sistema da più vicino o più lontano. Consideriamo il riscalamento seguente (che in generale non rientra nel caso precedente):

$$\begin{cases} \vec{x}' = \lambda \vec{x} \\ t' = \mu t \end{cases}, \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{\lambda}{\mu} \vec{v} \Rightarrow$$

⁹V si dice funzione omogenea delle coordinate se vale

$$V(\lambda r_1, \lambda r_2, \dots, \lambda r_n) = \lambda^a V(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

con λ costante qualunque, e a grado di omogeneità della funzione.

Riscriviamo la lagrangiana nelle variabili iniziali evidenziando i fattori di scala.

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2} v'^2 - k r'^a = \frac{m}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 v^2 - k \lambda^a r^a$$

Se imponiamo una relazione tra le scale

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 = \lambda^a \Rightarrow \lambda^{2-a} = \mu^2, \quad \mu = \lambda^{1-\frac{a}{2}}, \quad \frac{t'}{t} = \left(\frac{d'}{d} \right)^{1-\frac{a}{2}} \quad (5.15)$$

Allora $\mathcal{L}' \propto \mathcal{L} \Rightarrow$ le equazioni del moto sono invarianti. Sia $\vec{x}(t)$ soluzione $\Rightarrow \lambda \vec{x}(t' \lambda^{\frac{a}{2}-1})$ è ancora soluzione.

Nota: In generale, se riscaliamo sia nello spazio che nel tempo senza imporre la condizione, essendo il sistema NON lineare (lo sarebbe solo se $a = 2$), otteniamo una lagrangiana che NON è la stessa e NON è proporzionale!

La non scalabilità è indice di non linearità. Possiamo mettere una relazione specifica tra λ e μ per rendere scalabili alcune orbite del sistema (non tutto) \Rightarrow i fattori davanti alle parti cinetica e potenziale sono gli stessi: \mathcal{L} e \mathcal{L}' proporzionali \Rightarrow equazioni del moto invarianti \Rightarrow se abbiamo una soluzione delle equazioni del moto date da \mathcal{L} , la soluzione per \mathcal{L}' la possiamo interpretare come soluzione di \mathcal{L} avendo rscalato le variabili (e le condizioni iniziali). Se il sistema è invariante per rscalamento (perché ho imposto un legame tra le scale) le soluzioni sono ugualmente rscalate. Soluzione del problema iniziale e la soluzione scalata del problema scalato devono risolvere le stesse equazioni del moto: devono essere entrambe soluzioni fisiche.

Se $\vec{x}(t+T) = \vec{x}(t)$ (periodica), allora $\vec{x}'(t')$ è periodica con $T' = T \lambda^{1-\frac{a}{2}}$. Se d è una dimensione caratteristica, $d' = \lambda d$.

Normalizzando nell'orbita iniziale $d = 1, T = 1$, troviamo una relazione di scala tra nuova dimensione dell'orbita e il suo nuovo periodo.

$$T \propto d^{1-\frac{a}{2}} \quad \begin{cases} \text{Se } a = 2 & T \text{ è invariante (linearità)} \\ \text{Se } a = -1 & T \propto d^{\frac{3}{2}} \text{ (terza legge di Keplero)} \end{cases} \quad (5.16)$$

Quindi, se abbiamo una soluzione periodica, possiamo trovare una soluzione rscalata che ha un periodo adeguatamente rscalato. Il periodo nella nuova orbita rscalà con lo spazio in modo che se moltiplichiamo per λ le dimensioni l'orbita, T è moltiplicato per $\lambda^{1-a/2}$. Possiamo quindi trovare relazioni di similitudine tra quantità fisiche diverse del problema: tra t e spazio: periodo, dimensioni dell'orbita (es: raggio massimo), o altre quantità come l'energia... che ci permettano di capire, dato il fattore di cui rscalà una di queste quantità, come rscalano le altre, senza calcoli complicati. Questo è possibile perché il potenziale è una funzione omogenea di grado a : per un potenziale generico non possiamo usare la similitudine.

- Nel potenziale armonico o elastico ($a = 2$), $T \propto d^0$, cioè T è invariante di scala: a prescindere dalla dimensione tutte le orbite periodiche hanno lo stesso periodo- un esempio è il pendolo per piccole oscillazioni. Il potenziale della molla è quadratico, le equazioni del moto sono lineari. Linearità del sistema significa invarianza di scala per le sue proprietà.
- Nel potenziale di Keplero ($a = -1$), T rscalà con $d^{3/2}$: terza legge di Keplero. Considerazioni di similitudine portano a stabilire che il potenziale di Keplero deve soddisfare questa relazione (vedi Landau): la lagrangiana è invariante, e il rscalamento spaziale e temporale lascia la soluzione inalterata (a meno di rscalarla), a patto che sia soddisfatta questa relazione tra dimensioni spaziali e temporali. La dimensione spaziale è il semiasse maggiore dell'ellisse percorsa da un pianeta. L'approccio con l'invarianza di scala ci dice che è una legge forte, dettata non dalla particolarità che il potenziale di Keplero crea orbite ellittiche, ma dal fatto che il potenziale sia omogeneo.

Applichiamo ai problemi unidimensionali

$$V(x) = kx^{2a} \quad \text{con } 2a \geq 2$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + k \frac{x^{2a}}{(x^2)^a}$$

$a \geq 1$ se no la forza sarebbe singolare in O. Potenziale funzione omogenea di x^2 (x^2 invece che x per dare un significato all'esponente a quando è reale), attrattivo, unidimensionale. Il potenziale ha solo orbite limitate con due punti di inversione direttamente legati all'energia. Ha un minimo nell'origine.

Imponendo $E = V(x_{\pm})$ troviamo i punti di inversione $x_{\pm} = \left(\frac{E}{k}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

Determiniamo la dipendenza funzionale di H dall'azione I. (rispetto alle slides ho messo il 2 prima del potenziale). L'azione è l'integrale dell'elemento di area su tutta l'orbita-area sottesa da una curva a energia costante- diviso per 2π . Dato che integriamo in x, l'unico parametro da cui dipende l'azione è l'energia.

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{H=E} p(E, x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{2E - 2kx^{2a}} dx$$

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - kx^{2a} \quad x' = \lambda x \quad t' = \mu t$$

$$\mathcal{L}' = \frac{m\lambda^2}{2\mu^2} \dot{x}^2 - k\lambda^{2a} x^{2a} \Rightarrow \mu = \lambda^{1-a} \text{ per invarianza}$$

Essendo il potenziale omogeneo, possiamo scalare in modo correlato spazio e tempo per ottenere una \mathcal{L}' scalata proporzionale a \mathcal{L} : possiamo usare il principio di similitudine per trovare la dipendenza dell'energia dall'azione.

$$I' = \frac{\lambda^2}{\mu} I = \lambda^{1+a} I \quad E' = \lambda^{2a} E$$

Come scalano I ed E ? Dentro l'integrale abbiamo p , che scala- come una velocità- con $\frac{\lambda}{\mu}$, e dx , che scala con λ . L'energia scala dello stesso fattore che è nel potenziale, perché l'abbiamo imposto in \mathcal{L} .

Abbiamo, ricavando λ e sostituendo nell'espressione di E , la relazione tra E e I :

$$I \propto \lambda^{1+a} \quad E \propto \lambda^{2a}$$

$$\Rightarrow E = cI^{\frac{2a}{1+a}}$$

ricavata solo dal metodo di similitudine, senza dover risolvere l'integrale. Per trovare c invece dobbiamo risolvere l'integrale.

$$I = \frac{1}{\pi} \sqrt{2E} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{1 - \frac{kx^{2a}}{2E}} dx \quad u = \left(\frac{k}{2E}\right)^{\frac{1}{2a}} x, \quad du = \left(\frac{k}{2E}\right)^{\frac{1}{2a}} dx$$

$$I = \frac{1}{\pi k^{\frac{1}{2a}}} \sqrt{2} E^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2a}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^{2a}} du$$

$$I = \frac{1}{\pi k^{\frac{1}{2a}}} \sqrt{2} E^{\frac{a+1}{2a}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^{2a}} du$$

Portando fuori quello che dipende dall'energia, resta un integrale adimensionale. c dipende dal problema, ad esempio da come è fatto il potenziale, e ci possono essere integrali non risolubili.

5.4.1 Angolo tra pericentro e apocentro nel limite $E \rightarrow 0$

Si consideri il potenziale centrale $V(r) = -\frac{k}{r^a}$, $0 < a < 2$. E' un potenziale attrattivo. 0 è escluso perché se no sarebbe come se non ci fosse, 2 è escluso per evitare la singolarità. Infatti un potenziale $-\frac{k}{r^2}$ ha lo stesso valore in

potenza del potenziale centrifugo: è un caso limite, perché a seconda delle condizioni iniziali l'orbita può cadere nel centro.

Abbiamo

$$E = \frac{mr^2}{2} + \underbrace{\frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^a}}_{V_{\text{eff}}} \quad (5.17)$$

Per ognuna delle orbite possiamo calcolare $\Delta\theta \Rightarrow$ calcoliamo il limite per orbite con energia che tende a 0.

Posto $u = \frac{1}{r}$ consideriamo $\frac{du}{d\theta}$.

$$E' = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 - \frac{mk}{p_\theta^2} u^a \quad \text{con } E' = \frac{Em}{p_\theta^2} \quad (5.18)$$

Nei potenziali centrali molte volte è conveniente il cambio di variabile da r a u , poi si considera $\frac{du}{d\theta}$, cioè θ come parametro. Questo perché si vuole studiare l'equazione dell'orbita: l'orbita non ha informazioni temporali, solo spaziali, allora si usa θ come parametro. Così riscriviamo l'energia scalata E' con un termine cinetico, uno elastico (dal potenziale centrifugo riscalato), e un termine che è il potenziale fisico rascalato. Studiare le orbite significa studiare le soluzioni dell'equazione differenziale al primo ordine per $u(\theta)$, da cui ricaviamo $r(\theta)$, che descrive l'orbita in coordinate polari. Abbiamo solo informazioni geometriche, non dinamiche.

Abbiamo orbite limitate per $E < 0$. Ricordando la definizione di $\Delta\theta$ (Eq.5.6),

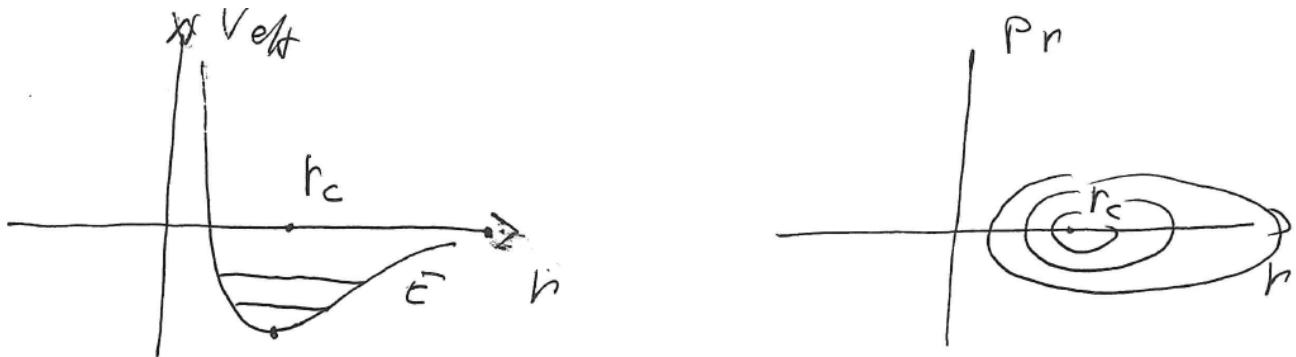


Figura 5.6: Potenziale centrale

$$d\theta = \frac{du}{\sqrt{2E' - u^2 + 2\frac{mk}{p_\theta^2}u^a}} \Rightarrow \Delta\theta = \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{2E' - u^2 + 2\frac{mk}{p_\theta^2}u^a}}$$

Le orbite generate dal potenziale sono delle orbite limitate in corrispondenza di $E < 0$: non sappiamo se sono chiuse, quindi non sappiamo se sono periodiche. Punto fisso radiale: orbita circolare. Le traiettorie, da ellissi, si deformano sempre più, perché un punto di inversione va a ∞ .

Dall'energia riscalata ricavata per l'equazione dell'orbita, separando i differenziali, troviamo l'espressione di $\Delta\theta$. Integriamo tra i due punti di inversione, pericentro e apocentro, che sono invertiti usando u invece che r . Vogliamo calcolare lo spostamento angolare nel limite di $E \rightarrow 0$; $E = 0$ è escluso perché l'orbita non sarebbe più confinata: calcoliamo il limite da sotto.

[Il calcolo del limite, rispetto all'approccio numerico, ci consente di vedere l'eventuale dipendenza da alcuni parametri e studiare comportamenti in situazioni speciali in cui dalla numerica non capiremmo le proprietà intrinseche del sistema.]

$\Delta\theta = \Delta\theta(E)$ problema: calcolare $\lim_{E \rightarrow 0} \Delta\theta(E)$. Se $E \rightarrow 0$ un punto di inversione va a $\infty \Rightarrow r \rightarrow \infty \Rightarrow u_- \rightarrow 0$ ed $E' \rightarrow 0$. Nel limite, per la continuità dell'equazione, sostituiamo direttamente $E' = 0$.

$$\lim_{E \rightarrow 0} \Delta\theta = \int_0^{u_+} \frac{du}{\sqrt{-u^2 + 2\frac{mk}{p_\theta^2}u^a}}$$

Usando la sostituzione $x = u^{a-2}$

$$\frac{du}{u\sqrt{2\frac{mk}{p_\theta^2}u^{a-2}-1}} = \frac{(a-2)u^{a-3}du}{(a-2)u^{a-2}\sqrt{2\frac{mk}{p_\theta^2}u^{a-2}-1}} = \frac{dx}{(a-2)x\sqrt{2\frac{mk}{p_\theta^2}x-1}}$$

$$\frac{1}{2-a} \int_{\frac{p_\theta^2}{2mk}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2\frac{mk}{p_\theta^2}x-1}}$$

Ponendo $y = \frac{2mk}{p_\theta^2}x$, $dy = \frac{2mk}{p_\theta^2}dx$

$$\frac{1}{2-a} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y-1}}$$

Ponendo $y = 1 + z^2$, $dy = 2zdz$ abbiamo ¹⁰

$$\frac{1}{2-a} \int_0^{\infty} \frac{2zdz}{z(1+z^2)} = \frac{2}{2-a} \arctan z \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2-a}$$

Solo per $a = 1$, $\lim_{E \rightarrow 0} \Delta\theta = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{E \rightarrow 0} \Delta\theta = \frac{\pi}{2-a}} \quad (5.19)$$

Prima avevamo calcolato $\Delta\theta$ vicino all'orbita circolare (Eq. 5.14), ottenendo un risultato diverso rispetto a quando $E \rightarrow 0 \Rightarrow$ nel mezzo il $\Delta\theta$ deve cambiare, assumendo tutti i valori di un segmento reale perché $\Delta\theta$ dipende con continuità da E . Solo il potenziale di Keplero ha un'invarianza di scala per cui il $\Delta\theta$ NON dipende dall'energia (oltre lo 0 le orbite non sono limitate, quindi non ha senso definire $\Delta\theta$, e nemmeno per $E = 0$). E' una parte della dimostrazione del teorema di Bertrand: il potenziale di Keplero è l'unico potenziale centrale di questo tipo con tutte le orbite limitate chiuse- perché dopo un giro l'orbita si chiude dato che $\Delta\theta = \pi!!$ Gli altri anche se hanno la buona proprietà per orbite quasi circolari, non hanno lo stesso valore per $E \rightarrow 0$: variando dall'orbita circolare a orbita con $E = 0$ passeremo per numeri irrazionali rispetto a π .

orbite limitate \Rightarrow orbite chiuse.

$$-\frac{k}{r^a} = V(r) \quad 0 < a < 2$$

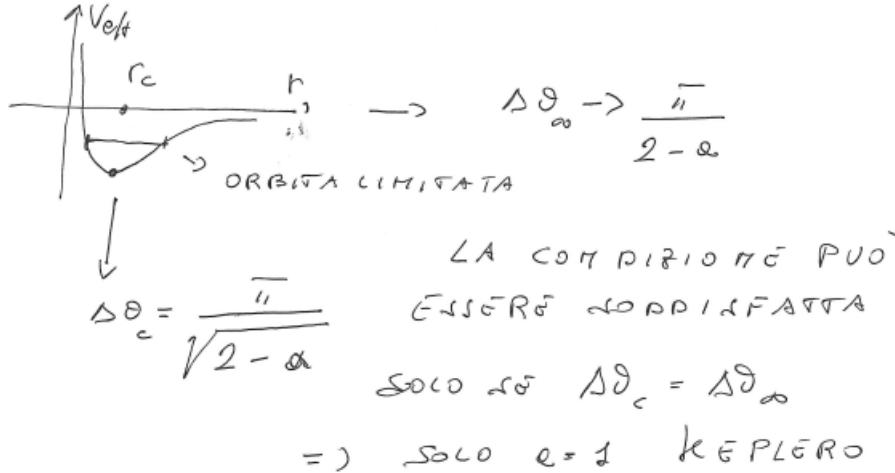
Nota: Perché le orbite limitate siano chiuse, bisogna che $\Delta\theta$ sia costante, e un numero razionale rispetto a π , se no con probabilità 1 le orbite che consideriamo non sono chiuse (i numeri razionali hanno misura

¹⁰Il cambio di variabile da y a z è fatto secondo il seguente ragionamento. Partiamo dall'integrale

$$\frac{1}{2-a} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y-1}}$$

Ponendo prima $w = y - 1$, $dw = dy$, poi $\sqrt{w} = z$, $dw = 2zdz$ otteniamo

$$\frac{1}{2-a} \int_0^{\infty} \frac{dw}{(1+w)\sqrt{w}} = \frac{1}{2-a} \int_0^{\infty} \frac{2sds}{(1+s^2)s}$$



nulla rispetto ai numeri reali, quindi le orbite chiuse sono un'eccezione tra le orbite limitate). Però dobbiamo dimostrare che $\Delta\theta$ è COSTANTE per il potenziale di Keplero, e non capita semplicemente che abbia lo stesso valore ai due estremi!

5.4.2 Equazione dell'orbita del problema di Keplero

$$V(r) = \frac{1}{r}, \quad u = \frac{1}{r} \quad E' = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{km}{p_\theta^2} u \quad E' = \frac{Em}{p_\theta^2}$$

$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{km}{p_\theta^2}$ equazione di Newton equivalente

$$\text{soluzione } u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{km}{p_\theta^2}$$

Consideriamo ancora l'energia riscalata. Sistema meccanico con $m=1$, potenziale di molla e potenziale lineare \Rightarrow forza costante. L'equazione di Newton per l'equazione dell'orbita è lineare a coefficienti costanti forzata con forzante costante. Soluzione dell'omogenea è l'oscillatore armonico + soluzione particolare, che troviamo facilmente cercando una soluzione costante (quindi imponendo $\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$).

Fissate le condizioni iniziali, fissiamo A e θ_0 . A ampiezza di oscillazione delle orbite limitate è legata all'energia E' , invece θ_0 è determinato dalla scelta dell'istante iniziale. Mentre A ha un significato fisico, θ_0 no perché il sistema è indipendente dal tempo. Scegliamo l'inizio del tempo quando $u(\theta)$ è nel massimo, cioè r è nel minimo: massimo avvicinamento dell'orbita al centro del campo, è solo la scelta di dove parte l'orbita.

$$\theta_0 = 0 \text{ non cambia l'orbita: } \begin{cases} \text{pericentro} & u(0) = A + \frac{km}{p_\theta^2} \\ \text{apocentro} & u(\pi) = -A + \frac{km}{p_\theta^2} \end{cases} \quad (5.20)$$

Vogliamo determinare A . Usiamo la precedente relazione 5.20 tra A e il pericentro e calcoliamo questo dall'energia. Pericentro e apocentro sono i punti di inversione, dunque in cui $E' = V_{\text{eff}}$.

Calcolo del pericentro:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{u^2}{2} - \frac{km}{p_\theta^2} u, u^2 - \frac{2km}{p_\theta^2} u - 2E' = 0 \\ u_+ &= \frac{km}{p_\theta^2} + \sqrt{\left(\frac{km}{p_\theta^2} \right)^2 + \frac{2Em}{p_\theta^2}} = \frac{km}{p_\theta^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{k^2m}} \right) \end{aligned}$$

dove prendiamo la soluzione con il + perché u è massimo al pericentro.

Siamo nelle condizioni

$$E_{\min} = -\frac{k^2m}{2p_\theta^2} < E < 0$$

ossia le condizioni di esistenza della radice. (E_{\min} energia dell'orbita circolare, minimo valore del potenziale efficace). Per il momento $E < 0$ perché studiamo le orbite limitate, per comprendere se è vero che tutte le orbite limitate sono chiuse (ma lo stesso calcolo è valido per orbite non limitate). Dall'Eq. 5.20 segue

$$\Rightarrow A = \frac{km}{p_\theta^2} \sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{k^2m}} \quad (5.21)$$

Dal legame tra A e pericentro, e tra pericentro e E' , abbiamo trovato la relazione tra A ed E . Determinare A dall'apocentro sarebbe stato equivalente (due segni \Rightarrow stesso risultato).

Sostituendo al posto di A la sua espressione, all'interno della soluzione generale. Mettiamo in esplicito $u = 1/r$ e ricaviamo $r(\theta)$. Orbite kepleriane

$$u(\theta) = \frac{km}{p_\theta^2} \sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{k^2m}} \cos \theta + \frac{km}{p_\theta^2}$$

$$r(\theta) = \frac{\frac{p_\theta^2}{km}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{k^2m}} \cos \theta} = \frac{\bar{p}}{1 + e \cos \theta} \quad (5.22)$$

Equazione di una quadrica

$$r(1 + e \cos \theta) = p, \quad r + xe = p, \quad r^2 = (ex - p)^2$$

$$x^2 + y^2 = e^2 x^2 - 2epx + p^2 \quad (5.23)$$

se $e < 1 \Rightarrow$ abbiamo un'ellisse

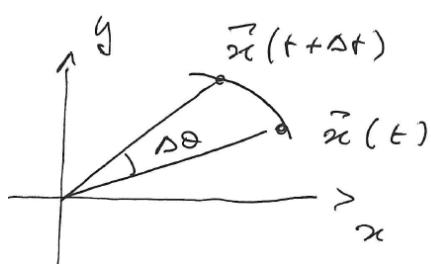
Nel riscrivere con le coordinate cartesiane ci accorgiamo che è una quadrica nel piano, perché abbiamo un polinomio di grado al massimo 2 in x e y . Possiamo riscrivere, per la quadrica, mettendo il parametro p (da NON confondere con i momenti) e l'eccentricità: quadrica in coordinate polari. Guardiamo orbite limitate: r è limitato perché $e < 1$ dato che $E < 0 \Rightarrow$ il denominatore non si può annullare. I casi sono

- Se $e < 1$ la quadrica è limitata, cioè un'ellisse.
- Otteniamo il cerchio quando $E = E_{\min} \Rightarrow e = 0 \Rightarrow r$ costante (il termine sotto la radice è 0). p è il raggio dell'orbita circolare, in corrispondenza del minimo di V_{eff}
- se fosse $e = 1$: parabola, si semplifica x^2 .
- $e > 1$: iperbole: il coseno di θ può far sì che il denominatore si annulli: orbite non limitate, e θ non può assumere tutti i valori del dominio.

Nota: Abbiamo appena dimostrato che le orbite di Keplero sono chiuse, essendo ellissi! $\Rightarrow \Delta\theta$ deve essere costante e valere π .

5.5 Leggi di Keplero

1) La velocità areolare è costante



$$\Delta A(t) \simeq \frac{r^2(t)}{2} \Delta\theta$$

$$\dot{A}(t) = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{p_\theta}{2m} \quad (5.24)$$

$$dA(\theta) = \int_0^r r dr d\theta = \frac{r^2}{2} d\theta$$

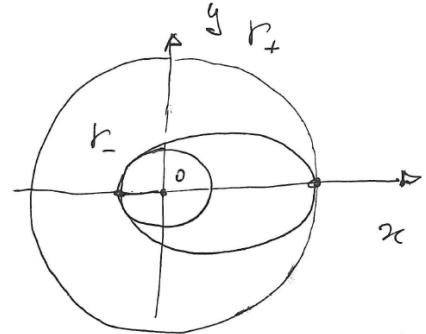
\dot{A} è costante perché p_θ si conserva: tutti i potenziali centrali

Vogliamo dimostrare che l'area spazzata dall'orbita tra t e $t + \Delta t$ non dipende dalla posizione del pianeta: è costante. Stimiamo l'area del piccolo settore circolare: più formalmente, usiamo l'elemento d'area in coordinate polari. Dividendo per dt otteniamo la velocità areolare. Riscriviamo con p_θ , che è integrale primo del moto. Quindi questa legge di Keplero è in realtà una proprietà da tutti i potenziali centrali di ogni tipo, perché conservano il momento della quantità di moto

2) Le orbite limitate sono ellissi con il fuoco nel centro del campo

Dobbiamo mostrare che il centro dell'orbita (origine) è nel fuoco. Dall'equazione riscritta in forma canonica, possiamo verificare che la traslazione che porta alla forma canonica (toglie il termine misto), è la stessa che porta il centro nel fuoco.

$$\begin{aligned} x^2(1-e^2) + y^2 + 2exp - p^2 &= 0, & x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{2exp}{1-e^2} - \frac{p^2}{1-e^2} &= 0 \\ \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 - \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} - \frac{p^2}{1-e^2} &= 0 \\ \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= \frac{e^2p^2 + p^2(1-e^2)}{(1-e^2)^2} \\ \frac{\left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)}} &= 1 \end{aligned}$$



da cui si ricavano contemporaneamente i semiassi e il fatto che il centro dell'ellisse è traslato rispetto all'origine del campo di una distanza pari alla distanza focale c , essendo per le proprietà dell'ellisse $c = ea$.

$$\text{semiasse maggiore } 2a = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2}, \quad a = \frac{p}{1-e^2}$$

$$\text{semiasse minore } b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

Riscrivendo il semiasse maggiore con le costanti fisiche

$$a = \frac{\frac{p_\theta^2}{km}}{\frac{2|E|p_\theta^2}{k^2m}} = \frac{k}{2|E|} \quad a \propto \frac{1}{|E|}$$

L'ellisse è tangente alla circonferenza con il raggio pari al pericentro, e a quella con il raggio pari all'apocentro. semiasse maggiore = (pericentro + apocentro)/2 ($\cos\theta = 1$ pericentro, $\cos\theta = -1$ apocentro). Per il semiasse minore, calcoliamo dall'Eq. 5.23 il massimo valore di y , oppure usiamo il legame tra semiasse maggiore e minore nota la posizione del fuoco $c^2 = a^2 - b^2$. p ha le dimensioni di una lunghezza.

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2(e^2 - 1) - 2exp + p^2 \\ \frac{dy^2}{dx} &= 2x(e^2 - 1) - 2ep = 0 \\ x_{\max} &= \frac{ep}{e^2 - 1} \\ y &= \sqrt{\frac{e^2p^2}{e^2 - 1} - \frac{2e^2p^2}{e^2 - 1} + p^2} = \sqrt{\frac{-e^2p^2 + e^2p^2 - p^2}{e^2 - 1}} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}$$

3) $a^{\frac{3}{2}} \propto T$ come ci aspettavamo da considerazioni di similitudine

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi \overline{ab}}{\dot{A}} = 2\pi \frac{\sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}} m}{p_\theta} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi p^{\frac{1}{2}} \frac{m}{p_\theta} = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \frac{p_\theta}{\sqrt{km}} \frac{m}{p_\theta} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Il fuoco dell'orbita sta nel centro del campo. Calcolare i due semiassi serve per calcolare il periodo come rapporto tra area e velocità angolare. Integrare il problema di Keplero, cioè calcolare $r(t)$ e $\theta(t)$ richiederebbe più conti, ma

il periodo è più semplice.

Abbiamo scritto $p^2 = p^{3/2} p^{1/2}$ per mettere in evidenza $a^{\frac{3}{2}}$ poi sostituito la definizione di p , che è $\frac{p_\theta^2}{km}$.

Curiosità:

- Se il potenziale sul piano dipende da θ (il campo non è centrale), il momento di p non può essere integrale primo del moto. La non esistenza del secondo integrale primo del moto (abbiamo solo l'energia) quindi è legata alla dipendenza da θ - non al fatto di avere un campo non irrotazionale, perché in tal caso non si potrebbe nemmeno scrivere il potenziale. Per il campo magnetico troviamo un modo di procedere.
- Se il vincolo è mobile (dipende da t), \mathcal{L} deve dipendere esplicitamente da t , e l'energia non si conserva. Punto materiale su una palla che si gonfia, la forza vincolare che tiene il punto sulla palla fa lavoro. Nonostante le forze possano essere conservative.
- Un punto che rimane dentro uno spazio curvo \Rightarrow devono esistere forze che lo tengono. Se avessimo un campo gravitazionale dipendente dal tempo, secondo la relatività, potremmo simulare la situazione con una curvatura che dipende dal tempo: vincolo dipendente dal tempo.
- Se abbiamo una coordinata ciclica, abbiamo un integrale primo del moto. Ma possiamo scrivere una lagrangiana da cui troviamo un integrale primo anche senza avere già la coordinata ciclica: allora l'integrale primo è nascosto, e possiamo far venir fuori qual è la coordinata ciclica. Ci sono esempi in cui non esiste un sistema di coordinate per cui riusciamo a scrivere \mathcal{L} con coordinate cicliche, nonostante esista l'integrale primo: trottola di Kovaleskaja.

Curiosità:

- Perché le orbite sono percorse in senso orario? E' una convenzione: quando deriviamo il coseno otteniamo -seno \Rightarrow la soluzione dell'oscillatore armonico va in senso orario. Sono anche sistemi invertibili nel tempo, quindi il verso non è un'informazione fondamentale in meccanica, mentre in biologia e fisica delle particelle sì. Infatti le proteine nel nostro corpo sono levogire, mentre le destrogire sono responsabili di malattie. Neutrini ed antineutrini vanno in sensi opposti.
- Il limite delle considerazioni di similitudine così come li abbiamo visti è il limite di validità della meccanica classica. Non possiamo applicare questi criteri di similitudine direttamente sulle variabili nella meccanica quantistica, lo dobbiamo fare sull'equazione di Schrodinger, non di Newton.

5.6 Problema dei due corpi

La fisica dipende da $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$: $V(r)$ potenziale di interazione.

Consideriamo un sistema isolato con due punti materiali, in uno spazio omogeneo, isotropo. Il potenziale di interazione può essere solo radiale, dipendente dalla distanza tra i due corpi: la distanza tra i due punti è l'unica quantità fisica rilevante, quindi se c'è un'interazione può dipendere solo dalla distanza. In fisica ci riconduciamo a potenziali fondamentali. Interazione tra più corpi: somma tra interazioni a due corpi. I potenziali della fisica sono di tipo centrale. Invariante per simmetrie dello spazio.

$$\mathcal{L} = \frac{m_1(\dot{\vec{r}}_1)^2}{2} + \frac{m_2(\dot{\vec{r}}_2)^2}{2} - V(r) \quad \text{lagrangiana del sistema}$$

La lagrangiana è la somma dell'energia cinetica del primo e secondo corpo, meno il potenziale centrale. Servono 6 coordinate per definire la configurazione del sistema, gradi di libertà, 3 per ogni punto. Ma ci sono simmetrie. Il potenziale dipende solo da r , e abbiamo 2 energie cinetiche separate \Rightarrow introduciamo delle coordinate per far emergere le coordinate cicliche, che hanno associati integrali primi del moto. Invece di usare r_1 e r_2 per scrivere la lagrangiana, vogliamo usare r_{cm} e la posizione relativa r . Poi calcoliamo le velocità.

cambio di coordinate

$$\begin{cases} \vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} \\ \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1 \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{m_1(\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}) + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_{cm} = \dot{\vec{r}}_2 - m_1 \frac{\dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_{cm} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_{cm} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \end{cases} \quad (5.26)$$

Abbiamo invertito il sistema per trovare \dot{r}_1 e \dot{r}_2 . Il sistema di coordinate cambia il segno di r quando scambiamo r_1 e $r_2 \Rightarrow$ basta ricavare una velocità, l'altra la otteniamo per simmetria scambiando gli indici e il segno di r .

Calcoliamo ora l'energia cinetica, che ci servirà nella lagrangiana:

$$T = \frac{m_1(\dot{\vec{r}}_1)^2}{2} + \frac{m_2(\dot{\vec{r}}_2)^2}{2} = \frac{m_1 \left(\vec{v}_{cm} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2}{2} + \frac{m_2 \left(\vec{v}_{cm} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2}{2} =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)}{2} \vec{v}_{cm}^2 + m_1 \frac{m_2^2(\dot{\vec{r}})^2}{2(m_1 + m_2)^2} + m_2 \frac{m_1^2(\dot{\vec{r}})^2}{2(m_1 + m_2)^2}$$

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{(m_1 + m_2)}{2} \vec{v}_{cm}^2}_{\text{massa ridotta}} + \underbrace{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2}}_{\text{energia relativa}} = T_{cdm} + T_{relativa}, \quad \text{massa ridotta } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

T è data dall'energia cinetica di un punto materiale messo nel centro di massa, con massa pari alla somma delle masse, e dall'energia cinetica di un punto materiale che si muove con la velocità relativa ed ha massa pari alla massa ridotta (se le masse sono uguali, è la metà di ogni massa). Diventa la massa di un punto efficace che dà nell'energia il contributo del moto relativo. Nel sistema del centro di massa, abbiamo solo il secondo termine: energia cinetica relativa, che NON dipende dal sdr inerziale scelto, dipendendo solo dal moto relativo.

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{M}{2} \vec{v}_{cm}^2}_{\text{energia cinetica del centro di massa}} + \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2}_{\text{energia cinetica relativa}} - V(|\vec{r}|) = \mathcal{L}_{cm} + \mathcal{L}', \quad \text{dove } M = m_1 + m_2 \quad (5.27)$$

\mathcal{L} è divisa in due pezzi: 1) energia cinetica del centro di massa T_{cdm} , che non compare da nessun'altra parte: il potenziale dipende solo da r. 2) energia cinetica relativa - potenziale $T_{relativa} - V(r)$, cioè la lagrangiana di un altro punto che è INDIPENDENTE dal moto del centro di massa. Abbiamo quindi due sistemi indipendenti: dinamica del centro di massa e dinamica relativa.

$$\vec{r}_{cm} \text{ sono coordinate cicliche} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_{cm}} = M \vec{v}_{cm} \text{ integrali primi del moto}$$

Le coordinate del cdm sono cicliche (non compaiono esplicitamente nella lagrangiana) \Rightarrow in un sistema di punti materiali isolati, il cdm si muove di moto rettilineo uniforme: le quantità di moto del cdm sono integrali primi del moto, quindi la velocità è costante. Non solo il sistema del cdm è privilegiato perché scomponere T in energia cinetica del cdm ed energia relativa al cdm, ma si muove di moto rettilineo uniforme! Quindi il sdr del cdm è inerziale: si può studiare la dinamica relativa con \mathcal{L}' nella forma $T' - V$ non ci sono forze apparenti.

Usiamo le coordinate polari per \mathcal{L}'

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \text{ è invariante} \Rightarrow \text{il piano } \perp \vec{L} \text{ è invariante: piano del moto}$$

Punto di massa μ che si muove sotto l'azione di un potenziale centrale. Tutti i moti legati a un potenziale centrale avvengono sul PIANO perché L è un invariante del moto vettoriale¹¹ (il momento della quantità di moto si conserva) \Rightarrow si conserva anche la direzione \Rightarrow il piano ortogonale a questa direzione deve essere invariante, è il piano che contiene l'origine del campo, r_0, v_0 (se il punto uscisse da questo piano, dovrebbe variare la direzione).

¹¹Poiché \vec{F} è parallelo a \vec{r} , il momento della forza $\vec{N} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ è nullo. Pertanto, in virtù dell'equazione del momento angolare $\dot{\vec{L}} = \vec{N}$, si ha che il vettore $\vec{L} = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}$ si conserva.

Qualunque punto materiale soggetto a un potenziale centrale in \mathbb{R}^3 ha un moto che avviene su un piano che dipende dalle ci: \vec{L} determina il piano univocamente \Rightarrow siamo autorizzati a usare le coordinate polari del piano. Invece in astronomia si usa un sistema di coordinate 3d che mette in evidenza l'inclinazione dell'orbita degli altri pianeti, mentre noi guardiamo un pianeta alla volta quindi possiamo rimanere nel piano.

$$\mathcal{L}' = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Dovremo ora risolvere il moto per $r(t)$, moto relativo: ci siamo messi nel sistema (inerziale) del cdm. Successivamente bisogna riscalare \vec{r} per trovare \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . Usiamo il fatto che la relazione tra le velocità è la stessa che tra le coordinate 5.26, e imponiamo $v_{cm} = 0$:

$$\begin{cases} \vec{r}_1(t) &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}r(t) \\ \vec{r}_2(t) &= \frac{m_1}{m_1+m_2}r(t) \end{cases} \quad (5.28)$$

Per passare a un sdr qualunque inerziale, vi sommiamo il moto del centro di massa. Se mettessimo il potenziale di Keplero, $r(t)$ farebbe un'ellisse: sia r_1 che r_2 fanno traiettorie ellittiche, che sono la stessa traiettoria riscalata: dobbiamo riflettere r rispetto all'origine. Se $m_2 \gg m_1$, $\vec{r}_1(t) \sim \vec{r}(t)$, $\vec{r}_2(t) \sim 0$.

cioè la dinamica di r_1 coincide con l'ellisse del moto relativo, mentre r_2 fa un'ellisse così piccola che la vediamo nell'origine del campo. E' il caso del moto di un pianeta rispetto al Sole: l'origine del campo è nel fuoco, il Sole sta nell'origine del sistema. Invece in un sistema binario si hanno due ellissi da parti opposte. E' un problema fisico perché il potenziale viene dall'interazione tra due corpi.

5.6.1 Calcolo sezione d'urto

Concetto base nella fisica delle particelle: acceleratori, rivelatori. Noi vedremo l'esempio legato al potenziale di Keplero. Spiegato bene sul Landau.

Vi è un centro scatteratore, origine del potenziale centrale, a cui non riusciamo ad accedere (magari ha dimensioni atomiche, magari è un buco nero). Osserviamo l'effetto di mandare una particella nel campo attrattivo, che la deflette e la porta dall'altra parte, e non è in grado di trattenerla perché l'energia si conserva. Se parte dall'infinito, e V è attrattivo, non possiamo intrappolarla, perché ha anche l'energia per tornare all'infinito: per finire in una buca di potenziale deve esserci una perdita di energia. E' uno dei problemi più grossi sia nelle applicazioni che nella comprensione della natura: in un sistema non dissipativo, come è possibile che le particelle si siano aggregate per formare i pianeti? Urto anelastico degli asteroidi \Rightarrow la rottura dei legami interni delle rocce ha dissipato energia \Rightarrow i due asteroidi possono restare vicini. Però nel mondo microscopico gli urti sono sempre elastici. Mettendo una particella dell'acceleratore, fa un giro della macchina ed esce \Rightarrow bisogna trovare il modo di simulare il moto dissipativo, così che rimanga intrappolata, se no una particella che viene dall'infinito, va all'infinito.

b = parametro d'urto

χ = angolo di deflessione

n = flusso di particelle/superficie

v_∞ = velocità iniziale

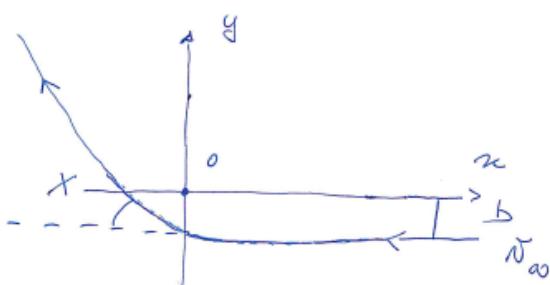
$$d\sigma = \frac{dN}{n}$$

$dN = \#$ (numero) di particelle deflesse ad un angolo χ

$[d\sigma] = m^2$ superficie

Controlliamo la sorgente di particelle, quindi la velocità con cui la particella è inserita e mandata contro il centro scatteratore, di cui sappiamo la posizione. Controlliamo la distanza rispetto alla retta passante per il centro scatteratore: parametro d'urto. Se fossimo esattamente sulla retta: caduta sul centro. Se no: deflessione. Misuriamo il parametro di deflessione: mettiamo un rivelatore dopo il centro e misuriamo quante particelle sono state deflesse a un angolo oppure l'angolo di deflessione a cui arriva una particella (siamo in $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ angolo solido)

Vogliamo conoscere il numero di particelle misurate a un certo angolo χ , rispetto al flusso di particelle entranti. Condizioni iniziali: le particelle hanno tutte la stessa energia, ma possono avere b diversi; rispetto al flusso poi normalizziamo dN . Il flusso definisce la luminosità del fascio. Otteniamo la sezione d'urto: ha le dimensioni di una superficie.



Condizioni iniziali per la particella

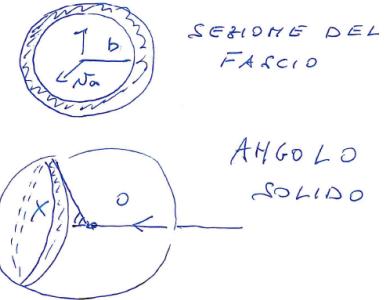
$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} \Leftarrow \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$$

$p_\theta = mbv_\infty$ il moto è piano

La dinamica implica $\chi = \chi(E, p_\theta) = \chi(b, v_\infty)$

Abbiamo fissato b e $v_0 \Rightarrow$ conosciamo gli integrali primi del moto della particella, perché da v_0 sappiamo l'energia, dato che assumiamo che non ci sia interazione tra oggetti infinitamente lontani. Per un sistema di potenziale centrale, l'altro integrale primo è p_θ (la componente ortogonale della velocità rispetto al braccio è tutta v_0). Abbiamo entrambi gli integrali primi: definizione della geometria dell'orbita. L'angolo di deflessione, che si calcola risolvendo le equazioni del moto, deve essere funzione di E e p_θ integrali, che sono funzioni di v_∞ e b . Ci interessa che χ dipenda da b : fissato b abbiamo un singolo angolo di deflessione - v_∞ è fissa, quindi la deflessione è determinata da b . Più vicino passiamo al centro scatteratore, più forte sarà la deflessione.

$$\begin{aligned} dN &= n2\pi bdb \\ d\sigma &= 2\pi b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi \\ d\Omega &= 2\pi \sin \chi d\chi \end{aligned} \quad (5.29)$$



Abbiamo infine

$$d\sigma = \frac{1}{\sin \chi} b(\chi) \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\Omega \quad (5.30)$$

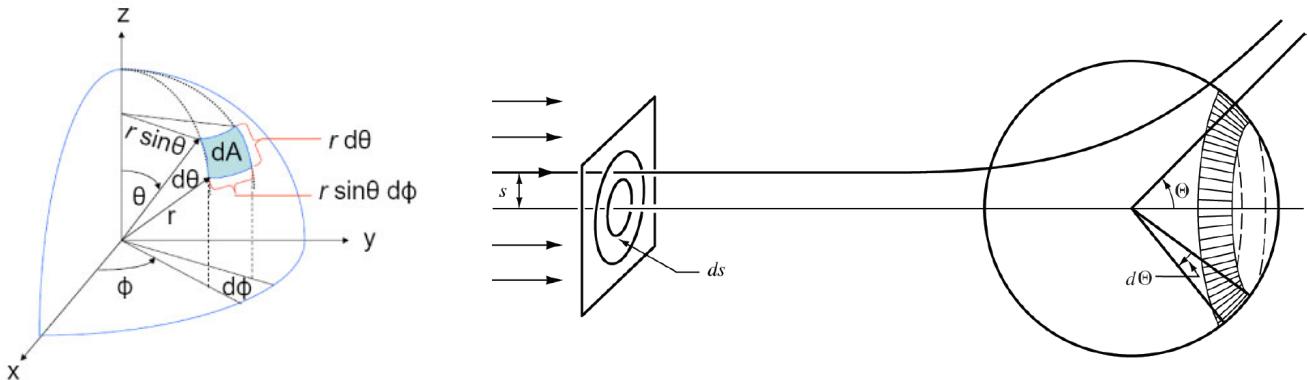


Figura 5.7: Elemento di area in coordinate sferiche

Figura 5.8: Scattering di un fascio di particelle da un centro scatteratore. Parametro d'urto b e angolo di deflessione χ nel caso di potenziale REPULSIVO.

Le particelle che saranno deflesse a χ stanno su una corona circolare di spessore infinitesimo posta a distanza b dalla retta passante per il centro. $dN = \text{flusso} \cdot \text{area della corona}$. Volendo riferire la sezione d'urto a χ , che dipende da b , nell'Eq. 5.29 esplicitiamo db in funzione di χ . Il segno della derivata dipende dal potenziale attrattivo o repulsivo (ma a noi interessa solo contare le particelle). In realtà siamo in \mathbb{R}^3 : vogliamo considerare tutte le particelle dentro la calotta sferica \Rightarrow invece di riferirci all'angolo di deflessione, ci riferiamo all'angolo solido, che calcoliamo dall'elemento di superficie della sfera. $r = 1 \Rightarrow$ il raggio della sezione è $1 \cdot \sin \chi$. Negli esperimenti interessa sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido, non χ (Eq. 5.30).

Rutherford scoprì che il modello di Thompson dell'atomo non era corretto (panettone-atomo con uvetta-elettroni) \rightarrow centro scatteratore approssimabile come punto geometrico, il nucleo è molto più piccolo dell'atomo. Bombardò atomi con un fascio di elettroni, e misurò χ rivelando l'elettrone che arrivando sulla superficie rilasciava energia quindi emetteva luce. Calcolò $d\sigma$ integrato sulla superficie del rivelatore. Nucleo: centro scatteratore con potenziale di Keplero.

orbite kepleriane \Rightarrow iperboli $e > 1$, p_0 =pericentro.

$$\begin{aligned}
 r(\theta) &= \frac{p}{1+e\cos\theta}, \quad p = \frac{p_\theta^2}{mk}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{mk^2}} \\
 \text{pericentro} \quad \theta = 0 &\Rightarrow r_p = \frac{p}{1+e} \\
 \text{apocentro} \quad \cos\Delta\theta &= \frac{1}{e} \\
 \chi &= 2\Delta\theta - \pi
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Una particella ha come soluzione geometrica $r(\theta)$ del moto una quadrica. k contiene il contributo dei protoni del nucleo. Adesso le traiettorie sono aperte: energia positiva, $e > 1$.

Il pericentro è p_0 , minima distanza dal centro del campo, mentre l'apocentro è l'infinito $\Rightarrow \Delta\theta$ è l'angolo tra il pericentro e ∞ . Per simmetria (il potenziale centrale dipende solo dalla distanza) abbiamo lo stesso angolo da una parte e dall'altra (infinito-pericentro o viceversa). Dall'equazione dell'orbita l'origine di θ è il pericentro: $\theta = 0$ il denominatore è massimo \Rightarrow distanza del pericentro. Per l'apocentro, andare a ∞ richiede annullare il denominatore $\cos(\Delta\theta) = -\frac{1}{e}$ (negativo infatti $\Delta\theta > \pi/2$). Abbiamo che $\Delta\theta \cdot 2 - \pi = \chi$. Dalla relazione 5.31, dato che e dipende da E e p_θ il quale dipende da b \Rightarrow ricaveremo la relazione tra χ e b . Lavoriamo con i moduli.

Vale che $p_\theta = mv_\infty b$

$$\begin{aligned}
 \cos(\Delta\theta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{mk^2}}} \Rightarrow \sin(\Delta\theta) = \frac{\sqrt{\frac{2E}{mk^2} \cdot p_\theta}}{\sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{mk^2}}} \\
 \tan(\Delta\theta) &= \sqrt{\frac{2E}{mk^2}} p_\theta = \sqrt{\frac{2E}{mk^2} \cdot mv_\infty b} \\
 \left| \frac{db}{d\Delta\theta} \right| &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2Em}{k^2} v_\infty}} \frac{1}{\cos^2 \Delta\theta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4E}{k^2} \cdot \frac{m}{2} v_\infty^2}} \frac{1}{\cos^2 \Delta\theta}, \quad \text{con } b = \frac{\tan(\Delta\theta)}{\frac{2E}{k}}
 \end{aligned}$$

Essendo $\Delta\theta = \frac{\chi \pm \pi}{2}$, calcoliamo la derivata composta:

$$\left| \frac{db}{d\chi} \right| = \underbrace{\left| \frac{db}{d\Delta\theta} \right|}_{\left(\frac{2E}{k} \right)} \underbrace{\left| \frac{d\Delta\theta}{d\chi} \right|}_{\sin^2(\frac{\chi}{2})} = \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{2E}{k} \right)}}_{\frac{1}{\sin^2(\frac{\chi}{2})}} \frac{1}{2}$$

Usando la relazione fondamentale della trigonometria, troviamo il seno. La relazione tra b e $\Delta\theta$ è più semplice se espressa con la tangente (la radice conterrebbe un termine quadratico di b). E' comodo che nella radice non compaia b , c'è solo p_θ con una dipendenza lineare: $\tan \Delta\theta$ è funzione lineare di b . Deriviamo b rispetto a $\Delta\theta$, poi $\Delta\theta$ rispetto a χ . Portando dentro v_0 evidenziamo l'energia. Passando all'angolo complementare il coseno diventa seno. la derivata di θ rispetto a χ dà $1/2$.

Riprendendo ora l'espressione della sezione differenziale d'urto, sostituiamo al posto di $\Delta\theta$ l'espressione in χ , la tangente diventa cotangente.

Sezione differenziale d'urto. Dall'Eq.5.30 con b appena ricavato,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{\sin \chi} \cdot \frac{\cot(\frac{\chi}{2})}{\frac{2E}{k}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{2E}{k} \right)} \frac{1}{\sin^2(\frac{\chi}{2})}}_{\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{1}{2\sin \chi} \frac{1}{\left(\frac{2E}{k} \right)^2} \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \frac{1}{\sin^2(\frac{\chi}{2})} = \frac{1}{4\sin(\frac{\chi}{2})\cos(\frac{\chi}{2})} \frac{1}{\left(\frac{2E}{k} \right)^2} \frac{\cos(\frac{\chi}{2})}{\sin(\frac{\chi}{2})} \frac{1}{\sin^2(\frac{\chi}{2})} = \left(\frac{k^2}{8E^2} \right) \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^4(\frac{\chi}{2})}
 \end{aligned}$$

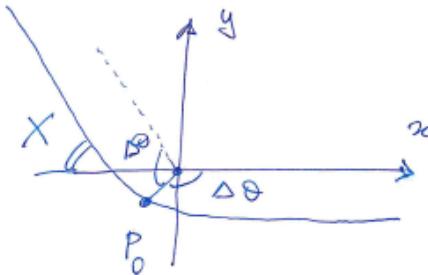


Figura 5.9: Traiettoria iperbolica di una particella attratta dal centro del potenziale kepleriano

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4(\frac{\chi}{2})} \quad (5.32)$$

Abbiamo scritto $\sin \chi$ con la formula di duplicazione, e la cot in forma esplicita. Per trovare le particelle deflesse su un intero angolo solido preso dal rivelatore, integriamo su tutto l'angolo solido.

Formula di Rutherford

1. Il segno di k NON entra: la sezione di urto è la stessa per un'interazione repulsiva (p^+p^+) o attrattiva (p^+e^-). La differenza è che nella repulsione la deflessione avviene verso il basso.
2. Dipendenza dall'inverso di E^2 : più è energetico il fascio, ovvero la singola particella, meno viene deflessa - diminuisce la sezione d'urto. Deviare una pallina da tennis richiede più forza se va veloce. Negli acceleratori più abbiamo bisogno di costruire eventi a energie elevate, più dobbiamo aggiungere particelle del fascio in maniera quadratica (accrescere la luminosità), perché l'efficienza della misura diminuisce a causa della diminuzione della sezione d'urto.
3. Se integrata su tutti gli angoli solidi (sezione totale), vicino all'origine (deflessioni molto piccole), diverge (singolarità non sommabile). Peculiarità del potenziale di Keplero: è a lungo range. Il contributo alla forza gravitazionale delle stelle al bordo della galassia, è lo stesso delle stelle vicine a una data: non ha una scala di interazione, il range di interazione è infinito. Questo è dovuto al fatto che $F \propto 1/r^2$, mentre la superficie della sfera che contiene materia che dà interazione gravitazionale aumenta con $r^2 \Rightarrow$ non riusciamo a isolare un'interazione locale, dobbiamo studiare la galassia come un tutt'uno: salvo compensazioni legati a simmetria, l'interazione avviene a ogni scala spaziale. Qualunque sia il parametro d'urto si ha una deflessione e pertanto l'area efficace per l'urto risulta infinita.

Feynman ha vinto il Nobel trovando il modo di trattare e spiegare queste divergenze in fisica teorica. E' un problema quantizzare la forza di gravità, perché è globale, e non locale.

Curiosità:

- C'è un modo di scrivere le coordinate cicliche in modo che \vec{p}_θ (vettore) sia un vettore di integrali primi del moto? No, perché \vec{p}_θ è un integrale primo che viene dalla simmetria di rotazione, che è il gruppo SO3, delle matrici ortogonali con $\det = 1$, ed è un gruppo non abeliano. (teorema di Nöther)
- Serve una dissipazione locale per giustificare la formazione dei pianeti, non basta la dissipazione a scala universo dovuto al raffreddamento

p_θ contiene il prodotto vettoriale- componente del raggio vettore ortogonale alla velocità è b . il segno $-$ di $1/e$ può essere tolto perché poi lavoriamo sui moduli.

Esercizio 5.6.1. (Arnold pag. 37) Si consideri il potenziale centrale $V(r) = kr^a$, con $a > 0$. Trovare $\lim_{E \rightarrow \infty} \Delta\theta(E)$ con $\Delta\theta$ angolo tra pericentro e apocentro.

Potenziale attrattivo, orbite limitate. Il calcolo del limite è più facile che l'integrale per i punti intermedi. Ricordiamo:

$$\frac{mE}{p_\theta^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{mk}{p_\theta^2} u^{-a} \quad (5.33)$$

dove $u = \frac{1}{r}$, da cui

$$\Delta\theta = \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{2E' - u^2 - \frac{2mk}{p_\theta^2} u^{-a}}}$$

Raccogliamo $2E'$ fuori dalla radice, da cui il seguente cambio di variabile

$$E' \rightarrow \infty \quad \frac{u}{\sqrt{2E'}} = x \quad \frac{du}{\sqrt{2E'}} = dx$$

$$\Delta\theta = \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2 - \frac{2mk}{p_\theta^2} \frac{1}{(2E')^{1+\frac{a}{2}} x^a}}}$$

$x \in [0, 1]$; se $x \rightarrow 0$ $x^{-a} \sim 2E' \Rightarrow$ il secondo termine (che per x lontano da 0 è trascurabile perché $E' \rightarrow \infty$) è trascurabile in ogni caso.

I nuovi punti di inversione sono compresi tra 0 e 1: per vederlo annulliamo il termine cinetico nell'Eq. 5.33 - o equivalentemente annulliamo la radice al denominatore - e osserviamo dalla figura il comportamento di u_+ e u_- per $E \rightarrow \infty$:

- $u_- \rightarrow 0 \Rightarrow x_- \rightarrow 0$
- $u_+ \rightarrow \infty \Rightarrow u^{-a} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{u^2}{2}$ deve crescere come $E' \Rightarrow x = \frac{u}{\sqrt{2E'}} \rightarrow 1$

$$\lim_{E' \rightarrow \infty} \Delta\theta = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \quad (5.34)$$

$E' \rightarrow \infty$ ma x^a può andare a 0: quale conta di più nel prodotto? Per $u \rightarrow 0$ quindi $x \rightarrow 0$ domina l'ultimo termine del potenziale $\frac{mk}{p_\theta^2} u^{-a}$, quindi u^{-a} deve essere messo in relazione con E . x^{-a} cresce come $2E$. $2E$ va al numeratore e semplifica 1, ma rimane $a/2$. Per come abbiamo definito x e per la relazione tra u e E , domina la potenza all'infinito \Rightarrow possiamo trascurare l'inverso nel limite. L'Arnold riporta la dimostrazione in Fig. 5.11, dove x corrisponde al nostro u . L'integrale è l'arco seno, e il limite dà $\pi/2$ qualunque sia a ! Questo mette in evidenza il potenziale elastico: $\Delta\theta$ è ancora $\pi/2$: orbite vicino all'orbita circolare, e a ∞ hanno lo stesso $\Delta\theta$: tutte le orbite limitate sono anche chiuse. Ce lo aspettavamo perché è un potenziale lineare. Nel file "Equazioni Lineari" è mostrato che il potenziale di Keplero e della molla sono facce della stessa medaglia, relativamente alle orbite limitate (se no dovremmo lavorare sulla sfera di Riemann): possiamo fare una trasformazione che mette in relazione le rispettive ellissi. Stessi calcoli usati in meccanica quantistica per studiare le autofunzioni dell'atomo di idrogeno-ottenibili da autofunzioni dell'oscillatore armonico quantizzato.

Quando u è grande domina il termine quadratico all'infinito, quando è piccolo domina il termine $\propto u^{-a}$. Calcolare i punti di inversione significa annullare la radice. Il cambio di variabile non cambia che la radice si annulli. Se il secondo pezzo della radice è trascurabile, x andrebbe in teoria da -1 a 1. Ma per l'estremo inferiore di integrazione, x non è negativo, perché u è positivo per costruzione: il punto di inversione non lo possiamo prendere negativo, quindi tende a 0. Il risultato dell'angolo tra pericentro e apocentro è $\frac{\pi}{2}$.

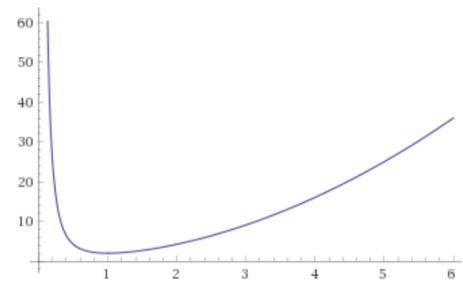


Figura 5.10: Potenziale centrale con V_{eff} nella forma $u^2 + \frac{1}{u^2}$

6 Sistemi vincolati

6.1 Vincoli olonomi bilaterali

$$F^*(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{vincolo olonomo bilaterale}^{12}$$

Vedremo come le equazioni di Lagrange siano adatte a studiare i sistemi vincolati, e le tecniche usate per lo studio del campo centrale si ripercuotono nello studio di altri problemi integrabili.

¹²Turchetti- I vincoli che limitano lo spazio delle configurazioni accessibile ad una varietà od un dominio di \mathbb{R}^3 di dicono *olonomi*. Se la condizione di vincolo è espressa da un'equazione nelle coordinate $f(x, y, z) = 0$ oppure da due equazioni $f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0$ con la condizione che *gradf1* e *gradf2* siano linearmente indipendenti, allora il vincolo si dice bilaterale. Nel primo caso è definita una superficie o varietà di dimensione 2 (compatta o meno), nel secondo una curva o varietà di dimensione 1 come intersezione di due superfici.

I vincoli sulla velocità del punto, espressi da $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ si dicono *anolonomi*. Il vincolo tipico è quello lineare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}) = 0$; se $\mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ non è un differenziale esatto il vincolo si dice propriamente anolonomo, mentre se $\mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = df(\mathbf{r})$ esso equivale ad una famiglia ad un parametro $f(\mathbf{r}) = c$ di vincoli olonomi dove c è fissata dalla condizione iniziale.

PROBLEM 1. Show that the angle Φ between the pericenter and apocenter is equal to the semiperiod of an oscillation in the one-dimensional system with potential energy $W(x) = U(M/x) + (x^2/2)$.

Hint. The substitution $x = M/r$ gives

$$\Phi = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - W)}}.$$

PROBLEM 2. Find the angle Φ for an orbit close to the circle of radius r .

ANSWER. $\Phi \approx \Phi_{\text{cir}} = \pi(M/r^2 \sqrt{V''(r)}) = \pi \sqrt{U'/(3U' + rU'')}$.

PROBLEM 3. For which values of U is the magnitude of Φ_{cir} independent of the radius r ?

ANSWER. $U(r) = ar^\alpha$ ($\alpha \geq -2, \alpha \neq 0$) and $U(r) = b \log r$.

It follows that $\Phi_{\text{cir}} = \pi/\sqrt{\alpha + 2}$ (the logarithmic case corresponds to $\alpha = 0$). For example, for $\alpha = 2$ we have $\Phi_{\text{cir}} = \pi/2$, and for $\alpha = -1$ we have $\Phi_{\text{cir}} = \pi$.

PROBLEM 4. Let in the situation of problem 3 $U(r) \rightarrow \infty$ as $r \rightarrow \infty$. Find $\lim_{E \rightarrow \infty} \Phi(E, M)$.

ANSWER. $\pi/2$.

Hint. The substitution $x = yx_{\max}$ reduces Φ to the form

$$\Phi = \int_{y_{\min}}^1 \frac{dy}{\sqrt{2(W^*(1) - W^*(y))}}, \quad W^*(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x_{\max}^2} U\left(\frac{M}{yx_{\max}}\right).$$

As $E \rightarrow \infty$ we have $x_{\max} \rightarrow \infty$ and $y_{\min} \rightarrow 0$, and the second term in W^* can be discarded.

Figura 5.11: Limite di $\Delta\theta$ per $E \rightarrow \infty$ per potenziali della forma $V(r) = kr^a$, $a > 0$

Spazio delle configurazioni tipicamente euclideo, in cui i punti materiali tramite le coordinate soddisfano che una funzione regolare delle coordinate deve essere nulla: vincolo olonomo \rightarrow le coordinate non sono tutte indipendenti. Dal punto di vista geometrico ciò è legato all'immersione di una varietà negli spazi euclidei di dimensione superiore in cui si introducono dei vincoli: definizione della superficie. Dal punto di vista fisico, vincolo significa che la distanza tra il punto materiale e il punto di attacco del pendolo resta costante, perché il filo è inestensibile. In realtà reagisce in maniera elastica, e crea una forza che tiene il peso sostenuto; si spezza se il peso è troppo grande, e anche il filo ha un'estensione del filo cambia durante l'oscillazione. Anche una pallina sul tavolo lo deforma. In fisica quindi questo vincolo è un'idealità. È creato da forze, nel caso del filo sono abbastanza grandi da tenere il punto attaccato, e l'estensione del filo è trascurabile. Il vincolo semplifica molto il modello della dinamica dell'oggetto: se no dovremmo studiare anche il moto del filo che si estende. Sistema vincolato: ci mettiamo in condizioni fisiche per cui si possa congelare il grado di libertà che muoverebbe la massa lungo la direzione del filo/che estende la corda dell'altalena. Rimarrebbe da giustificare se l'ipotesi che esista un vincolo olonomo è vera: l'energia dinamica di oscillazione del pendolo non deve essere trasferita in energia elastica di oscillazione, poi magari dissipata, nel filo, altrimenti anche in assenza di aria sarebbe falsa la conservazione dell'energia \Rightarrow non avremmo più integrali primi.

In teoria dei sistemi dinamici un teorema (sotto ipotesi ragionevoli) afferma che è impossibile trasferire energia dal moto di oscillazione della massa al moto di oscillazione sul filo, perché la frequenza di oscillazione del pendolo e quella dovuta al filo che si allunga/accorcia, sono molto diverse \Rightarrow per ogni accoppiamento il tempo necessario per il trasferimento di energia di moto a energia di oscillazione sarebbe molto lungo. Ecco perché i modelli di vincoli ideali funzionano bene, sia nel macroscopico che nel microscopico. [Un vincolo in relatività è problematico perché vorrebbe dire che l'informazione si è trasmessa istantanea dal punto in cui è attaccato il peso a dove abbiamo attaccato il chiodo.] Un guinzaglio sarebbe un vincolo unilaterale: la particella potrebbe essere più vicina, ma non oltre una certa distanza. Noi invece considereremo vincoli bilaterali.

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \vec{\phi} \quad \vec{\phi} = \text{reazione vincolare} \quad (6.1)$$

L'equazione di Newton mette in luce l'effetto dinamico della reazione vincolare: è come se avessimo aggiunto un'altra forza esterna, creata dal vincolo, che costringe la soluzione dell'equazione di Newton a restare sulla superficie definita da $F^*(x) = 0$: relazione tra geometria e dinamica. Ma la reazione vincolare non si può definire a priori: serve prima conoscere l'accelerazione, mentre invece la forza vera si calcola tramite il potenziale, date le condizioni iniziali. L'ipotesi che ci permette di definire univocamente $\vec{\phi}$ è il principio dei lavori virtuali (usato molto in statica), che definisce uno spostamento virtuale.

Definizione 6.1. $\delta\vec{x}$ = spostamento virtuale.

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x} = 0} \quad (6.2)$$

$\frac{\partial F^*}{\partial \vec{x}} \neq 0$ per ipotesi: vettore \perp alla superficie $F^*(\vec{x}) = 0$. $\delta\vec{x}$ tangente alla superficie.

Dalla definizione si vede la condizione di regolarità di F^* : deve essere differenziabile con continuità, e il gradiente di F^* diverso da 0 su tutto il dominio che è tutto lo spazio euclideo: dobbiamo sempre poter definire la direzione normale al vincolo- condizione violata in presenza di cuspidi, spigoli \Rightarrow il vincolo non sarebbe regolare, e non potremmo definire lo spostamento virtuale. $\delta\vec{x}$ è ortogonale al vettore gradiente, che per definizione è ortogonale alla superficie di livello della funzione, in particolare quella definita dal vincolo ($F^* = 0$) \Rightarrow $\delta\vec{x}$ è un vettore infinitesimo tangente alla superficie.

Remark: se il vincolo dipende dal tempo $F^*(x_1, \dots, x_n, t) = 0$ nel calcolo di $\delta\vec{x}$ il tempo deve essere tenuto costante (vincolo congelato). Ecco perché non si usa il simbolo del differenziale esatto per $\delta\vec{x}$.

6.1.1 Principio dei lavori virtuali

$$\boxed{\vec{\phi} \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad \forall \delta\vec{x}} \quad (6.3)$$

Se il vincolo dipende dal tempo esplicitamente (cioè non semplicemente $x(t)$, ma in F^* compare anche il tempo come variabile) il principio dei lavori virtuali afferma che nel calcolo dello spostamento virtuale t va tenuto costante: vincolo istantaneamente fermo. Gli spostamenti virtuali non sono gli spostamenti effettivi del punto: coincidono solo in assenza di dipendenza temporale.

Principio dei lavori virtuali: la forza vincolare è definita dal fatto che il suo lavoro per uno spostamento virtuale è sempre nullo. Quindi escludiamo che le reazioni vincolari possano avere effetti di attrito: l'attrito- generato dal tavolo che fa da vincolo- invece, farebbe lavoro (dissipa energia).

Nota: Non vuol dire che le reazioni vincolari non facciano mai lavoro: se il vincolo è funzione del tempo possono farlo! Ma istantaneamente per l'ortogonalità (al vincolo) non fanno lavoro.

Ricaviamo ora $\vec{\phi}$ dall'equazione di Newton.

Conseguenze (dell'Eq. 6.3):

$$(m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}) \cdot \delta\vec{x} = 0$$

Problema: gli spostamenti virtuali non sono tutti indipendenti: devono soddisfare l'ortogonalità al gradiente, relazione lineare (6.2). Quindi se $(m\ddot{\vec{x}} - \vec{F})$ ha proiezione nulla su tutti i $\delta\vec{x}$ NON possiamo dedurre che sia identicamente nulla, perché $\delta\vec{x}$ non sono una base per lo spazio: manca una direzione- ortogonale, data dal gradiente. Allora introduciamo coordinate adattate al vincolo, tali che F^* , magari complicata in coordinate cartesiane, si riducano al fatto che una coordinata generalizzata sia costante. Mettono in evidenza che un vincolo congela il grado di libertà

associato a q_n . Scritte le coordinate cartesiane in funzione delle generalizzate, l'equazione del vincolo diventa che una delle coordinate è costante, mentre tutte le altre q_k sono libere $n-1$ (perché in questo caso il vincolo è 1):

Se introduciamo coordinate adattate al vincolo

$$\begin{aligned} \vec{x}(q_1, \dots, q_n) \quad & \text{t.c. } F^*(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow q_n = c \\ \delta \vec{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} dq_k \quad & \vec{e}_k = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \quad \text{base spazio tangente alla superficie} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left(m \ddot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} - \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \right) dq_k = 0 \quad & dq_k \text{ sono indipendenti} \\ \Rightarrow m \ddot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \quad & k = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

forma covariante dell'equazione di Newton nelle variabili q_k , $k = 1, \dots, n-1$.

δx è c.l. dei vettori e_k , base per lo spazio tangente alla superficie nei vari punti, dove la superficie è rappresentata dall'equazione del vincolo, infatti δx tangente alla superficie con componenti infinitesime. non avendo vincoli su $n-1$ coordinate abbiamo proprio il differenziale delle q libere. Sostituiamo nell'equazione derivata dal principio dei lavori virtuali. Tutti i differenziali dq_k sono indipendenti gli uni rispetto agli altri \Rightarrow tutti i vettori devono essere nulli.

Abbiamo ottenuto la forma covariante dell'equazione di Newton in cui consideriamo solo $n-1$ vettori su cui proiettare. Quindi le equazioni del moto si possono ridurre alla forma covariante di Newton, per le coordinate generalizzate escluse quelle congelate, in cui proiettiamo \vec{a} e \vec{F} fisiche sulla base dei vettori tangenti costruita con coordinate adattate al vincolo. Principio dei lavori virtuali: la difficoltà di analizzare il problema vincolato è legata a trovare le coordinate adattate.

Torniamo al problema di calcolare ϕ .

Otteniamo le equazioni di Lagrange:

$$\vec{F} = \frac{\partial V}{\partial \vec{x}}, \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) T = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$\vec{\phi}$ reazione vincolare \perp al vincolo. Dalle soluzioni $q_k(t)$ otteniamo $\vec{x}(t)$.

Nota: $\frac{d\vec{x}}{dt} = \sum_{k=1}^{n-1} \dot{q}_k \vec{e}_k$ è tangente a vincolo ma $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$ no!

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \ddot{q}_k \vec{e}_k + \sum_{k,h=1}^{n-1} \dot{q}_k \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_h$$

sia \hat{n} il versore normale alla superficie

$$\hat{n} \parallel \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} * \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \cdot \hat{n} = \sum_{k,h=1}^{n-1} \dot{q}_k \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_k \partial q_h} \cdot \hat{n} \dot{q}_h$$

ϕ è ortogonale al vincolo in tutti gli istanti possibili \Rightarrow dobbiamo fare la proiezione di \vec{a} e \vec{F} esterna sui vettori NORMALI (non tangenti) al vincolo, direzione nota perché è quella del gradiente. La soluzione così ottenuta dell'equazione di Lagrange definisce una curva che sta sul vincolo; da q risaliamo a x . Velocità in \mathbf{R}^n : componenti generalizzate di v sono c.l. di e_k : vettore tangente al vincolo, ma NON l'accelerazione!! PUNTO SI MUOVE SU UN VINCOLO $\Rightarrow \vec{v}$ TG AL VINCOLO, NON \vec{a} ! Es: accelerazione centripeta. Abbiamo l'accelerazione tangenziale nel primo termine. Sia \hat{n} il versore parallelo al gradiente del vincolo, quindi normale alla superficie. Se proiettiamo \vec{a} su \hat{n} otteniamo una forma quadratica che dipende solo dalle componenti generalizzate dalle velocità, NON dipende da \ddot{q} , che entrano solo nella componente tangente. Contributo che viene da $m \cdot$ forma quadratica $-\vec{F}_{est}$ lungo il gradiente: forza peso aggiunge una componente alla reazione vincolare. Mentre la prima componente viene dalla dinamica: accelerazione centripeta. Risolta l'equazione di Lagrange, conosciamo q , e F_{est} normale, quindi possiamo calcolare $\vec{\phi}$. Dato il moto del punto sul vincolo, l'informazione sulla forza vincolare che manca si trova nel modo che segue.

Abbiamo quindi:

$$m \ddot{\vec{x}} \cdot \hat{n} = \vec{F} \cdot \hat{n} + \phi \Rightarrow \phi = m \sum_{k,h=1}^{n-1} \dot{q}_k \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_k \partial q_h} \cdot \hat{n} \dot{q}_h - \vec{F} \cdot \hat{n} \quad (6.4)$$

Noto $q(t)$ possiamo calcolare ϕ .

Se $\vec{F} = 0$ abbiamo le curve geodesiche

$$\phi = m \sum_{k,h=1}^{n-1} \dot{q}_k \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q_k \partial q_h} \cdot \hat{n} \dot{q}_h \quad (6.5)$$

ovvero la normale principale alla curva $\vec{x}(t)$ è ortogonale al vincolo.

Punto materiale libero che sta su una superficie segue le geodesiche: realizziamo in modo meccanico la geodesica mettendo su un vincolo ideale un punto materiale e vedendo che traiettoria fa. Geodesiche: la forma quadratica coincide con la reazione vincolare: un punto tale che la sua accelerazione coincide con \ddot{a} normale (principale) al vincolo. Se percorriamo geodesiche, \ddot{a} è normale al vincolo stesso quando lo pensiamo immerso in \mathbb{R}^n . Proprietà non banale: non è detto che per una curva qualunque percorsa sulla sfera, \ddot{a} sia normale alla sfera (potrebbe essere solo normale alla curva), per le geodesiche sì: è un altro modo di definirle.

Nota: ϕ è ortogonale al vincolo, ma non alla velocità del punto materiale sul vincolo, ecco perché può fare lavoro, è ortogonale solo alla velocità vista nel sistema solidale con il vincolo mobile.

Possiamo avere un vincolo definito da più equazioni F_k^* che danno ognuna una superficie diversa, e il vincolo totale sarà l'intersezione delle superfici, ma non è corretto dire che sono componenti di un vettore.

6.2 Pendolo sferico

$$V(\vec{x}) = mgz \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

vincolo sferico. Il gradiente si annulla nell'origine, ma non fa parte della superficie.
coordinate polari

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi & \varphi \in (0, 2\pi) \\ y = R \sin \theta \sin \varphi & \varphi \in (0, \pi) \\ z = R \cos \theta \end{cases} \Rightarrow r = R \text{ vincolo}$$

Individuato il vincolo, bisogna trovare le coordinate adattate al vincolo tale che solo una coordinata sia costante, bloccata dal vincolo: sono le coordinate sferiche. Riscriviamo x,y,z in coordinate sferiche, inserendo l'equazione del vincolo $r = R$. Abbiamo immerso la sfera in \mathbb{R}^3 . Si calcolano le derivate temporali di x, y, z per scrivere \mathcal{L} , derivando θ e ϕ rispetto al tempo con derivazione composta. La scorciatoia è costruire la matrice metrica sulla sfera con i vettori $\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$, e scrivendo la forma quadratica nelle velocità con la matrice metrica permette di ottenere T . θ angolo azimutale, ϕ toroidale. L'unica coordinata che resta bloccata è r : il vincolo è che r sia costante.

Scriviamo ora la lagrangiana per un sistema soggetto alla forza peso con massa m . I vettori e_k sono diretti come i meridiani e paralleli rispettivamente. Calcoliamo T con G.

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = R(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \vec{e}_\phi &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = R(-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0), \quad \vec{e}_\theta \perp \vec{e}_\varphi \\ \Rightarrow G &= \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta \end{aligned}$$

Costruita la lagrangiana, potremmo applicare $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}$ solo a θ e φ ottenendo 2 equazioni.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} mR^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = 0 \\ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \mathcal{L} = 0 \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Ma come visto nello studio del moto in campo centrale, possiamo osservare direttamente che:

ϕ coordinata ciclica \Rightarrow integrale del moto

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= mR^2\dot{\phi} \sin^2 \theta \quad \text{momento q.m. lungo } \hat{z} \\ E &= \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta \\ \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{mR^2 \sin^2 \theta} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{p_\phi^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta \\ V_{\text{eff}}(\theta) &= \frac{p_\phi^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta \quad \theta \in (0, \pi)\end{aligned}$$

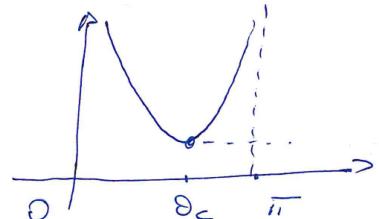
Lo studio del moto 1d in θ è lo studio di V_{eff} - noto θ , è nota $\dot{\phi} \Rightarrow \phi$. Gli equilibri saranno relativi sono a θ . θ_c non sarà un punto di equilibrio per il pendolo sferico, ma solo per θ , mentre $\dot{\phi}$ costante \Rightarrow orbita circolare del sistema completo, come nel caso del campo centrale. Siamo sulla sfera: orbite limitate. Possiamo fare un ulteriore cambio di variabili dato che θ compare con funzioni trigonometriche: u . Essendo l'uso delle coordinate sferiche legato alla singolarità delle coordinate sferiche: non possiamo descrivere moti per l'origine, a meno che $p_\phi = 0$: pendolo normale, in cui cioè non diamo al pendolo sferico la componente $\dot{\phi}$ quindi oscilla su un piano. La singolarità salta fuori anche nella relazione tra le derivate prime \dot{u} e $\dot{\theta}$. Negli integrali primi che sono equazioni differenziali possiamo fare i cambi di variabili che vogliamo, mentre per la lagrangiana dobbiamo cambiare variabili nello spazio delle configurazioni (non solo una delle due variabili). Abbiamo ottenuto un potenziale cubico: algebrico, più semplice da studiare. Pendolo sferico \rightarrow punto materiale in un potenziale cubico \rightarrow l'equazione ha come soluzioni le funzioni ellittiche. ϕ è una coordinata ciclica \Rightarrow il momento della quantità di moto lungo l'asse z è integrale primo del moto (abbiamo ottenuto che si conserva, anche in presenza della forza peso).

Usando i due integrali primi (l'altro è l'energia), eliminiamo dalla funzione energia (non dalla lagrangiana!) $\dot{\phi}$. Abbiamo una parte cinetica in $\dot{\theta}$ e un potenziale efficace, che è il potenziale fisico (forza peso) + uno centrifugo. Studio come per un campo centrale. Diverge per $\theta = 0$ e π , e la forza peso cambia la posizione dell'orbita circolare. θ_c orbita circolare

θ è l'angolo tra la verticale e la posizione. Il minimo, che c'è già a causa del primo termine e sarebbe a $\frac{\pi}{2}$, è spostato verso il basso rispetto all'equatore, ad angoli più grandi: punto di equilibrio in θ per V_{eff} . $\dot{\phi}$ diventa costante, quindi orbita circolare $\theta = \theta_c$.

Il pendolo può stare su tutto lo spazio 3d.

Introducendo $u = \cos \theta$, $\dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta}$, $u \in (-1, 1)$ sostituiamo nell'energia:



$$\begin{aligned}E &= \frac{mR^2 \dot{u}^2}{2(1-u^2)} + \frac{p_\phi^2}{2mR^2(1-u^2)} + mgRu \\ E(1-u^2) &= \frac{mR^2 \dot{u}^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2mR^2} + mgRu(1-u^2) \\ k &= -\frac{p_\phi^2}{2mR^2} = \frac{mR^2 \dot{u}^2}{2} + (mgRu - E)(1-u^2) \quad (6.7)\end{aligned}$$

$1-u^2 = \sin \theta^2$. Moltiplicando per $1-u^2$, otteniamo un'altra energia 1d con energia cinetica, poi una parte costante k (mentre prima era E la costante), poi un potenziale cubico (avevamo un potenziale lineare). Moltiplichiamo per $1-u^2$, e portiamo la costante k a sinistra, che dipende dal momento associato a $\dot{\phi}$. Moto di un punto materiale di massa mR^2 sottoposta a potenziale cubico, che risulta dalla moltiplicazione del semicerchio per la retta; ha un minimo. Collegamento con funzioni ellittiche di Jacobi. Problema vincolato \rightarrow problema lagrangiano \rightarrow coordinata ciclica \rightarrow sostituendo nell'energia ci riconduciamo a sistema 1d \rightarrow in particolare posso cambiare di variabili per un punto materiale soggetto a V cubico. E' più semplice lavorare con polinomi che funzioni trigonometriche.

Curiosità:

- La scelta delle variabili azione-angolo è legata a una struttura geometrica dei problemi integrabili (non a un qualche vincolo).
- Per stabilire i punti di equilibrio dobbiamo annullare il gradiente di V o di V_{eff} ? Bisogna distinguere se si cercano 1) i punti di equilibrio assoluti \Rightarrow gradiente rispetto a tutte le variabili del V fisico. I problemi di

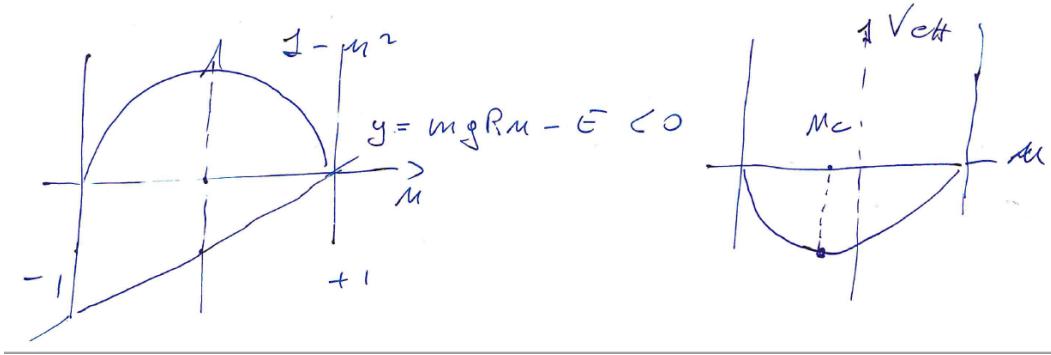


Figura 6.1: Cambio di variabili per il potenziale efficace del pendolo sferico

campo centrale a 2 corpi (es: moto tra Terra e Sole) non hanno posizioni di equilibrio assoluto. 2) i punti di equilibrio del potenziale efficace: troviamo l'equilibrio per una variabile, che sarà congelata. L'altra variabile normalmente ha derivata che dipende dalla variabile congelata, quindi fa un moto uniforme (ha derivata costante). Il pendolo sferico ha un equilibrio assoluto se lo mettiamo in posizione verticale. E' una posizione singolare in coordinate polari \Rightarrow andrebbe studiata in altre coordinate.

7 \mathcal{L} in sistemi non inerziali

In particolare ci concentriamo sui sistemi rotanti- caso più complicato rispetto ai moti lineari- che ci servono per affrontare la dinamica del corpo rigido. Descrivere un sistema lagrangiano in un sistema rotante.

7.1 Formula di Poisson

Dobbiamo stabilire la relazione tra il vettore posizione nel sistema rotante, e quello visto in un sistema inerziale con stessa origine: attraverso una trasformazione lineare ortogonale, rappresentata dalla matrice delle trasformazioni di coordinate (ortogonale perché si vuole mantenere l'ortonormalità del sistema di coordinate). La matrice dipende dal tempo in quanto il sistema sta ruotando.

Calcoliamo la velocità assoluta V , cioè nel sistema inerziale, con la derivata di un prodotto. v è la velocità relativa del punto, ossia nel sistema rotante.

$$\vec{X}(t) = R(t)\vec{x}(t) \quad (7.1)$$

con $R(t)$ matrice ortogonale $\vec{X}(t)$ posizione nel sistema inerziale, $\vec{x}(t)$ posizione nel sistema rotante

$$\vec{V}(t) = \dot{R}(t)\vec{x}(t) + R(t)\vec{v}(t) \quad (7.2)$$

$\vec{V}(t)$ velocità assoluta, $R^T(t)\vec{V}(t)$ = velocità assoluta vista nel sistema rotante.

L'applicazione di R a v relativa fornisce v relativa vista nel sistema assoluto, inerziale. Vogliamo lavorare nel sistema rotante, quindi applichiamo R^T alla velocità assoluta per invertire la relazione, ottenendo V assoluta vista nel sistema rotante. Il vettore V assoluta NON è solo la velocità relativa trasformata, c'è anche la velocità di trascinamento: il cambio di coordinate dipende dal tempo, quindi è una velocità dovuta al moto delle coordinate, non del punto.

Rileggiamo l'equazione nel sistema rotante.

$$R^T(t)\vec{V}(t) = \overbrace{R^T(t)\dot{R}(t)}^A \vec{x}(t) + \underbrace{R^T(t)R(t)}_{\text{matrice di trascinamento}} \vec{v}(t)$$

Notiamo che, per l'ortogonalità, $R^T R = I$ costante, quindi la sua derivata temporale è nulla \Rightarrow dall'identità vettoriale otteniamo che $R^T \dot{R}$ è una matrice antisimmetrica.

$$\text{Da } \frac{d}{dt}(R^T R) = \dot{R}^T R + R^T \dot{R} = (R^T \dot{R})^T + R^T \dot{R} = 0$$

segue che $R^T \dot{R}$ è una matrice antisimmetrica $3 \times 3 (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$

Proposizione 7.1.1. Sia $A^T = -A$. Allora esiste un autovalore nullo.

Infatti $\text{Tr}(A) = 0$; λ autovalore $\Rightarrow -\lambda$ autovalore ¹³

Esiste quindi un isomorfismo tra $S(A)$ spazio delle matrici antisimmetriche, e i vettori di \mathbb{R}^3 .

Una matrice antisimmetrica ha $\text{Tr } A = 0$. Abbiamo che se λ è autovalore, allora lo è anche $-\lambda$. Ne manca uno, e l'unico numero che coincide con il suo opposto è 0. Isomorfismo tra le matrici antisimmetriche (solo) 3×3 e i vettori di \mathbb{R}^3 . Quanti elementi posso scegliere di una matrice antisimmetrica 3×3 ? Lungo la diagonale principale =0 per forza \Rightarrow dei 6 elementi restanti, bisogna imporre che sia antisimmetrica \Rightarrow 3 parametri liberi, stesso numero che quando si definisce uno spazio 3d. Per matrice 4×4 , 5×5 antisimmetriche la dimensione è molto più elevata. Esplicitiamo ora l'isomorfismo:

$$A \mapsto \vec{\omega} \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

$$A\vec{\omega} = 0 \quad \text{e } A\vec{x} = \vec{\omega} \times \vec{x} \quad (7.4)$$

Alla matrice A associamo ω , il suo autovettore corrispondente all'autovalore nullo. Verifichiamo che applicando la matrice a un qualunque vettore x , il risultato è il prodotto vettore che segue, e se mettiamo ω otteniamo 0. Il prodotto vettore $\vec{\omega} \times \vec{x}$ è l'applicazione della matrice antisimmetrica corrispondente a ω applicata a x con la definizione. Ecco perché non possiamo definire il prodotto vettoriale in spazi a dimensione superiore, possiamo definire prodotti esterni ma non hanno tutte le stesse proprietà.

Ricaviamo che $\vec{\omega} \times \vec{x}$ è l'applicazione della matrice antisimmetrica a x :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z y + \omega_y z \\ \omega_z x - \omega_x z \\ -\omega_y x + \omega_x y \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ -\omega_x z + \omega_z x \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$$

Allora abbiamo la relazione:

$$R^T \vec{V}(t) = (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \vec{v} \quad (7.5)$$

vista nel sistema rotante (volendo scrivere \mathcal{L} con coordinate viste nel sistema rotante). $\vec{\omega} \times \vec{x}$ è la velocità di trascinamento (ω si calcola come autovettore associato a $\lambda = 0$ della matrice $R^T \dot{R}$).

Nota: Noi partiamo dall'assioma che in un sistema inerziale $\mathcal{L} = T - V$. Attenzione perché NON vale in un sistema non inerziale! Per calcolare \mathcal{L} in un sistema rotante, dobbiamo comunque usare (vista nel sistema rotante) la velocità assoluta!

Osserviamo che la relazione di Poisson nota dalla meccanica è vettoriale: $\vec{V} = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$, vede la velocità come vettore (qualsiasi sistema di riferimento). Noi invece abbiamo ragionato sul sistema di riferimento: vediamo la relazione in uno stesso sistema di riferimento. Cioè la velocità assoluta, prima vista nel sistema di riferimento inerziale, la vediamo ora nel sistema rotante $R^T V$, e quindi tutta la relazione è vista nello stesso sistema di riferimento- quello rotante

Energia cinetica del punto materiale

$$T = \frac{m}{2} V^2 = \frac{m}{2} v^2 + m(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x})^2$$

Sia $V(x)$ il potenziale

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} v^2 + m(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x})^2 - V(\vec{x}) \quad (7.6)$$

¹³Consider A as a matrix over \mathbb{C} . Then we have that $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ where $\langle -, - \rangle$ is the standard complex inner product, A^* is the adjoint (which relative to the standard complex inner product is given by the conjugate transpose of A). Since A is a real matrix, the adjoint is equal to the transpose, so $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$, we have $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle = \langle x, -Ay \rangle = -\langle x, Ay \rangle$. Now suppose that x is an eigenvector with eigenvalue λ . Setting $y = x$, we have $\langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$. On the other hand, $-\langle x, Ax \rangle = -\langle x, \lambda x \rangle = -\bar{\lambda} \langle x, x \rangle = -\bar{\lambda} \|x\|^2$. These two are equal, and since x is an eigenvector, then $\|x\| \neq 0$. Therefore, we have that $\lambda = -\bar{\lambda}$, and hence λ is either 0 or a pure imaginary number.

$T - V$ si devono pensare nel sistema inerziale. Riconosciamo:

$$\begin{aligned} -\frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{x})^2 &\text{ potenziale centrifugo} \\ -m(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{v} &\text{ potenziale generalizzato di Coriolis} \end{aligned}$$

T , energia cinetica nel sistema rotante, si compone di un'energia cinetica classica dovuta alla velocità relativa + termine misto che contiene velocità e coordinate + termine strettamente di potenziale: dipende (da ω che è dato: fissato da A) solo da x , quindi potenziale centrifugo - forza apparente, è un potenziale elastico repulsivo.

Il prodotto scalare somma prodotti di componenti covarianti e controvarianti.

Le matrici ortogonali conservano il modulo² dei vettori: conservano il prodotto scalare. Vale di più: il modulo di un vettore è uno scalare: possiamo fare il calcolo di V^2 prendendo la somma in quadratura delle componenti. Il prodotto scalare cambia nel caso di cambio di coordinate non ortogonali, per mantenere il modulo costante.

L'aggiunta del potenziale fisico non richiede altri passaggi; essendo già uno scalare, è sempre la stessa funzione, basta scriverlo con le coordinate del sistema rotante.

Forza di Coriolis

$$\begin{aligned} \vec{F}_C &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) (-m(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{v}) = \\ &= -\frac{d}{dt} m(\vec{\omega} \times \vec{x}) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} m(\vec{v} \times \vec{\omega}) \vec{x} = \\ &= -m(\vec{\omega} \times \vec{v}) + m(\vec{v} \times \vec{\omega}) = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega}) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Se $\vec{\omega}$ non dipende da $t \Rightarrow \vec{F}_c$ non fa lavoro.

Vogliamo che la parte di T abbia la forma quadratica, quindi si preferisce inglobare il termine misto tra i potenziali: potenziale generalizzato di Coriolis (cambiando segno). Non dipende solo da \vec{x} ma anche da $\vec{v} \Rightarrow$ nell'Eq. 7.7 non possiamo fare solo il gradiente rispetto alle coordinate usate per trovare la forza associata.

Nota: Per calcolare una forza generalizzata dobbiamo applicare al potenziale generalizzato l'operatore di Lagrange completo (si veda l'Eq.3.7)! Vediamo che se non ci fosse il termine dipendente da \vec{v} ci si ricondurrebbe alla definizione usuale di forza $\vec{F} = -\nabla V$.

Usiamo il termine che c'è in \mathcal{L} cambiato di segno.

Prodotto misto: determinante della matrice formata dalle componenti dei vettori, nell'ordine (scambiando due vettori il prodotto vettore cambia segno, anche il determinante). L'ordine però può essere cambiato ciclicamente. Volume di parallelepipedo formato da 3 vettori, e non dipende dall'ordine i vettori pur di mantenere la ciclicità (così che non cambi il segno). La permutazione ciclica mette in evidenza \vec{x} , così da calcolare la derivata rispetto a \vec{x} in modo immediato.

Consideriamo la rotazione a velocità angolare ω costante \Rightarrow la derivata temporale agisce solo su x : $\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{x}) = (\vec{\omega} \times \vec{v})$. Le forze apparenti che entrano nell'equazione del moto di un punto materiale, in caso di sistema rotante, sono due: F dal potenziale di Coriolis, e F centrifuga, che daranno contributi negativi. Le forze fisiche sono determinate da interazioni fondamentali; le altre sono forze inerziali. Non sono generate dalla fisica ma legate al fatto che un punto materiale isolato in un sistema inerziale si muove di moto rettilineo uniforme. In un sistema non inerziale, la massa genera forze apparenti. Alla base della relatività generale: identità tra forze fisiche e inerziali quando viviamo in uno spazio curvo (come se fosse un sdr non inerziale): equivalenza tra massa gravitazionale e inerziale- a cui sono dovute le forze inerziali. Ma in linea di principio non per forza. Massa inerziale viene dal principio di inerzia; gravitazionale è responsabile dell'interazione gravitazionale tra i corpi.

Il potenziale di Coriolis, se ω costante, genera una forza ortogonale alla velocità \Rightarrow se ω non dipende dal tempo \vec{F} non fa lavoro: proprietà di tutte le forze associate ai potenziali generalizzati. Attenzione che dovremmo derivare ω rispetto a t se dipendesse dal tempo: forza di Coriolis farebbe lavoro. Forza centrifuga: è semplicemente forza elastica repulsiva.

Curiosità:

- Che considerazioni facciamo nel passaggio tra sistemi destrorsi e sinistrorsi? Nessuna, per noi sono equivalenti. Non è possibile trasformare uno nell'altro con continuità. La scelta destrorsa fatta da noi stabilisce un'orientazione. Il determinante della matrice che trasformerebbe il mondo nel mondo allo specchio deve essere negativo. Ma dal punto di vista della fisica che studiamo: equivalenza. Invece i neutrini rompono la parità: levogiri/destrogiri - neutrini/antineutrini. Anche nei sistemi viventi: proteine levogire riflettono la luce con una polarità ben definita, le destrogire causano malattie

7.2 Potenziali generalizzati

Il potenziale generalizzato dipende dalla velocità, e si costruisce con un prodotto scalare (è uno scalare) di un vettore (campo vettoriale nello spazio delle configurazioni)· velocità.

$$V(\vec{x}, \vec{v}) = \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \sum_k A_k(q) \dot{q}_k \quad (7.8)$$

Non si possono avere altre dipendenze da \vec{v} : la forza non dipende dall'accelerazione! (Newton)
Forza associata

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \sum_k A_k(q) \dot{q}_k &= \frac{d}{dt} A_j(q) - \sum_k \frac{\partial A_k}{\partial q_j} \dot{q}_k = \\ Q_j &= \sum_k \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \end{aligned} \quad (7.9)$$

Se $\vec{A}(q)$ non dipende da $t \Rightarrow$ la forza non fa lavoro: $dW = \vec{F}_c \cdot \vec{v} dt$

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{k,j} \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j = 0 \quad (7.10)$$

Ricordiamo:

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_k \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \quad \text{componenti covarianti della forza} \\ \dot{q}_k, \vec{v} &= \sum_k \vec{e}_k \dot{q}_k \quad \text{componenti controvarianti di } \vec{v} \end{aligned}$$

Non possiamo avere dipendenze non lineari da v , se no nell'applicazione dell'operatore che dà la forza in funzione del potenziale, la forza dipenderebbe dall'accelerazione!!! Ciò non può accadere per l'equazione di Newton. Un potenziale generalizzato in coordinate generalizzate ha la forma Eq.7.8. In generale no dipendenza dal tempo, se c'è è dentro A . Per la forza associata applichiamo $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}$ al termine che compare nella lagrangiana.

Derivata composta: $\frac{dA(q)}{dt}$ perché q dipende dal tempo. q e \dot{q} sono indipendenti.

Il lavoro istantaneo è nullo: per dimostrarlo facciamo il prodotto scalare tra la forza associata, componente j - dove Q_j è la componente covariante della forza- per \dot{q}_j - componente controvariante della velocità. (In coordinate ortogonali/ortonormali componenti l'espansione di un vettore su una base si fa con la proiezione: componenti covarianti e controvarianti sono le stesse.) $\frac{dW}{dt} = 0$ perché possiamo scambiare gli indici muti k, j . 0 è l'unico numero uguale al suo opposto \Rightarrow se compaiono nel potenziale generalizzato componenti di un campo che non dipendono esplicitamente da t , allora la forza associata non compie lavoro.

In un sistema vincolato, \dot{q} è lo spostamento compatibile con il vincolo. Se A dipende dal tempo, abbiamo un pezzo in più: la forza di Coriolis fa lavoro. Se non ne dipende, anche il vincolo non dipende dal tempo. Potenziale di forza generalizzata in un vincolo non dipendente dal tempo: forza non fa lavoro.

7.3 Pendolo di Foucault

Punto materiale che si muove su un piano, soggetto ad una forza elastica in un sistema rotante.

$\vec{\Omega}$ =velocità angolare= $(0, \Omega \sin \alpha, \Omega \cos \alpha)$ $\vec{x} = (x, y)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} \vec{v}^2 + m(\vec{\Omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{x})^2 - \frac{k}{2} \vec{x}^2 = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\Omega \cos \alpha (x\dot{y} - \dot{x}y) - \frac{k}{2} (x^2 + y^2) + O(\Omega^2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Nota: l'orientazione del sistema sul piano è arbitraria

La velocità di rotazione del sistema di riferimento fa un angolo α rispetto alla normale del piano. Il piano ruota attorno all'asse inclinato. Il piano su cui mettiamo il punto materiale è tangente alla Terra, che ruota attorno all'asse verticale. L'asse è diretto come il polo, come Ω , che fa un angolo α con z , la normale al piano del moto.

Nell'approssimazione del pendolo di Foucault: piccole oscillazioni, quindi è come se avessimo una forza elastica \Rightarrow lavoriamo direttamente con la forza elastica: le piccole oscillazioni per la forza di gravità sono approssimabili con forza elastica. Definiamo un sistema di coordinate 3d (perché la velocità angolare è inclinata rispetto al piano), che ruoti. Le coordinate di Ω cambiano continuamente: asse di rotazione variabile, ma non ci serve considerarlo. Perché quando calcoliamo \mathcal{L} del sistema meccanico è come se facessimo una fotografia al sistema, in base alle velocità e posizioni istantanee costruiamo \mathcal{L} . Ma facendo un'istantanea la posizione degli assi è arbitraria \Rightarrow facciamo un'istantanea in cui gli assi sono messi tali che Ω compare solo nel piano zy . Non c'è motivo di distinguere l'orientazione del sistema: \mathcal{L} non ne dipende. Ω è nel piano zy per semplificare i calcoli: la \mathcal{L} non dipende dall'orientazione degli assi, che è arbitraria.

Trascuriamo la forza centrifuga perché siamo sulla Terra: piccolo angolo di rotazione \Rightarrow trascuriamo i termini quadratrici in Ω .

Dinamica vincolata: sul piano. Velocità assoluta in funzione di relativa e di trascinamento: Poisson. Termine cinetico dovuto alla velocità relativa, potenziale generalizzato (sulla terra Ω costante), potenziale centrifugo che trascuriamo, poi potenziale fisico. Facciamo il prodotto misto.

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \Omega \sin \alpha & \Omega \cos \alpha \\ x & y & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = (-y \Omega \cos \alpha \quad x \Omega \cos \alpha \quad -x \Omega \sin \alpha) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega \cos \alpha (-\dot{xy} + \dot{yx})$$

\mathcal{L} quadratica in coordinate, velocità e termini misti \Rightarrow equazioni lineari a coefficienti costanti. Anche il potenziale centrifugo è quadratico nelle x quindi si potrebbe risolvere comunque, ma vogliamo evidenziare le simmetrie.

Poniamo $z = x + iy \quad \dot{z} = \dot{x} + ij$

z rappresenta il vettore x,y nel piano complesso. Mostriamo che andare in campo complesso NON è incompatibile con il formalismo lagrangiano, che consente la complessificazione della dinamica. Partendo da un problema a 2 dof, deve comparire anche \bar{z} . Cambio di variabile da x,y a z,\bar{z} che consideriamo indipendenti. Formalismo lagrangiano è covariante, quindi possiamo riscrivere \mathcal{L} nelle coordinate più comode. Parte immaginaria di $\dot{z}\bar{z}$. Per tirarla fuori sottraiamo il suo complesso coniugato $\bar{z}\dot{z}$ e dividiamo per i :

$$x\dot{y} - \dot{x}y = \Im(x - iy)(\dot{x} + ij) = \Im(\bar{z}\dot{z}) = \frac{\bar{z}\dot{z} - (\bar{z}\dot{z})}{2i}$$

Della lagrangiana basta un'equazione sola perché vogliamo studiare solo il problema reale (parte reale dà x , parte immaginaria dà y): scriviamo l'equazione del moto per la variabile z . Deriviamo rispetto a z (punto) barrato per farlo semplificare.

$$\mathcal{L}(z, \bar{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}\dot{\bar{z}} - \frac{im}{2} \Omega \cos \alpha (\dot{z}\bar{z} - z\dot{\bar{z}}) - \frac{k}{2} z\bar{z}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \mathcal{L} = 0 \quad m\ddot{z} + im\Omega\dot{z}\cos\alpha + im\Omega\dot{z}\cos\alpha + kz = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + 2i\Omega\cos\alpha\dot{z} + \omega^2 z = 0$$

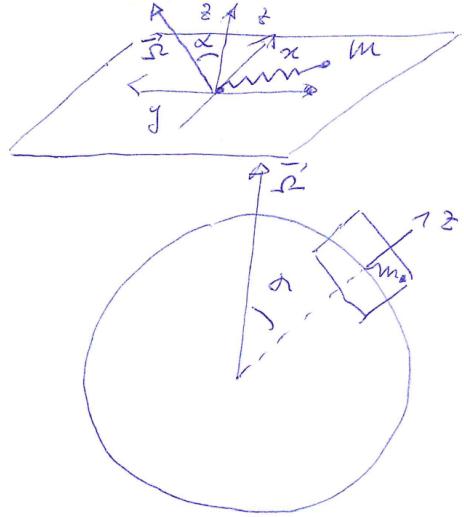


Figura 7.1: Moto di un punto materiale soggetto a forza elastica (pendolo alle piccole oscillazioni) sul piano xy , piano che ruota attorno all'asse $\vec{\Omega}$ costante

Equazione lineare a coefficienti costanti in \mathbb{C} . Cerchiamo una soluzione nella forma esponenziale; λ deve risolvere un'equazione algebrica, di grado 2.

$$\begin{aligned} \text{soluzione } z(t) &= z_0 e^{\lambda t} \text{ con } \lambda^2 + 2i\Omega\lambda \cos \alpha + \omega^2 = 0 \\ \lambda &= -i\Omega \cos \alpha \pm \sqrt{-\Omega^2 \cos^2 \alpha - \omega^2} \simeq -i\Omega \cos \alpha \pm i\omega + \mathcal{O}(\Omega)^2 \\ \Rightarrow z(t) &= e^{-i\Omega \cos \alpha t} \underbrace{(z_0^+ e^{i\omega t} + z_0^- e^{-i\omega t})}_{w(t)} \end{aligned}$$

$$z(t) = e^{i\Omega \cos \alpha t} w(t)$$

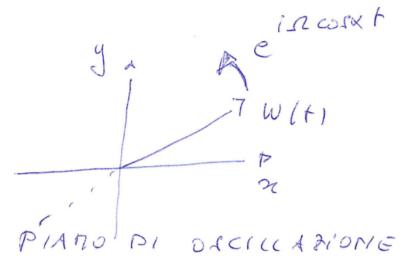
dove $w(t) = z_0^+ e^{i\omega t} + z_0^- e^{-i\omega t} = \text{soluzione oscillatore armonico}$

(7.12)

$\Omega \cos \alpha$ velocità angolare

$$\begin{aligned} \Omega \cos \alpha &= \Omega \text{ al polo } \alpha = 0 \\ \Omega \cos \alpha &= 0 \text{ all'equatore } \alpha = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Il termine in Ω^2 è trascurabile. Le due costanti z_0+ e z_0- sono determinate dalle c.i., sono coniugate. Soluzione in forma complessa togliendo il termine in \dot{z} , cioè oscillatore armonico scritto nella variabile complessa, su un piano, in un sdr inerziale: un'ellisse o una retta (se non c'è velocità angolare). L'esponenziale a fattor comune è un numero complesso sulla circonferenza unitaria: fa ruotare la soluzione- retta/ellisse. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rotazione nulla, equatore. rotazione massima al polo. La velocità di precessione è proporzionale alla velocità angolare della terra e al coseno della latitudine \Rightarrow dalla misura del periodo, conoscendo la velocità angolare 1 giorno, misuriamo la latitudine. (Le due soluzioni dell'equazione di secondo grado sono gli autovalori).



Nota: L'approssimazione di ordine x^2 di $\sqrt{1+x^2}$ è 1, per lo sviluppo di Taylor, quindi è ERRORE affermare che il quadrato si semplifica sotto la radice!

In linea di principio l'asse di rotazione è la composizione della rotazione attorno a se stessa e al sole, ma le scale sono molto diverse \Rightarrow con un pendolo così sensibile da distinguere le due scale, tolti tutti gli attriti (quindi a livello atomico), si potrebbe misurare la velocità di rotazione della Terra attorno al sole. Se dovessimo realizzare un tale pendolo di Foucault si farebbe all'equatore, per togliere il contributo dovuto al moto di rotazione terrestre.

Nel sistema rotante l'asse di rotazione che sarebbe fisso lo vediamo ruotare: le sue coordinate ruotano perché è il sistema che ruota. La velocità angolare è definita come il vettore della matrice antisimmetrica applicata all'autovettore nullo, e vediamo che coincide con la definizione fisica.

Sarebbe stato giusto anche lavorare con l'equazione coniugata ottenuta applicando l'operatore di Lagrange rispetto a z . Se z ruota in senso antiorario, \bar{z} viceversa: perché nello spazio reale la coniugazione corrisponde a cambiare verso.

7.4 Potenziale vettore

Potenziale generalizzato: potenziale di un campo magnetico. Dall'equazione di Maxwell $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, si ha che esiste uno pseudovettore t.c. il rotore di A sia B : si introduce quindi il potenziale vettore A . Infatti ricordiamo che $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$, che discende da $\frac{\partial}{\partial x_i} e_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = e_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ e dall'antisimmetria di e_{ijk} nello scambio degli indici "fantoccio" ij .

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ potenziale vettore t.c. } \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$$

Forza di Lorentz $\vec{F} = \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{B})$

Associata a \vec{B} c'è la forza di Lorentz. Nel sistema cgs compare la velocità della luce quando si definisce la forza di

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{A} &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{A} \quad \text{in coordinate cartesiane} \\
\vec{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{A} \right) &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} \right) \vec{A} \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\
\Rightarrow (\vec{v} \times \vec{B})_j &= \sum_k v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \sum_k v_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \\
\vec{F} &= \frac{q}{c} \sum_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \right) v_k
\end{aligned}$$

Le parentesi sono necessarie perché il prodotto vettore non è associativo. Applichiamo la regola "bac-cab" per il prodotto triplo, ricordando però che $\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ è un operatore. Bisogna tenere l'operatore a sinistra di \vec{A} perché agisce su \vec{A} (non ha effetto su v). Vogliamo calcolare le componenti della forza di Lorentz \Rightarrow calcoliamo $\vec{v} \times \vec{B}$. Applichiamo la componente j del gradiente al prodotto scalare $v_k A_k$. Prodotto scalare del gradiente per v : $\sum_k v_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$; la componente j seleziona la componente j del potenziale vettore.

v e x sono indipendenti, quando deriviamo rispetto a x , v possiamo portare dentro e fuori. La divergenza di una costante fa 0. L'ordine è indifferente nel prodotto scalare. $v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \equiv (\frac{\partial}{\partial x} \cdot v) A$: facciamo il prodotto scalare tra $\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ e la "costante" \vec{v} , ottenendo un operatore che applichiamo ad A . Invece A è funzione di x , quindi per A è un vero e proprio operatore. (se invece la derivata fosse rispetto a v , agirebbe su v ma non su A)

L'espressione della forza di Lorentz ricorda la forza generalizzata del potenziale generalizzato. Questo permette di trovare il potenziale generalizzato V da inserire in \mathcal{L} per ottenere la forza di Lorentz (7.9).

$$V = \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \quad \text{potenziale magnetico}$$

Applichiamo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} &= \frac{q}{c} \frac{d}{dt} \vec{A} - \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} \quad \text{componente } j \\
\frac{q}{c} \sum_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k} v_k - \frac{q}{c} \sum_k \frac{\partial A_k}{\partial x_j} v_k &= -\vec{F}
\end{aligned}$$

$\frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}$ è il termine corretto da aggiungere a \mathcal{L} .

E' vero che la forza di Lorentz non ammette un potenziale (ordinario), ma può essere rappresentata da un potenziale generalizzato. Essendoci il prodotto scalare, il potenziale generalizzato si può scrivere in qualsiasi base.

Analogia formale con un sistema rotante con $\vec{\Omega} \iff \vec{A}$ per il termine di Coriolis. Analogia dinamica tra potenziale di Coriolis e potenziale generalizzato associato a \vec{B} : la lagrangiana ha la stessa struttura, quindi anche le equazioni del moto ¹⁵. Moto di una particella in un sistema rotante, e di una particella carica soggetta a un \vec{B} in un sistema inerziale. In relatività ristretta si dimostra che il campo magnetico è un campo elettrico visto in un sistema rotante con le rotazioni di Lorentz: \vec{E} e \vec{B} sono lo stesso campo visto in sistemi di riferimento diversi. Trasformazioni di Lorentz rendono invarianti le equazioni di Maxwell.

Sappiamo dalla fisica che il campo magnetico non fa lavoro. Ma abbiamo visto che un V generalizzato dipende dal tempo (ad es perché il vincolo è mobile)

$$V(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \vec{v} \tag{7.13}$$

fa lavoro \Rightarrow esiste un campo elettrico se $\vec{A}(x, t)$ dipende dal tempo.

Cioè se vogliamo imporre che B non faccia lavoro, allora questo lavoro deve essere fatto da un campo elettrico. Ritroviamo l'equazione di Maxwell che \vec{B} variabile genera \vec{E} . Le equazioni di Maxwell contengono delle simmetrie già intrinseche in \mathcal{L} . \vec{E} è il campo elettrico associato al potenziale vettore che varia nel tempo (faremo un esercizio).

¹⁴Usiamo il sistema cgs usato in fisica teorica per eleganza, ma a livello sperimentale/ per costruire si usa il sistema mks . Nel sistema cgs la carica si ottiene dalla legge di Coulomb assumendo la costante dielettrica adimensionale; B ed E hanno la stessa unità di misura. L'unità di misura della carica è lo statcoulomb: $1 \text{ statC} = 1 \text{ Fr} = \sqrt{(g \cdot \text{cm}^3/\text{s}^2)}$

¹⁵Attenzione: dai segni significa che il potenziale generalizzato contiene il potenziale vettore CAMBIATO DI SEGNO

¹⁵Ricorda il problema 2 del 27/01/2015?

7.4.1 Energia e momenti generalizzati

Costruiamo un'energia in presenza di un potenziale generalizzato ($m = 1$). Scriviamo in coordinate generalizzate:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{h,k} \dot{q}_h G_{hk}(q) \dot{q}_k + \frac{e}{c} \sum_h A_h(q) \dot{q}_h \quad (7.14)$$

Per costruire H NON è più vero che basta cambiare il segno di V nella lagrangiana!!! Usiamo la definizione dell'energia:

$$\begin{aligned} H &= \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L} = \sum_{jk} \dot{q}_j G_{jk}(q) \dot{q}_k + \frac{e}{c} \sum_j A_j(q) \dot{q}_j - \mathcal{L} \\ \Rightarrow H &= \frac{1}{2} \sum_{h,k} \dot{q}_h G_{hk}(q) \dot{q}_k \end{aligned} \quad (7.15)$$

Essendo T una forma quadratica omogenea, nella derivata \dot{q}_j il fattore 2 va via per simmetria delle componenti. Sottraendo la lagrangiana, V gen si semplifica!

Nota: L'energia associata alla lagrangiana con un V gen è SOLO l'energia cinetica, NON compare V generalizzato!!! ERRORE CHE SPESSO SI FA NEGLI ESERCIZI.

Perché? Abbiamo visto che se V gen non dipende dal tempo, F gen non fa lavoro, quindi l'energia non può dipendere da F gen in quanto T si conserva: la variazione di T è il lavoro delle forze esterne. D'altra parte, se ci fosse una dipendenza dal tempo in V gen, \mathcal{L} dipenderebbe dal tempo, F gen associata farebbe lavoro. L'energia NON dipenderebbe dal tempo, MA NON SAREBBE INTEGRALE PRIMO DEL MOTO: ABBIAMO DIMOSTRATO CHE E' INTEGRALE PRIMO DEL MOTO SOLO SE \mathcal{L} E' INDIPENDENTE DAL TEMPO: si veda Eq.4.5. L'ENERGIA NON SI CONSERVA! Anche se l'energia è sempre T e non dipende dal tempo, se \mathcal{L} dipende dal tempo, non si conserva! \mathcal{L} contiene molte più informazioni dell'energia. \mathcal{L} ci fornisce le equazioni del moto applicando $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}$, le informazioni sulla dinamica, H no, pur avendo spesso il ruolo di integrale primo speciale. L'effetto del potenziale generalizzato entra invece nel momento, che conterrà sia il contributo dell'energia cinetica, sia la derivata di V gen rispetto a \dot{q}_j . I momenti sono legati agli integrali quando le coordinate sono cicliche: attenzione!

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k G_{jk}(q) \dot{q}_k + \frac{e}{c} A_j(q) \quad (7.16)$$

I momenti generalizzati dipendono da \vec{A} .

$$\text{Nota: se } A_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \Rightarrow \sum_h A_h(q) \dot{q}_h = \sum_h \frac{\partial U}{\partial q_h} \dot{q}_h = \frac{d}{dt} U(q) \text{ derivata totale} \Rightarrow$$

$$\vec{A} \text{ è noto a meno di un gradiente } \frac{\partial U}{\partial q_h} \text{ (equazioni di Maxwell) } \text{ rot } \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0$$

Se A fosse il gradiente di una funzione, otterremmo la derivata totale temporale di una funzione di q (q è funzione del tempo). Le lagrangiane sono note a meno di una derivata totale: quindi se un potenziale generalizzato è il gradiente di U , l'operatore di Lagrange è trasparente rispetto a questi termini. Quindi il potenziale A è noto a meno del gradiente (il rotore di un gradiente è nullo).

Curiosità:

- trasformazione di scala potrebbe essere portata a livello di simmetria grazie all'esponenziale, ma nelle trasformazioni di scala non riusciamo a dimostrare l'esistenza di integrali primi del moto associati. Trasformazioni che aggiungono una derivata totale a \mathcal{L} : trasformazioni di Gauge, importanti in teoria dei gruppi.
- Il fatto che A sia esprimibile come gradiente di U è un caso. In generale un potenziale vettore non è un gradiente di niente.
- Il formalismo lagrangiano è adatto per essere scritto in relatività ristretta, e contiene già l'informazione che l'effetto di un \vec{B} è come un \vec{E} in un sistema di rotazione: analogia diventa fisica in relatività ristretta. Per ora vediamo l'analogia formale tra potenziali generalizzati e quindi equazioni del moto.

7.5 Teorema di Nöther

Formalizziamo il concetto di simmetria

Definizione 7.1.

$$\boxed{\begin{cases} \vec{x}(\alpha) = \phi^\alpha(\vec{x}) & \text{gruppo di trasformazioni dello spazio delle configurazioni} \\ \phi^0(\vec{x}) = \vec{x} & \text{identità} \\ \phi^\alpha \circ \phi^\beta(\vec{x}) = \phi^{\alpha+\beta}(\vec{x}) & \end{cases}} \quad (7.17)$$

Esempio: flusso di fase

Andiamo più a fondo nel trovare gli integrali primi nei sistemi lagrangiani. Gran parte degli integrali primi del moto nei sistemi meccanici sono legati a simmetrie interne dei sistemi. Parallelamente al concetto di integrale primo del moto, dinamico, con un concetto geometrico di simmetria,

Trasformazioni che dipendono da un parametro α reale (se è t : flusso di fase), dallo spazio a se stesso. Per $\alpha = 0$ otteniamo l'identità. Se componiamo due trasformazioni, è come fare una trasformazione sola che dipende dalla somma dei due parametri. Siamo nello spazio delle configurazioni, non nello spazio delle fasi. Gruppo abeliano.

Possiamo definire il campo vettoriale che genera il gruppo di simmetria, come per il flusso di fase.

$$\boxed{\frac{d\vec{x}}{d\alpha} = \vec{a}(\vec{x}) \quad \vec{a}(\vec{x}) = \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \phi^\alpha(\vec{x})} \quad (7.18)$$

La soluzione dell'equazione differenziale genera $\phi(\alpha)$.

Dalla nostra definizione, applicando le composizioni a un elemento e il suo inverso, segue l'esistenza dell'elemento inverso. E segue anche la proprietà associativa.

Generatore del gruppo: per i gruppi da noi studiati si calcola come spazio tangente all'identità del gruppo. Il fatto di poter studiare le proprietà di gruppo riferendole a un solo punto, l'identità, e poi attribuirlo a tutto il gruppo, segue dalla struttura algebrica 7.17, che è simile a un flusso di fase. Infatti il gruppo è indipendente dalle traslazioni dei "tempi": invarianza del "sistema dinamico" per spostamento dell'origine dei tempi.

Teorema 7.1 (Nöther). *Se la lagrangiana è invariante per applicazione del gruppo continuo di trasformazioni ad un parametro generato da $\vec{a}(x)$*

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \mathcal{L}\left(\phi^\alpha(\vec{x}), \frac{d}{dt}\phi^\alpha(\vec{x})\right) \quad \forall \alpha \quad (7.19)$$

allora esiste un integrale primo del moto definito da

$$A(\vec{x}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{a}(\vec{x}) \quad (7.20)$$

Dimostrazione. Sviluppiamo in $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \phi^\alpha(\vec{x}) &= \vec{x} + \vec{a}(\vec{x})\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ \frac{d}{dt}\phi^\alpha(\vec{x}) &= \dot{\vec{x}} + \frac{d}{dt}\vec{a}(\vec{x})\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\Delta\mathcal{L}\left(\phi^\alpha(\vec{x}), \frac{d}{dt}\phi^\alpha(\vec{x})\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{x}}\vec{a}(\vec{x})\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}}\frac{d}{dt}\vec{a}(\vec{x})\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) = 0 \quad \forall \alpha$$

Prendiamo una \mathcal{L} indipendente dal tempo per semplicità.

La derivata temporale considera l'evoluzione lungo le soluzioni.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{x}} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{x}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}} \\ \Delta\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) &= \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}}\vec{a}(\vec{x}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}}\frac{d}{dt}\vec{a}(\vec{x}) \right] \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) = 0 \\ \Rightarrow &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}}\vec{a}(\vec{x})\right) = 0 \\ \Rightarrow & \vec{p}_x \cdot \vec{a}(\vec{x}) = \text{integrale del moto, dove } \vec{p}_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}} \end{aligned}$$

□

L'ipotesi del teorema è che \mathcal{L} calcolata nel punto iniziale è identica a \mathcal{L} calcolata nella trasformazione. Attenzione che la derivata temporale non commuta con la trasformazione, la dobbiamo tenere fuori. Sviluppiamo la trasformazione nell'origine, come viene dall'integrazione del campo. Calcoliamo la derivata temporale dello sviluppo. Studiamo le conseguenze dell'egualanza in $\alpha = 0$. $\Delta\mathcal{L}$ indica la variazione di \mathcal{L} : sviluppo di Taylor di \mathcal{L} tolto il termine iniziale (la lagrangiana stessa: la trasformazione all'origine è l'identità)

Derivata composta. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha(\vec{x})}|_{\alpha=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}}$; $a(x)\alpha$ è la variazione del primo argomento della lagrangiana $\phi^\alpha - x$. Quando scriviamo $\frac{d}{dt}\vec{a}(\vec{x})$ sottintendiamo che le variabili x sono funzioni che soddisfano le equazioni di Lagrange, quindi sono funzioni del tempo. L'identità deve valere per ogni α per il teorema. Quando α è piccolo il fattore che lo moltiplica deve essere nullo, se no potremmo trovare α piccolo da rendere ininfluente il resto e avere un risultato diverso da zero (in altre parole, per α piccolo, siccome il termine in α^2 è trascurabile, deve essere nullo il termine tra parentesi, dato che il risultato deve essere 0). Scriviamo la parentesi come derivata temporale di un prodotto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}}$. Essendo la derivata temporale nulla (ipotesi del teorema): integrale primo del moto.

Riassumendo, calcolato il campo vettoriale che genera il gruppo tramite l'equazione differenziale, e calcolati i momenti associati alle coordinate, il prodotto scalare è un integrale primo del moto. Il teorema stabilisce una connessione tra le proprietà dinamiche di ammettere integrali primi del moto, e l'esistenza di gruppi di simmetria del sistema - che sono riconducibili alle proprietà geometriche del sistema.

7.5.1 Rotazioni attorno a un asse

Un esempio di applicazione del teorema appena visto è il gruppo di simmetria che rappresenta rotazioni attorno a un asse. È l'applicazione di una matrice ortogonale applicata al vettore (x, y, z) , con α = angolo di rotazione. Trasformazione dello spazio delle configurazioni 3d t.c. se l'angolo di rotazione è 0 otteniamo l'identità, e se ne componiamo 2 otteniamo la rotazione con l'angolo somma dei due angoli di rotazione.

Nota: Il fatto che la composizione equivalga alla somma dei parametri è perché l'asse di rotazione è FISSO: asse z

Calcoliamo il campo vettoriale che genera il gruppo.

$$\phi^\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \Phi^\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-y, x, 0) = \vec{a}(\vec{x}) \quad (7.22)$$

Se troviamo la soluzione dell'equazione differenziale (con il campo appena trovato) riotteniamo ϕ^α . Campo lineare. Rotazioni attorno a un asse non cambia il modulo quadro della velocità perché le matrici ortogonali mantengono le lunghezze dei vettori. Quindi la definizione di energia cinetica ha la proprietà di essere invariante per rotazioni perché lo spazio è isotropo. Perché V sia invariante per rotazione attorno all'asse z, può dipendere come vuole da z che resta inalterato. dipende dal modulo di (x, y) , che non sarà cambiato nella rotazione. Una lagrangiana così costruita soddisferà certamente le ipotesi del teorema.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x^2 + y^2, z) \quad (7.23)$$

Il teorema di Nöther afferma che derivando \mathcal{L} rispetto a \dot{x} (costruzione dei momenti generalizzati, che sono le quantità di moto lungo i 3 assi cartesiani) e facendo il prodotto scalare (righe per colonne) con il campo vettoriale \vec{a} , otteniamo un integrale primo del moto. Troviamo il momento della quantità di moto lungo l'asse z ($-m\dot{y} + m\dot{y}$).

$$\text{Th di Nöther} \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}} \cdot \vec{a}(\vec{x}) = (m\dot{x} \quad m\dot{y} \quad m\dot{z}) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrice antisimmetrica} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\Omega} = \text{autovettore nullo; è il versore lungo z}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \cdot \vec{a}(\vec{x}) = \vec{p} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{x}) = \vec{\Omega} \cdot (\vec{x} \times \vec{p}) \quad \text{componente lungo } \vec{\Omega} \text{ del momento della quantità di moto}$$

Nota: l'integrale del moto non dipende da $V(x)$ ma solo da T , a meno che non ci siano potenziali generalizzati.

Quando applichiamo la matrice antisimmetrica a un vettore qualunque, otteniamo $\vec{\Omega} \times \vec{x}$ con $\vec{\Omega}$ autovettore nullo della matrice. Cicliamo gli indici nel prodotto misto. Ma il prodotto tra \vec{x} e la quantità di moto \vec{p} di un punto materiale (o insieme di punti materiali) è il momento angolare per definizione: quindi otteniamo proiezione di \vec{L} lungo $\vec{\Omega}$, cioè sull'asse di rotazione che definisce il gruppo. Proiezione di \vec{L} lungo l'asse di rotazione è integrale primo del moto.

1. In generale l'integrale del moto che viene dal th di Nöther dipende solo da T , non V . Perché nel momento associato a una coordinata entra in gioco la parte cinetica, perché il potenziale non dipende da $\vec{v} \Rightarrow$ possiamo avere lo stesso integrale del moto per un'infinità di potenziali diversi, se sono nella forma vista. Invece l'altro integrale primo, E , dipende esplicitamente anche da V . Attenzione: non è valido nel caso di potenziali generalizzati. Esempio: un sistema simmetrico per rotazioni rispetto all'asse z ma dove è anche presente \vec{B} . Il potenziale di \vec{B} è generalizzato, dipende dalla velocità, quindi va a cambiare la definizione del momento associato a una coordinata (Eq.7.16): introduce in \mathcal{L} un termine lineare nelle velocità. Quindi cambia l'integrale primo del moto associato alla simmetria.

2. Variabile ciclica: caso particolare di simmetria. Qual è il gruppo associato a una variabile ciclica?

Sia $\mathcal{L}(\dot{x}, \dot{y}, x)$; consideriamo $y(\alpha) = y + \alpha$.

α non dipende dal tempo quindi non entra nella velocità. Non avendo dipendenza da y , abbiamo un gruppo di simmetria. Il campo generatore è:

$$\vec{a}(\vec{x}) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} y(\alpha) = (0, 1) \quad (7.24)$$

cioè il campo è costante, quindi l'equazione differenziale $\frac{dy}{d\alpha} = (0, 1)$ genera di nuovo il moto rettilineo uniforme. La componente x è 0 perché x resta inalterata. L'integrale del moto che otteniamo dal teorema di Nöther è $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$ che è l'integrale che associamo a una coordinata ciclica. Nöther: generalizzazione delle coordinate cicliche.

3. Essendo l'invarianza di \mathcal{L} vera non solo per α vicino a 0, ma per ognuno, e visto che sviluppando al primo ordine in α otteniamo l'integrale primo del moto, allora, se uno alla volta aggiungessimo i termini di ordine superiore in potenze di α potremmo in linea teorica trovare altri infiniti integrali primi?!?!. NO! Otterremmo sempre lo stesso integrale primo del moto. Se una quantità è 0, lo sono anche le sue derivate: i termini di ordine superiore non aggiungono altre informazioni ma confermano quanto visto al primo ordine, facendo derivate di ordine superiori. E' per la struttura del gruppo: studiando le proprietà del sistema vicino all'identità del gruppo poi possiamo estendere a ogni α .

Il procedimento visto con il th di Nöther si applica a qualsiasi coordinate (scrivendo \mathcal{L} e il gruppo in tali coordinate). Dato un gruppo di rotazione, che lo scriviamo in coordinate polari o cartesiane, troviamo sempre come integrale la proiezione del momento della quantità di moto sull'asse di rotazione Ω , asse del gruppo.

Conservazione del momento angolare? Attenzione che per rotazioni complete il gruppo NON è abeliano. Quindi non è una vera e propria simmetria. Un sistema invariante per qualunque asse di rotazione (il gruppo di rotazioni rispetto a ogni asse è un gruppo di simmetria per \mathcal{L}) si deve conservare tutto il vettore momento della quantità di moto, essendo che la proiezione lungo un qualunque asse genera un integrale primo. Ma il vettore NON è un integrale primo del moto, che deve essere uno SCALARE!! Possiamo prendere le 3 componenti e ciascuna è integrale primo del moto? Sì ma NON sono indipendenti. Dobbiamo trovare il modo di costruire integrali primi del moto che siano indipendenti.

7.5.2 Particella libera in coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi}) G \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = r(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = r(-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{cases} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la derivata temporale di x , y , z . Più breve costruire la matrice metrica con i vettori che consentono di esprimere vettore tangente a un punto di (x, y, z) . Essendo sullo spazio 3d non sulla sfera, non abbiamo problemi di singolarità: non c'è curvatura, la metrica è euclidea.

Il sistema è invariante per le rotazioni attorno a ogni asse si deve conservare il momento della quantità di moto totale. Usare coordinate polari per la particella libera in spazio 3d è una complicazione: l'invarianza non è evidente, mentre in coordinate cartesiane sì. Infatti

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

3 integrali primi del moto per variabili cicliche: le 3 componenti di \vec{p} : moto rettilineo uniforme, conservazione dell'energia. Passando alle coordinate polari, T , che coincide con \mathcal{L} , deve generare ancora un moto rettilineo uniforme, ma dalla scrittura delle equazioni del moto non è evidente. Conservazione di un gruppo di simmetria non abeliano.

La lagrangiana ($=T$ perché non c'è potenziale) in coordinate polari ha solo φ come coordinata ciclica. φ è l'angolo di rotazione attorno all'asse z - rotazione in cui cambia solo φ . Quindi l'integrale primo associato a questa simmetria sarà la proiezione di \vec{L} lungo z .

Integrali primi del moto

$$\begin{cases} \mathcal{L} \equiv T \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \end{cases} \quad (7.25)$$

Nota: \mathcal{L} suggerisce che sapendo anche a priori che tutto il vettore \vec{L} si conserva, otteniamo in maniera naturale solo L_z come integrale primo dalla coordinata ciclica .

L'orientazione dell'asse z è arbitraria, ma una volta fissata φ resta associata a rotazioni a quell'asse.

Però abbiamo un altro integrale primo: $T \equiv E$. Sostituendo allora $\dot{\varphi}$ che ricaviamo dall'integrale primo del moto

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta}$$

Rispetto al moto sulla sfera (vedasi 6.2), abbiamo anche il termine in \dot{r}^2 . L'energia è bidimensionale: contiene le velocità e coordinate di r e θ . Manca un integrale primo?? Il problema di un punto materiale in \mathbb{R}^3 sembrerebbe non integrabile, nonostante la soluzione sia il moto rettilineo uniforme??!! Per di vedere la soluzione completa, ci servirebbe il formalismo hamiltoniano.¹⁶ Anche se θ non è ciclica, calcoliamo il momento associato a θ , che però NON sarà integrale primo del moto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = p_\theta = mr^2 \dot{\theta} \Rightarrow E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta}$$

Sostituendo ora $\dot{\varphi}^2$ nella lagrangiana ($=T$) con l'integrale primo (Correzione slides p_φ^2 , c'è nel passaggio finale):

$$\frac{d}{dt} p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = \frac{\sin \theta \cos \theta p_\varphi^2}{mr^2 \sin^4 \theta} = \frac{\cos \theta p_\varphi^2}{mr^2 \sin^3 \theta} \neq 0$$

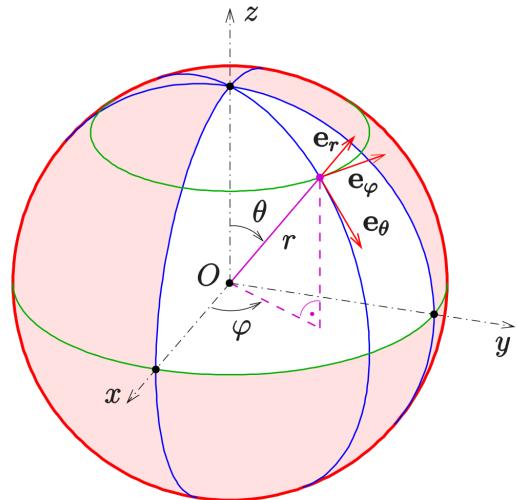


Figura 7.2: Vectors in spherical coordinates

¹⁶Ricorda il problema 2 del 26/6/2019?

All'interno dell'energia abbiamo sostituito $\dot{\theta}$ con p_θ , che però NON è integrale primo del moto, è solo un modo alternativo di scrivere $\dot{\theta}$. La coppia di equazione del moto ed energia completa il problema. Raccogliamo $\frac{1}{r^2}$ così il termine tra parentesi non contiene più r , quindi non ne dipende.

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2mr^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right)}$$

Abbiamo cioè separato la dinamica radiale rispetto a angolare. Non sarà questo l'integrale primo del moto cercato? Sì, per verificarlo deriviamo rispetto al tempo e sostituendo $\dot{\theta}$ con la sua espressione che viene dal momento associato a θ :

$$\frac{d}{dt} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) = 2p_\theta \frac{\cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta} - \dot{\theta} \frac{2p_\varphi^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0$$

La simmetria gruppo di rotazione in realtà forniva più integrali primi del moto, che però (a parte p_ϕ che è $\vec{L} \cdot \hat{z}$) non sono le proiezioni di \vec{L} lungo gli assi. Ma un integrale dipende dal modulo quadro, e non si può calcolare direttamente dal teorema di Nöther. Attenzione che il teorema di Nöther richiederebbe che il gruppo sia abeliano! Qui non lo è: non possiamo avere tutti gli integrali primi che esprimerebbero la dimensione del gruppo = 3 (numero di assi di rotazione).

Avendo l'energia, la proiezione di \vec{L} lungo z scelta, e una combinazione dei due momenti al quadrato \Rightarrow possiamo integrare completamente l'integrazione. Ci riconduciamo a una variabile che è r : parte cinetica, potenziale $\propto r^{-2}$ centrifugo (come per il campo centrale) - per il moto radiale. Poi calcoliamo θ e ϕ . Abbiamo dovuto lavorare per ottenere il terzo integrale, che non veniva fuori semplicemente dal gruppo: essendo non abeliano non dà tanti integrali primi quanti sono i suoi gradi di libertà.

La ricerca degli integrali primi del moto dipende strettamente dalle coordinate usate. In coordinate cartesiane, abbiamo p_x, p_y, p_z e l'energia è dipendente. Usando le coordinate polari, otteniamo integrali primi diversi, che sono comunque legati alle simmetrie del problema, e sono sempre dipendenti dalle 3 componenti di \vec{p} , ma scritti in forma più complicata. Il significato del terzo integrale primo del moto: legame con L^2 . Possiamo evitare di fare i calcoli per verificarlo perché vedremo un modo più diretto con il formalismo hamiltoniano.

Abbiamo messo in luce la complicazione algebrica intrinseca del fatto che le rotazioni sono un gruppo non abeliano, che si ripercuote in meccanica quantistica.

Esercizio 7.5.1. 11 febbraio 2019- Problema 1

Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi su una retta orizzontale e connesso mediante una molla di costante elastica k ad un punto Q che si muove con moto uniformemente accelerato $x_Q(t) = at^2/2$. Determinare la soluzione del moto e discutere se il punto P sorpassa il punto Q date le condizioni iniziali $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Soluzione:

L'energia del sistema

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2} \left(x - \frac{at^2}{2} \right)^2$$

L'equazione del moto si scrive

$$m\ddot{x} = -kx + k\frac{at^2}{2}$$

Cerchiamo una soluzione particolare nella forma $x(t) = c_0 + c_1 t^2/2$

$$mc_1 = -k \left(c_0 + \frac{c_1 t^2}{2} \right) + k\frac{at^2}{2}$$

da cui

$$c_1 = a \quad c_0 = -\frac{a}{\omega^2}$$

con $\omega = \sqrt{k}/m$. La soluzione generale si scrive nella forma

$$x(t) = -\frac{a}{\omega^2} + \frac{at^2}{2} + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1) + \frac{at^2}{2}$$

Dal momento che $x(t) - x_Q(t) \leq 0$ il punto P non sorpassa mai il punto Q .

P parte dall'origine, è attaccato alla molla. Il punto Q a cui attaccata la molla dall'altra parte, fa un moto uniformemente accelerato, e la molla vi corre dietro. (Nell'energia mancava il quadrato nel potenziale della molla). Valutiamo $x_P - x_Q$. All'energia è associata un'equazione di Newton forzata. Si hanno la forza elastica + una forzatura che dipende in maniera quadratica dal tempo. Per forzature polinomiali cerchiamo una soluzione polinomiale. In questo caso, costante + termine di ordine quadratico. Aggiungiamo la soluzione omogenea, cioè l'oscillatore armonico. Imponiamo che posizione e velocità al tempo iniziale siano nulle (nel testo del problema mancava $x(0) = X'(0) = 0$). Il punto P non supera Q, dato la differenza $x_P - x_Q \leq 0$, dove $x_q = at^2/2$, e $1 - \cos$ è negativo.

8 Teoria delle piccole perturbazioni

8.1 Stabilità secondo Ljapounov

Per approssimare le soluzioni per i sistemi lagrangiani, quando non si possono risolvere. Scriviamo la lagrangiana nella forma generale (per semplicità: no potenziali generalizzati):

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i G_{ij}(q) \dot{q}_j - V(q)$$

Sia $q = q_0$ punto di minimo stretto del potenziale

$$H_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} V(q_0) \quad \text{strettamente definita positiva}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i G_{ij}(q) \dot{q}_j + V(q) \quad \text{integrale del moto}$$

L'energia confina il moto in un intorno del punto q_0 . q_0 è un punto stabile secondo Ljapounov.

Teorema 8.1. *Dato un intorno \mathcal{V}_{q_0} , \exists un intorno $\mathcal{U}_{q_0} \subseteq \mathcal{V}_{q_0}$ t.c. se $q_* \in \mathcal{U}_{q_0} \Rightarrow q(t; q_*) \in \mathcal{V}_{q_0}$*

La teoria delle piccole oscillazioni si applica quando esiste un q_0 punto di minimo stretto, quindi non degenere: l'hessiana deve essere strettamente positiva (derivate seconde nel punto di minimo) \Rightarrow tutti gli autovalori di H devono essere positivi.

La funzione energia è integrale primo del moto; è composta da T - sempre forma quadratica definita positiva - e V , che avendo un minimo stretto forma una conca. Dato il valore del punto di minimo del potenziale, non possiamo scendervi sotto essendo T positiva: $E >$ energia del minimo. Qualunque allontanamento dal minimo stretto richiede un aumento di $V \Rightarrow$ diminuzione di T , essendo E costante. Ad un certo punto non ci possiamo più allontanare: T non può assumere valori negativi. L'energia confina il moto attorno a q_0 : q_0 è un punto stabile secondo Ljapounov: cioè dato un intorno di q_0 , esiste sempre un intorno più piccolo tale che se presa una condizione iniziale in tale intorno, la traiettoria resta dentro l'intorno grande (teorema). E' conseguenza del fatto che per uscire della conca, serve aumentare V quindi diminuire T , che però può solo essere positiva. Possiamo quindi studiare il moto in maniera locale, restando vicino al punto di minimo. Allora è lecito sviluppare la lagrangiana \rightarrow lagrangiana delle piccole oscillazioni

8.2 Lagrangiana delle piccole oscillazioni

$$\boxed{\mathcal{L}_{PO}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i G_{ij}^0 \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} (q_i - q_{0i}) \cdot H_{ij} (q_j - q_{0j}) + \mathcal{O}(\|q - q_0\|^3)} \quad (8.1)$$

dove la matrice G è calcolata sul punto di minimo $G_{ij}^0 = G_{ij}(q_0)$

Poniamo $Q_j = q_j - q_{0j}$

$$\boxed{\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{Q}_i G_{ij}^0 \dot{Q}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_i H_{ij} Q_j} \quad (8.2)$$

Essendo il punto fisso un punto di minimo di potenziale: punto di equilibrio. Quindi le \dot{q} si possono pensare come velocità relative a q_0 che resta fisso. Sviluppiamo la lagrangiana [17](#); essendo punto di minimo **non** c'è il termine

al primo ordine. Per il teorema precedente, che assicura che il moto sia confinato, la soluzione quadratica è già una buona approssimazione e possiamo trascurare il termine cubico, che è una perturbazione all'orbita. E' un infinitesimo di ordine superiore, quando siamo in un certo intorno di q_0 e ci rimaniamo: possiamo scegliere un intorno sufficientemente piccolo tale che il termine cubico non abbia effetto per un tempo molto lungo perché le soluzioni restano lì vicino per il teorema di Ljapounov. Se no in generale i termini che all'inizio si possono trascurare in una lagrangiana poi non sono più trascurabili. Ma in questo caso E limita il moto.

Energia cinetica calcolata sul punto di minimo: matrice costante. Sviluppiamo il potenziale, non scrivendo il termine costante.

Nota: L'energia cinetica è già una forma quadratica, e T e V sono dello stesso ordine perché rimanendo nella conca si scambiano (a variazioni piccole dell'una corrispondono variazioni piccole dell'altra). Allora anche se G dipende da q , nell'approssimazione delle piccole oscillazioni NON dobbiamo sviluppare G : il termine noto dello sviluppo è già di ordine quadratico.

Invece per tenere conto delle variazioni di E dovute a variazioni di V dobbiamo svilupparlo all'ordine quadratico, dato che non abbiamo il termine di ordine 1 (e il termine costante non è significativo). Questo è rilevante per più di 1 grado di libertà, altrimenti ci riconduciamo alle tecniche già viste, e già l'energia consente di integrare il problema mentre per più d.o.f. non basta l'energia come integrale primo del moto.

G^0 e H sono matrici simmetriche definite positive. Equazioni del moto:

$$\sum_j (G_{ij}^0 \ddot{Q}_j + H_{ij} Q_j) = 0 \quad (8.3)$$

\Rightarrow Cerchiamo soluzioni nella forma $Q(t) = Q_\lambda e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \sum_j (\lambda^2 G_{ij}^0 Q_{\lambda j} + H_{ij} Q_{\lambda j}) = 0 \\ & \det(\lambda^2 G^0 + H) = 0 \quad \text{Equazione caratteristica} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Differenza di 2 forme quadratiche definite positive e simmetriche (G e H sono matrici simmetriche per costruzione). \mathcal{L} quadratica \Rightarrow equazione del moto lineare (nel ricavarla ricordiamo che le matrici G e H sono costanti). Equazione lineare (al secondo ordine) a coefficienti costanti \Rightarrow cerchiamo soluzioni con un coefficiente vettoriale Q_λ con dipendenza temporale esponenziale. Essendo l'esponenziale diverso da 0, lo semplifichiamo \rightarrow equazione caratteristica. Equazioni lineari hanno solo la soluzione nulla se sono invertibili; per avere una soluzione non triviale la matrice associata al sistema lineare, $\lambda^2 G^0 + H$, non deve essere invertibile: imponiamo $\det = 0 \Rightarrow$ possiamo calcolare gli autovettori. $Q_j = 0$ è una soluzione accettabile, ma non aggiunge nulla al punto fisso. Calcoliamo gli autovalori e autovettori di H non rispetto all'identità, ma alla metrica G (è equivalente: definita positiva, invertibile).

$$\lambda^2 < 0 \quad \text{in quanto } \lambda^2 = -\frac{\sum Q_\lambda H Q_\lambda}{\sum Q_\lambda G^0 Q_\lambda} < 0$$

Cioè $\lambda^2 < 0$ perché moltiplicando l'Eq- 8.4 per Q_j a sinistra, sommando su j , otteniamo il rapporto cambiato di segno tra forme quadratiche definite positive. Le forme quadratiche sono applicate al vettore Q_λ (non ancora noto, ma non importa perché sono definite positive).

Poniamo $\lambda^2 = -\omega^2$. Abbiamo

$$Q(t) = Q_\omega (c e^{i\omega t} + \bar{c} e^{-i\omega t}) = Q_\omega (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) \quad \text{oscillatore lungo la direzione } Q_\omega \quad (8.5)$$

λ^2 quadrato di un numero immaginario puro. La soluzione contiene un vettore costante Q_ω da calcolare; sistema lineare con una matrice non invertibile \Rightarrow soluzione non triviale: autovettore Q_ω associato a λ / ω . La soluzione è combinazione lineare con coefficienti c da calcolare di $e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$. Deve essere reale $\Rightarrow Q_\omega$ reale, e i coefficienti sono complessi coniugati. \Rightarrow combinazione di seni e coseni: oscillatore armonico lungo la direzione Q_ω fissata nello spazio. Per ogni autovalore (funziona anche nel caso degenere) possiamo associare una direzione Q_ω autovettore

¹⁷ Formula di Taylor con resto di Peano

Siano $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $x_0 \in \Omega$. Allora

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + o(\|x - x_0\|^2) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

(reale) di H rispetto a G - lungo tale direzione è come se avessimo definito un nuovo spazio delle fasi (con coordinata e velocità lungo tale direzione). Tante direzioni quanti sono gli autovalori di H rispetto a G , cioè n gradi di libertà.

Se $\omega \neq \mu \Rightarrow Q_\mu G^0 Q_\omega = 0$

$$\begin{aligned} \omega^2 Q_\mu \cdot G^0 Q_\omega &= Q_\mu \cdot H Q_\omega \stackrel{(18)}{=} H Q_\mu \cdot Q_\omega = \\ &= \mu^2 G^0 Q_\mu \cdot Q_\omega \stackrel{(19)}{=} \mu^2 Q_\mu \cdot G^0 Q_\omega \\ \Rightarrow (\omega^2 - \mu^2) Q_\mu \cdot G^0 Q_\omega &= 0 \\ \Rightarrow Q_\mu \cdot G^0 Q_\omega &= 0 \end{aligned}$$

Se gli autovalori sono diversi, i due autovettori sono ortogonali rispetto a G_0 che è una matrice metrica e definisce un prodotto scalare. Stessa dimostrazione diagonalizzando una matrice simmetrica, gli autovettori sono ortogonali.

Q_ω definiscono una base ortogonale rispetto alla metrica G^0 . Normalizziamo:

$$Q_\omega \cdot G^0 Q_\mu = \begin{cases} 1 \text{ se } \omega = \mu \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} = \delta_{\mu\omega}$$

Sostituiamo l'equazione degli autovalori. Q_μ autovettore dell'autovalore μ della matrice H . $\omega \neq \mu \Rightarrow$ deve essere nullo il prodotto scalare associato alla matrice G_0 . Q_ω definiscono una base ortogonale (che possiamo normalizzare per renderla ortonormale) rispetto alla metrica G_0 . Sistema degenere: basta un numero inferiore di equazioni per trovare la soluzione; l'unica costante che rimane libera la fissiamo imponendo la normalizzazione degli autovettori rispetto alla metrica associata a T calcolata nel punto di minimo.

Soluzione generica della lagrangiana delle p.o. qualunque siano le condizioni iniziali:

$$Q(t) = \sum_{\omega} Q_\omega (c_1^\omega \cos(\omega t) + c_2^\omega \sin(\omega t)) \quad (8.6)$$

ω = frequenza alle piccole oscillazioni

$$\det | -\omega^2 G^0 + H | = 0 \quad (8.7)$$

per ogni direzione di oscillazione Q_ω vanno fissate le due costanti c_1, c_2 . Equazione al secondo ordine in n variabili: n condizioni date da x , e e n da v . Q_ω sono detti direzioni/modi principali di oscillazioni. Calcolare ω , frequenza alle piccole oscillazioni, significa risolvere l'equazione caratteristica 8.7 cioè imponendo che il determinante sia nullo - equazione polinomiale di grado $2n$ con solo potenze pari (quindi in pratica di grado n), si risolve numericamente. Formalmente possiamo cambiare variabili da Q a u che utilizziamo per scrivere in maniera più semplice la lagrangiana alle piccole oscillazioni.

Cambio di variabili $Q = Tu$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{P0} &= \frac{1}{2} (\dot{Q} \cdot G^0 \dot{Q}) - \frac{1}{2} (Q \cdot H Q) = \\ &= \frac{1}{2} (T \dot{u} \cdot G^0 T \dot{u}) - \frac{1}{2} (Tu \cdot HTu) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{u} \cdot (T^T G^0 T) \dot{u}) - \frac{1}{2} (u \cdot (T^T HT) u) \end{aligned}$$

Sia $T = (Q_{\omega_1}, Q_{\omega_2}, \dots, Q_{\omega_n})$

$$\Rightarrow T^T G^0 T = I \quad T^T H T = \Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \dots \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \dots \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

calcoliamo dalla soluzione e dalle sue derivate, in $t=0 \rightarrow$ ci. Matrice T formata come colonne dagli autovettori Q_ω . $T^T G^0 T$ sono i prodotti scalari costruiti con gli autovettori, ma essendo la base ortonormale otteniamo l'identità.

¹⁹ H è simmetrica

¹⁹ G è simmetrica

Consideriamo ora $T^T HT$; HT è H applicata ai suoi autovettori, genera ancora T moltiplicata per Ω^2 . HT è come $G\omega^2$. \Rightarrow matrice diagonale con gli autovalori cambiati di segno della matrice H . Trasformiamo \mathcal{L} in somma di oscillatori indipendenti, ciascuno con frequenza ω_k .

$$\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2} \sum_k (\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2) \quad (8.8)$$

sovraposizione di oscillatori indipendenti

\mathcal{L} somma rispetto a gradi di libertà diversi (direzioni diverse): allora sono sistemi che non interagiscono! Autovettori: detti modi normali - legato alla sovrapposizione di oscillatori. I coefficienti di combinazione lineare saranno determinati dalle c_i . Indipendenti perché ognuno oscilla in una direzione diversa. Abbiamo linearizzato la $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ quadratica- approssimazione buona nell'intorno del punto di minimo. Equazioni del moto: lineari a coefficienti costanti \Rightarrow soluzioni di tipo esponenziale.

Problema dell'analisi numerica: calcolare autovalori e autovettori è lungo. Determinare con precisione sufficiente lo spettro di matrici grandi. Numericamente è difficile per il computer trattare sia numeri grandi che piccoli insieme. Monitorare la caduta dei punti: strutture complesse, e bisogna ricavarne le proprietà misurandone le oscillazioni. La struttura è definita da \mathcal{L}_{PO} . Dalle osservazioni sperimentali vogliamo definire i modi normali, cioè la struttura di \mathcal{L} : mi definisce dove sono le risonanze, e se lo spettro cambia sta cambiando la rigidità. Quando bombardiamo una proteina con radiazioni e.m., possiamo eccitare modi normali, dobbiamo ricostruire la struttura geometrica noti i modi normali cioè le frequenze e direzioni di oscillazioni. Dobbiamo avere grande precisione di misura. Ricostruire la struttura geometrica degli oggetti sapendo solo i modi normali di oscillazione è un problema difficile di numerica. Area di ricerca: numerica, struttura della materia- organica e non.

c_1, c_2 sono 2 quantità reali, legate una alle coordinate l'altra alle velocità, che definiscono le condizioni iniziali (non sono da confondere con c e \bar{c}).

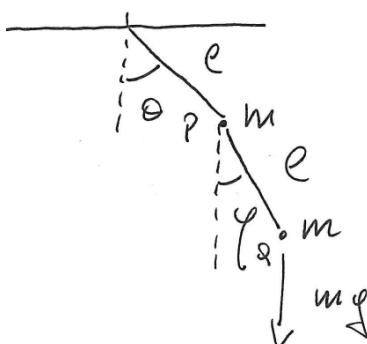
Con la teoria delle piccole oscillazioni, abbiamo fatto una trasformazione che trasforma il prodotto scalare associato alla metrica G in prodotto euclideo standard: localmente possiamo sempre portare la superficie su cui ci muoviamo sul piano- è il concetto di varietà (globalmente no: vedi sfera).

$-\omega^2$ sono gli autovalori, la radice sono le frequenze alle piccole oscillazioni $\pm i\omega$. Il sistema di autovalori e autovettori è $n \times n$.

Le nostre trasformazioni sono differenziabili; cambio di variabile continuo ed invertibile trasforma intorni in intorni \Rightarrow un intorno di q_0 è mappato in un intorno.

Quando ci sono vincoli mobili non possiamo parlare di teoria delle piccole oscillazioni perché \mathcal{L} dipende dal tempo. La linearizzazione possiamo sempre farla, ma non abbiamo più l'integrale primo dell'energia che serviva nella teoria di Ljapounov per determinare che partendo dall'intorno di un punto di minimo stretto la soluzione resta lì vicino. Per potenziali generalizzati: dobbiamo sempre fare uno sviluppo che mantenga un termine quadratico. Il potenziale generalizzato non entra nella definizione del minimo, perché se la velocità è nulla, come accade nel punto di minimo, non c'è la forza associata a V_{gen} , ma solo da V . In \mathcal{L}_{PO} avremo tutti i termini di ordine quadratico. $A(q)$ in q_0 sarà un vettore costante, $\dot{q}q_0$ è un termine lineare ma non c'è perché diventa una derivata totale- vedremo esercizi. Il termine successivo lo dobbiamo tenere perché è di ordine quadratico. In \mathcal{L} manteniamo termini quadratici in x, v e termini misti; togliamo termini riconducibili a derivate totali rispetto al tempo o termini costanti.

8.3 Pendolo doppio



La prima massa è vincolata a un punto fisso con un'asta lunga l di massa trascurabile: circonferenza di raggio l . la seconda massa fa lo stesso rispetto alla prima, ma la sua posizione dipende da dove si trova la prima. 2 gradi di libertà. 2 punti materiali \Rightarrow 2 posizioni per punto \Rightarrow 4 dof, ma ci sono 2 vincoli olonomi: ogni primo punto rimane a distanza fissa rispetto a un altro punto. Purché introduciamo coordinate adattate ai vincoli possiamo usare il formalismo lagrangiano. Sono l'inclinazione delle due aste rispetto alla verticale. Lo spazio delle configurazioni definito da 2 coordinate angolari è il toro: prodotto diretto di due circonferenze come superficie. Toro: superficie che definisce lo spazio delle configurazioni del pendolo doppio. E' piettabile, ha geometria piana. Abbiamo immerso lo spazio delle configurazioni del pendolo doppio nello spazio euclideo (un piano per ciascun punto).

sistema vincolato, (θ, ϕ) coordinate lagrangiane

$$\begin{cases} \vec{x}_P = (l \sin \theta, -l \cos \theta) \\ \vec{x}_Q = (l \sin \theta + l \sin \phi, -l \cos \theta - l \cos \phi) \end{cases}$$

energia cinetica di un sistema è sommabile: $T = T_p + T_q$.

$$T = T_P + T_Q \begin{cases} \dot{\vec{x}}_P = l \dot{\theta} (\cos \theta, \sin \theta) \\ \dot{\vec{x}}_Q = l (\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi, \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \end{cases}$$

$$T = \frac{m}{2} v_P^2 + \frac{m}{2} v_Q^2 = \frac{ml^2}{2} (2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi))$$

Anche $V = V_p + V_q$; c'è solo la forza peso. * Non derivare 1 che è costante!!

$$V = -mgl(2 \cos \theta + \cos \phi)$$

Esercizio: fai i passaggi. (uso la formula del coseno della differenza di angoli).

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} (2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi)) + mgl(2 \cos \theta + \cos \phi)$$

la lagrangiana è una forma quadratica: come energia cinetica la cui matrice può dipendere della coordinate. controllare che i punti di equilibrio siano di minimo stretto: calcoliamo il gradiente del potenziale.

Punti di equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 2mgl \sin \theta = 0 & \theta = 0, \pi \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= mgl \sin \phi = 0 & \phi = 0, \pi \\ H &= mgl \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \end{pmatrix} \\ G^0 &= ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solo (0,0) è la soluzione stabile: se sottoposta a piccole oscillazioni resta vicino: pendoli sono in verticale. Le altre soluzioni sono un pendolo in basso e l'altro rovesciato e viceversa, oppure entrambi rovesciati.

Come costruiamo la lagrangiana? Scriviamo G_0 : sostituiamo l'energia cinetica sostituendo 0 e 0 a entrambi gli angoli. (Il fattore 1/2 è considerato fuori dalla forma quadratica.) A T è associata a G_0 , in cui i termini misti vanno distribuiti dividendo per 2 nella diagonale secondaria. Costruiamo l'hessiana e calcoliamo al punto di minimo -> matrice costante. Deve essere una matrice (simmetrica 2x2) definita positiva- controlliamo che il primo termine (minore principale) e il determinante siano positivi (oppure che gli autovalori siano positivi, ma è più lungo). \mathcal{L} : due oscillatori armonici, uno con $k=1$, e l'altro 2. L'importante è mantenere l'ordine delle variabili per entrambe le matrici.

frequenza alle piccole oscillazioni:

$$\begin{aligned} \det \left| \omega^2 ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - mgl \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2\omega^2 - 2\frac{g}{l} & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{l} \end{pmatrix} = 2(\omega^2 - \frac{g}{l})^2 - \omega^4 = 0 \\ \omega^4 - 4\omega^2 \frac{g}{l} + 2 \left(\frac{g}{l} \right)^2 = 0 \\ \omega^2 = 2\omega_0^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 - 2\omega_0^4} = 2\omega_0^2 \pm \sqrt{2}\omega_0^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

frequenza:

$$\text{veloce } \omega_+ = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0, \quad \text{lenta } \omega_- = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0$$

Vengono identificate una frequenza veloce e una lenta. Ordinamento delle frequenze. La più veloce è maggiore della frequenza libera, cioè del pendolo semplice, l'altra più lenta.

Calcoliamo i modi normali: gli autovettori. Prendiamo la matrice usata per calcolare gli autovalori, e sostituiamo le due soluzioni trovate. La seconda equazione dà le stesse informazioni della prima, quindi non la scriviamo.

Autovettori: modi normali

$$\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 \pm 2\sqrt{2} & 2 \pm \sqrt{2} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi = -\frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2 \pm \sqrt{2}} \theta \quad (8.9)$$

$$\omega_+ \Rightarrow \theta, \phi \text{ oscillano in modo disordine} \quad (8.10)$$

$$\omega_- \Rightarrow \theta, \phi \text{ oscillano in modo concorde} \quad (8.11)$$

+ frequenza veloce, - frequenza lenta. Al numeratore con frequenza lenta compare un numero negativo \Rightarrow pendoli concordi, oscillazione di θ positiva corrisponde a ϕ positiva. Per calcolare i modi normali dovremmo costruire il vettore che soddisfa la relazione tra angoli 8.9 e che risulta normalizzato rispetto a T - norma=1 calcolata secondo la metrica G_0 . Possiamo inoltre verificare che i due autovettori (+-) sono ortogonali rispetto al prodotto scalare associato alla forma quadratica G_0 . Avremmo costruito la base ortonormale degli autovettori della matrice hessiana del potenziale rispetto alla matrice dell'energia cinetica.

Frequenza lenta è vicina a ω_0 : è più simile a un pendolo unico, i due punti si muovono in fase quasi come se fossero uno solo - una massa va più su per inerzia. Mentre l'oscillazione veloce mette in evidenza i due d.o.f in controfase, come se ci fosse una massa più pesante.

modo normale: c'è una direzione (autovettore normalizzato) lungo cui c'è oscillazione- cioè sono definite direzione e frequenza di oscillazione.

Curiosità:

- i potenziali sono additivi perché le forze si sommano vettorialmente dando la forza risultante.
- gli autovettori sono definiti da una relazione tra componenti, che diventa univoca quando imponiamo la lunghezza.
- se si eccitano i due stati contemporaneamente: si formano dei pattern di interferenza- la soluzione generica è la somma delle due. La c.i. è somma di una c.i. per l'oscillazione veloce e una per la lenta. Definite le costanti, il moto resta sempre somma delle due oscillazioni (NON è che il pendolo doppio oscilla tra una soluzione e l'altra!)
- Scriviamo l'energia cinetica (totale), come forma quadratica, e la matrice metrica sarà quella associata (NON possiamo dire che la matrice metrica di un sistema di più punti materiali è la somma delle matrici!)

9 Dinamica corpo rigido

Sia K un corpo rigido con un punto fisso O . Consideriamo due sistemi di riferimento con origine O :

1. sistema fisso nello spazio (inerziale)
2. sistema fisso nel corpo (rotante)

Moto del corpo rigido: traslazione rispetto all'origine + rotazione attorno a un punto. La vera novità del corpo rigido sta nello studio delle rotazioni, su cui ci concentreremo, trascurando la traslazione che è riconducibile al moto del punto materiale.

Si definisce il corpo rigido definendo come vincolo che le distanze relative sono bloccate:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = c \quad \forall A, B \in K \quad \text{vincolo olonomo} \quad (9.1)$$

E' un insieme di punti solidale a un sdr, quindi un sdr stesso è un corpo rigido, perché tutti i punti solidali al sistema hanno distanze relative fissate. Spazio delle configurazioni dei sdr rispetto a sdr dato. * computer graphics definisce un oggetto dando specifiche rispetto a un sdr. Ruotare l'oggetto significa ruotare il sdr rispetto a cui è stato definito.

Il vincolo di rigidità non è compatibile con la fisica relativistica: propagherebbe informazioni a velocità infinite, ecco perché si parla solo di corpo rigido classico.

E' un sistema meccanico in cui lo spazio delle configurazioni è un gruppo: il gruppo delle rotazioni, spazio delle matrici ortogonali 3x3. Come spazio la superficie è complessa (è vero che ogni sfera definisce un asse di rotazione, ma devo identificare i punti della sfera opposti al diametro *?*)- gruppi di Lie, geometria differenziale. Il corpo rigido ha 3 gradi di libertà rotazionali (legati ai 3 assi possibili di rotazione) + 3 d.o.f per il punto che trasla \Rightarrow 6 d.o.f.

Nota: Attenzione che il punto fisso non è per forza il centro di massa- anche se è privilegiato, ad esempio le forze centrali si possono sempre pensare applicate al cdm. Es: la trottola ha un punto fisso (punto di contatto) che non è il centro di massa.

$$P \in K, \quad X_P = R(t)x_P, \quad X_P \text{ nello spazio, } x_P \text{ nel corpo}$$

Il sistema in cui il corpo rimane fermo, ruota: è non inerziale, la relazione tra le coordinate è espressa da una matrice ortogonale, che applicata alla posizione di P nel sdr del corpo restituisce la posizione nel sdr inerziale (come visto nell'Eq. 7.1). $R(t)$ matrice che esprime la rotazione del sdr X rispetto a x. $\dot{x}_P = 0$ perché $x_P = \text{cost}$: il corpo è fisso nel sistema rotante. La dinamica del singolo punto del corpo ci è dunque nota dallo studio dei sistemi rotanti.

9.1 Tensore di inerzia

Conoscendo la matrice, e le posizioni relative nel corpo, possiamo ricostruire la dinamica. Dovremmo aggiungere una velocità di traslazione del punto fisso moltiplicata per un tempo, ma è la stessa fisica del punto materiale per cui la trascuriamo per semplicità di calcolo.

Per un corpo rigido $\dot{x}_P = 0$: non abbiamo una dinamica relativa

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{x}_P \quad (9.2)$$

dato che la velocità relativa è nulla (vedasi l'Eq. 7.5). Velocità di rotazione: autovettore legato all'autovalore nullo di $\dot{R}R^T$. Vogliamo considerare x_P una posizione fissa, quindi leggiamo l'equazione nel sistema del corpo. Otteniamo la velocità assoluta scritta del sdr del corpo. Lo svantaggio di metterci nel sdr non inerziale è molto inferiore rispetto a far variare x_P : basta usare la matrice di rotazione per tornare al sdr inerziale.

Nota: NON vuol dire che nel sdr del corpo, il corpo è fermo, perché NON stiamo studiando la dinamica relativa- che è ovviamente nulla- bensì la dinamica ASSOLUTA! In particolare descriviamo la dinamica assoluta, cioè che si vede nel sistema inerziale, da un sistema solidale del corpo (in cui non si muove). Le velocità angolari usate nel calcolo di T hanno coordinate scritte nel sistema del corpo. I due sdr hanno stessa origine che non si muove, no traslazioni, semplicemente uno ruota e uno no. La dinamica è inerziale, le coordinate non inerziali. Data una lagrangiana, possiamo usare qualunque insieme di coordinate!

Scriviamo l'energia cinetica (assoluta) nel sistema del corpo

$$T = \frac{1}{2} \int_K v_P^2 \rho dx_P \quad \text{con } \rho(x) = \text{densità di massa}$$

$$v_P^2 = (\vec{\omega} \times \vec{x}_P) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}_P) = \vec{\omega} \cdot (\underbrace{\vec{x}_P \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_P)})$$

Modulo di $v_p \Rightarrow$ invariante dei sdr. Nel prodotto misto si possono ciclare i vettori (il volume non cambia in base all'ordine, a meno del segno, e con una permutazione ciclica si mantiene lo stesso segno). Nel calcolo di T compare il prodotto scalare di ω per il prodotto vettore tra la posizione del punto x e la sua velocità che è il momento della quantità di moto (visto nel sdr del corpo) \Rightarrow l'integrale si riconduce al momento della quantità di moto di tutti i punti materiali che costituiscono il corpo rigido: ω non dipende da x quindi si porta fuori.

$$T = \frac{1}{2} \omega \int_K (\vec{x}_P \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_P)) \rho dx_P$$

L'integrale è un operatore lineare su ω , che vi compare dentro in forma lineare. I prodotti vettori sono lineari. L'operatore lineare applicato a ω definisce L nel sistema solidale con il corpo. Viene rappresentato da una matrice I - è l'oggetto che caratterizza dinamicamente il corpo rigido, rispetto ai punti materiali. La struttura complicata dello spazio delle configurazioni che lo spazio delle matrici ortogonali 3×3 è contenuta nella relazione lineare tra ω (definisce la rotazione istantanea nel sdr del corpo) ed L (nel sdr del corpo), che caratterizza dinamicamente il corpo rigido rispetto ai punti materiali.

Riconoscendo il momento della quantità di moto

$$\vec{L} = \int_K (\vec{x}_P \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_P)) \rho dx_P = I\vec{\omega} \quad (9.3)$$

Nel sistema del corpo

$$\vec{L} = \int_K [\vec{\omega}(x_P^2) - \vec{x}_P(\vec{x}_P \cdot \vec{\omega})] \rho dx_P$$

Usiamo bac-cab $\omega(x_P \cdot x_p) - x_p(x_P \cdot \omega)$ Vogliamo portare fuori ω dall'integrale (l'integrale si fa solo sul corpo) ed esplicitare le componenti.

Per componenti

$$\sum_j \omega_i(x_j x_j) - x_i(x_j \omega_j) = \sum_j (\delta_{ij} \vec{x}^2 - x_i x_j) \omega_j$$

Quindi definiamo:

Definizione 9.1. Tensore di inerzia

$$I_{ij} = \int_K (\delta_{ij} \vec{x}_P^2 - x_{Pi} x_{Pj}) \rho(x_P) dx_P \quad i, j = x, y, z \quad (9.4)$$

dove j identifica la componente di ω su cui si fa la somma, e i identifica la componente di L .

E' una proprietà del corpo. I_{ij} è una matrice che dipende solo dalla struttura del corpo: dalle coordinate di P che sono fisse nel corpo.

Nota: Non si può calcolare I nel sistema inerziale, perché dovremmo tener conto del fatto che P si sta spostando. Dovremmo già conoscere la dinamica del corpo, che invece vogliamo trovare!

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I \vec{\omega} \quad (9.5)$$

T è una forma quadratica nelle componenti della velocità angolare (velocità generalizzate), che vanno scritte nel sdr del corpo. Si ha $[I] = [M][L^2]$.

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \text{ nel sistema del corpo}$$

Proprietà del tensore di inerzia Dato un corpo rigido K con un punto fisso abbiamo

$$I_{ij} = \int_K (\delta_{ij} |\vec{x}|^2 - x_i x_j) \rho(\vec{x}) d\vec{x}$$

Gli indici di I_{ij} cambiano in maniera specifica in un cambio di variabili secondo la definizione di tensore covariante. L'energia cinetica si costruisce come prodotto scalare di una velocità e un momento: la metrica scompare-questo è legato alla definizione di tensore, mentre in un prodotto scalare tra vettori dovremmo considerare qual è la metrica.

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_K (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{xy} &= - \int_K x y \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

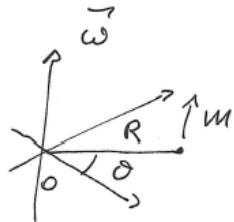
I_{ij} è un tensore simmetrico definito positivo nel sistema del corpo.

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad T = \frac{1}{2}\vec{\omega}I\vec{\omega}$$

I entra nel calcolo dell'energia cinetica che è sempre positiva (se $\omega \neq 0 \Rightarrow I$ è definita positiva). Nel calcolo di T non entra una matrice metrica: siamo in R^3 . I è una proprietà del corpo. T essendo uno scalare non dipende dal sdr, ma dobbiamo essere coerenti: mettere ω vista nel sdr del corpo rigido! Nel sistema fisso I non è definito!

Nota: La complicazione del corpo rigido è dovuta al fatto che I non è l'identità, altrimenti ci ricondurremmo al punto materiale. Per il corpo rigido, ω NON è PARALLELA a L in generale.

Nel caso in cui I è \propto all'identità il corpo rigido si comporta come un punto materiale. Preso un punto materiale fatto ruotare con $\vec{\omega}$, il piano del moto è definito dal braccio R e dalla velocità \vec{v} . Scriviamo il momento della quantità di moto del punto materiale secondo la definizione e vediamo che \vec{L}, \vec{I} sono paralleli.



$$\vec{L} = mR^2\vec{\omega} \Rightarrow I = \begin{pmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

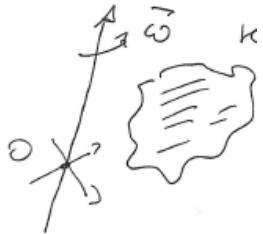
$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z} \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

Nota: I dipende dal punto fisso

Generalizziamo ora le rotazioni attorno a un asse fisso, per un corpo rigido.

9.2 Momento d'inerzia rispetto a un asse fisso di rotazione

Momento di inerzia di un corpo rigido K che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno a un asse fisso (individuato appunto da $\vec{\omega}$)



$$I_\omega = \int_K d_P^2 \rho(\vec{x}_P) d\vec{x}_P \quad (9.6)$$

con d_P distanza tra un punto P e l'asse di rotazione, e $d\vec{x}$ elemento di volume.

Si introduce il momento d'inerzia rispetto all'asse per calcolare T del corpo rotante:

$$T = \frac{1}{2}I_\omega\omega^2 \quad (9.7)$$

I_ω è uno scalare dipendente da ω . Invece NON vale la relazione tra \vec{L} e $\vec{\omega}$, che NON sono paralleli.

$$\vec{L} = I_\omega\vec{\omega} \quad \text{NO!}$$

Ex.

$$I_{zz} = I_\omega = \int_K (x^2 + y^2)\rho(\vec{x}) d\vec{x}$$

momento d'inerzia rispetto a \hat{z} .

Lungo la diagonale principale del tensore d'inerzia compaiono quindi i momenti di inerzia rispetto agli assi x, y, z .

Ricordiamo che se l'asse non è fisso, la rotazione cambia nel tempo! Dobbiamo imporre il vincolo che l'asse sia fisso \Rightarrow dei 3 d.o.f. rotazionali, ne sviluppiamo 1 solo ruotando rispetto a un asse fisso. Lo spazio delle configurazioni è lo spazio delle matrici di rotazione per un asse fisso, che costituiscono un gruppo di simmetria (vedi teorema di Nöther): sistema molto più semplice rispetto allo spazio di tutte le rotazioni, in cui non c'è commutatività.

Il tensore di inerzia I è una funzione del punto. Il punto O , origine comune dei sistemi di riferimento, può essere fuori dal corpo: rotazione attorno ad asse fuori dal corpo.

Dato il tensore I rispetto a (un sdr con origine in) un punto O , si può calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $\vec{\omega}$ passante per O :

$$\vec{\omega} = \omega\hat{\omega}, \quad T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\hat{\omega}I\hat{\omega})\omega^2$$

$$\Rightarrow I_\omega = \hat{\omega}I\hat{\omega} \quad (9.8)$$

Cioè conoscendo I , conosciamo il momento di inerzia rispetto a qualunque asse passante per il punto O origine dei sistemi di riferimento fisso e rotante! In alcuni casi è più semplice calcolare il tensore di inerzia rispetto al punto fisso piuttosto che fare l'integrale del momento di inerzia rispetto all'asse: così calcoliamo T.
Lo spostamento di O è legato al problema che il tensore I non è invariante per spostamento dell'origine, come si vede nel teorema seguente

9.2.1 Teorema di Steiner

(forma classica, potrebbe essere generalizzato per tutti gli elementi del tensore di inerzia) Abbiamo un sistema che ruota tenendo fisso il punto O al posto del cdm; allora, calcolato il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il cdm, il teorema di Steiner consente di spostarci da quest'asse a un asse parallelo passante per O con distanza d dal precedente.

Teorema 9.1.

$$I_\omega(O) = I_\omega(C) + Md^2 \quad (9.9)$$

con C =centro di massa e d =distanza tra gli assi passanti per O e C e paralleli a $\hat{\omega}$

Il momento di inerzia rispetto a un asse orientato come $\hat{\omega}$ passante per O = momento d'inerzia rispetto a un asse parallelo passante per centro di massa + massa totale del corpo rigido · distanza tra i due assi elevata al quadrato.

Dato $\vec{x}_0 = \vec{x}_{cm} + \vec{OC}$, dove x_O e x_{cm} sono rispettivamente la distanza rispetto a O e al cdm (non la posizione di O e del cdm!), abbiamo:

$$\begin{aligned} I_\omega(O) &= \int_K (\hat{\omega} \times \vec{x}_O)^2 \rho d\vec{x} = \\ &= \int_K (\hat{\omega} \times \vec{x}_{cm})^2 \rho d\vec{x} + \int_K (\hat{\omega} \times \vec{OC})^2 \rho d\vec{x} + 2(\hat{\omega} \times \vec{OC}) \cdot \int_K (\hat{\omega} \times \vec{x}_{cm}) \rho d\vec{x} \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato $(\hat{\omega} \times (\vec{x}_{cm} + \vec{OC}))^2 = ((\hat{\omega} \times \vec{x}_{cm}) + (\hat{\omega} \times \vec{OC}))^2 = \dots$

Riconosciamo

$$\int_K (\hat{\omega} \times \vec{x}_{cm})^2 \rho d\vec{x} = I_\omega(c), \quad (\hat{\omega} \times \vec{OC})^2 \int_K \rho d\vec{x} = Md^2, \quad 2(\hat{\omega} \times \vec{OC}) \cdot \left(\hat{\omega} \times \int_K \vec{x}_{cm} \rho d\vec{x} \right) = 0$$

da cui la tesi $I_\omega(O) = I_\omega(C) + Md^2$.

Il cdm sta sulla destra dell'equazione $\Rightarrow I_\omega(O) > I_\omega(cm)$, nel senso che spostandoci dal cdm sommiamo sempre una quantità positiva. Proprietà del cdm: il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il cdm è il minimo tra tutti i momenti di inerzia possibili rispetto a quell'asse. Se ruotiamo un corpo tenendo fisso il cdm, allora fissata la direzione dell'asse, il momento di inerzia rispetto a quell'asse è minimo- ciò vale per ogni asse.

Sviluppiamo il quadrato usando la proprietà distributiva del prodotto vettore. Ricordiamo che il prodotto vettore tra un versore e un vettore, in modulo, dà la distanza del punto individuato dal vettore rispetto all'asse individuato dal versore. Quindi $|\hat{\omega} \times \vec{x}_O|$ dà distanza del punto x del corpo visto da O rispetto all'asse ω , $|\hat{\omega} \times \vec{x}_{cm}|$ la distanza dall'asse orientata come $\hat{\omega}$ rispetto al cdm, e $|(\hat{\omega} \times \vec{OC})|$ la distanza tra i due assi. $(\hat{\omega} \times \vec{OC})^2$ è un vettore costante: non entra nell'integrazione (distanza tra assi), quindi da questo termine otteniamo la massa (integrando la densità). L'integrale sul corpo della posizione di tutti i punti del corpo rispetto al cdm (moltiplicato per ρ) è nullo, in quanto la posizione del cdm nel sistema del cdm è l'origine \Rightarrow si annulla il doppio prodotto.

Il teorema di Steiner è vero SOLO perché $\int_K \vec{x}_{cm} \rho d\vec{x} = 0$, quindi vale SOLO se un asse passa per il cdm!

9.3 Ellissoide d'inerzia

Dà informazioni sulla dinamica del corpo: proprietà di simmetria, che influenzano la dinamica.

Definizione 9.2. Ellissoide d'inerzia

$$K \leftrightarrow \vec{x} \cdot I \vec{x} = 1 \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (9.10)$$

Possiamo associare una forma quadratica alla matrice simmetrica. Essendo I definita positiva: la superficie associata alla forma quadratica è un ellissoide. K ha associato un oggetto geometrico.

Essendo I simmetrica, esiste un sdr ortonormale fisso nel corpo, costituito dagli autovettori, in cui I è diagonale:

assi principali di inerzia.

Nel sistema di assi principali

$$\vec{x} \cdot I \vec{x} = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \quad (9.11)$$

$$\text{semiassi dell'ellissoide } a_x = \frac{1}{\sqrt{I_x}}, a_y = \frac{1}{\sqrt{I_y}}, a_z = \frac{1}{\sqrt{I_z}}$$

Definita positiva \Rightarrow 3 autovalori positivi \Rightarrow ellissoide. Scriviamo l'ellissoide in un sdr che ha come origine O e assi direzioni legati agli autovettori di I. I_x, I_y, I_z autovalori. Quando abbiamo momento di I molto grande, il corrispondente semiasse è molto piccolo.

Nota: La forma dell'ellissoide ricorda la forma del corpo: I grande rispetto a un asse, ma NON ha gli stessi momenti di inerzia/ lo stesso tensore di inerzia! Tuttavia esiste sempre un ellissoide equivalente, dato un corpo rigido, con stessa dinamica* !

Lo spazio di tutti i possibili corpi rigidi è riconducibile allo spazio di tutti gli ellisoidi omogenei. Corrispondenza uno a uno, data dalla struttura del tensore di inerzia: stessi assi principali, quindi rotazione del corpo rigido equivale a rotazione dell'ellissoide.

simmetria ellissoide \Rightarrow rotazioni di π attorno agli assi.

Esempio 9.3.1. $K = \text{cubo omogeneo}, O = \text{cdm}$

K ha simmetrie discrete di $\frac{\pi}{2}$ attorno agli assi \Rightarrow ellissoide d'inerzia = sfera.

Assi principali di inerzia $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Nota: se spostiamo O non è più vero!

Preso un cubo, facendo ruotare il cubo di $\frac{\pi}{2}$ attorno a un asse per il baricentro, ritorna su se stesso. Simmetria discreta dell'ellissoide. Per costruzione gli ellisoidi hanno simmetria discreta per rotazione di π . Quindi l'ellissoide associato a un cubo omogeneo è una sfera. La matrice che definisce il tensore di inerzia è proporzionale all'identità. Calcoliamo il momento di inerzia rispetto a un asse, gli altri sono uguali. Tutti gli assi sono assi principali di inerzia, essendo il tensore di inerzia l'identità ogni asse è autovettore. Se la Terra fosse cubica, nel problema di Keplero non cambierebbe nulla. Moto di un cubo oppure sfera, rispetto al cdm si equivalgono.

Proposizione 9.3.1. Un asse di simmetria è sempre asse principale di inerzia.

Tutti i termini non diagonali lungo l'asse si annullano perché dato un punto c'è quello simmetrico.

Proposizione 9.3.2. Nei corpi piani, ossia $z=0$, \forall punto del corpo $I_{xz} = I_{yz} = 0 \Rightarrow \hat{z}$ è asse principale di inerzia. Inoltre

$$I_z = \int_K (x^2 + y^2) \rho d\vec{x} = I_x + I_y$$

I momenti misti fuori dalla diagonale dell'asse z sono 0: segue dalla definizione delle componenti del tensore d'inerzia. L'asse ortogonale al corpo è sempre asse principale. Inoltre il momento di inerzia lungo l'asse ortogonale al corpo è $I_z = I_x + I_y$, dove x e y assi ortogonali tra loro nel piano del corpo.

Disco omogeneo $M, R, \rho = \frac{M}{\pi R^2}$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_K (x^2 + y^2) \rho d\vec{x} = \int_K r^3 \rho dr d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \rho dr d\theta \\ &\Rightarrow I_z = \frac{R^4}{4} 2\pi \rho = \frac{MR^2}{2} \\ &\Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{MR^2}{4} \end{aligned}$$

Calcoli compaiono negli esercizi. Simmetria circolare \Rightarrow l'ellissoide deve avere la stessa simmetria.

*Gli assi principali di inerzia dipendono dal punto fisso, punto di applicazione! Non è detto che, diagonalizzato il tensore di inerzia rispetto al cdm, gli assi principali siano gli stessi che rispetto a un altro punto. Ad esempio cubo omogeneo- \Rightarrow l'ellissoide è una sfera rispetto al cdm. Se il punto fisso è spostato, ad es sullo spigolo, non è più equivalente a una sfera!

Per corpi bidimensionali, l'asse ortogonale al piano è asse principale di inerzia. E i termini non diagonali che contengono z nel tensore di inerzia sono nulli $\Rightarrow I_z = I_x + I_y$

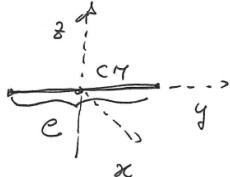
Curiosità:

- Dove abbiamo usato la commutatività del gruppo nel teorema di Nöther? Quando associamo un campo vettoriale al gruppo di simmetria, questo è legato al concetto di flusso di fase, legato a un gruppo dipendente da un parametro che è commutativo. Se non lo fosse, potrei definire i generatori del gruppo ma avrebbero proprietà legate alla non commutatività.
- Lagrange ed Eulero: modi diversi ma equivalenti per studiare il corpo rigido. Equazioni di Eulero usate in grafica, Lagrange: parte analitica
- tutti i poliedri regolari hanno simmetrie discrete diverse da $\pi \Rightarrow$ l'ellissoide di inerzia è una sfera.
- Passaggio corpo->spazio, con R. Ma una volta chiaro che stiamo lavorando nel sistema rotante, possiamo scrivere la relazione in forma vettoriale tralasciando la matrice R.
- ellissoide eredita proprietà di avere le stesse simmetrie e muoversi solidalmente con il corpo. Ogni corpo rigido è equivalente a un ellissoide.

Disco omogeneo. Asse z è principale di inerzia (questo vale dovunque mettiamo il punto fisso!). Qualunque coppia di assi x e y devono essere assi principali per simmetria rispetto al cdm: non abbiamo modo di distinguere gli assi sul piano. (Mentre se scegliessimo un punto sulla circonferenza, gli assi x e y sarebbero uno tangente e uno lungo il raggio).

$x^2 + y^2$ distanza di un punto dall'asse z. Il tensore di inerzia sarà diagonale e avrà I_x, I_y, I_z . Ricordiamo che i momenti di inerzia sono positivi e hanno le dimensioni $[M][L]^2$.

Asta omogenea M,L

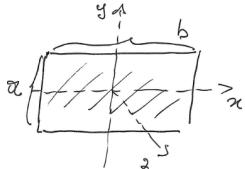


$$I_y = 0, \quad I_z = I_x \quad \rho = \frac{M}{l}$$

$$I_z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y^2 \rho dy = \rho \frac{l^3}{12} = \frac{Ml^2}{12}$$

1d, degenero. La retta su cui sta l'asta (y), e i due assi ortogonali x e z (che possiamo scegliere con arbitrarietà per simmetria). Degenerazione: $I_y = 0$ (la distanza dei punti rispetto all'asse è 0). Se facciamo ruotare l'asta attorno all'asse, non c'è energia cinetica. $I_x = I_z$ per simmetria. nell'integrale di I_z c'è y^2 (distanza dall'asse z) non z^2 ! (Spesso negli esercizi l'asta è lunga $2l$ così non c'è il fattore).

Rettangolo omogeneo



$$I_z = I_x + I_y, \quad \rho = \frac{M}{ab}$$

$$I_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho y^2 dx dy = \rho \frac{a^3 b}{12} = \frac{Ma^2}{12}$$

$$I_y = \frac{Mb^2}{12}$$

Asse ortogonale passante al cdm; asse x e y -> per simmetria annulla tutti i termini misti. Integrale doppio sull'area. Se b è più grande, $I_y > I_x$. La scelta di x e y è fissata perché ho scelto un rettangolo; qualunque coppia di assi sul piano del quadrato passanti per il cdm sarebbe principale. $a=b \Rightarrow$ due momenti identici: simmetria. Ellissoide del quadrato ha simmetria circolare, dato che il quadrato ha simmetria di $\frac{\pi}{2}$

9.4 Teorema di König

IMPORTANTE!! Perché riguarda il calcolo di T nel sistema fisso, che è fondamentale nel calcolo di \mathcal{L} . $\mathcal{L} = T - V$ vale per i sistemi inerziali. Vogliamo calcolare T di un corpo rigido in un sistema inerziale.

Dato un corpo rigido vale che:

$$T = T_{cm} + T' \quad (9.12)$$

T = energia cinetica in un sistema fisso

dove T_{cm} = energia cinetica del centro di massa

T' = energia cinetica in un sistema centrato sul cdm parallelo a quello fisso

T = energia cinetica del cdm, cioè di un punto materiale che si muove a v_{cm} , come se contenesse tutta la massa del corpo rigido (stavolta non c'è un punto fisso ma il cdm si sposta) + energia cinetica in un sistema centrato sul cdm parallelo a quello fisso (cioè energia di rotazione rispetto al cdm). Non stiamo facendo ruotare il sistema di riferimento, ma facciamo uno spostamento rigido che ci permette di ricondurci a studiare T di un corpo rigido che ruota con punto fisso che è il cdm! Studiamo il moto di un corpo rigido avendo studiato il moto con un punto fisso. Dimostrazione. Sia P un punto del corpo ($P \in K$)

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_{cm} + \vec{v}' \\ T &= \frac{1}{2} \int_K v_P^2 \rho d\vec{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_K v_{cm}^2 \rho d\vec{x} + \int_K \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}' \rho d\vec{x} + \frac{1}{2} \int_K \vec{v}'^2 \rho d\vec{x} \quad \text{con } \rho(\vec{x}) \text{ densità} \\ \text{Ora } \frac{1}{M} \int_K \vec{v}' \rho d\vec{x} &= \vec{v}'_{cm} = 0 \text{ per definizione} \\ T &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + T' \text{ con } M = \text{massa del corpo}\end{aligned}$$

Dal primo termine portiamo fuori v_{cm} e riconosciamo la massa nell'integrale, da cui l'energia cinetica di un punto di massa M a velocità v_{cm} . Il termine misto va a 0: velocità del cdm nel sistema del cdm. L'ultimo termine, portando fuori v_{cm} , è l'energia cinetica che avrebbe il corpo se si muovesse nel sistema del cdm, quindi come se il cdm fosse un punto fisso \Rightarrow lo calcoliamo con il tensore di inerzia rispetto al centro di massa.

Curiosità:

- C'è un'analogia tra le oscillazioni forzate per stabilizzare un pendolo rovesciato e le oscillazioni naturali di un pendolo attorno al punto di equilibrio stabile? No. Pendolo rovesciato stabilizzato da una forzante: imponiamo oscillazioni, il sistema non è dipendente dal tempo. Pendolo in moto libero: le oscillazioni sono naturali, il sistema non dipende dal tempo.
- Teoria del controllo: dato un controllo, abbiamo infinite soluzioni; la soluzione che interessa è quella a minimo dispendio di energia.
- Il sistema costruito sul centro di massa, che abbiamo considerato parallelo a quello fisso, in realtà può anche essere ruotato di un angolo che rimane costante nel tempo. Non è fondamentale il parallelismo, ma il sistema deve essere fisso, NON si muove rispetto al corpo. Normalmente pensiamo a uno spostamento rigido parallelo per semplicità, ma non è detto, l'importante è che portiamo gli assi fissi sul cdm e poi li lasciamo fissi.
- Nel caso di potenziali generalizzati dipendenti dal tempo, abbiamo visto che $H = T$ non dipende dal tempo, ma comunque l'energia non è un integrale primo del moto, infatti $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$. Allora qual è il contributo che rende la derivata temporale di H non nulla? L'apparente contraddizione si risolverà con la definizione delle variabili momento. Il fatto che E sia integrale primo del moto è conseguenza che \mathcal{L} è indipendente dal tempo. Se dipende dal tempo, quello che troviamo non è integrale primo del moto, a prescindere dal fatto che l'energia dipenda o meno dal tempo! Capiremo quando riscriveremo l'energia in funzione dei momenti, siccome la definizione di momento cambia per il potenziale generalizzato $\Rightarrow E$ non sarà più costante. Quindi ricordiamoci che per una lagrangiana dipendente dal tempo, E non è integrale primo del moto!

9.4.1 Rotolamento di un disco su una guida circolare rotante

Esercizio in parte su Landau. Disco omogeneo ruota su una guida circolare rotolando; c'è una rotaia che tiene l'oggetto vincolato e non lo fa cadere. La guida ruota attorno al suo asse verticale. C'è la forza peso.

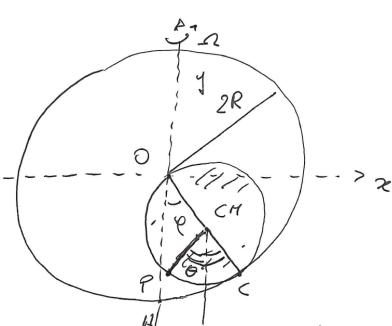
M = massa del disco omogeneo

R = raggio del disco

$2R$ = raggio guida circolare \exists forza peso $-Mg\hat{y}$

Il disco ruota senza strisciare

$I = \frac{MR^2}{2}$ momento d'inerzia rispetto ad un asse \perp al disco passante per il cdm.



Dai dati la circonferenza dell'oggetto sia la metà di quello della guida.
 Rotolamento senza strisciare, es ruota di un veicolo che avanza (se non inchiodiamo): il punto di contatto (di tangenza delle circonferenze) ha velocità nulla. (ovviamente dato che l'oggetto ruota il punto di contatto cambia). La guida dà un vincolo geometrico: moneta tangente alla guida. Mentre la condizione di rotolamento dà una condizione dinamica, sulla velocità. E' una condizione integrabile. Invece se la moneta rotola su un piano, il campo di velocità non è integrabile: non esiste una funzione che lo abbia come gradiente \Rightarrow problema più complicato- vincolo anolonomo. Nel nostro caso, di rotolamento su una curva (1d), si può ridurre a un vincolo olonomo. Se il vincolo di rotolamento di un piano fosse olonomo, sarebbe reversibile, mentre è più semplice parcheggiare l'auto in retromarcia che in avanti, caso in cui è più difficile metterla dritta.

Per ora pensiamo di essere fissi sul piano xy, trascuriamo cioè Ω .

2 dof: una coordinata per la posizione della moneta lungo la guida + una coordinata per la rotazione attorno al cdm. Ma avendo messo il vincolo di non strisciare

$$\text{rotolamento: } v_c = 0 \text{ con C punto di contatto}$$

congeliamo un grado di libertà: non possiamo ruotare la moneta senza cambiarne la posizione lungo la guida, vanno in parallelo. Conoscendo la posizione lungo la guida φ , sappiamo di quanto abbiamo ruotato:

$$\widehat{PC} = \widehat{HC}$$

1 dof \Rightarrow ci basta una coordinata lagrangiana che descrive le configurazioni possibili.

φ = coordinata lagrangiana: angolo tra la verticale e l'asse passante per il cdm.

θ = angolo di rotolamento.

Man mano che la moneta ruota, l'angolo θ corrisponde all'arco \widehat{PC} che dice quanto abbiamo spostato il punto di contatto rispetto alla posizione iniziale. v che C acquista per φ e per θ devono essere uguali. Orientamento degli angoli: positivi se antiorari. se $\varphi > 0, \theta < 0$ e v.v., da cui il segno:

$$2R\dot{\varphi} = -R\dot{\theta}, 2\dot{\varphi} = -\dot{\theta} \quad (9.13)$$

cioè si compensano la v che avrebbe C per il fatto che aumenta $\dot{\varphi}$ (velocità angolare $\dot{\varphi}$, raggio $2R$ rispetto all'asse passante per O); e la v che avrebbe perché θ aumenta in verso opposto (velocità angolare $-\dot{\theta}$, raggio R rispetto all'asse per il cdm). In generale compare come coefficiente di $\dot{\varphi}$ il rapporto tra il raggio della guida e il raggio della moneta.

Rotolamento senza strisciare: il modo in cui gli oggetti ruotano attorno a un punto è condizionato dalle altre variabili.

Domanda: se la moneta ruota attorno a tutta la guida, quanti giri fa la moneta?

Vogliamo calcolare T nel sistema fisso: applichiamo il teorema di Konig. T è data da un termine di energia cinetica di traslazione e uno di rotazione (rotolamento).

Nota: Per applicare il teorema di König, spostiamo il sistema fisso nel cdm (spostamento rigido) e chiediamoci di quanto ruota la moneta rispetto al cdm (i cui assi restano FISSI), NON rispetto all'asse di contatto, che cambia al variare di φ ! Rotazione di un corpo rigido: si studia rispetto a direzioni fisse!

L'angolo di rotazione, che esprime di quanto si è spostato il punto di contatto rispetto a un punto P NON è θ ! E' solo una parte di θ : tra P e la verticale, che è $-\theta + \alpha$! In modulo vale $|\theta| - \phi$ $\alpha = \varphi$ angoli corrispondenti.

nota: θ è negativo

$$T = \underbrace{\frac{M}{2} R^2 \dot{\varphi}^2}_{T_{cm}} + \underbrace{\frac{I}{2} (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2}_{T'} = \frac{MR^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{MR^2}{4} (\dot{\varphi} - 2\dot{\theta})^2 = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\varphi}^2$$

Secondo termine: momento di inerzia di un disco omogeneo rispetto a un asse fisso passante per il cdm ortogonale al foglio · la velocità angolare di rotazione - calcolata in un sdr fisso passante per il cdm. Sostituiamo $\dot{\theta}$ dalla condizione di rotolamento.

Ricapitolando, θ direzione tra O e C e la linea tratteggiata (un punto sulla moneta segnato) \Rightarrow angoli orientati in

PER APPLICARE IL TH. DI KÖNIG

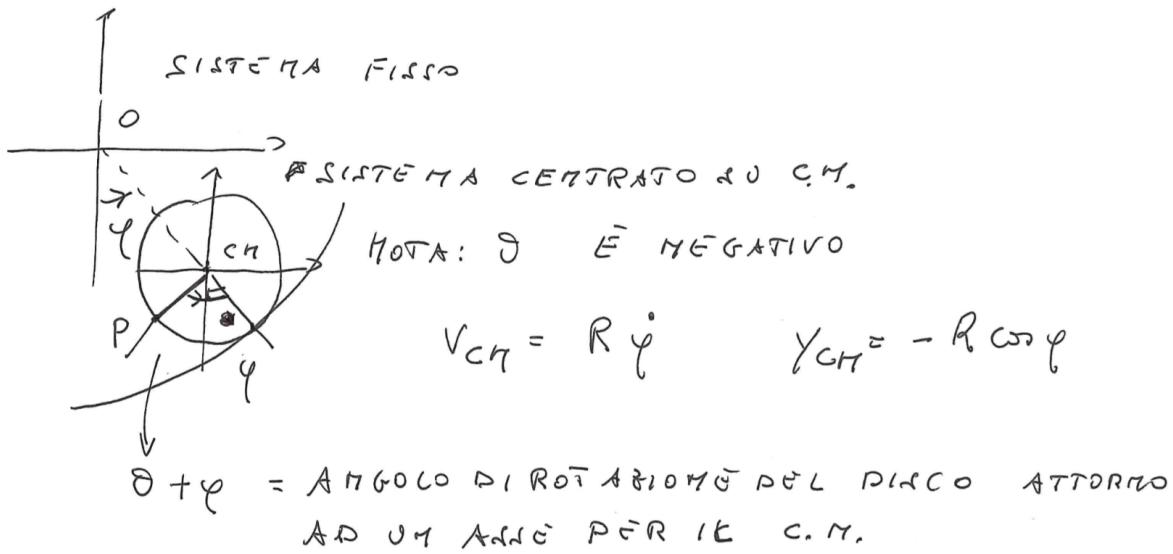


Figura 9.1: Relazione tra gli angoli per l'applicazione del th di Konig

senso opposto. E' tipico del rotolamento: compensazione tra velocità di rotazione e di trascinamento ($\dot{\varphi}$).

L'asse che definisce il punto di contatto CAMBIA. Dobbiamo vedere il rotolamento rispetto agli assi FISSI. Angolo di rotolamento: $-|\theta| + \varphi = \theta + \varphi$ ($\theta < 0$: ecco perché diventa somma). T=energia del cdm+ energia cinetica rispetto al cdm.

Senza Ω :

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + MgR\cos\varphi$$

La moneta che rotola su una guida circolare è come un pendolo, a meno di fattori numerici - la massa contiene il momento di inerzia: T e V sono energie del pendolo scalate.

Curiosità:

- Non consideriamo che la moneta possa cadere- sarebbe un vincolo unilaterale.
- Forze apparenti. La forza centrifuga si può considerare applicata sul centro di massa? Sì, ma dato un sistema dinamico, scelte le coordinate lagrangiane, la lagrangiana mette dentro i termini nella posizione giusta e fornisce le equazioni del moto. Una volta che il vincolo di rigidità è olistico - quindi trattabile con il formalismo lagrangiano - si scrive $\mathcal{L} = T - V$ con T calcolata in un sistema inerziale, e non si pone più il problema fisico delle forze apparenti. Non importa dove siano applicate le forze apparenti a priori, diamo un significato a posteriori: il potenziale centrifugo è come se fosse applicato al cdm. Se facciamo il ragionamento a priori potremmo fare degli errori.

Consideriamo ora $\Omega \neq 0$. La rotazione attorno all'asse y con velocità angolare $\vec{\Omega}$ ha 2 effetti rispetto a un sdr inerziale:

1. **v_{cm}** : abbiamo una velocità in più di rotazione del cdm, corrispondente al moto lungo una circonferenza con raggio che dipende dalla posizione.
2. **rotazione $\parallel y$** : quando spostiamo rigidamente (teniamo gli assi paralleli) il sdr in O nel cdm, nel sistema spostato ci sono componenti aggiuntive di rotazione, rispetto alla semplice rotazione attorno all'asse ortogonale alla moneta! La moneta GIRA con la guida, vista nel sistema del cdm: rotazione attorno a un asse parallelo all'asse y .

Abbiamo 2 velocità angolari che sommiamo vettorialmente. Vengono fuori dalle matrici ortogonali. Sono i vettori tangenti al gruppo delle rotazioni nell'identità. Algebra vettoriale commutativa, gruppo delle rotazioni non commutativo. Lo spazio delle configurazioni può avere struttura complessa, mentre quando calcoliamo la variazione (es nell'origine), lo spazio tangente a qualunque varietà è sempre uno spazio vettoriale: algebra vettoriale, che è commutativa.

Nota: Se vogliamo calcolare T del disco tenendo conto delle 2 rotazioni, scriviamo il tensore di inerzia completo sugli assi di inerzia (che sono una qualunque terna analoga a quelli già scelti) \Rightarrow diagonale. Ma y è un asse mobile per il corpo?! Sì però istantaneamente l'asse y è asse principale di inerzia: facciamo una fotografia in quell'istante (per semplicità). Costruendo la forma quadratica con la velocità angolare scomposta lungo gli assi principali di inerzia otteniamo l'energia cinetica di rotazione nel sistema del cdm T' .

Adesso dobbiamo calcolare v_{cm} , e T' dovuta alla rotazione. Per calcolare \mathcal{L} dobbiamo riferirci a un sistema inerziale, quindi vogliamo la velocità assoluta del cdm, che è composta dalla velocità dovuta alla rotazione (velocità di trascinamento) + velocità relativa, del cdm nel sistema che ruota con la guida (già calcolata). Il raggio della rotazione è $R\sin\phi$, nulla ai poli e massima all'equatore.

Partiamo dal punto 2. Due componenti della velocità angolare, lungo y e z , con \hat{y} è l'asse principale di inerzia scelto istantaneamente

Nota: quando calcoliamo T di un corpo rigido dobbiamo riferirci al sistema solidale con il corpo, se no non è consentito l'uso del tensore di inerzia!

Nel sistema centrato sul cdm costruiamo il tensore d'inerzia

$$I = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -\dot{\varphi} & = \text{velocità angolare lungo } \hat{z} \\ \Omega & = \text{velocità angolare lungo } \hat{y} \end{cases}$$

Il tensore di inerzia, che nel sistema degli assi principali è diagonale, ha 2 momenti identici (assi passanti per il cdm nel piano della moneta) che sono uguali per simmetria, e $MR^2/2$ già calcolato per il disco. Nel sistema solidale con il cdm calcoliamo T' scomponendo la velocità angolare lungo gli assi principali d'inerzia scelti istantaneamente, con il tensore inerzia:

$$T' = \frac{1}{2}(0 \quad \Omega \quad -\dot{\varphi}) I \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ -\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(0 \quad \Omega \frac{MR^2}{4} \quad -\dot{\varphi} \frac{MR^2}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ -\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{8}\Omega^2 + \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{4} \quad (9.14)$$

Nel sistema rotante con il disco (ma con origine in O?)

$$\begin{aligned} CM &= (R\sin\varphi, -R\cos\varphi, 0) \\ \vec{\Omega} &= (0, \Omega, 0) \\ \vec{v}_{cm}^a &= (\vec{\Omega} \times \vec{x}_{cm}) + \vec{v}_{cm}^r = (0, 0, -\Omega R\sin\varphi) + (R\dot{\varphi}\cos\varphi, R\dot{\varphi}\sin\varphi, 0) \\ \Rightarrow T_{cm} &= \frac{1}{2}M(\vec{v}_{cm}^a)^2 = \frac{M}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \Omega^2R^2\sin^2\varphi) \end{aligned} \quad (9.15)$$

Curiosità:

- Nell'esercizio sulla moneta possiamo anche considerare il punto C come istantaneamente fisso e studiare la rotazione attorno a quel punto (ricavando l'opportuno momento d'inerzia con il th di steiner)? Non vale th König: la moneta si muove anche lungo la guida, non solo rotazione attorno a C.
- Derivata di omega nel sistema fisso e rotante sono uguali perché omega è l'asse istantaneo di rotazione. Omega è costante nei due sdr ma le componenti sono diverse: vettore visto in 2 sdr.
- x e y per la moneta sono assi liberi: simmetria di rotazione rispetto all'asse z che è asse principale di inerzia per il cdm, gli altri 2 sul piano della moneta. Per calcolare l'energia cinetica li prendiamo nella configurazione più semplice per fare i calcoli: in cui Ω ha una componente solo lungo un asse.

- nel sistema del cdm $-\dot{\varphi}$ è la velocità angolare di rotazione intorno a z essendo l'angolo di rotazione $\varphi - \theta$.
- La rotazione della moneta non tiene conto del moto del punto di contatto. 1 giro completo. winding number. Se ruotiamo facciamo un giro anche se non facciamo nessun percorso, es la moneta resta attaccata a un solo punto. La moneta fa un giro completo nel senso che lo fa il suo baricentro. Se la curva non si chiude: numero di giri pari alla lunghezza della curva. Altrimenti aumento o diminuisco di 1. Il moto del punto di contatto dipende dalla curvatura: se è verso il basso, il punto di contatto rallenta rispetto al baricentro. la velocità angolare è $\dot{\theta} - \dot{\phi}$
- Angolo di rotazione non è l'angolo tra il punto di contatto e un punto fisso sulla moneta: teorema König significa portare il sistema fisso sul cdm. La moneta ruota rispetto a un asse fisso, verticale, passante per il cdm pari a $\theta + \phi$. I calcolato rispetto a quest'asse per il centro. Così applichiamo König
- Varietà: localmente rappresentabile come sottoinsieme di spazi euclidei di stessa dimensione. Il gruppo delle rotazioni è una varietà (varietà proiettiva) perché possiamo introdurre coordinate locali. Ma quando costruiamo lo spazio tangente (delle velocità) associato alle configurazioni, è sempre \mathbb{R}^n : lo spazio tangente alla varietà è sempre uno spazio vettoriale. Ecco perché possiamo sommare le velocità angolare vettorialmente e commutano; sono la derivata di una rotazione, ma le rotazioni finite non commutano.
- Quando costruiamo le lagrangiane, facciamo un'istantanea: orientazione istantanea, non importa che gli assi cambino. Possiamo sempre scegliere l'orientazione a un certo istante, come conviene.
- La velocità angolare è stata espressa nel sistema mobile: una velocità è ortogonale al disco che ruota, l'altra lungo l'asse y instantaneamente fermo

Una moneta che oscilla su una guida circolare è analoga a un pendolo. Molti sistemi 1d si riconducono al pendolo.

Il primo termine $\frac{MR^2}{8}\Omega^2$ è costante se Ω è costante: esiste come energia della moneta, ma non dà effetti dinamici, nella lagrangiana. Quindi concludendo la lagrangiana è: un termine è lo stesso della moneta che non ruotava attorno all'asse y+ termine dovuto al moto del cdm che ruota attorno all'asse y- energia potenziale che è lasciata inalterata dalla rotazione:

$$T = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{M\Omega^2R^2}{2}\sin^2\varphi \quad V = -MgR\cos\varphi$$

Sostituiamo $\sin^2 = 1 - \cos^2$ per scrivere \mathcal{L} in modo che compaia solo la funzione cos, e tralasciamo il termine costante:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + MgR\cos\varphi - \frac{M\Omega^2R^2}{2}\cos^2\varphi$$

$-\frac{M\Omega^2R^2}{2}\cos^2\varphi$ termine di potenziale centrifugo creato dalla rotazione (la moneta ruotando attorno all'asse y sente una forza apparente che la spinge verso fuori) \Rightarrow Abbiamo un termine in più rispetto al pendolo.

Condizioni di equilibrio Prendiamo il potenziale efficace, cioè V e il potenziale apparente e calcoliamo la derivata rispetto alla coordinata lagrangiana.

$$\frac{dV}{d\varphi} = \sin\varphi MR(g - \Omega^2R\cos\varphi) = 0$$

Fattorizzando annulliamo $\sin\varphi$ (moneta a 0 o π , ci aspettiamo che siano rispettivamente le soluzioni stabili e instabili) oppure la seconda parentesi (soluzione in cui la moneta è inclinata).

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \quad \varphi = \pi \quad \cos\varphi &= \frac{g}{\Omega^2R} \leq 1, \quad \varphi_* = \arccos \frac{g}{\Omega^2R} \\ \frac{d^2V}{d\varphi^2}(0) &= MR(g - \Omega^2R) > 0 \quad \text{se } g > \Omega^2R \Rightarrow \varphi_* \text{ non esiste} \\ \frac{d^2V}{d\varphi^2}(\varphi_*) &= \sin^2\varphi_* MR^2\Omega^2 > 0 \quad \text{se esiste è stabile} \end{aligned}$$

La derivata seconda rispetto a φ in $\varphi = 0$ è > 0 : stabile, deve valere che $g > \Omega^2/R$ e allora φ_* non può esistere. Altrimenti se non è così, cioè $\varphi = 0$ diventa instabile, allora φ_* esiste. Calcoliamo la derivata seconda rispetto a φ in φ_* . L'unico contributo nella derivata del prodotto, dato che si annullerebbe la parentesi, è derivando la parentesi e otteniamo un risultato positivo: cioè se esiste è stabile. Quando aumentiamo Ω , prima l'origine è stabile, poi diventa instabile e la moneta risale lungo la curva in un nuovo punto di equilibrio.

Esercizio 9.4.1. Se $\varphi = \pi$ fai i calcoli analogamente

Biforcazione: la soluzione stabile diventa instabile, e creiamo una nuova soluzione stabile che è quella che abbiamo individuato.

Ricordiamo che nel caso di più rotazioni, le velocità angolari si sommano vettorialmente.

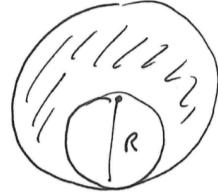
In generale la soluzione potrebbe non essere calcolabile esplicitamente, non serve calcolarla* Es campo centrale quando studiamo la variazione dell'angolo tra pericentro e apocentro: abbiamo sfruttato la derivata prima.

9.4.2 Rotolamento del disco cavo

R =raggio, M =massa

$$\rho = \frac{M}{\text{area}} = \frac{M}{\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4M}{3\pi R^2}$$

Per semplicità il diametro del buco è il raggio del disco. La densità va calcolata tenendo conto che abbiamo tolto della materia per fare il buco.



Nota: Calcoliamo I rispetto al centro, che NON è il baricentro.

Possiamo considerare il buco come un oggetto di massa negativa che sovrapponiamo al disco. Calcolare I per il disco rispetto al cdm è semplice, ma anche per il buco perché basta spostarci di $R/2$ con il teorema di Steiner. Usiamo la definizione 9.6

$$\begin{aligned} I &= I_D - I_B, \quad I_D = \text{momento disco pieno}, I_B \text{ momento buco} \\ I_D &= \int_0^R \rho 2\pi r^3 dr = \frac{\rho \pi R^4}{2} = \frac{2MR^2}{3} \\ I_B &= \int_0^{\frac{R}{2}} \rho 2\pi r^3 dr + \frac{M_B R^2}{4} = \rho \frac{\pi R^4}{32} + \rho \frac{\pi R^4}{16} = \frac{3}{32} \rho \pi R^4 \\ M_B &= \rho \pi \frac{R^2}{4} \quad I_B = \frac{3}{32} \frac{4M}{3\pi R^2} \pi R^4 = \frac{M}{8} R^2 \\ I &= \frac{2MR^2}{3} - \frac{M}{8} R^2 = \frac{13}{24} MR^2 \end{aligned}$$

I NON è calcolato rispetto al cdm!

Attenzione che il cdm si è spostato. Se vogliamo usare König, dobbiamo farlo rispetto al cdm! Troviamo il nuovo cdm, mettendo un sdr centrato nel centro della circonferenza grande. Si trova sull'asse y per simmetria, verso il basso nella nuova figura. cdm di un oggetto pari al disco — il cdm di un buco, cioè disco di massa negativo.

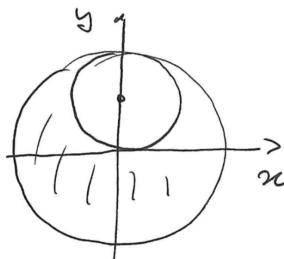


Figura 9.2: Posizione del centro di massa in un disco cavo rispetto al disco pieno

$$\text{Teorema di Steiner} \quad \frac{13}{24} MR^2 = I_{cm} + \frac{MR^2}{36} \Rightarrow I_{cm} = \frac{37}{72} MR^2$$

Calcolato il momento di inerzia rispetto al centro, I di un asse sempre ortogonale all'oggetto ma passante per il cdm? Steiner: stavolta dobbiamo sottrarre! A parità di direzione dell'asse, I è minimo per l'asse che passa per il cdm.

E' corretto anche gli angoli di Eulero. Comunque T non può dipendere dall'orientazione istantanea degli assi, non può dipendere da una rotazione finita perché è scalare. Stiamo tenendo gli assi orientati così istantaneamente non per sempre. E' lo stesso risultato che otterremmo considerando la rotazione con gli angoli di Eulero.

Studiamo adesso il rotolamento

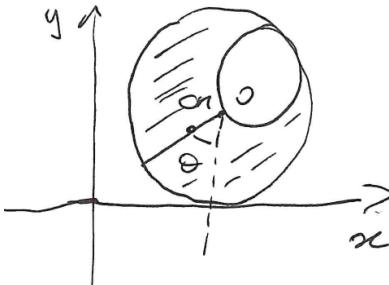


Figura 9.3: Spostamento del centro di massa di un disco cavo mentre rotola

Il rotolamento sposta il cdm, che quando il buco è verso l'alto sta nel punto di minimo. Avremo il potenziale di un pendolo. Sia θ l'angolo di inclinazione dalla retta per il centro passante per il cdm rispetto a un asse fisso; gira in senso orario quindi negativo \Rightarrow la velocità di rotolamento è $-R\dot{\theta}$, lungo x. La condizione di rotolamento è che O abbia esattamente questa velocità.

θ coordinata lagrangiana per rotolamento senza strisciare

$$\vec{v}_O = -R\dot{\theta}\hat{x} \quad \text{condizione di rotolamento}$$

1 dof: imposta tale condizione fissiamo il modo in cui l'oggetto sta ruotando rispetto alla sua traslazione lungo x. Per calcolare T: usare König.

Calcolo di x_{cm} e y_{cm}

$$\begin{cases} x_{cm} = -R\theta + \frac{R}{6} \sin \theta \\ y_{cm} = R - \frac{R}{6} \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_{cm} = -R\dot{\theta} + \frac{R}{6} \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_{cm} = \frac{R}{6} \sin \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

Il cdm è spostato dal centro di $R/6$. Da dove viene $-R\dot{\theta}$ nella x del centro di massa? E' il contributo del rotolamento: lo spostamento in avanti in x è uguale all'arco. $-R\dot{\theta}$ è la velocità di O, poi dobbiamo considerare anche la velocità di quanto il punto va indietro lungo x. Lungo y la velocità \dot{y} è positiva.

Dove sta CM? Dall'origine C andiamo fino al centro O poi torniamo indietro a CM. $C \rightarrow O \rightarrow CM$. Il vettore \vec{CO} ha componente y pari a R, componente x è la lunghezza del tratto percorso in x dall'origine, che coincide con $-R\dot{\theta}$ (θ è orientato negativamente): è uguale all'arco per la condizione di rotolamento. Il vettore $\vec{O-CM}$ ha una componente che tira indietro lungo x: $\frac{R}{6} \cos \theta$, e y che porta in basso $-\frac{R}{6} \cos \theta$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{MR^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 - \frac{1}{3} \dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{1}{36} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{I_{cm}}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{MgR}{6} \cos \theta = \\ &= \frac{MR^2}{2} a\dot{\theta}^2 - \frac{MR^2}{6} \dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{MgR}{6} \cos \theta \end{aligned}$$

Sostituiamo I_{cm} calcolato prima. Chiamiamo a il coefficiente numerico davanti a tutti i $\dot{\theta}^2$. E' un pendolo ma come differenza c'è la dipendenza da θ in T.

Nel disco con il buco v_{cm} non è costante essendoci la forza di gravità. Non è compensata dalla reazione vincolare? NO. La reazione vincolare agisce per tenere il disco sul vincolo. Se il disco è omogeneo il rotolamento non sposta il cdm O: resta alla stessa altezza, quindi la reazione vincolare è uguale e contraria alla forza peso. In presenza di un buco, il cdm si sposta, la forza di gravità che vi agisce cambia l'energia cinetica facendo lavoro - cosa che la reazione vincolare non può fare: NON è vero che la forza vincolare la compensa, compensa solo il fatto che il disco si possa muovere dalla guida. Quando il cdm non è nel centro disco, c'è quindi una forza esterna tira verso il basso: sta cercando di spostare cdm nella posizione del minimo. La reazione vincolare viene calcolata sul fatto che il disco deve rimanere sulla guida, DOPO aver risolto il moto: la reazione vincolare è adattata dal sistema in modo da tenere il sistema sul vincolo, non si può sapere a priori. Stiamo trattando il sistema come lagrangiano. Risolto il moto per la dinamica lagrangiana, se si vuole si può calcolare la reazione vincolare, di cui inizialmente non ci occupiamo perché non entra nelle equazioni del moto.

Vincolo di rotolamento. La guida fa attrito così forte da impedire lo spostamento del punto di contatto: l'attrito è la forza che mantiene il vincolo di rotolamento. La moneta striscerebbe, non rotolerebbe, se il tavolo non potesse dare attrito lungo x: la reazione vincolare ha quindi anche componente lungo x

9.5 Corpo rigido libero: equazioni di Eulero

1) Dinamica del corpo rigido libero 2) trottola. Sono problemi esemplificativi, integrabili e che ci forniscono l'occasione per imparare calcoli e analisi utili in meccanica quantistica. Il corpo rigido è un esempio di sistema meccanico non banale perché lo spazio delle configurazioni è lo spazio del gruppo delle rotazioni: è complicato.

9.5.1 Dalle equazioni cardinali alle equazioni di Eulero

Le equazioni cardinali del corpo nascono nel sistema inerziale. Come le scriviamo nel sistema rotante, in cui usiamo le proprietà del tensore di inerzia?

Corpo rigido libero con punto fisso

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ nel sistema del corpo; si riduce a:

$(L_x, L_y, L_z) = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z)$ nel sistema degli assi principali di inerzia

In generale ci metteremo nel sistema solidale agli assi di inerzia per avere la relazione tra \vec{L} e \vec{I} semplice.

Equazione cardinale del corpo rigido con punto fisso senza forze esterne (se non il vincolo rispetto al punto): il momento della quantità di moto rispetto al punto fisso nel sistema inerziale deve avere derivata temporale nulla:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}^a = 0 \text{ dove } \vec{L}^a \text{ è il momento della quantità di moto nel sistema fisso} \quad (9.16)$$

$$\frac{d\vec{L}^a}{dt} \text{ nel sistema del corpo? } \frac{d\vec{L}^a}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L})$$

(Il cdm del corpo rigido libero fa un moto rettilineo uniforme quindi non dà problemi.) Ma la relazione tra \vec{L} e \vec{I} è valida SOLO nel sistema solidale con il corpo. \Rightarrow Si ha: variazione del vettore nel sistema fisso = variazione del vettore nel sistema rotante $+ \vec{\omega} \times$ vettore. Il ragionamento generale per trovare la relazione tra derivata di un vettore di un vettore nel sistema assoluto e rotante, è del tutto analogo a quanto fatto per trovare la relazione tra velocità assoluta e relativa, sempre che siamo in \mathbb{R}^3 .

Equazione cardinale che determina secondo l'equazione di Newton il moto del corpo rigido libero con punto fisso, nel sistema del corpo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L}) = 0 \quad \begin{cases} \frac{dL_x}{dt} = -\omega_y L_z + \omega_z L_y \\ \frac{dL_y}{dt} = \omega_x L_z - \omega_z L_x \\ \frac{dL_z}{dt} = -\omega_x L_y + \omega_y L_x \end{cases} \quad (9.17)$$

dove, utilizzando la relazione per $\vec{L} = I\vec{\omega}$ nel sistema degli assi principali di inerzia, abbiamo sostituito $\omega_y = L_y/I_y$ ecc. Otteniamo un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, quindi chiuso, che è espressione dell'equazione cardinale del corpo rigido scritta nel sistema del corpo, dove possiamo sfruttare l'esistenza del tensore di inerzia:

$$\frac{dL_x}{dt} = \left(\frac{1}{I_z} - \frac{1}{I_y} \right) L_y L_z$$

$$\frac{dL_y}{dt} = \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_z} \right) L_z L_x \quad \text{Equazioni di Eulero per il corpo rigido LIBERO}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \right) L_x L_y$$

(9.18)

Non ci sono forze esterne! Se no le equazioni sarebbero più complicate e non sarebbero più chiuse: avremmo i momenti delle forze, e per calcolarli servirebbe sapere la posizione del corpo.

Descrivono la dinamica del momento della quantità di moto del corpo, sono riscrittura delle equazioni cardinali. Le equazioni di Eulero hanno proprietà che ricordano le proprietà di fluidi incomprensibili. Sono equazioni algebriche ma non lineari (termini quadratici), si possono studiare in maniera completa.

Finora non abbiamo usato la dinamica lagrangiana: queste equazioni sono nate indipendentemente. Queste equazioni algebriche sono usate in computer graphics per calcolare come si spostano gli oggetti in una realtà virtuale, perché la dinamica lagrangiana comporterebbe più calcoli.

Se prendessimo il teorema di Nöther per gruppi di simmetria non abeliani, potremmo dimostrare che la conservazione del momento della quantità di moto è una conseguenza (ma la dimostrazione sarebbe più complicata; si rimanda alla teoria dei gruppi).

Le equazioni di Eulero hanno una simmetria ciclica: scritta una, le altre 2 si ottengono ciclando gli indici. Sono scritte nel sistema del corpo, non inerziale.

9.5.2 Spazio delle fasi delle equazioni di Eulero

Il sistema è integrabile - si integra per l'esistenza di due integrali primi:

$$E = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z} \right) \quad (9.19)$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

Il moto sta nell'intersezione tra un ellissoide e una sfera.

Nel sistema inerziale ci sono 4 integrali primi del moto: un corpo rigido libero ha l'energia (cinetica) e 3 componenti di \vec{L} come integrali primi del moto, che non sono tutti utilizzabili (serve un'altra proprietà, lo vedremo alla fine del corso). Invece queste equazioni NON possono avere le componenti di \vec{L} come integrali primi del moto. Perché nel sistema rotante le componenti non possono essere costanti, sono cambiate dalla rotazione. L'energia è uno scalare, quindi resta integrale primo del moto. Riscriviamola utilizzando il tensore di inerzia. Il modulo al quadrato di \vec{L} è integrale primo del moto: ha lo stesso valore nei 2 sistemi essendo scalare, ANCHE SE le 3 componenti non sono più integrali primi del moto. Nello spazio di L_x, L_y, L_z l'espressione di E definisce un ellissoide. L^2 definisce una sfera. Non calcoliamo la soluzione esplicita (c'è sul Landau ma è complicato), ma la conoscenza di 2 integrali primi del moto (avendo 3 equazioni ne bastano 2, perché abbiamo un'equazione al primo ordine che si può separare) ci consente di studiare completamente qualitativamente il moto, dall'intersezione tra una sfera e l'ellissoide

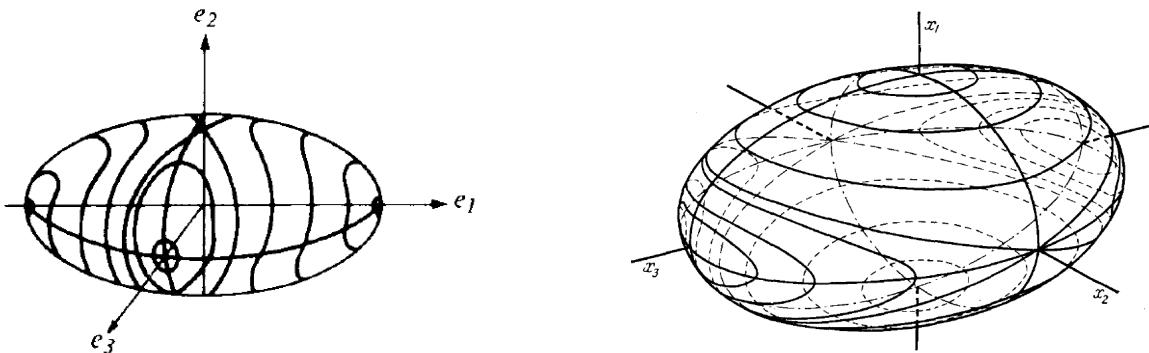


Figura 9.4: Traiettorie dell'equazione di Eulero su una superficie di livello dell'energia

La Fig. 9.4 (Arnold, pg. 161) è il risultato dell'intersezione di varie sfere con l'ellissoide dell'energia. Immaginiamo di gonfiare un pallone da calcio dentro un pallone da rugby.

- Se l'ellissoide contiene completamente la sfera data dal momento della quantità di moto, il moto non è fisico: ci deve essere un'intersezione!
- Quando si ha la tangenza, nel semiasse minore dell'ellissoide: due punti opposti. Dalla prima intersezione in poi il moto diventa fisico; essendo l'intersezione un punto solo (localmente), il punto deve essere di equilibrio per le equazioni di Eulero. Devono avere un punto di equilibrio sul semiasse minore: un corpo messo in rotazione attorno a quel semiasse, ci rimane.
- Se continuiamo a gonfiare la sfera, formiamo curve chiuse come intersezioni, fatte da \vec{L} visto nel sistema del corpo \Rightarrow il punto è stabile: una perturbazione causa un moto di precessione di \vec{L} lungo curve chiuse.
- Le curve si allargano, fino a ché la sfera tocchi l'ellissoide nel semiasse intermedio. Le due soluzioni di prima si connettono in questo punto formando una curva separatrice: occhio analogo al pendolo. \Rightarrow punto iperblico, instabile. Un corpo rigido fatto ruotare attorno al semiasse intermedio, ad esempio un satellite comincerebbe a flippare (passando da e2 orientato verso l'alto, a orientato verso al basso).
- Continuando a gonfiare, le curve si separano e si stringono verso il semiasse maggiore, fino a degenerare nei due punti opposti e_1+ e e_1- , in corrispondenza a quanto accadeva per il semiasse minore. Le due regioni separate corrispondono alla rotazione del sistema in un senso o nell'altro. Dinamica in senso orario e antiorario equivalenti per la reversibilità del sistema.

- Se la sfera si ingrandisce ancora il moto non è più fisico, le condizioni iniziali date non possono essere soddisfatte dalla fisica. Curve chiuse \rightarrow spazio delle fasi integrabile (ma non lineare). Tramite un integrale possiamo calcolare il moto del momento della quantità di moto lungo le curve.

Analizzando lo spazio delle fasi o calcolando analiticamente le soluzioni, possiamo studiare completamente le equazioni di Eulero. Vedremo che l'espansione perturbativa ci consente di vedere la stabilità o instabilità dei punti di equilibrio. Ma notiamo che dalle equazioni di Eulero riusciamo a calcolare $L(t)$ visto nel sistema rotante, mentre il nostro obiettivo è sapere come si muove il corpo nello spazio. Non faremo tutti i dettagli, comunque dato \vec{L} possiamo calcolare $\vec{\omega}$ nel sistema del corpo applicando l'inverso del tensore di inerzia. Per trasferirla nel sdr dello spazio, un modo di risolvere è tornare alla definizione di $\vec{\omega}$: definita attraverso una corrispondenza con la derivata temporale di una matrice ortogonale. $\vec{\omega}$ è associata alla matrice antisimmetrica Ω secondo l'isomorfismo 7.3²⁰, con $\Omega = R^T \dot{R}$ - cioè è in relazione con la derivata temporale della matrice di rotazione che fa passare dal sistema del corpo allo spazio (moltiplicata a sinistra per R^T). $\vec{\omega}$ è l'unico vettore per cui non c'è velocità di trascinamento, dato che $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0 \Rightarrow$ la derivata temporale nel sistema inerziale e nel sistema rotante è la stessa, quindi dobbiamo sistemare solo le componenti \Rightarrow ci interessa solo la matrice per passare da un sistema all'altro. Abbiamo allora un'equazione differenziale lineare in R , matrice ortogonale, cioè in uno spazio non commutativo. Per risolverla, potremmo usare gli angoli di Eulero, oppure i quaternioni che hanno un'algebra simile a quella non commutativa delle matrici ortogonali- usati in computer graphics.

9.5.3 Stabilità dei punti di equilibrio

Abbiamo visto che il moto sta nell'intersezione tra una sfera e un ellissoide nello spazio delle fasi delle equazioni di Eulero. Non risolveremo il moto (si rimanda al Landau), ma possiamo studiare la stabilità delle soluzioni.

Punti di equilibrio: \vec{L} diretto su un asse principale di inerzia.

Ex. $\vec{L} = (L_x, 0, 0)$ o $\vec{L} = (0, L_y, 0)$ o $\vec{L} = (0, 0, L_z)$

Studiamo la stabilità assumendo $I_x < I_y < I_z$

Se \vec{L} è diretto lungo un asse principale di inerzia, avrà una sola componente, e il membro di destra si annullerà \Rightarrow punto di equilibrio: messo un corpo a ruotare attorno a un asse principale d'inerzia, continuerà a ruotarvi attorno. Abbiamo dovuto fare un'ipotesi su come sono messi i momenti di inerzia rispetto agli assi principali di inerzia. Perturbiamo l'equilibrio costituito dal \vec{L} diretto lungo l'asse il cui momento di inerzia è il più piccolo (x). Partiamo da soluzione all'ordine 0 L_x^0 , costante, e aggiungiamo piccole perturbazioni $\varepsilon \ll 1$. Vogliamo trovare un'equazione per la variazione al primo ordine dello sviluppo delle equazioni di Eulero 9.18. Inseriamo la soluzione perturbata nelle equazioni di Eulero e togliamo i termini di ordine superiore a 1. Nella componente x c'è il prodotto $L_y L_z$ che sono entrambi di ordine $\varepsilon \Rightarrow$ termine di ordine ε^2 quindi lo trascuriamo.

$$\vec{L} = (L_x^0 + \varepsilon \delta L_x, \varepsilon \delta L_y, \varepsilon \delta L_z), \quad \varepsilon \ll 1$$

Scrivere le equazioni di Eulero al primo ordine in ε

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d\delta L_x}{dt} = O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon \frac{d\delta L_y}{dt} = \varepsilon \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_z} \right) \delta L_z L_x^0 + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon \frac{d\delta L_z}{dt} = \varepsilon \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \right) \delta L_y L_x^0 + O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

$$\text{Dall'ipotesi } \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_z} = a > 0, \quad \frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} = -b < 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\delta L_y}{dt} = a L_x^0 \delta L_z \\ \frac{d\delta L_z}{dt} = -b L_x^0 \delta L_y \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 \delta L_y}{dt^2} = -ab (L_x^0)^2 \delta L_y \quad \text{oscillatore armonico}$$

²⁰Quando abbiamo studiato la lagrangiana in un sistema rotante: isomorfismo tra spazio \mathbb{R}^3 e matrici antisimmetriche 3×3 . Fa sì che possiamo associare a un vettore velocità angolare una matrice antisimmetrica che applicata a un generico vettore equivale al prodotto vettoriale con la velocità angolare (che è l'autovettore corrispondente all'autovalore nullo). Notazione: $\vec{\omega}$ è la velocità angolare associata alla matrice Ω : vedasi Landau, Turchetti, Arnold.

\Rightarrow il punto è stabile.

L_x^0 è la soluzione di equilibrio lungo x. Il punto di equilibrio è una soluzione stabile perché la sua perturbazione non cresce (intersezione tra ellissoide e sfera che dà un cerchietto). Per esercizio, ripetere i calcoli per la soluzione lungo y: instabile; e lungo z: stabilità (curve chiuse riconducibili a ellissi).

Dalle equazioni di Eulero (descrivono anche il moto dei fluidi incompressibili) ricaviamo $\vec{L}(t)$
 $\Rightarrow \vec{\omega}(t) = I^{-1}\vec{L}(t)$ nel sistema del corpo. Vedi Landau, che usa gli angoli di Eulero.

Per ricostruire la dinamica dobbiamo integrare $R\Omega = \dot{R}$ con R matrice ortogonale tale che $\vec{X} = R\vec{x}$, Ω matrice antisimmetrica Possiamo scrivere equazioni differenziali matriciali in cui la velocità angolare è sostituita dalla corrispondente matrice antisimmetrica. Attenzione che la soluzione non è semplicemente l'esponenziale: l'algebra degli esponenziali in spazi non commutativi non è più quella che conosciamo. In computer graphics si risolve con i quaternioni.

Quindi le equazioni di Eulero, anche se sono solo per \vec{L} , consentono la ricostruzione completa del moto del corpo rigido libero

9.5.4 Visualizzazione del moto del corpo rigido libero: Poinsot

Invece di calcolare la soluzione di $R\Omega = \dot{R}$, visualizzazione grafica del moto. Poinsot riprende il concetto di ellissoide di inerzia: ellissoide costruito con il tensore di inerzia diagonalizzato: momenti d'inerzia principali

- Ellissoide d'inerzia $1 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = F(\vec{x})$ N.B. \vec{x} è lo spazio in cui vive l'ellissoide d'inerzia, non la posizione.
- Vettore normale all'ellissoide $\text{grad } F = 2(I_x x, I_y y, I_z z)$
 (ricordiamo che la superficie di livello è associata a una funzione uguagliata a 0, il cui gradiente è ortogonale alla superficie \Rightarrow esiste un piano tangente alla superficie che è ortogonale al vettore ortogonale.)
- Il piano ortogonale a \vec{L}^{ass} ha direzione invariante: \vec{L} è costante nel sistema fisso, essendo il corpo rigido libero.
 Il piano può spostarsi rigidamente ma non inclinarsi (se no cambierebbe \vec{L}).
- L^2 e $T = \frac{1}{2}\vec{\omega}I\vec{\omega}$ sono integrali primi del moto rispettivamente per la conservazione di \vec{L} ed E .

Corrispondenza tra ellissoide di inerzia e il corpo. L'ellissoide dipende solo da I_x , I_y e I_z quindi corpi diversi possono avere stesso ellissoide. Se un corpo rigido si muove liberamente con un punto fisso cosa succede all'ellissoide? Definiamo:

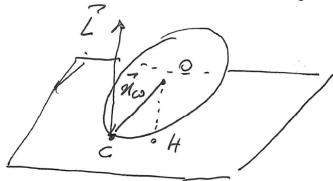
$$\begin{aligned} \vec{x}_\omega &= \left(\frac{\omega_x}{\sqrt{2E}}, \frac{\omega_y}{\sqrt{2E}}, \frac{\omega_z}{\sqrt{2E}} \right) \Rightarrow \vec{x} \in \text{ellissoide} \\ \Rightarrow F(\vec{x}_\omega) &= \frac{I_x \omega_x^2}{2E} + \frac{I_y \omega_y^2}{2E} + \frac{I_z \omega_z^2}{2E} = \frac{2E}{2E} = 1 \end{aligned} \quad (9.20)$$

$\vec{x} \parallel \vec{\omega}$ velocità angolare nel sistema del corpo

$$\text{grad } F(\vec{x}_\omega) = \sqrt{\frac{2}{E}}(I_x \omega_x, I_y \omega_y, I_z \omega_z) = \sqrt{\frac{2}{E}}\vec{L} \quad (9.21)$$

Se le componenti di $\vec{\omega}$ lungo gli assi principali sono nel sistema del corpo, sostituendo dentro la F che definisce l'ellissoide otteniamo 1, perché riconosciamo la forma quadratica che definisce l'energia: $\vec{x} \in \text{ellissoide}$. Il gradiente dell'ellissoide calcolato lungo il vettore sull'ellissoide diretto come la velocità angolare, è diretto come \vec{L} (visto nel sistema del corpo)

\Rightarrow Il piano \perp ad \vec{L} (essendo ortogonale al gradiente di F) è tangente a $F(\vec{x}) = 1$ nel punto \vec{x}_ω (in cui abbiamo calcolato il gradiente). \vec{x}_ω varia ma il piano è fisso nello spazio. Il punto di contatto (tra piano e ellissoide) si trova su $\vec{\omega}$ e quindi ha velocità istantanea nulla (rotolamento).



Quindi data l'invarianza della direzione possiamo pensare il piano tangente come fisso; l'ellissoide vi è appoggiato: tangenza. Il punto di tangenza corrisponde alla velocità angolare $\vec{\omega}$: $\vec{x} \parallel \vec{\omega}$. Siccome i punti che stanno sull'asse istantanea $\vec{\omega}$ hanno velocità nulla, il punto di contatto deve avere velocità nulla istantanea cioè non sta strisciando.

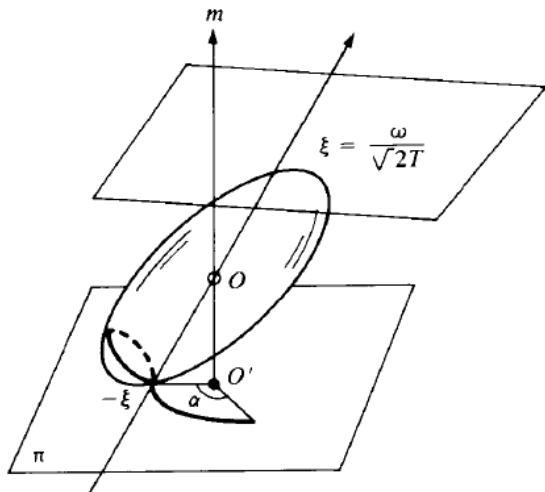
Ma se OH non fosse costante (con O punto fisso), il piano potrebbe traslare rigidamente cioè potrebbe essere che il piano a contatto sia un piano parallelo a quello, e non quello \Rightarrow dobbiamo verificare che il piano sia fisso nello spazio.

Proiezione di $\vec{\omega}$ su \vec{L} .

La distanza tra il punto fisso e il piano \perp a $F(\vec{x}) = 1$ è costante.

$$\overline{OH} = \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} \cdot \vec{x}_\omega = \frac{\vec{L} \cdot \vec{\omega}}{L\sqrt{2E}}, \quad \vec{L} \cdot \vec{\omega} = 2E, \quad \overline{OH} = \frac{\sqrt{2E}}{L} = \text{costante}$$

Teorema 9.2 (Poinsot). *L'ellissoide rotola senza strisciare sul piano ortogonale a \vec{L} e tangente ad esso*



In Fig.9.5 è rappresentato l'ellissoide di inerzia (\vec{m} indica \vec{L}) appoggiato sul piano ortogonale a \vec{L} . OO' costante. Il vettore ξ in cui il piano diretto come \vec{L} tocca l'ellissoide è un vettore parallelo a $\vec{\omega} \Rightarrow$ punto instantaneamente a velocità nulla $\xi \Rightarrow$ moto dell'ellissoide è di rotolamento. La configurazione del corpo si identifica con due angoli. Angolo α sul piano: il punto di contatto dell'ellissoide sul piano descrive una curva. Angolo che descrive il moto del punto di contatto sull'ellissoide stesso \Rightarrow con 2 coordinate descriviamo univocamente la configurazione del corpo. Perché, dato che i d.o.f. del corpo rigido sono 3: rotazioni intorno a 3 assi ortogonali? In realtà ci sono 4 costanti del moto per il corpo rigido libero: 3 componenti di \vec{L} lungo gli assi fissi + l'energia (non tutti utilizzabili insieme) $\Rightarrow 3x + 3v - 4$ costanti fissate = 2 quantità restanti: corrispondono alle variabili angolari.

Figura 9.5: Rotolamento dell'ellissoide d'inerzia sul piano invariante

Curiosità:

- Il concetto di piano ortogonale rimane assoluto: il cambio di coordinate mantiene la condizione. Il vettore \vec{L} è sempre lo stesso visto nei 2 sdr, sono diverse le componenti.
- Se l'ellissoide è una sfera, i punti sono di stabilità neutra, né ellittica né iperbolica. Es: matita che rotola sul tavolo piano: ogni punto del piano è di equilibrio. E' come se il potenziale fosse piatto, non c'è niente che confina il moto: come una particella libera si allontana lungo la direzione data, ma non sono punti iperbolici perché non c'è instabilità che cresce esponenzialmente.

9.6 Trottola

9.6.1 Assenza di forze esterne

Partiamo dal caso semplice: corpo rigido libero. Attenzione: nella realtà c'è una forza esterna: \vec{F}_g applicata al cdm; tratteremo questo caso nella Sez. 9.6.3. La trottola è un esempio di sistema integrabile.

$$I_x = I_y \neq I_z \Rightarrow \exists \text{ simmetria}$$

Equazioni di Eulero

$$\begin{aligned}\frac{dL_x}{dt} &= \left(\frac{1}{I_z} - \frac{1}{I_y} \right) L_y L_z \\ \frac{dL_y}{dt} &= \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_z} \right) L_z L_x \quad \omega = \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_z} > 0 \text{ assumendo } I_z > I_x = I_y \\ \frac{dL_z}{dt} &= 0 \Rightarrow L_z \text{ è integrale primo}\end{aligned}\tag{9.22}$$

La trottola ha 2 momenti di inerzia principali uguali, l'ellissoide di inerzia è di rotazione: succede quando il corpo rigido ha una simmetria di rotazione (anche finita, es cubo). Dalle equazioni di Eulero, L_z è integrale primo del moto. Si poteva dedurre dal teorema di Nöther. Infatti c'è una simmetria di rotazione e l'asse di simmetria è l'asse di rotazione \Rightarrow la componente di \vec{L} lungo l'asse di simmetria (asse di inerzia z nel corpo) del corpo è integrale primo del moto.

Nota: Prima avevamo che le 3 componenti di \vec{L} nello spazio erano conservative. Questo vale ancora: corpo rigido libero, ma per la simmetria, passando nel sdr del CORPO, anche L_z che di solito non è conservato lo è!

L_z è costante SEMPRE (mentre prima avevamo usato la teoria perturbativa. Sostituendo l'espressione di ω nell'Eq.9.22, ed essendo $L_z = L_z^0$ troviamo

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{dt} = -\omega L_z^0 L_y \\ \frac{dL_y}{dt} = +\omega L_z^0 L_x \end{cases} \quad \text{Equazioni di un rotatore} \quad \begin{cases} L_x = L_x^0 \cos(\omega L_z^0 t) - L_y^0 \sin(\omega L_z^0 t) \\ L_y = L_x^0 \sin(\omega L_z^0 t) + L_y^0 \cos(\omega L_z^0 t) \end{cases}$$

Rotatore con frequenza ωL_z^0 , che dipende sia dai momenti di inerzia (nella definizione di ω) che dalle condizioni iniziali che dicono quanto velocemente la trottola ruota attorno al suo asse z.

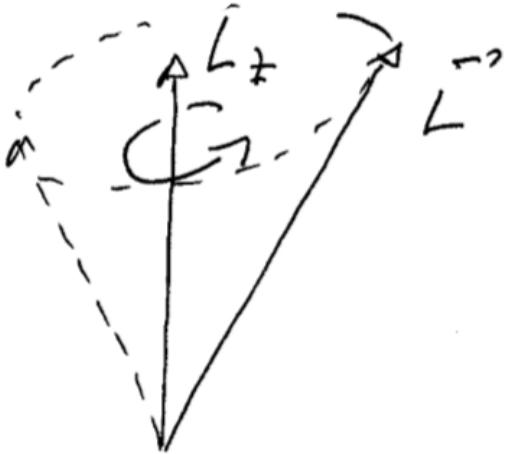
Infatti

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{L}_x \\ \dot{L}_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega L_z^0 \\ \omega L_z^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \omega L_z^0 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \end{pmatrix} \\ A^2 &= -I \sim i \Rightarrow e^{A\omega L_z^0 t} \sim e^{i\omega L_z^0 t} \\ \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(\omega L_z^0 t) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin(\omega L_z^0 t) \begin{pmatrix} L_{0x} \\ L_{0y} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

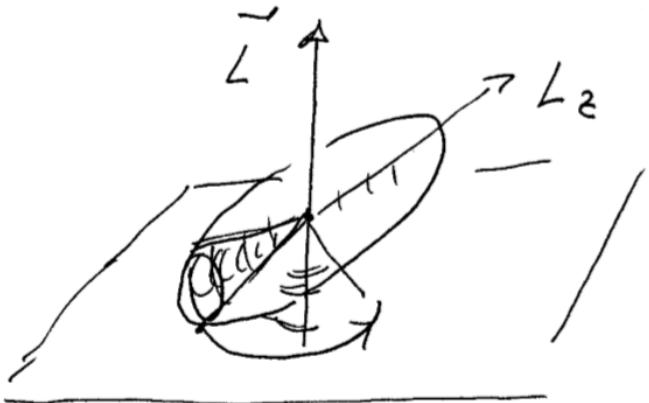
1. Moto di \vec{L} nel sistema del corpo: precessione attorno all'asse z (Fig.9.6a): la soluzione è un rotatore nello spazio dei momenti. Nel sistema della trottola, L_z costante. \vec{L} che NON è costante nel corpo (ma nel sistema fisso sì), fa un cono attorno alla sua proiezione lungo l'asse del corpo.
2. Moto nello spazio (Fig. 9.6b): $I_x(x^2 + y^2) + I_z z^2 = 1$ l'ellissoide è di rotazione, per gli assi con I identici. \vec{L} fermo, L_z gli gira attorno (mentre nel corpo L_z costante e \vec{L} gira attorno). Il moto di rotolamento definisce due coni: un cono nello spazio e uno nell'ellissoide che rotolano uno attorno all'altro. L_z è integrale primo SOLO per le equazioni di Eulero viste nel CORPO!!

9.6.2 Coordinate lagrangiane per SO3

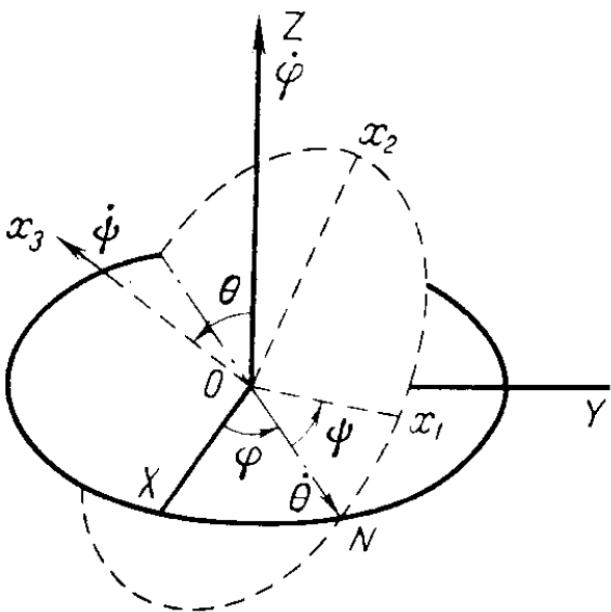
Dobbiamo costruire le coordinate lagrangiane per scrivere \mathcal{L} del corpo rigido. Le equazioni di Eulero sfruttando che si studiava il corpo libero, hanno disaccoppiato il moto di \vec{L} visto nel sistema del corpo, dal moto vero e proprio del corpo stesso (che richiedeva la risoluzione delle equazioni di Eulero/ la visualizzazione di Poinsot) quindi non hanno messo in luce il problema. Dobbiamo trovare coordinate che permettono di scrivere la matrice di rotazione del cambio di coordinate che porta il sistema fisso S in S', per esprimere analiticamente la posizione del corpo secondo la visualizzazione di Poinsot. Sono i 3 angoli di Eulero (Fig. 9.7a), introdotte per studiare il problema della trottola (Fig. 9.7b).



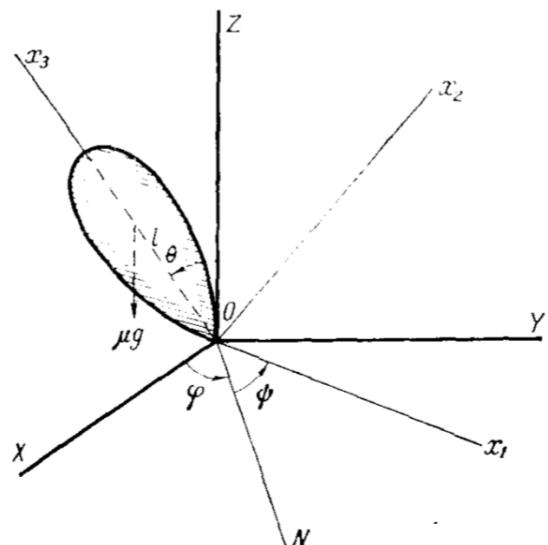
(a) Precessione di \vec{L} attorno a L_z componente di \vec{L} lungo l'asse della trottola, nel sistema della trottola



(b) Moto nello spazio



(a) Il piano mobile x_1x_2 interseca il piano fisso XY nella linea ON detta linea dei nodi. Gli angoli di Eulero sono la terna φ tra X e N , θ tra z e x_3 , ψ tra N e x_1



(b) Angoli di Eulero applicati alla trottola.

I 3 angoli rappresentano 3 rotazioni indipendenti perché la loro combinazione ordinata (Fig. 9.8) definisce la trasformazione.

1. rotazione attorno all'asse fisso z di un angolo ϕ porta x alla linea dei nodi
2. rotazione di θ attorno alla linea dei nodi porta l'asse fisso z in z' , asse di simmetria della trottola.
3. rotazione intorno a z' di un angolo ψ porta n in x' ; alla fine anche y coincide con y' .

Vanno fatte nell'ordine. Landau pg 138.

Nota: θ è un angolo azimutale ($\theta = 0, \pi$: singolarità polare): varia fino a π , altrimenti la trasformazione non sarebbe 1-1.

(ϕ, θ, ψ) definiscono un sistema locale nello spazio $SO(3)$: gruppo delle matrici ortogonali 3×3 a determinante 1. S sta per $\det = 1$ perché vogliamo evitare specularità. Rappresentano i cambi di sdr che mantengono ortogonalità degli assi e il fatto che i sistemi siano destrogiiri (obbediscono alla regola della mano destra). Il corpo rigido vive in questo gruppo perché non si possono scambiare gli assi. Gli angoli definiscono un sistema coordinate che è locale:

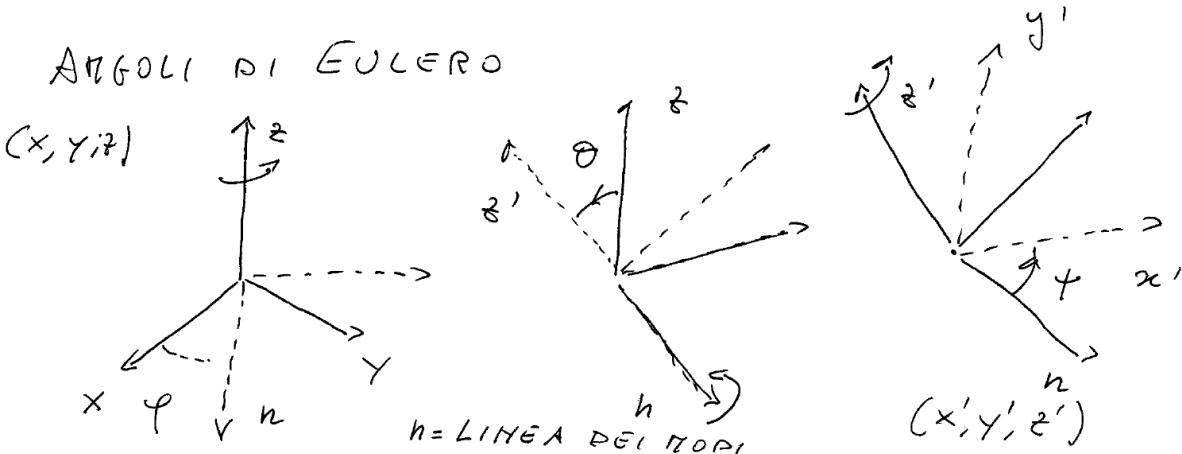
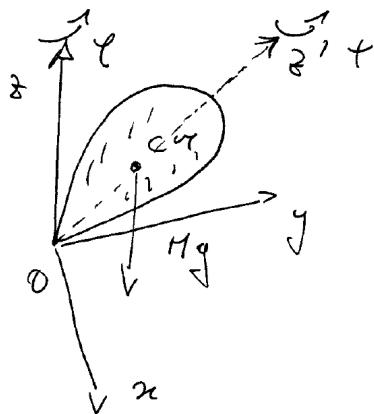


Figura 9.8: Rotazioni di Eulero

singolarità in $0, \pi$. Se $\theta = 0$, $z \equiv z'$ quindi ϕ attorno a z e ψ attorno a z' coincidono \Rightarrow degenerazione, trasformazione non più invertibile, lo spazio delle rotazioni è calato di una dimensione. Ritroviamo le tipiche singolarità delle coordinate polari. Il gruppo SO_3 costituisce una superficie proiettiva: identifichiamo i due punti opposti della sfera che stanno sull'asse di rotazione; le coordinate di Eulero sono coordinate locali in questa superficie.

9.6.3 Energia cinetica di una trottola



Simmetrie

- 1) rotazioni rispetto a \hat{z}'
- 2) rotazioni attorno a \hat{z} (in quanto $-Mg\hat{z}$ è diretta lungo z)

Conservazione di L'_z ed L_z \Rightarrow dato che l'energia si conserva, il problema è integrabile:

3 gradi di libertà \Leftrightarrow 3 integrali primi

Assi principali sono z' e qualunque coppia di assi ortogonali. Infatti z' è asse di simmetria di rotazione (trottola - cono- piramide a base quadrata). Rispetto a quanto già studiato, c'è \vec{F}_g dobbiamo anche risolvere l'ultima equazione.

Usiamo il teorema di Nöther: studiamo prima le simmetrie del problema per capire quali sono gli integrali primi del moto.

1. Simmetria di rotazione intorno a z' già messa in luce dalle equazioni di Eulero secondo cui la proiezione di \vec{L} lungo z' è integrale primo (è la proiezione che si conserva, non la direzione dell'asse z' : l'integrale primo nel teorema di Nöther è uno scalare).
2. Simmetria di rotazione intorno all'asse z , che NON cambia la direzione di \vec{F}_g che è l'unica forza esterna ed è diretta lungo z . Quindi la forza di gravità è l'unica a rompere l'isotropia, e una trasformazione che non la alteri non altera \mathcal{L} (invece cambiando l'inclinazione della trottola cambierebbe il potenziale). Gruppo delle rotazioni intorno a z è un gruppo di simmetria della trottola $\Rightarrow L_z$ integrale primo.

Proiezione di \vec{L} lungo z' , lungo z , E sono integrali primi del moto.

Nota: Nel caso di un corpo rigido che non è una trottola, solo 2 dei 3 integrali primi rimangono: L_z perché la simmetria di rotazione intorno a z rimane per ogni corpo rigido, ma non z' perché non è necessariamente simmetrico. Il corpo rigido generico sottoposto a \vec{F}_g non è più integrabile (2 integrali, 3 dof); se invece è libero (anche NON simmetrico) è integrabile: L^2 , una componente di \vec{L} , E .

ϕ e ψ sono coordinate cicliche (sono infatti coordinate giuste!) perché descrivono rotazione intorno a z e z' rispettivamente, che sono le simmetrie del problema, e ogni simmetria è integrale primo del moto per Nöther.

ϕ e ψ sono coordinate cicliche $\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \theta) \Rightarrow$ Calcoliamo \mathcal{L} nella configurazione istantanea in cui $\phi = \psi = 0$. (x', y', z') assi principali di inerzia

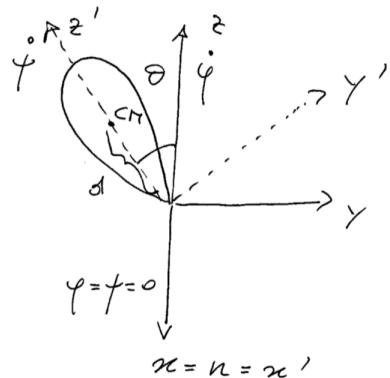
Nella configurazione scelta: la linea dei nodi resta sull'asse x ($\varphi = 0$), e dopo la rotazione di θ , la linea dei nodi è già su x' : $x \equiv n \equiv x'$ dove x' è l'asse di inerzia ortogonale all'asse di simmetria. L'unica rotazione è tra l'asse fisso lungo la verticale z e l'asse di simmetria della trottola z' : porta z in z' , e y in y' cioè y' è ruotato di θ rispetto a y . Inoltre $\dot{\phi}$ è la velocità angolare che descrive la rotazione intorno a z , $\dot{\psi}$ intorno a z' , e in questo caso $\dot{\theta}$ lungo x . Per costruire \mathcal{L} dobbiamo scrivere T esprimendo le componenti della velocità angolare nel sistema della trottola, utilizzando gli angoli di Eulero cioè le 3 velocità angolari.

Essendo $I_x = I'_x$ (gli assi coincidono) $= I'_y$,

$$T = \frac{1}{2} I_x (\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \frac{I_z}{2} \omega_{z'}^2$$

(Da qui in poi ci andrebbe I'_z invece di I_z ?)

Esprimiamo $\vec{\omega}$ usando $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$



Nota: Proiettare le velocità angolari costruite con gli angoli di Eulero sugli assi principali nel sistema della trottola, ci consente di semplificare i calcoli. Attenzione che \hat{z} NON è asse di inerzia \Rightarrow dobbiamo scomporre $\dot{\phi}\hat{z}$.

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{x}' + \dot{\psi}\hat{z}' \\ \begin{cases} \omega_{x'} = \dot{\theta} \\ \omega_{y'} = \dot{\phi}\sin\theta \\ \omega_{z'} = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases} & (9.23) \end{aligned}$$

Sostituendo

$$T = \frac{I_x}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_z}{2} (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 \quad (9.24)$$

$$V = Mgd\cos\theta, \quad \mathcal{L} = T - V \quad (9.25)$$

Calcolando \mathcal{L} effettivamente non compaiono $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$.

9.6.4 Integrali primi e riduzione al problema 1D

Approccio simile al problema di Keplero ma i d.o.f sono 3.

Integrali primi del moto

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = I_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + \underline{I_z (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \cos\theta} \\ p_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \underline{I_z (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})} \\ E &= \frac{I_x}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{\overline{I_z (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2}}{2} + Mgd\cos\theta \end{aligned} \quad (9.26)$$

3 equazioni al primo ordine in 3 variabili.

Sostituiamo i momenti nell'energia. Sostituiamo la seconda equazione nella prima e nella terza.

$$(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \frac{p_\psi}{I_z} \Rightarrow \quad (9.27)$$

$$p_\varphi = I_x \dot{\varphi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta, \quad \widetilde{\dot{\varphi} \sin^2 \theta} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_x} \quad (9.28)$$

$$E = \frac{I_x \dot{\theta}^2}{2} + \underbrace{\frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_x \sin^2 \theta}}_{\text{potenziale efficace}} + Mgd \cos \theta + \frac{p_\psi^2}{2I_z} \quad (9.29)$$

Nota: singolarità polare per $\theta = 0, \pi$ Osserviamo che possiamo ridefinire l'energia in modo che assorba $p_\psi^2/2I_z$: $E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_z}$.

$$E' I_x (1 - \cos^2 \theta) = \frac{I_x^2}{2} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2} + Mgd I_x (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta$$

Ci riconduciamo a un problema 1d in θ con il potenziale efficace, che ha il primo termine che è un potenziale centrifugo. Risolviamo completamente il problema della trottola: ricaviamo θ integrando l'Eq. 9.29, da cui ricaviamo $\dot{\theta}$. Quindi integrando l'Eq. 9.28 otteniamo φ , che ci consente insieme a θ di integrare l'Eq. 9.27 quindi trovare ψ . La moltiplicazione per \sin^2 è per fare un cambio di variabili con u .

$$\begin{aligned} u &= \cos \theta, \quad u \in (-1, 1), \quad \dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta} \\ \frac{I_x^2 \dot{u}^2}{2} &= -f(u) \end{aligned} \quad (9.30)$$

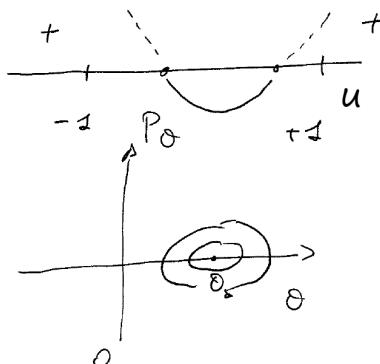
$$f(u) = \frac{(p_\phi - p_\psi u)^2}{2} + I_x(1-u^2)(Mgdu - E') \quad (9.31)$$

dove l'Eq. viene dalla relazione tra i differenziali.

Equazione algebrica; potenziale cubico. L'integrale è una funzione ellittica.

Il moto è possibile solo se $f(u) < 0$ (Eq. 9.30). Ma dall'Eq. 9.6.4 vediamo che essendo il primo termine positivo, ciò è possibile solo grazie al secondo termine, che si annulla agli estremi della variabile u (quindi agli estremi la funzione è positiva, ci sarà un intervallo più ristretto per il moto fisico)

C'è un minimo in $u \in (-1, 1)$.



$$\begin{aligned} p_\theta &= I_x \dot{\theta} \\ \dot{\phi} &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_x \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

può cambiare segno

$u = \pm 1$ sono gli estremi del dominio, che annullano. C'è un punto di minimo. Nello spazio delle fasi (p_θ, θ) punto ellittico, equilibrio relativo della trottola, poi curve chiuse che riguardano l'oscillazione della trottola tra due posizioni θ_1, θ_2 un po' inclinata verso l'alto o il basso.

$\dot{\varphi}$, velocità con cui la trottola precede attorno all'asse z, può cambiare di segno e anche tornare indietro in linea di principio.

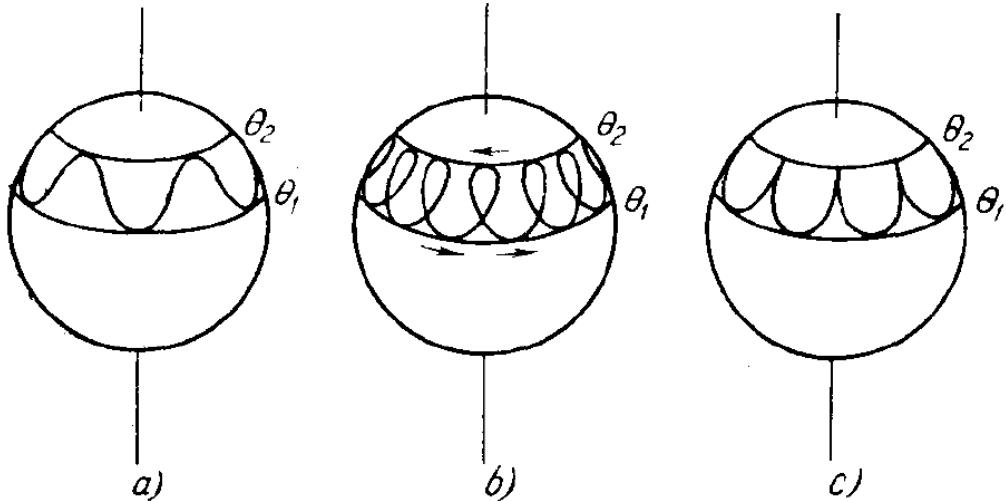


Figura 9.9: Moto dell'asse della trottola

Landau pg 139. θ_i , $i \in 1, 2$ sono i due limiti per θ , quindi i punti di inversione di u nel bacino del potenziale cubico, determinati dalla condizione $f(u) < 0$. L'asse della trottola ha inclinazione che oscilla tra i due angoli, e precede attorno a z : $\dot{\phi}$. Poi c'è il moto attorno al suo asse: $\dot{\psi}$. Se non ci fosse la forza di gravità (che tende a tirare giù la trottola, la quale reagisce tornando su) sarebbe semplicemente precessione senza oscillazione. Le oscillazioni possono essere sempre nello stesso verso (a) oppure verso il basso la trottola gira in un verso, verso l'alto nell'altro (b): $\dot{\phi}$ può cambiare segno, di solito non si vede per il valore delle condizioni iniziali (p_ψ momento attorno all'asse della trottola di solito è grande). La figura (c) è la caduta, partendo con $\dot{\phi} = 0$, precessione sempre nello stesso senso, e $\dot{\phi}$ torna ad annullarsi. Si poteva anche non fare il cambio di coordinate e osservare che il potenziale centrifugo ha un termine che va a infinito per $\theta = 0, 2\pi$, poi un termine che lo modifica un po', la somma ha un punto di equilibrio.

Curiosità:

- Rotazione rispetto a un asse di inerzia intermedio nel sistema della trottola: \vec{L} cambia da orientazione verso alto a basso; lo fa vedere lo spazio delle fasi.

Dalle 2 variabili cicliche ricaviamo 3 integrali primi del moto tra cui l'energia, per cui riusciamo a capire completamente il moto della trottola riducendo il problema a 1d (vedi Landau, Arnold, Turchetti, Goldstein). Rotazione + precessione + nutazione: oscillazione dell'asse, poco visibili se la rotazione attorno z' è molto veloce.

Trottola addormentata θ angolo polare: singolarità polare lungo z (in alto o in basso), le coordinate non costituiscono più una trasformazione invertibile rispetto alle configurazioni della trottola. Rotazione attorno a z che coincide con z' è però un caso fisico interessante. C'è un modo per lo studio locale $\theta = 0$ dato che gli angoli ψ e φ sono uguali, lo sono anche i momenti.

$$\theta = 0 \Rightarrow \phi \text{ coincide con } \psi \Rightarrow p_\phi = p_\psi$$

$$\begin{aligned} E' &= \frac{I_x}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2 (1 - \cos \theta)^2}{2 I_x \sin^2 \theta} + Mgd \cos \theta \\ \theta \rightarrow 0 &\quad E' = \frac{I_x}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2}{2 I_x} \frac{\theta^4}{4\theta^2} - Mgd \frac{\theta^2}{2} + \dots \\ &\approx \frac{I_x}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{p_\psi^2}{4 I_x} - Mgd \right) \\ \text{stabilità} &\quad \frac{p_\psi^2}{4 I_x} > Mgd \end{aligned}$$

L'energia del sistema equivalente 1d si semplifica perché possiamo raccogliere p_ψ^2 . Al denominatore: singolarità. Ma nel limite $\theta = 0$ abbiamo un limite notevole "0/0" che toglie la singolarità. Sviluppiamo l'energia cinetica e potenziale in $\theta = 0$. L'energia assume una forma analoga all'oscillatore armonico: stabile se la parentesi è > 0 ; se no instabile, punto iperbolico- come pendolo rovesciato.

Condizione di stabilità per p_ψ momento lungo l'asse di simmetria. Nel caso reale, per un po' la trottola resta in posizione verticale, poi attrito tra il punto di contatto e la superficie fa rallentare la trottola, quando rallenta la rotazione quindi cala p_ψ : caduta.

Corpo rigido: problematiche legate allo spazio di configurazione, 3 dof. Esempio: posizionare i microsatelliti

10 Principi variazionali

10.1 Equazioni di Lagrange e principio di minima azione

Principio di minima azione è l'emancipazione della dinamica lagrangiana dagli assiomi di Newton, e diventa l'assioma base (Landau infatti parte con quello).

Principio varazionale (per come lo studiamo noi) è basato sul concetto di funzionale: applicazione che va da uno spazio di funzioni ai numeri reali.²¹ Dobbiamo definire il dominio del funzionale per definire il funzionale: funzionali definiti su domini diversi sono diversi! **ESAME!** Noi consideriamo come dominio funzioni regolari almeno C^2 definite su un intervallo (t_a, t_b) con estremi fissati: $q(t_A) = q_A, q(t_B) = q_B$. q può essere una funzione a valori vettoriali, mentre il funzionale ha valori in \mathbb{R} . L'esempio più semplice e rilevante è l'integrale. Prendiamo una funzione $F(q, \dot{q}, t)$ (in teoria potremmo prendere anche derivate successive), con $q(t)$ nel dominio, quindi l'integrale è funzione di q . Il funzionale \mathcal{F} associa a una funzione un numero reale.

Definizione 10.1.

Sia $q(t) \in C^2(t_A, t_B), q(t_A) = q_A, q(t_B) = q_B$ il dominio

Definiamo funzionale $\mathcal{F}[q] \mapsto \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[q] = \int_{t_A}^{t_B} F(q, \dot{q}, t) dt$$

dominio: spazio di funzioni definite su uno spazio di configurazioni (R^n , sfera...) regolari, dipendenti da un parametro reale, con estremi fissati

anche il massimo valore in modulo della funzione q tra t_a e t_b è un funzionale.

Estremale²² per un funzionale generalizza il concetto di punto critico per una funzione.

Definizione 10.2. Estremale.

Sia $q(t)$ tale che

$$\mathcal{F}[q + \delta q] = \mathcal{F}[q] + \mathcal{O}(\|\delta q\|^2)$$

dove $\delta q(t)$ è una variazione arbitraria nel dominio!

$$\delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0$$

Allora $q(t)$ si dice estremale di $\mathcal{F}[q]$

Vogliamo che $q(t)$ sia un estremale per il funzionale. Dobbiamo avere una variazione piccola arbitraria δq nel dominio, cioè tale che $q + \delta q$ è ancora nel dominio, cioè la variazione si deve annullare agli estremi (non è banale la condizione di fissare gli estremi). In norma (una che vogliamo) misuriamo la variazione, e diciamo che è piccola. Allora $q(t)$ è estremale se la differenza tra il funzionale nel punto variato $q + \delta q$ e nel punto q , è di ordine quadratico nella norma di q . Attenzione: la condizione di estremalità è che la variazione del funzionale sia di ordine 2, non 1, rispetto a quanto variamo δq . Infatti al primo ordine si annulla.

²¹Arnold- Un funzionale è una qualsiasi applicazione dallo spazio delle curve ai numeri reali

²²Arnold- (Notazione: $\gamma \equiv q$, $h \equiv \delta q$). Dovremmo specificare la classe di curve γ su cui \mathcal{F} è definito e lo spazio lineare che contiene h . Possiamo assumere ad esempio che entrambi gli spazi siano le funzioni infinitamente differenziabili.

Un funzionale \mathcal{F} si dice **differenziabile** se $\mathcal{F}[\gamma + h] - \mathcal{F}[\gamma] = F + R$, dove

- F dipende linearmente da h (cioè fissato γ , $F(h_1, h_2) = F(h_1) + F(h_2)$ e $F(ch) = cF(h)$)

- $R(h, \gamma) = \mathcal{O}(h^2)$ nel senso che per $|h| < \varepsilon$ e $|\frac{dh}{dt}| < \varepsilon$ abbiamo $|R| < C\varepsilon^2$.

La parte lineare dell'incremento, $F(h)$ si dice differenziale o variazione del funzionale (h invece è detto variazione della curva)

Un **estremale** di un funzionale differenziabile $\mathcal{F}[\gamma]$ è una curva γ tale che $F(h) = 0 \forall h$

Vogliamo esplicitare la condizione di estremalità. Facciamo lo sviluppo di Taylor della funzione scalare F in $q + \delta q$. Calcoliamo

$$\mathcal{F}[q + \delta q] = \int_{t_A}^{t_B} F(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt = \mathcal{F}[q] + \int_{t_A}^{t_B} \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt}_{\downarrow 0 \text{ estremale}} + \mathcal{O}(\delta q)^2$$

In $\delta q = 0$ ritroviamo $\mathcal{F}[q]$. (NON sviluppare t che è il parametro)! Diciamo che i termini finali devono essere di ordine δq^2 : la funzione è regolare, quindi non può essere che con δq piccoli si abbiano $\delta \dot{q}$ arbitrariamente grandi, se no non sarebbe differenziabile (contraddicendo l'ipotesi di regolarità).

Confrontiamo lo sviluppo con la condizione di estremalità. L'integrale nello sviluppo deve essere nullo: questo caratterizza che si sta sviluppando sull'estremale, la funzione $q(t)$ del dominio che rende estremale l'integrale. Integriamo per parti per avere un δq e non $\delta \dot{q}$: a priori potrebbero essere indipendenti, ma qui sì che sono legati attraverso la derivata temporale.

Determiniamo le condizioni:

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt &= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_A}^{t_B}}_{=0 \text{ poiché}} - \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \\ &\quad \delta q(t_B) = \delta q(t_A) = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\mathcal{F}[q + \delta q] - \mathcal{F}[q] = \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt + \mathcal{O}(\delta q^2)$$

Ricordiamo che δq calcolato agli estremi è 0: abbiamo scelto una variazione all'interno del dominio, dominio in cui le funzioni hanno estremi fissi \Rightarrow il termine $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_A}^{t_B}$ si annulla. Estremale \Rightarrow

$$\int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad \forall \delta q$$

δq funzione differenziabile continua a estremi fissi, piccola, arbitrariamente scelta.

Th- condizione necessaria e sufficiente è che

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{equazioni di Eulero}$$

(10.1)

In ²³(vedi Arnold) afferma che se una funzione moltiplicata per una funzione arbitraria, purché continua su un intervallo, ha integrale nullo sull'intervallo, allora dev'essere nulla. Ci assicura che la condizione Eq.10.1 è necessaria (ovvio) ma anche sufficiente- dimostrazione fatta da Eulero \Rightarrow equazioni di Eulero. Equazioni differenziali al secondo ordine che definiscono la condizione di estremalità per un funzionale come lo abbiamo definito con estremi fissati nel dominio.

Applicando il teorema al funzionale di azione

$$\mathcal{F}[q] = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad q(t_A) = q_A, q(t_B) = q_B, q(t) \text{ traiettoria nello spazio delle configurazioni}$$

$q(t)$ è estremale se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{Equazioni di Eulero-Lagrange}$$

(10.2)

²³Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni. Se

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0$$

per tutte le funzioni $\eta(x)$ arbitrarie continue fino alla derivata seconda, allora $M(x) \equiv 0$ nell'intervallo (x_1, x_2) .

Si dimostra che $q(t)$ è un minimo se $[t_A, t_B]$ è piccolo

Abbiamo costruito il funzionale di azione (che genera il principio di minima azione), con al posto di F generica la lagrangiana, nel dominio precedentemente definito, con $q(t)$ traiettoria nello spazio delle configurazioni, regolare C^2 . La condizione di estremalità sono le equazioni di Lagrange \Rightarrow equazioni di Eulero-Lagrange: unione della teoria dei funzionali di Eulero e la meccanica di Lagrange. Hanno consentito la formulazione del principio di minima azione: le traiettorie fisiche del moto sono estremali del funzionale d'azione, ottenuto integrando la lagrangiana tra t_A e t_B , per traiettorie nello spazio delle configurazioni con estremi fissati.

Come la soluzione dell'equazione di Lagrange richiedeva di fissare 2 c.i., posizione e velocità, anche nel principio di minima azione dobbiamo fissare 2 condizioni, stavolta posizione iniziale e posizione finale. Relazione tra il vincolo messo nel dominio di estremi fissati nel principio di minima azione, e le condizioni iniziali nell'equazione di Lagrange che garantiscono l'unicità della soluzione (th esistenza e unicità). Equazioni di Eulero-Lagrange, che obbediscono al principio di minima azione, vanno risolte fissando condizione iniziale e finale, mentre le equazioni di Lagrange che vengono dalle equazioni di Newton q_a e $\dot{q}_a \Rightarrow$ corrispondenza tra la velocità iniziale e il punto finale - localmente! (per approfondire vedasi Arnold- nascita di singolarità di tipo focale). E' come trovare la corrispondenza tra la velocità con cui spariamo e il punto di arrivo del proiettile (dobbiamo trovare il vettore velocità iniziale che lo faccia arrivare in quel punto). Fissare il punto iniziale e il punto finale \Leftrightarrow fissare il punto iniziale e la velocità iniziale e integrare l'orbita: corrispondenza univoca, localmente. Su una sfera per connettere due punti, sia il cerchio massimo che congiunge i due punti dalla parte corta che dalla parte lunga sono traiettorie fisiche \Rightarrow due punti di arrivo, due soluzioni (ci sono caratteristiche legate alla topologica dello spazio delle configurazioni); la velocità li distingue.

Nota: L'azione nel principio di minima azione NON c'entra NULLA con le variabili azione-angolo, hanno in comune solo la dimensione di energia · tempo

Nell'integrale per parti il primo termine è quello da derivare, il secondo da integrare.

Principio di MINIMA azione- non dimostriamo che è effettivamente il minimo- dovremmo considerare i termini di ordine successivo (servirebbero i simboli di Kristoffel dello spazio delle configurazioni - le equazioni di Jacobi permettono di dimostrare che è un minimo, di studiare cosa succede quando si sta variando rispetto a un minimo e permettono di distinguere tra minimi e massimi). Noi dimostriamo solo l'estremalità e vediamo a posteriori che è giustificato parlare di minima azione.

estremalità di funzionali- es: bolla di sapone. Il sapone si posiziona per minimizzare l'energia potenziale.

10.1.1 Catenaria

Si consideri una corda omogenea di lunghezza L appesa tra 2 punti A e B (di pari altezza per semplicità), soggetta alla forza di gravità.

Ovviamente $L > 2AB$. $|AB| = 2a$. Il problema di trovare la curva che assume tale corda si risolve con i funzionali, come il problema della brachistocrona - curva perché un punto passi dal punto A al punto B più in basso soggetto alla gravità ma non l'attrito.

Usiamo x per parametrizzare la curva.

$$\vec{x} = (x, y(x)) = \gamma(x), x \in [-a, a]$$

Associamo alla generica curva un'energia potenziale (mgh). $\rho = \frac{M}{L}$ densità.

$$V[\gamma] = \int_{-a}^a \rho g y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \text{ minimo}$$

con il vincolo

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = L > 2a$$

La massa è la densità · l'elemento di lunghezza. La configurazione di equilibrio stabile corrisponde al minimo del potenziale \Rightarrow calcoliamo il minimo del potenziale ovvero troviamo la curva estremale del funzionale. Abbiamo effettivamente $F(q, \dot{q}, t)$ (con $q=y$).

Il vincolo in più restringe il dominio; il vincolo è che la lunghezza L sia fissata. Moltiplicatori di Lagrange²⁴ per i punti critici delle funzioni con vincoli; si estende ai funzionali. Costruiamo un altro funzionale $F = V - \lambda \cdot$ vincolo.

λ moltiplicatore di Lagrange, sarà fissato in base al vincolo. Usati in meccanica statistica: distribuzione di Maxwell-Boltzmann viene dal rendere estremale il funzionale di entropia vincolato a energia finita.

Quindi si considera il funzionale

$$\mathcal{F}[\gamma] = V[\gamma] - \lambda \int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} dx$$

dove si omette $-L$ nel vincolo perché darà un termine costante nella lagrangiana. Si minimizza il funzionale con la costante λ da determinare con il vincolo

$$\mathcal{F}[\gamma] = \int_{-a}^a (\rho gy(x) - \lambda) \sqrt{1+y'^2} dx$$

Equazioni di Eulero

$$\rho g \sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}(\rho gy(x) - \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

il parametro è x non t . Equazione differenziale al secondo ordine. Ma il funzionale contiene una funzione simile a una lagrangiana che non contiene esplicitamente il parametro x , quindi ricordiamo che esiste un integrale primo del moto energia quando \mathcal{L} non dipende dal parametro. Per calcolare E deriviamo rispetto a dy/dx , moltiplichiamo per y' e togliamo la lagrangiana.

Utilizzando l'integrale "energia":

$$\begin{aligned} E &= (\rho gy(x) - \lambda) \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - (\rho gy(x) - \lambda) \sqrt{1+y'^2} = -\frac{\rho gy(x) - \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} \\ &\Rightarrow E^2 (1+y'^2(x)) = (\rho gy(x) - \lambda)^2 \end{aligned}$$

Possiamo ricondurci a un'equazione al primo ordine. Ricaviamo dy/dx .

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(\rho gy - \lambda)^2}{E^2} - 1}$$

Separiamo le variabili

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{(\rho gy - \lambda)^2}{E^2} - 1}} = dx$$

Sostituendo $u = \frac{\rho gy - \lambda}{E}$, $du = \frac{\rho g}{E} dy$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho g} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} &= dx \\ \frac{E}{\rho g} \operatorname{arccosh} \frac{\rho gy - \lambda}{E} + c &= x \\ \frac{\rho gy - \lambda}{E} &= \cosh \left(\frac{\rho g}{E} (x - c) \right) \\ y &= \frac{1}{\rho g} \left(E \cosh \left(\frac{\rho g}{E} (x - c) \right) + \lambda \right) \quad x \in [-a, a] \quad c=0 \text{ per simmetria} \end{aligned}$$

²⁴Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto di \mathbb{R}^n , $F \in C^1(A)$, M r-varietà di \mathbb{R}^n di classe C^k , $k \geq 1$ t.c. $M \subset A$ (cioè sappiamo che $x_0 \in M$ per cui esiste U aperto di \mathbb{R}^n t.c. $M \cap U = x \in U : f(x) = 0$).

Se x_0 è punto di massimo o di minimo relativo vincolato di F , allora esistono $n-r$ numeri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}$ (detti moltiplicatori) t.c. x_0 è un punto critico per

$$F - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \dots - \lambda_{n-r} f_{n-r}$$

cioè

$$\nabla F(x_0) = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \nabla f_i(x_0)$$

$\cosh^2 - 1 = \sinh^2$. c costante di integrazione, ma \cosh è una funzione pari, e la soluzione deve essere pari per simmetria, quindi $c = 0$.

Lunghezza

$$\int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-a}^a \cosh\left(\frac{\rho g}{E}x\right) dx = L$$

$$\frac{2E}{\rho g} \sinh\left(\frac{\rho g}{E}a\right) = L \quad \text{determina } E < 0$$

λ determina l'altezza $y(a) = h$

$$y(x) = \bar{a}(1 - \bar{b} \cosh(\bar{a}\bar{b}x))$$

Imponendo la lunghezza e $y(a) = h$ otteniamo le costanti a e b barrate. Catenaria: curva che descrive la corda appesa tra 2 punti soggetta alla forza di gravità. Non serve calcolare esplicitamente λ .

10.1.2 Arbitrarietà di una derivata temporale in \mathcal{L}

Abbiamo creato un principio nuovo alla base della meccanica e trasferito in altri contesti risultati della meccanica come l'esistenza dell'energia come integrale primo.

Data una lagrangiana di un sistema meccanico in cui $\mathcal{L} = T + V$ esiste sempre uno spazio in cui la soluzione è una geodetica. In relatività generale si definisce una \mathcal{L} che nasce già per dare geodetiche

Alcune proprietà

Con i funzionali diventa immediato verificare l'arbitrarietà di una derivata rispetto al tempo nella lagrangiana.

Se $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$ → il funzionale di azione diventa

$$\int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}' dt = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} dt + \int_{t_A}^{t_B} \frac{dF}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} dt + F(q_B, t_B) - F(q_A, t_A)$$

che sono termini costanti nella variazione che si calcola nel principio di minima azione.

Scriviamo il principio di minima azione per \mathcal{L}' e usiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale. F è funzione di q e t (è definita nello spazio delle configurazioni). La cosa importante è che gli estremi sono fissati! \Rightarrow La differenza tra i due integrali è costante nella variazione relativa all'applicare il principio di minima azione, quindi è come se F non ci fosse: l'estremale dei due funzionali è uguale. Ecco perché c'è l'arbitrarietà di una derivata rispetto al tempo: le equazioni di Lagrange sono le equazioni di Eulero-Lagrange che vengono da un principio variazionale, esattamente tale che $\frac{dF}{dt}$ genera un termine che non varia quando si applica il principio variazionale.

10.2 Geodesiche: definizione geometrica e definizione fisica

Definiamo una metrica G su uno spazio delle configurazioni.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{q} G(q) \dot{q} : \quad \text{non avendo forze esterne } \mathcal{L} = T \\ &\Rightarrow \boxed{\delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} dt = 0} \quad \text{estremale} \end{aligned} \tag{10.3}$$

definisce le curve geodesiche.

Le geodetiche della superficie sono le curve di un punto materiale di massa 1, con questa lagrangiana, che si muove liberamente nello spazio curvo con matrice metrica G : dal punto di vista fisico vi è una forza vincolare che tiene l'oggetto su uno spazio delle configurazioni non euclideo. La geometria dello spazio delle configurazioni è l'effetto della vincolare, e viceversa la forza vincolare è rappresentata dalla geometria nello spazio delle configurazioni.

Le geodetiche però si definiscono in altro modo.

Definizione 10.3. Curva geodesica.

Sia $ds = \sqrt{q G q dt}$ il differenziale di lunghezza. Sia γ una curva t.c. $\gamma(t_A) = q_A$, $\gamma(t_B) = q_B$. γ si dice geodesica se $\int_\gamma ds$ è minimo. Ossia è la curva con lunghezza minima che connette i punti q_A e q_B .

Prendiamo l'elemento di lunghezza ds (vdt). Data una curva geodetica la sua lunghezza è minima rispetto alle altre curve che connettono i 2 punti (attenzione qui t è un parametro generico, non necessariamente il tempo) Le rette sono le geodetiche in uno spazio euclideo. Sulla sfera: cerchio massimo.

Abbiamo quindi un principio variazionale meccanico: le traiettorie del moto - che coincidono con le geodesiche - rendono stazionaria l'azione, e uno geometrico. Sono diversi (il secondo ha la radice di v^2 , il primo no), vogliamo trovare il motivo per cui sono equivalenti.

Nota: E' una condizione puramente geometrica, non dipende dalla parametrizzazione. Al contrario, il funzionale di azione $\int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} \dot{q} G \dot{q} dt$ dipende dal parametro t tempo.

Il funzionale d'azione utilizza esplicitamente un parametro particolare che è il tempo- e questo dà la dimensione fisica di $E \cdot t$: dell'azione; invece il principio geometrico non dipende dalla parametrizzazione. La distanza minima non può dipendere da come parametrizziamo la curva: lunghezza invariante per cambio di parametrizzazione regolare.

Per dimostrare che le equazioni associate ai 2 principi variazionali forniscono le stesse soluzioni, facciamo una verifica esplicita, poi faremo anche la dimostrazione generica.

Consideriamo le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} (G \dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{q} \frac{\partial G}{\partial q} \dot{q} = 0$$

Sappiamo anche che le soluzioni soddisfano $\frac{d}{dt} (\dot{q} G \dot{q}) = 0 \rightarrow v = \frac{ds}{dt}$ è costante.

Infatti per la conservazione dell'energia, v^2 è costante. Quindi usando il tempo come parametro, con le equazioni di Eulero-Lagrange costruiamo non solo la curva geodesica, ma la curva geodesica percorsa con un parametro che dà la velocità costante, quindi un parametro proporzionale alla lunghezza d'arco s . La costante di proporzionalità è la velocità costante ($v = \sqrt{2E}$, E integrale primo del moto)

Usiamo adesso il principio variazionale che definisce le geodetiche (siccome il parametro in generale non è necessariamente il tempo, chiamiamo il parametro λ e indichiamo con ' la derivata rispetto al parametro):

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial q'} \sqrt{q' G q'} - \frac{\partial}{\partial q} \sqrt{q' G q'} = \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{q' G q'}} G q' - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{q' G q'}} q' \frac{\partial G}{\partial q} q' = 0$$

Se $\lambda = t$ tempo $\sqrt{q' G q'}$ è una costante che quindi possiamo portare fuori dalla derivata:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{q' G q'}} G q' = \frac{1}{\sqrt{q' G q'}} \frac{d}{dt} G q'$$

Ritroviamo l'equazione di Lagrange!

$$\frac{d}{dt} G \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q} \frac{\partial G}{\partial q} \dot{q} = 0$$

$\Rightarrow q(t)$ è una geodetica. t è proporzionale al parametro s .

Il principio variazionale di minima azione contiene il principio delle geodetiche, aggiungendo anche che $t (dt)$ è proporzionale a $s (ds)$. Se siamo interessati solo alla geometria delle traiettorie, allora il principio delle equazioni di Lagrange può essere sostituito da quello geometrico: stesse orbite (come geometria)- ma NON stesse soluzioni: non sappiamo come vengano percorse. E' il teorema di Maupertuis che mette in relazione attraverso i principi variazionali geometria e meccanica. Il primo è un principio fisico perché dice come è percorsa la soluzione, il tempo di percorrenza, e questo permette di prevedere l'evoluzione del sistema. Per Maupertuis, se ci interessa solo la forma geometrica della soluzione, possiamo usare il principio geometrico. Connessione tra geometria differenziale e le caratteristiche delle traiettorie dinamiche - costruzione di una metrica che è in corrispondenza con un potenziale.

10.2.1 Metrica di Poincaré

E' la metrica dei quadri di Escher; iperbolica; ha trasformato semipiano in un cerchio. Spazio delle configurazioni è il semipiano $y > 0$. Per l'elemento di lunghezza²⁵ si ha:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad \text{nel semipiano } y > 0$$

Poniamo

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2y^2} \Rightarrow \text{integrali del moto}$$

$$E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2y^2}$$

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{y^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{y^4 p_x^2}{2y^2} + \frac{\dot{y}^2}{2y^2}, \quad \dot{y}^2 = 2y^2 E - p_x^2 y^4$$

La lagrangiana a 2 d.o.f ha una variabile ciclica perché non compare x. Un integrale è H che coincide con \mathcal{L} , e l'altro il momento associato a x. Riusciamo a integrare completamente il sistema.

Separazione di variabili. Prendiamo $t_0 = 0$ per semplicità.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y\sqrt{2E} \sqrt{1 - \frac{p_x^2 y^2}{2E}} \quad \frac{dy}{y\sqrt{2E} \sqrt{1 - \frac{p_x^2 y^2}{2E}}} = dt \\ z &= \frac{p_x}{\sqrt{2E}} y, \quad dz = \frac{p_x}{\sqrt{2E}} dy \Rightarrow \frac{dz}{z\sqrt{2E} \sqrt{1 - z^2}} = dt \\ z &= \sin u, \quad dz = \cos u du \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2E}} \frac{\cos u}{\cos u \sin u} du = dt \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u} &= \sqrt{2E} t \end{aligned}$$

Abbiamo usato le formule parametriche $\sin u = \frac{2w}{1+w^2}$ con $w = \tan(u/2)$, quindi $u = 2\arctan w$, $du = \frac{2}{1+w^2} dw$. Quindi

$$\int \frac{1+w^2}{2w} \frac{2}{1+w^2} dw = \int \frac{1}{w} dw = \ln w = \ln \tan(u/2) = \ln \left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u} \right)^{\frac{1}{2}}$$

dalla formula di bisezione della tangente.

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos u}{1+\cos u} &= \exp 2\sqrt{2E}t \quad \frac{\exp 2\sqrt{2E}t - 1}{\exp 2\sqrt{2E}t + 1} = \cos u = \tanh \sqrt{2E}t \\ z &= \sqrt{1 - \tanh^2 \sqrt{2E}t} = \frac{1}{\cosh \sqrt{2E}t} \quad y = \frac{\sqrt{2E}}{p_x} \frac{1}{\cosh \sqrt{2E}t} \\ \dot{x} &= p_x y^2 = p_x \frac{2E}{p_x^2} \frac{1}{\cosh^2 \sqrt{2E}t} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2E}}{p_x} \tanh \sqrt{2E}t + c \end{aligned}$$

Riconosciamo la tangente iperbolica $\tanh w = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$. Torniamo in z. Ricordiamo le relazioni tra funzioni iperboliche: $1 - \tanh^2 w = \frac{\cosh^2 w - \sinh^2 w}{\cosh^2 w} = \frac{1}{\cosh^2 w}$. Prendiamo la definizione dell'integrale primo del momento. Usiamo $\int 1/\cosh^2 w dw = \tanh w$.

²⁵Il semispazio di Poincaré è il semispazio n-dimensionale

$$H^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$$

dotato nel punto (x_1, x_2, \dots, x_n) del tensore metrico

$$g_{ij} = \frac{1}{x_n^2} \delta_{ij} \text{ cioè } g = \frac{1}{x_n^2} I$$

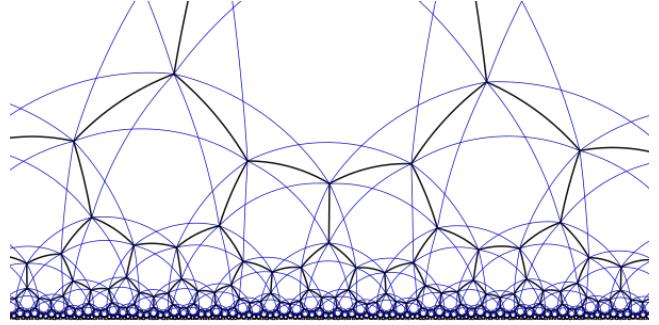


Figura 10.1: Tassellatura eptagonale del modello a semispazio di Poincaré

Verifichiamo che otteniamo come geodesiche semicerchi centrati in $(c, 0)$: \Rightarrow non vale più il quinto postulato di Euclide. Da quanto visto sopra,

$$y^2 + (x - c)^2 = \frac{2E}{p_x^2}$$

$$\tanh^2 w + \frac{1}{\cosh^2 w} = \frac{\sinh^2 w + 1}{\cosh^2 w} = \frac{\cosh^2 w}{\cosh^2 w} = 1.$$

La lagrangiana del principio geometrico delle geodetiche (con la radice) non consente di vedere come viene percorsa la curva: energia=0.

Sia $\mathcal{L} = \sqrt{\dot{q}G\dot{q}}$. Calcolare l'energia.

$$H = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} = \frac{\dot{q}G\dot{q}}{\sqrt{\dot{q}G\dot{q}}} - \sqrt{\dot{q}G\dot{q}} = 0 \quad \text{integrale banale!}$$

Quindi se interpretiamo il principio delle geodetiche come un principio di lagrangiana, cioè meccanico, non c'è più l'integrale energia (integrale banale). L'energia vive in quanto c'è il tempo, ma se togliamo la variabile temporale (cioè togliamo l'informazione di come sono percorse le curve), che sarebbe il parametro privilegiato con cui descriveremmo l'evoluzione, l'integrale energia è nullo, non ha più senso.

Curiosità:

- Nei moltiplicatori di Lagrange abbiamo trascurato $-L$ costante, perché non interviene quando calcoliamo la variazione
- L'analogia tra il principio di Fermat e la meccanica lagrangiana è stata usata da Hamilton per formulare un nuovo principio di minima azione (che vedremo ma non in relazione con il principio di Fermat), estendendo la meccanica lagrangiana. Il principio di Fermat non è esattamente il principio di minima azione, è più geometrico.

10.3 Principio di Maupertuis

Abbiamo visto l'equivalenza tra il principio di minima azione in formulazione lagrangiana e il principio delle geodetiche. Il principio di minima azione per un punto libero descrive le geodesiche rispetto alla metrica associata a T . Viceversa, presa una superficie, le sue geodetiche si possono calcolare con un principio di minima azione dove \mathcal{L} è T costruita mediante la metrica. Siamo in grado di formulare in maniera più astratta la corrispondenza con il principio di Maupertuis, che stabilisce una corrispondenza tra geometria e dinamica.

$$\text{Data } \mathcal{L}(q, \dot{q}) \text{ le traiettorie del moto soddisfano a } H = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} = E \text{ costante}$$

Se \mathcal{L} non dipende dal tempo: sistema isolato, allora le traiettorie del moto, che soddisfano la minima azione, hanno anche un vincolo dovuto alla conservazione dell'integrale primo del moto E : stanno su una superficie di livello dell'energia. Ciò significa che possiamo cambiare il funzionale di azione, e invece di considerare tutte le possibili traiettorie nello spazio delle configurazioni che vanno tra 2 istanti di t fissati connettendo 2 punti fissati q_A, q_B , aggiungiamo la condizione di appartenenza alla superficie di livello di E che restringe lo spazio.

Definizione 10.4. Il dominio per il funzionale di azione è

$$\begin{aligned} &\{q(t), t \in [t_A, t_B], q(t) \in \mathcal{M} \text{ spazio delle configurazioni} \\ &q(t_A) = q_A, q(t_B) = q_B \\ &H(q, \dot{q}) = E \} \end{aligned} \tag{10.4}$$

In generale l'estremale in uno spazio più grande è diverso da quello in un nuovo spazio piccolo incluso. Invece la dinamica ci assicura la conservazione di H , quindi l'estremale del principio di minima azione nel dominio ristretto, contiene la soluzione estremale anche rispetto allo spazio più esteso \Rightarrow possiamo cercare la soluzione nello spazio più ristretto trovando le corrette traiettorie del moto. Con una dipendenza temporale non potremmo più imporre che le soluzioni stanno su uno spazio a energia costante.

Potremmo in teoria fare un ragionamento analogo per gli altri integrali primi del moto, ma tutti i sistemi meccanici hanno E come integrale primo, gli altri integrali invece no, perciò dovremmo fare un principio per ogni classe di sistemi dinamici- non conviene.

La condizione aggiuntiva ha una conseguenza. Ricaviamo \mathcal{L} in funzione di H energia meccanica, e sostituiamo nel funzionale di azione riscrivendo il principio di minima azione. Ricordiamo che siamo nello spazio in cui le traiettorie devono stare su una superficie a energia costante $H = E \Rightarrow$ la variazione di H è nulla.

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} dt = 0 \quad \text{caratterizza le soluzioni fisiche. Ora,}$$

$$\mathcal{L} = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - H \Rightarrow$$

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} \left(\dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - H \right) dt = \delta \int_{t_A}^{t_B} \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} dt - \delta [E(t_B - t_A)] = \delta \underbrace{\int_{t_A}^{t_B} \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} dt}_{\text{azione ridotta}}$$

Aver ristretto il dominio del funzionale consente di concludere che possiamo fare equivalentemente la variazione della lagrangiana o dell'azione ridotta. Nel nuovo dominio, riformulazione del principio variazionale: sulla traiettoria fisica la variazione è nulla rispetto a tutte le traiettorie che uniscono 2 punti fissati - anche l'intervallo di integrazione è fissato - che stanno in una superficie ad $H = E$ costante:

$$\boxed{\delta \int_{t_A}^{t_B} \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} dt = 0} \quad (10.5)$$

caratterizza le traiettorie fisiche.

Consideriamo un sistema meccanico: T è una forma quadratica costruita sulla matrice metrica G (con dimensioni di massa). Per un potenziale generalizzato non cambierebbe nulla perché non entra nella definizione di E .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{q} G \dot{q} - V(q) \Rightarrow H = \frac{1}{2} \dot{q} G \dot{q} + V(q)$$

$$\dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} G \dot{q} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \quad \text{con } ds^2 = dq G dq \text{ differenziale di lunghezza (della metrica associata a } T\text{)}$$

Potendo associare T a una metrica nello spazio delle configurazioni, $\dot{q} G \dot{q}$ è sostanzialmente una v^2 ($m = 1$). Dall'energia, che si conserva quindi $H = E$, ricaviamo ora ds/dt , ricordando che $ds/dt = \sqrt{\dot{q} G \dot{q}}$:

$$\dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} dt = \left(\frac{ds}{dt} \right) ds = \sqrt{2(E - V(q))} ds \quad (10.6)$$

Consideriamo il nuovo principio

$$\boxed{\delta \int_{q_A}^{q_B} \sqrt{2(E - V(q))} ds = 0 \quad \text{su tutte le possibili traiettorie } \gamma : A \rightarrow B \quad E \text{ è un numero dato}} \quad (10.7)$$

definisce la traiettoria

Non possiamo avere E sotto V se no il moto non è fisico (quindi la radice esiste reale).

Nota: Nel nuovo principio è sparito il tempo, importa che connettiamo 2 punti nello spazio delle configurazioni, usando un parametro arbitrario. Il tempo torna dopo nell'imporre la conservazione dell'energia. Il nuovo funzionale quando ha variazione nulla seleziona la traiettoria del moto fisico purché stia su una superficie a H costante.

Se il potenziale non c'è, $v^2 = 2E$. Togliamo dal principio variazionale il vincolo di stare su una superficie H costante, e troviamo la curva che minimizza il funzionale - che è la geodesica essendo ds il differenziale di lunghezza. Essendo libera la scelta del parametro (il principio caratterizza la curva ma non il parametro), lo scegliamo in modo che la curva sia percorsa a velocità costante. Se non c'è il potenziale, nello spazio delle fasi la curva starà automaticamente su $H = E$ costante. Non abbiamo cambiato la curva ma solo la sua parametrizzazione. Riassumendo, possiamo pensare il principio variazionale senza pensare il vincolo, troviamo la curva che soddisfi il

principio, poi la parametrizziamo in modo da soddisfare il vincolo: questa è la traiettoria fisica. Se rinunciamo a stabilire come viene percorsa la traiettoria (chi è il parametro), usiamo il principio di Maupertuis per trovare l'orbita geometrica. E l'informazione come è percorsa si ottiene scegliendo un parametro che soddisfi il vincolo di stare su una superficie a E costante

Se c'è un potenziale, definiamo una nuova metrica $d\sigma$, deformata rispetto a quella iniziale ds , attraverso un fattore che contiene il potenziale. Il principio nella nuova metrica definisce la geodesica che connette A e B in maniera geometrica (non dinamica). Individuata la curva, scegliamo il parametro t.c. $T + V = E$ costante. Reso estremale l'integrale del principio dell'azione ridotta, abbiamo trovato la traiettoria:

Dato che la scelta del parametro è libera, la curva estremale γ può essere parametrizzata con t tale che

$$\left| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right| = 2(E - V(q)) \Rightarrow \gamma(t) \in \text{al dominio in cui definiamo il principio di Maupertuis}$$

$\Rightarrow \gamma(t)$ è la traiettoria fisica.

Definiamo la nuova metrica

$$d\sigma = \sqrt{2(E - V(q))} ds$$

\Rightarrow il principio variazionale

$$\delta \int_A^B d\sigma = 0 \quad (10.8)$$

definisce la curva "fisica" come ci assicura il principio dell'azione ridotta

Quindi il procedimento è: data l'energia costruiamo il principio con la metrica G deformata. Troviamo le soluzioni che siano geodesiche rispetto alla metrica deformata per il potenziale. Queste soluzioni sono curve nello spazio delle configurazioni. Quindi scegliamo t che soddisfi la condizione di rimanere su una superficie $H = E$ (la scelta del valore di E deve essere tale che sia possibile per la presenza del potenziale). Possiamo sempre scegliere t che soddisfi. Il parametro scelto è proporzionale al tempo fisico. Ricordiamo E e il tempo sono accoppiati: scalando E scaliamo t. E' la scelta del parametro t che soddisfi il vincolo a dirsi come vengono percorse le orbite.

Si dimostra che se realizzassimo il vincolo attraverso un potenziale che costringe la traiettoria a stare sul vincolo, il principio di Maupertuis darebbe \mathcal{L} in un sistema vincolato partendo da \mathcal{L} in un sistema libero. Ritroviamo la formulazione lagrangiana per i sistemi vincolati. Ma i vincoli sono già inseriti a monte nel principio lagrangiano di minima azione: consideriamo i sistemi vincolati come sistemi che vivono in spazi non piatti che generano forze (vincolari) per effetto della curvatura. E' una cosa in più dimostrare, partendo dalla conservazione dell'energia, che la dinamica lagrangiana in un certo spazio si può rendere un principio puramente geometrico, basta modificare la metrica che non è più quella di T. Se non ci fosse V staremmo verificando (come visto ieri) che prendendo un sistema vincolato (i vincoli li abbiamo inseriti a priori nella lagrangiana congelando i dof vincolati e usando le variabili adattate al vincolo), le traiettorie sono le geodesiche di T, che è la metrica definita sul vincolo. Se c'è anche un potenziale esterno si fa un ragionamento analogo e lo si inserisce nella metrica. E' importante che abbiamo tolto il tempo, togliendo l'energia: principio ridotto a puramente geometrico.

Il principio di Maupertuis stabilisce una corrispondenza tra il principio geometrico che discende dalla funzione H e dalla metrica associata a T, e un principio dinamico (minima azione/azione ridotta) in cui il tempo è esplicito.

Nota: L'energia che inseriamo nella metrica è una COSTANTE!! L'energia come integrale del moto si ritrova dopo perché si ridefinisce il parametro in modo che sia così.

10.3.1 Problema di Keplero

Mettiamoci sul piano del moto- coordinate polari. Definiamo ds che inseriremo nel principio di Maupertuis, dall'energia cinetica (si toglie il fattore 2):

$$\mathcal{L} = \frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{k}{r} \quad ds^2 = m(dr^2 + r^2d\theta^2)$$

dove abbiamo scelto θ per parametrizzare le curve. Studiamo il problema geometrico, di geodesica, non fisico: curve che rendono estremale il funzionale.

$$d\sigma = \sqrt{2\left(E + \frac{k}{r}\right)} \sqrt{m(dr^2 + r^2 d\theta^2)} = \sqrt{2\left(E + \frac{k}{r}\right)} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 d\theta}$$

$$\delta \int_A^B d\sigma = \delta \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{2\left(E + \frac{k}{r}\right) \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]} d\theta = 0 \quad \text{sia } m = 1 \text{ per semplicità}$$

L'angolo è il parametro che descrive gli estremi. Uguagliamo a 0 l'integrale per variazioni delle traiettorie a estremi fissati.

Il funzionale dipende da r , $dr/d\theta$ ma non da θ . Considerando l'integrando come una lagrangiana, associamogli una energia (A) secondo la definizione (dove θ prende il posto del tempo): calcoliamo ora l'integrale del moto

$$A = \sqrt{\frac{2\left(E + \frac{k}{r}\right)}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \sqrt{2\left(E + \frac{k}{r}\right) \left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2(E + \frac{k}{r})}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}} r^2 \Rightarrow \frac{1}{A^2} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}{r^4 [2(E + \frac{k}{r})]}$$

Sia $u = \frac{1}{r}$, $\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2}{2(E + ku)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{k}{A^2} u = \frac{E}{A^2} \quad \text{equazione dell'orbita} \tag{10.9}$$

Ricordiamo che la variabile "giusta" è $u = 1/r$. Ritroviamo l'equazione dell'orbita, quando abbiamo sostituito nell'energia u e abbiamo usato $\theta \rightarrow$ problema di Keplero e si riconduce a un oscillatore armonico con una forzante dovuta al potenziale (che diventa lineare in u) = costante, che è un'energia riscalata (con il quadrato del momento della quantità di moto). Abbiamo verificato che se a \mathcal{L} del problema di Keplero applichiamo il procedimento Maupertuis (cioè studiare al posto della dinamica le geodesiche della nuova metrica), otteniamo la curva percorsa dal sistema nello spazio delle configurazioni (il piano): quadrica. Per sapere come è percorsa la curva, dobbiamo considerare la soluzione e trovare il parametro che le fa conservare l'energia associata alla lagrangiana (mentre prima per scrivere la curva dal punto di vista geometrico abbiamo scelto semplicemente un parametro comodo, θ). E è il valore fissato dell'energia, A è l'altro integrale primo che sappiamo essere il momento della quantità di moto. Non abbiamo mai fatto il calcolo esatto della percorrenza dell'orbita (integrali non esplicativi), ma c'è sul Landau.

Abbiamo quindi un'altra variabile ciclica, θ , dal principio variazionale, quindi un altro integrale primo A , che ricaviamo da Maupertuis usando appunto θ come parametro: è il momento associato a θ . L'altro integrale che prima era l'energia, adesso, avendo ridotto lo spazio togliendo tempo ed energia (che compare come costante nella metrica), viene fuori come un'altra energia, che è il momento associato al parametro scelto. E confrontando con l'equazione già vista osserviamo che A è il momento della quantità di moto

Curiosità:

- H integrale del moto dovuto alla simmetria rispetto al gruppo delle traslazioni temporali: avviene in meccanica relativistica
- A è l'integrale "energia" associata alla lagrangiana in cui non compare esplicitamente θ parametro (come il tempo). Non avrà il significato di energia meccanica ma si calcola analogamente $A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r \partial \theta} dr - \mathcal{L}$. Dai calcoli troviamo che corrisponde al momento della quantità di moto che è il momento associato a θ .

10.3.2 Particella relativistica

Metrica nello spazio-tempo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (10.10)$$

Meccanica relativistica è invariante rispetto alla nuova metrica nello spazio-tempo 4d. Il segno - significa che la metrica non è euclidea ma di tipo iperbolico. Se potessimo muoverci a velocità $> c$ sarebbe una distanza immaginaria. Quindi la metrica esprime l'assioma della relatività ristretta che possiamo muoverci al massimo a c . Le trasformazioni di Lorentz lasciano invariante la metrica

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} & \tanh \alpha &= \frac{V}{c} \\ && \sinh \alpha &= \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ && \cosh \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (10.11)$$

con $\frac{V}{c} \ll 1$ ritroviamo una trasformazione galileiana.

La metrica iperbolica è invariante per rotazioni iperboliche, cioè che usano le funzioni iperboliche nella matrice.

$$\begin{aligned} ct'^2 - x'^2 &= (\cosh \alpha ct + \sinh \alpha x)^2 - (\sinh \alpha ct + \cosh \alpha x)^2 = \\ &= \cosh^2 \alpha c^2 t^2 + \sinh^2 \alpha x^2 + 2 \cosh \alpha ct \sinh \alpha x - \sinh^2 \alpha c^2 t^2 - \cosh^2 \alpha x^2 - 2 \sinh \alpha ct \cosh \alpha x = ct^2 - x^2 \end{aligned}$$

Se la metrica è invariante, ci stiamo spostando tra sdr inerziali, che lasciano invariate le equazioni della fisica. Allora se facciamo la sostituzione e sviluppiamo per V/c piccolo al primo ordine significativo, ritroviamo che la rotazione iperbolica 10.11 è in realtà una trasformazione galileiana, che lascia invariate le equazioni della fisica. Teoria dei campi-Landau, pg 10.

Data una particella libera, qual è la sua lagrangiana? Dato un problema fisico, assumiamo che si possa sempre scrivere la lagrangiana.

$\mathcal{L}(v)$ deve essere uno scalare con dimensione $[E]$.

1. Per una particella libera deve dipendere dal modulo di v come in meccanica classica (isotropia, omogeneità dello spazio: non può dipendere da x non essendoci forze).
2. Deve essere uno scalare cioè invariante per trasformazioni con la metrica di Minkowski.
3. Deve avere una dimensione di energia: vogliamo che il funzionale di azione abbia dimensioni di $E \cdot t$; il tempo qui è coordinata e parametro insieme (come prima era θ).

$$\begin{aligned} \mathcal{L} dt &= -mc ds = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \\ v &= \frac{dx}{dt} \text{ se } \frac{v}{c} \ll 1 \\ \mathcal{L} &= -mc^2 + mc^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) + \dots \simeq \frac{1}{2} mv^2 \end{aligned} \quad (10.12)$$

($ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = c dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{1}{c^2}}$). Parametri che possono comparire in \mathcal{L} di una particella libera: velocità della luce che è intrinseca nella nostra meccanica, m è la massa a riposo della particella, e ds lunghezza d'arco della metrica di Minkowski. Facciamo il prodotto per le dimensioni giuste: è l'unico modo di combinare m , c , ds per avere le giuste dimensioni. Il segno - è perché a posteriori verifichiamo che ritroviamo la \mathcal{L} della particella classica quando $v/c \ll 1$. Espandiamo in serie di Taylor al primo ordine. Le \mathcal{L} sono note a meno di costanti.

Equazioni del moto per una particella libera

$$\frac{d}{dt} - \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{-v}{c^2} = \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad (10.13)$$

Le equazioni del moto della particella relativistica si possono quindi ottenere da considerazioni dimensionali, con le equazioni di Lagrange. Dire che il formalismo lagrangiano vale anche per la particella relativistica, che era "un

atto di fede" in effetti è vero.

Siccome \mathcal{L} non dipende dal parametro, associamo un'energia.

$$E = v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \mathcal{L} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{Equivalenza massa-energia} \quad (10.14)$$

con mc^2 = energia a riposo

In meccanica relativistica la costante dell'energia non è arbitraria, è fissata: energia a riposo, cioè quando v è nulla. Equivalenza massa-energia: è come un cambiamento di massa quando l'energia aumenta.

Ci fermiamo alla particella libera perché in relatività introdurre i campi di interazione è complicato: dovremmo imporre l'invarianza delle \mathcal{L} per metrica di Minkowski. Ad esempio costruire l'oscillatore armonico in relatività comporta modificare la metrica di Minkowski introducendo il fatto che una forza esterna agisce sul sistema secondo il principio di Maupertuis.

Curiosità:

- Nella metrica possiamo inserire qualsiasi potenziale. Il potenziale deforma la metrica dello spazio.
- Storicamente si è cercata la forma dell'equazione di Newton covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Abbiamo visto il modo equivalente con l'approccio lagrangiano.
- Possiamo anche viceversa partire da una metrica e tornare a quella euclidea aggiungendo un potenziale? NO. Un conto è deformare la metrica, un conto è cambiare la segnatura della metrica, che non si può fare: metrica di Minkowski ha segnatura -, metrica Euclidea ha segnatura +, si dovrebbe passare per una metrica singolare, che non possiamo ammettere.

11 Formulazione hamiltoniana

E' il più potente formalismo della meccanica classica. Biforcazione tra la meccanica classica e la fisica che è andata verso la formulazione quantistica; lo studio di queste tecniche è rimasto nella matematica.

Data $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ definiamo i momenti: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = p_k$

Sono quantità associate alle coordinate; dipendono dal sistema stesso perché si usa la lagrangiana per definirli, quindi non c'è corrispondenza univoca tra coordinate e momenti.

\dot{q}_k componenti controvarianti (componenti generalizzate della velocità nella base che costruiamo con le coordinate), mentre i momenti p_k sono componenti covarianti. $\Rightarrow \sum_k \dot{q}_k p_k = \text{scalare}$

Una sommatoria di componente covariante · controvariante dà uno scalare, qualunque sia la metrica. Altrimenti per sole componenti co/ controvarianti entrerebbe in gioco la metrica.

Dalle equazioni di Lagrange

$$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

Nei sistemi meccanici la trasformazione che lega i momenti alle velocità generalizzate

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = p_k$$

è invertibile²⁶: $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q, p, t)$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} = G_{kh} \quad G_{kh} \text{ invertibile se } \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{q} G \dot{q} - V(q)$$

Nei sistemi meccanici siccome \mathcal{L} contiene T , e T entra in gioco nella definizione dei momenti, la relazione che lega i momenti alle velocità generalizzate è invertibile localmente: possiamo esplicitare \dot{q}_k in funzione di variabili, momenti

²⁶Teorema di invertibilità locale

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \mapsto \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ e $f \in C^1(A)$. Se $\det Jf(x_0) \neq 0$, allora esiste un intorno aperto U di x_0 , $U \subset A$ t.c. f è un diffeomorfismo su U cioè

1. $f(U)$ aperto
2. $f|_U$ è invertibile
3. Se $g = (f|_U)^{-1}: f(U) \mapsto U$, allora $g \in C^1$ e $dg(y) = [df(g(y))]^{-1} \forall y \in f(U)$

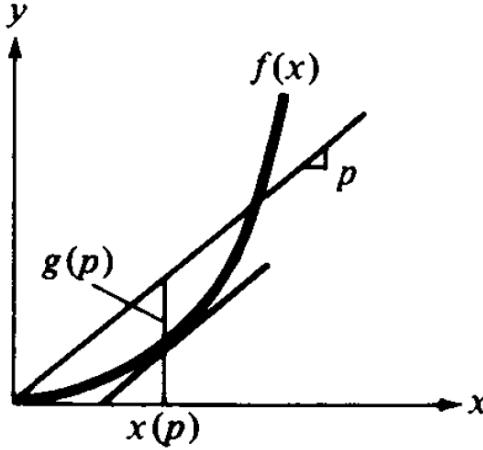


Figura 11.1: Trasformata di Legendre $g(p)$ di una funzione $f(x)$ (a una variabile)

e tempo. La relazione è un sistema di n equazioni ($k = 1, \dots, n$). Siccome $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} = G_{kh}$, ed essendo T rappresentata da una matrice simmetrica definita positiva e quindi invertibile, applichiamo il teorema di invertibilità locale che ci consente di invertire localmente la relazione.

Definizione 11.1. Trasformazione di Legendre²⁷

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) &\mapsto H(q, p, t) \quad \text{con} \\ H &= \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L} \quad \dot{q}_k = \dot{q}_k(q, p, t) \end{aligned}} \quad (11.1)$$

E' una trasformazione molto usata in fisica, ad esempio consente di calcolare i potenziali termodinamici. Definiti i momenti p , definiamo H come funzione di q, p, t (mentre la funzione iniziale \mathcal{L} dipendeva da q, \dot{q}, t), grazie al fatto di poter esplicitare \dot{q} . Facendo una trasformazione di Legendre rispetto a \dot{q} , queste spariscono e sono sostituite dai momenti. H nella trasformata di Legendre di \mathcal{L} diventa l'energia: questo è un regalo perché abbiamo definito l'energia in modo indipendente come integrale primo del moto se \mathcal{L} non dipende dal tempo. Qui invece la dipendenza dal tempo non ha importanza. La trasformata è un'operazione fattibile quando la derivata seconda ha $\det \neq 0$. La dinamica hamiltoniana nasce da una trasformazione di Legendre, definisce la funzione: hamiltoniana, che fisicamente è l'energia. Viene generata dalla dinamica di Lagrange ma diventa più generale. Vedremo che aver tolto \dot{q} e sostituite con p ha un significato fisico profondo!

Togliamo la dipendenza tra coordinate e velocità, perché sostituiamo queste con il momento. L'hamiltoniana mette in evidenza che un sistema a n d.o.f ha $2n$ variabili indipendenti, che sono coordinate e momenti. Non c'è più distinzione netta tra coordinate e momenti: si possono mischiare facendo quindi trasformazioni più generali: simmetria intrinseca nelle equazioni della dinamica hamiltoniana. Una lagrangiana di un sistema a n d.o.f avrebbe anch'essa $2n$ variabili indipendenti, ma divise in n coordinate, e n velocità, che una volta risolte le equazioni del moto sono le derivate delle coordinate.

In sintesi, la formulazione hamiltoniana è basata sull'idea di introdurre i momenti, ed esprimere v in funzione delle coordinate e dei momenti. La matrice delle derivate seconde della \mathcal{L} è riconducibile alla matrice metrica legata a T , che è simmetrica e definita positiva \Rightarrow per i sistemi meccanici l'inversione è localmente possibile.

L'hamiltoniana è il risultato della trasformata di Legendre, e per coincidenza coincide con l'energia integrale primo

²⁷Arnold- Sia $y = f(x)$ una funzione convessa, $f''(x) > 0$.

Arnold; Turchetti- La trasformata di Legendre di f è una funzione g di una nuova variabile p , costruita nel modo seguente. Disegniamo il grafico di f nel piano x,y . Sia p un numero dato; consideriamo la retta per l'origine $y = px$. Prendiamo il punto $x = x(p)$ in cui la curva ha la massima distanza verticale dalla retta: $\forall p$ la funzione $px - f(x) = F(p, x)$ ha un massimo rispetto a x nel punto $x(p)$ (o equivalentemente, se la funzione è sopra la retta, $f(x) - px$ ha un minimo in $x(p)$). Definiamo $g(p) = F(p, x(p))$.

Il punto $x(p)$ è definito dalla condizione di estremalità $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ cioè $f'(x) = p$. Essendo f convessa, se $x(p)$ esiste allora è unico.

Es: Se $f(\dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2}$ (dove \dot{q} prende il posto di x), allora $g(p) = \frac{p^2}{2m}$

Estensioni multidimensionali. Se $f(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ è convessa (il grafico è al di sopra del piano tangente in ogni punto cioè $f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x}) - (\mathbf{t} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x}) > 0$, e quindi la matrice hessiana è definita positiva) la trasformata di Legendre, definita da $g(\mathbf{p}) = \max_t (\mathbf{t} \cdot \mathbf{p} - f(\mathbf{t}))$, risulta uguale a $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - f(\mathbf{x})$ dove $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

del moto delle equazioni di Lagrange. H non è funzione delle coordinate e velocità ma delle coordinate e dei momenti; hanno però lo stesso significato fisico, e si usa la stessa lettera per indicarla.

Nota: Per calcolare l'hamiltoniana, si devono calcolare i momenti associati alle velocità da \mathcal{L} , invertire la relazione per scrivere v in funzione di q e p . Poi bisogna calcolare l'energia. Infine, sostituire l'espressione di \dot{q} in funzione di coordinate e momenti. Se ci fermiamo prima e non sostituiamo, abbiamo solo l'integrale del moto energia e NON L'HAMILTONIANA!

11.1 Equazioni canoniche

H come \mathcal{L} non dipende dal cambio di coordinate (riscrittura della funzione nelle nuove coordinate). $p_k \dot{q}_k$ è uno scalare qualunque sia la scelta del sistema di coordinate perché prodotto di componenti covarianti e controvarianti. Vogliamo adesso scrivere le equazioni del moto usando l'hamiltoniana. Presa la definizione di H , calcoliamone il differenziale dall'espressione. Forme differenziali: Arnold (formale) oppure Walter Rudin- Principi di analisi matematica. Usiamo la notazione di Einstein.

$$dH = p_k dq_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\dot{p}_k}{\partial \mathcal{L}} dq_k - \frac{p_k}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Essendo H funzione di q, p, t

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \\ &\equiv \dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

\dot{p}_k viene dalle equazioni di Lagrange.

$$\begin{cases} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \quad \text{equazioni canoniche o di Hamilton}$$

(11.2)

$$\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{(q,p)} = -\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right|_{(q,\dot{q})}$$

(11.3)

H ha il significato di energia meccanica ma NON è solo un integrale primo del moto

Da n equazioni al secondo ordine, abbiamo adesso $2n$ equazioni al primo ordine (meglio per questioni di unicità della soluzione). Ecco perché abbiamo sempre usato nello spazio delle fasi q e p (non q e v). Spazio delle coordinate: varietà legate allo spazio delle configurazioni. Spazio dei momenti: spazio duale dello spazio tangente detto cotangente, struttura diversa dal sistema lagrangiano. Spazio in cui vivono le equazioni canoniche di Hamilton. C'è una simmetria nelle equazioni canoniche; a meno di un segno meno (la posizione del segno nell'una o nell'altra è convenzione). Inversione temporale è cambio di segno di H : H è il momento generalizzato associato al tempo, quindi cambiando il segno del tempo, cambia segno di H , ma le equazioni restano inalterate.

Nell'Eq. 11.3 teniamo costante q e p per H , essendo H funzione di q e p , mentre per \mathcal{L} teniamo costanti (q, \dot{q}) : NON è la stessa cosa!! Normalmente sottintendiamo che teniamo costanti tutte le variabili rispetto a cui non stiamo derivando. ATTENZIONE! La derivata dell'energia tenendo costanti q e \dot{q} NON è uguale alla derivata di H tenendo costanti q e p . Abbiamo già visto che in presenza di potenziali generalizzati l'energia potrebbe non dipendere dal tempo mentre \mathcal{L} dipende dal tempo. Passati al formalismo hamiltoniano invece l'energia scritta introducendo i momenti non sarebbe più indipendente dal tempo, mentre se \mathcal{L} non dipende dal tempo otteniamo che l'hamiltoniana è integrale primo del moto. Qui sì che se H non dipende dal tempo, è un integrale primo del moto! L'energia NON ci consente di ricostruire le equazioni del moto, mentre l'hamiltoniana tramite le equazioni canoniche di Hamilton ci consente di ricostruire le equazioni del moto e costruire nuovamente la meccanica.

11.2 Principio variazionale e forma differenziale fondamentale

Principio variazionale

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = 0 \\ q(t_A) = q_A, q(t_B) = q_B \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \mathcal{L} = 0 \\ \mathcal{L} = p\dot{q} - H \\ \delta \int_{t_A}^{t_B} (p\dot{q} - H) dt = 0 \\ q(t_A) = q_A, q(t_B) = q_B \rightarrow ? \\ p(t) \rightarrow \text{nessuna condizione} \end{aligned}$$

Nota: il dominio è diverso!

Attenzione: \dot{q} è la derivata temporale di q , quindi \dot{q} si trova da q . Mentre adesso p e q sono indipendenti, il funzionale non ha più condizione su p . Cioè il passaggio dalla formulazione del principio variazionale nel formalismo lagrangiano a hamiltoniano, è un'estensione non banale. Curve definite nello spazio delle FASI (prima delle configurazioni) che tengono fissi solo gli estremi delle COORDINATE, mentre i momenti sono liberi. I domini sono diversi!! Otterremo ancora le equazioni del moto, in questo caso le equazioni canoniche? Se la risposta fosse no, dovremmo rimettere le condizioni su p : farebbe perdere l'indipendenza e la simmetria. Controlliamo

$$\begin{aligned} q &\rightarrow q + \delta q & \delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0 \\ p &\rightarrow p + \delta p & \\ \delta \int_{t_A}^{t_B} (p\dot{q} - H) dt &= \int_{t_A}^{t_B} [\dot{q}\delta p + p\delta\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p] dt \end{aligned}$$

Integriamo per parti

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} p\delta\dot{q} dt &= p\delta q|_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} \dot{p}\delta q dt \\ \delta \int_{t_A}^{t_B} (p\dot{q} - H) dt &= \int_{t_A}^{t_B} \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q dt = 0 \end{aligned}$$

Il tempo è il parametro privilegiato associato all'energia, che fa parametrizzazione delle curve come ci aspettiamo in dinamica. Qualunque siano le variazioni di p e q , dobbiamo trovare le condizioni su p e q perché l'integrale sia nullo. Integriamo per parti. Come già visto per il principio di minima azione, le funzioni δp e δq , arbitrarie, indipendenti fanno sì che per annullare l'integrale, si debba annullare la funzione. Ritroviamo le equazioni canoniche. Abbiamo riformulato la meccanica lagrangiana in maniera più potente, ma abbiamo portato dietro proprietà: anche le equazioni di Hamilton derivano da un (nuovo) principio di minima azione. Funziona perché la condizione di trasformata di Legendre è una condizione di estremalità.

Dall'analisi, condizione necessaria e sufficiente è che sia

$$\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \quad \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

cioè che valgano le equazioni canoniche

$$\mathcal{F}[q, p] = \int_{t_A}^{t_B} (p\dot{q} - H) dt = \int_A^B pdq - Hdt \quad (11.4)$$

con A e B punti nello spazio delle configurazioni.

trasformata e antitrasformata potrebbero essere diverse per discontinuità locali. Ma per funzioni regolari la trasformata di Legendre di H ridà \mathcal{L} .

Introdotte le variabili azione-angolo. Nei sistemi lagrangiani non si può fare perché le variabili azione-angolo ad esempio nell'oscillatore armonico mischiano coordinate e momenti: nei sistemi hamiltoniani è concesso, in quelli lagrangiani no. La libertà data dal fatto che δp sono arbitrari è molto forte, mentre nei sistemi lagrangiani $\delta q = \frac{d}{dt} \delta q$. Adesso abbiamo n dimensioni in più (spazio delle fasi) per fare i cambi di variabili.

Non solo un nuovo principio in uno spazio più ampio, ma è di natura molto diversa perché è associato a una 1-forma differenziale nello spazio delle fasi esteso. Anche il tempo è una coordinata; stesso rapporto tra H e t che tra p e q . Non solo c'è simmetria tra coordinate e momenti che sono corrispondenti (a meno del segno -) nelle equazioni canoniche, ma vale l'analogico mettendo $-H$ come momento associato al tempo e non usando più t come parametro ma un'altra variabile (es: acceleratori- si usa la traiettoria dell'orbita di riferimento, non il tempo, per parametrizzare la dinamica delle particelle).

Forme differenziali hanno un modo di cambiare ben stabilito per cambio di variabili. La meccanica hamiltoniana già di sua natura è una meccanica geometrica (Arnold: si dimostra che usando la forma differenziale fondamentale, le soluzioni del moto si possono ricavare dalla sua struttura usando il concetto di linea di rotore). Il principio variazionale si può associare a una forma differenziale, per i sistemi lagrangiani no.

$pdq - Hdt$ è una 1-forma differenziale nello spazio (q,p,t) .

Il tempo t NON ha più un ruolo privilegiato.

Le equazioni canoniche hanno una struttura geometrica definita dalla 1-forma differenziale

$$\boxed{\omega = pdq - Hdt} \quad (11.5)$$

Geometria simplettica nello spazio delle fasi

Questo torna utile in meccanica relativistica, in cui il tempo non è solo un parametro ma anche una coordinata. Le equazioni canoniche hanno geometria intrinseca legata alla forma differenziale fondamentale: la geometria dello spazio delle fasi è detta simplettica (che chiarisce ad esempio perché c'è la conservazione delle aree // caratteristiche geometriche impongono vincoli alle traiettorie che sono all'origine di proprietà quali il caos).

Nell'equazioni di Jacobi si rappresentano le soluzioni come una sorta di flusso, come le onde, mentre finora abbiamo rappresentato soluzioni singole. Concetto alla base della natura simplettica della geometria: trasformazioni che conservano la struttura simplettica (geometria dello spazio delle fasi per sistemi hamiltoniani).

11.3 Trasformazioni canoniche, parentesi di Poisson, integrali primi

Trasformazioni canoniche

Una trasformazione canonica è un cambio di variabili nello spazio delle fasi tali che qualunque sistema hamiltoniano conserva le equazioni di Hamilton (H è sempre la stessa funzione). Un cambio di variabile nei sistemi lagrangiani era trasformazione da q a Q , mentre le trasformazioni canoniche non hanno più niente a che vedere con la distinzione tra p e q , possono anche essere mischiati, ma devono conservare la struttura.

$$(q,p) \in \text{spazio delle fasi}$$

$$T : (q,p) \mapsto (Q,P) \text{ cambio di variabili}$$

Definizione 11.2. $T(q,p)$ è una trasformazione canonica se $\forall H(q,p)$ il sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} & \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} & \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} \end{aligned} \quad H(q,p) = H(Q,P) \quad (11.6)$$

Parentesi di Poisson

Quali sono le condizioni per controllare la canonicità delle trasformazioni? Si introduce il concetto di parentesi di Poisson, un operatore che agisce su coppie di funzioni regolari nello spazio delle fasi. Prodotto pseudoscalare tra i gradienti delle funzioni F e G .

Siano $F(q,p)$, $G(q,p)$ funzioni regolari nello spazio delle fasi.

Definizione 11.3. Parentesi di Poisson

$$\{F,G\} = \sum_k^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \quad (11.7)$$

- operatore bilineare e antisimmetrico

- derivazione $\{F, GH\} = H \{F, G\} + G \{F, H\}$

I gradienti sono vettori covarianti (non come le v , ma come i p), spazio cotangente nello spazio delle fasi. Bilinearità: $\{F_1 + F_2, G\} = \{F_1, G\} + \{F_2, G\}$ (Arnold, Turchetti). Antisimmetria (tipo prodotto vettoriale). Applicato al prodotto di 2 funzioni, agisce come farebbe una derivata. È legato al calcolo dei gradienti, è una derivazione.

Ci sono parentesi di Poisson fondamentali. Se conosciamo come l'operatore agisce su una "base" troviamo il resto come combinazione lineare.

$$\{q_j, p_k\} = \delta_{jk} \quad \{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0$$

Il termine non nullo è solo quando p_k e q_k coincidono. Coordinata e il suo momento associato: otteniamo 1, se no otteniamo sempre 0.

- Identità di Jacobi

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad (11.8)$$

E' una proprietà algebrica ma non è semplice dimostrarla. Semplice ricordarla perché basta ciclare le funzioni.

Parentesi di Poisson ed equazioni canoniche Le parentesi di Poisson sono imparentate con le equazioni di Hamilton e ne mettono in luce la struttura geometrica.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{q_j, H\}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{p_j, H\}$$

sono casi particolari di

$$\frac{d}{dt} F(q, p) = \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k = \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = \{F, H\}$$

ovvero

$$\{F, H\} = 0 \Rightarrow F \text{ è un integrale primo del moto per il sistema hamiltoniano } H$$

(11.9)

Ma è vero anche il viceversa: H è integrale per il sistema F .

Senza sapere la definizione delle parentesi ma solo con le proprietà algebriche, costruiamo la dinamica delle equazioni di Hamilton, come dinamica nello spazio delle fasi con la struttura senza nemmeno sapere cos'è la meccanica hamiltoniana. Formulazione astratta, geometrica - geometria simplettica basata sul prodotto "antiscalare" tra gradienti, così come quella euclidea è basata sul prodotto scalare.

F funzione osservabile nello spazio delle fasi. La parentesi di Poisson consente di calcolare in modo automatico la derivata temporale di un osservabile nello spazio delle fasi rispetto al flusso di fase cioè le soluzioni delle equazioni canoniche legate a H . La parentesi di Poisson dà la struttura delle equazioni canoniche per qualunque osservabile; le equazioni per q e p sono casi particolari delle equazioni di evoluzione che si possono costruire. Se F e H hanno parentesi nulla, F è un integrale primo del moto per il sistema hamiltoniano H . La ricerca degli integrali primi nei sistemi hamiltoniani può passare attraverso la ricerca degli osservabili che abbiano parentesi con H nulla. Scelto un sistema a caso, è praticamente nulla la probabilità di trovare altri integrali primi del moto, dimostrazione di Poincaré: dato un H probabilità di una soluzione regolare è praticamente nulla.

VALE IL VICEVERSA: SIMMETRIA! Proprietà che mette in correlazione più sistemi.

Invarianza delle parentesi di Poisson per trasformazioni canoniche Vediamo ora che una trasformazione canonica fa sì che le parentesi di Poisson delle stesse funzioni calcolate rispetto a p, q e rispetto a P, Q siano uguali. La definizione di parentesi di Poisson devono quindi essere invariante per cambio di variabili PER UNA TRASFORMAZIONE CANONICA.

Se $T : (q, p) \mapsto (Q, P)$ è canonica allora

$$\begin{aligned} \dot{Q}_j &= \{Q_j, H\}_{(Q, P)} = \{Q_j(q, p), H(q, p)\}_{(q, p)} \\ \dot{P}_j &= \{P_j, H\}_{(Q, P)} = \{P_j(q, p), H(q, p)\}_{(q, p)} \end{aligned}$$

equazioni canoniche - proprietà parentesi di Poisson

Vale che se $T : (q, p) \mapsto (Q, P)$ è canonica allora $\forall F, G$ definite nello spazio delle fasi

$$\{F, G\}_{(q, p)} = \{F, G\}_{(Q, P)} \quad (11.10)$$

Parentesi di Poisson e conservazione delle aree Geometria- conservazione della misura: $\det J = 1$ Qui dobbiamo conservare anche l'algebra delle parentesi di Poisson.

ex Caso $(q, p) \in \mathbb{R}^2 \quad T : (q, p) \mapsto (Q, P)$

$$\{Q, P\}_{(q, p)} = \{Q, P\}_{(Q, P)} = 1$$

La trasformazione dà 1: è una parentesi fondamentale.

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \det \delta T = 1$$

Una trasformazione canonica del piano è una trasformazione con $\det J = 1$ cioè conserva le aree con segno. Attenzione che il criterio di canonicità in dimensioni maggiori (sempre pari perché abbiamo coppie p,q) ha altre proprietà che la conservazione del volume.

Parentesi di Poisson e integrali primi Ex. Siano $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$, $L_z = xp_y - yp_x$ le componenti del momento della quantità di moto. Dimostrare che vale

$$\{L_x, L_y\} = L_z \quad (11.11)$$

x, y, z, p_x, p_y, p_z : 3dof, 6 dim spazio delle fasi. Inseriamo nella definizione di parentesi di Poisson, o più semplicemente usiamo le parentesi fondamentali (che consentono di calcolare qualunque parentesi):

$$\begin{aligned} \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} &= \{yp_z, zp_x\} + \{zp_y, xp_z\} = \\ &= yp_x \{p_z, z\} + xp_y \{z, p_z\} = xp_y - yp_x = L_z \end{aligned}$$

Nota: possiamo ciclare gli indici (x, y, z) .

I termini non riportati sono nulli: dobbiamo avere coppie di momenti e coordinate associate. Usiamo la proprietà di derivazione. Ciclando gli indici (cioè cambiando il nome degli assi) l'uguaglianza resta vera: simmetria ciclica legata al fatto che è una convenzione l'ordine degli assi è arbitrario, l'importante è che il sistema sia destrorso, perché il prodotto vettore da cui si calcola \vec{L} distingue tra levogiro e destrogiro.

Corollario 11.1. Se L_x e L_y sono integrali primi per un sistema hamiltoniano $H(q, p) \Rightarrow$ anche L_z è integrale primo

Dim. Identità di Jacobi con $\{L_x, L_y\} = L_z$:

$$\{H, L_z\} = \{H, \{L_x, L_y\}\} = -\{L_x, \{L_y, H\}\} - \{L_y, \{H, L_x\}\} = 0$$

Essendo L_x e L_y integrali primi del moto, la loro parentesi con un sistema hamiltoniano H scelto è nulla \Rightarrow otteniamo il che la parentesi di H e L_z è nulla. Ci ricorda il teorema di Nother che abbiamo fatto per i gruppi 1d con proprietà di flusso di fase. L_x e L_y sono gli integrali primi legati al gruppo delle rotazioni (trottola, problema di Keplero, corpo rigido): se c'è simmetria di rotazione, l'integrale primo del moto fornito dal teorema di Nother è la proiezione di \vec{L} lungo l'asse di rotazione. Per sistemi come il pendolo sferico che hanno tutte le possibili simmetrie di rotazione, si conserva il vettore L dato che si conserva la proiezione attorno a un qualunque asse. Gruppo con 3 dof ma non riusciamo a trovare 3 integrali primi del moto, mentre funziona per 1d. Qui capiamo: se si conservano 2 componenti di \vec{L} cioè simmetria di rotazione rispetto a 2 asse ortogonali, allora c'è simmetria anche rispetto al terzo asse cioè si conserva anche $L_z \Rightarrow$ si conserva tutto \vec{L} : simmetria rispetto a tutti gli assi. Cioè i 3 integrali primi non possono essere usati tutti insieme perché noti 2 sappiamo il terzo; viene dalle proprietà del sistema stesso legate alla geometria simplettica. Gruppo di simmetria non commutativo (a differenza di quanto richiesto per i gruppi 1d) non produce integrali del moto tutti utilizzabili insieme (anche se sono indipendenti). Quando abbiamo simmetria

di rotazione NON è come avere 3 gruppi di simmetria abeliani dello stesso sistema.

Ex. Dimostrare senza fare conti che vale

$$\{L^2, L_x\} = 0 \quad (11.12)$$

L^2 integrale primo di L_x hamiltoniano e viceversa. Basta usare la proprietà di derivazione delle parentesi di Poisson. Le parentesi di Poisson sono riportate in meccanica quantistica: commutatori tra operatori- legame con il principio di indeterminazione. Possiamo misurare con precisione arbitraria solo osservabili il cui commutatore è 0, cioè corrispondenti a osservabili classici con parentesi nulla. Quindi ad esempio L^2 e L_{x_i} , $i = 1, 2, 3$ possono essere misurate con precisione arbitraria insieme (anche se h tagliato non è 0 ma è finito), invece L_x, L_y no, e nemmeno q_k con il corrispondente p_k perché la parentesi è non nulla. Per analogia legame meccanica hamiltoniana- principio di indeterminazione della meccanica quantistica.

Curiosità:

- In fisica un osservabile è una qualunque funzione che si può misurare (in matematica invece sono le funzioni C^∞) Le funzioni non misurabili secondo Lebesgue non sono osservabili.
- In generale la struttura geometrica del gruppo è esplicitata dalla struttura algebrica dello spazio tangente all'identità; questo determina il numero di integrali primi "buoni" nelle simmetrie. Nel caso di simmetria S_03 , avendo una sola relazione che dà la struttura algebrica, dei 3 dof restano 2 integrali primi "buoni" che sono L^2 e L_{x_i} .

Ex.

$$\begin{aligned} \{L^2, L_X\} &= \{L_y^2, L_x\} + \{L_z^2, L_x\} = \\ &= 2L_y\{L_y, L_x\} + 2L_z\{L_z, L_x\} = \\ &= -2L_yL_z + 2L_zL_y = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo visto che da $\{L_x, L_y\} = L_z$ e dall'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson, discende che se un sistema conserva 2 componenti ortogonali di \vec{L} (2 dei generatori dello spazio delle rotazioni) conserva anche la terza. Un altro integrale primo che possiamo costruire se si conserva \vec{L} è il suo modulo quadro. Usando le proprietà algebriche delle parentesi, verifichiamo l'Eq. 11.12. Cercare integrali primi che abbiano parentesi nulla permette in meccanica classica di costruire variabili in cui il sistema si semplifica molto. In meccanica quantistica sono le quantità osservabili contemporaneamente per principio di indeterminazione. Candidati sono E , L^2 , L_i (E deve avere parentesi nulla con entrambi).

$\{L_x^2, L_x\} = 0$: la parentesi di una funzione con se stessa o con una funzione di se stessa è nulla : operatore antisimmetrico e di derivazione - vedi derivazione composta - da cui i termini non nulli.

Usiamo la derivazione composta

Usiamo la "ciclicità" vista con le componenti di L .

Vediamo che spesso non serve calcolare esplicitamente la parentesi con la definizione. Parentesi: oggetto intrinseco il cui valore è indipendente dalla variabile, purché la trasformazione sia canonica cioè conservi la struttura delle equazioni canoniche: in tal caso possiamo anche non indicare rispetto a quali variabili la stiamo facendo.

11.3.1 Teorema di Noether per sistemi hamiltoniani

Nota: la reciprocità della relazione $\{F, H\} = 0$ con $F(q, p)$ e $H(q, p)$ ha il significato $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} = 0$
 \Rightarrow Se $\Phi_H^t(q, p)$ è il flusso di fase del sistema H

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad F(\Phi_H^t(q, p)) = F(q, p)$$

Analogamente se $\Phi_F^s(q, p)$ è il flusso di fase del sistema hamiltoniano $F(q, p)$

$$\Rightarrow H(\Phi_F^s(q, p)) = H(q, p)$$

Ne segue:

1. $\Phi_H^t(q, p)$ è una simmetria per $F(q, p)$ e viceversa
2. $\Phi_H^t \circ \Phi_F^s = \Phi_F^s \circ \Phi_H^t$

Abbiamo visto che a $\{F, H\}$ associamo il significato di derivata temporale della funzione F definita nello spazio delle fasi, calcolata lungo le traiettorie generate da H come sistema hamiltoniano, cioè lungo le traiettorie del moto. Se la parentesi è nulla, F è integrale del moto lungo il flusso di fase di H (che date le c.i. q, p definisce l'evoluzione al tempo t). Cioè per definizione di integrale primo F calcolato nel flusso di fase associato a H al tempo t è uguale a $F(p, q)$ con p, q c.i.: le soluzioni del moto stanno su superfici che rendono costante F . L'esistenza di un integrale primo nello spazio delle fasi ha un significato geometrico: $F = \text{costante}$ (che dipende solo dalle c.i.) definisce una ipersuperficie nello spazio delle fasi su cui devono stare le soluzioni del moto. Ad esempio se un sistema mantiene H costante, le soluzioni del moto stanno sulle curve a H costante (linee se siamo in 1D \Rightarrow possiamo integrare completamente il sistema; se sono 2D, 3D non possiamo integrare ma dire che la superficie resta invariata - fondamentale in meccanica statistica).

Consideriamo ora la reciprocità della relazione: prendiamo F come hamiltoniano e costruiamo il flusso di fase associato alle soluzioni del sistema canonico (con F sistema hamiltoniano). Allora il flusso di fase sta sulle superfici H costante. Allora H integrale primo del moto. Se calcoliamo H nell'evoluzione secondo F di un punto (q, p) , resta costante: il flusso di fase sta sulle superfici ad H costante.

Dualità, commistione tra chi genera la dinamica e chi è integrale primo: F integrale primo e le curve che integrano le equazioni di Hamilton per H stanno sulla superficie $F = \text{costante}$, e viceversa scambiando F ed H . Se in un sistema si conserva L_x , le soluzioni del sistema stanno sulle curve di livello su cui L_x costante; inoltre se risolviamo le equazioni del moto con L_x hamiltoniano, che sono le rotazioni attorno all'asse x , queste stanno sulle superfici a energia costante dell'altra hamiltoniana. Conseguenza delle simmetrie delle equazioni canoniche.

$\Phi_F^s(q, p)$ è un gruppo di simmetria nello spazio delle fasi, di trasformazioni generate da un sistema di soluzioni dell'hamiltoniana F .

Se H è invariante per l'applicazione del gruppo di simmetria $\Phi_F^s(q, p)$, allora allora dalla reciprocità della relazione $\{F, H\} = 0$, segue che F è integrale primo del moto per le soluzioni generate dall'hamiltoniano H : riformulazione del teorema di Noether per sistemi hamiltoniani.

Il generatore F del gruppo di simmetria rispetto a cui H è invariante è l'integrale primo del moto per il flusso di fase associato ad H .

Inoltre abbiamo una proprietà (anche se non la usiamo) che consente di costruire sistemi di coordinate che semplifichino i sistemi che studiamo: quando la parentesi è nulla, i gruppi costruiti risolvendo le equazioni del moto - cioè i flussi di fase associati - commutano. Evolvere rispetto a uno poi rispetto all'altro fa rimanere sull'ipersuperficie in cui F e H sono costanti. Costruiti integrali primi con parentesi nulla, possiamo costruire gruppi di simmetria a più dimensioni che commutano. Quindi possiamo considerarli indipendenti e applicare Noether: per ciascun gruppo di simmetria troviamo l'integrale primo del moto. Se non fosse vero, es: rotazioni, non sarebbe più vero che ogni gruppo di simmetria fornisce un integrale primo. Ognuno abeliano e commuta con gli altri: condizione che manca per le rotazioni.

11.4 Arbitrarietà di un differenziale esatto nella forma fondamentale

La dinamica hamiltoniana si stacca dal principio variazionale di minima azione che è la base della meccanica lagrangiana - e diventa molto legata alla geometria.

Schema per la dinamica hamiltoniana

Principio variazionale	$\int_{t_A}^{t_B} (pq - H) dt$	\leftrightarrow
$q(t_A) = q_A$	\leftrightarrow	1-forma differenziale
$q(t_B) = q_B$	\leftrightarrow	$\omega = pdq - Hdt$
Equazioni canoniche		
$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$		

Abbiamo già riformulato per la dinamica hamiltoniana del principio di minima azione e visto il legame con la forma differenziale nello spazio delle fasi esteso (q, p, t) $pdq - Hdt$. Simmetria tra $p, q; -H, t$; se ne cambiassimo i nomi, non sapremmo chi è coordinata, momento, energia, tempo: la struttura della 1-forma resta inalterata. Hamilton dimostra (non dimostriamo perché serve calcolo con forme differenziali) che la struttura delle equazioni è determinata dalla forma differenziale: dalla definizione di forma differenziale abbiamo un modo intrinseco di derivare, con le curve di rotore, le equazioni canoniche.

Sia $T : (q, p) \mapsto (Q, P)$ una trasformazione canonica. Come si modifica il principio variazionale?
Consideriamo la 1-forma differenziale

$$\omega = pdq - Hdt \mapsto \text{equazioni di Hamilton}$$

Se $\omega' = \omega + dF$ con dF forma differenziale esatta (dF è il differenziale di una funzione).

$\Rightarrow \omega'$ è associato alle stesse equazioni

Se T è trasformazione canonica

$$T^{-1}(\omega) = PdQ - Hdt + dF$$

ovvero dato $Q = Q(q, p)$ e $P = P(q, p)$

$$pdq - Hdt = PdQ - Hdt + dF \quad (11.13)$$

Se definiamo un cambio di variabili che è una trasformazione canonica, cosa succede alla 1-forma?

Nota: Il principio variazionale e la 1-forma sono principi primitivi rispetto alle equazioni canoniche, quindi la conservazione delle equazioni canoniche non implica la conservazione dei questi.

Possono esserci nel principio variazionale e nella forma fondamentale quantità trasparenti rispetto alla conservazione della forma delle equazioni di Hamilton, ad esempio nel principio di minima azione l'aggiunta di una derivata rispetto al tempo non cambia il risultato delle equazioni del moto. Consideriamo la corrispondenza tra forma fondamentale ed equazioni canoniche, esplicitata nell'Arnold nella corrispondenza tra le equazioni canoniche e le proprietà della derivata esterna della forma. Sommiamo un differenziale esatto di una funzione nello spazio delle fasi cioè una forma esatta, un campo di forze conservativo. Le curve di rotore della forma sono le soluzioni del moto. Abbiamo aggiunto qualcosa che non altera le traiettorie del moto perché il calcolo delle traiettorie del moto è il calcolo del rotore associato al campo vettoriale della forma differenziale. Come nel principio variazionale di minima azione c'era arbitrarietà di una derivata totale rispetto al tempo di una funzione delle coordinate, qui lo stesso per una funzione nello spazio delle fasi (è perché non c'è il contributo degli estremi). Possiamo avere arbitrarietà nella definizione della forma fondamentale legata alla comparsa di differenziali esatti. Se facciamo un cambio di variabili che lascia inalterate le equazioni del moto NON possiamo sapere se dF è nullo o no (in generale no). Se riscriviamo la forma nelle coordinate nuove (maiuscole) otteniamo una forma con la stessa struttura (legata alla canonicità) A MENO DI UN DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE, che può contenere q e Q (i differenziali che restano nell'uguaglianza), che in maniera naturale fissiamo (mentre H e dt si semplificano).

11.4.1 Funzioni generatrici di I e II tipo

Esprimendo $F = F(q, Q)$ troviamo

$$pdq - PdQ = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial Q} dQ \quad (11.14)$$

da cui

$$\boxed{\begin{cases} p &= \frac{\partial F}{\partial q}(q, Q) \\ P &= -\frac{\partial F}{\partial Q}(q, Q) \end{cases}} \quad \text{con ipotesi } \det \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \neq 0 \quad (11.15)$$

Rappresentazione implicita della trasformazione canonica $T : (q, p) \mapsto (Q, P)$

$F(q, Q)$ funzione generatrice di T del I tipo

Riscriviamo l'Eq. 11.13 con i differenziali di q e Q . Otteniamo l'Eq. 11.14, quindi le Eq. 11.15 che è una forma implicita (mista) per rappresentare la forma canonica: (p, P) in funzione di (q, Q) . Ovvero data la trasformazione canonica invertiamo $Q = Q(q, p)$ per trovare $p(q, Q)$. E per P sostituiamo l'espressione ottenuta per p , cioè $P = P(q, p)$ diventa $P = P(q, p(q, Q)) = P(q, Q)$. Dobbiamo assumere che il determinante dell'hessiana costruita con F - arbitraria funzione di q e Q sia non nullo, perché poi bisogna invertire di nuovo le equazioni Eq.11.15 in quanto derivavano da una trasformazione canonica.

Data una trasformazione canonica, almeno localmente deve esistere una funzione $F(q, Q)$, che la rappresenta implicitamente. Viceversa data F con la condizione sull'hessiana, scrivendo in forma mista p e P , invertendo, otteniamo una trasformazione canonica perché abbiamo generato una trasformazione che soddisfa la relazione 11.14, quindi anche la 11.13, quindi conserva la forma delle equazioni di moto: è canonica. Possiamo fare considerazioni sulla libertà contenuta nelle trasformazioni canoniche; che definiscono un gruppo (la composizione di cambi di variabili che conservano le equazioni di Hamilton conserva le equazioni di Hamilton, l'identità vi appartiene, e sono invertibili in quanto cambio di variabili) nello spazio delle fasi R^{2n} . Il gruppo ha la stessa dimensionalità di una funzione F definita nello spazio delle fasi: con una funzione F rappresentiamo la trasformazione canonica. Cambio di variabili significa aver definito tante corrispondenze quante sono le variabili di partenza e di arrivo, invece definiamo una funzione sola di $2n$ variabili che rappresenta tutta la trasformazione. La condizione di conservare le equazioni di Hamilton ha limitato moltissimo il numero di cambi di variabili possibili, ma è molto di più di quanti ne potessimo fare nello spazio dei sistemi lagrangiani. Corrispondenza tra lo spazio delle generatrici e lo spazio delle trasformazioni canoniche mette in evidenza che conservare le equazioni di Hamilton limita la libertà.

Curiosità:

- La trasformata di Legendre ha proprietà di estremalità che consentono di sostituire le velocità con i momenti (esempi sull'Arnold - serve la convessità della funzione; la forma quadratica è effettivamente una funzione convessa (paraboloida)). Trasformata di Legendre in fisica è molto usata soprattutto in termodinamica.
- principio di indeterminazione, legato alla parentesi (commutatori), ha motivazione fisica: nel momento in cui si misura L_x , che ha commutatore non nullo con L_y , modifica le altre misure. Misurare L_x significa modificare il sistema!
- Rotolamento: vincolo anolonomo -> il problema è dire se un campo è conservativo o no. Se è 1D è come chiedersi se una funzione di una variabile ha primitiva: sì. Quindi il vincolo di rotolamento si riconduce a uno olonomo che lo genera tramite una derivazione. A più dimensioni non è possibile (es: moneta sul piano): dato un vincolo di rotolamento cioè sulla velocità, non riusciamo a trovare funzione che lo genera come condizione geometrica \Rightarrow non potremmo usare un formalismo lagrangiano puro. Bisognerebbe studiare fisicamente il contatto tra moneta e tavolo. Servono i moltiplicatori di Lagrange.
- Nelle piccole oscillazioni, è un errore sviluppare T , perché la struttura di minimo stretto fa sì che T e V siano dello stesso ordine come infinitesime \Rightarrow la velocità, che entra in T , è già un termine quadratico.
- Generatore di un gruppo abeliano: è una base dello spazio vettoriale tangente al gruppo nell'identità. Nel nostro caso - gruppo 1D: derivata fatta rispetto al parametro α (che rappresenta il gruppo come isomorfo alla somma dei numeri reali) della trasformazione che dà il gruppo, nello 0 che è l'identità, questo crea un campo che è il generatore del gruppo (abeliani, 1d). Dato un sistema di equazioni differenziali, derivare il flusso di fase in $t = 0$ troviamo il campo vettoriale generatore. Il flusso di fase di un sistema hamiltoniano ha come generatore il sistema hamiltoniano stesso.
- Trasformazione canonica \rightarrow esiste un dF da aggiungere alla 1-forma che non cambia le equazioni canoniche.
- Dall'annullamento della parentesi di Poisson $\{A, B\}$ abbiamo che se ci muoviamo lungo le soluzioni del moto (moto differenziale) di una funzione A , l'altra funzione B non cambia, e viceversa. Es: sul piano, muovendomi lungo x la y non cambia, e viceversa: hanno parentesi nulla. Se la parentesi di Poisson di due hamiltoniani è nulla - quindi uno è integrale primo del moto rispetto all'altro - se facciamo un'evoluzione nel tempo con un sistema e poi con l'altro, questo è commutativo. La condizione di involuzione fa sì che si possa scambiare l'evoluzione. Per la dimostrazione che i flussi di fase si scambiano al finito dovremmo esplicitare la dipendenza del flusso di fase nelle equazioni di Hamilton da H . Usiamo la possibilità di scambiare per spostamenti piccoli e componendo, vale lo stesso al finito. Analogo al fatto che si giunge allo stesso punto spostandosi prima lungo x poi lungo y , oppure prima lungo y e poi lungo x : sono direzioni indipendenti. Sulla sfera se ci muoviamo lungo l'equatore e poi il meridiano oppure v.v. NON otteniamo lo stesso punto alla fine (spostandosi prima sul meridiano, poi ci si sposta su un parallelo che ha circonferenza più piccola dell'equatore): non commutatività dei flussi mette in luce la struttura geometrica, la curvatura della sfera.
- Data una F con proprietà di invertibilità locale (vedi hessiana), possiamo sempre associare una trasformazione canonica localmente (altrimenti globalmente: differenziale esatto o no?). Lavoriamo in spazi delle fasi euclidei, associati a R^{2n} quindi non si pone il problema tra chiusura ed esattezza: equivalenza per domini semplicemente connessi. La trasformazione è definita su tutto lo spazio, mentre la sua rappresentazione tramite funzione generatrice è locale.

- La forma differenziale $pdq - Hdt$ non è esatta. Se invertiamo il tempo e cambiamo o il segno dell'energia o dei momenti (così che i due termini abbiano segno opposto), è invariante, se no no.

Tale approccio consente altre considerazioni

$$pdq - Hdt = PdQ - Hdt + dF = -QdP - Hdt + d(F + QP) \quad (11.16)$$

Sia $G = F + QP$ (nota somiglianza con trasformazioni di Legendre), $G = G(q, P)$

$$\boxed{\begin{cases} p &= \frac{\partial G}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial G}{\partial P} \end{cases}} \quad (11.17)$$

generatrice II tipo

Nota $\Rightarrow G(q, P) = qP$ genera la trasformazione identità

Nota: lo spazio delle trasformazioni canoniche ha una struttura di gruppo

Abbiamo introdotto una funzione generatrice del primo tipo per la trasformazione canonica T , $F(q, Q)$ (Q, NON P!!!). La struttura delle equazioni di Hamilton è legata al fatto che un cambio di variabili genera una forma differenziale con la stessa struttura della forma di partenza + un differenziale esatto. Possiamo riscrivere la forma: altro modo di fare trasformata di Legendre: $P \mapsto G$. Con ragionamenti analoghi introduciamo $G(q, P)$ (dq e dP sono i differenziali che rimangono); otteniamo le Eq. 11.17 che sono un altro modo di scrivere la trasformazione canonica, con un'altra generatrice. Essendoci il segno - nelle equazioni canoniche, cambiando i nomi cambia il segno.

Nota: Ricordiamo che per le generatrici si ha

1. $F(q, Q)$ primo tipo
2. $G(q, P)$ secondo tipo

La generatrice di I tipo si usa nell'equazione di HJ; quella di II tipo (quadratica nelle variabili) genera l'identità, mentre la generatrice di primo tipo non lo può fare. Per rappresentare tutto il gruppo dobbiamo usare più tipi di generatrici, non basta un tipo. Rappresentazione delle trasformazioni canoniche tramite generatrici: storicamente utile nella teoria delle perturbazioni (oggi: trasformazioni di Lie).

Corollario 11.2. *Il principio variazionale*

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} (q\dot{p} + H) dt = 0 \quad (11.18)$$

$$p(t_A) = p_A$$

$$p(t_B) = p_B$$

definisce le equazioni canoniche

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} (\dot{q}\dot{p} + H) dt &= \int_{t_A}^{t_B} (\dot{p}\delta q + q\delta\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p) dt = \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left[\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \dot{q} \right) \delta p \right] dt = 0 \quad \# \end{aligned}$$

essendo

$$\int_{t_A}^{t_B} q\delta\dot{p} dt = q\delta p \Big|_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} \dot{q}\delta p dt = - \int_{t_A}^{t_B} \dot{q}\delta p dt$$

Corollario: riscriviamo il principio variazionale scambiando il ruolo di p con $q \rightarrow$ lo scambio del segno è suggerito dall'Eq.11.14. Genera le stesse equazioni canoniche dell'altro principio variazionale, ma dobbiamo definirlo in uno spazio di funzioni che fissa p agli estremi ma lascia q libere. Calcolo analogo alla dimostrazione originaria. Quindi la forma differenziale è più primitiva del principio variazionale, che viene dal principio di minima azione ereditando il fatto di fissare q e avere libere q ; mette in luce la simmetria del sistema.

11.5 Equazione di Hamilton-Jacobi

Ma se usiamo una funzione generatrice dipendente dal tempo cosa succede?

$F(q, Q, t)$ funzione generatrice

$$\det \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \neq 0 \quad \forall t$$

$$pdq - Hdt = PdQ - H'dt + dF = PdQ - H'dt + \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

$$\underbrace{H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$

idea di Hamilton: trovare una $F(q, Q, t)$ tale che $H' = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{P} = 0 \\ \dot{Q} = 0 \end{cases}$$

ovvero: equazioni di Hamilton-Jacobi

Dobbiamo mantenere la condizione sull'hessiana. Mettiamo H' perché dF contiene un differenziale in più legato alla dipendenza temporale, che si somma a H' . Troviamo trasformazioni canoniche dipendenti dal parametro stesso t , che è il parametro tempo che usiamo per integrare le equazioni di Hamilton \Rightarrow l'hamiltoniana, che è il momento associato al tempo, DEVE CAMBIARE. Hamilton pensò di trovare una funzione $F(q, Q, t)$ tale che il nuovo hamiltoniano H' fosse = 0 o una costante \Rightarrow equazioni canoniche del moto nelle nuove coordinate: costanti.

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q, Q, t) = H(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q, Q, t) = 0$$

(11.19)

con $\det \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \neq 0$ $Q = N$ costanti da scegliere

$F(q, Q, t)$ si dice integrale completo.

$$H(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q, Q, t) = 0$$

equazione alle derivate parziali non lineare!

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q}(q, Q, t) \\ P &= -\frac{\partial F}{\partial Q}(q, Q, t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} q &= q(Q, P, t) \\ p &= p(Q, P, t) \end{aligned} \quad \text{soluzioni equazioni canoniche} \quad (11.20)$$

Q, P dipendono dalle condizioni iniziali.

L'equazione di H.J. sembra essere stata il punto di partenza per l'equazione di Schrödinger. La variabile p è di troppo: possiamo sostituire $p = \frac{\partial F}{\partial q}$. Vogliamo trovare una soluzione che dipende da n costanti (non integrali primi) Q indipendenti - la costanza viene dalle nuove equazioni del moto 11.19, che sia invertibile (vedi hessiana): integrale completo dell'equazione di HJ. Non vogliamo trovare solo una soluzione, ma anche che contenga l'arbitrarietà di scegliere n costanti del moto (gradi di libertà), e invertibile perché almeno localmente deve rappresentare una trasformazione canonica. E' un'equazione alle derivate parziali non lineare. La sua soluzione è il metodo più potente per studiare i sistemi dinamici classici. Nasce da questo la teoria delle perturbazioni. E viceversa per studiare l'equazione usiamo ciò che conosciamo dai sistemi classici.

Consideriamo la trasformazione canonica rappresentata da F . Per la condizione sull'hessiana, possiamo invertire. Siccome P e Q sono costanti perché il nuovo hamiltoniano è nullo, $q(P, Q, t)$ e $p(P, Q, t)$ sono le soluzioni dell'equazione del moto per l'hamiltoniano iniziale! E Q e P sono le condizioni iniziali. La generatrice F genera le

trasformazioni canoniche che sono anche il flusso di fase del sistema iniziale. Quindi non solo la trasformazione canonica è caratterizzata dal fatto di mantenere la struttura delle equazioni del moto, ma le soluzioni stesse dell'equazione di Hamilton sono una trasformazione canonica nello spazio delle fasi perché si possono rappresentare con una funzione generatrice che risolve H-J.

Nota: $F(q, Q, t)$ NON può rappresentare l'identità

$F(q, Q, t)$ descrive l'evoluzione come un fronte d'onda: analogia con ottica geometrica

Analogia tra come si propaga un raggio di luce, le soluzioni dell'equazione di Hamilton, la propagazione del fronte d'onda associato al raggio e la funzione F generatrice. Corrispondenza tra l'ottica geometrica \rightarrow funzioni d'onda, e meccanica classica \rightarrow funzioni di Hamilton-Jacobi \Rightarrow forse equazioni di Schrödinger? (Arnold)

Definizione 11.4. Funzione di azione

$$F(q, t; q_0, t_0) = \int_{(t_0, q_0)}^{(t, q)} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

Teorema 11.1. Teorema della funzione di azione

La funzione di azione calcolata lungo le soluzioni $q(t); q(t) = q, q(t_0) = q_0$ soddisfa l'equazione di H.J.

Calcoliamo l'integrale della lagrangiana sulle traiettorie del moto che risolvono le equazioni di Lagrange (vanno da t_0, q_0 , andiamo a t, q). È una funzione degli estremi. Assumiamo di conoscere le soluzioni. Dimostriamo che questa è la soluzione delle equazioni di Hamilton-Jacobi. $F(q, t; q_0, t_0)$: q_0 è Q , t_0 implicito 0. Note le soluzioni del moto, troviamo soluzione dell'equazione di Hamilton Jacobi: dalla conoscenza dei sistemi dinamici riusciamo a studiare un'equazione alle derivate parziali non lineare.

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q} \Delta q &= \int_{(t_0, q_0)}^{(t, q+\Delta q)} \mathcal{L}(\check{q}, \dot{\check{q}}, t) dt - \int_{(t_0, q_0)}^{(t, q)} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \\ \check{q}(t) &= q + \Delta q & q(t) &= q \\ \text{def } \delta q(t) &= \check{q}(t) - q(t) & \delta q(t_0) &= 0 \\ \text{se } \Delta q \rightarrow 0 \Rightarrow \delta q \rightarrow 0 & & \delta q(t) &= (q + \Delta q) - q = \Delta q \end{aligned}$$

Usiamo lo stesso approccio che nel principio variazionale

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q} \Delta q &= \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt \\ \text{per parti} \quad \int_{t_0}^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q dt \\ \frac{\partial F}{\partial q} \Delta q &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) \Delta q + \underbrace{\int_{t_0}^t \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt}_{=0 \text{ perche integriamo lungo le soluzioni}} \\ \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial q}(q, t; q_0, t_0) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = p \end{aligned}$$

\check{q} , indice messo perché essendo gli estremi diversi, le traiettorie che li connettono sono diverse. Ma la differenza $\check{q}(t) - q(t)$ deve tendere a 0 se $\Delta q \rightarrow 0$ perché l'estremo $q + \Delta q$ tende all'altro estremo q . Calcoliamo la variazione sviluppando la lagrangiana, sostituendo $\check{q} = q + \Delta q$. Abbiamo un termine aggiuntivo perché δq calcolato in t vale Δq , on 0. Dimostrato che derivando rispetto a q la funzione d'azione, otteniamo p , come dovrebbe fare una funzione

generatrice.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t &= \int_{(t_0, q_0)}^{(t+\Delta t, q)} \mathcal{L}(\check{q}, \dot{\check{q}}, t) dt - \int_{(t_0, q_0)}^{(t, q)} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \\
 \delta q &= \check{q}(t) - q(t) \quad \check{q}(t + \Delta t) = q \\
 \delta q \rightarrow 0 \text{ se } \Delta t \rightarrow 0 &\quad \Rightarrow \check{q}(t) + \dot{\check{q}}(t) \Delta t \simeq q \\
 &\quad \Downarrow \\
 \text{Nota: } \dot{\check{q}}(t) &\simeq \dot{q}(t) + \mathcal{O}(\Delta t) \Rightarrow \quad \check{q}(t) \simeq q - \dot{q}(t) \Delta t \\
 &\quad \delta q(t) = -\dot{q}(t) \Delta t \\
 \delta q(t_0) &= 0 \\
 \delta q(t) &= -\dot{q} \Delta t
 \end{aligned}$$

Qui abbiamo variato t e tenuto q costante. Deriviamo rispetto a t . La variazione delle funzioni calcolando a t è q diminuita da $\dot{q}\Delta t$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t &= \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{L}(\check{q}, \dot{\check{q}}, t) dt + \delta \int_{t_0}^t \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \\
 &= \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \Delta t - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) \dot{q} \Delta t \\
 \frac{\partial F}{\partial t}(q, t; q_0, t_0) &= \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = -H(q, p, t)
 \end{aligned}$$

Usiamo $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$, $p = \frac{\partial F}{\partial q}$ da prima

$$H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}(q, t; q_0, t_0), t\right) + \frac{\partial F}{\partial t}(q, t; q_0, t_0) = 0$$

Equazione di HJ. c.v.d.

Procediamo quasi allo stesso modo. Essendo il primo integrale fino a $t + \Delta t$ dato che lo vogliamo confrontare con quello fino a t , spezziamolo nell'integrale tra t_0 a t e integrale tra t e $t + \Delta t$ Teorema di Gauss: identifichiamo l'integrale con $\mathcal{L}\Delta t$. E' omesso il termine dell'equazione del moto che si annulla (vedi prima). Ritroviamo la definizione della trasformata di Legendre di \mathcal{L} cambiata di segno.

Usando la conoscenza delle soluzioni delle equazioni dinamiche di Hamilton o Lagrange, le equazioni di Hamilton Jacobi ammettono una soluzione che è la funzione di azione ossia la lagrangiana integrata nel tempo calcolata lungo le traiettorie. E viceversa, con Hamilton-Jacobi troviamo la F che genera il flusso di fase che risolve le equazioni di Hamilton.

Curiosità: Il tempo e l'energia sono coniugati. Un sistema che non dipende dal tempo, t sarebbe variabile ciclica, il teorema di Noether afferma che il momento associato al tempo è integrale primo del moto, cioè l'energia. L'equazione di Newton è vettoriale, dobbiamo esplicitare le componenti. Invariante per sistemi galileiani. Non appena usciamo dalle coordinate cartesiane: dinamica lagrangiana (cambio di variabili nello spazio delle configurazioni); la dinamica hamiltoniana è invariante per trasformazioni canoniche perché mantengono le equazioni del moto.

L'equazione di Hamilton Jacobi ha struttura separabile per sistemi che ammettono variabili azioni-angolo

Quando facciamo una trasformazione canonica del primo tipo, e imponiamo che la struttura delle equazioni di Hamilton non cambi, e che la trasformazione dipenda dal tempo e riduca H' a una costante, ad esempio 0 \Rightarrow otteniamo l'equazione di Hamilton Jacobi. Dà una descrizione della meccanica come un'onda luminosa che si propaga, e il fronte è generato dalla funzione generatrice legata al flusso di fase della soluzione.

Ha una soluzione che possiamo scrivere supponendo di conoscere le soluzioni delle equazioni del moto, tramite la funzione di azione. Integriamo la lagrangiana non più considerando il funzionale ad estremi fissi, ma integrando lungo le soluzioni dell'equazione di Lagrange. Fissiamo un estremo: condizioni iniziali, l'altro è libero. q è funzione del tempo lungo le soluzioni di Lagrange. Otteniamo una funzione di t, q cioè dall'estremo superiore, e dalla condizione

iniziale; la interpretiamo come generatrice.

Qual è la variazione di F quando variamo di Δq l'estremo superiore di integrazione? Consideriamo cosa succede alla soluzione quando variamo l'estremo superiore dell'integrale di azione che coincide con il funzionale. La soluzione \tilde{q} sarà diversa da q , differendo di δq : questa variazione della soluzione al tempo iniziale deve essere nulla perché partiamo dello stesso punto, e in t uguale alla variazione della variabile q Δq dell'estremo.

Con lo stesso approccio del principio varazionale, sviluppiamo la lagrangiana (rispetto a q e \dot{q}). Ma mentre prima avevamo una cancellazione agli estremi di δq , qui a t vale Δq . Equazioni di lagrange sono soddisfatte perché integriamo lungo l'orbita. Otteniamo p momento associato a q : la prima equazione della funzione generatrice.

Adesso deriviamo F rispetto al tempo quando variamo l'estremo superiore di Δt . Cosa succede alla soluzione? \tilde{q} al tempo variato deve essere uguale a q (stessi estremi ma ci arrivano a tempi diversi). Con un errore Δt^2 , possiamo identificare nell'espressione a destra $\dot{\tilde{q}}$ e \dot{q} (la differenza è di ordine Δt , e viene moltiplicata per Δt).

Questo serve perché per calcolare la variazione dell'integrale, facciamo due pezzi, da t_0 a t , e da t a $t + \Delta t$. Prima parte: t.c., togliendo infinitesimi di ordine superiore. Per il secondo termine integriamo per parti come prima, con la differenza che $\delta q = -\dot{q}\Delta t$, non Δq . L'equazione di Lagrange non è stata scritta perché è soddisfatta quindi 0.

Descrizione della meccanica come propagazione dei raggi della luce: soluzione dell'equazione di Hamilton - traiettorie v.s. come fronti d'onda: equazione di Hamilton - Jacobi, secondo il principio di Huygens.

il raggio della spirale è fisso: vincolo geometrico, quindi r nel potenziale è fissato.

la meccanica lagrangiana viene dal principio di minima azione. Mentre l'equazione di Hamilton ha struttura geometrica, non più legata a un principio varazionale in cui il tempo è un parametro privilegiato, quindi il parametro è uno qualunque. In realtà se interpretiamo la meccanica lagrangiana geometrica con il principio di Maupertuis possiamo scegliere altri parametri.

11.5.1 Esempio

Si consideri il seguente hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega^2(\lambda) \frac{q^2}{2}$$

dove λ è un parametro

- a) scrivere le variabili azione-angolo (θ, I) e determinare una funzione generatrice $F(q, \theta, \lambda)$ per la trasformazione;
- b) supponendo che $\lambda = \varepsilon t$ con $\varepsilon \ll 1$ determinare il nuovo Hamiltoniano $H(\theta, I, \varepsilon t)$;
- c) (facoltativo) approssimando il moto in fase come $\theta(t) = \omega(t_0)t$ per $t \in [t_0, t_0 + 2\pi/\omega(t_0)]$, dimostrare che se $\omega(t_0) \neq 0$

$$I(t_0 + 2\pi/\omega(t_0)) - I(t_0) = O(\varepsilon^2)$$

Soluzione a) Oscillatore armonico con frequenza dipendente da un parametro; scriviamo le variabili a.a. per l'oscillatore - osserviamo che passati al formalismo hamiltoniano sono collegate alle variabili iniziali da una trasformazione canonica. La definizione di azione avviene in modo naturale: proprietà geometrica di conservazione dell'area sottesa da una curva limitata nello spazio delle fasi. L'angolo è definito per costruire una trasformazione canonica.

b) Introduciamo una dipendenza dal tempo in λ con un parametro $\epsilon \ll 1$. Significa che variamo adiabaticamente il sistema - si dice di una trasformazione in cui un parametro è variato molto lentamente, la scala di tempo di evoluzione dinamica del sistema è molto più corta rispetto alla scala di cambiamento. Termodinamica - trasformazioni quasistatiche, sistema all'equilibrio.

c) Supponiamo che per un periodo l'angolo stia cambiando non tenendo conto che la pulsazione dipende dal tempo, ma tenendola congelata. L'energia non è conservata. La frequenza varia di ordine ε ; ci aspettiamo che la variazione dell'energia dopo un periodo sia al primo ordine in ε perché la variazione si calcola con derivata prima e $\lambda \propto \varepsilon$. L'azione invece ha una variazione di ordine ε^2 - proprietà dell'azione: resta quasi costante in trasformazioni adiabatiche - è detta invariante adiabatico; l'energia NON lo è.

Le variabili azione-angolo sono

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta$$

$$p = \sqrt{2I\omega} \cos \theta$$

Ricordiamoci che normalmente associamo q a x e p a y ; qui bisogna scambiare l'ordine. Infatti le rotazioni con $x \leftrightarrow \cos \theta$ e $y \leftrightarrow \sin \theta$ sono in senso orario, che è il senso negativo; vogliamo invece che la trasformazione abbia

$\det JT = +1$ non -1 .

Cerchiamo una generatrice di primo tipo: q, θ coordinate. La generatrice cercata si calcola dalla relazione

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p = \sqrt{2I\omega} \cos \theta = \omega q \cot \theta$$

da cui

$$F(q, \theta, \lambda) = \frac{\omega(\lambda)q^2}{2} \cot \theta$$

Avrebbe potuto esserci anche una funzione di θ nella generatrice: dato che facendo $\frac{\partial F}{\partial q}$ per definizione si tiene θ costante, può esserci una $f(\theta)$ nell'integrale. Dobbiamo controllare che derivando rispetto a θ troviamo $-I$, la cui espressione si ricava da q: $I = \frac{q^2 \omega}{2 \sin^2 \theta}$. Verifichiamo che $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ fornisce la stessa relazione $\Rightarrow f(\theta) = 0$ (tenendo conto che $\cot' = -1/\sin^2$). Posto $\lambda = \varepsilon t$ il nuovo Hamiltoniano si scrive

$$H'(\theta, I, \lambda) = \omega(\lambda)I + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \omega(\lambda)I + \varepsilon \frac{I}{2\omega} \frac{d\omega}{d\lambda} \sin(2\theta)$$

perché a causa della dipendenza dal tempo, il nuovo hamiltoniano si calcola secondo l'equazione di Hamilton Jacobi come $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$ dove $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}$. L'equazione del moto per l'azione si scrive

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{I}{\omega} \frac{d\omega}{d\lambda} \cos(2\theta)$$

Nell'approssimazione suggerita dal problema abbiamo integrando in $\theta = \omega(t_0)t$

$$\ln I(t_0 + T) - \ln I(t_0) = -\varepsilon \frac{1}{\omega^2(t_0)} \frac{d\omega}{d\lambda}(t_0) \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2)$$

dove $dt = d\theta/\omega(t_0)$ e $O(\varepsilon^2)$ viene dal fatto che congelare ω equivale a compiere un errore di ordine ε , da moltiplicare per ε già presente nel termine.

Curiosità:

- Lo spazio delle trasformazioni canoniche è molto maggiore dello spazio dei cambi di coordinate nei sistemi lagrangiani: perché le trasformazioni canoniche possono variare q e p in modo indipendente salvo mantenere la canonicità. Nelle trasformazioni di coordinate: $q \rightarrow Q$, e la p segue di conseguenza; in una trasformazione canonica si possono mischiare, e si possono costruire le variabili azioni-angolo, che non si possono fare nel formalismo lagrangiano. Anche per l'oscillatore armonico ce ne accorgiamo: l'azione mischia coordinate e momenti. Pensiamo che la lagrangiana non è una funzione univoca ma nota a meno di derivata totale rispetto al tempo: non cambiano le equazioni di Lagrange, ma la parte di energia, non univocamente definita, cambia. L'energia H cambia cambiando definizione di momento. Se un sistema conserva l'hamiltoniana, qualunque trasformazione si faccia, la conservazione è garantita, quindi cambiare p e q indipendentemente fa sì che l'hamiltoniana cambi ma resti l'integrale primo del moto. *** Il legame tra \dot{q} e p contiene un'arbitrarietà legata a ddt. Il legame tra q e \dot{q} , che traduciamo con p , è libero e lo possiamo sfruttare.
- La velocità angolare è l'unico vettore velocità (derivata temporale di un osservabile) che è lo stesso nei due sistemi. La trasformazione della velocità di un qualunque osservabile, nei sistemi rotanti aggiunge la velocità di trascinamento che è $\omega \times$ vettore osservabile. Nell'istante in cui i 2 sistemi inerziale e rotante coincidono, componenti (ovvio) e derivate delle componenti di $\vec{\omega}$ sono le stesse nei due sistemi. I vettori sono oggetti intrinseci (poi li rappresentiamo in una base scelta) quello che non è intrinseco in generale è la variazione del vettore. Tutta la difficoltà di calcolare \mathcal{L} in un sistema non inerziale è calcolare l'energia cinetica, dato che si possono avere velocità di trascinamento non costanti*
- \mathcal{L} delle piccole oscillazioni è quadratica in velocità e coordinate. Il fatto che il potenziale abbia un minimo nel punto in cui sviluppiamo significa che è una conca, quindi dando un'energia leggermente superiore al minimo, si resta confinati nella buca come coordinate. T è data dalla differenza tra E fissata e V. Se siamo in un intorno del punto di minimo, è piccola la differenza: l'altezza si può correlare al raggio dell'intorno individuato (sempre che non si abbia qualcosa di ultrapiatto- T piccola in un intorno molto grande, o piccato- intorno molto piccolo)

e T potrebbe essere grande). T è dello stesso ordine dell'intorno. T che è forma quadratica definita positiva delle velocità, se resta piccola (restiamo nell'intorno) significa che anche le velocità sono piccole. T piccola, V rispetto al minimo è piccola, e l'energia cresce. L'ordine di grandezza di v e q nell'intorno è lo stesso: l'ellisse dell'oscillatore armonico ha 2 assi che si equivalgono. T ha già ordine 2. Sviluppando T oltre al valore nel punto di minimo, avremmo un termine di ordine cubico: $q \cdot \dot{q}^2$! Anche quando calcoliamo sostituendo al posto di q il valore del minimo, T ha già l'ordine giusto!

- Se l'hamiltoniana è costante, le equazioni del moto che sono sue derivate, sono 0.
- In che senso p e q sono variabili coniugate? Nella visuale hamiltoniana, abbiamo una 1-forma differenziale con prodotti pdq e $-Hdt$, che mettono insieme un momento e la coordinata associata, che sono i termini la cui parentesi di Poisson +1. Il sistema hamiltoniano ha alle spalle una struttura geometrica, legata alla 1-forma/ alle parentesi di Poisson, che definiscono la relazione di coniugazione. Noi ci siamo arrivati dalla meccanica lagrangiana. Se fossimo partiti in modo assiomatico definendo spazio delle fasi, parentesi delle fasi, la 1-forma, avremmo definito la meccanica hamiltoniana a prescindere dalla dinamica lagrangiana in maniera astratta. La coniugazione che noi attribuiamo viene dalla lagrangiana che attribuiamo ai sistemi fisici $T - V$. Viene dall'esperienza fisica che traduciamo nella definizione di T quindi un concetto fisico che viene dalla dinamica di Newton (mentre per sistemi hamiltoniani non ci sarebbe T potendo scambiare p e q ; si dovrebbe definire a priori chi sono le variabili coniugate). Poi scrivendo $\mathcal{L} = T - V$ per i sistemi meccanici possiamo calcolare momenti associati con la definizione; ciò entra nella meccanica quantistica.
- Cerchiamo sempre che la lagrangiana sia quadratica perché così le equazioni di Lagrange sono lineari. Avendo un sistema lagrangiano con T e V , con V nell'intorno di un punto di minimo stretto, l'approssimazione delle piccole oscillazioni è un'ottima approssimazione locale (si dimostra): restiamo con le orbite confinate.
- in \mathbb{R}^3 , una rotazione ha sempre autovalore 1 che corrisponde alla direzione della rotazione inalterata. Autovalore 1 della matrice di rotazione corrisponde all'autovalore 0 della matrice antisimmetrica. Le matrici antisimmetriche sono i generatori del gruppo delle rotazioni, sono le loro "derivate".
- \det di una matrice $I +$ una matrice piccola (t è il parametro piccolo, A matrice qualunque). Il risultato è l'identità + la traccia di $A * t$. Vedi Turchetti o appunti sulle equazioni differenziali lineari.
- moneta che rotola senza strisciare sulla rotaia. ϕ : di quanto si è spostato C rispetto alla verticale: HC . θ angolo tra il centro e C e un raggio segnato (da es nel punto di minimo) PC . Per applicare Konig mettiamoci nel CM con assi paralleli al sistema fisso. L'angolo con cui il disco rotola deve essere calcolato rispetto all'ASSE FISSO! Che è $\dot{\theta} - \dot{\phi}$
angolo tra apocentro e pericentro in un potenziale kr^a per $E \rightarrow \infty$, come abbiamo svolto il limite finale? Il termine che trascuriamo sarebbe singolare solo a 0. Vedere Arnold per spiegazione più chiara.
- Cambiamento di coordinate di q si ripercuote nel cambio di coordinate di \dot{q} ; mentre nei sistemi hamiltoniani p e q sono indipendenti. nei sistemi lagrangiani T e V restano con strutture T e V . Nei sistemi hamiltoniani mischiamo parte T e V : possiamo cambiarle non solo mantenendole separate ma anche mischiandole, e cambiamo la forma dell'energia, non possiamo dire semplicemente $H = T + V$