# Soluzioni esercizi Meccanica Quantistica

Grufoony
https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO

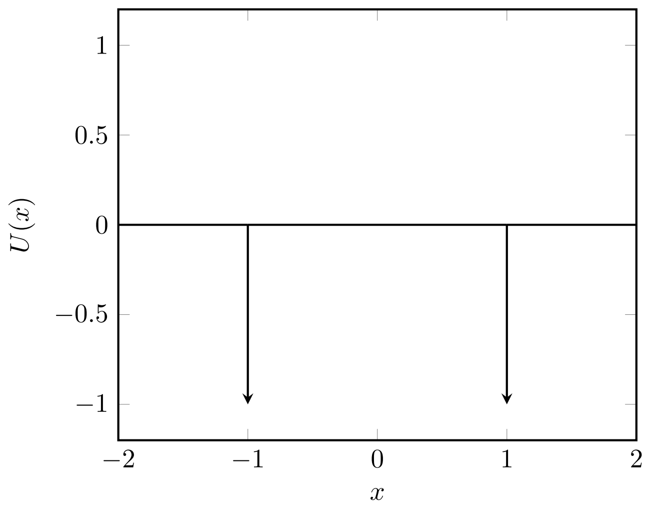
29 gennaio 2022

## Esercizio 1 (esame del 09/01/2017)

Una molecola di idrogeno ionizzata può essere descritta come un sistema unidimensionale formato da un singolo elettrone soggetto al potenziale

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \Omega}{m} \left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]$$

ove $a > 0$ è la semidistanza dei due protoni pensati fissi e $\Omega > 0$ ha le dimensioni di una lunghezza inversa. Trovare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia dello spettro discreto.




Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \left\{k^2 - 2\Omega\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]\right\}\Phi = 0$$

La soluzione è nota

$$\Phi^{\pm}(x) = \begin{cases} A^{\pm}e^{ikx} + B^{\pm}e^{-ikx} & x < -a \\ C^{\pm}e^{ikx} + D^{\pm}e^{-ikx} & -a < x < a \\ E^{\pm}e^{ikx} + F^{\pm}e^{-ikx} & a < x \end{cases}$$

Notiamo che il potenziale ha partità definita $U(-x) = U(x)$ allora possiamo imporre la condizione $\Phi^{\pm}(-x) = \pm\Phi^{\pm}(x)$, ottenendo

$$\begin{cases} E^{\pm} = \pm A^{\pm} \\ F^{\pm} = \pm B^{\pm} \\ D^{\pm} = \pm C^{\pm} \end{cases}$$

La funzione assume ora la forma più semplice

$$\Phi^{\pm}(x) = \begin{cases} C^{\pm}\left(e^{ik|x|} \pm e^{-ik|x|}\right) & |x| < a \\ \sigma_{\pm}(x)\left[A^{\pm}e^{ik|x|} + B^{\pm}e^{-ik|x|}\right] & a < |x| \end{cases}$$

Notiamo però che lo spettro discreto si avrà per $w < 0$, quindi $k = i\tilde{k}$, ma la funzione d'onda non può esplodere all'infinito, quindi necessariamente si avrà $A^{\pm} = 0$ e, riscalando $B^{\pm} = B^{\pm}e^{ika}$

$$\Phi^{\pm}(x) = \begin{cases} C^{\pm}\left(e^{ik|x|} \pm e^{-ik|x|}\right) & |x| < a \\ \sigma_{\pm}(x)B^{\pm}e^{-ik(|x|-a)} & a < |x| \end{cases}$$

Ora imponiamo la continuità della funzione e della sua derivata

$$\begin{cases} \sigma_{\pm}(x)B^{\pm} = C^{\pm}\left(e^{ika} \pm e^{-ika}\right) \\ -\sigma_{\pm}(x)B^{\pm} - C^{\pm}\left(e^{ika} \mp e^{-ika}\right) = \frac{2i\Omega}{k}\sigma_{\pm}(x)B^{\pm} \end{cases} \tag{1}$$

Si può riscrivere il tutto nella forma

$$\begin{cases} \sigma_{\pm}(x)B^{\pm} = C^{\pm}\left(e^{ika} \pm e^{-ika}\right) \\ \sigma_{\pm}(x)B^{\pm}\left(1 + \frac{2i\Omega}{k}\right) = C^{\pm}\left(e^{-ika} \mp e^{ika}\right) \end{cases} \tag{2}$$

Dividendo la seconda per la prima si ottiene

$$\frac{e^{-ika} \mp e^{ika}}{e^{ika} \pm e^{-ika}} = 1 + \frac{2i\Omega}{k}$$

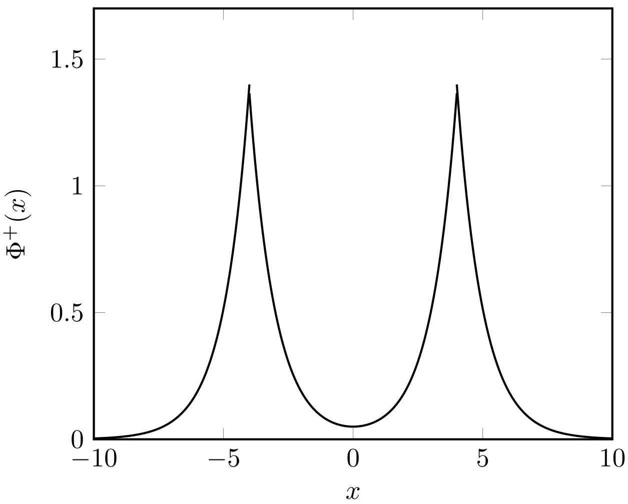
Le soluzioni in k per le due parità sono

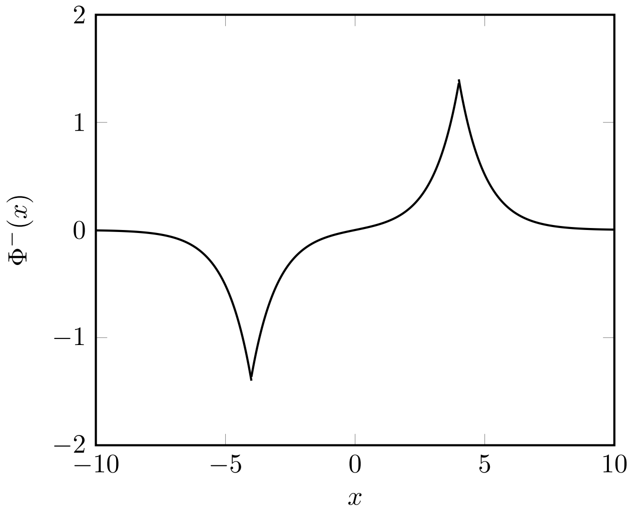
$$\begin{cases} \tanh(ika) = -\frac{2i\Omega + k}{k} \\ \tanh(ika) = \frac{k}{2i\Omega + k} \end{cases} \tag{3}$$

Scrivendo il tutto in funzione di $\tilde{k}$

$$\begin{cases} \tanh(\tilde{k}a) = \frac{2\Omega + \tilde{k}}{\tilde{k}} \\ \tanh(\tilde{k}a) = -\frac{\tilde{k}}{2\Omega + \tilde{k}} \end{cases} \tag{4}$$

Ogni equazione mi fornisce una soluzione unica quindi ho due soli livelli energetici corrispondenti ai valori di $\tilde{k}_0^{\pm}$.



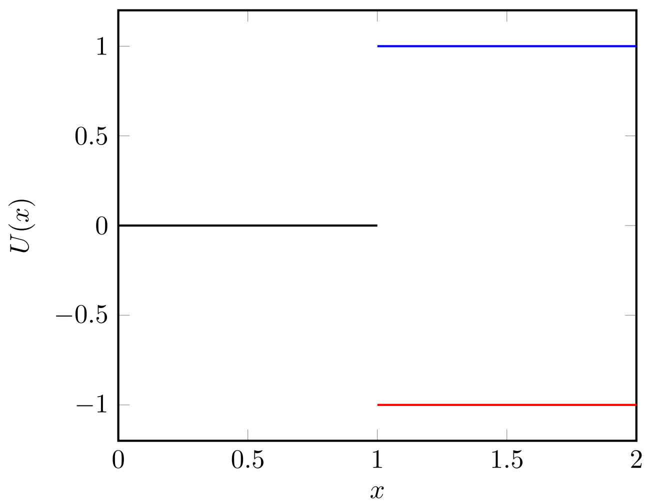



## Esercizio 1 (esame del 19/06/2017)

Trovare gli autovalori e le auofunzioni dell'energia di una particelle unidimensionale confinata nell'intervallo $0 \leq x \leq a$ e soggetta al potenziale

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ U_0 & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

ove $U_0 \neq 0$ è una costante con le dimensioni dell'energia.




Suggerimento: Non tentare di risolvere l'equazione trascendente degli autovalori.

Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}U(x)\right]\Phi = 0$$

la cui soluzione generale è (con $k'^2 = k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}U_0$)

$$\Phi(x) = \begin{cases} A\sin(kx) + B\cos(kx) & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ C\sin(k'x) + D\cos(k'x) & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

Condizione al bordo $\Phi(0) = 0$ che implica $B = 0$. Condizione al bordo $\Phi(a) = 0$ che implica $C\sin(k'a) + D\cos(k'a) = 0$. Poniamo quindi

$$\begin{cases} C = E\cos(k'a) \\ D = -E\sin(k'a) \end{cases}$$

e possiamo riscrivere la soluzione come

$$\Phi(x) = \begin{cases} A\sin(kx) & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ E\sin[k'(x-a)] & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

Continuità della funzione (ponendo $x_k = \frac{ka}{2}$ e $x_{k'} = \frac{k'a}{2}$):

$$A\sin(x_k) = -E\sin(x_{k'})$$

Continuità della derivata:

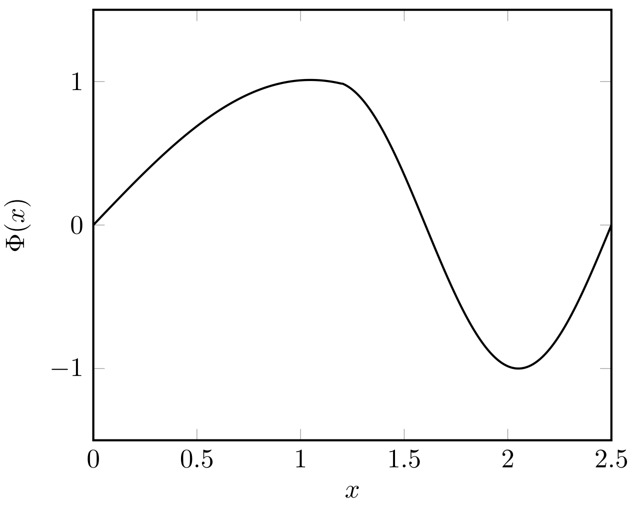
$$Ax_k\cos(x_k) = Ex_{k'}\cos(x_{k'})$$

Dividendo la prima per la seconda si trova l'equazione agli autovalori

$$\frac{\tan(x_k)}{x_k} = -\frac{\tan(x_{k'})}{x_{k'}}$$

che fornisce valori $k_n$ per lo spettro discreto $w_n = \frac{\hbar^2}{2m}k_n^2$, come previsto dal TSS. La soluzione è quindi (con un $k_n$ qualsiasi)

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} -E\frac{\sin(x_{k_n'})}{\sin(x_{k_n})}\sin(k_nx) & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ E\sin[k_n'(x-a)] & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$




Nel caso in cui si abbia $U_0 < 0$, $k' = i\tilde{k}'$ immaginario puro (con $\tilde{k} \in \mathbb{R}$) per $E + U_0 < 0$. L'equazione agli autovalori diventa quindi

$$\frac{\tan(x_k)}{x_k} = -\frac{\tanh(x_{\tilde{k}'})}{x_{\tilde{k}'}}$$

L'equazione è trascendente e possiamo ordinare le soluzioni $k_n$ anche in questo caso (spettro discreto non degenere). In entrambi i casi si avrà uno spettro continuo non degenere per $E \pm U_0 \geq 0$.

# Esercizio 1 (esame del 03/07/2017)

Una particlella è confinata in una regione sferica di raggio $R$ ed è soggetta ad un campo di forza centrale con potenziale

$$U(r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le \frac{R}{2} \\ U_0 & \frac{R}{2} < r \le R \end{cases} \qquad U_0 \neq 0$$

ove $U_0 > 0$ è una costante con le dimensioni di un'energia. Calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia della particella. Suggerimento: Derivare ma non tentare di risolvere l'equazione agli autovalori trascendente.

Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger radiale

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l-1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\right]\chi = 0$$

la cui soluzione è

$$\chi(r) = \begin{cases} Akrj_l(kr) + Bkrn_l(kr) & 0 \le r \le \frac{R}{2} \\ Ck'rj_l(k'r) + Dk'rn_l(k'r) & \frac{R}{2} < r \le R \end{cases}$$

con $k'^2 = k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}U_0$ Condizione al bordo $\chi(0) = 0$ quindi $B = 0$. Continuità della funzione

$$Ak\frac{R}{2}j_l(k\frac{R}{2}) = Ck'\frac{R}{2}j_l(k'\frac{R}{2}) + Dk'\frac{R}{2}n_l(k'\frac{R}{2})$$

Ponendo $x_k = \frac{kR}{2}$, $x_{k'} = \frac{k'R}{2}$, $C = En_l(2x_{k'})$ e $D = -Ej_l(2x_{k'})$ si ottiene

$$\chi(r) = \begin{cases} Akrj_l(kr) & 0 \le r \le \frac{R}{2} \\ Ek'r\left[n_l(2x_{k'})j_l(k'r) - j_l(2x_{k'})n_l(k'r)\right] & \frac{R}{2} < r \le R \end{cases}$$

Continuità della derivata

$$\begin{aligned} A\left\{x_kj_l(x_k) + x_k^2j_l'(x_k)\right\} &= E\left\{n_l(2x_{k'})\left[x_{k'}j_l(x_{k'}) + x_{k'}^2j_l'(x_{k'})\right] - j_l(2x_{k'})\left[x_{k'}n_l(x_{k'}) + x_{k'}^2n_l'(x_{k'})\right]\right\} \\ Ax_k^2j_l'(x_k) &= E\left[n_l(2x_{k'})x_{k'}^2j_l'(x_{k'}) - j_l(2x_{k'})x_{k'}^2n_l'(x_{k'})\right] \end{aligned}$$

I $k$ sono forniti quindi dal sistema di equazioni (risolvibile)

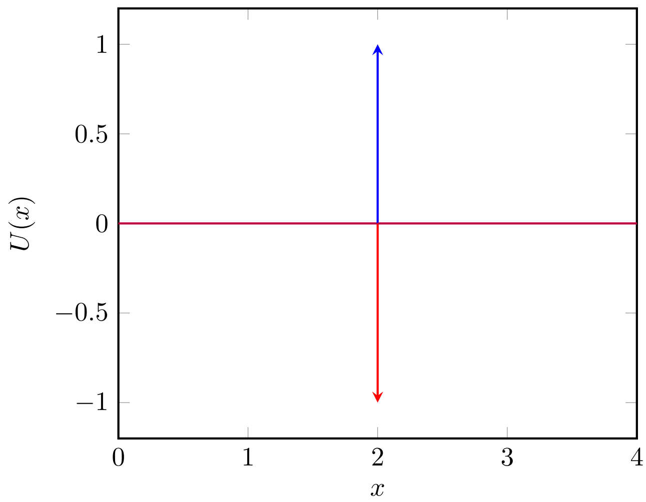
$$\begin{cases} Ax_kj_l(x_k) &= E\left[n_l(2x_{k'})x_{k'}j_l(x_{k'}) - j_l(2x_{k'})x_{k'}n_l(x_{k'})\right] \\ Ax_k^2j_l'(x_k) &= E\left[n_l(2x_{k'})x_{k'}^2j_l'(x_{k'}) - j_l(2x_{k'})x_{k'}^2n_l'(x_{k'})\right] \end{cases}$$

# Esercizio 1 (esame del 15/01/2018)

Una particella di massa $m$ è confinata nello semispazio unidimensionale $x \ge 0$ ed è soggetta al potenziale

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x-a)$$

ove $a > 0$ e $\Omega \neq 0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza ed una lunghezza inversa, rispettivamente. Trovare gli autovalori e le autofunzioni della energia.




Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi + \left\{k^2 + 2\Omega\delta(x-a)\right\}\Phi = 0$$

La soluzione generica è

$$\Phi(x) = \begin{cases} A\sin(kx) + B\cos(kx) & 0 < x < a \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & a < x \end{cases}$$

Condizioni al bordo $\Phi(0) = 0$ quindi $B = 0$. Imponiamo ora la continuità

$$\begin{cases} A\sin(ka) = Ce^{ika} + De^{-ika} \\ ik\left[Ce^{ika} - De^{-ika}\right] - Ak\cos(ka) = 2\Omega A\sin(ka) \end{cases}$$

Facendo qualche conto si ottiene l'equazione agli autovalori $(\Omega > 0)$

$$k\left\{-\cot(ka) + i\left[1 - \frac{2De^{-ika}}{A\sin(ka)}\right]\right\} = 2\Omega$$

Che fornisce valori continui di $k$ come previsto dal TSS (spettro continuo non degenere).

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{Ce^{ika}+De^{-ika}}{\sin(ka)}\sin(kx) & 0 < x < a \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & a < x \end{cases}$$

Considerando ora il caso in cui $\Omega < 0$ notiamo che è possibile avere $w < 0$ quindi $k = i\tilde{k}$. La funzione d'onda deve essere limitata all'infinito quindi necessariamente si deve avere $D = 0$. L'equazione agli autovalori diviene

$$\tilde{k}\left[\coth(\tilde{k}a) + 1\right] = -2\Omega$$

trascendente, che fornisce la serie di valori discreti $\tilde{k}_n$. Lo spettro energetico in questo caso è discreto non degenere per $w < 0$ e continuo non degenere altrimenti, come previsto dal TSS.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{Ce^{ika}}{\sin(ka)}\sin(kx) & 0 < x < a \\ Ce^{ikx} & a < x \end{cases}$$

## Esercizio 2 (esame del 18/06/2019)

Trovare le espressioni dei coefficienti di riflessione e trasmissione della barriera di potenziale unidimensionale

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{m}\Omega\left[\delta(x) - \delta(x-a)\right]$$

ove $a > 0$ e $\Omega > 0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza ed una lunghezza inversa, rispettivamente.

Supponiamo una soluzione del tipo

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r_k e^{-ikx} & x < 0 \\ Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & 0 < x < a \\ t_k e^{ik(x-a)} & a < x \end{cases}$$

Impongo la continuità della funzione

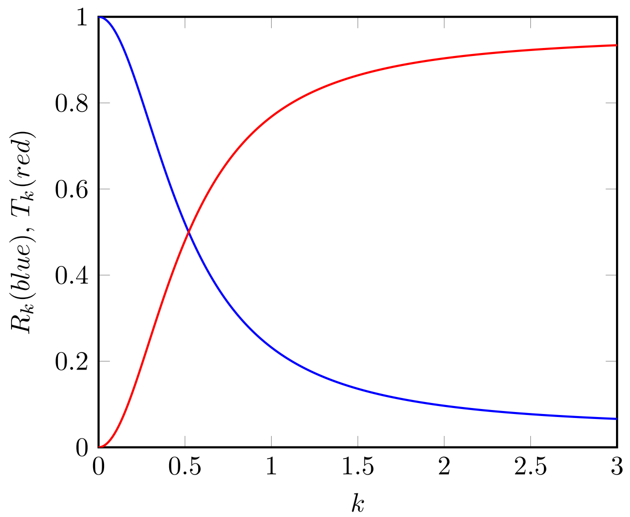
$$1 + r_k = A + B$$
$$Ae^{ika} + Be^{-ika} = t_k$$

e la continuità della derivata prima

$$ik(A - B) - ik(1 - r_k) = 2\Omega(1 + r_k)$$
$$ikt_k - ik(Ae^{ika} - Be^{-ika}) = -2\Omega t_k$$

Usando le precedenti relazioni è possibile ricavare i coefficienti

$$r_k = \frac{\Omega - ikB}{ik - \Omega}$$
$$t_k = -ik\frac{B}{\Omega}e^{-ika}$$




## Esercizio 1 (esame del 08/01/2020)

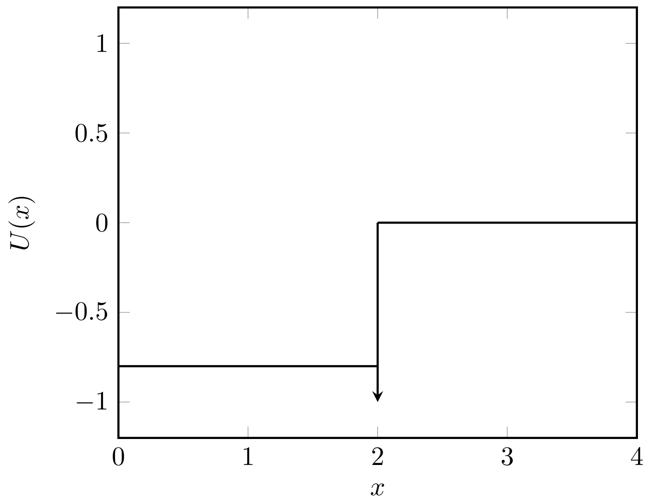
Trovare gli autovalori ed autofunzioni dell'energia di una particella confinata nella regione unidimensionale $0 < x < \infty$ e soggetta al potenziale

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x-a) + U_0(x)$$

con

$$U_0(x) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < a \\ 0 & a < x \end{cases}$$

ove $a > 0$, $\Omega < 0$ and $U_0 < 0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza, lunghezza inversa ed energia, rispettivamente. Suggerimento: Non tentare di risolvere l'equazione trascendente degli autovalori.




Scriviamo l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \left(k^2 - 2\Omega\delta(x-a) - \frac{2m}{\hbar^2}U(x)\right)\Phi = 0$$

e supponiamo una soluzione generale del tipo (con $k'^2 = k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}U_0$)

$$\Phi(x) = \begin{cases} A\sin(k'x) + B\cos(k'x) & 0 < x < a \\ Ce^{ik(x-a)} + De^{-ik(x-a)} & a < x \end{cases}$$

La funzione deve annullarsi nell'origine, quindi $B = 0$. Imponiamo ora la continuità della funzione

$$A\sin(k'a) = C + D$$

e della derivata

$$ik(C-D) - Ak'\cos(k'a) = 2\Omega A\sin(k'a)$$

Da cui si ricava l'equazione agli autovalori

$$ik\left[1 - \frac{2D}{A}\frac{1}{\sin(k'a)}\right] - 2\Omega = k'\cot(k'a)$$

che fornisce le soluzioni per lo spettro continuo $w \geq 0$.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{C+D}{\sin(k'a)}\sin(k'x) & 0 < x < a \\ Ce^{ik(x-a)} + De^{-ik(x-a)} & a < x \end{cases}$$

Poniamoci ora nel caso $w < 0$, ossia quando $k = i\tilde{k}$. L'equazione agli autovalori diventa

$$k'\cot(k'a) = -2\Omega - \tilde{k}$$

che, essendo trascendente, fornisce soluzioni discrete $\tilde{k}_n$ come previsto dal TSS.

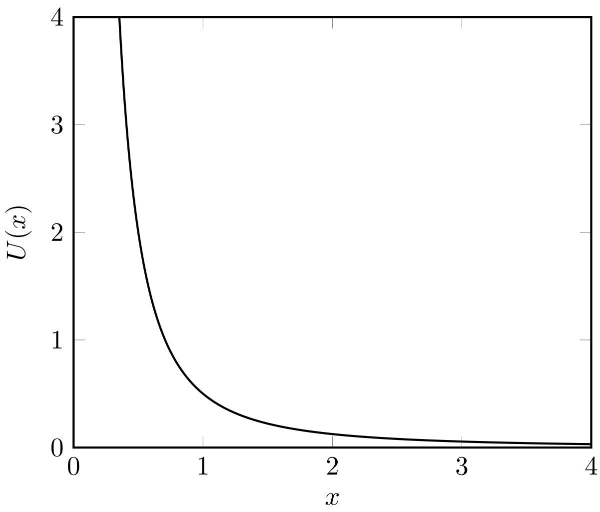
$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{C}{\sin(k'a)}\sin(k'x) & 0 < x < a \\ Ce^{-\tilde{k}(x-a)} & a < x \end{cases}$$

# Esercizio 1 (esame del 08/11/2019)

Una particlella è soggetta ad un campo di forza centrale di tipo armonico

$$U(r) = \frac{U_0}{2a^2} r^2$$

ove $U_0 > 0$ e $a$ sono costanti con le dimensioni di un'energia e una lunghezza, rispettivamente. Calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia per il numero quantico orbitale $l = 0$.




L'equazione di Schroedinger diventa

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\frac{U_0}{2a^2}r^2\right)\chi = 0$$

conviene porre $l = \sqrt{\frac{\hbar a}{\sqrt{mU_0}}}$, $k^2 l^2 = 2n+1$ e $x = \frac{r}{l}$ ottenendo

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + (2n + 1 - x^2)\chi = 0$$

Studiamo l'equazione asintotica per $x \to \infty$

$$\frac{d^2\chi_{as}}{dx^2} - x^2\chi_{as} = 0$$

che ha come soluzione

$$\chi_{as}(x) \simeq e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La soluzione generale sarà un'equazione del tipo

$$\chi(x) \simeq e^{-\frac{x^2}{2}} H(x)$$

dove $H(x)$ è determinata dalla

$$\frac{d^2H}{dx^2} - 2x\frac{dH}{dx} + 2nH = 0$$

ed è quindi un polinomio di Hermite

$$H_n(x) = (-1)^2 e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Notiamo ora che la nostra funzione d'onda deve annullarsi in zero, quindi necessariamente si deve avere $n$ dispari. Conviene ora riscalare $n \to 2n+1$ e scrivere le autofunzioni energetiche

$$\chi(r) = Ae^{-\frac{r^2}{2l^2}} H_{2n+1}\left(\frac{r}{l}\right)$$

Gli autovalori dell'energia saranno quindi

$$w_{2n+1} = \sqrt{\frac{U_0}{m}} \frac{\hbar}{a} \left(2n + \frac{3}{2}\right)$$