Soluzioni esercizi Meccanica Quantistica

Grufoony
https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO

24 gennaio 2022

Esercizio 1 (esame del 09/01/2017)

Una molecola di idrogeno ionizzata pu'o essere descritta come un sistema unidimensionale formato da un singolo elettrone soggetto al potenziale

$$U(x) = -\frac{\hbar^2\Omega}{m}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]$$

ove $a > 0$ è la semidistanza dei due protoni pensati fissi e $\Omega > 0$ ha le dimensioni di una lunghezza inversa. Trovare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia dello spettro discreto.

Scriviamo subito l'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi + \left\{k^2 - 2\Omega\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]\right\}\Phi = 0$$

La soluzione è nota

$$\Phi^{\pm}(x) = \begin{cases} A^{\pm}e^{ikx} + B^{\pm}e^{-ikx} & x < -a \\ C^{\pm}e^{ikx} + D^{\pm}e^{-ikx} & -a < x < a \\ E^{\pm}e^{ikx} + F^{\pm}e^{-ikx} & a < x \end{cases}$$

Notiamo che il potenziale ha partità definita $U(-x) = U(x)$ allora possiamo imporre la condizione $\Phi^{\pm}(-x) = \pm\Phi^{\pm}(x)$, ottenendo

$$\begin{cases} E^{\pm} = \pm A^{\pm} \\ F^{\pm} = \pm B^{\pm} \\ D^{\pm} = \pm C^{\pm} \end{cases}$$

La funzione assume ora la forma più semplice

$$\Phi^{\pm}(x) = \begin{cases} C^{\pm}\left(e^{ik|x|} \pm e^{-ik|x|}\right) & |x| < a \\ \sigma_{\pm}(x)\left[A^{\pm}e^{ik|x|} + B^{\pm}e^{-ik|x|}\right] & a < |x| \end{cases}$$

Notiamo però che la funzione d'onda non può esplodere all'infinito, quindi necessariamente si avrà $A^{\pm} = 0$ e, riscalando $B^{\pm} = B^{\pm}e^{ika}$

$$\Phi^{\pm}(x) = \begin{cases} C^{\pm}\left(e^{ik|x|} \pm e^{-ik|x|}\right) & |x| < a \\ \sigma_{\pm}(x)B^{\pm}e^{-ik(|x|-a)} & a < |x| \end{cases}$$

Ora imponiamo la continuità della funzione e della sua derivata

$$\begin{cases} \sigma_{\pm}(x)B^{\pm} = C^{\pm}\left(e^{ika} \pm e^{-ika}\right) \\ -\sigma_{\pm}(x)B^{\pm} - C^{\pm}\left(e^{ika} \mp e^{-ika}\right) = \frac{2i\Omega}{k}\sigma_{\pm}(x)B^{\pm} \end{cases} \tag{1}$$

Si può riscrivere il tutto nella forma

$$\begin{cases} \sigma_\pm(x)B^\pm = C^\pm \left(e^{ika} \pm e^{-ika}\right) \\ \sigma_\pm(x)B^\pm \left(1 + \frac{2i\Omega}{k}\right) = C^\pm \left(e^{-ika} \mp e^{ika}\right) \end{cases} \tag{2}$$

Dividendo la seconda per la prima si ottiene

$$\frac{e^{-ika} \mp e^{ika}}{e^{ika} \pm e^{-ika}} = 1 + \frac{2i\Omega}{k}$$

Le soluzioni in k per le due parità sono

$$\begin{cases} \tanh(ika) = -\frac{2i\Omega + k}{k} \\ \tanh(ika) = \frac{k}{2i\Omega + k} \end{cases} \tag{3}$$

Ogni equazione mi fornisce una soluzione quindi, posto $\tilde{k} = ik$, ho due soli livelli energetici corrispondenti ai valori di $\tilde{k}_0^\pm$.