Soluzioni esercizi Kennett

Grufoony
https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO

12 gennaio 2022

Esercizio 9.5

(a) Mostrare che la funzione di partizione gran canonica per la radiazione di corpo nero assume la forma

$$\Xi = \prod_s \frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon_s}} \tag{1}$$

La radiazione di corpo nero è costituita da fotoni, ossia bosoni. Dalla teoria (vista in classe) è nota la funzione di partizione gran canonica bosonica:

$$\Xi_b = \prod_s \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_s)}}$$

Osservando ora come si possano aggiungere/rimuovere fotoni ad un corpo nero senza alcun costo energetico ($\mu = 0$) la 1 diviene ovvia.

(b) Usando l'equazione 1 oppure in altro modo si dimostri che l'entropia per unità di volume della radiazione di corpo nero a temperatura T assume la forma

$$s = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45\hbar^3 c^3} \tag{2}$$

Richiamiamo ora l'energia per unità di volume della radiazione di corpo nero (eq. 9.20 Kennett)

$$u = \frac{\pi^2}{15} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}$$

e anche la sua pressione (eq. 9.29 Kennett)

$$P = \frac{u}{3}$$

Richiamando ora la relazione termodinamica

$$U = TS - PV - \mu N \tag{3}$$

ponendo $\mu = 0$ (vedi punto a) e dividendo per il volume V, si ottiene

$$s = \frac{u + P}{T}$$

che unita alle precedenti conclude la dimostrazione

$$s = s = \frac{u + \frac{u}{3}}{T} = \frac{4}{3}\frac{u}{T} = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45\hbar^3 c^3}$$

Esercizio 9.9

Calcolare la temperatura critica per un BEC in 2 dimensioni.

Richiamiamo ora la densità degli stati 2D calcolata in precedenza:

$$g(\epsilon) = g_s \frac{m}{2\pi\hbar^2} L^2$$

Possiamo calcolare il numero medio di particelle con la classica formula

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

la quale, posto $n = \frac{N}{L^2}$ diventa

$$n = g_s \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon$$

Per la temperatura critica si ha $e^{\beta_0} >> 1$ e si può approssimare

$$n \approx g_s \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty e^{-\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon$$

la cui soluzione è

$$n = g_s \frac{mk_B}{2\pi\hbar^2} T_0$$

Invertendo l'equazione precedente si ottiene la relazione desiderata

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \frac{n}{g_s}$$