

Soluzioni esercizi Kennett

Grufoony

https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO

12 gennaio 2022

Ricavare Sackur-Tetrode

Per un gas perfetto è nota la

$$F = Nk_B T \left[\ln \left(\frac{n}{n_Q} \right) - 1 \right]$$

Per calcolare l'entropia è sufficiente utilizzare la relazione

$$S = - \frac{\partial F}{\partial T}$$

ricordandosi che la concentrazione quantistica è definita

$$n_Q = \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Svolgendo i calcoli

$$\begin{aligned} S &= - \left\{ Nk_B \left[\ln \left(\frac{n}{n_Q} \right) - 1 \right] - Nk_B T \frac{1}{n_Q} \left(\frac{mk_B}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} T^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= - \left\{ Nk_B \left[\ln \left(\frac{n}{n_Q} \right) - 1 - \frac{3}{2} \right] \right\} = \\ &= Nk_B \left[\ln \left(\frac{n_Q}{n} \right) + \frac{5}{2} \right] \end{aligned}$$

Esercizio 6.4

Calcolare U e C_V per un sistema a due livelli popolato da bosoni.

Dalla teoria è nota la

$$\Xi_b = \prod_s \left[\frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_s)}} \right]$$

Assumiamo i due livelli energetici come

$$\begin{cases} \epsilon_0 = 0 \\ \epsilon_1 = \epsilon \end{cases}$$

e in questo caso la funzione di partizione gran canonica diviene

$$\Xi = \frac{1}{(1 - e^{\beta\mu})(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})}$$

Dalla definizione di energia interna si può utilizzare il trucco di Feynman

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{\Xi} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_s^N s \epsilon e^{\beta(N\mu - s\epsilon)} = \\
&= -\frac{1}{\Xi} \frac{\epsilon}{\beta} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_s^N \frac{\partial}{\partial \epsilon} e^{\beta(N\mu - s\epsilon)} = \\
&= -\frac{1}{\Xi} \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_s^N e^{\beta(N\mu - s\epsilon)} = \\
&= -\frac{1}{\Xi} \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \Xi}{\partial \epsilon} = \\
&= -\frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \epsilon}
\end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare l'energia interna

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \epsilon} = \\
&= \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \ln(1 - e^{\beta\mu})(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})}{\partial \epsilon} = \\
&= \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \ln(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})}{\partial \epsilon} = \\
&= \frac{\epsilon}{\beta} \frac{\beta e^{\beta(\mu - \epsilon)}}{(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})} = \\
&= \epsilon \frac{e^{\beta(\mu - \epsilon)}}{(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})} = \\
&= \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}
\end{aligned}$$

Per la capacità termica è sufficiente utilizzare la relazione

$$\begin{aligned}
C_V &= \frac{\partial U}{\partial T} = \\
&= -\frac{\epsilon}{(e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1)^2} \frac{\epsilon - \mu}{k_B} \left(-\frac{1}{T^2} \right) e^{\beta(\epsilon - \mu)} = \\
&= \frac{k_B \beta^2 \epsilon (\epsilon - \mu)}{(e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1)(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})}
\end{aligned}$$

Esercizio 9.5

(a) Mostrare che la funzione di partizione gran canonica per la radiazione di corpo nero assume la forma

$$\Xi = \prod_s \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_s}} \quad (1)$$

La radiazione di corpo nero è costituita da fotoni, ossia bosoni. Dalla teoria (vista in classe) è nota la funzione di partizione gran canonica bosonica:

$$\Xi_b = \prod_s \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_s)}}$$

Osservando ora come si possano aggiungere/rimuovere fotoni ad un corpo nero senza alcun costo energetico ($\mu = 0$) la 1 diviene ovvia.

(b) Usando l'equazione 1 oppure in altro modo si dimostri che l'entropia per unità di volume della radiazione di corpo nero a temperatura T assume la forma

$$s = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45 \hbar^3 c^3} \quad (2)$$

Richiamiamo ora l'energia per unità di volume della radiazione di corpo nero (eq. 9.20 Kennett)

$$u = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{15 (\hbar c)^3}$$

e anche la sua pressione (eq. 9.29 Kennett)

$$P = \frac{u}{3}$$

Richiamando ora la relazione termodinamica

$$U = TS - PV - \mu N \quad (3)$$

ponendo $\mu = 0$ (vedi punto a) e dividendo per il volume V , si ottiene

$$s = \frac{u + P}{T}$$

che unita alle precedenti conclude la dimostrazione

$$s = s = \frac{u + \frac{u}{3}}{T} = \frac{4}{3} \frac{u}{T} = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45 \hbar^3 c^3}$$

Esercizio 9.9

Calcolare la temperatura critica per un BEC in 2 dimensioni.

Richiamiamo ora la densità degli stati 2D calcolata in precedenza:

$$g(\epsilon) = g_s \frac{m}{2\pi \hbar^2} L^2$$

Possiamo calcolare il numero medio di particelle con la classica formula

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

la quale, posto $n = \frac{N}{L^2}$ diventa

$$n = g_s \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon$$

Per la temperatura critica si ha $e^{\beta_0} \gg 1$ e si può approssimare

$$n \approx g_s \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int_0^\infty e^{-\beta(\epsilon - \mu)} d\epsilon$$

la cui soluzione è

$$n = g_s \frac{mk_B}{2\pi \hbar^2} T_0$$

Invertendo l'equazione precedente si ottiene la relazione desiderata

$$T_0 = \frac{2\pi \hbar^2}{mk_B} \frac{n}{g_s}$$