Formulario Solidi e Fluidi

Marco Caporale

10 maggio 2021

1 Capitolo 1: Mezzi Continui e Struttura Molecolare

- $\nabla p = \rho \overrightarrow{g}$ Legge di equilibrio idrostatico
- $pV = \nu RT$ Legge dei gas
- $p = \frac{1}{3} n m v_{rms}^2$
- $v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$
- $l = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$ Libero cammino medio
- $F_v = \frac{1}{f} V_v$ Deformazione pistone (f coefficiente di fluidità, V_v velocità di deformazione)
- $\eta = \frac{n}{3} l m v_{rms} = \sqrt{\frac{m k_B T}{6\sigma^2}}$ Viscosità dinamica [Pa s]
- $\tau = \eta \frac{\partial V_x}{\partial z}$ Sforzo di taglio per fluidi newtoniani (empirica)
- $\overrightarrow{q} = -k_T \nabla T$ Legge di Fourier
- $\overrightarrow{q} = -k_T \nabla T = -\frac{n}{3} v_{rms} l c \nabla T$ Legge Fourier per i gas (c calore specifico per molecola) da cui $k_T = \frac{n}{3} v_{rms} l c = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{c}{\sigma} v_{rms} \sim T^{\frac{1}{2}}$
- $\nabla \cdot \overrightarrow{q} = -k_T \nabla^2 T$
- $\frac{dT}{dt} = D_T \nabla^2 T$ con D_T diffusività termica $D_T = \frac{k_T}{\rho c_p}$ con cui stimiamo il tempo caratteristico di conduzione $\tau_{cond} = \frac{L^2}{D_T}$
- $\frac{dT}{dt} = D_T \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{V} \cdot \nabla T$ dove $\overrightarrow{V} \cdot \nabla T$ è il termine avvettivo che ci permette di stimare il tempo caratteristico di avvezione $\tau_{avv} = \frac{L}{V}$
- $\overrightarrow{J} = -D_F \nabla \Phi$ Prima legge di Fick, J flusso di particelle, Φ concentrazione
- $\overrightarrow{J} = -D_F \nabla \Phi = -\frac{1}{3} v_{rms} l \nabla \Phi$ da cui $D_F = \frac{1}{3} v_{rms} l$ che per il gas perfetto $D_F = \frac{1}{3} v_{rms} l = \frac{k_B^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6}\sigma} \frac{1}{p} \sqrt{\frac{T^3}{m}}$
- $\frac{d\Phi}{dt} = D_F \nabla^2 \Phi$ Seconda legge di Fick che deriva dalla conservazione del numero di particelle totali diffuse nel volume, da cui stimiamo il tempo caratteristico di diffusione $\tau_F = \frac{L^2}{D_F}$
- $\gamma = \frac{dW}{dA}$ Tensione superficiale $[Nm^{-1}]$
- $p_{in} - p_{est} = \gamma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ Legge di Laplace sulla curvatura delle superfici in discontinuità di pressione

- $\gamma_{SL} + \gamma_{LG} cos\theta_C = \gamma_{SG}$ Equazione di Young della capillarità
- $h = 2\gamma \frac{cos\theta_C}{\rho g a}$ Legge di Yurin
- $W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Aq^2}{s} + Be^{-s/\delta}$ Energia reticolare dove il primo termine è il termine attrattivo dato dalla forza di Coulomb, A è la costante di Madelung determinata dalla geometria, s il passo reticolare
- $\beta = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$ Compressibilità
- $K = \frac{1}{\beta} = -V\frac{\partial p}{\partial V}$ Incompressibilità o "Bulk Modulus"
- $K = \frac{1}{\beta} = -V\frac{\partial p}{\partial V} = V\frac{d^2W}{dV^2}$ derivante da $dW = -pdV$
- $W(s) = W_0 + \frac{1}{2!}(\frac{d^2W}{ds_0^2})\Delta s^2 + \frac{1}{3!}(\frac{d^3W}{ds_0^3})\Delta s^3 + ... = W_0 + \frac{1}{2}\kappa\Delta s^2 - f\Delta s^3 + ...$ sviluppo dell'energia del reticolo
- $\mathcal{E}_0 = W(s) + K = W_0 + \frac{3}{2}k_BT$
- $\mathcal{E} = \frac{3k_BT}{\overline{m}} = \frac{3RT}{N_A\overline{m}}$ Energia totale di un atomo mediata sul reticolo per unità di massa
- $c_v = 3\frac{R}{N_A\overline{m}}$ Legge di Dulong Petit dalla definizione di $c_v = \frac{d\mathcal{E}}{dT}$
- $\Delta a = \sqrt{\frac{3k_BT}{\kappa}}$ Passo d'oscillazione dell'atomo approssimando $W(s)$ al secondo ordine, quindi per oscillazione simmetrica
- $\Delta s = \pm\Delta a + \varepsilon, \varepsilon > 0$ Passo d'oscillazione approssimando al terz'ordine
- $\varepsilon \approx f\frac{\Delta a^2}{\kappa} = \frac{3fk_BT}{\kappa^2}$ Dipendenza di epsilon dalla temperatura
- $s_0' = s_0 + \varepsilon$
- $\alpha_l = \frac{1}{s_0}\frac{\partial s_0'}{\partial T} = \frac{1}{s_0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} = \frac{3fk_B}{s_0\kappa^2}$ Coefficiente di espansione termica Lineare per un solido
- $\alpha_v = 3\alpha_l$ Coefficiente di espansione termica Volumetrica per un solido

2 Capitolo 2: Equilibrio Termodinamico

- $\Delta W = \Delta Q + \Delta L$ Primo principio della termodinamica
- $\delta_e S = \frac{\delta Q}{T}$ Secondo principio della termodinamica
- $dS = \delta_e S + \delta_i S$ dove $\delta_i S \geq 0$
- $dS = \frac{\delta Q}{T}$ Secondo principio della termodinamica per processi reversibili
- $H = E + pV$ Entalpia (calore scambiato a p costante)
- $dH = TdS + Vdp$
- $F = E - TS$ Energia libera di Helmoltz
- $dF = -pdV - SdT$
- $G = E - TS + pV$ Potenziale di Gibbs
- $dG = Vdp - SdT$

- $p = \rho RT$ Legge dei gas per gas specifico essendo R_u costante universale dei gas e $R = R_u/\mu$
- $p = \frac{R_u T}{V} \sum_i n_i$ Legge di Dalton
- $\alpha = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_p = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial T})_p$ Coefficiente di espansione termica (per il gas perfetto $\alpha = \frac{1}{T}$)
- $\beta_T = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial p})_T = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial p})_T$ Compressibilità isoterma
- $K_T = \frac{1}{\beta_T} = -V(\frac{\partial p}{\partial V})_T = \rho(\frac{\partial p}{\partial \rho})_T$ Incompressibilità isoterma o *Bulk Modulus*
- $\frac{V - V_0}{V_0} = -\beta_T(p - p_0) + \alpha(T - T_0)$ Equazione di stato per sostanza qualsiasi (solido soggetto a sforzo isotropo, fluido in condizioni statiche)
- $c_p = T(\frac{\partial S}{\partial T})_p = (\frac{\partial H}{\partial T})_p$ Calore specifico a pressione costante
- $c_v = T(\frac{\partial S}{\partial T})_V = (\frac{\partial E}{\partial T})_V$ Calore specifico a volume costante
- $R = c_p - c_v$ Per il gas perfetto
- $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
- $\Delta E = (\frac{\partial E}{\partial T})_V \Delta T + (\frac{\partial E}{\partial V})_T \Delta V$ Energia interna per sostanza qualsiasi
- $\Delta E = c_v \Delta T - p\Delta V + T(\frac{\partial p}{\partial T})_V \Delta V$
- $dE(T, V) = c_v dT + [\alpha T K_T - p]dV$
- $c_p = c_v + \alpha^2 T K_T V$ Relazione fra i calori specifici per sostanza qualsiasi
- $\rho c_p(\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \nabla T) = \rho Q + k\nabla^2 T$ Equazione del calore
- $Ra = \frac{\rho \alpha \Delta T g h^3}{\eta D_T} > Ra_{cr}$ Condizione di instabilità per fluido viscoso (η) incomprimibile soggetto a gradiente verticale di temperatura ($\frac{dT}{dz} < 0$ condizione necessaria) essendo $Ra = \frac{F_{galleggiamento}}{F_{viscosa}}$
- $\frac{dT}{dz} < \Gamma_a < 0$ Condizione necessaria (più stringente) per fluido comprimibile
- $\Gamma_a = \frac{dT_a}{dz} = -\frac{g}{c_p}$ Gradiente adiabatico per gas perfetto
- $\Gamma_a = \frac{dT_a}{dz} = -\frac{\alpha T g}{c_p}$ Gradiente adiabatico per sostanza generica
- $G_1(p, T) = G_2(p, T)$ Potenziale di Gibbs per transizione di fase in equilibrio
- $(\frac{dp_e}{dT}) = \frac{\Delta S}{\Delta V}$ Equazione di Clausius-Clapeyron per la transizione di fase
- $L = T(\Delta S)_T = T(\Delta S)_p$ Calore latente o *Entalpia di transizione*
- $dS_{lat} = dw_2 \frac{L}{T}$ Variazione infinitesima di entropia dovuta al passaggio di fase
- $dS_{sen} = \frac{1}{T} c_p dT - \frac{\alpha}{\rho} dp$ Variazione infinitesima di entropia dovuta al trasferimento di calore sensibile
- $dS = dS_{tot} = dS_{sen} + dS_{lat} = \frac{1}{T} c_p dT - \frac{\alpha}{\rho} dp + dw_2 \frac{L}{T}$
- $\frac{dT}{dz} = \Gamma_a + \frac{L}{c_p} \frac{dw_1}{dz}$ Gradiente termico in presenza di cambiamento di fase
- $\Delta T_f = \frac{L}{c_p}$
- $p_e = Ce^{-\frac{L}{RT}}$ Pressione di vapor saturo lontano dalla T critica

- $\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p}\frac{(1-\frac{Lp}{R_aT}\frac{\partial w_2}{\partial p})}{(1-\frac{L}{c_p}\frac{\partial w_2}{\partial T})} = -\frac{g}{c_p}\frac{1+c_1}{1+c_2} \approx -5.45K/Km$ Gradiente termico per atmosfera umida dove $R_a = R_u/\bar{\mu}$

- $\Theta(z) = T(z) - \int_{z_0}^{z}\Gamma_a dz$ Temperatura potenziale

- $\frac{d\Theta}{dz} = \frac{dT}{dz} - \Gamma_a$ Instabilità generica per sostanza compressibile

- $\frac{d\rho_{pot}}{dz} = \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_a}{dz} > 0$ Instabilità per sostanza compressibile dove $\frac{d\rho_a}{dz}$ è il gradiente adiabatico di densità e ρ_{pot} è la densità potenziale

- Per oceano/mantello $\frac{d\rho_a}{dz} = -\frac{g}{K_s}$ dove $K_s = \rho(\frac{\partial p}{\partial \rho})_S$ incompressibilità adiabatica

- $p_0(\frac{1}{\rho_t heta})^\gamma = p(\frac{1}{\rho})^\gamma$ densità potenziale per il gas perfetto $\frac{d\rho_\theta}{dz} = -\frac{\rho_\theta}{\Theta}\frac{d\Theta}{dz}$ con condizione di instabilità $\frac{d\rho_\theta}{dz} > 0 \iff \frac{d\Theta}{dz} < 0$

3 Capitolo 3: Conduzione Termica

- $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$ Legge di decadimento radioattivo (t tempo,λ probabilità di decadimento dei nuclei nell'intervallo di tempo)

- $H(t') = \sum H_i C_i e^{\lambda_i t'}$ Produzione di calore della roccia al tempo t', C_i le concentrazioni dei nuclei radioattivi

- $\frac{F(t)}{S_0} = \frac{F(0)}{S_0} + \frac{G(t)}{S_0}[e^{\lambda t} - 1]$ Isocrona di roccia intera

- $y_i = c + x_i[e^{\lambda t} - 1]$

- $T(z) = -\frac{\rho}{k_T}H\frac{z^2}{2} + \frac{q_s}{k_T}z + T_s$ Temperatura in funzione della profondità dalla legge di conduzione stazionaria per valori di H costanti

- $T_i(z) = -\frac{\rho_i H_i}{k_i}\frac{(z-z_{i-1})^2}{2} + \frac{q_{i-1}(z-z_{i-1})}{k_i} + T_{i-1}$ Generalizzazione della precedente per un sistema multistrati dove teniamo in considerazione la continuità della temperatura ($T^+ = T^-$) e la continuità del flusso di calore ($q^+ = q^-$) fra gli strati dove gli indici $i-1$ indicano l'ultimo valore assunto dallo strato precedente

- Per crosta terrestre $H(z) = H_0 e^{-z/\delta}$ ovvero $k\frac{dT}{dz} = \rho\delta H_0 e^{-z/\delta} + c_1$ dove avendo assunto $h >> \delta$ possiamo dire che $c_\approx q_m$ da cui ricaviamo contributo crostale $q_s = q_m + q_c = q_m + [\rho H]\delta$ da cui otteniamo

- $T(z) = T_s + \frac{q_m}{k}z + \frac{\rho H_0 \delta^2}{k}(1 - e^{-z/\delta})$ Geoterma continentale

- $q(r) = \frac{\rho H r}{3}$ Flusso alla distanza r dal centro del pianeta per pianeta sferico con r dell'o.d.g del raggio del pianeta

- $T(r) = T_s + \frac{\rho H}{6k}(a^2 - r^2)$ Temperatura alla distanza r per pianeta sferico (a raggio del pianeta)

- $T(z,t) = \Re\{Z(z)f(t)\} = \Re\{(\Delta T e^{-z/\delta}e^{-iz/\delta})(e^{i\omega t})\} = \Delta T e^{-z/\delta}cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$ Riscaldamento periodico di un semispazio da sorgente esterna dove abbiamo definito $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ lo spessore di penetrazione

- $T(z,t) = T_s + (T_0 - T_s)\,\mathrm{erf}(\frac{z}{2\sqrt{Dt}})$ Raffreddamento istantaneo di un semispazio a Temperatura T_0 posto a contatto con un termostato T_s dove erf è la Error function $\mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

- $q(z,T) = \frac{k}{\sqrt{\pi Dt}}(T_0 - T_s)e^{-\eta^2} = \frac{k}{\sqrt{\pi Dt}}(T_0 - T_s)e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$ Flusso di calore del raffreddamento istantaneo, ottenuto da $q = k\frac{\partial T}{\partial z} = k\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}$ essendo $\eta = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}$

- $t = \frac{(T_0-T_s)^2}{\pi D(\frac{\partial T}{\partial z})^2} \approx 6 \times 10^6 anni$ Stima dell'età della Terra di Kelvin eguagliando il flusso di calore $q = k\frac{\partial T}{\partial z}$ al flusso del raffreddamento istantaneo

- $T(z,t) = T_s + (T_0 - T_s)\,\mathrm{erf}(\frac{z}{2\sqrt{Dt}})$ Geoterma oceanica nel sistema di riferimento solidale con la litosfera in movimento (stesso risultato del raffreddamento istantaneo)

- $T(z,x) = T_s + (T_0 - T_s)\,\mathrm{erf}(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{v}{Dx}})$ Geoterma oceanica nel sistema di riferimento fermo rispetto alla dorsale, essendo v la velocità di deriva della litosfera rispetto alla dorsale, x la distanza percorsa dall'origine, da cui si può derivare flusso di calore analogo a quello del semispazio

- $z_L = 2.32\sqrt{Dt} = 2.32\sqrt{\frac{Dx}{v}}$ Spessore della Litosfera dato dall'aver compiuto il 90% dell'escursione termica

- $w = \frac{\rho_0\alpha(T_0-T_s)}{(\rho_0-\rho_w)}2\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}$ Topografia isostatica dei fondali oceanici (essendo w la profondità del fondale rispetto alla quota della sommità della dorsale), derivata dal principio di isostasia

- $h = \frac{k_g(T_0-T_s)}{q_c}$ stima dell'altezza di un ghiacciaio trascurando avvezione e depositi di ghiaccio (stima irrealistica), sono noti $T_0 e T_s$ temperatura alla base e temperatura esterna

- $T(z) = T_s + \frac{\Gamma_g}{2}\sqrt{2\pi DH}a(1 - \mathrm{erf}(u(z))) = T_s + \frac{\Gamma_g}{2}\sqrt{2\pi DH}a(1 - \mathrm{erf}(\sqrt{\frac{a}{2Dh}}z)))$ temperatura in un ghiacciaio a base fredda da cui considerando la bse vicina al punto di fusione $T_f = T_s + \frac{\Gamma_g}{2}\sqrt{2\pi Dha}$ che ci permette di stimare l'altezza del ghiacciaio a $h = (\frac{T_f-T_s}{\Gamma_g})^2\frac{2a}{\pi D}$ più realisticamente

4 Capitolo 4: Meccanica dei Continui

- $A'_{i_1 i_2 \dots i_k} = C_{i_1 j_1}C_{i_2 j_2}\dots C_{i_k j_k}A_{i_1 i_2 \dots i_k}$ Definizione di tensore

- δ_{ij} Delta di Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ quando $i = j$, 0 altrove)

- e_{ijk} Tensore di Ricci ($e_{ijk} = 1$ per permutazioni pari di 123, -1 per permutazioni dispari, 0 altrove)

- $e_{ijk}e_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ Identità $e - \delta$

- $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$ Gradiente dello spostamento diviso in componente simmetrica e antisimmetrica

- $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ Tensore infinitesimo di deformazione
  Nel sistema di riferimento degli autovettori normalizzati la variazione relativa lungo la componente i è il valore $\varepsilon_{ii} = \frac{dS-ds_0}{dS_0}$, viceversa con $i \neq j$ $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ angoli di deformazione nel piano

- $\frac{dS-dS_0}{dS_0} = \varepsilon_{ij}\frac{dx_i}{dS_0}\frac{dx_j}{dS_0}$ Variazione relativa di distanza fra due punti distanti dx_i

- $\varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \overrightarrow{u} = \frac{\delta V}{V_0}$ Traccia del tensore è variazione volumetrica relativa

- $\varepsilon_{ij}^{(I)} = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$ Componente isotropa tensore deformazione

- $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$ Componente deviatorica tensore deformazione

- $\frac{DA}{Dt} = \int_{V(t)} \{\frac{\partial a(\overrightarrow{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot [a(\overrightarrow{x},t)\overrightarrow{v}]\} dV$ Derivata di grandezze additive A dove $a(\overrightarrow{x},t)$ è la densità di A e il prodotto $a\overrightarrow{v}$ il flusso di A

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{v}) = 0$
  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \overrightarrow{v} = 0$ Equazione di continuità (dalla conservazione della massa)

- $\frac{D\Gamma}{Dt} = \int_{V(t)} \rho \frac{d\gamma}{dt} dV$ Applicazione dell'equazione di continuità a grandezze Γ dipendenti dalla massa

- $T_i(\hat{\mathbf{n}}) = n_k \tau_{ki}$ Trazione su una superficie di normale n note le componenti τ_{ki}

- $f_i + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} = \rho \frac{dv_i}{dt}$ Equazioni del moto

- $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ Dall'equazione del momento angolare

- $\overline{p} = -\frac{1}{3}\tau_{kk}$ Pressione media dovuta agli sforzi normali

- $\sigma_1' = \sigma_1 - \frac{1}{3}\tau_{kk}$
  $\sigma_2' = \sigma_2 - \frac{1}{3}\tau_{kk}$
  $\sigma_3' = \sigma_3 - \frac{1}{3}\tau_{kk}$

- $S_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ Sforzo di taglio massimo

- $0 = \rho g \delta_{i3} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$ Stato di sforzo in prossimità della superficie della crosta

- $\tau_{ij} = \Delta\tau_{ij} - \overline{p}_{lit}\delta_{ij}$ Ambienti tettonici, $\Delta\tau_{ij}$ fornisce la componente deviatorica
  $\sigma_i' = \sigma_i + \overline{p}$
  $\tau_{kk}' = 0 \iff \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$
  $\sigma_z' = \sigma_1'$ Ambiente distensivo, faglia normale
  $\sigma_z' = \sigma_3'$ Ambiente compressivo, faglia inversa
  $\sigma_z' = \sigma_2'$ Faglia trasforme, compressione e distensione sul piano xy

- $\tan(2\beta) = \frac{1}{f_s}$ Teoria della fagliazione di Anderson avendo $f_s > 0$ coefficiente di attrito statico
  $\delta = 90 - \beta > 45$ Ambiente distensivo, faglia normale
  $\delta = \beta < 45$ Ambiente compressivo, faglia inversa
  Per faglia trasforme $\beta < 45$ angolo fra piano ed asse di massima compressione

5 Capitolo 5: Relazioni Costitutive

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$ Equazione di continuità

- $\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} \quad i = 1,2,3$ Equazioni del moto

- $\dot{L} = \dot{K} + \int_B \tau_{ij} \frac{d}{dt}\varepsilon_{ij} dV = \dot{K} + \dot{L}_\varepsilon$ Equazione dell'energia per un continuo
  $\dot{L}_\varepsilon = \int_B \tau_{ij} \frac{d}{dt}\varepsilon_{ij} dV$ Lavoro di deformazione
  $\Delta\mathcal{L}_\varepsilon = \tau_{ji}\Delta\varepsilon_{ij}$ Variazione nell'intervallo Δt
  $\Delta\mathcal{L}_\varepsilon = \Delta\mathcal{L}_V + \Delta\mathcal{L}_F$ Lavoro di deformazione su dV
  $\Delta\mathcal{L}_V = -\overline{p}\frac{\Delta V}{V}$ Lavoro speso per cambiare il volume
  $\Delta\mathcal{L}_F = \tau_{ij}'\Delta\varepsilon_{ij}'$ Lavoro speso per cambiare la forma a V costante ($\tau_{ij} = \overline{p}\delta_{ij} + \tau_{ij}'$)

- $F = k\Delta u$ Legge di Hooke

- $\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ Relazione costitutiva che lega τ_{ij} ad ε_{ij} (21 costanti libere)
  $\tau_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ Relazione costitutiva per materiale isotropo (λ, μ costanti di Lamè)
  $\frac{1}{3}\tau_{kk} = K\varepsilon_{kk} = -\Delta p$ Legame parti isotrope, K incompressibilità, *bulk modulus*
  $\tau'_{ij} = 2\mu\varepsilon'_{ij}$ Legame parti deviatoriche, μ rigidità, *shear modulus*
  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$
  $K = \frac{\tau_{kk}}{3\varepsilon_{kk}} = -V\frac{\Delta p}{\Delta V}$
  $K_T = -V(\frac{\partial p}{\partial V})_T$ Incompressibilità isoterma
  $K_S = -V(\frac{\partial p}{\partial V})_S$ Incompressibilità adiabatica

- $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}(\tau_{ij} - \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij})$ Relazione costitutiva inversa, deformazione dato lo sforzo $\varepsilon_{kk} = \tau_{kk}/(3\lambda + 2\mu)$
  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}(\tau_{ij} - \frac{\lambda}{(3\lambda+2\mu)}\tau_{kk}\delta_{ij})$

- $\tau_{kk} = \tau_{11}$ Stato di sforzo uniassiale
  $E = \frac{\tau_{11}}{\varepsilon_{11}} = \mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$ Modulo di Young, trazione su allungamento relativo
  $\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ Modulo di Poisson, contrazione trasversale sulla variazione relativa longitudinale

- $\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ Equazione del moto per piccole deformazioni

- $\rho_0\frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} = \overrightarrow{f} + (\lambda + \mu)(\nabla(\nabla \cdot \overrightarrow{u})) + \mu\nabla^2\overrightarrow{u}$ Equazione di Cauchy-Navier per le onde elastiche

- $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\varphi$ Equazione d'onda di D'Alembert, c velocità di propagazione dell'onda
  $\phi = \nabla \cdot \overrightarrow{u} = \varepsilon_{kk}$ Onde P (*Primae*), longitudinali
  $V_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}$ Velocità onde P
  $\psi = \nabla \times \overrightarrow{u}$ Onde S (*Secundae*), trasversali
  $V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$ Velocità onde S

- Fluidi Viscosi Newtoniani
  $F = \eta\dot{u}$ Pistone, $\dot{u}$ velocità del pistone
  $\varepsilon_{ij}^{(I)}$ Deformazione isotropa limitata
  ε'_{ij} Deformazione deviatorica illimitata
  σ_{ij} Sforzo dovuto al moto del fluido (0 quando fluido in quiete), esclusivamete deviatorico
  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$ Fluido in movimento
  $e_{ij} = \dot{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ Velocità di deformazione
  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij})$ Fluido newtoniano di viscosità η

- $\rho\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \rho\overrightarrow{g} - \nabla p + \eta[\nabla^2\overrightarrow{v} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \overrightarrow{v})]$ Equazione di Navier-Stokes
  $\rho\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \rho\overrightarrow{g} - \nabla p + \eta\nabla^2\overrightarrow{v}$ N-S per fluido incomprimibile ($\nabla \cdot \overrightarrow{v} = 0$)
  $\rho\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \rho\overrightarrow{g} - \nabla p$ Equazione di Eulero, N-S per fluido inviscido ($\eta = 0$)
  $\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \nabla(\frac{v^2}{2}) - \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\omega}$
  $\rho(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \nabla(\frac{v^2}{2}) - \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\omega}) = \rho\overrightarrow{g} - \nabla p + \eta[\nabla^2\overrightarrow{v} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \overrightarrow{v})]$ N-S in forma vettoriale

- $u(z) = \frac{V}{h}z, \quad p(z) = \rho g(h - z) + p_a$ Flusso piano di Couette

- $u(z) = \frac{k}{2\eta}(h^2 - z^2)$ Flusso 1-D forzato da un gradiente di pressione(k)

- $u(z) = \frac{k}{4\eta}(R^2 - r^2)$ Flusso di Poiseuille, Flusso newtoniano in condotti cilindrici, max in $r = 0$
  $\overline{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{k}{8\eta}R^2 = \frac{1}{2}u_{max} \propto k$ Velocità media del flusso in condotto, (Q portata)

- Transizione alla turbolenza
  $f = \frac{k}{\frac{\rho \overline{v}^2}{4R}}$ Fattore di attrito (forza di pressione/accelerazione)
  $Re = \frac{2R\rho\overline{v}}{\eta}$ Numero di Reynolds (accelerazione/forza viscosa)
  Transizione alla turbolenza quando $Re > 2200$ (sperimentale)
  Per flusso laminare $f = \frac{64}{Re}$
  Per regime turbolento $f = \frac{0.3164}{Re^{\frac{1}{4}}}$ (sperimentale)

- $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \nabla B = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\omega}$ Teorema di Bernoulli (fluido inviscido)
  $B = \frac{1}{2}v^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho}$ Funzione di Bernoulli
  Flussi stazionari $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = 0$
  Flussi irrotazionali $\overrightarrow{\omega} = \nabla \times \overrightarrow{v} = 0$
  $\overrightarrow{v} = \nabla\phi$ Potenziale di velocità ϕ
  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho} = 0$ Teorema di Bernoulli per flusso inviscido irrotazionale

- $\frac{D}{Dt}\oint_\gamma \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{l} = 0$ Teorema di Kelvin, dato un fluido inviscido barotropico in un sistema inerziale la circuitazione di $\overrightarrow{v}$ è costante nel tempo (non si formano vortici)