

APPUNTI DAL CORSO DI

INTRODUZIONE ALLA FISICA DEI SISTEMI COMPLESSI

BERSELLI GREGORIO LANZI SAMUELE
MATTEO BERBIERI GABRIELE FARNÈ
[HTTPS://GITHUB.COM/GRUFOONY/FISICA_UNIBO](https://github.com/GRUFOONY/FISICA_UNIBO)

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Sistema Complesso	5
1.2	Teoria di Ljapunov	6
1.3	Costruzione di un modello	7
1.3.1	Modelli ad agente	7
1.3.2	Modelli a equazioni	8
1.4	Distribuzioni	8
1.5	Esempi	10
1.5.1	Automa cellulare	10
1.5.2	Random Walk 1D	12
1.5.3	Random Walk 2D	12
1.5.4	Random Walk non omogenea	13
1.5.5	Dinamica generica di interazione	14
1.5.6	Catmap	14
1.5.7	Modello economico	16
1.5.8	Modello economico evoluto	17
1.5.9	La rovina di un giocatore	18
2	Entropia e Informazione	21
2.1	Probabilità	21
2.1.1	Ranking distribution	21
2.2	Entropia	22
2.3	Informazione	22
2.3.1	Matrice stocastica	23
2.3.2	Teoria di Markov	24
2.4	Esempi	25
2.4.1	Utilizzo della misura invariante	25
2.4.2	Entropia di una mano di carte	25
2.4.3	Broken Stick Model/Modello di Markov	26
2.4.4	Penney's game	26
3	Modelli di trasporto	29
3.1	Teoria	29
3.2	Esempi	29

4	Teoria del controllo	31
4.1	Approccio generale	31
4.2	Applicazioni biologiche	31
4.3	Esempi	34
4.3.1	Pendolo rovesciato	34
4.3.2	Marriage Model/Modello relazionale	35
4.3.3	Modello di Fitzhugh-Nagumo	37
5	Altre applicazioni	39
5.1	Fisica della città	39
5.1.1	Modelli di traffico	40
5.2	Esempi	42
5.2.1	Optimal Velocity Model	42

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Sistema Complesso

Definizione 1.1.1. *Sistema Complesso è un sistema dinamico composto da sottosistemi interagenti tra loro, chiamati agenti.*

Per lo studio di un sistema complesso si usa solitamente un approccio olistico, ossia si studiano prevalentemente le proprietà macroscopiche del sistema totale, senza considerare i singoli sottosistemi. Un'osservazione importante che va effettuata è che un modello di sistema complesso **prevede**, non descrive.

Definizione 1.1.2. *Lo spazio degli stati dinamici del sistema è detto spazio delle fasi.*

Definizione 1.1.3. *I gradi di libertà di un sistema sono dati da $\#d.o.f. = \frac{\text{dimensione dello spazio}}{2}$*

Per un numero elevato di gradi di libertà è possibile utilizzare l'approccio della meccanica statistica. Alcune delle proprietà principali dei sistemi complessi sono:

- **complessità:** presenza di molti d.o.f. (molti agenti)
- **proprietà emergenti:** derivano dal grande numero di agenti. Ad esempio possiamo definire *fluido* un insieme di molte particelle ma la particella singola non può essere fluida.
- **autorganizzazione:** i sistemi complessi sono ibridi, ossia metà stocastici e metà deterministici. Per studiarli devo dare ugual peso a entrambi gli aspetti.

La complessità dei sistemi fa sì che per definirne uno stato occorra molta *informazione*. Ogni sistema complesso fornisce un *feedback* rispetto alle condizioni iniziali che sono fornite. In particolare, si parla di *feedback positivo* se le condizioni iniziali portano il sistema a "esplodere", ossia ad allontanarsi inesorabilmente dall'origine, mentre si parla di *feedback negativo* quando dopo un certo periodo di tempo il sistema ritorna alle condizioni iniziali.

Definizione 1.1.4. *Un sistema a feedback negativo è detto in equilibrio dinamico.*

1.2 Teoria di Ljapunov

In un sistema classico, una volta scritta la lagrangiana (o hamiltoniana) del sistema e ottenute le *equazioni del moto*, è cosa fatta determinarne l'evoluzione nel tempo (traiettorie). Nei sistemi complessi, tuttavia, non è possibile utilizzare un approccio deterministico: si parla infatti di *caos deterministico*. Questo caos è causato soprattutto dalle fluttuazioni intrinseche dei sistemi complessi, le quali li rendono particolarmente sensibili alle condizioni iniziali. Si consideri sistema alle condizioni iniziali x_0 . Dopo un tempo t , si troverà naturalmente il sistema in una posizione $x(t)$ determinata dalle condizioni iniziali. Si assuma ora la presenza di fluttuazioni sulle condizioni iniziali $x_0 + \delta_0$: il sistema evolverà ora come $x(t) + \delta(t)$. La teoria vuole che le fluttuazioni seguano l'andamento

$$\delta(t) \simeq \delta_0 e^{\lambda t}$$

dove il coefficiente λ è detto *esponente di Ljapunov*. Il calcolo di questo parametro non è banale, pertanto non verrà dimostrato ma solo riportato.

Teorema 1.2.1. $\lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0, t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi^t(x + \delta) - \Phi^t(x)\|$

Nonostante il limite precedente appaia complicato, nella maggior parte dei casi è possibile utilizzare l'approssimazione $\lambda \simeq \frac{1}{t} \sum_k \ln \frac{\delta_k}{\delta_0}$, dove k indicizza una traslazione temporale Δt . Per comprendere i limiti dell'approssimazione precedente si può notare come $\delta_0 e^{\lambda t} = o(1)$, quindi $\ln \delta_0 + \lambda t = 0$.

Definizione 1.2.1. $t = -\frac{\ln \delta_0}{\lambda}$ tempo di predittività del modello

Si può notare come:

- l'esponente di Ljapunov è una proprietà dell'orbita, non del punto, ed è quindi necessario interagire su tempi lunghi;
- un'alta sensibilità alle condizioni iniziali implica una scarsa predittività;
- per $\lambda \gg 1$ è possibile utilizzare l'approccio statistico;
- le proprietà sono locali (ma non così tanto locali).

Non è possibile conoscere a priori il segno di λ . Il *caos deterministico*, ovviamente, si ottiene solo se $\lambda > 0$ (l'esponentiale esplode) in un insieme a misura finita. Ne consegue che le orbite debbano espandersi rimanendo limitate, fenomeno noto come *stretching-folding*, che comporta la conservazione di una misura (volume).

Teorema 1.2.2. di Poincaré (del ritorno)

Un sistema dinamico che conserva i volumi su un compatto ritorna arbitrariamente vicino alle condizioni iniziali (feedback negativo).

1.3 Costruzione di un modello

Punto fondamentale di un sistema complesso è costruire un modello che riesca a riprodurre le sue caratteristiche fondamentali, per poi studiarlo. Innanzitutto, per prevedere un sistema occorre:

- un modello (matematico) per l'evoluzione;
- una conoscenza dello stato presente (o passato) del sistema *sufficiente* ad inizializzare il modello;

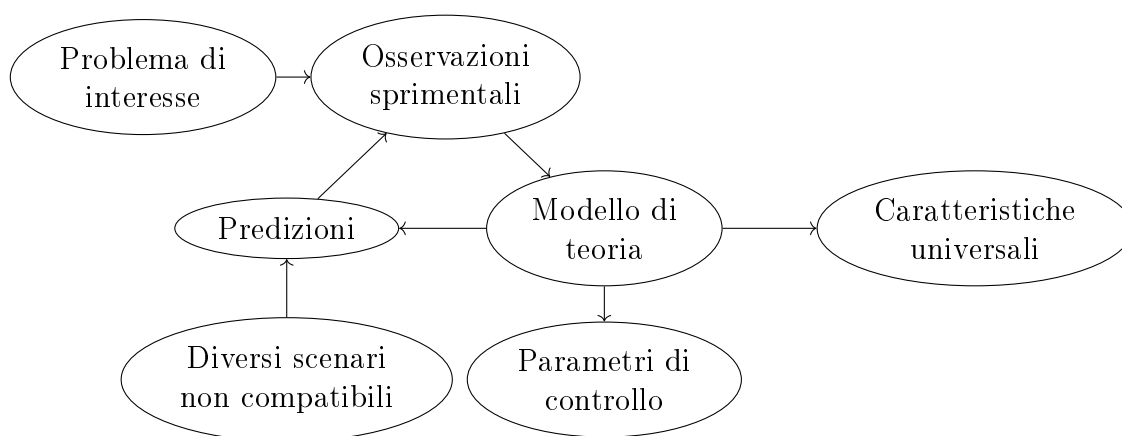


Figura 1.1: *Schema operativo*

In Fig.(1.1) è presente lo schema operativo della creazione di un modello. Il punto di partenza è sempre un problema, la cui osservazione sperimentale fornisce i dati sui quali costruire un modello di teoria. Con esso è poi possibile eseguire delle predizioni da confrontare con i dati sperimentali per comprenderne l'affidabilità e gli eventuali scenari incompatibili. Ovviamente un buon modello teorico deve avere dei parametri manipolabili (di controllo) e caratteristiche valide universalmente.

Si possono distinguere due tipologie di modelli, le quali verranno ora analizzate.

1.3.1 Modelli ad agente

La prima tipologia di modello sono i *modelli ad agente*, ossia quei modelli in cui si effettua uno studio di tipo bottom-up (dal particolare al generale). Assunzione fondamentale è di avere piena conoscenza sui comportamenti dei singoli agenti e sull'ambiente in cui questi si relazionano. Una volta *formalizzati* matematicamente i comportamenti dei singoli è possibile procedere con una *simulazione*, la quale fornirà una possibile evoluzione del sistema. È essenziale notare come in questo caso il risultato ottenuto sia solamente uno dei tanti possibili: bisognerà quindi effettuare la simulazione numerose volte e mediare sui risultati ottenuti. Riguardo la costruzione del modello, la prima cosa da definire è l'*ambiente* in cui ci si trova. Questo può essere neutro o avere caratteristiche, ad esempio una distribuzione di nutrimento (per

sistemi biologici). Altro punto fondamentale è definire *spazio e tempo*. Spesso non fa differenza la scelta di spazi e tempi discreti rispetto ai continui, quindi è preferibile assumere una discretizzazione iniziale per poi passare al continuo successivamente. Una volta definito lo spazio bisogna poi decidere le condizioni al contorno, ossia il comportamento ai bordi. Si possono avere *barriere* di tre tipi:

- **riflettenti**, dove si ha un bordo *non* oltrepassabile. Si crea quindi un fenomeno di **attrattività delle pareti**.
- **periodico**, dove si hanno i bordi coincidenti (esco da una parte e rientro dall'altra). Lo spazio assume in questo caso una forma toroidale.
- **assorbenti**, dove gli oggetti "uscenti" vengono distrutti. In questo caso bisogna di introdurre delle *sorgenti* nel modello per evitare di perdere tutti gli agenti.

Si nota facilmente come più piccolo sia il modello, più importante sia il contributo degli effetti di bordo.

Nella maggior parte dei sistemi non tutti gli agenti hanno le stesse caratteristiche: si definiscono allora **classi** di appartenenza, legate tra loro da relazioni matematiche.

1.3.2 Modelli a equazioni

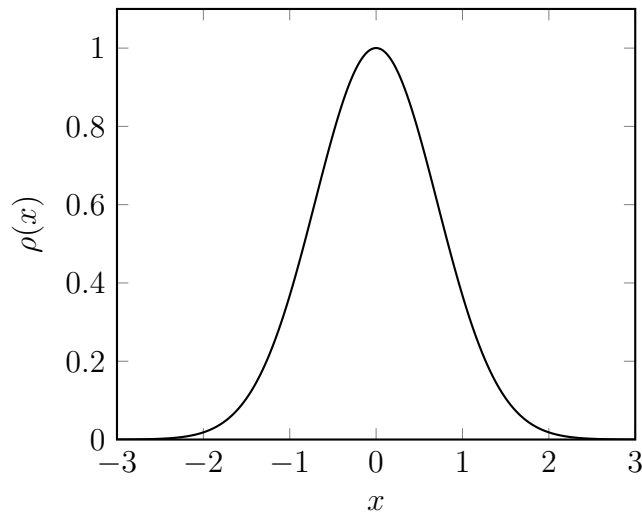
La seconda ed ultima tipologia di sistema complesso è data dai *modelli a equazioni*, ossia quei modelli in cui si effettua uno studio di tipo top-down (dal generale al particolare). In questo caso si assume di non avere conoscenza sui singoli agenti ma di possedere informazioni di carattere puramente macroscopico, dette *osservabili* del sistema. Tipicamente, gli osservabili sono legati tra di loro tramite equazioni differenziali le quali, una volta integrate, forniscono un'evoluzione del sistema nel tempo. In questo caso il risultato ottenuto rappresenta già una media di tutti i risultati possibili: le fluttuazioni del sistema provocheranno quindi uno scostamento da questo valore. Ovviamente, più tempo si farà evolvere il sistema, più rilevante sarà l'effetto delle fluttuazioni e meno preciso sarà il risultato della previsione.

1.4 Distribuzioni

Per l'analisi matematica dei sistemi è utile definire le funzioni di distribuzione, le quali sono indicatori della frequenza di avvenimento di un fenomeno.

Definizione 1.4.1. *Gaussiana*

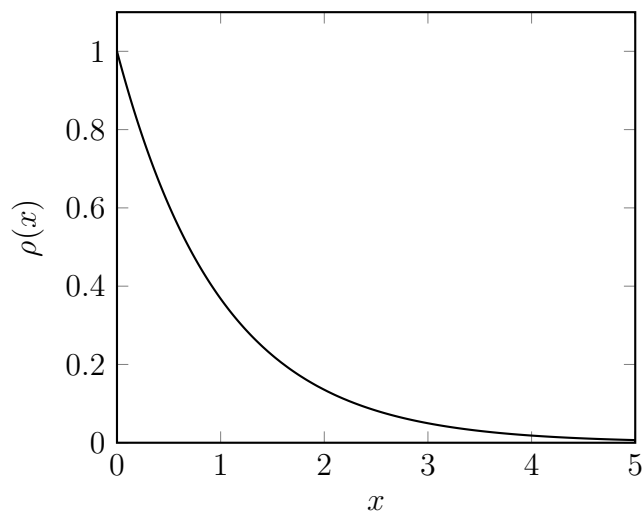
$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Figura 1.2: *Gaussiana*.

La gaussiana, riportata in Fig. (1.2), è nota come la distribuzione degli errori ed è tra le più importanti funzioni della fisica. Caratteristica principale è la sua discesa molto veloce superata una distanza pari a σ dal valore medio.

Definizione 1.4.2. *Esponenziale*

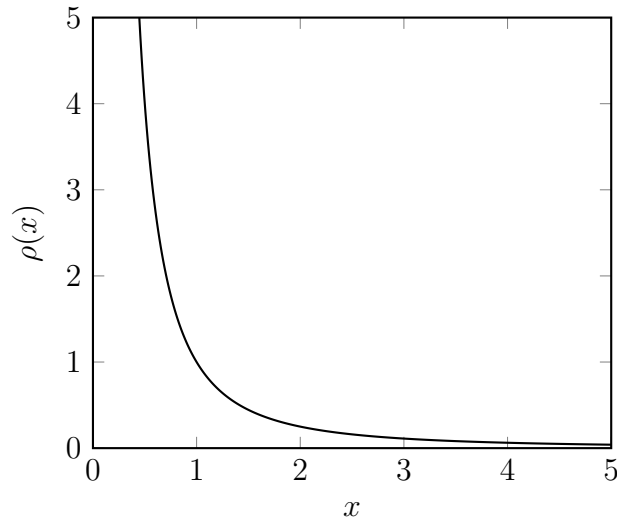
$$\rho(x) = \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{k}}$$

Figura 1.3: *Esponenziale*.

L'esponenziale, riportato in Fig. (1.3), è la distribuzione emergente dalla meccanica statistica (fattori di Boltzmann).

Definizione 1.4.3. *Potenza*

$$\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}, \text{ con } a > 0$$

Figura 1.4: *Potenza.*

La potenza, riportata in Fig. (1.4), è una distribuzione che possiede un'importante proprietà, detta *invarianza di scala*.

Teorema 1.4.1. *Invarianza di scala:*

se $\rho(x) \propto \frac{1}{x^a}$ allora posto $y = \lambda x$ si ha $\rho(y) = \frac{\lambda^a}{x^a} \propto \frac{1}{y^a}$

Definizione 1.4.4. *Momenti di una distribuzione:*

$$\langle x^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \rho(x) dx$$

Teorema 1.4.2. *Limite centrale:*

Siano x_k variabili casuali indipendenti, allora:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N x_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

1.5 Esempi

1.5.1 Automa cellulare

Un sistema che vuole simulare l'evoluzione di una popolazione in spazi e tempi discreti è detto automa cellulare. Si vuole ora creare un automa cellulare con le seguenti caratteristiche:

- effetto di **riproduzione**: consiste in un aumento del numero di individui che si riflette nell'espansione esponenziale del sistema (effetto comune in natura purchè le risorse siano sufficienti), ossia

$$\Delta n(t) \propto n(t)$$

- effetto di **competizione**: limita la crescita della popolazione. Un individuo compete coi suoi simili, quindi il contributo competitivo sarà del tipo

$$\Delta n(t) \propto -n^2(t)$$

Assunzione fondamentale di questo modello è che ogni individuo possa incontrare tutti quegli altri, irrealistico in quanto in una rete sociale la probabilità di incontri varierebbe da individuo a individuo. In un modello continuo si avrebbe

$$n(t + \Delta t) = n(t) + (an(t) - bn^2(t)) \Delta t$$

dove Δt rappresenta il tempo in cui la popolazione evolve (teoria del campo medio), a è il tasso di riproduzione e b il tasso di incontri, questi ultimi assunti costanti. Nel limite $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene l'equazione *logistica*

$$\dot{n}(t) = an(t) \left(1 - \frac{b}{a}n(t)\right) \quad (1.1)$$

che altro non è che la rappresentazione continua della *mappa logistica*

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (1.2)$$

ossia la rappresentazione dinamica non lineare più semplice che degenera in un moto caotico, resa pubblica nel 1976 dal biologo Robert May.

La stabilità del sistema si ha ovviamente per $n = \frac{b}{a}$ e la soluzione analitica del problema diventa

$$n(t) = \frac{an_0}{(a - bn_0)e^{-at} + bn_0}$$

riscrivibile nella forma di *funzione logistica*

$$f(t) = \tanh \frac{t}{2} \quad (1.3)$$

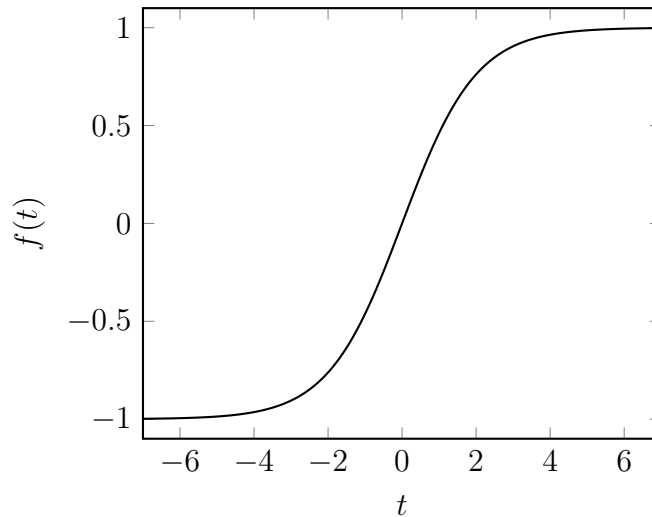


Figura 1.5: *Funzione logistica.*

Si può osservare come i limiti $f(t) = \pm 1$ rappresentino due stati fissi mentre la zona centrale sia di transizione, quindi per $f(t) = 0$ si avrà la massima variazione.

1.5.2 Random Walk 1D

Il modello più basilare di sistema complesso è sicuramente la random walk su una retta, ossia un punto che ogni istante di tempo decide in maniera casuale se spostarsi a destra o a sinistra. Sia $p = \frac{1}{2}$ la probabilità di muoversi verso destra (quindi anche a sinistra) di un passo Δx . Si hanno:

- {R}: $p(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x$
- {L}: $p(t + \Delta t) = x(t) - \Delta x$

Dopo n passi si ha quindi $p(n\Delta t) = x_0 + \sum_k \xi_k \Delta x$ con $\xi(t) = \pm 1$. Inoltre si può verificare che $\langle \xi_k \rangle = 0$, $\langle \xi_k^2 \rangle = 1$, $\langle \xi_k \xi_h \rangle = \langle \xi_k \rangle \langle \xi_h \rangle$, $k \neq h$. Per il teorema del limite centrale si ha: $\sum_k \xi_k \Delta x = \sqrt{n\Delta t} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k \xi_k \right) \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{2Dt}}$, con z variabile gaussiana. Introducendo il concetto di diffusione:

Definizione 1.5.1. *Diffusione.* $D = \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$

si può descrivere l'evoluzione del sistema come $x(t) = x_0 + z\sqrt{Dt}$. Si utilizza \sqrt{n} per normalizzare in quanto è l'unico esponente non divergente. La varianza della gaussiana cresce nel tempo, infatti calcolando i momenti della distribuzione si trova $\langle x(t) \rangle = x_0$, $\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = Dt$. Se la topologia del sistema fosse una circonferenza (e non una retta), si avrebbe un rilassamento esponenziale a una situazione stazionaria.

Definito un intervallo $-L, L$ sulla retta, la probabilità che il punto vi sia dopo un tempo t è data da:

$$P(|x| > L) = 1 - \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{2Dt}} dx \quad (1.4)$$

Si può facilmente notare come raddoppiando la distanza L il tempo t quadruplica.

1.5.3 Random Walk 2D

Volendo espandere il modello di random walk ad uno spazio 2D si nota subito come, essendo ogni asse indipendente dall'altro, si possa semplicemente comporre due gaussiane:

$$(x, y) \simeq \frac{1}{2\pi\Delta t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\Delta t}} = \rho(x, y, t)$$

Dove la diffusione segue la definizione precedente ed è la stessa in tutte le direzioni. La funzione $\rho(x, y, t)$ rappresenta di fatto la probabilità che il soggetto in analisi si trovi in un volume $\Delta x \Delta y$. Si può riscrivere la relazione precedente in coordinate polari ottenendo:

$$\rho(r, \theta, t) = \frac{r}{2\pi\Delta t} e^{-\frac{r^2}{2\Delta t}}$$

studiando più semplicemente l'allontanamento dall'origine. In particolare, l'allontanamento medio risulta:

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty \rho(r, \theta, t) r dr = \sqrt{\frac{\pi}{2} \Delta t}$$

e la densità diminuisce quindi esponenzialmente.

1.5.4 Random Walk non omogenea

Si consideri ora una random walk 1D con probabilità non uniforme in un reticolo di passo Δx . Sia ϵ un parametro e si definiscano le probabilità:

$$\begin{cases} p_{++} = p_{--} = \frac{1}{4}(1 + \epsilon x) & x \geq 0 \Rightarrow x \rightarrow x \pm 2\Delta x \\ p_{+} = p_{-} = \frac{1}{4}(1 - \epsilon x) & x < 0 \Rightarrow x \rightarrow x \pm \Delta x \end{cases}$$

Si può verificare facilmente come le probabilità siano ben definite. Il sistema tende a muoversi più velocemente nel verso positivo delle x e più lentamente nel verso opposto, assomigliando a una scatola con aria a diversa temperatura: vi è quindi un equilibrio locale (ogni nodo è identico). Si può osservare come:

$$\langle \Delta x \rangle = 0$$

$$\langle \Delta x^2 \rangle = (4\Delta x^2)(p_{++} + p_{--}) + \Delta x^2(p_{+} + p_{-}) = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\epsilon x\right) \Delta x^2$$

Ogni passo ho un *ensemble* differente, quindi lo spazio non è omogeneo. Ponendo $T(x) = \langle \Delta x^2 \rangle$ come funzione corrispondente alla temperatura fisica, si ottiene un gradiente costante:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{3}{2}\epsilon \Delta x^2$$

Questo gradiente si ritrova spesso in natura, ad esempio i batteri variano la velocità di movimento (casuale) dei loro flagelli seguendo un gradiente di cibo. Per essere apprezzabile la variazione di temperatura deve essere tale che $\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \propto \Delta x^3$ e in un limite continuo si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} T(x) \frac{\partial p}{\partial x} p(x, t) \\ \frac{d \langle x \rangle}{dt} &= \frac{1}{2} \int x \frac{\partial p}{\partial x} T(x) \frac{\partial p}{\partial x} p(x, t) > 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} > 0 \end{aligned}$$

Andando a calcolare media e mediana del sistema si nota come:

$$\begin{aligned} \int x p(x, t) dx &> 0 \\ - \int_{-L}^0 p(x, t) dx + \int_0^L p(x, t) dx &< 0 \end{aligned}$$

In conclusione la maggior parte delle particelle si trova nella zona fredda ($x < 0$), come vuole la fisica, ma la media della distribuzione si trova nella zona calda ($x > 0$).

1.5.5 Dinamica generica di interazione

Consideriamo di avere n_0 individui iniziali su una griglia (spazio discretizzato) che si muovono seguendo una Random Walk 2D e soggetti alle seguenti restrizioni:

- se un individuo ha spazio sufficiente, si riproduce in un tempo Δt , allora si deve avere $\Delta n(t) \propto n(t)$;
- se due individui competono per lo stesso spazio, uno dei due soccombe con una certa probabilità p , il che implica $\Delta n(t) \propto -n^2(t)$;

Si osservi come il termine $n^2(t)$ conti il numero di coppie. Definita la scala di tempo Δt , in un modello continuo si deve avere (teoria del campo medio):

$$n(t + \Delta t) = n(t) + (an(t) - bn^2(t)) \Delta t$$

con a parametro di riproduzione e $\frac{b}{a}$ competizione nella popolazione (dato dall'ambiente). Imponendo l'equilibrio

$$\dot{n}(t) = an(t) \left(1 - \frac{b}{a}n(t)\right) = 0$$

si ottengono i punti critici $n = 0$, instabile, e $n = \frac{a}{b}$ stabile. La soluzione al sistema è quindi del tipo

$$n(t) = \frac{an_0}{(a - bn_0)e^{-at} + bn_0} \quad (1.5)$$

e la funzione logistica del sistema è

$$f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}} = \tanh \frac{t}{2} \quad (1.6)$$

1.5.6 Catmap

Consideriamo un gatto su un toro Π^2 (ciambella) in gradi di muoversi secondo la:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Risulta ovvio come

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

quindi si conservino le aree. Calcolo degli autovalori:

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

e si ottengono

$$\begin{cases} \lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \lambda_+ \lambda_- = 1 \end{cases}$$

Il sistema dilata densamente lungo la direzione v_+ dell'autovettore $\lambda_+ > 1$. Dato un vettore iniziale x_0 , $(x_0 \cdot v_t)\lambda_t^n \Rightarrow \ln \lambda_t$ è l'esponentiale di Ljapunov.

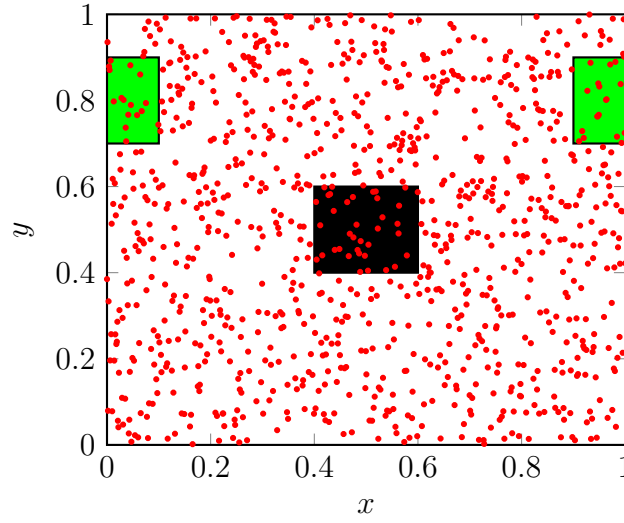


Figura 1.6: *Catmap*.

In Fig.(1.6) è rappresentata un'applicazione della catmap su un insieme di punti. Si può notare come una volta fatto evolvere il sistema partendo dall'area nera, questo non ritorni nella condizione iniziale applicando la trasformazione inversa (area verde).

Problema: data una distribuzione di punti ρ_0 , cosa succede a $\rho_0(T^n x)$?

Per definizione, data una distribuzione $\rho(x)$, questa deve essere normalizzata $\int_{\Pi^2} \rho(x) dx = 1$. L'equazione di continuità permette di imporre la conservazione del numero di particelle:

$$\rho(x, n) = \rho_0(T^{-n}x) \left| \frac{\partial T^{-n}}{\partial x} \right|$$

in cui si riconosce $\left| \frac{\partial T^{-n}}{\partial x} \right| = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, quindi $\rho_0(T^n x)$ evolve in una distribuzione di particelle. Si può ora constatare che, se $I(x)$ è un osservabile del sistema, vale la relazione:

$$\langle I \rangle (n) = \int I(x) \rho(x, n) dx$$

La teoria suggerisce l'esistenza di una distribuzione invariante $\rho_s(T^{-n}x) = \rho_s$. Sia ora $\chi_A(x)$ la funzione caratteristica dell'insieme A , e $\rho_0(y) = \frac{\chi_A(y)}{m(A)}$, $I(x) = \chi_B(x)$. L'integrale precedente diviene:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle (n) &= \int \chi_B(x) \frac{\chi_A(T^{-n}x)}{m(A)} dx = \int_B \frac{\chi_A(T^{-n}x)}{m(A)} dx = \\ &= \frac{1}{m(A)} \int_{T^{-n}B} \chi_A(y) dy = \frac{1}{m(A)} m(A) m(B) = m(B) \quad (1.7) \\ m(B) &= \int \chi_B(x) \rho_s(x) dx \end{aligned}$$

e si è così dimostrato il teorema 1.2.2.

1.5.7 Modello economico

Si vuole ora costruire un primo modello legato alla realtà simulando, per quanto grossolanamente, l'economia globale.

Supponiamo di avere M individui con n soldi ciascuno, che si muovono su una griglia secondo una Random Walk 2D. Ogni qualvolta due individui si trovino sulla stessa cella questi si scambiano 1 soldo con probabilità $p = \frac{1}{2}$.

Caso limite: se si incontra un povero ($n = 0$), si gioca lo stesso (gioco scorretto) per permettere a tutti di uscire dalla povertà. Il sistema ha quindi i seguenti limiti:

$$\begin{cases} \sum_k n_k = N \\ n_k \geq 0 \end{cases}$$

con N costante, quindi non si ha creazione/distruzione di denaro. La probabilità di trovare un individuo con n soldi è:

$$p(n) = \frac{\binom{M+N-2-n}{M-2}}{\binom{M+N-1}{N-1}}$$

e, ponendo $\bar{n} = \frac{N}{M}$, si può calcolare:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{n}} \left(1 - \frac{n}{M}\right)^M = \frac{1}{\bar{n}} e^{-\frac{n}{\bar{n}}} \quad (1.8)$$

quindi la probabilità decresce esponenzialmente.

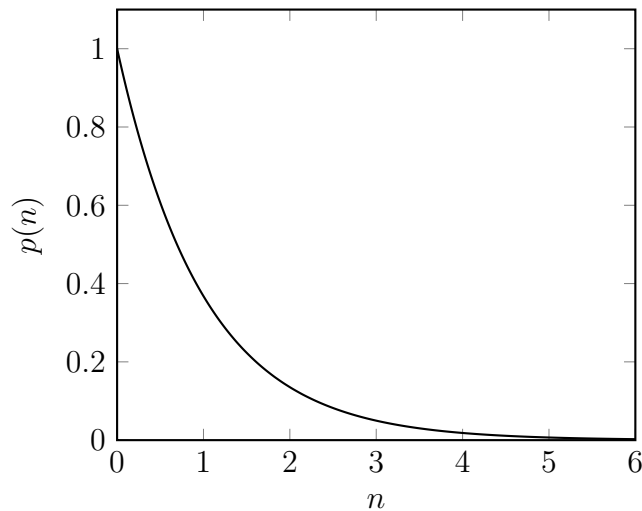


Figura 1.7: *Andamento esponenziale.*

Il modello prevede quindi:

- molti poveri e pochi ricchi (ma praticamente nessun super-ricco)
- esiste un tempo in cui un povero diventa ricco (e viceversa)
- simile alla distribuzione di energia di Maxwell-Boltzmann
- se chi è ricco pagasse di più si otterrebbe una curva a campana

Tuttavia osservando i dati sperimentali si nota una discrepanza: nella realtà la probabilità sembra seguire una legge a potenza piuttosto che esponenziale. Pur non trovando riscontro nella realtà, si è appena dimostrato stocasticamente il fattore di Boltzmann $e^{-\beta\epsilon}$. Si può quindi pensare il denaro come un'energia interna al singolo mentre la probabilità di scambio rappresenta la *temperatura statistica* del sistema.

1.5.8 Modello economico evoluto

Per adattare il modello precedente alla realtà si introduce una microdinamica sugli scambi di denaro.

Sia π_{\pm} la probabilità di guadagnare ± 1 soldi se un soggetto ne possiede n . Il sistema possiede una *struttura di catena*:

Definizione 1.5.2. *Struttura di catena.*

Un modello ha struttura di catena quando il flusso in una direzione implica un secondo flusso nella direzione opposta.

A causa di questa struttura, all'equilibrio si deve avere:

$$\pi_+(n-1)p(n-1) + \pi_-(n+1)p(n+1) = \pi_+(n)p(n) + \pi_-(n)p(n)$$

e in particolare è verificato il *bilancio dettagliato*:

$$\pi_+(n-1)p(n-1) = \pi_-(n)p(n) \quad \forall n \geq 1 \quad (1.9)$$

Normalizzata la distribuzione è possibile iterare il tutto:

$$p(n) = \prod_{k=1}^n \frac{\pi_+(k-1)}{\pi_-(k)} p(0)$$

Riscrivendo un maniera più comoda il bilancio dettagliato, si può poi procedere:

$$\pi_+(n - \frac{1}{2})p(n - \frac{1}{2}) = \pi_-(n + \frac{1}{2})p(n + \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} [\pi_+(n) - \pi_-(n)]p(n) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} [\pi_+(n) - \pi_-(n)]p(n) &\simeq 0 \\ ap(n) + \frac{\partial}{\partial n} (bn)p(n) &\simeq 0 \end{aligned}$$

Si possono notare ora le seguenti dipendenze, introducendo la coppia di parametri costanti (a, b) :

$$\begin{cases} \pi_+(n-1) - \pi_-(n) \simeq a \\ \pi_+(n) \simeq bn - \frac{a}{2} \\ \pi_-(n) \simeq bn + \frac{a}{2} \end{cases}$$

Cercando ora l'andamento di $p(n)$:

$$\begin{aligned} p(n) - p(n-1) &= \left(\frac{bn - \frac{a}{2}}{bn + \frac{a}{2}} - 1 \right) p(n-1) \\ \frac{dp}{dn} &= -\frac{a}{bn} p(n-1) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p(n) &\propto n^{-\frac{a}{b}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

si ottiene esattamente l'andamento a potenza ricercato.

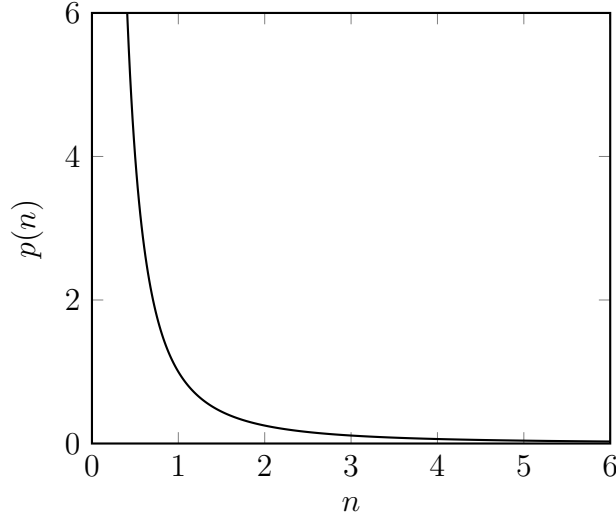


Figura 1.8: *Andamento a potenza.*

1.5.9 La rovina di un giocatore

Si consideri un giocatore d'azzardo con a disposizione un capitale k e che vuole arrivare ad un capitale M . Il gioco finisce ai “bordi” (barriera assorbente) per $k = 0$ (giocatore rovinato) o per $k = M$ (giocatore felice). Siano p la probabilità di guadagnare, $q = 1 - p$ la probabilità di perdere, $P_M(k)$ la probabilità di arrivare al capitale M partendo da k . Come nel modello economico evoluto si ha:

$$P_M(k) = pP_M(k+1) + qP_M(k-1)$$

con i vincoli

$$\begin{cases} P_M(0) = 0 \\ P_M(M) = 1 \end{cases}$$

Ragionando per induzione si ottiene:

$$P_M(k+1) - P_M(k) = \frac{q}{p} [P_M(k) - P_M(k-1)] = \left(\frac{q}{p}\right)^k P_M(1)$$

$$P_M(k) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M} \quad (1.11)$$

Inoltre,

$$P_\infty(k) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k \quad (1.12)$$

In particolare, considerando un gioco equo, si può notare come $P_M(k) = \frac{k}{M}$ e quindi:

- il gioco è alla pari solo se $k \simeq M$
- la probabilità di vincita aumenta all'aumentare del proprio capitale rispetto a quello avversario
- contro un casinò ($M \rightarrow \infty$) la probabilità di vincita è evidentemente nulla anche in caso di gioco equo (assunzione oltretutto inverosimile)

Capitolo 2

Entropia e Informazione

2.1 Probabilità

Data una distribuzione di probabilità $\rho(x)$ normalizzata (integrale sul dominio uguale a 1) è possibile procedere con le seguenti definizioni:

Definizione 2.1.1. *Probabilità:*

$$p(x \in [a, b]) = \int_a^b \rho(x) dx$$

Definizione 2.1.2. *Probabilità cumulata:*

$$p(x \leq a) = \int_{-\infty}^a \rho(x) dx$$

Definizione 2.1.3. *Probabilità stazionaria*

La probabilità stazionaria è il numero di volte che un evento accade in una sequenza.

Teorema 2.1.1. *legge dei grandi numeri*

Siano A e B due eventi distinti (osservati N volte), allora si ha che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p(AB)}{p(A)} = p(B/A)$$

2.1.1 Ranking distribution

Definizione 2.1.4. *Sia x una variabile aleatoria con un sample $\{x_1, \dots, x_n\}$ di osservazioni ordinate tali che $x_1 \geq x_2 \geq \dots$. Allora $x_j = f(j)$ è detta ranking distribution.*

Solitamente tale distribuzione è normalizzata in modo che $y_j = \frac{x_j}{x_1}$. Per definizione la frequenza di un evento è $\frac{j}{n}$, quindi la distribuzione cumulata risulta

$$F(x_j) = 1 - \frac{j}{n} = 1 - \frac{J(x_j)}{n} \quad (2.1)$$

con $J(x_j)$ inverso del ranking. La funzione di distribuzione sarà quindi

$$p(x) = -\frac{1}{n} \frac{dJ}{dx} \quad (2.2)$$

2.2 Entropia

Si supponga di voler calcolare l'incertezza di una distribuzione di probabilità p_1, \dots, p_n per gli eventi $\{x_1, \dots, x_n\}$. Si assuma:

- $H(p_1, \dots, p_n)$ continua;
- se $p_j = \frac{1}{n}$ allora $H(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ è monotona crescente;
- Dati gli eventi composti $y_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$, $y_2 = \{x_{m+1}, \dots, x_{m+k}\}$ con probabilità $P(y_i/x_i) = \frac{p_i}{w_i}$, allora

$$H(p_1, \dots, p_n) = H(w_1, \dots, w_n) + w_1 H\left(\frac{p_1}{w_1}, \dots, \frac{p_m}{w_1}\right) + w_2 H\left(\frac{p_{m+1}}{w_2}, \dots, \frac{p_{m+k}}{w_2}\right) + \dots;$$

La soluzione è del tipo $H(p_1, \dots, p_n) = -k_s \sum_i p_i \ln(p_i)$ dove si definisce

Definizione 2.2.1. $S = -k_s \sum_i p(x_i) \ln p(x_i)$ entropia di informazione (di Shannon)

con $k_s = \frac{1}{\ln 2}$ costante di Shannon. Si può notare come $H(p_1, \dots, p_n)$ sia massima per $p_j = \frac{1}{n}$. Fissato $\bar{x} = \sum_j x_j p_j$, l'entropia è massimizzabile utilizzando i moltiplicatori di lagrange:

$$\delta H = - \sum_i \delta p(x_i) \ln p(x_i) + \lambda \sum_j x_j \delta p_j = 0$$

il che implica $-\ln p_j + \lambda x_j = 0$, con soluzione

$$p_j = \frac{e^{\lambda x_j}}{\sum_j e^{\lambda x_j}} \quad (2.3)$$

con $\lambda \simeq -\frac{1}{\bar{x}}$ (risultato fondamentale della meccanica statistica). La distribuzione è quindi esponenziale, con $p_j \propto e^{-\frac{x_j}{\bar{x}}}$.

2.3 Informazione

Definizione 2.3.1. Una variabile x a valori discreti $\{x_0, x_1, \dots\}$ è detta variabile di CODING

Si consideri una sequenza (codifica) $\{x_k\}_1^N$: si può assumere $P(\{x_k\}) = p(x_1) \dots p(x_N)$. Una codifica è detta **ottimale** se può descrivere in maniera univoca un'orbita.

Definizione 2.3.2. Data una codifica, si definisce $-\ln(x)$ l'informazione portata dal carattere x

Si nota subito come più un valore della variabile di coding è probabile, minor informazione questo porti. Informaticamente, la misura è circa il numero di bit necessari per memorizzare la sequenza (da qui il fattore $\ln 2$ dell'entropia di Shannon).

L'equazione 2.2.1 rappresenta quindi l'informazione media portata da un singolo carattere. Non bisogna confondere entropia con informazione: la variabile deve avere un significato! Data l'indipendenza dei caratteri, si può scrivere l'entropia di una coppia come

$$\begin{aligned} S(P_2(\{x_{k_1}, x_{k_2}\})) &= - \sum_{k_1, k_2} P_2(\{x_{k_1}, x_{k_2}\}) \ln P_2(\{x_{k_1}, x_{k_2}\}) = \\ &= - \sum_{k_1} P(x_{k_1}) \ln P(x_{k_1}) \sum_{k_2} P(x_{k_2}) \ln P(x_{k_2}) \end{aligned}$$

Iterando il ragionamento si giunge alla conclusione che l'entropia di Shannon misura l'aumento di informazione data dall'aggiunta di un carattere.

2.3.1 Matrice stocastica

Si è analizzato finora il caso di caratteri indipendenti gli uni dagli altri. Tuttavia, per comprendere una sequenza bisogna, in generale, conoscerne la *memoria*, ossia tutte le dipendenze di un evento dagli altri. Formalmente, ciò vorrebbe dire che, dati due eventi A e B, $P(\{AB\}) = P(B/A)P(A) \neq P(A)P(B)$. Si può facilmente osservare come $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P(\{AB\})}{P(A)} = P(B/A)$, dove N rappresenta il numero totale di eventi. L'*irreversibilità* di un evento si ha quando la coppia di eventi AB è diversa dalla coppia di eventi BA.

Definizione 2.3.3. $p_{ij} = p(x_j/x_i)$ *matrice stocastica*

La matrice stocastica ha per definizione le seguenti proprietà:

- $0 \leq p_{ij} \leq 1$
- $\sum_j p_{ij} = 1$

Questa matrice è molto importante, essendo intrinsecamente legata alla probabilità condizionata, ed è alla base di ogni problema di trasporto. Si consideri ora una sequenza infinita e sia p_i la probabilità di avere l'elemento x_i in quella posizione. Qual è la probabilità p_j di avere l'elemento successivo? Sia n il numero di passi per arrivare in posizione i , allora:

$$p_j^{n+1} = \sum_i p_{ij} p_j^n \quad (2.4)$$

Risulta quindi utile il seguente teorema:

Teorema 2.3.1. *Esiste un autovettore con autovalore $\lambda_0 = 1$, ossia*

$$p_j^s = \sum_i p_{ij} p_j^s$$

Corollari:

- p_j^s è un vettore stazionario situato nel primo quadrante
- l'iperpiano $\sum_{i,j} p_{ij} v_i = \sum_i v_i = 0$ sono invarianti per p_{ij}
- $\lambda_i < 1 \quad \forall i \neq 0$
- $p_j^{n+1} = \sum_i p_{ij} p_j^n = 1 \Leftrightarrow \sum_i p_i^n = 1$

2.3.2 Teoria di Markov

A questo punto si può calcolare come cambi quantitativamente l'informazione di una catena aggiungendo un carattere.

Definizione 2.3.4. *Proprietà di Markov (di tempo presente)*

$$P(\{x_1, \dots, x_{n+1}\}) = P(x_{n+1}/P x_n) P(\{x_1, \dots, x_n\})$$

Si può quindi calcolare l'entropia dell'\$(N+1)\$esimo passo

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= - \sum P(\{x_1 \dots x_{N+1}\}) \ln P(\{x_1 \dots x_{N+1}\}) = \\ &= - \sum P(\{x_{N+1}/x_N\}) P(\{x_1 \dots x_N\}) [\ln P(\{x_{N+1}/x_N\}) \ln P(\{x_1 \dots x_N\})] = \\ &= - \sum P(\{x_1 \dots x_N\}) \ln P(\{x_1 \dots x_N\}) - \sum_{i,j} p_j^s P(x_i/x_j) \ln P(x_i/x_j) \end{aligned}$$

ottenendo, nel limite \$N \gg 1\$, l'espressione:

$$S_{N+1} = S_N - \sum_{ij} p_j^s p_{ij} \ln p_j \quad (2.5)$$

Nei linguaggi l'aggiunta di un carattere non cambia di molto l'entropia (per fortuna, altrimenti sarebbe molto difficile parlarsi, ndr). Questa entropia fornisce tuttavia un'importante risultato sulla reversibilità del processo: se invertendo il tempo non ho differenza di entropia, allora il processo è *reversibile*, altrimenti no. Le **fluttuazioni** di un sistema **all'equilibrio** sono sempre un processo **reversibile**, infatti osservando tale sistema non si riesce a distinguere tra passato e futuro. Come esempio per giustificare la precedente affermazione si può prendere un pendolo fisico in assenza di attriti/forse esterne, oppure un *moto browniano*. Un esempio grafico può essere rappresentato dalla Fig.(2.1).

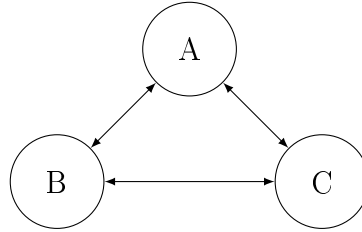


Figura 2.1: Grafo di esempio reversibilità.

Associando la matrice

$$\Pi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

si ha eguale probabilità di transizione in ogni direzione ammessa dal grafo. L'evoluzione temporale è data da

$$p_i^{n+1} = \sum_j \Pi_{ij} p_j^n$$

e si verifica facilmente che il sistema è reversibile con distribuzione stazionaria

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Considerando invece la matrice

$$\Pi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

si aumenta la probabilità di percorrere il triangolo in senso antiorario. Essendo la distribuzione stazionaria identica al caso precedente si può studiare la reversibilità con il bilancio dettagliato:

$$\pi_{13}p_3^s = \frac{2}{3}\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \pi_{31}p_1^s$$

Secondo Onsager, la distribuzione stazionaria corrisponde all'equilibrio quindi, analizzando le fluttuazioni è possibile capire se il sistema sia reversibile o meno. Nell'esempio riportato in Fig. (2.1) è evidente come la rimozione del punto A non influenzi il sottosistema BC: è questo l'equilibrio dettato dal bilancio dettagliato.

In conclusione, la teoria dell'informazione è applicabile quasi in ogni ambito. Sono stati effettuati studi sui linguaggi, premiando finlandese e tedesco come lingue più entropiche, e studi sulla musica, che vedono Bach meno entropico di Hindemith.

2.4 Esempi

2.4.1 Utilizzo della misura invariante

Sia $x_n = 2^n$ un numero, con $n \geq 1$. Qual è la probabilità che esso abbia un 7 come prima cifra?

Supponendo $2^n = 7 \cdots \times 10^k$, allora $\log 2^n = \log 7 \cdots + k$. Si consideri ora la dinamica

$$y_{n+1} = y_n + \log 2 \mod 1 \quad (2.6)$$

che rappresenta sostanzialmente una traslazione nell'intervallo $[0, 1]$. In questo caso l'esponente di Ljapunov è nullo in quanto non vi è espansione. Iterando la 2.6 si ottiene

$$y_n = y_0 + n \log 2 \mod 1$$

e la misura invariante risulta quindi una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 1]$. Da qui la probabilità $\lim_{n \rightarrow \infty} P(7) = \log 8 - \log 7$.

2.4.2 Entropia di una mano di carte

Supponiamo di possedere un mazzo di N carte differenti e di pescare da esso $k \leq N$ carte. Per calcolare l'entropia di informazione associata alla mano pescata, bisogna

innanzitutto calcolare la probabilità di una mano singola. Le combinazioni di k carte di un mazzo di N carte sono date dal coefficiente binomiale:

$$C = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \quad (2.7)$$

Assumendo che il mazzo non sia truccato, quindi che ogni estrazione sia equiprobabile, la probabilità di ogni singola mano è $p_i = \frac{1}{C}$. L'entropia di informazione (o di Shannon) associata ad essa è quindi

$$S = -k_S \sum_{i=1}^C p_i \ln p_i = -k_S C \left(\frac{1}{C} \ln \frac{1}{C} \right) = k_S \ln \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

con $k_S = \frac{1}{\ln 2}$ costante di Shannon.

2.4.3 Broken Stick Model/Modello di Markov

Si consideri un segmento di lunghezza unitaria nel quale viene inserito casualmente un punto $x_1 \in [0, 1]$ secondo una distribuzione uniforme. Si scarti ora il segmento $[0, x_1]$ e si iteri il processo per N volte: si tratta di un processo ricorsivo con memoria del passato. Essendo la distribuzione di probabilità uniforme risulta ovvio come $\langle x \rangle = \frac{1}{2}$ quindi è possibile riscalarlo il tutto con una variabile $y \rightarrow \frac{y}{2}$. Definita la densità ρ del sistema si può scrivere:

$$\begin{aligned} \rho_{N+1} \left(\frac{y}{2} \right) \frac{dy}{2} &= \rho_N(y) dy \\ \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(y) &\propto \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Il risultato è una legge a potenza con $\alpha = -1$, quindi *non normalizzabile* in quanto l'integrale diverge. Il sistema ha un effetto di memoria assoluta: una volta tagliato il segmento non è possibile riattaccarlo. Se il segmento non venisse tagliato si otterrebbe un andamento a potenza con $\alpha \geq 1$ e risulterebbe pertanto normalizzabile. Un'utile applicazione dei modelli di Markov si trova nel linguaggio (verbi) e in biologia (DNA).

2.4.4 Penney's game

Si prenda una moneta e la si lanci all'infinito. Si vuole scommettere con un'altra persona su una terna di uscite consecutive dai lanci e ci si chiede come si possa vincere più facilmente. Analizzando attentamente il problema si può notare come l'uscita delle sequenze non sia casuale ma segua un percorso ben preciso: l'unica sequenza casuale è quella data dalle prime tre uscite.

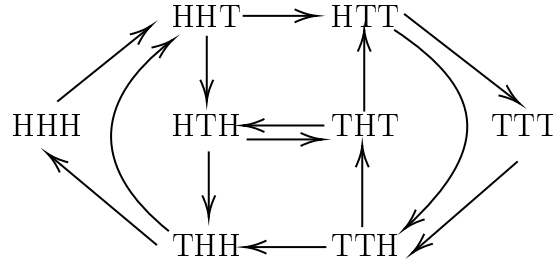


Figura 2.2: Schema del gioco di Penney

In questo modo risulta abbastanza semplice fregare l' avversario: facendolo scegliere per primo, è sempre possibile scegliere una sequenza più probabile della sua. Eseguendo i calcoli si nota subito come la probabilità stazionaria del sistema sia data da $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} = 12.5\%$. Scegliendo per secondi si vince sempre a meno che la sequenza dell'avversario non esca dai primi tre lanci, quindi eseguendo i calcoli sulle probabilità si ottiene la seguente tabella:

1st player's choice	2nd player's choice	2nd player's winning chance
<i>HHH</i>	TTH	87.5%
<i>HHT</i>	TTH	75.0%
<i>HTH</i>	HHT	66.7%
<i>HTT</i>	HHT	66.7%
<i>THH</i>	TTH	66.7%
<i>THT</i>	TTH	66.7%
<i>TTH</i>	HTT	75.0%
<i>TTT</i>	HTT	87.5%

Nel primo e nell'ultimo caso si nota facilmente come la vittoria sia certa ammesso che non esca la tripletta scelta dal giocatore 1. Essendo la probabilità stazionaria $\frac{1}{2}$, $P_{1,8} = 1 - (\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{8}$.

Nel secondo e nel penultimo caso si può ragionare in modo analogo al caso precedente, ottenendo $P_{2,7} = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$.

In tutti gli altri casi la probabilità è data da $P_{3,4,5,6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{player1}) \dots = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n = \frac{2}{3}$.

Capitolo 3

Modelli di trasporto

3.1 Teoria

Consideriamo due punti (A e B) di un generico spazio e colleghiamoli con un canale immaginario, facendo riferimento alla Fig.1, possiamo definire il flusso $\Phi_{A \rightarrow B}$ di una quantità fisica trasportata nell'unità di tempo tra i due punti. Definiamo $V_{A/B}$ una

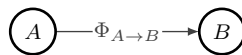


Figura 3.1

certa proprietà del nodo A/B , questa proprietà ne definisce lo stato. Possiamo quindi scrivere una sorta di legge di Ohm per la situazione descritta

$$\Phi_{A \rightarrow B} R = V_A - V_B$$

dove R è una proprietà del link (ad es. la portanza di una strada ma anche la probabilità di transizione). Osserviamo che è di notevole importanza la dimensione del link (L) in quanto se attraversiamo il link abbiamo un flusso Φ , di conseguenza la capacità del sistema di trasporto richiede ΦL di "veicoli".

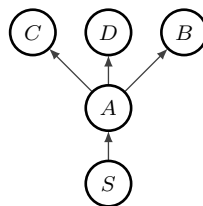


Figura 3.2

3.2 Esempi

Capitolo 4

Teoria del controllo

4.1 Approccio generale

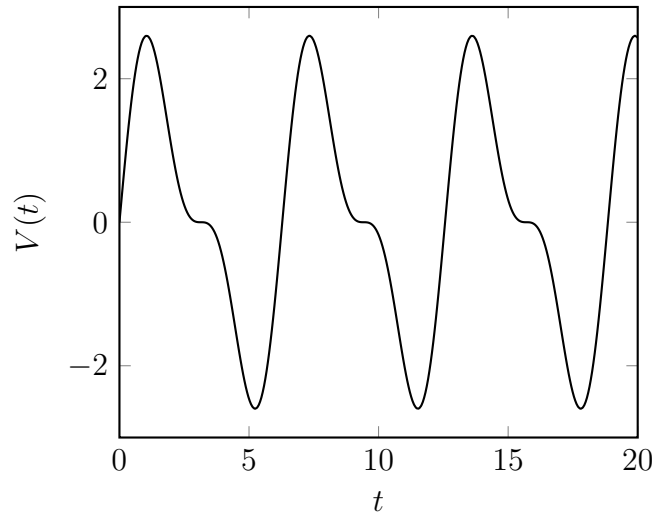
La *teoria del controllo* è quella branca della fisica che studia come controllare i sistemi dinamici. L'obiettivo principale è quello di creare un *controllo*, ossia un modello/algoritmo, in grado di portare un sistema dinamico in un determinato stato dato uno stato iniziale (in input).

Definizione 4.1.1. *Il modello è detto ottimale quando si è raggiunto un buon livello di stabilità, minimizzando i ritardi e gli errori.*

Il dispositivo che gestisce il sistema dinamico è detto *controllore* e va selezionato accuratamente in base alle richieste del sistema da gestire. Formalmente il controllo viene immesso nel sistema attraverso una forzante che, aggiunta alla lagrangiana, permette lo studio e l'ottimizzazione del problema. Per maggiori informazioni sulla meccanica analitica è possibile consultare gli appunti delle lezioni al link https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO/blob/main/Appunti_meccanica_analitica.pdf.

4.2 Applicazioni biologiche

Si supponga ora di voler studiare un sistema biologico quale, ad esempio, il cuore umano.

Figura 4.1: *Stilizzazione del battito cardiaco.*

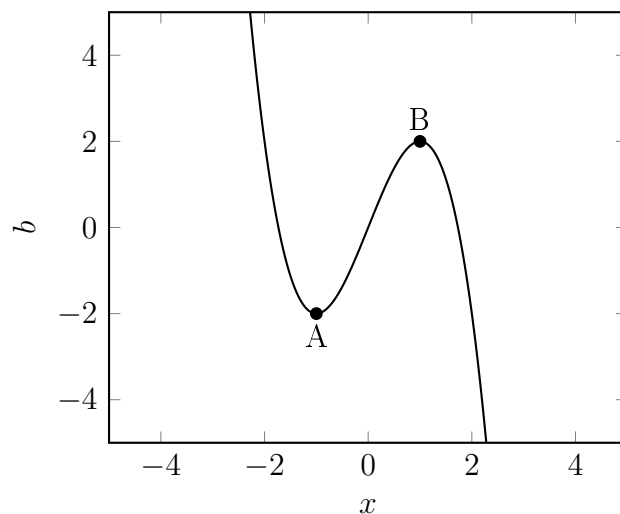
Il battito cardiaco stilizzato in Fig 4.1 suggerisce un modello in cui:

- il sistema abbia un equilibrio (al quale ritorna periodicamente)
- esiste una soglia trigger di un'onda

L'idea è ridurre la cellula cardiaca ad un sistema complesso a due variabile, x per la lunghezza della fibra e b per lo stimolo elettrochimico da associare ad essa (controllo elettrico). Il modello di Zeeman è rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dx}{dt} = -(x^3 - Tx + b) \\ \frac{db}{dt} = x - x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

in cui la prima equazione ricorda l'equazione logistica (Eq. 1.1). Il fattore infinitesimo ϵ garantisce una scala di evoluzione rapida.

Figura 4.2: *Nullclina.*

L'equilibrio stabile si ha sulla *nullclina* $\frac{dx}{dt} = 0$, quindi per $x = x_0$ e $b = -x^3 + Tx$, il cui grafico è riportato in Fig. 4.2 I punti A e B sono ovviamente i punti critici del sistema: la parte di curva compresa tra i due punti non è esplorabile in quanto da B è solo possibile ricadere sul ramo di A e viceversa. Questa è l'*idea della catastrofe* di Zeeman, ove per $A < b < B$ perdo l'invertibilità del sistema. Se si è in presenza di uno stimolo ad onda quadra che riesce a spostare il sistema oltre il punto B (facendolo quindi ricadere su A) si ha la contrazione (sistole e diastole, vedi Fig. 4.3)

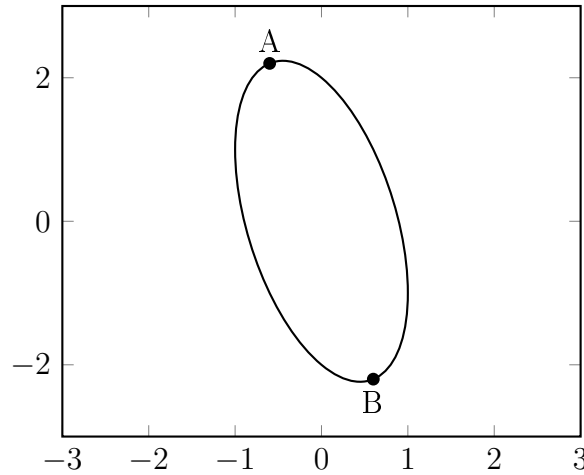


Figura 4.3: *Sistole* ($A \rightarrow B$) e *disistole* ($B \rightarrow A$).

Volendo ora dimostrare formalmente la stabilità del punto di equilibrio (x_0, b_0) è conveniente lavorare in un intorno di esso:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x - x_0 \\ \Delta b &= b - b_0\end{aligned}$$

Linearizzando il sistema

$$\begin{cases} \epsilon \frac{d\Delta x}{dt} = -(3x_0^2 - T) \Delta x - \Delta b \\ \frac{d\Delta b}{dt} = \Delta x \end{cases}$$

ei ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{(-3x_0^2 + T)}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante $\frac{1}{\epsilon} > 0$. Data la presenza di un quadrato la stabilità non dipenderà dal segno di x_0 quanto dal suo modulo. Il determinante positivo implica autovalori entrambi positivi o entrambi negativi: si avranno autovalori positivi, quindi un punto instabile, se la traccia è positiva e viceversa. Si assuma ora di voler introdurre una funzione periodica $x^+(t)$ di periodo sufficiente per effettuare il "salto".

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dx}{dt} = -(x^3 - Tx + b) \\ \frac{db}{dt} = x - x^+(t) \end{cases}$$

Ora è possibile accoppiare due cellule cardiache come segue

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dx}{dt} = -(x^3 - Tx + b) \\ \frac{db}{dt} = x - y \\ \epsilon \frac{dy}{dt} = -(y^3 - Ty + b') \\ \frac{db'}{dt} = y - x \end{cases}$$

con $x(0) \simeq x_0$ e $y(0) \simeq x_1$ punti di equilibrio. Per fare in modo che il sistema sostenga l'onda (senza il bisogno di uno stimolo esterno) è necessario un accoppiamento in controfase, ossia quando la cellula x è in contrazione la y è in dilatazione e viceversa. Creando una catena di questi oggetti è possibile quindi generare un fenomeno d'onda.

4.3 Esempi

4.3.1 Pendolo rovesciato

L'esempio più classico di sistema controllabile è dato dal pendolo rovesciato.

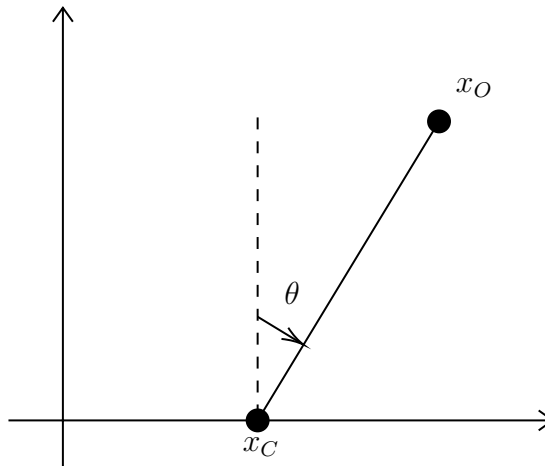


Figura 4.4: Pendolo rovesciato

Siano $x_C(t)$ la coordinata del controllore, $x_O(t)$ la coordinata del pendolo di lunghezza l e θ l'angolo formato da esso con la verticale. Utilizzando la meccanica lagrangiana:

$$\begin{cases} x_O = x_C + l \sin \theta \\ y_O = l \cos \theta \\ \dot{x}_O = \dot{x}_C + l \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_O = -l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

La lagrangiana del sistema si può scrivere come:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left(\left(\dot{x}_C + l \dot{\theta} \cos \theta \right)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right) - mgl \cos \theta \simeq \frac{m}{2} \left(l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x}_C l \dot{\theta} \cos \theta \right) - mgl \cos \theta$$

alle piccole oscillazioni ($\theta \simeq 0$ e $mgl \cos \theta \simeq -mgl \frac{\theta^2}{2}$):

$$\mathcal{L}_{PO} = \frac{m}{2} \left(l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x}_C l \dot{\theta} \right) + mgl \frac{\theta^2}{2}$$

L'equazione del moto risulta infine:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \theta - \frac{\ddot{x}_C}{l} \quad (4.2)$$

Riconosciuta la forzante, per semplicità si pone $\ddot{x}_C = \pm a(t)$ costante. La soluzione non è omogenea:

$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{a(t)}{g} \right) \cosh \omega t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sinh \omega t + \frac{a(t)}{g}$$

Assumendo ora $\theta_0 \simeq 0$ e $\dot{\theta}_0 \neq 0$ e che il pendolo si stabilizzi in un tempo T si ha la soluzione stabile:

$$\theta(T) = C \cosh \omega T + C \sinh \omega T \simeq C e^{-\omega T}$$

Si può ora ricavare la condizione richiesta:

$$C = \theta(T) = -\frac{\dot{\theta}(T)}{\omega} \quad (4.3)$$

Andando a imporla si ottiene:

$$-\frac{a}{g} \cosh \omega T + \frac{\dot{\theta}(T)}{\omega} \sinh \omega T + \frac{a}{g} = \frac{a}{g} \sinh \omega T - \frac{\dot{\theta}(T)}{\omega} \cosh \omega T$$

Da cui si può ricavare il periodo di stabilità:

$$T = \frac{1}{\omega} \ln \frac{\frac{a}{g}}{\frac{a}{g} - \frac{\dot{\theta}(T)}{\omega}} \quad (4.4)$$

Un'osservazione importante riguarda la *condizione critica* del sistema, ove esso non risulta più controllabile, che si ha quando $\dot{\theta}_0 = \frac{a\omega}{g}$.

4.3.2 Marriage Model/Modello relazionale

Si supponga ora di voler controllare una relazione con un'altra persona, che tipo di relazione conviene studiare? La scrittrice Anna Karenina sembra fornire una soluzione al problema, constatando che *tutte le relazioni felici sono uguali ma ogni relazione infelice lo è a modo suo*. Sia ora $x(t)$ il grado di felicità nella relazione che, per semplicità si assume positivo ($x(t) \in \mathbb{R}^+$) in accordo con l'ipotesi della Karenina. L'equazione che descrive la relazione sarà del tipo:

$$\dot{x} = -rx(t) + ac(t) \quad (4.5)$$

in cui riconosciamo la funzione *costo* $c(t)$ della relazione (ove per costo si intende uscire a cena, fare un regalo, ecc...), il parametro r (quanto la felicità tenda a diminuire) e il parametro a (amplificazione del costo). La relazione giungerà al termine una volta arrivati ad un valore minimo della felicità, che verrà denotato come x_m .

Per rafforzare il modello si introducono ora due potenziali:

- $U(x)$, *utility potential*, il quale indica quanto funziona la coppia. Esso deve essere tale che $U'(x) > 0$ ma $U''(x) < 0$, in quanto troppa felicità tende a saturare la relazione;
- $D(c)$, *disutility potential*, il quale tiene conto dello sforzo eseguito. Più il costo del mantenimento della relazione aumenta, più essa tende a fallire (non ne vale la pena). Ovviamente $D(c)$ deve avere un minimo, dato che esiste uno sforzo considerato accettabile per mantenere la relazione;

Si può ora definire il funzionale di soddisfazione come:

$$W(c) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [U(x(t)) - D(c(t))] dt$$

dove il coefficiente λ^{-1} rappresenta la scala di memoria del sistema.
Per ottimizzare il problema si deve avere

$$\delta \dot{x} = -r\delta x + a\delta c$$

e quindi la variazione infinitesima del funzionale

$$\delta W(c) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [U'(x)\delta x - D'(c)\delta c] dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left[U'(x)\delta x - D'(c) \frac{\delta \dot{x} + r\delta x}{a} \right] dt$$

Integrando per parti:

$$- \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} D'(c) \frac{\delta \dot{x}}{a} dt = - \left[e^{-\lambda t} D'(c) \frac{\delta x}{a} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left[\frac{e^{-\lambda t} D'(c) \delta x}{a} \right] dt$$

e quindi

$$\delta W = \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\lambda t} U'(x) + \frac{d}{dt} \left[\frac{e^{-\lambda t} D'(c)}{a} \right] - \frac{e^{-\lambda t} D'(c)r}{a} \right\} \delta x dt$$

Essendo δx arbitrario

$$D''(c(t)) \frac{dc}{dt} = (r + \lambda)D'(c) - aU'(x)$$

Si assumano ora, per esempio, i seguenti potenziali

$$\begin{cases} U(x) = U_{\infty} (1 - e^{-\alpha x}) \\ D(c) = c(c - 2c_0) \end{cases} \quad (4.6)$$

che forniscono il seguente sistema (equilibrio instabile):

$$\begin{cases} \dot{x} = -rx + ac \\ \dot{c} = (r + \lambda)(c - c_0) - \alpha \frac{e^{-\alpha x}}{2} \end{cases} \quad (4.7)$$

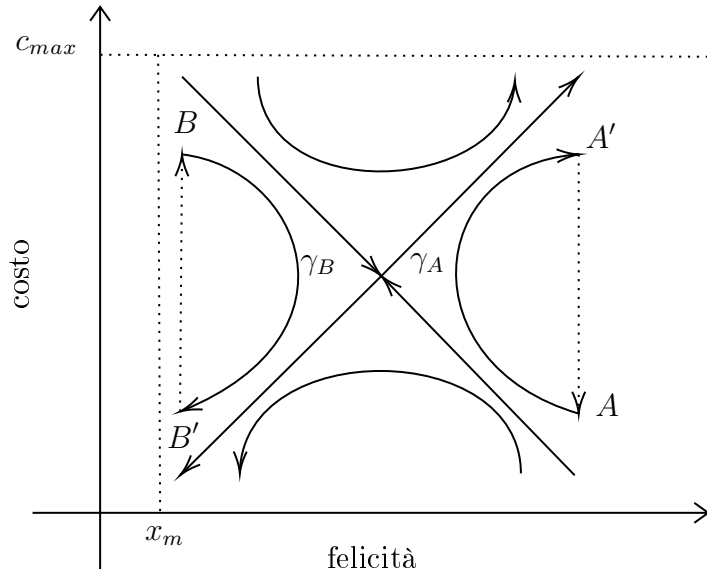


Figura 4.5: Orbite relazionali.

Le orbite risultanti sono riportate in Fig.(4.5), dove si possono distinguere due strategie:

- STRATEGIA A: si segue un'orbita γ_A dai punti $A \rightarrow A'$ poi si fa una decrescita discontinua lungo una $c(t)$ da $A' \rightarrow A$. Sostanzialmente si spende molto per la relazione (nei termini visti in precedenza) poi, una volta divenuto intollerabile il costo, si fa una bella litigata e si ricomincia il ciclo;
- STRATEGIA B: si segue un'orbita γ_B dai punti $B \rightarrow B'$ poi si fa una crescita discontinua lungo una $c(t)$ da $B' \rightarrow B$. In questo caso si lascia andare la relazione senza apportare sufficiente sforzo poi, ad un passo dalla rottura, si rimedia il tutto con un gesto importante (alto costo) per ristabilire l'orbita.

In entrambi i casi bisogna, tuttavia, prestare parecchia attenzione una volta raggiunti i minimi: se lungo la γ_A si fa una litigata troppo pesante o lungo la γ_B si trascura troppo la relazione, si rischia di finire fuori orbita (quindi fuori equilibrio) e far così fallire la relazione (il che è *no buono*, n.d.r.).

4.3.3 Modello di Fitzhugh-Nagumo

Un'altra applicazione biologica è rappresentata dal modello per il neurone di Fitzhugh-Nagumo, basato sull'oscillatore di Van der Pol. Definite x potenziale di membrana e w la corrente, il modello consiste nelle equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{x^3}{3} + x - w + I \\ \frac{dw}{dt} = \frac{1}{\tau}(x - bw + a) \end{cases} \quad (4.8)$$

con $\frac{1}{\tau} \ll 1$ in modo da avere x variabile veloce e w lenta. Anche in questo caso si ottiene una nullclina simile a quella rappresentata in Fig. 4.2.

La stabilità all'equilibrio è data da:

$$\begin{cases} w = -\frac{x^3}{3} + x + I \\ w = \frac{x+a}{b} \end{cases}$$

Si può verificare come esiste (e sia unico) un punto di equilibrio stabile P quindi, assumendo di aver trovato la risoluzione al sistema, è possibile linearizzare il campo

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = (1 - x_P^2)\delta x - \delta w \\ \delta\dot{w} = \frac{1}{\tau}\delta x - \frac{b}{\tau}\delta w \end{cases}$$

riscrivibile come matrice

$$\begin{pmatrix} 1 - x_P^2 & -1 \\ \frac{1}{\tau} & -\frac{b}{\tau} \end{pmatrix}$$

che ha determinante $-\frac{b}{\tau}(1 - x_P^2) + \frac{1}{\tau}$. La stabilità si ha per un modulo sufficientemente grande di x_P (anche se $x_P \rightarrow 0$ al crescere di I) mentre l'instabilità si ha per $b < 1$. Lo stimolo è rappresentato da una variazione della I che, se abbastanza rapida, permette di percorrere la nullclina.

Il sistema è non caotico ma con derivate di ordine diverso (Stiff). Si assuma $I(t) = \Delta x \delta(t)$, allora $x(0^+) = x_0 + \Delta x$ se $x(0^-) = x_0$, quindi se Δx supera una determinata soglia si ha una grande fluttuazione. Per (x, w) abbastanza grandi è possibile definire la funzione di Ljapunov

$$H = \frac{1}{2} \left(w^2 + \frac{x^2}{\tau} \right) \quad (4.9)$$

costante che rappresenta un'ellisse. La derivata della funzione di Ljapunov è negativa quindi la dinamica non è espansiva e il sistema non può esplodere: si arriva così ad una *biforcazione di Hopf*, ossia si parte da una situazione attrattiva rispetto al punto fisso e, passando attraverso una situazione repulsiva (grazie ad un parametro) si arriva ad un ciclo limite, quale traiettoria periodica di un attrattore dinamico.

Capitolo 5

Altre applicazioni

5.1 Fisica della città

Un'applicazione interessante dei sistemi complessi riguarda l'ambito urbano (e sociale). Uno dei primi problemi affrontati storicamente è il problema del traffico. Tante auto si muovono su un network, ognuna delle quali tende a mantenere una velocità ottimale in base alla macchina che la precede: questa dinamica viola la terza legge di Newton in quanto non è detto che la macchina che sta dietro influenzi quella davanti. Le *onde di traffico* si vengono a creare a causa dei tempi di reazione degli automobilisti (mai istantanei). Nonostante la creazione di queste onde, il flusso di auto sulla strada rimane costante.

Osservando dati sperimentali riguardanti le velocità si nota un appiattimento ad alte densità della curva, dunque il tutto satura ad una velocità media fissa. Posto j come indice di un veicolo, un modello stile Newton obbedisce a:

$$\begin{cases} \dot{s}_j = v_j \\ \dot{v}_j = -\beta (v_j - v_{opt}(s_{j-1} - s_j)) \end{cases} \quad (5.1)$$

Il parametro β è proporzionale all'accelerazione ma l'equazione di secondo ordine implica un'equazione di prim'ordine con ritardo (tempo di reazione). Se β è molto basso allora si creano onde solitoniche e ogni plateau dell'onda corrisponde ad un equilibrio del sistema. Questo sistema statistico crea un equilibrio dinamico, perché dinamicamente si ha qualcosa che si propaga nel sistema, che contiene un equilibrio dove le auto vanno veloci e uno dove le auto vanno lente. Quando il sistema non riesce a mantenere l'equilibrio globale, si formano degli equilibri a livello locale. Normalmente, infatti, si osserva che aumentando il numero di auto in una strada il flusso stesso aumenta fino ad arrivare ad una situazione di instabilità: esiste quindi un valore critico di densità superato il quale il flusso inizia a diminuire e il sistema non riesce più a rispondere al flusso immesso, dando luogo al flusso stop&go e creando l'onda solitonica.

Un *fundamental diagram* è un concetto molto utilizzato nelle reti di trasporto: in questo il punto critico di densità risulta un massimo. Tuttavia, il meccanismo di stop&go si innesca molto prima che il sistema giunga a questo massimo. La geometria del siste-

ma è fondamentale, in quanto descrive come esso smorzi/sostenga le oscillazioni delle sorgenti. In autostrada, ad esempio, le congestioni (variazioni della velocità media) si hanno nei punti di immissione, poi si propagano come onde solitone. Vi è inoltre un'alta sensibilità alle fluttuazioni, in quanto ogni persona guida in modo differente, la cui ampiezza aumenta con la densità seguendo un regime poissoniano (maggiore il valore medio maggiori le fluttuazioni). Per arrivare al flusso ottimale bisogna diminuire le fluttuazioni, quindi *raffreddare* il sistema (auto a guida autonoma).

Una proposta di Tom Tom utilizza la velocità media come osservabile macroscopico: la velocità media delle auto in città è tuttavia molto bassa, a causa delle soste forzate, mentre la mobilità ciclistica risulta decisamente più alta.

5.1.1 Modelli di traffico

Si consideri ora un network in cui ogni nodo è o sorgente o destinazione (tipico di aeroporti e stazioni ferroviarie). Senza considerare la dinamica del singolo veicolo, si assuma poi che ogni link riesca a trasportare, quindi che abbia capacità infinita (cosa non assumibile nel caso delle automobili). Cosa accade agli incroci?

Se si assumono nodi a capacità finita allora la congestione si ha quando un nodo diminuisce la capacità di creare trasporto. Sia n_i il numero di agenti presenti nel nodo i . Una volta fornito un peso al link la domanda di mobilità dipenderà da n e dal flusso tra i nodi i e j . Si può calcolare la probabilità di transizione $i \rightarrow j$ come $\pi_{ij}n_i$: questa risulta proporzionale al numero di agenti, quindi maggiore è n_i maggiore è la probabilità che questi si allontanino dal nodo i . Fisicamente questo ricorda un reticolo cristallino con elettroni ai nodi: un elettrone può transire da un nodo ad un altro solo se la destinazione è vuota.

Fondamentale ora introdurre una legge di continuità (ossia una corrente), in quanto un nodo non può trasmettere oltre la sua popolazione:

$$\sum_j \pi_{ij} = d_i < 1 \quad (5.2)$$

dove d_i indica la capacità di trasmissione (numero di agenti in uscita). Si richiede dunque che i flussi siano sempre positivi e che il numero di particelle sia conservato. Si assuma ora che la velocità di percorrenza sia dipendente dal numero di agenti presenti, quindi

$$\dot{n}_i = \sum_j \pi_{ij}n_j - d_i n_i = -L \sum_j L_{ji}n_j$$

dove $L_{ji} = d_j \delta_{ji} - \pi_{ji}$ è una matrice laplaciana. Le matrici laplaciane possiedono le seguenti proprietà:

- $L_{ji} < 0$ se $j \neq i$
- $\sum_i L_{ji} = 0$
- $L_{jj} > 0$

Si nota facilmente come nella matrice laplaciana gli elementi sulla diagonale principale descrivano la capacità di trasporto del sistema, mentre gli elementi esterni alla diagonale descrivano i link. Le matrici laplaciane rappresentano di fatto leggi di bilancio di massa, ossia descrivono la mobilitazione da un punto ad un altro del network.

Un sistema di questo tende a rilassare ad un equilibrio: aumentando il numero di agenti in un nodo aumenterà anche la sua capacità di farne uscire. Un sistema lineare infatti è insensibile al numero di particelle inserito ma è sensibile a un flusso in entrata variabile: in questo caso il sistema non può rilassare e la sua soluzione dipende dalla velocità di variazione del flusso in entrata.

La terza proprietà della matrice laplaciana garantisce l'integrale del moto

$$\sum_i n_i = N$$

mentre la seconda garantisce che tutti gli autovalori (eccetto uno che è di certo nullo) siano positivi. La dinamica risulta attrattiva verso lo stato di equilibrio, situato evidentemente nel primo quadrante. Le proprietà spettrali forniscono il tempo impiegato dal sistema per rilassare.

In generale, si può imporre la congestione con $\pi_{ij} = \pi_{ij}(n_i)$. Un risultato simile è ottenibile anche utilizzando la funzione logistica, vedi eq. 1.3, utilizzando come funzione che lega il numero di particelle al peso: all'aumentare di n il peso deve ridursi. In questo caso la congestione non si avrà inizialmente ma si creerà rapidamente dopo un certo lasso di tempo.

La congestione in un nodo si propaga facilmente anche ai nodi adiacenti: è dunque possibile creare effetti a cascata che si ripercuotano sul network intero, creando così una dinamica all'indietro.

Per un sistema non lineare a molti gradi di libertà il carico determina la dinamica, quindi il parametro di controllo è il numero di agenti caricato nel sistema.

$$\begin{aligned} \dot{n}_i &= \sum_j \pi_{ij}(n_i) n_j - \sum_j \pi_{ij}(n_j) n_i \\ \sum_i n_i &= N \end{aligned}$$

I problemi di un tale sistema sono:

- studiarne gli stati di equilibrio, il cui numero aumenta con le dimensioni
- studiare cosa accade per fluttuazioni (ossia $N = N(t)$)
- studiare network π_{ij} differenti per evitare le congestioni
- ottimizzare il flusso totale $\Phi = \sum_{ij} \pi(n_i) n_j$

Tuttavia, per modificare i pesi è necessario trovare dei parametri di controllo, cosa per niente banale.

Spesso una congestione non può essere evitata quindi si tende a gestirla, ossia si cerca

di riportare la rete in una situazione di trasporto.

Nel caso lineare la soluzione stazionaria è semplicemente il vettore che indica quanti agenti porre nei vari nodi $\vec{n} = (n_1, \dots, n_N)$ che soddisfi la condizione

$$\dot{n} = -Ln$$

Le fluttuazioni sono inseribili nel sistema sotto forma di random walk, aggiungendo un parametro temperatura. Scelto un passo temporale, la transizione $i \rightarrow j$ avrà probabilità $\pi_{ij}\Delta t$ di avvenire. La probabilità di non muoversi in una determinata direzione è data da $1 - \sum_j \pi_{ij}\Delta t$. Il passo Δt diventa quindi il tempo di evoluzione del sistema (tipicamente piccolo): imporre la linearità rispetto ad esso evita processi non regolari (stocastici).

Una volta trovato l'autovalore nullo $L\bar{n} = 0$, la probabilità di trovare la rete in un determinato stato è data da

$$P(\vec{n}) = \frac{\bar{n}_1^{n_1} \dots \bar{n}_M^{n_M}}{n_1! \dots n_M!} M! \quad (5.3)$$

5.2 Esempi

5.2.1 Optimal Velocity Model

L'OVM è un modello ad agente basato sulle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_{opt}(x_{i+1}(t - \tau) - x_i(t - \tau)) \\ \ddot{x}_i(t) = -\frac{1}{\tau}(\dot{x}_i(t) - v_{opt}(x_{i+1}(t) - x_i(t))) \end{cases} \quad (5.4)$$

dove la seconda equazione deriva da $\dot{x}_i(t + \tau) = \dot{x}_i(t) + \ddot{x}_i(t)\tau + o(\tau^2)$.