Formulario Relatività Ristretta

Grufoony

17 maggio 2021

Sommario

Se non diversamente specificato, i due sistemi di riferimento sono presi tali per cui S sia fermo e S' si muova a velocità $\vec{V} = V\hat{x}$. c indica sempre la velocità della luce. Le grandezze x_0 indicano misurazioni effettuate nel sdr con il corpo a riposo.

1 Cinematica relativistica

- $\beta = \frac{v}{c}$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$
- $L(v) = \frac{L_0}{\gamma}$ contrazione di Lorentz-FitzGerald
- $m(v) = \gamma m_0$ ipotesi di Lorentz sulla massa
- $t' = \gamma t$ dilatazione dei tempi
- Trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{cases}$$

- Trasformazioni di Lorentz (velocità):

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right)} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right)} \end{cases}$$

- Trasformazioni di Lorentz (accelerazioni):

$$\begin{cases} a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right)^3} \\ a'_y = \frac{a_y}{\gamma^2\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right)^2} + \frac{\frac{u_y V}{c^2}}{\gamma^2\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right)^3} a_x \\ a'_z = \frac{a_z}{\gamma^2\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right)^2} + \frac{\frac{u_z V}{c^2}}{\gamma^2\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right)^3} a_x \end{cases}$$

- $\beta'_p = \sqrt{1 - \frac{(1-\beta^2)(1-\beta_p^2)}{(1-\beta\beta_{px})^2}}$ con $\beta_{px} = \frac{v_x}{c}$
- $\gamma'_p = \gamma\gamma_p\left(1 - \frac{\vec{v_p} \cdot \vec{V}}{c^2}\right)$

- $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$ decadimento particellare
- $\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta}$ effetto Doppler con $\beta > 0$ in allontanamento

2 Dinamica Relativistica

- $\vec{p} = m(v)\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$ impulso relativistico
- $E(v) = \mathcal{T} + m_0 c^2$ energia relativistica
- $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$
- $\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$
- In un sistema di N particelle valgono:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N E_i = E_{TOT} \\ \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{p}_{TOT} \end{cases}$$

- Per un fotone $m_0 = 0 \Rightarrow E = \frac{h}{\nu} = \frac{hc}{\lambda}; p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$
- Trasformazioni dell'impulso:

$$\begin{cases} p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta}{c}E\right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - c\beta p_x) \end{cases}$$

- $\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v})$ Forza
- $\vec{F} = F_\perp + F_\parallel = m_0\gamma\vec{a} + m_0\gamma^3\left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right)\frac{\vec{v}}{c}$
- Trasformazioni della forza:

$$\begin{cases} F'_x = F_x - \frac{Vu_y}{c^2\left(1-\frac{Vu_y}{c^2}\right)}F_y - \frac{Vu_z}{c^2\left(1-\frac{Vu_z}{c^2}\right)}F_z \\ F'_y = \frac{F_y}{\gamma\left(1-\frac{Vu_x}{c^2}\right)} \\ F'_z = \frac{F_z}{\gamma\left(1-\frac{Vu_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

- $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$ effetto Compton
- $\omega_c = \frac{qB}{m_0\gamma}$ frequenza angolare di ciclotrone
- $r_c = \gamma\frac{m_0 v_{0y}}{qB}$ raggio di ciclotrone

3 Elettromagnetismo

- Maxwelliaml:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \gamma\vec{E} - (\gamma-1)\frac{\vec{V}}{V^2}(\vec{V}\cdot\vec{E}) + \gamma(\vec{V}\wedge\vec{B}) \\ \vec{B}' = \gamma\vec{B} - (\gamma-1)\frac{\vec{V}}{V^2}(\vec{V}\cdot\vec{B}) + \frac{\gamma}{c^2}(\vec{V}\wedge\vec{E}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}' \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})_{\perp} \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}' \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{V} \wedge \vec{E}}{c^2})_{\perp} \end{cases}$$

- Trasformazioni campo elettrico:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases}$$

- Trasformazioni campo magnetico:

$$\begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right) \\ B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \end{cases}$$

4 Il fantastico mondo di Minkowski

- $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ spazio di Minkowski
- $x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$ quadrivettore posizione
- $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ notazione tensoriale, con $g_{\mu\nu}$ tensore metrico
- $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$
- $v^\mu = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ quadrivettore velocità
- $a^\mu = \gamma(\dot{\gamma} c, \dot{\gamma} \vec{v} + \gamma \vec{a})$ quadrivettore accelerazione
- $a^\mu = (0, \vec{\alpha})$ accelerazione propria
- $p^\mu = m_0 v^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v})$ quadrivettore impulso (ogni componente si conserva separatamente)
- $f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \left(\frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{F}\right)$ quadrivettore forza

5 Appendice

- $\alpha = \arctan \beta$ aberrazione classica
- $\alpha = \arcsin \beta$ aberrazione relativistica
- $\Delta\alpha \simeq \frac{1}{2}\beta^3$
- $\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}$ relativistic beaming, con θ' mezzo angolo di emissione
- se $\vec{F} \parallel \vec{v}$ allora $\vec{F} = m_0 \gamma^3 \vec{a}$
- se $\vec{F} \perp \vec{v}$ allora $\vec{F} = m_0 \gamma \vec{a}$