Soluzioni esercizi Kennett

Grufoony
https://github.com/Grufoony/Fisica_UNIBO

12 gennaio 2022

Ricavare Sackur-Tetrode

Per un gas perfetto è nota la

$$F = Nk_BT\left[\ln\left(\frac{n}{n_Q}\right) - 1\right]$$

Per calcolare l'entropia è sufficiente utilizzare la relazione

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

ricordandosi che la concentrazione quantistica è definita

$$n_Q = \left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Svolgendo i calcoli

$$\begin{aligned} S &= -\left\{Nk_B\left[\ln\left(\frac{n}{n_Q}\right) - 1\right] - Nk_BT\frac{1}{n_Q}\left(\frac{mk_B}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}T^{\frac{1}{2}}\right\} \\ &= -\left\{Nk_B\left[\ln\left(\frac{n}{n_Q}\right) - 1 - \frac{3}{2}\right]\right\} = \\ &= Nk_B\left[\ln\left(\frac{n_Q}{n}\right) + \frac{5}{2}\right] \end{aligned}$$

Esercizio 5.4

La pressione sul monte Everset è $P_{Ev}\frac{1}{3}P_{atm}$ con $P_{atm} = 101.3kPa$ e la temperatura è $T_{Ev} \simeq 243K$. Calcolare il libero cammino medio.

Dalla teoria è nota la formula pe ril libero cammino medio

$$l = \frac{1}{n\pi d^2}$$

Dato che sempre di aria si tratta (sia sull'Everest che al livello del mare) e che non sappiamo d, risluta più comodo trovare

$$\frac{l_{Ev}}{l_{atm}} = \frac{n_{atm}}{n_{Ev}}$$

Essendo l'aria in buona approssimazione un gas perfetto si può scrivere la densità come $n = \frac{P}{k_BT}$ e, inserendo il tutto nella relazione precedente (assumendo $T_{atm} \simeq 300K$)

$$\frac{l_{Ev}}{l_{atm}} = \frac{T_{Ev}P_{atm}}{T_{atm}P_{Ev}} = 3\frac{T_{Ev}}{T_{atm}} = 2.67$$

Dalla teoria è noto $l_{atm} \simeq 1\mu m$ quindi $l_{Ev} \simeq 2.67\mu m$

Esercizio 5.5

Nello spazio intersetllare sono presenti giganti nubi di idrogeno molecolare (lunghezza di legame $0.74 \times 10^{-10} m$). Sapendo che la massa di una nube è $m \sim 4 \times 10^{45} kg$, il diametro è $D \sim 1.42 \times 10^{18} m$ e la temperatura è $T \sim 10K$ calcolare il libero cammino medio e il tempo di collisione medio.

Calcolando il volume della nube

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} D^3$$

e il numero di molecole $N = \frac{A}{2N_A}$ si ottiene

$$l = \frac{V}{N\pi d^2} = \frac{D^3}{3N_A d^2} = 7.24 \times 10^{11} m$$

Il tempo di collisione analogamente è

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{3k_B T}} l = l \sqrt{\frac{A}{3N_A k_B T}} = 6.48 \times 10^{10} s$$

Esercizio 6.4

Calcolare U e C_V per un sistema a due livelli popolato da bosoni.

Dalla teoria è nota la

$$\Xi_b = \prod_s \left[\frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_s)}}\right]$$

Assumiamo i due livelli energetici come

$$\begin{cases} \epsilon_0 = 0 \\ \epsilon_1 = \epsilon \end{cases}$$

e in questo caso la funzione di partizione gran canonica diviene

$$\Xi = \frac{1}{(1 - e^{\beta\mu})(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)})}$$

Dalla definizione di energia interna si può utilizzare il trucco di Feynman

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\Xi} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s}^{N} s\epsilon e^{\beta(N\mu - s\epsilon)} = \\ &= -\frac{1}{\Xi}\frac{\epsilon}{\beta} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s}^{N} \frac{\partial}{\partial \epsilon} e^{\beta(N\mu - s\epsilon)} = \\ &= -\frac{1}{\Xi}\frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s}^{N} e^{\beta(N\mu - s\epsilon)} = \\ &= -\frac{1}{\Xi}\frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \Xi}{\partial \epsilon} = \\ &= -\frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \epsilon} \end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare l'energia interna

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{\epsilon}{\beta}\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \epsilon} = \\
&= \frac{\epsilon}{\beta}\frac{\partial \ln(1-e^{\beta\mu})(1-e^{\beta(\mu-\epsilon)})}{\partial \epsilon} = \\
&= \frac{\epsilon}{\beta}\frac{\partial \ln(1-e^{\beta(\mu-\epsilon)})}{\partial \epsilon} = \\
&= \frac{\epsilon}{\beta}\frac{\beta e^{\beta(\mu-\epsilon)}}{(1-e^{\beta(\mu-\epsilon)})} = \\
&= \epsilon \frac{e^{\beta(\mu-\epsilon)}}{(1-e^{\beta(\mu-\epsilon)})} = \\
&= \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}
\end{aligned}$$

Per la capacità termica è sufficiente utilizzare la relazione

$$\begin{aligned}
C_V &= \frac{\partial U}{\partial T} = \\
&= -\frac{\epsilon}{(e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1)^2}\frac{\epsilon-\mu}{k_B}\left(-\frac{1}{T^2}\right)e^{\beta(\epsilon-\mu)} = \\
&= \frac{k_B\beta^2\epsilon(\epsilon-\mu)}{(e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1)(1-e^{\beta(\mu-\epsilon)})}
\end{aligned}$$

Esercizio 9.5

(a) Mostrare che la funzione di partizione gran canonica per la radiazione di corpo nero assume la forma

$$\Xi = \prod_s \frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_s}} \tag{1}$$

La radiazione di corpo nero è costituita da fotoni, ossia bosoni. Dalla teoria (vista in classe) è nota la funzione di partizione gran canonica bosonica:

$$\Xi_b = \prod_s \frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\epsilon_s)}}$$

Osservando ora come si possano aggiungere/rimuovere fotoni ad un corpo nero senza alcun costo energetico ($\mu = 0$) la 1 diviene ovvia.

(b) Usando l'equazione 1 oppure in altro modo si dimostri che l'entropia per unità di volume della radiazione di corpo nero a temperatura T assume la forma

$$s = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45\hbar^3 c^3} \tag{2}$$

Richiamiamo ora l'energia per unità di volume della radiazione di corpo nero (eq. 9.20 Kennett)

$$u = \frac{\pi^2}{15}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}$$

e anche la sua pressione (eq. 9.29 Kennett)

$$P = \frac{u}{3}$$

Richiamando ora la relazione termodinamica

$$U = TS - PV - \mu N \tag{3}$$

ponendo $\mu = 0$ (vedi punto a) e dividendo per il volume V, si ottiene

$$s = \frac{u + P}{T}$$

che unita alle precedenti conclude la dimostrazione

$$s = s = \frac{u + \frac{u}{3}}{T} = \frac{4}{3}\frac{u}{T} = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45\hbar^3 c^3}$$

Esercizio 9.9

Calcolare la temperatura critica per un BEC in 2 dimensioni.

Richiamiamo ora la densità degli stati 2D calcolata in precedenza:

$$g(\epsilon) = g_s \frac{m}{2\pi\hbar^2} L^2$$

Possiamo calcolare il numero medio di particelle con la classica formula

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

la quale, posto $n = \frac{N}{L^2}$ diventa

$$n = g_s \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon$$

Per la temperatura critica si ha $e^{\beta_0} >> 1$ e si può approssimare

$$n \approx g_s \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty e^{-\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon$$

la cui soluzione è

$$n = g_s \frac{m k_B}{2\pi\hbar^2} T_0$$

Invertendo l'equazione precedente si ottiene la relazione desiderata

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m k_B} \frac{n}{g_s}$$