Méthodologie opérationnelle

I - Notations

On rappelle l'équation d'équilibre du mécanisme.

$$K_{eq}\theta = \sum_i k_i\left(\theta_i^a - \theta\right)$$

On multiplie cette équation par $l_A \sin\alpha$ pour retrouver des longueurs équivalentes, et on note :

$$\begin{cases} x \triangleq \theta l_A \sin\alpha \\ T \triangleq K_{eq} x \\ T_i^a \triangleq k_i \theta_i^a l_A \sin\alpha \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \left(T_i^a - k_i x\right)$$

Si on rappelle la notation $\rho_i \triangleq \dfrac{k_i}{K}$, on peut écrire :

$$\boxed{\forall i,\ T_i = T_i^a - \rho_i K x = T_i^a - \rho_i T}$$

II – Validation du modèle

Cette écriture a de nombreux avantages pratiques, et nous allons montrer lesquels.

Supposons dans un temps connues les masses linéiques des cordes et la longueur de vibration des cordes L, comme c'est le cas dans des conditions expérimentales. Ici, le nombre d'inconnues est de 12 (les six coefficients ρ_i et les six tensions d'accordage T_i^a. Il faudra donc faire six lectures, modifier la tension d'une corde (ce qui ajoute une inconnue), et refaire six lectures. Mais comme nous avons rajouté une inconnue, nous allons devoir à nouveau désaccorder (et donc ajouter une seconde inconnue), puis effectuer deux ultimes lectures pour déterminer tout le système. La méthodologie proposée sera donc optimale si le nombre de lectures effectuées est exactement 14.

La mesure des fréquences des cordes donne donc accès à la connaissance des tensions des cordes dans une configuration de « référence » notée 0. On connaît donc les variables $T_i^{(0)}$.

Désaccordons à présent une des cordes, par exemple la n°1, et mesurons à nouveau les fréquences. Nous avons alors accès aux variables $T_i^{(1)}$.

On notera $\forall i,\ \Delta T_i \triangleq T_i^{(1)} - T_i^{(0)}$ et $\Delta T \triangleq T^{(1)} - T^{(0)}$.

Alors $\forall i \neq 1,\ \Delta T_i = \Delta T_i^a - \rho_i \Delta T = -\rho_i \Delta T$ car on n'a pas désaccordé la corde i.

Et donc :

$$\boxed{\forall i \neq 1,\ \rho_i = -\frac{\Delta T_i}{\Delta T}}$$

On peut donc calculer aisément 5 des 6 ρ_i, mais un calcul rapide montrera sans peine que l'expérience décrite ne permettra jamais d'obtenir ρ_1. Pour l'obtenir, il faudra désaccorder une autre corde (e.g. la n°2), et faire deux mesures de fréquences pour obtenir $T_1^{(2)}$ et n'importe quel $T_{i\neq 1,2}^{(2)}$.

$\Delta T_{i\neq 1,2}^{(2)} = -\rho_i \Delta T$ permettra alors d'obtenir ΔT et $\Delta T_1^{(2)} = -\rho_1 \Delta T$ permettra d'obtenir ρ_1 :

$$\boxed{\rho_1 = \rho_{i\neq 1,2} \frac{\Delta T_1^{(2)}}{\Delta T_{i\neq 1,2}^{(2)}}}$$

Ensuite, on réécrit l'équation d'équilibre pour obtenir très facilement :

$$\boxed{\Delta T_1^a = \left(1+\sum_i \rho_i\right) \Delta T}$$

Le système est donc complètement déterminé, puisqu'on peut alors déterminer tous les T_i^a :

$$\forall i,\ \left(T_i^a\right)^{(0)} = T_i^{(0)} + \rho_i T$$

Un des points forts de ce modèle est que l'**on n'a jamais besoin de connaître les véritables raideurs des cordes**, mais seulement leurs rapports relatifs. De plus, on ne travaille qu'avec des tensions et jamais avec des déplacements, ou angles, etc.

On peut donc réaliser cette expérience pour déterminer ces paramètres sur des cordes de guitare en situation réelle, puis valider le modèle en comparant ses prévisions pour une nouvelle configuration aux mesures effectuées. On constatera que la détermination de toutes les caractéristiques demande donc 14 lectures de tension, comme prévu. La méthodologie est donc optimale.

III – Résolution du problème complet

On suppose à présent que nous ne connaissons pas la masse linéique des cordes ni la longueur de vibration. On ne peut donc pas remonter directement aux tensions, et on n'a donc accès qu'à des mesures de fréquences.

Puisque le problème est linéaire en tension, on ne considérera pas la fréquence elle-même, mais son carré. On notera :

$$\boxed{F_i \triangleq f_i^2 = \frac{T_i}{4 L_i^2 \mu_i} \triangleq \frac{T_i}{\psi_i}}$$

Par abus de langage et pour simplifier le discours, j'appellerai les F_i des fréquences, mais on se souviendra qu'il s'agit en fait de leur carré. Ici, nous avons donc six inconnues de plus à calculer par rapport au problème précédent, il nous faudra donc au minimum **sept** lectures de plus (6+1 car il faudra encore ajouter une inconnue en désaccordant), soit 21 lectures au total.

La méthode de résolution que nous proposons se base sur la conservation des ρ_i. Supposons qu'entre l'état 0 et l'état 1, nous ayons désaccordé la corde j_1. Nous pouvons donc écrire pour une corde i autre que la j_1 :

$$\frac{\Delta T_i^{(1)}}{\Delta T^{(1)}} = -\rho_i$$

Supposons également qu'entre l'état 1 et l'état 2, nous ayons désaccordé la corde j_2. Nous pouvons donc toujours écrire :

$$\frac{\Delta T_i^{(1)}}{\Delta T^{(1)}} = \frac{\Delta T_i^{(2)}}{\Delta T^{(2)}} = -\rho_i$$

Donc, en transposant en fréquence :

$$\psi_i \Delta F_i^{(1)} \sum_k \psi_k \Delta F_k^{(2)} - \psi_i \Delta F_i^{(2)} \sum_k \psi_k \Delta F_k^{(1)} = 0$$

$$\sum_k \psi_k \left[\Delta F_i^{(1)} \Delta F_k^{(2)} - \Delta F_i^{(2)} \Delta F_k^{(1)} \right] = \sum_k \psi_k \lambda_{ik} = 0$$

Il est immédiat que $\forall k,\ \lambda_{kk} = 0$ et que $\forall i, k,\ \lambda_{ik} = -\lambda_{ki}$, mais de plus :

$$\forall k \neq j_1, j_2 \quad \frac{\lambda_{ik}}{\Delta F_i^{(2)} \Delta F_k^{(2)}} = \frac{\Delta F_i^{(1)}}{\Delta F_i^{(2)}} - \frac{\Delta F_k^{(1)}}{\Delta F_k^{(2)}} = \frac{\frac{-\rho_i}{\psi_i} \Delta T^{(1)}}{\frac{-\rho_i}{\psi_i} \Delta T^{(2)}} - \frac{\frac{-\rho_k}{\psi_k} \Delta T^{(1)}}{\frac{-\rho_k}{\psi_k} \Delta T^{(2)}} = 0$$

Au final, la somme écrite plus haut se restreint donc aux seuls termes j_1 et j_2. On notera au passage qu'écrire l'équation pour toute autre corde autre que j_1 et j_2 reviendrait au même, à cause de tous les coefficients nuls.

$$\psi_{j_1} \lambda_{i j_1} + \psi_{j_2} \lambda_{i j_2} = 0$$

En faisant les mesures de fréquences adéquates, nous pouvons donc sans soucis calculer les λ_{ij} et nous obtenons donc :

$$\psi_{j_2} = \psi_{j_1} \frac{\lambda_{i j_1}}{\lambda_{j_2 i}}$$

En résumé, pour déterminer le coefficient ψ_{j_2}, il faut donc :

- connaître un autre coefficient ψ_{j_1}
- faire trois premières lectures de fréquences après avoir désaccordé la corde j_1, une sur la corde j_1, une sur j_2, et une dernière sur n'importe quelle autre corde
- faire les trois mêmes lectures après avoir désaccordé la corde j_2

On le voit, la procédure est assez difficile, mais on ne peut malheureusement tirer qu'une seule équation de deux désaccordages successifs, alors qu'ils étaient totalement suffisants pour déterminer tous les paramètres lors du problème précédent. Le nombre de désaccordages augmentant d'autant le nombre d'inconnues du problème, on comprendra aisément la difficulté du calcul.

On montrera plus tard que la connaissance exacte des ψ_i n'est pas nécessaire, il suffit de les connaître à un facteur multiplicatif près (le même pour tous). On peut donc simplement poser $\psi_1 = 1$ et calculer les autres par de manière itérative :

- désaccordons la corde 1, puis la 2, et calculons ψ_2 en utilisant la corde 3 laissée intacte
- désaccordons ensuite la corde 3, puis calculons ψ_3 grâce à la corde 4
- …

L'itération se résume ainsi :

$$\boxed{\forall i>1,\ \psi_{i+1} = \psi_i \frac{\Delta F_{i+2}^{(i)} \Delta F_i^{(i+1)} - \Delta F_i^{(i)} \Delta F_{i+2}^{(i+1)}}{\Delta F_{i+1}^{(i)} \Delta F_{i+2}^{(i+1)} - \Delta F_{i+2}^{(i)} \Delta F_{i+1}^{(i+1)}}}$$

Cependant, pour limiter le nombre de mesures de fréquences requis par cette méthodologie, on calculera ψ_6 avec la corde 4 comme corde fixe, et non la corde 1. Le nombre de mesures nécessaires est alors de 27. C'est colossal, mais compte tenu de la nature des équations, nous doutons pouvoir faire mieux.

Nous résumons dans le tableau suivant toutes les mesures de fréquence à effectuer :

$F_1^{(0)}$	$F_1^{(1)}$	$F_1^{(2)}$				
$F_2^{(0)}$	$F_2^{(1)}$	$F_2^{(2)}$	$F_2^{(3)}$			
$F_3^{(0)}$	$F_3^{(1)}$	$F_3^{(2)}$	$F_3^{(3)}$	$F_3^{(4)}$		
	$F_4^{(1)}$	$F_4^{(2)}$	$F_4^{(3)}$	$F_4^{(4)}$	$F_4^{(5)}$	$F_4^{(6)}$
		$F_5^{(2)}$	$F_5^{(3)}$	$F_5^{(4)}$	$F_5^{(5)}$	$F_5^{(6)}$
			$F_6^{(3)}$	$F_6^{(4)}$	$F_6^{(5)}$	$F_6^{(6)}$

On constate qu'il faudrait effectuer deux mesures supplémentaires pour pouvoir déterminer les ρ_i comme précédemment. Heureusement, il est possible de ruser.

Rappelons qu'entre l'état (i-1) et l'état (i), c'est la corde i qui a été désaccordée. Or, pour i<5, nous faisons la mesure de ρ_i et de $\Delta F_{i+2}^{(i)}$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \psi_{i+1} \Delta F_{i+1}^{(i)} = -\rho_{i+1} \Delta T^{(i)} \\ \psi_{i+2} \Delta F_{i+2}^{(i)} = -\rho_{i+2} \Delta T^{(i)} \end{cases}$$

Et donc :

$$\frac{\rho_{i+1}}{\rho_{i+2}} = \frac{\psi_{i+1} \Delta F_{i+1}^{(i)}}{\psi_{i+2} \Delta F_{i+2}^{(i)}}$$

On s'aperçoit donc immédiatement que, bien que nous ne connaissions les ψ_i qu'à une constante multiplicative près, cette constante se simplifie dans l'expression précédente et nous pouvons donc calculer la véritable valeur du rapport donné.

Nous pouvons donc, par récurrence, calculer tous les ρ_i en fonction de ρ_1. Nous pouvons donc calculer :

$$\boxed{\forall i,\ \nu_i \triangleq \frac{\rho_i}{\rho_1} = \prod_2^i \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}}}$$

Et contrairement à d'habitude, nous pouvons exploiter l'équation donnée par la corde que nous venons de désaccorder :

$$\begin{cases} \psi_1 \Delta F_1^{(1)} = \left(1+\sum_{k\neq 1}\rho_k\right)\Delta T^{(1)} \\ \psi_2 \Delta F_2^{(1)} = -\rho_2 \Delta T^{(1)} \end{cases}$$

$$\frac{-\psi_1 \Delta F_1^{(1)}}{\psi_2 \Delta F_2^{(1)}} = \frac{\left(1+\sum_{k\neq 1}\rho_k\right)}{\rho_2} = \frac{\left(1+\rho_1 \sum_{k\neq 1}\nu_k\right)}{\rho_1 \nu_2}$$

D'où finalement :

$$\boxed{\rho_1 = -\left(\nu_2 \frac{\psi_1 \Delta F_1^{(1)}}{\psi_2 \Delta F_2^{(1)}} + \sum_{k\neq 1}\nu_k\right)^{-1}}$$

Là encore, on remarque que le facteur multiplicatif portant sur les ψ_i ne pose pas le moindre problème.

Il reste encore à calculer l'incrément de tension dû à l'accordage, par exemple pour le premier désaccordage :

$$\Delta T_1^a = \left(1+\sum_i \rho_i\right)\Delta T = \left(1+\sum_i \rho_i\right)\sum_i \psi_i \Delta F_i$$

Ici, on s'aperçoit qu'on ne peut pas obtenir l'incrément de tension, parce qu'on ne connaît pas les ψ_i réels. Ce n'est pas gênant, il suffit pour pallier de ne s'intéresser qu'à l'incrément de fréquence que l'on peut définir ainsi :

$$\Delta F_1^a \triangleq \frac{\Delta T_1^a}{\psi_1} = \left(1+\sum_i \rho_i\right)\sum_i \frac{\psi_i}{\psi_1}\Delta F_i$$

Ce qui résout effectivement le problème. Il ne reste donc plus qu'à déterminer ces incréments pour chaque désaccordage, ce qui ne pose pas de souci particulier. On a bien résolu le système total. Cette méthodologie est très certainement optimale (nous mettons quiconque au défi de trouver tous les paramètres avec une méthode plus simple!)

IV – Écriture généralisée

Une fois qu'on a trouvé tous les paramètres nécessaires, on peut donner une forme matricielle aux équations pour résoudre de manière plus générale le « problème inverse » de l'accordage.

Imposons un incrément de fréquence ΔF_j à la corde j. On souhaite connaître l'impact de cet incrément de fréquence sur les autres cordes. On considérera dans tout ce qui suit que les ψ_i permettent de calculer les tensions exactes, ce qui est faux, mais le but étant de calculer des variations de fréquences, cela n'aura pas d'incidence.

$$\Delta F_j = \frac{\Delta T_j}{\psi_j} = \frac{1}{\psi_j}\left(-\rho_j \Delta T + \Delta T_1^a\right) = \frac{\Delta T}{\psi_j}\left(-\rho_j + 1 + \sum_k \rho_k\right) = \frac{\Delta T}{\psi_j}\left(1 + \sum_{k \neq j} \rho_k\right)$$

$$\Delta T = \frac{\psi_j \Delta F_j}{1 + \sum_{k \neq j} \rho_k}$$

Et finalement :

$$\forall i \neq j, \; \Delta F_i = -\frac{\rho_i}{\psi_i} \Delta T = -\frac{\psi_j}{\psi_i} \frac{\rho_i}{1 + \sum_{k \neq j} \rho_k} \Delta F_j = M_{ij} \Delta F_j$$

Et donc, en écrivant de manière matricielle :

$$\boxed{\underline{\Delta F_{final}} = \underline{\underline{M}}\, \underline{\Delta F_{initial}}}$$