Résolution du problème inverse

Dans ce document, nous tentons de trouver une méthodologie opérationnelle pour accorder la guitare une fois toutes les caractéristiques des cordes connues.

I – Écriture théorique

Dans le document précédent, nous avions démontré qu'on pouvait écrire le problème d'accordage de façon matricielle :

$$\boxed{\Delta \underline{F}^{final} = \underline{M}\,\Delta \underline{F}^{appliqué}}$$

Où l'on rappelle les coefficients de la matrice M :

$$\begin{cases} \forall i,\ M_{ii} = 1 \\ \forall i \neq j,\ M_{ij} = -\dfrac{\psi_j}{\psi_i}\dfrac{\rho_i}{1+\sum\limits_{k\neq j}\rho_k} \end{cases}$$

Mettons ici l'accent sur la signification des termes $\Delta \underline{F}^{appliqué}$ et $\Delta \underline{F}^{final}$. Supposons que nous ne modifiions qu'une seule corde (la première, disons), le vecteur colonne $\Delta \underline{F}^{appliqué}$ n'a alors qu'une seule composante non nulle. $\Delta \underline{F}^{final}$ correspondra alors aux variations de fréquences effectives de toutes les cordes suite à la variation imposée de la première.

Si nous modifions maintenant plusieurs cordes à la suite, les composantes du vecteur $\Delta \underline{F}^{appliqué}$ correspondront alors aux variations imposées *au moment où chacune est imposée*, et les composantes du vecteur $\Delta \underline{F}^{final}$ correspondront alors aux variations de fréquences effectives entre le début et la fin de la séquence d'accordage.

Ainsi, résoudre le problème inverse est à présent extrêmement facile. Supposons nous trouver dans un état initial quelconque $\underline{F}^0$, et que nous souhaitons atteindre un état final quelconque $\underline{F}^\infty$. Nous devons donc imposer, entre l'état initial et l'état final, la variation suivante :

$$\Delta \underline{F}^{voulu} = \underline{F}^\infty - \underline{F}^0$$

Il nous suffit donc tout simplement d'imposer, dans n'importe quel ordre, les variations composantes du vecteur :

$$\Delta \underline{F}^{appliqué} = \underline{M}^{-1}\,\Delta \underline{F}^{voulu}$$

II – Exemple d'inversion à deux cordes

Prenons un exemple simplifié, avec seulement deux cordes. Supposons des caractéristiques simples :

$$\psi_1 = 1\ ;\ \psi_2 = 0{,}5\ ;\ \rho_1 = 0{,}5\ ;\ \rho_2 = 0{,}25$$

On peut alors écrire la matrice M :

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Supposons encore que nous voulons accorder ces deux cordes respectivement vers mi_1 et la_1 à partir des quartes inférieures si_0 et mi_1. Nous utiliserons ici des intervalles justes (et non tempérés), calés sur le diapason la_3 à 440Hz.

Ainsi, les fréquences initiales et finales sont :

	État initial	**État final**
Corde 1	61,875 Hz	82,5 Hz
Corde 2	82,5 Hz	110 Hz

Et comme nous nous intéressons à leur carré :

	État initial	**État final**
Corde 1	3829	6806
Corde 2	6806	12100

Alors :

$$\underline{\Delta F}^{voulu} = \underline{F}^{\infty} - \underline{F}^{0} = \begin{pmatrix} 2977 \\ 5294 \end{pmatrix}$$

Nous calculons aisément :

$$\underline{\Delta F}^{appliqué} = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\Delta F}^{voulu} = \frac{15}{14} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2977 \\ 5294 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4135 \\ 6948 \end{pmatrix}$$

Nous allons donc essayer ce résultat en commençant par accorder la première corde, puis la seconde.

$$\begin{cases} F_1^1 = F_1^0 + 4135 = 3829+4135 = 7964 \\ F_2^1 = F_2^0 - \frac{2}{5} \times 4135 = 6806 - \frac{2}{5} \times 4135 = 5154 \end{cases}$$

Cela nous amène respectivement à un fa_1 trop aigu et à un $ré_1$ trop grave.

Accordons alors la seconde corde :

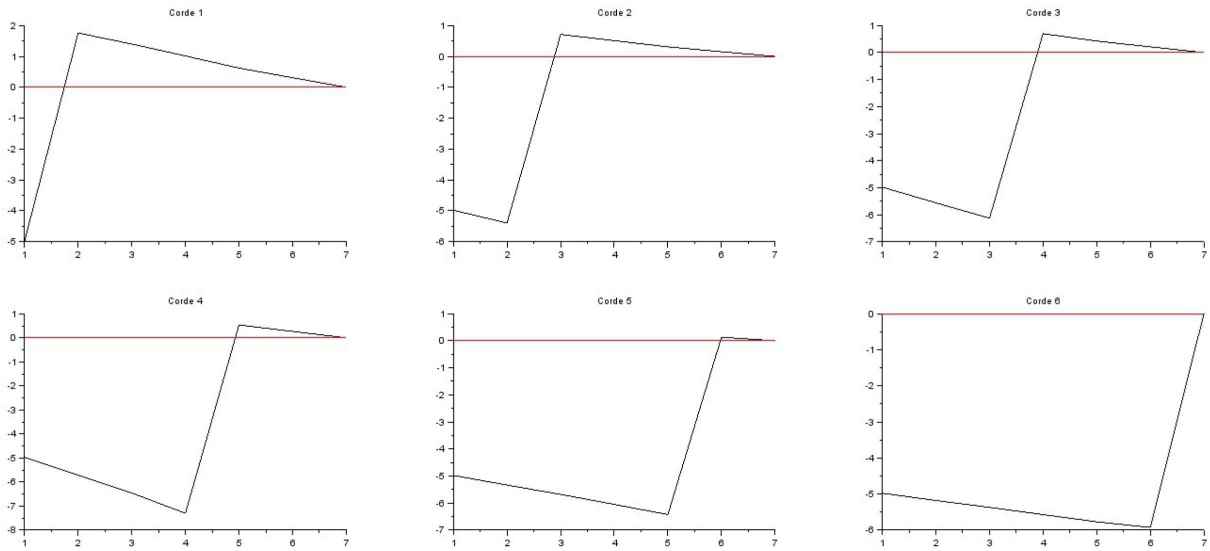
$$\begin{cases} F_1^2 = F_1^1 - \frac{1}{6}\times 6948 = 7964 - \frac{1}{6}\times 6948 = 6806 \\ F_2^2 = F_2^1 + 6948 = 5154 + 6948 = 12102 \end{cases}$$

Cela nous amène bien à l'état final souhaité.

III – Résolution du problème complet par Scilab

Écrivons à présent une procédure simple pour accorder toute la guitare à partir des quartes inférieures. Nous prenons pour le calcul les caractéristiques réelles des cordes.

Voici les résultats que nous obtenons :



Les graphes représentent l'évolution des fréquences au cours de la séquence d'accordage. Ils sont tracés dans l'échelle musicale tempérée, c'est-à-dire que la graduation -1 correspond à une note 1 demi-ton tempéré en-dessous de la note souhaitée à la fin de la séquence d'accordage. Mathématiquement, on a en fait tracé :

$$12\times\frac{\ln(f)-\ln(f_{\textit{théorique}})}{\ln(2)}$$

On constate que le problème est correctement inversé, puisque la fréquence finale est la bonne, et on constate qu'au maximum, la corde 1 (celle dont la surtension est la plus forte) ne dépasse jamais 1 ton au-dessus de la note finale, on ne risque donc pas d'endommager la corde ou la guitare par surtension.

Le problème est résolu.