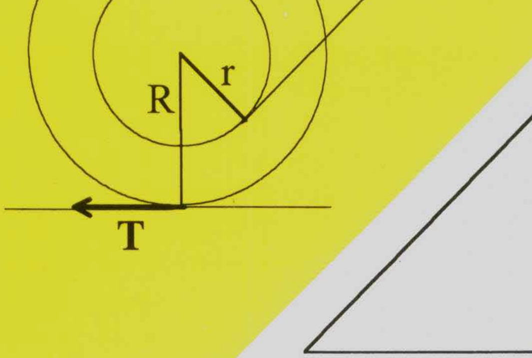
# FIZYKA

K. JEZIERSKI
B. KOŁODKA
K. SIERAŃSKI

# ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

skrypt do ćwiczeń z fizyki dla studentów I roku
**POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ**




OFICYNA
WYDAWNICZA
scripta

Niniejszy skrypt został opracowany z myślą o studentach I i II roku mających w swym programie studiów ćwiczenia rachunkowe z fizyki ogólnej. Skrypt ten pozwoli im zaoszczędzić wiele czasu, jaki musieliby poświęcić na szukanie w obszernych zbiorach zadań rozwiązań trudniejszych problemów, których nie potrafią rozwiązać samodzielnie. Staraliśmy się wybrać zadania najczęściej przerabiane na zajęciach i przedstawić ich rozwiązania w sposób jak najbardziej zrozumiały i przejrzysty. Oczywistym jest, że przedstawiony sposób rozwiązania zadania jest w wielu przypadkach jednym z kilku poprawnych sposobów.

Dobre opanowanie materiału z fizyki wymaga zarówno pewnej wiedzy teoretycznej, jak i praktycznych umiejętności rozwiązywania problemów sformułowanych w postaci zadań. W osiągnięciu tych umiejętności niniejszy zbiór zadań bardzo dopomoże, jeśli student nie ograniczy się do przeczytania rozwiązania, lecz dodatkowo przeanalizuje je zwracając na każdym kroku uwagę na to, czy rozumie tok rozwiązania. Kolejnym etapem treningu powinno być samodzielne rozwiązywanie zadania przy zamkniętym skrypcie. Dla sprawdzenia nabytych umiejętności zamieścilimy w Dodatku zadania z odpowiedziami. Pisząc ten skrypt kierowaliśmy się naszym doświadczeniem zdobytym podczas pracy dydaktycznej w Instytucie Fizyki Politechniki Wrocławskiej. Będziemy bardzo wdzięczni za wszelkie uwagi dotyczące skryptu, gdyż pozwolą one na doskonalenie kolejnych wydań.

Uwagi, które do tej pory zostały zgłoszone, uwzględniliśmy przygotowując drugie wydanie skryptu. Poprawione zostały także wszystkie dostrzeżone przez nas błędy. Pragniemy podziękować Izabeli Szlufarskiej, studentce Politechniki Wrocławskiej, za efektywną pomoc w zredagowaniu niniejszego wydania skryptu.

Autorzy

# KINEMATYKA

## RACHUNEK WEKTOROWY

**1. Dane są dwa wektory: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{k}$. Obliczyć:**
**a) długość każdego wektora,**
**b) iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$,**
**c) kąt zawarty między wektorami,**
**d) iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$.**

a) Długość wektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ wyraża się zależnością

$$a = |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Tak więc dla wektorów danych w zadaniu: $a = 5\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$.

b) Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ oraz $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ wyraża się zależnością: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Tak więc dla wektorów danych w zadaniu $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 + 5 = 2$.

c) Kąt zawarty między wektorami można wyznaczyć z zależności:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Tak więc dla wektorów danych w zadaniu:

$$\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{2}{5\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = 0.2\ .$$

Zakładając, że $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ - mierzony w radianach - należy do przedziału $\langle 0, \pi\rangle$, otrzymujemy rozwiązanie $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1.37$.

d) Iloczyn wektorowy jest wektorem, który może zostać przedstawiony za pomocą symbolu wyznacznika w następujący sposób:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Tak więc dla wektorów danych w zadaniu:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}\ .$$

Przypomnijmy, że wektor $\vec{a} \times \vec{b}$ jest zawsze prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a zwrot jego jest wyznaczony przez tzw. regułę śruby prawoskrętnej wkręcanej od $\vec{a}$ do $\vec{b}$.

**2. Udowodnić podane zależności rozkładając wektory na składowe:**

**a)** $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)$,

**b)** $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.

a) Obliczmy najpierw iloczyn wektorowy $\vec{b} \times \vec{c}$. Skorzystamy z tego, że iloczyn wektorowy dwóch wektorów można zapisać w postaci wyznacznika:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (b_y c_z - b_z c_y)\,\vec{i} + (b_z c_x - b_x c_z)\,\vec{j} + (b_x c_y - b_y c_x)\,\vec{k}.$$

Obliczmy teraz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b} \times \vec{c}$. Otrzymujemy

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

Analogicznie liczymy iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$ :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}.$$

oraz iloczyn skalarny wektorów $\vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$, który dalej przekształcamy

$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = c_x(a_y b_z - a_z b_y) + c_y(a_z b_x - a_x b_z) + c_z(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= a_y b_z c_x - a_z b_y c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y + a_x b_y c_z - a_y b_x c_z =$$

$$= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

Udowodniliśmy zatem pierwszą równość $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

Na koniec obliczamy iloczyn wektorowy $\vec{c} \times \vec{a}$ :

$$\vec{c}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=(c_y a_z-c_z a_y)\,\vec{i}+(c_z a_x-c_x a_z)\,\vec{j}+(c_x a_y-c_y a_x)\,\vec{k}.$$

oraz iloczyn skalarny wektorów $\vec{b}$ i $\vec{c}\times\vec{a}$, który następnie przekształcamy

$$\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=b_x(c_y a_z-c_z a_y)+b_y(c_z a_x-c_x a_z)+b_z(c_x a_y-c_y a_x)=$$
$$=a_z b_x c_y-a_y b_x c_z+a_x b_y c_z-a_z b_y c_x+a_y b_z c_x-a_x b_z c_y=$$
$$=a_x(b_y c_z-b_z c_y)+a_y(b_z c_x-b_x c_z)+a_z(b_x c_y-b_y c_x)=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Udowodniliśmy więc prawdziwość całej zależności.

b) Obliczamy najpierw iloczyn wektorowy $\vec{b}\times\vec{c}$

$$\vec{b}\times\vec{c}=(b_y c_z-b_z c_y)\,\vec{i}+(b_z c_x-b_x c_z)\,\vec{j}+(b_x c_y-b_y c_x)\,\vec{k}.$$

Następnie liczymy iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}\times\vec{c}$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_y c_z-b_z c_y & b_z c_x-b_x c_z & b_x c_y-b_y c_x\end{vmatrix}=$$
$$=[a_y(b_x c_y-b_y c_x)-a_z(b_z c_x-b_x c_z)]\,\vec{i}+$$
$$+[a_z(b_y c_z-b_z c_y)-a_x(b_x c_y-b_y c_x)]\,\vec{j}+$$
$$+[a_x(b_z c_x-b_x c_z)-a_y(b_y c_z-b_z c_y)]\,\vec{k}.$$

Obliczymy teraz prawą stronę zależności, której słuszność mamy udowodnić - najpierw iloczyn skalarny $\vec{a}\cdot\vec{c}$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=a_x c_x+a_y c_y+a_z c_z.$$

Następnie mnożymy wektor $\vec{b}$ przez powyższą wartość. Otrzymujemy wektor

$$\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=(b_x a_x c_x+b_x a_y c_y+b_x a_z c_z)\,\vec{i}+$$
$$+(b_y a_x c_x+b_y a_y c_y+b_y a_z c_z)\,\vec{j}+$$
$$+(b_z a_x c_x+b_z a_y c_y+b_z a_z c_z)\,\vec{k}.$$

Pozostaje do obliczenia iloczyn $\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$. Otrzymujemy $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$ i dalej

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=(c_x a_x b_x+c_x a_y b_y+c_x a_z b_z)\,\vec{i}+$$
$$+(c_y a_x b_x+c_y a_y b_y+c_y a_z b_z)\,\vec{j}+$$
$$+(c_z a_x b_x+c_z a_y b_y+c_z a_z b_z)\,\vec{k}.$$

Liczymy na koniec różnicę wektorów $\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ odejmując i przekształcając wyrażenia stojące przy tych samych wektorach jednostkowych $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$:

$$\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=[a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)]\,\vec{i}\,+$$
$$+[a_z(b_yc_z-b_zc_y)-a_x(b_xc_y-b_yc_x)]\,\vec{j}\,+$$
$$+[a_x(b_zc_x-b_xc_z)-a_y(b_yc_z-b_zc_y)]\,\vec{k}\,.$$

Udowodniliśmy zatem prawdziwość podanej zależności.

**3. Wyznacz gradient funkcji f (x,y,z) dla:**

**a)** $f(x,y,z)=A\left(x^3+y^2+z^3\right)$

**b)** $f(x,y,z)=B\left(x^3+y^2+z^2\right)^{-1/2}$

**gdzie** ***A*** **i** ***B*** **są stałymi.**

Gradientem skalarnej funkcji $f(x,y,z)$ nazywamy wektor o składowych $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ i oznaczamy ten wektor symbolem grad $f$ lub $\nabla f$ ($\nabla$ jest tzw. operatorem nabla). Z definicji gradientu wynika, że

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\,.$$

a) Obliczamy składowe wektora grad $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3Ax^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2Ay,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=3Az^2.$$

Zatem zgodnie z definicją gradientu mamy

$$\operatorname{grad} f=3Ax^2\,\vec{i}+2Ay\,\vec{j}+3Az^2\,\vec{k}\,.$$

b) Analogicznie jak w części a) zadania obliczamy kolejne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{3Bx^2}{2\left[x^3+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{By}{\left[x^3+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{Bz}{\left[x^3+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Zatem otrzymujemy

$$\operatorname{grad} f=-\frac{3Bx^2}{2\left[x^3+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{i}-\frac{By}{\left[x^3+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{j}-\frac{Bz}{\left[x^3+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{k}\,.$$

**4. Wyznacz dywergencję wektora $\vec{a}$, którego współrzędne są następującymi funkcjami współrzędnych punktu zaczepienia wektora:**

**a)** $\vec{a}=(xy,xyz,z/y)$

**b)** $\vec{a}=\left(x^2+y^2,x^3+z^2,z^{3/2}\right)$

Dywergencją wektora $\vec{a}=[a_x(x,y,z),\ a_y(x,y,z),\ a_z(x,y,z)]$

nazywamy skalar

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ponieważ operator nabla

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$$

traktujemy formalnie jako wektor, więc inaczej mówiąc, dywergencja wektora $\vec{a}$ to iloczyn skalarny wektora $\nabla$ i wektora $\vec{a}$:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right]\left[a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right].$$

a) Zgodnie z definicją dywergencji liczymy odpowiednie pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{1}{y}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\operatorname{div}\vec{a} = y + xz + \frac{1}{y}.$$

b) Analogicznie mamy

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{3}{2}\sqrt{z}.$$

Zatem

$$\operatorname{div}\vec{a} = 2x + \frac{3}{2}\sqrt{z}.$$

**5. Wyznacz rotację wektora $\vec{a}$, którego współrzędne są następującymi funkcjami współrzędnych punktu zaczepienia wektora:**

**a)** $\vec{a} = \left(xy + zy, xz + z^2 + y, y + x^2\right)$

**b)** $\vec{a} = \left(x^3 + y^3, x^2y + z^3x, y\right)$

Rotacją wektora $\vec{a} = [a_x(x,y,z), a_y(x,y,z), a_z(x,y,z)]$ nazywamy iloczyn wektorowy wektora nabla

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$$

i wektora $\vec{a}$ i oznaczamy przez $\operatorname{rot}\vec{a}$.

Rotację wektora można, podobnie jak iloczyn wektorowy dwóch wektorów, napisać w postaci wyznacznika:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

przy czym formalnie iloczyny elementów drugiego i trzeciego wiersza należy uważać za pochodne cząstkowe odpowiednich funkcji, np.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_x & a_y \end{vmatrix} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

a) Obliczamy odpowiedni wyznacznik

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy+zy & xz+z^2+y & y+x^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(y+x^2\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(xz+z^2+y\right)\right]+$$

$$+\vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(xy+zy) - \frac{\partial}{\partial x}\left(y+x^2\right)\right]+$$

$$+\vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xz+z^2+y\right) - \frac{\partial}{\partial y}(xy+zy)\right]=$$

$$=[1-x-2z]\,\vec{i}+[y-2x]\,\vec{j}-x\,\vec{k}.$$

b) Postępując analogicznie otrzymujemy

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3+y^3 & x^2y+z^3x & y \end{vmatrix} = \left[1-3z^2x\right]\vec{i}+\left[2xy+z^3-3y^2\right]\vec{k}.$$

**6. Dwie cząstki zostały wysłane z początku układu współrzędnych i po pewnym czasie ich położenia są opisane wektorami:**

$$\vec{r}_1 = 4\,\vec{i}+3\,\vec{j}+8\,\vec{k} \quad \textbf{oraz} \quad \vec{r}_2 = 2\,\vec{i}+10\,\vec{j}+5\,\vec{k}.$$

**Oblicz:**

**a) długości wektorów,**

**b) wektor przemieszczenia cząstki drugiej względem pierwszej $\vec{r}_{12}$,**

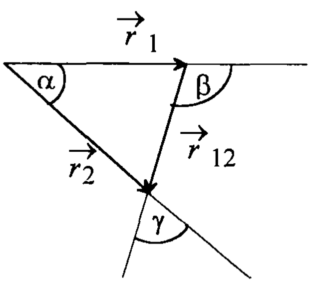
**c) kąty między wszystkimi parami tych trzech wektorów,**

**d) rzut wektora $\vec{r}_2$ na $\vec{r}_1$,**

**e) iloczyn wektorowy $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.**

a) Zgodnie z definicją długości wektora:

$$r_1 = \left|\vec{r}_1\right| = \sqrt{4^2+3^2+8^2} = 9.43$$

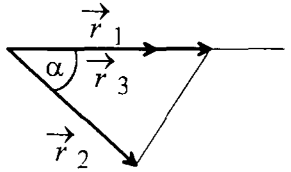



$$r_2 = \left|\vec{r}_2\right| = \sqrt{2^2+10^2+5^2} = 11.36$$

b) Wektor $\vec{r}_{12}$ będzie równy różnicy wektorów $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_1$:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -2\,\vec{i}+7\,\vec{j}-3\,\vec{k}.$$

c) Szukane kąty znajdziemy korzystając z tego, że iloczyn skalarny wektorów z jednej strony wyznacza się z zależności dla współrzędnych wektorów: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, zaś z drugiej strony wyznaczyć go można znając długości wektorów i kąt zawarty między nimi: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.



Przed obliczeniami spójrzmy na rysunek, gdzie zaznaczone zostały poszczególne kąty między wektorami. Dla danych z zadania i zgodnie z oznaczeniami rysunku:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 78,$$

więc $\cos\alpha = 0.728$ i $\alpha = 0.755$,

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12} = -11,$$

więc $\cos\beta = -0.148$ i $\beta = 1.719$

Trzeci kąt znajdziemy wykorzystując fakt, że: $\alpha + (\pi - \beta) + \gamma = \pi$

czyli $\gamma = \beta - \alpha = 0.964$

d) Niech $\vec{r}_3$ oznacza rzut wektora $\vec{r}_2$ na kierunek wyznaczony przez wektor $\vec{r}_1$, jak na rysunku:

Widać, że długość szukanego wektora:

$$r_3 = r_2 \cdot \cos\alpha,$$

natomiast jego kierunek będzie kierunkiem wektora $\vec{r}_1$. Tak więc można zapisać:

$$\vec{r}_3 = r_2\cos\alpha \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1}$$

Korzystając z wcześniej wyznaczonych wartości liczbowych dla $r_1$, $r_2$ i $\cos\alpha$ otrzymamy:

$$\vec{r}_3 = 0.88\,\vec{r}_1.$$

e) Iloczyn wektorowy otrzymamy licząc wyznacznik (patrz zad.1d):

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 8 \\ 2 & 10 & 5 \end{vmatrix} = -65\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 34\,\vec{k}.$$

**7. Promień wodzący punktu materialnego zmienia się w czasie w następujący sposób: $\vec{r} = 5t\,\vec{i} + \exp(-t)\,\vec{j} + \sin(4t)\,\vec{k}$. Znajdź zależność od czasu prędkości punktu materialnego oraz jego przyspieszenia.**

Skorzystamy z definicji prędkości:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

czyli, jeśli $\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, to:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Dla $\vec{r} = \vec{r}(t)$ danego w zadaniu otrzymamy więc:

$$\vec{v} = 5\,\vec{i} - \exp(-t)\,\vec{j} + 4\cos(4t)\,\vec{k}.$$

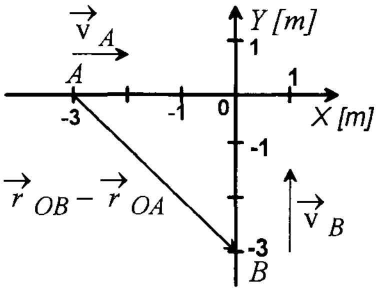
Z kolei różniczkując po czasie wektor $\vec{v}$ otrzymamy przyspieszenie $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \exp(-t)\,\vec{j} - 16\sin(4t)\,\vec{k}.$$

**8. Dwie cząstki A i B poruszają się wzdłuż osi *OX* i *OY* z prędkościami $\vec{v}_A = 2\,\vec{i}$ m/s i $\vec{v}_B = 3\,\vec{j}$ m/s. W chwili t=0 są one w punktach o współrzędnych:**

$$x_A = -3 \text{ m}, \quad y_A = 0 \quad \text{oraz} \quad x_B = 0\,, \quad y_B = -3 \text{ m}.$$

**Znaleźć wektor $\vec{r}_A - \vec{r}_B$, który określi położenie cząstki *B* względem *A* w funkcji czasu. Kiedy i gdzie obie te cząstki będą najbliżej siebie?**




Opis ruchu cząstek przeprowadzimy w kartezjańskim układzie współrzędnych *XOY*. Na rysunku przedstawiono początkowe położenia cząstek i odpowiadające im wektory prędkości. Wektory wodzące cząstek *A* i *B* w chwili początkowej $t$=0, wynoszą:

$$\vec{r}_{OA} = x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j} = -3\,\vec{i}\text{ m}$$
$$\vec{r}_{OB} = x_B\,\vec{i} + y_B\,\vec{j} = -3\,\vec{j}\text{ m}$$

natomiast wektor położenia cząstki *B* względem *A* wynosi:

$$\vec{r}_{OB} - \vec{r}_{OA} = \left(3\,\vec{i} - 3\,\vec{j}\right)\text{m}$$

Aby określić wektor wzajemnego położenia cząstek w funkcji czasu, znajdźmy najpierw same wektory $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$.

Ponieważ cząstki poruszają się ze stałymi prędkościami, to:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{OA} + \vec{v}_A t = (-3+2t)\,\vec{i}\text{ m}$$
$$\vec{r}_B = \vec{r}_{OB} + \vec{v}_B t = (-3+3t)\,\vec{j}\text{ m}$$
$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \left[(3-2t)\,\vec{i} + (-3+3t)\,\vec{j}\right]\text{m}$$

gdzie $t$ jest wyrażone w sekundach.

Odległość między cząstkami *A* i *B* w funkcji czasu wynosi:

$$\Delta(t) = \left|\vec{r}_A - \vec{r}_B\right| = \sqrt{(3-2t)^2 + (-3+3t)^2}\text{ m} = \sqrt{18 - 30t + 13t^2}\text{ m}$$

Cząstki *A* i *B* znajdują się najbliżej siebie, gdy funkcja $\Delta(t)$ osiąga wartość minimalną, co odpowiada warunkowi zerowania się pochodnej

$$\left.\frac{d\Delta(t)}{dt}\right|_{t=t\,\min} = 0$$

Stąd znajdujemy czas $t_{\min}$ odpowiadający minimalnej odległości cząstek $t_{\min} = 15/13$ s.

Wektory położenia cząstek odpowiadające $t = t_{\min}$ wynoszą:

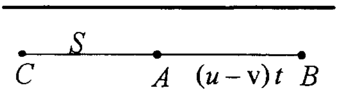
$$\vec{r}_A = -\frac{9}{13}\,\vec{i}\text{ m}, \quad \vec{r}_B = \frac{6}{13}\,\vec{j}\text{ m}.$$

## SKŁADANIE RUCHÓW

**9. Rybak płynie łódką w górę rzeki. Przepływając pod mostem gubi zapasowe wiosło, które wpada do wody. Po godzinie rybak spostrzega brak wiosła. Wraca z powrotem i dogania wiosło w odległości 6 km poniżej mostu. Jaka jest prędkość rzeki, jeśli rybak poruszając się zarówno w górę, jak i w dół rzeki wiosłuje jednakowo.**

Zadanie rozwiążemy dwiema metodami. Metoda pierwsza jest prostsza i polega na rozpatrzeniu ruchu wiosła i rybaka względem nurtu rzeki. Wiosło unoszone przez nurt jest w spoczynku względem płynącej rzeki. Rybak początkowo oddala się od wiosła, a następnie do niego się zbliża. Prędkość rybaka względem nurtu rzeki jest w obu przypadkach stała, tylko zmienia się jej kierunek. Oznaczmy przez $t$ czas ruchu rybaka od chwili zgubienia wiosła do momentu zauważenia jego braku i rozpoczęcia pogoni. Tak więc czas ruchu rybaka od momentu zgubienia wiosła do momentu jego odnalezienia wynosi $2t$. Równocześnie $2t$ to czas ruchu wiosła. Niech $S$ będzie drogą przebytą przez wiosło w tym czasie względem brzegu. Jest to również droga przebyta przez wodę w rzece. Tak więc szukana prędkość rzeki (prędkość ruchu wiosła) v wynosi:

$$\mathrm{v} = \frac{S}{2t} = 3\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right].$$




Drugi sposób rozwiązania polega na rozpatrzeniu ruchu wiosła i rybaka względem brzegu rzeki. Oznaczmy przez $A$ miejsce, w którym rybak gubi wiosło (rys.), przez $B$ miejsce, w którym zauważa jego brak i zawraca oraz przez $C$ punkt, w którym dogania wiosło.

Niech $u$ będzie prędkością ruchu rybaka, a v prędkością nurtu rzeki. Porównajmy czas ruchu wiosła i ruchu rybaka. Czas pogoni za wiosłem wynosi:

$$t_{BC} = \frac{S_{BC}}{u+\mathrm{v}} = \frac{S_{BA}+S_{AC}}{u+\mathrm{v}}.$$

Mamy tutaj oczywiście $S_{BA} = S_{AB}$ i $S_{AC} = S$ a droga $S_{AB}$ wynosi $S_{AB} = (u-\mathrm{v})t$.
Czas $t_{BC}$ zatem wyraża się wzorem

$$t_{BC} = \frac{(u-\mathrm{v})\,t+S}{u+\mathrm{v}}.$$

Czas płynięcia wiosła $t_W$ wynosi

$$t_W = t_{AB} + t_{BC},$$

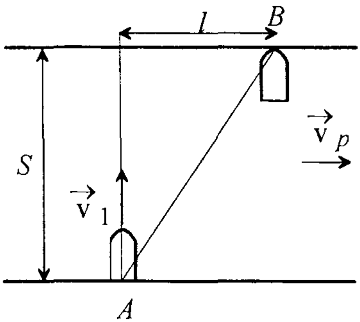
gdzie $t_{AB}$ to po prostu czas $t$.
Tak więc ponieważ $t_W = \frac{S}{\mathrm{v}}$ otrzymujemy

$$\frac{S}{\mathrm{v}} = t + \frac{(u-\mathrm{v})\,t+S}{u+\mathrm{v}},$$

skąd $\mathrm{v} = S/2t = 3$ km/h.

**10. Łódka przepłynęła rzekę prostopadle do jej idealnie równoległych brzegów. Jednocześnie prąd rzeki zniósł łódkę o $l$=100m w swoim kierunku. Szerokość rzeki wynosi s=200m, natomiast prędkość łódki względem wody $v_1 = 4\,\frac{m}{s}$. Wyznacz prędkość prądu rzeki $v_p$ oraz całkowity czas przeprawy łódki przez rzekę.**

Ruch łódki jest w tym przypadku złożeniem dwóch ruchów odbywających się niezależnie, choć w tym samym czasie. Każdy z ruchów składowych jest ruchem jednostajnie prostoliniowym i są to następujące ruchy:

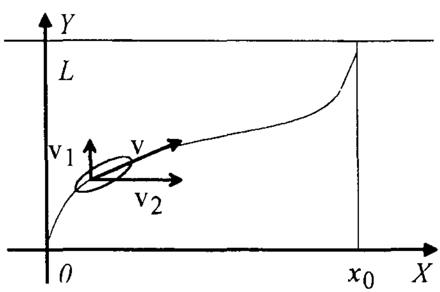



ruch łódki z prędkością $v_1$ w kierunku prostopadłym do brzegów rzeki, opisany zależnością: $s = v_1 t$ .
oraz ruch łódki znoszonej wraz z prądem rzeki w kierunku równoległym do brzegów, opisany zależnością: $l = v_p t$ .
Z powyższych równań znajdziemy wielkości szukane w zadaniu; całkowity czas przeprawy: $t = \frac{s}{v_1} = 50\,\text{s}$, oraz prędkość prądu rzeki: $v_p = \frac{l}{t} = \frac{l v_1}{s} = 2\,\frac{m}{s}$.

**11. Po rzece płynie łódka ze stałą względem wody prędkością $v_1$, prostopadłą do kierunku prądu. Woda w rzece płynie wszędzie równolegle do brzegów, ale wartość jej prędkości $v_2$ zależy od odległości $y$ od brzegu i dana jest wzorem:**

$$v_2 = v_0 \sin\frac{\pi y}{L},$$

**gdzie $v_0, L$ – stałe ($L$ jest szerokością rzeki). Znaleźć:**
**a) wartość wektora prędkości łódki względem brzegu rzeki,**
**b) kształt toru łódki,**
**c) odległość na jaką woda zniosła łódkę w dół rzeki.**




Wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych $XOY$ związany z nieruchomymi brzegami. Początek układu współrzędnych wybierzmy w miejscu startu łódki.
Składowe prędkości łódki wynoszą odpowiednio:

$$v_x = v_0 \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) = v_2\ ,\ v_y = v_1,$$

a wartość prędkości:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_1^2 + v_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{L}\right)}\ .$$

Aby wyznaczyć kształt toru łódki, określmy najpierw równania ruchu, t.j. $x = x(t)$ i $y = y(t)$, przyjmując warunki początkowe: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Ponieważ ruch w kierunku osi $OY$ odbywa się ze stałą prędkością $v_1$ to:

$$y(t) = v_1 t$$

Podstawiając powyższe równanie do wzoru na $v_x$ otrzymujemy równanie ruchu łódki w kierunku osi $OX$.

$$x(t) = \int v_x dt = \int v_0 \sin\left(\frac{\pi v_1}{L}t\right) dt = -\frac{v_0 L}{\pi v_1}\cos\left(\frac{\pi v_1}{L}t\right) + C$$

Ponieważ, z założenia, $x(0)=0$, stąd stała całkowania $C = \frac{v_0 L}{\pi v_1}$, czyli

$$x(t) = \frac{v_0 L}{\pi v_1}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi v_1}{L}t\right)\right] = \frac{2 v_0 L}{\pi v_1}\sin^2\left(\frac{\pi v_1}{2L}t\right)$$

Równanie toru otrzymujemy podstawiając z powrotem $v_1 t = y$.

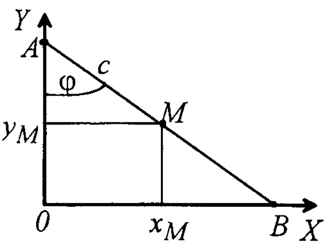
$$x = \frac{2 v_0 L}{\pi v_1}\sin^2\left(\frac{\pi y}{2L}\right)$$

Tor łódki opisany powyższym równaniem pokazano na rysunku.

Podstawiając do równania toru $y = L$ ( $L$-szerokość rzeki), znajdujemy odległość $x_0$, na jaką prąd rzeki znosi łódź podczas jej ruchu od punktu startu do miejsca przybicia na przeciwległym brzegu.

$$x_0 = \frac{2 v_0 L}{\pi v_1}.$$

**12. Odcinek $AB$ porusza się tak, że punkty końcowe ślizgają się po osiach układu współrzędnych $XOY$ ze stałą prędkością. Wyznaczyć tor, jaki będzie zakreślał przy tym dowolnie obrany punkt na odcinku.**




Załóżmy, że punkt $A$ porusza się z prędkością $v_0$ po osi $OY$ w kierunku początku układu współrzędnych oraz, że $AB=l$ i w chwili początkowej $OA=a$.

Położenie punktu $A$ w funkcji czasu podaje wzór:

$$y_A(t) = a - v_0 t.$$

Przyjmijmy, że punkt $M$ leży w odległości $c$ od punktu $A$. Z rysunku mamy, że w chwili początkowej $t=0$: $\cos\varphi(0) = a/l$, natomiast w chwili dowolnej $t$: $\cos\varphi = (a - v_0 t)/l$.

Współrzędne punktu $M$ są więc odpowiednio równe:

$$x_M = c\sin\varphi = c\sqrt{1-\cos^2\varphi} = c\sqrt{1-\left(\frac{a-v_0 t}{l}\right)^2}.$$

$$y_M = a - v_0 t - c\cos\varphi = a - v_0 t - c\frac{a-v_0 t}{l} = \frac{\left(a-v_0 t\right)(l-c)}{l}.$$

Aby wyznaczyć tor ruchu należy z drugiej zależności wyznaczyć czas $t$ i podstawić do równania pierwszego. Wystarczy jednak w tym przypadku wyznaczyć $a - v_0 t$

$$a - v_0 t = \frac{y_M l}{l-c}.$$

Otrzymujemy

$$x_M = c\sqrt{1-\frac{y_M^2}{(l-c)^2}}.$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu i prostych przekształceniach dostajemy ostatecznie równanie toru

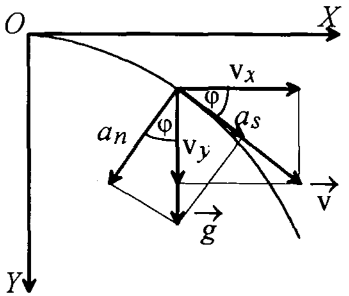
$$\frac{x_M^2}{c^2}+\frac{y_M^2}{(l-c)^2}=1.$$

Jest to równanie elipsy o półosiach $c$ i $l$-$c$. Dla przypadku, gdy $x \geq 0$ i $y \geq 0$ (pierwsza ćwiartka układu współrzędnych) torem punktu $M$ jest ćwiartka elipsy.

## RZUTY

**13. Przy powierzchni ziemi rzucono poziomo ciało z prędkością $v_0$. Znaleźć przyspieszenie styczne i normalne po czasie *t*.**

Ruch ciała można przedstawić jako złożenie ruchu jednostajnego z prędkością $v_0$ w kierunku poziomym i ruchu jednostajnie przyspieszonego bez prędkości początkowej w kierunku pionowym z przyspieszeniem $a_Y = g$ skierowanym w dół (rys.).




Ponieważ składowa pozioma prędkości ciała $v_X$ jest stała ($v_x = v_0$), to składowa pozioma przyspieszenia równa się zeru. Dlatego przyspieszenie całkowite ciała jest wciąż skierowane pionowo w dół i równe przyspieszeniu ziemskiemu $g$. A więc

$$a = g = \sqrt{a_s^2 + a_n^2},$$

gdzie $a_s$ jest przyspieszeniem stycznym, a $a_n$ przyspieszeniem normalnym. Z rysunku widać, że

$$\cos\varphi = \frac{v_0}{v} = \frac{a_n}{g} \text{ oraz } \sin\varphi = \frac{v_y}{v} = \frac{a_s}{g}.$$

Jednocześnie mamy $v_y = gt$, gdyż w kierunku pionowym mamy ruch jednostajnie przyspieszony, oraz

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}.$$

Otrzymujemy więc

$$a_n = \frac{g v_0}{v} = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

oraz

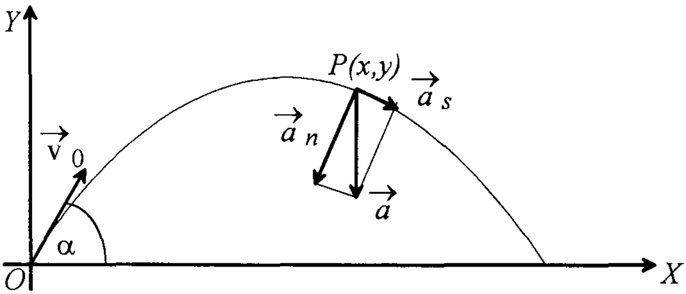
$$a_s = \frac{g v_y}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

**14. Ciało rzucone pod kątem $\alpha$ względem powierzchni ziemi z prędkością początkową $v_0$ porusza się w próżni po torze parabolicznym, opisanym równaniami parametrycznymi:**

$$x = v_0 t\cos\alpha,\quad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

**Wyznaczyć współrzędne wektora prędkości oraz przyspieszenia styczne i normalne w dowolnej chwili czasu.**

Treść zadania sugeruje, aby opisać rzut ukośny w prostokątnym układzie współrzędnych *XOY*, przyjmując za początek układu punkt wyrzucenia ciała. Współrzędne punktu, w którym znajduje się ciało po upływie czasu *t* zadane są następująco:




$$x = v_0 t\cos\alpha \quad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Współrzędne wektora prędkości otrzymamy różniczkując po czasie powyższe równania:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha - gt.$$

Z definicji składowa przyspieszenia styczna do toru jest obliczana następująco:

$$a_s = \frac{dv}{dt},$$

gdzie v jest wartością prędkości ciała, czyli długością wektora prędkości:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}.$$

Obliczając pochodną po czasie dla powyższej zależności otrzymamy:

$$a_s = g\frac{gt - v_0\sin\alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}}$$

z kolei składowa przyspieszenia normalna do toru (patrz rysunek) musi spełniać zależność:

$$a^2 = a_n^2 + a_s^2$$

czyli po wykorzystaniu faktu, że w tym przypadku $a = g$:

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_s^2}$$

co po prostych przekształceniach prowadzi do końcowej zależności:

$$a_n = g\frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}}.$$

## RUCH PROSTOLINIOWY

**15. Cząstka porusza się w dodatnim kierunku osi *OX*. Jej prędkość v zależy od $x$ i określona jest wzorem v$= \alpha x$, gdzie $\alpha$ - dodatni współczynnik. Wyznaczyć**
**a) zależność prędkości v i przyspieszenia *a* od czasu,**
**b) średnią prędkość cząstki w czasie, w którym przebędzie ona pierwszych *s* metrów drogi.**
**Przyjąć** $x(t=0)=x_0$.

a) Aby obliczyć zależność prędkości v od czasu $t$ należy skorzystać z definicji prędkości dla przypadku poruszania się cząstki wzdłuż osi *OX:* v$=dx/dt$. Jednocześnie w zadaniu mamy v$= \alpha x$. Otrzymujemy zatem równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x.$$

Rozwiązując je otrzymamy zależność $x$ od $t$. Równanie to rozwiążemy metodą rozdzielenia zmiennych $x$ i $t$

$$\frac{dx}{x} = \alpha\, dt.$$

Otrzymujemy
$$\ln x = \alpha t + C,$$
gdzie $C$ jest stałą, której wartość można obliczyć korzystając z warunku początkowego $x(t=0)=x_0$. Otrzymujemy $C=\ln x_0$.

Tak więc zależność $x$ od $t$ wyraża się wzorem

$$\ln\left[\frac{x}{x_0}\right] = \alpha t,$$

który można przekształcić do postaci

$$x = x_0 e^{\alpha t}.$$

Korzystając z definicji prędkości otrzymujemy

$$\mathrm{v}= \frac{dx}{dt} = x_0 \alpha e^{\alpha t}.$$

Zależność przyspieszenia $a$ od czasu $t$ dostaniemy korzystając z definicji przyspieszenia

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt}.$$

Otrzymujemy

$$a = x_0 \alpha^2 e^{\alpha t}.$$

b) Aby obliczyć prędkość średnią $\mathrm{v}_{sr}$ należy podzielić drogę $s$ przebytą przez punkt przez czas $t_1$ potrzebny do jej przebycia

$$\mathrm{v}_{sr} = \frac{s}{t_1}.$$

Droga $s$ jest dana wzorem $s = x - x_0$.
Obliczmy czas $t_1$. Skorzystamy z zależności $x$ od $t$: $s = x_0 e^{\alpha t_1} - x_0$.
Przekształćmy tę zależność do postaci

$$\frac{s+x_0}{x_0} = e^{\alpha t_1}.$$

Po zlogarytmowaniu stronami dostajemy

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{s+x_0}{x_0}.$$

Zatem prędkość średnia wynosi

$$\mathrm{v}_{sr} = \frac{s}{t_1} = \frac{s\alpha}{\ln \frac{s+x_0}{x_0}}.$$

**16. Punkt materialny porusza się po prostej z przyspieszeniem $a$ określonym wzorem $a = -\alpha\, v$, gdzie $\alpha$ jest dodatnim współczynnikiem. Dla $t=0$ prędkość $v = v_0$. Jaką drogę przebędzie punkt do momentu zatrzymania się. W jakim czasie przebędzie on drogę $s_1$ ?**

Korzystając z definicji przyspieszenia $a$ w ruchu prostoliniowym

$$a = \frac{dv}{dt}$$

oraz z zależności $a$ od v ($a = -\alpha\, v$) danej w zadaniu, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha\, v.$$

Ponieważ mamy do czynienia z ruchem opóźnionym stąd znak minus po prawej stronie równania.
Rozdzielamy zmienne v i $t$ i rozwiązujemy równanie

$$\frac{dv}{v} = -\alpha\, dt.$$

Dokonujemy całkowania

$$\int \frac{dv}{v} = -\alpha \int dt.$$

Otrzymujemy

$$\ln v = -\alpha\, t + C_1.$$

Stałą całkowania $C_1$ obliczymy korzystając z warunku początkowego $v(t = 0) = v_0$.
Dostajemy

$$C_1 = \ln v_0.$$

Stąd zależność v od $t$ wyraża się wzorem

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\alpha\, t$$

a po przekształceniu

$$v = v_0 e^{-\alpha t}.$$

Drogę przebytą przez punkt obliczymy z zależności $v = \frac{ds}{dt}$, którą przekształcamy do postaci $ds = v\, dt$ i całkujemy wykorzystując policzoną wcześniej zależność $v(t)$

$$\int ds = v_0 \int e^{-\alpha t}\, dt.$$

Otrzymujemy

$$s = -\frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t} + C_2.$$

Stałą $C_2$ obliczymy zakładając $s(t=0) = 0$. Dostajemy

$$C_2 = \frac{v_0}{\alpha}.$$

Ostatecznie

$$s = \frac{v_0}{\alpha}[1 - e^{-\alpha t}].$$

By punkt zatrzymał się jego prędkość musi być równa zeru. Jak wynika z otrzymanej zależności $v(t)$ ma to miejsce po nieskończenie długim czasie, gdyż

$$\lim_{t\to\infty} v_0 e^{-\alpha t} = 0.$$

Obliczając granicę przy $t \to \infty$ zależności $s(t)$ dostaniemy drogę jaką przebędzie punkt do momentu zatrzymania się

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v_0}{\alpha}[1 - e^{-\alpha t}] = \frac{v_0}{\alpha}.$$

Czas $t_1$ potrzebny na przebycie drogi $s_1$ policzymy z zależności

$$s_1 = \frac{v_0}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha t_1}\right],$$

którą przekształcamy do postaci

$$e^{-\alpha t_1} = \frac{\frac{v_0}{\alpha} - s_1}{\frac{v_0}{\alpha}}$$

i ostatecznie, logarytmując stronami, otrzymujemy

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{v_0}{v_0 - \alpha s_1}.$$

## RUCH KRZYWOLINIOWY

**17. Znaleźć prędkość i przyspieszenie w ruchu opisanym równaniami:**

$$x = A\cos\left(Bt^2\right), \quad y = A\sin\left(Bt^2\right),$$

**gdzie $A$, $B$ są stałymi. Znaleźć równanie toru. Jaki to jest ruch?**

Opisany ruch jest ruchem na płaszczyźnie. Równanie toru otrzymamy eliminując z podanych równań czas $t$. Podnosząc obustronnie do kwadratu i dodając stronami otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 = A^2\cos^2(Bt^2) + B^2\sin^2(Bt^2) = A^2.$$

Powyższe równanie jest równaniem okręgu o promieniu $A$ i środku w początku układu współrzędnych. Wyznaczmy teraz współrzędne prędkości i przyspieszenia:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2ABt\sin(Bt^2)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2AB\sin(Bt^2) - 4AB^2t^2\cos(Bt^2)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2ABt\cos(Bt^2)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} 2AB\cos(Bt^2) - 4AB^2t^2\sin(Bt^2).$$

Kolejnym zadaniem jest policzenie wartości prędkości i przyspieszenia:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2ABt$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4A^2B^2 + 16A^2B^4t^4} = 2AB\sqrt{1 + 4B^2t^4}.$$

Czyli podane w zadaniu zależności dotyczą ruchu jednostajnie zmiennego po okręgu.

**18. Ćma porusza się po krzywej, której długość $s$ jest dana wzorem:**

$$s = s_0\exp(ct),$$

**gdzie $s_0$ i $c$ stałe. Wiedząc, że wektor przyspieszenia $a$ tworzy stały kąt $\varphi$ ze styczną do tego toru w każdym punkcie, znaleźć wartość**

**a) prędkości,**

**b) przyspieszenia stycznego,**

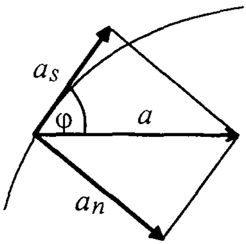
**c) przyspieszenia normalnego,**

**d) promienia krzywizny toru jako funkcji długości łuku krzywej.**

a) Prędkość ćmy obliczymy korzystając ze wzoru $v=ds/dt$. Wynosi ona $v = cs_0\exp(ct)$.

b) Przyspieszenie styczne jest drugą pochodną drogi $s$ po czasie t i pierwszą pochodną prędkości v po czasie $t$

$$a_s = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = c^2 s_0 \exp(ct).$$




c) Korzystając z tego, że znamy kąt $\varphi$ można obliczyć przyspieszenie normalne $a_n$. Mamy

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{a_n}{a_s},$$

skąd

$$a_n = a_s \mathrm{tg}\,\varphi = c^2 s_0 \exp(ct)\,\mathrm{tg}\varphi.$$

d) Wykorzystując inną definicję przyspieszenia normalnego $a_n = \frac{v^2}{r}$ obliczymy promień krzywizny toru $r$. Podstawiając obliczoną wcześniej prędkość v otrzymujemy

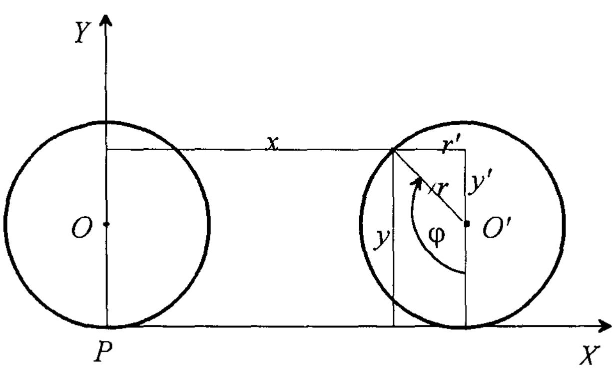
$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{c^2 s_0^2 (\exp(ct))^2}{c^2 s_0^2 \exp(ct)\,\mathrm{tg}\,\varphi} = s_0 \exp(ct)\,\mathrm{ctg}\,\varphi = s\,\mathrm{ctg}\,\varphi.$$

**19. Koło o promieniu $r$ toczy się ruchem jednostajnym z prędkością kątową $\omega$ po prostej. Zbadać ruch dowolnego punktu leżącego na obwodzie koła. Podać zależność prędkości v i drogi $s$ przebytej przez ten punkt od czasu $t$.**

Znajdziemy równania ruchu tzn. zależności $x(t)$ i $y(t)$ dowolnego punktu $P$ leżącego na obwodzie koła. Układ współrzędnych obieramy tak, że oś $OX$ jest prostą, po której toczy się koło a oś $OY$ wyznacza położenie początkowe koła.

Ponieważ koło toczy się z prędkością kątową $\omega$ to jego środek $O'$ porusza się z prędkością liniową v= $\omega r$. W dowolnym czasie $t$ środek koła przebywa zatem drogę równą $vt = \omega rt$. W przyjętym układzie odniesienia współrzędne $x$ i $y$ punktu $P$ wynoszą (rys.)

$$x = \omega rt - x' \qquad y = r + y',$$



przy czym $x'$ i $y'$ są tutaj współrzędnymi punktu $P$ w układzie współrzędnych, którego środek znajduje się w środku koła. Ich wartości określają wzory

$$\frac{x'}{r} = \sin\left(180^0 - \varphi\right) = \sin\varphi$$
$$\frac{y'}{r} = \cos\left(180^0 - \varphi\right) = -\cos\varphi$$

Kąt $\varphi$ jest kątem jaki zakreślił w czasie $t$ promień łączący punkt $P$ ze środkiem koła i wynosi $\omega t$. Otrzymujemy zatem

$$x' = r\sin\omega t$$
$$y' = -r\cos\omega t$$

Tak więc równania ruchu mają postać

$$x = r(\omega t - \sin\omega t)$$
$$y = r(1 - \cos\omega t).$$

Wyznaczamy z drugiego równania wartość $\cos\omega t$

$$\cos\omega t = \frac{r-y}{y}$$

oraz $\omega t$

$$\omega t = \arccos\frac{r-y}{y}$$

i podstawiamy do równania pierwszego korzystając z tożsamości $\sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t}$.
Otrzymujemy równanie toru ruchu punktu $P$

$$x = -\sqrt{y(2r-y)} + r\arccos\frac{r-y}{y}.$$

Torem tym jest cykloida.
Znając równania ruchu można obliczyć wartość prędkości punktu $P$. Skorzystamy ze wzoru

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2},$$

gdzie zgodnie z definicją składowych prędkości mamy

$$\mathrm{v}_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r\omega - r\omega\cos\omega t,$$
$$\mathrm{v}_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\omega\sin\omega t.$$

Zatem

$$\mathrm{v} = \sqrt{2}\, r\omega\sqrt{1-\cos\omega t}.$$

Skorzystaliśmy tutaj z tożsamości $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$. Korzystając z kolei z tożsamości

$$1 - \cos\omega t = 2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

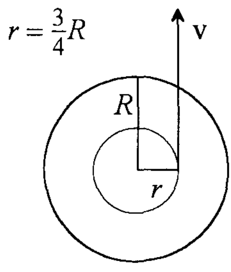
otrzymujemy

$$\mathrm{v} = 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}.$$

Droga $s$ przebyta przez punkt $P$ w czasie $t$ wynosi zgodnie z definicją

$$s = \int_0^t \mathrm{v}\,\mathrm{d}t = 2r\omega\int_0^t \sin\frac{\omega t}{2}\mathrm{d}t = 2r\omega\left(-\frac{2}{\omega}\right)\cos\frac{\omega t}{2}\Big|_0^t = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right).$$

**20. Koło o promieniu $R$=2m obraca się tak, że kąt obrotu promienia koła $\varphi$ zależy od czasu $t$ w następujący sposób: $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$, gdzie $B$=4rad/s, $C$=3rad/s$^3$. Wyznaczyć po czasie $t$=2s od momentu rozpoczęcia ruchu dla punktów położonych w odległości 3$R$/4 od osi obrotu:**
**a) prędkość kątową,**
**b) prędkość liniową,**
**c) przyspieszenie styczne, normalne i całkowite.**




Każdy punkt koła porusza się po okręgu o promieniu równym odległości tego punktu od środka koła. Prędkość kątowa, wspólna dla wszystkich punktów koła wynosi:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Prędkość liniowa v= $\omega r$, gdzie $r$ jest odległością od osi obrotu. Dla punktów koła położonych w odległości $r = \frac{3}{4}R$ od osi obrotu:

$$\mathrm{v} = \frac{3}{4}R\left[B + 3Ct^2\right].$$

Przyspieszenie styczne $a_s$ mające kierunek wektora prędkości, zgodnie z definicją wynosi:

$$a_s = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{9}{2}RCt,$$

a przyspieszenie normalne $a_n$, które w tym przypadku jest przyspieszeniem dośrodkowym, dane jest wzorem

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = r\omega^2 = \frac{3}{4}R\left[B + 3Ct^2\right]^2$$

i jest skierowane do środka okręgu.
Przyspieszenie całkowite, które jest wypadkową przyspieszeń składowych wynosi w tym przypadku

$$a = \sqrt{a_s^2 + a_n^2} = \frac{3}{4}R\sqrt{[6Ct]^2 + \left[B + 3Ct^2\right]^4}.$$

Dokonując obliczeń numerycznych dla $t$=2s otrzymujemy:

$$\omega = 40\,\mathrm{rad/s},\ \mathrm{v} = 60\,\mathrm{m/s},\ a_s = 54\,\mathrm{m/s^2},\ a_n = 2400\,\mathrm{m/s^2},\ a = 2400.61\,\mathrm{m/s^2}.$$

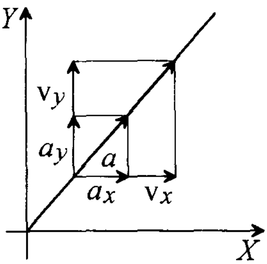
**21. Ruch punktu poruszającego się na płaszczyźnie dany jest w układzie kartezjańskim równaniami $x = bt^2$, $y = ct^2$, gdzie stałe $b,c$ >0.**
**Znaleźć parametryczne równania ruchu w układzie biegunowym, tor ruchu punktu oraz prędkość i przyspieszenie w obu układach odniesienia.**

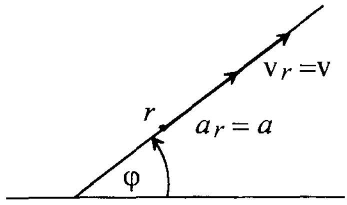
Dokonajmy najpierw opisu ruchu punktu w układzie kartezjańskim $XOY$. Równanie toru znajdujemy eliminując czas z pierwszego równania ruchu i wstawiając do drugiego, lub dzieląc równania ruchu stronami. Torem ruchu punktu jest prosta o równaniu:

$$y = \frac{c}{b}x, \text{ gdzie } x \geq 0.$$

Z kolei prędkość punktu dana jest równaniami: $\mathrm{v}_x = 2bt$, $\mathrm{v}_y = 2ct$
i stąd

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2} = 2t\sqrt{b^2 + c^2}$$




oraz przyspieszenie: $a_x = 2b, \quad a_y = 2c$
i stąd

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\sqrt{b^2 + c^2}\,.$$

Jak widać z powyższych równań ruch punktu jest ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej. W biegunowym układzie odniesienia ruch punktu opisujemy poprzez podanie zależności długości promienia wodzącego $r$ i kąta $\varphi$ od czasu:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = t^2\sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{c}{b}\right) = \mathrm{const.}$$

Prędkość punktu w układzie biegunowym wyraża się poprzez składowe: radialną $v_r = \frac{dr}{dt}$ i transwersalną $v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}$. Ponieważ kąt $\varphi$ =const, składowa transwersalna $v_\varphi = 0$, a składowa radialna:

$$v_r = 2t\sqrt{b^2 + c^2} = v.$$

Przyspieszenie punktu w układzie biegunowym wynosi:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}$$

gdzie:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r = 2\sqrt{b^2 + c^2}\,,$$

$$a_\varphi = 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

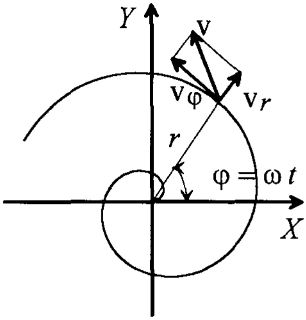
Jak widać z powyższych zależności w układzie biegunowym wektory prędkości i przyspieszenia mają jedynie niezerowe składowe radialne, co jest oczywiste dla opisu ruchu po linii prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

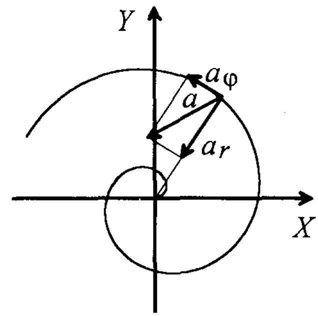
**22. Kolista tarcza o promieniu $R$ wiruje wokół swojej osi ze stałą prędkością $\omega$. Ze środka tarczy wyrusza biedronka i porusza się wzdłuż promienia ze stałą prędkością $v_0$. Znaleźć:**

**a) równania ruchu i toru biedronki w nieruchomym układzie odniesienia we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych,**

**b) zależność od czasu wartości wektora prędkości v oraz jego składowych radialnej $v_r$ i transwersalnej $v_\varphi$,**

**c) zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia $a$, jak również jego składowych: radialnej $a_r$, transwersalnej $a_\varphi$, oraz normalnej $a_n$ i stycznej $a_s$,**
**d) zależność wartości promienia krzywizny toru $\rho$ od czasu,**
**e) całkowitą długość drogi przebytej przez biedronkę względem nieruchomego układu odniesienia.**




W układzie odniesienia związanym z wirującą tarczą, biedronka porusza się ze stałą prędkością $v_0$ wzdłuż promienia, natomiast w nieruchomym układzie odniesienia biedronka dodatkowo porusza się z prędkością kątową $\omega$ obracającej się tarczy. W sumie w nieruchomym układzie odniesienia tor, po którym porusza się biedronka ma postać rozwijającej się spirali.
Równania ruchu w układzie biegunowym, dane są poprzez podanie zależności od czasu współrzędnej radialnej $r$ i kątowej $\varphi$. Ponieważ biedronka porusza się wzdłuż promienia ze stałą prędkością $v_0$, a tarcza obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega$, mamy

$$r = v_0 t, \quad \varphi = \omega t.$$

Założyliśmy przy tym, że w chwili początkowej $t$=0; kąt $\varphi$ jest równy zeru. Korzystając z powyższych równań otrzymujemy równania ruchu we współrzędnych kartezjańskich w postaci:

$$x = r\cos\varphi = v_0 t\cos(\omega t)$$
$$y = r\sin\varphi = v_0 t\sin(\omega t).$$

Równanie toru we współrzędnych biegunowych otrzymujemy eliminując czas z jednego i wstawiając do drugiego równania ruchu. Otrzymujemy w ten sposób prostą zależność

$$r = \frac{v_0}{\omega}\varphi.$$

Z kolei równanie toru we współrzędnych kartezjańskich otrzymujemy w prosty sposób zauważywszy, że

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \text{ a } \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Podstawiając powyższe związki do równania toru we współrzędnych biegunowych otrzymujemy

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{v_0}\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Krzywa dana powyższym równaniem nosi nazwę tzw. spirali Archimedesa. Na rys. pokazano rozkład wektora prędkości na składowe (w układzie biegunowym): radialną $v_r$ i transwersalną $v_\varphi$. Zgodnie z definicjami tych składowych mamy:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v_0, \qquad v_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}r = \omega v_0 t.$$

Zależność od czasu wartości wektora prędkości ma postać:

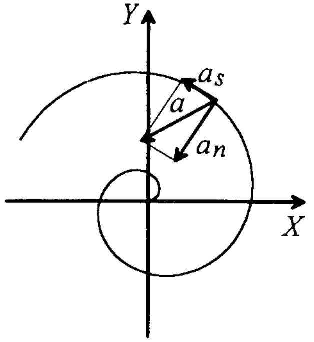
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}.$$

Całkowite przyspieszenie we współrzędnych biegunowych rozkładamy, podobnie jak prędkość, na składową radialną $a_r$ i transwersalną $a_\varphi$. Na podstawie definicji składowe wektora przyspieszenia wynoszą:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -v_0\omega^2 t, \qquad a_\varphi = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} = 2v_0\omega,$$

a wartość całkowitego przyspieszenia:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = v_0\omega\sqrt{4+\omega^2 t^2}.$$




Całkowite przyspieszenie możemy również rozłożyć na dwie inne składowe: na składową styczną do toru $a_s$, oraz składową normalną $a_n$ skierowaną do środka okręgu o promieniu $\rho$, stycznego do toru w danym punkcie. Wartość składowej stycznej przyspieszenia $a_s$ w chwili czasu $t$ dana jest wzorem:

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}\right) = \frac{v_0\omega^2 t}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}.$$

Składową normalną przyspieszenia znajdujemy korzystając z tego, że znamy składową styczną i całkowite przyspieszenie $a$.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_s^2} = \frac{v_0\omega\left(2+\omega^2 t^2\right)}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}.$$

Z drugiej strony wartość składowej normalnej przyspieszenia dana jest wzorem:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Pozwala to nam wyznaczyć promień krzywizny $\rho$ w dowolnej chwili czasu, gdyż v oraz $a_n$ zostały już wcześniej wyznaczone.

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0\left(1+\omega^2 t^2\right)^{3/2}}{\omega\left(2+\omega^2 t^2\right)}.$$

Obliczmy teraz całkowitą długość drogi przebytą przez biedronkę w nieruchomym układzie odniesienia. Obliczmy najpierw drogę przebytą przez biedronkę jako funkcję czasu ruchu biedronki $t$.

$$s = \int v\,dt = \int v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}\,dt = \frac{1}{2}v_0\omega\left(t\sqrt{\frac{1}{\omega^2}+\omega^2 t^2} + \frac{1}{\omega^2}\operatorname{arcsinh}(\omega t)\right) + C.$$

Ponieważ w chwili $t$=0, droga $s$=0, stała całkowania $C$ jest równa zeru. Za całkowitą drogę przebytą przez biedronkę uważamy drogę, jaką przebyła ona w czasie $T$, gdzie $T$ jest czasem, po którym biedronka dotarła do brzegu tarczy o promieniu $R$. Z równania ruchu we współrzędnych biegunowych mamy $R = v_0 T$. Stąd $T = R/v_0$ wstawiamy do wzoru na drogę i otrzymujemy całkowitą drogę przebytą przez biedronkę w nieruchomym układzie odniesienia:

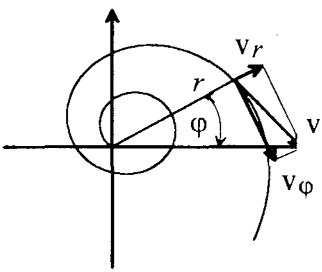
$$s_c = \frac{1}{2} v_0 \left( \frac{R}{v_0} \sqrt{1 + \frac{\omega^4 R^2}{v_0^2}} + \frac{1}{\omega} \operatorname{arcsinh}\left( \frac{\omega R}{v_0} \right) \right).$$

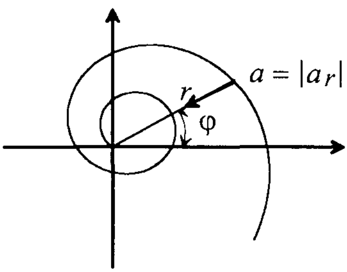
**23. Ruch punktu materialnego w biegunowym układzie odniesienia opisują równania** $r = bt$, $\varphi = c/t$, $b$, $c$=**const. Znaleźć tor ruchu, prędkość i przyspieszenie punktu jako funkcję czasu.**

Tor ruchu punktu materialnego znajdujemy w standardowy sposób, traktując czas $t$ w równaniach ruchu jako parametr, który wyznaczamy z pierwszego równania i wstawiamy do drugiego z równań. Równanie toru we współrzędnych biegunowych ma prostą postać:

$$r = \frac{bc}{\varphi}$$

i jest równaniem spirali hiperbolicznej.




Prędkość v punktu materialnego znajdujemy ze wzoru:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2},$$

gdzie $v_r$ i $v_\varphi$ sa odpowiednio składową radialną i transwersalną prędkości punktu, a ich wartości dla dowolnej chwili czasu $t$ otrzymujemy ze wzorów:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = b, \quad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{bc}{t}.$$

Stąd prędkość v wynosi

$$v = b\sqrt{1 + \left(\frac{c}{t}\right)^2}.$$

W podobny sposób obliczamy przyspieszenie punktu materialnego $a$. Odpowiednie składowe przyspieszenia, radialna $a_r$ i transwersalna $a_\varphi$, wynoszą:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r = -\frac{bc^2}{t^3},$$

$$a_\varphi = 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Przyspieszenie całkowite punktu materialnego wynosi więc:

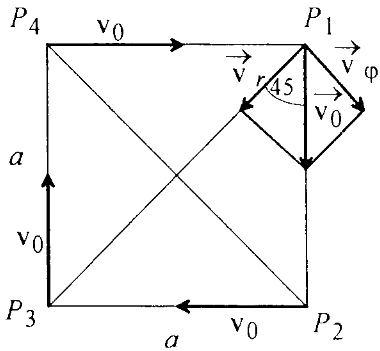
$$a=\sqrt{a_r^2+a_\varphi^2}=\frac{bc^2}{r^3}=|a_r|.$$

**24. W czterech rogach kwadratowego sufitu o boku $a$ znajdują się cztery pająki. W pewnej chwili zaczynają ścigać się nawzajem, tzn. poruszają się wszystkie ze stałą co do wartości prędkością $v_0$ skierowaną wzdłuż prostej łączącej pająka danego z pająkiem poprzedzającym go. Znaleźć:**

**a) równania ruchu dowolnego pająka,**

**b) czas ruchu,**

**c) równanie toru.**




Zadanie to w prosty sposób można rozwiązać we współrzędnych biegunowych. Położenie pająków na suficie w chwili początkowej przedstawia rysunek. Pająk $P_1$ zaczyna poruszać się w kierunku pająka $P_2$ z prędkością $v_0$, pająk $P_2$ w kierunku $P_3$ itd. Aby podać równania ruchu dowolnego pająka we współrzędnych biegunowych należy znaleźć zależności $r=r(t)$ i $\varphi=\varphi(t)$, określające jego położenie względem środka sufitu. Rozłóżmy wektor prędkości $v_0$ na składową radialną $v_r$ skierowaną wzdłuż przekątnej kwadratu i prostopadłą do niej składową transwersalną $v_\varphi$. Mając daną prędkość $v_0$ można obliczyć $v_r$ i $v_\varphi$ gdyż

$$\frac{v_r}{v_0}=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \text{oraz}\quad \frac{v_\varphi}{v_0}=\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem
$$v_r=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0\quad \text{oraz}\quad v_\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0.$$

Skorzystamy teraz z definicji prędkości $v_r$ i $v_\varphi$ tzn. ze wzorów

$$v_r=\frac{dr}{dt}\quad \text{oraz}\quad v_\varphi=r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Porównując powyższe dwie pary zależności na $v_r$ i $v_\varphi$ oraz uwzględniając, że wektor prędkości $\vec{v}_r$ ma zwrot przeciwy w stosunku do wektora położenia $\vec{r}$, skierowanego od środka sufitu do pająka (odległość $r$ maleje z czasem - daje to znak minus w pierwszym z równań poniżej), dostajemy dwa równania różniczkowe

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{\sqrt{2}}{2}v_0,\qquad \text{oraz}\qquad r\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0.$$

Rozdzielamy zmienne w pierwszym równaniu mnożąc stronami przez $dt$

$$dr=-\frac{\sqrt{2}}{2}v_0\,dt$$

i całkujemy stronami

$$\int dr=-\frac{\sqrt{2}}{2}v_0\int dt.$$

Otrzymujemy

$$r=-\frac{\sqrt{2}}{2}v_0t+C.$$

Stałą całkowania $C$ można określić na podstawie warunków początkowych. Ponieważ w chwili $t$=0 odległość $r = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ (połowa przekątnej kwadratu) otrzymujemy więc $C = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Zależność $r(t)$ ma zatem postać

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - v_0 t).$$

Należy teraz rozwiązać drugie równanie różniczkowe, z którego otrzymamy zależność $\varphi(t)$. Podstawiamy do niego otrzymaną zależność $r(t)$ i rozdzielamy zmienne. Otrzymujemy równanie

$$d\varphi = \frac{dt}{\frac{a}{v_0} - t},$$

które całkujemy stronami

$$\int d\varphi = \int \frac{dt}{\frac{a}{v_0} - t}.$$

Dokonujemy podstawienia $x = \frac{a}{v_0} - t$. Mamy zatem $dx = -dt$ i

$$\int d\varphi = -\int \frac{dx}{x}.$$

Po scałkowaniu dostajemy

$$\varphi = -\ln x + C = -\ln\left(\frac{a}{v_0} - t\right) + C.$$

W chwili początkowej $t$=0 $\varphi = 0$ zatem

$$0 = -\ln\frac{a}{v_0} + C,$$

skąd mamy $C = \ln\left(\frac{a}{v_0}\right)$ i ostatecznie

$$\varphi = -\ln\frac{\frac{a}{v_0} - t}{\frac{a}{v_0}} = -\ln\left(1 - \frac{v_0 t}{a}\right).$$

Równania ruchu dowolnego pająka mają zatem postać

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - v_0 t)$$
$$\varphi = -\ln\left(1 - \frac{v_0 t}{a}\right).$$

b) Pająki będą się poruszać do momentu spotkania się na środku sufitu. Czas ruchu $t_s$ można zatem określić z pierwszego z równań ruchu, czyli zależności $r(t)$. Na środku kwadratowego sufitu $r$=0 zatem otrzymujemy równanie, z którego określimy czas $t_s$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(a - v_0 t_s) = 0.$$

Dostajemy $t_s = \frac{a}{v_0}$.

c) Równanie toru ruchu dowolnego pająka znajdziemy po wyrugowaniu z układu równań ruchu $r(t)$, $\varphi(t)$ czasu $t$.

Przekształćmy zależność $\varphi(t)$ do postaci

$$a - v_0 t = ae^{-\varphi}$$

i podstawmy do równania $r(t)$. Otrzymujemy równanie toru

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}ae^{-\varphi}.$$

Jest to równanie spirali.

# DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

## RUCH POSTĘPOWY

**25. Znaleźć efektywny współczynnik tarcia kół samochodu o nawierzchnię drogi, jeżeli wiadomo, że przy szybkości samochodu v=10m/s droga hamowania $s$=8m. Przyjąć, że podczas hamowania samochód poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym. Dane jest przyspieszenie ziemskie $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.**

Podczas hamowania na samochód działa tylko siła tarcia $T$, której wartość równa jest iloczynowi efektywnego współczynnika tarcia $f$ oraz siły nacisku, równej ciężarowi ciała, czyli $mg$, gdzie $m$ jest masą samochodu. Tak więc:

$$T = fmg.$$

Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona możemy powiązać przyspieszenie ciała i działającą nań siłę, czyli w tym przypadku:

$$T = ma,$$

gdzie $a$ będzie wartością stałego przyspieszenia skierowanego tak jak siła tarcia, czyli przeciwnie do kierunku ruchu ciała; stąd $a$ nazwiemy opóźnieniem ruchu. Tak więc:

$$ma = fmg \quad \text{i} \quad f = \frac{a}{g}.$$

Z kolei wartość $a$ znajdziemy rozwiązując układ równań określających drogę i prędkość w ruchu jednostajnie opóźnionym:

$$s = \mathrm{v}t - \frac{at^2}{2}$$

$$0 = \mathrm{v} - at \quad \text{(gdyż po czasie } t \text{ ciało zatrzyma się)}$$

Z powyższego układu równań mamy:

$$a = \frac{\mathrm{v}^2}{2s},$$

a więc ostatecznie współczynnik tarcia:

$$f = \frac{\mathrm{v}^2}{2sg},$$

a po podstawieniu wartości liczbowych:

$$f = 0.625\,.$$

**26. Ciało o ciężarze 100 N porusza się pod wpływem zmiennej siły $F=p(q-t)$, gdzie $p$=100N/s, $q$=1s. Po jakim czasie ciało to zatrzyma się, jeżeli w chwili $t$=0 prędkość jego wynosiła $\mathrm{v}_0 = 0.2$ m/s, a siła miała kierunek prędkości. Jaką drogę przebędzie ciało do chwili zatrzymania się?**

Napiszmy równanie ruchu, czyli drugą zasadę dynamiki Newtona $ma=F$, dla ciała o ciężarze $Q$. Ponieważ przyspieszenie $a$ jest pochodną prędkości po czasie $t$ ($a$=dv/d$t$) więc możemy napisać

$$\frac{Q}{g}\frac{d\mathrm{v}}{dt} = p(q-t),$$

gdzie $Q/g=m$.

Rozdzielamy zmienne mnożąc obie strony równania przez d$t$ i dzieląc przez $m$. Otrzymujemy

$$\mathrm{d}\,\mathrm{v}=\left(\frac{pqg}{Q}-\frac{pg}{Q}t\right)\mathrm{d}\,t.$$

Całkujemy to równanie po czasie $t$

$$\int \mathrm{d}\,\mathrm{v}=\int\left(\frac{pqg}{Q}-\frac{pg}{Q}t\right)\mathrm{d}\,t.$$

Dostajemy

$$\mathrm{v}=\frac{pqg}{Q}t-\frac{pg}{2Q}t^2+C.$$

Stałą całkowania $C$ obliczamy korzystając z warunków początkowych (dla $t=0$ $\mathrm{v}=\mathrm{v}_0$). Podstawiając otrzymujemy $C=\mathrm{v}_0$. Zatem zależność prędkości od czasu ma ostatecznie postać

$$\mathrm{v}=\mathrm{v}_0+\frac{pqg}{Q}t-\frac{pg}{2Q}t^2.$$

Gdy ciało zatrzyma się to jego prędkość v będzie równa zeru. Nastąpi to po czasie $t_1$, który obliczymy z zależności

$$\mathrm{v}_0+\frac{pqg}{Q}t_1-\frac{pg}{2Q}t_1^2=0,$$

którą przekształcamy do postaci

$$t_1^2-2qt_1-\frac{2Q\mathrm{v}_0}{gp}=0.$$

Jest to równanie kwadratowe o dwóch rozwiązaniach:

$$t_1=q+\sqrt{q^2+\frac{2Q\mathrm{v}_0}{gp}}$$

$$t_1'=q-\sqrt{q^2+\frac{2Q\mathrm{v}_0}{gp}}<0.$$

Rozwiązanie drugie musimy odrzucić gdyż interesują nas czasy $t>0$ ze względu na przyjętą chwilę początkową $t=0$. Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy $t_1=2.02$ s.
Aby znaleźć drogę przebytą przez ciało do chwili zatrzymania się musimy znaleźć zależność drogi $s$ od czasu $t$. Korzystając z definicji prędkości $\mathrm{v}=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ i zależności $\mathrm{v}(t)$ otrzymujemy równanie

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\mathrm{v}_0+\frac{pqg}{Q}t-\frac{pg}{2Q}t^2.$$

Mnożymy obie strony przez $\mathrm{d}t$ i całkujemy

$$\int \mathrm{d}s=\int\left(\mathrm{v}_0+\frac{pqg}{Q}t-\frac{pg}{2Q}t^2\right)\mathrm{d}\,t.$$

Otrzymujemy

$$s=\mathrm{v}_0t+\frac{pqg}{2Q}t^2-\frac{pg}{6Q}t^3+C.$$

Jeżeli założymy, że w chwili $t=0$ $s=0$ to wtedy $C=0$ i otrzymujemy zależność drogi od czasu w postaci

$$s=\mathrm{v}_0t+\frac{pqg}{2Q}t^2-\frac{pg}{6Q}t^3.$$

Do chwili zatrzymania się czyli po czasie $t_1$ ciało przebyło zatem drogę

$$s_1=\mathrm{v}_0t_1+\frac{pqg}{2Q}t_1^2-\frac{pg}{6Q}t_1^3\approx 6.9\,\mathrm{m}.$$

**27. Na ciało o masie $m$ działa siła hamująca ruch, proporcjonalna do prędkości, $F=-b\mathrm{v}$, $b$ - stała.**

**a) Znaleźć zależność prędkości ciała od czasu.**

**b) Jaką drogę przebędzie ciało do chwili zatrzymania się? Prędkość początkową ciała przyjąć równą $v_0$.**

Równanie ruchu tzn. równanie $ma=F$ dla przypadku danego w tym zadaniu ma postać

$$m\frac{dv}{dt} = -bv$$

Skorzystaliśmy tutaj z definicji przyspieszenia $a$=d$v$/d$t$.

a) Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe dostaniemy zależność prędkości v od czasu $t$. Mnożymy obie strony równania przez d$t$ oraz dzielimy przez v i przez $m$. Otrzymujemy równanie o rozdzielonych zmiennych v i $t$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt$$

Całkujemy z obu stron

$$\int\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}\int dt$$

i otrzymujemy

$$\ln v = -\frac{b}{m}t + C,$$

gdzie $C$ jest stałą całkowania.

Ponieważ w chwili początkowej, tzn. dla $t = 0$, prędkość v= $v_0$, , otrzymujemy $C = \ln v_0$.

Tak więc mamy

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m}t,$$

co można przekształcić do postaci

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}.$$

b) Skorzystajmy z definicji prędkości v=d$s$/d$t$. Po podstawieniu do otrzymanej powyżej zależności v$(t)$ otrzymujemy równanie

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}.$$

Mnożymy obie strony przez d$t$ i całkujemy

$$\int ds = v_0\int e^{-\frac{b}{m}t}dt.$$

Otrzymujemy

$$s = -\frac{v_0 m}{b}e^{-\frac{b}{m}t} + C.$$

Załóżmy, że dla $t$=0, $s$=0 i obliczmy stałą $C$

$$0 = -\frac{v_0 m}{b} + C,$$

skąd $C = \frac{v_0 m}{b}$.

Zatem zależność drogi od czasu ma postać

$$s = \frac{v_0 m}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right).$$

Ciało zatrzyma się gdy jego prędkość zmaleje do zera. Nastąpi to po nieskończenie długim czasie $t$ gdyż

$$\lim_{t\to\infty} v_0 e^{-\frac{b}{m}t} = 0.$$

Droga $s_1$ jaką przebędzie ciało do chwili zatrzymania się równa jest $\frac{v_0 m}{b}$ gdyż

$$s_1 = \lim_{t\to\infty}\frac{v_0 m}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) = \frac{v_0 m}{b}.$$

**28. Samochód o masie $m$ hamowany jest siłą oporu $F=-kv^2$. Jaką drogę przebędzie samochód, zanim prędkość jego zmaleje do połowy?**

Napiszmy równanie ruchu czyli drugą zasadę dynamiki Newtona $ma=F$ dla samochodu o masie $m$. Ponieważ przyspieszenie $a$ określa się jako pochodną prędkości v po czasie $t$ czyli $a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ więc równanie ruchu ma postać

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2.$$

Rozdzielmy zmienne v i $t$ w tym równaniu mnożąc obie strony przez d$t$ oraz dzieląc przez $mv^2$. Otrzymane równanie całkujemy

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-\frac{k}{m}\int\mathrm{d}t.$$

Dostajemy

$$-\frac{1}{v}=-\frac{k}{m}t+C.$$

Oznaczmy przez $v_0$ prędkość początkową samochodu. Wówczas stałą całkowania $C$ obliczamy zakładając, że w chwili $t=0$, $v=v_0$. Podstawiając otrzymujemy $C=-\frac{1}{v_0}$. Zatem zależność prędkości samochodu od czasu ma postać

$$v=\frac{1}{\frac{k}{m}t+\frac{1}{v_0}}.$$

Obliczmy dalej po jakim czasie $t_1$ prędkość samochodu zmaleje do połowy. Czas $t_1$ obliczymy z równania

$$v(t_1)=\frac{v_0}{2}=\frac{1}{\frac{k}{m}t_1+\frac{1}{v_0}}.$$

Otrzymujemy $t_1=\frac{m}{kv_0}$.

Wyznaczmy teraz zależność drogi $s$ przebywanej przez samochód od czasu $t$. Ponieważ $v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ więc korzystając z otrzymanej wcześniej zależności $v(t)$ otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\frac{k}{m}t+\frac{1}{v_0}}.$$

Mnożymy obie strony tego równania przez d$t$ i całkujemy

$$\int\mathrm{d}s=\int\frac{\mathrm{d}t}{\frac{k}{m}t+\frac{1}{v_0}}.$$

Podstawiamy nową zmienną całkowania:

$$x=\frac{kt}{m}+\frac{1}{v_0},\quad \left(\mathrm{d}x=\frac{k}{m}\mathrm{d}t\right).$$

Otrzymujemy

$$\int\mathrm{d}s=\frac{m}{k}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Po scałkowaniu mamy

$$s=\frac{m}{k}\ln x+C$$

czyli

$$s=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t+\frac{1}{v_0}\right)+C.$$

Zakładając, że dla $t$=0, $s$=0, otrzymujemy stałą całkowania $C$ w postaci

$$C = -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{1}{v_0}\right).$$

Zatem zależność drogi od czasu ma postać

$$s = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{m}t\right).$$

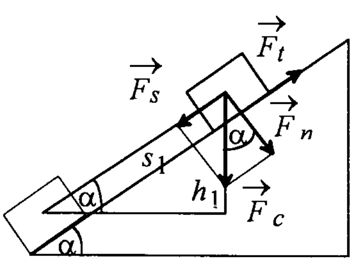
Po czasie $t_1 = \frac{mk}{v_0}$ samochód, którego prędkość zmaleje do połowy przebędzie drogę

$$s_1 = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{m}t_1\right),$$

czyli drogę

$$s_1 = \frac{m}{k}\ln 2.$$

**29. Ciało zsuwa się po powierzchni nachylonej pod kątem $\alpha$ do poziomu. Współczynnik tarcia $k$ zależy od przebytej drogi przez ciało $s$ i $k(s)= bs$, gdzie $b$ jest dodatnim współczynnikiem. Wyznaczyć drogę $s_1$ przebytą przez ciało do momentu zatrzymania się oraz maksymalną prędkość ciała na drodze $s_1$.**




Na ciało zsuwające się po nachylonej powierzchni (równi pochyłej) działa siła ciężkości $F_c = mg$ oraz siła tarcia $F_t$. Rozłóżmy siłę ciężkości na dwie składowe - składową $F_s$ równoległą do równi i składową $F_n$ prostopadłą do równi. Z rysunku widać, że $F_s = mg\sin\alpha$ oraz $F_n = mg\cos\alpha$. Z definicji siły tarcia $F_t = kF_n$ otrzymujemy zatem $F_t = kmg\cos\alpha$. Ponieważ współczynnik tarcia $k$ zależy od przebytej drogi $s$ $(k(s)=bs)$ więc siła tarcia też jest funkcją tej drogi

$$F_t(s) = bmg\cos\alpha\ s$$

Aby rozwiązać zadanie skorzystamy z zasady zachowania energii. Energia potencjalna na początku ruchu $E_p = mgh_1$ ($h_1$ jest różnicą poziomów między położeniem początkowym a końcowym ciała) zostaje w całości zużyta na pracę przeciwko sile tarcia $W$ na drodze $s_1$, czyli do momentu zatrzymania się, gdyż w chwili zatrzymania się ciała energia kinetyczna $E_k = 0$. Ponieważ siła $F_t$ zmienia się w czasie ruchu więc korzystając z definicji pracy otrzymujemy

$$W = \int_0^{s_1} F_t(s)\,\mathrm{d}s.$$

Podstawiając $F_t(s)$ dostajemy

$$W = bmg\cos\alpha \int_0^{s_1} s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}bmg\cos\alpha\ s_1^2.$$

Porównując $E_p$ z otrzymaną pracą mamy

$$mgs_1\sin\alpha = \frac{1}{2}bmg\cos\alpha\ s_1^2,$$

gdzie skorzystaliśmy z zależności

$$h_1 = s_1 \sin\alpha.$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$s_1 = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{b}.$$

Wyznaczmy zależność prędkości v ruchu ciała od przebytej drogi $s$. W dowolnej chwili ruchu energia kinetyczna jest równa różnicy początkowej energii potencjalnej i pracy przeciwko sile tarcia

$$E_k = E_p - W$$

Otrzymujemy zatem zależność

$$\frac{mv^2}{2} = mgs\sin\alpha - \frac{1}{2}bmg\cos\alpha\, s^2,$$

gdzie ostatni człon równania jest tym razem pracą wykonaną po przebyciu drogi $s$. Stąd

$$v_s = \sqrt{2gs\sin\alpha - gb\cos\alpha\, s^2}.$$

Aby wyznaczyć prędkość maksymalną na drodze $s_1$ obliczamy pochodną funkcji $v(s)$ po $s$ i przyrównujemy ją do zera. Otrzymujemy

$$\frac{dv}{ds} = g\frac{\sin\alpha - sb\cos\alpha}{\sqrt{2g\sin\alpha - gb\cos\alpha\, s^2}} = 0.$$

Stąd

$$\sin\alpha - sb\cos\alpha = 0.$$

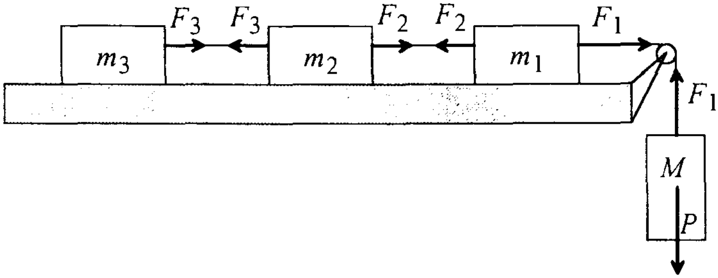
Jak widać z powyższej zależności prędkość jest maksymalna dla

$$s = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{b},$$

czyli w połowie drogi $s_1$ i wynosi

$$v_m = \sin\alpha\sqrt{\frac{g}{b\cos\alpha}}.$$

**30. Na stole przymocowano jedna za drugą masy $m_1$, $m_2$ i $m_3$ (patrz rysunek). Znaleźć:**
**a) przyspieszenie $a$ układu,**
**b) naprężenia wszystkich nici.**
**Tarcie mas o płaszczyznę stołu i tarcie w bloczku pominąć.**



Siły zaznaczone na powyższym rysunku, to $P = mg$ - siła ciężkości, oraz $F_1$, $F_2$, $F_3$ - siły naprężające poszczególne fragmenty nici łączącej masy w jedną całość. Z uwagi na to, że masy są powiązane i zakładając, że nić jest nierozciągliwa, ruch ciężarka o masie $M$ w dół nada wszystkim masom to samo przyspieszenie $a$. Wypiszmy więc równanie obrazujące drugą zasadę dynamiki dla każdej z mas z osobna:

$$Ma = P - F_1$$
$$m_1 a = F_1 - F_2$$
$$m_2 a = F_2 - F_3$$
$$m_3 a = F_3$$

Wypisując powyższe równania założyliśmy, że można przyjąć, iż wszystkie siły działają wzdłuż jednej prostej, a kierunek ruchu układu wyznacza dodatni zwrot. Dodając stronami wszystkie równania otrzymamy:

$$(M + m_1 + m_2 + m_3)\,a = P$$

czyli

$$a = \frac{Mg}{M+m_1+m_2+m_3}.$$

Teraz kolejno wyznaczamy wartość kolejnych sił

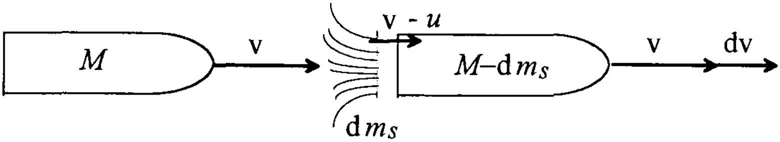
$$F_3 = m_3 a = \frac{M m_3 g}{M+m_1+m_2+m_3}$$

$$F_2 = m_2 a + F_3 = \frac{M\left(m_2+m_3\right) g}{M+m_1+m_2+m_3}$$

$$F_1 = m_1 a + F_2 = \frac{M\left(m_1+m_2+m_3\right) g}{M+m_1+m_2+m_3}.$$

## RUCH CIAŁ ZE ZMIENNĄ MASĄ

**31. Rakieta o masie początkowej $M_0$ poruszając się w przestrzeni kosmicznej wyrzuca spalone paliwo ze stałą szybkością $\mathrm{d}m_s/\mathrm{d}t = r$ nadając mu prędkość (względem rakiety) równą $u$. Napisz równanie różniczkowe wiążące prędkość rakiety z jej zmienną masą i znajdź jego rozwiązanie. Oblicz początkowe przyspieszenie rakiety. Przyjąć, że siły zewnętrzne działające na rakietę są równe zeru.**




Przy braku sił zewnętrznych takich jak siła ciężkości i opory ruchu, pęd układu złożonego z rakiety i wyrzucanych gazów musi być zachowany.

Na rysunku pokazana jest, w nieruchomym układzie odniesienia, rakieta w pewnej umownej chwili $t$, w której ma ona masę $M$ i prędkość v, oraz w chwili $t+\mathrm{d}t$ po wyrzuceniu elementarnej porcji spalonych gazów $\mathrm{d}m_s = r\,\mathrm{d}t$, w nieruchomym układzie współrzędnych. Ponieważ prędkość gazów względem rakiety wynosi $u$, to w układzie nieruchomym w którym rakieta porusza się z szybkością v ich prędkość wynosi v-$u$. Stosując w tym przypadku zasadę zachowania pędu mamy

$$M\mathrm{v} = (M - \mathrm{d}m_s)(\mathrm{v} + \mathrm{d}\,\mathrm{v}) + \mathrm{d}m_s(\mathrm{v} - u).$$

Po uproszczeniu i elementarnych przekształceniach otrzymujemy

$$(M - \mathrm{d}m_s)\mathrm{d}\,\mathrm{v} = u\,\mathrm{d}m_s.$$

W nawiasie po lewej stronie decydującym składnikiem jest masa rakiety $M$, toteż masę gazów wyrzuconych w czasie $\mathrm{d}t$ można pominąć.
Stąd:

$$M\,\mathrm{d}\mathrm{v} = u\,\mathrm{d}m_s.$$

Dzieląc otrzymane równanie obustronnie przez $\mathrm{d}t$ i $M$ otrzymujemy wzór na przyspieszenie rakiety:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{M}\frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t} = \frac{ur}{M}.$$

W powyższym wzorze $M$ jest masą rakiety, która zmienia się w czasie. W związku z tym przyspieszenie $a$ będzie również zależne od czasu. Przyspieszenie początkowe rakiety $a_0$ wynosi:

$$a_0 = \frac{ur}{M_0},$$

gdyż masa rakiety na początku wynosiła $M_0$. Równanie różniczkowe wiążące szybkość rakiety z jej zmienną masą otrzymujemy po skorzystaniu, w równaniu $M\mathrm{d}\mathrm{v} = u\,\mathrm{d}m_s$, ze związku $\mathrm{d}m_s = -\mathrm{d}M$, czyli z tego, że elementarna ilość wyrzucanych gazów równa się przyrostowi masy rakiety ze znakiem minus:

$$M\mathrm{d}\mathrm{v} = -u\,\mathrm{d}M.$$

czyli:

$$\mathrm{d}\mathrm{v} = -u\frac{\mathrm{d}M}{M}.$$

Po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków początkowych (dla $t = 0, M = M_0$ i v= 0) otrzymujemy:

$$\mathrm{v} = u\ln\frac{M_0}{M}.$$

Możemy prędkość wyrazić jako funkcję czasu. W tym celu znajdźmy zależność od czasu masy $M$ rakiety. Możemy napisać:

$$\mathrm{d}M = -r\,\mathrm{d}t,$$

a stąd po scałkowaniu

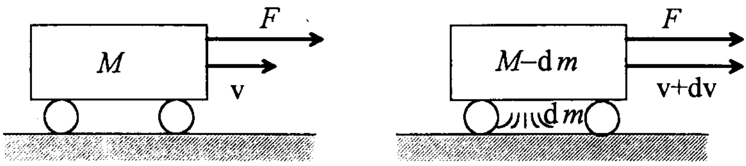
$$M = -rt + C,$$

gdzie $C$ jest stałą, która z warunków początkowych równa jest $M_0$. Stąd:

$$\mathrm{v} = u\ln\frac{M_0}{M_0 - rt}.$$

**32. Wózek z piaskiem porusza się po poziomej płaszczyźnie pod wpływem stałej siły $F$, której kierunek jest zgodny z kierunkiem jego prędkości. Piasek wysypuje się przez otwór w dnie ze stałą prędkością $\mu$ [kg/s]. Znaleźć przyspieszenie i prędkość wózka w**

**chwili $t$, jeśli w chwili $t$=0 wózek miał masę $M_0$, a jego prędkość była równa zeru. Zaniedbać tarcie i opór powietrza.**




Niech masa wózka w pewnej chwili czasu $t$ wynosi $M$. Ponieważ na wózek działa siła $F$, to na podstawie drugiej zasady dynamiki wiemy, że zmiana pędu układu złożonego z wózka i wysypującego się piasku w czasie d$t$ równa jest popędowi tej siły, czyli iloczynowi $F$d$t$. Jeżeli przez d$m$ oznaczymy masę piasku wysypującego się w czasie d$t$, a przez dv przyrost prędkości wózka, to

$$F\,\mathrm{d}t = (M - \mathrm{d}m)(\mathrm{v} + \mathrm{dv}) + \mathrm{d}m\,\mathrm{v} - M\mathrm{v} = (M - \mathrm{d}m)\mathrm{dv}.$$

W nawiasie po prawej stronie możemy pominąć elementarną masę piasku d$m$ w porównaniu do masy $m$ wózka z piaskiem i otrzymujemy prostą zależność:

$$F\mathrm{d}t = M\mathrm{dv}, \text{ lub } F = M\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t}.$$

Stąd szukane przyspieszenie $a$ wózka z piaskiem wyraża się wzorem:

$$a = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{M}.$$

Otrzymany wzór na przyspieszenie ma taką samą postać jak dla ciała o stałej masie, ale w naszym przypadku masa $M$ jest funkcją czasu. Aby otrzymać zależność masy $M$ od czasu zauważmy że masa d$m$ piasku wysypującego się w czasie d$t$ równa jest ubytkowi masy wózka d$M$. Czyli możemy napisać, że:

$$\mathrm{d}M = -\mathrm{d}m = -\mu\,\mathrm{d}t.$$

Całkując obustronnie to równanie i przyjmując, że zgodnie z treścią zadania $M(t = 0) = M_0$ otrzymujemy:

$$M = M_0 - \mu t.$$

Stąd zależność przyspieszenia wózka od czasu wyraża się zależnością

$$a = \frac{F}{M_0 - \mu t}.$$

Prędkość wózka z piaskiem znajdujemy przez elementarne całkowanie:

$$\mathrm{v} = \int a\,\mathrm{d}t = \int \frac{F\mathrm{d}t}{M_0 - \mu t} = -\frac{F}{\mu}\ln(M_0 - \mu t) + C,$$

gdzie $C$ jest stałą całkowania, którą wyznaczamy z warunku początkowego. Podstawiając do otrzymanego równania v($t$ = 0) = 0, mamy

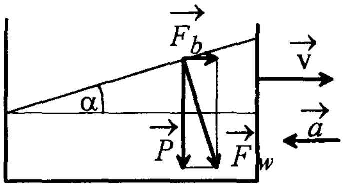
$$C = \frac{F}{\mu}\ln(M_0),$$

a stąd

$$\mathrm{v} = \frac{F}{\mu}\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \mu t}\right).$$

## SIŁY BEZWŁADNOŚCI

**33. O jaki kąt odchyli się poziom cieczy przewożonej w samochodzie cysternie, gdy samochód hamuje z opóźnieniem 5 m/s$^2$ (g=10 m/s$^2$).**




Rozważmy siły działające na element powierzchni cieczy o masie $\Delta m$. Gdy powierzchnia cieczy przyjmie ustalony kształt, to oczywiście oznacza, że siły te równoważą się dając siłę wypadkową równą zeru. Przy tym możemy powiedzieć o tych siłach jeszcze więcej, wypadkowa siła zewnętrzna jak i siła reakcji cieczy są prostopadłe do powierzchni cieczy. Jeśli wypadkowa siła zewnętrzna nie będzie prostopadła do powierzchni cieczy, to ta powierzchnia ulegnie zmianie pod działaniem składowej siły stycznej do niej. Zmiana będzie zachodzić tak długo, aż składowa styczna zmaleje do zera. Wynika to stąd, że siła reakcji cieczy może być tylko prostopadła do jej powierzchni swobodnej.

Wracając do zadania narysujemy siły działające na element powierzchni cieczy podczas hamowania. Kąt odchylenia powierzchni cieczy znajdziemy zakładając, że zewnętrzna siła wypadkowa musi być prostopadła do powierzchni cieczy. Tak więc na element cieczy o masie $\Delta m$ działa pionowo siła ciężkości o wartości $P = \Delta mg$ oraz poziomo siła bezwładności o wartości $F_b = \Delta m a$. Warunek prostopadłości siły wypadkowej $\vec{F}_w$ do powierzchni cieczy będzie spełniony, gdy
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_b}{P}$$
czyli
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{g}$$
a po wprowadzeniu wartości liczbowych
$$\mathrm{tg}\,\alpha = 0.5 \text{ i } \alpha = 26^\circ.$$

**34. Wahadło o masie *m* wisi na podstawce umocowanej na wózku (rys.). Znaleźć kierunek nici wahadła, tj. kąt α nici z pionem oraz jej naprężenie *T* w następujących przypadkach:**

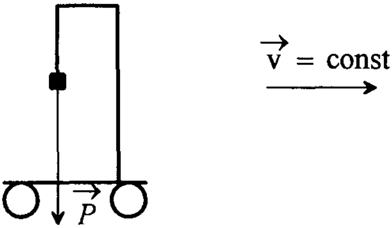
**a) wózek porusza się ruchem jednostajnym po płaszczyźnie poziomej,**

**b) wózek porusza się po płaszczyźnie poziomej z przyspieszeniem *a*,**

**c) wózek stacza się swobodnie z równi pochyłej, która tworzy kąt β z poziomem.**

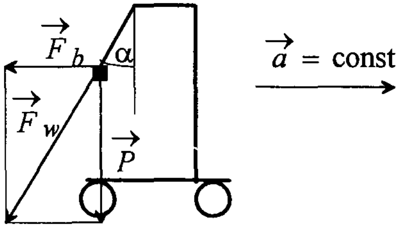
**Dane jest *g*.**

W każdym z przypadków kierunek nici wahadła wyznaczony będzie przez wypadkową siłę zewnętrzną $\vec{F}_w$ działającą na wahadło. Trzeba tu dodać, że siła ta będzie zawsze równoważona przez siłę reakcji nici *T* tak, że wypadkowa siła działająca na wahadło będzie równa zeru. Widać tu, że siły opisujemy w układzie odniesienia, względem którego wahadło znajduje się w spoczynku, a więc w układzie związanym z poruszającym się wózkiem. W przypadku, gdy wózek będzie poruszać się z przyspieszeniem, nasz układ odniesienia będzie




układem nieinercjalnym, a wypadkowa siła zewnętrzna $\vec{F}_w$ będzie sumą siły ciężkości i siły bezwładności.

a) W tym przypadku mamy jedynie siłę ciężkości $P=mg$, a więc $T=F_w=mg$. Nić zachowuje kierunek pionowy: $\alpha=0$.



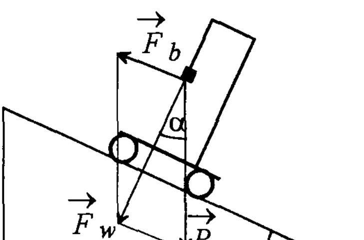

b) W tym przypadku oprócz siły ciężkości na wahadło będzie działać w kierunku poziomym siła bezwładności:

$$\vec{F}_b=-m\vec{a},$$

tak więc $\operatorname{tg}\alpha=\frac{F_b}{P}=\frac{a}{g}$

natomiast

$$T=F_w=m\sqrt{a^2+g^2}.$$

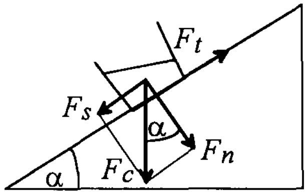


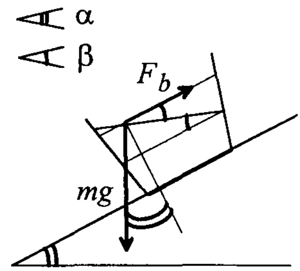

c) W tym przypadku cały wózek będzie poruszać się w dół równi z przyspieszeniem $a=g\sin\beta$, a więc siła bezwładności wyniesie $F_b=mg\sin\beta$ i będzie skierowana jak na rysunku. Wtenczas siła $\vec{F_w}$ musi być skierowana prostopadle do powierzchni równi, a co za tym idzie $\alpha=\beta$. Siła naprężenia nici natomiast wynosi:

$$T=F_w=mg\cos\beta.$$

**35. Po równi pochylej o kącie nachylenia $\alpha$ zsuwa się naczynie z cieczą. Współczynnik tarcia $f<\operatorname{tg}\alpha$. Wyznaczyć nachylenie powierzchni cieczy w naczyniu względem równi.**

Wyznaczmy przyspieszenie naczynia z cieczą. Rozłóżmy siłę $F_c$ (ciężar naczynia z cieczą równy $Mg$) na dwie składowe - siłę $F_s$ czyli siłę ściągającą równoległą do powierzchni równi i siłę $F_n$ czyli siłę nacisku prostopadłą do powierzchni równi.
Równolegle do równi działa jeszcze siła tarcia $F_t=fF_n$ skierowana przeciwnie do kierunku ruchu. Z rysunku widać, że $F_s=Mg\sin\alpha$ a $F_n=Mg\cos\alpha$. Wypadkowa siły $F_s$ i siły $F_t$ nadaje naczyniu z cieczą o masie $M$ przyspieszenie $a$. Mamy więc równanie




$$Ma = Mg\sin\alpha - fMg\cos\alpha.$$

Zwiążmy układ odniesienia z poruszającym się naczyniem. Na każdą cząstkę cieczy o masie $m$ w tym układzie działa siła ciężkości $mg$ i siła bezwładności $\vec{F_b} = -m\vec{a}$, gdzie znak minus oznacza, że siła ta jest przeciwnie skierowana do wektora $\vec{a}$.
Powierzchnia cieczy ustawi się w takim położeniu, aby rzuty tych dwóch sił na kierunek styczny do jej powierzchni zrównoważyły się. Jak widać z rysunku rzut siły $F_b$ na powierzchnię cieczy to $ma\cos\beta$ a rzut siły $mg$ to $mg\cos(90^\circ - \alpha + \beta)$. Porównując te dwie wartości otrzymujemy

$$ma\cos\beta = mg\cos(90^\circ - (\alpha - \beta)).$$

Wykorzystując wcześniej otrzymaną zależność na przyspieszenie $a$ oraz odpowiednie tożsamości trygonometryczne

$$\cos(90^\circ - (\alpha - \beta)) = \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

dostajemy

$$mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\beta = mg(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

skąd

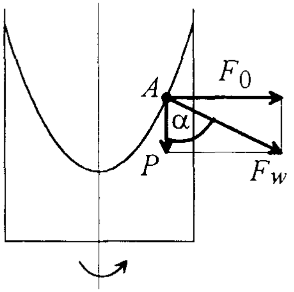
$$\operatorname{tg}\beta = f$$

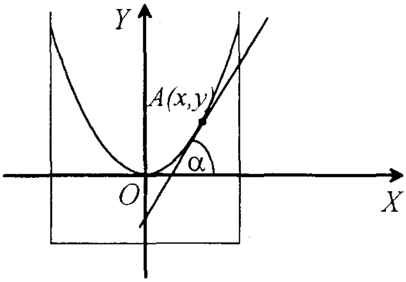
czyli

$$\beta = \operatorname{arctg} f.$$

**36. Cylindryczne naczynie z cieczą obraca się z prędkością kątową $\omega$ wokól pionowej osi przechodzącej przez jego środek. Wyznaczyć kształt swobodnej powierzchni wirującej cieczy. Dane jest $g$.**

Zgodnie z rozważaniami przytoczonymi w zadaniu 33 powierzchnia cieczy w obracającym się naczyniu przyjmie taki kształt, aby wypadkowa siła zewnętrzna działająca na element powierzchni cieczy o masie $\Delta m$ była prostopadła do tej powierzchni. Na element powierzchni cieczy działa pionowo siła ciężkości o wartości $P = \Delta m g$ oraz poziomo siła odśrodkowa bezwładności o wartości $F_0 = \Delta m\,\omega^2 x$, gdzie $x$ jest odległością elementu cieczy od osi obrotu.
Na rysunku wprowadzamy układ współrzędnych $XOY$ po to, aby zapisać równanie $y=y(x)$ przekroju osiowego powierzchni wirującej cieczy. Wyznaczmy najpierw kąt nachylenia stycznej do powierzchni cieczy, czyli innymi słowy, wartość pochodnej $dy/dx$ w jakimś zadanym punkcie $A$.




$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_0}{P} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

A więc:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g},$$

czyli

$$y = \int \frac{\omega^2 x}{g} dx$$

i

$$y = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2 + C.$$

Stałą całkowania $C = 0$ wyznaczymy z warunku $y(0)=0$ (patrz rysunek).
Tak więc krzywa będąca przekrojem powierzchni obracającej się cieczy jest parabolą mającą w układzie współrzędnych wprowadzonym na rysunku następujące równanie:

$$y = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2.$$

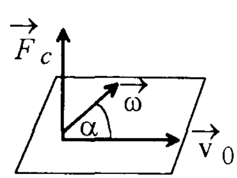
Powierzchnia obracającej się cieczy będzie więc miała kształt paraboloidy obrotowej.

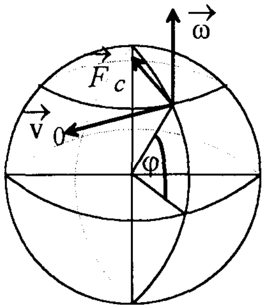
**37. Dwaj myśliwi polowali na wilki w Bieszczadach. Jeden strzelał do wilka znajdującego się na zachód od niego, drugi do wilka znajdującego się w kierunku południowym. Obydwaj spudłowali i tłumaczyli swoje niepowodzenia istnieniem siły Coriolisa. Który z nich miał prawo tak się tłumaczyć. Jaka jest wielkość odchylenia toru pocisku, jeżeli średnia prędkość lotu** $v_0 = 300\,\mathrm{m/s}$, **czas lotu** $t$**=1s, a szerokość geograficzna** $\varphi = 49^\circ$.

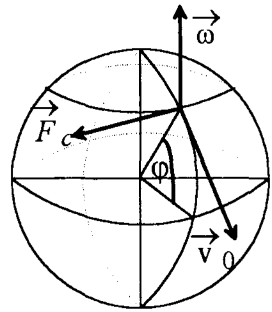
Siłę Coriolisa oblicza się ze wzoru

$$\vec{F}_c = 2m\,\vec{v}_0 \times \vec{\omega},$$

gdzie $v_0$ jest wektorem prędkości pocisku a $\omega$ wektorem prędkości kątowej obrotu Ziemi dookoła swej osi. Kierunek siły $\vec{F}_c$ jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{v}_0$ i $\vec{\omega}$, a jej wartość wynosi $F_c = 2mv_0\omega\sin\alpha$ (rys). Zwrot wektora $\vec{F}_c$ określa reguła śruby prawoskrętnej.






W przypadku gdy myśliwy strzela w kierunku zachodnim siła Coriolisa jest skierowana prostopadle do osi Ziemi a ponieważ wektory $\vec{\omega}$ i $\vec{v}_0$ są w tym przypadku prostopadłe więc jej wartość wynosi

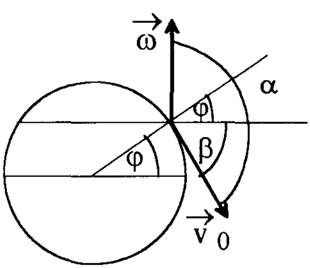
$$F_{c1} = 2m v_0 \omega.$$

Siła ta nadaje pociskowi o masie $m$ przyspieszenie

$$a_1 = \frac{F_{c1}}{m},$$

w wyniku czego ulega on odchyleniu o

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = v_0 \omega t^2 \approx 2.2 \text{ cm}.$$




$\beta = 90° - \varphi$

W przypadku gdy myśliwy strzela na południe siła Coriolisa jest skierowana na zachód i jej wartość wynosi

$$F_{c2} = 2m v_0 \omega \sin\alpha$$

gdzie $\alpha$ jest kątem między $\vec{v}_0$ i $\vec{\omega}_0$ i jest on równy

$$\alpha = 180° - \varphi.$$

Zatem

$$F_{c2} = 2m v_0 \omega \sin\varphi.$$

Odchylenie toru pocisku w tym przypadku wynosi

$$\Delta x_2 = \frac{a_2 t^2}{2} = v_0 \omega t^2 \sin\varphi \approx 1.7 \text{ cm}.$$

Wynika stąd, że żaden z myśliwych nie miał prawa tłumaczyć swego niepowodzenia istnieniem siły Coriolisa.

**38. Znaleźć odchylenie ku wschodowi $x$ ciała spadającego z wieży o wysokości $h$ w polu grawitacyjnym ziemskim. Wynik przedyskutować w zależności od szerokości geograficznej $\varphi$ miejscowości, w której znajduje się wieża.**

Odchylenie ciała spadającego z wieży spowodowane jest przez siłę Coriolisa określoną wzorem:

$$\vec{F}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega},$$

gdzie $\vec{v}$ jest wektorem chwilowej prędkości spadku swobodnego ciała, a $\vec{\omega}$ wektorem prędkości kątowej obrotu Ziemi dookoła swej osi. Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego wektor $\vec{F}_c$ jest prostopadły do wektorów $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$, jego zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej a jego wartość wynosi

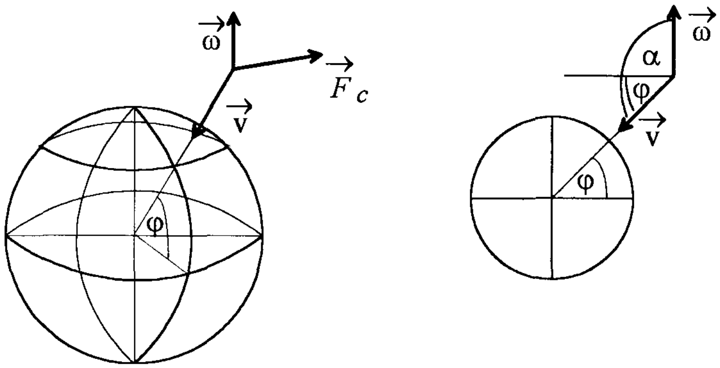
$$F_c = 2m\mathrm{v}\omega \sin\alpha,$$

gdzie $\alpha$ jest kątem między wektorami $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$.
Jak widać z rysunku ciało ulega odchyleniu ku wschodowi, a kąt $\alpha$ wynosi $\alpha = 90^\circ + \varphi$. Zatem

$$F_c = 2m\mathrm{v}\omega \cos\varphi.$$

W spadku swobodnym prędkość v=$gt$ zatem

$$F_c = 2mg\omega \cos\varphi\; t.$$




Jak widać wartość siły rośnie z czasem. Siła ta nadaje ciału przyspieszenie odchylające

$$a = \frac{F}{m} = 2g\omega\cos\varphi\; t,$$

oraz chwilową prędkość odchylania

$$u = \int_0^t a\,\mathrm{d}t = 2g\omega\cos\varphi \int_0^t t\,\mathrm{d}t = g\omega\cos\varphi\; t^2.$$

Natomiast odchylenie po czasie $t$ wynosi

$$x = \int_0^t u\,\mathrm{d}t = g\omega\cos\varphi \int_0^t t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}g\omega\cos\varphi\; t^3.$$

Ponieważ droga w spadku swobodnym wyraża się wzorem

$$y = \frac{gt^2}{2}$$

więc z zależności

$$h = \frac{gt_1^2}{2}$$

obliczymy czas $t_1$ spadku ciała z wieży o wysokości $h$. Mamy

$$t_1 = \sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Zatem odchylenie $x_1$ po czasie $t_1$ wynosi

$$x_1 = \frac{1}{3} g\omega \cos\varphi\, t_1^3 = \frac{1}{3} g\omega \cos\varphi \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}.$$

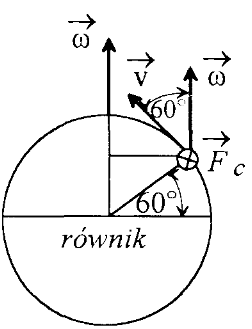
Na biegunie $\varphi = 90°$ więc $\cos\varphi = 0$ czyli $x_1 = 0$. Na równiku $\varphi = 0°$ więc $\cos\varphi = 1$ zatem

$$x_{1\,max} = \frac{1}{3} g\omega \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}.$$

Zadanie to zostało rozwiązane w sposób przybliżony, gdyż prędkość v we wzorze $F_c = m v\omega \cos\alpha$ jest w rzeczywistości sumą prędkości spadku i prędkości odchylania, co bardzo komplikuje ten problem.

**39. Na szerokości geograficznej północnej 60° parowóz o masie $10^5$ kg jedzie z południa na północ z prędkością v=72km/h po torze kolejowym biegnącym wzdłuż południka. Znaleźć wartość i kierunek siły jaką parowóz wywiera na szyny kolejowe prostopadle do kierunku toru.**

Przyczyną siły wywieranej przez parowóz na szyny kolejowe jest ruch obrotowy Ziemi. Potraktujmy Ziemię jako pewien nieinercjalny układ odniesienia obracający się ze stałą prędkością kątową $\omega = \frac{2\pi}{T}$, gdzie $T$ jest okresem obrotu Ziemi wokół swojej osi. Początek tego układu znajduje się w centrum Ziemi.




Jeżeli w takim układzie ciało porusza się z prędkością v, to działają na nie siły bezwładności związane z nieinercjalnością układu. Pierwszą z nich jest siła odśrodkowa bezwładności:

$$\vec{F}_o = m\omega^2 \vec{r}_\perp$$

gdzie $\vec{r}_\perp$ jest wektorem prostopadłym do osi obrotu, skierowanym na zewnątrz i o długości równej odległości ciała od tej osi. Siła ta ze względu na swój kierunek nie może być jednak odpowiedzialna za nacisk parowozu na szyny. Drugą z sił bezwładności jest siła Coriolisa:

$$\vec{F}_c = 2m\left(\vec{v} \times \vec{\omega}\right),$$

gdzie $\vec{v}$ jest wektorem prędkości ciała, a $\vec{\omega}$ wektorem prędkości kątowej układu odniesienia. Zgodnie z powyższym wzorem i zamieszczonym rysunkiem kierunek siły $\vec{F}_c$ działającej na parowóz jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$, a zwrot jest za płaszczyznę rysunku to znaczy na wschód. Z taką właśnie siłą będzie działać parowóz na szyny kolejowe. Wartość tej siły równa jest, zgodnie z definicją iloczynu wektorowego,

$$F_c = 2m v\omega \sin\varphi = \frac{4\pi}{T} m v \sin\varphi,$$

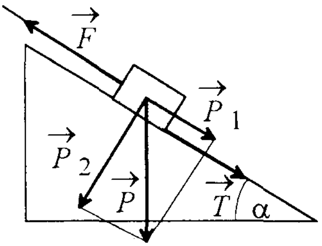
gdzie kąt $\varphi$ jest kątem między wektorami $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$, a jednocześnie, jak to wynika z rysunku $\varphi$ jest szerokością geograficzną. Podstawiając do wzoru dane liczbowe z uwzględnieniem tego, że $T$=24h, otrzymujemy $F_c = 256$ N. Porównajmy otrzymany wynik z wartością siły ciężkości $F_g$ działającej na parowóz w kierunku pionowym. Wynosi ona $F_g = mg = 9.8 \cdot 10^5$ N czyli siła $F_c$ jest od niej 3800 raza mniejsza.

## PRACA I ENERGIA

**40. Wyznaczyć pracę wciągnięcia ciężaru po równi pochyłej, jeśli masa tego ciężaru wynosi 100kg, długość równi - 2m, kąt nachylenia do poziomu -** $30^0$**, współczynnik tarcia - 0.1. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie** $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

Zakładamy, że ciężar był wciągany ze stałą prędkością. Wtenczas siły działające na rozważane ciało w kierunku ruchu muszą się równoważyć. Prowadzi to do następującego równania:

$$F = P_1 + T$$




Przy czym $P_1$ jest składową siły ciężkości działającą stycznie do powierzchni równi (siła zsuwająca): $P_1 = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$, natomiast $T$ jest siłą tarcia, która jest równa $T = fP_2$, gdzie $f$ jest współczynnikiem tarcia, a $P_2 = mg\cos\alpha$ jest siłą nacisku. Tak więc:

$$F = mg\sin\alpha + mgf\cos\alpha = mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Wartość szukanej pracy wynosi $W = Fs$

a zatem $W = mgs(\sin\alpha + f\cos\alpha)$

i podstawiając dane $W = 3413$ J.

**41. Deska o masie *m* i długości *l* leży na granicy zetknięcia dwóch stołów, na stole pierwszym. Jaką minimalną pracę należy wykonać, aby przesunąć ją ze stołu pierwszego na drugi, jeżeli współczynniki tarcia pomiędzy deską a stołem wynoszą** $f_1$ i $f_2$, **odpowiednio dla pierwszego i drugiego stołu.**

Przesunięcie deski z jednego stołu na drugi wymaga wykonania pracy pewną siłą $F$, która będzie co najmniej równa lub większa od siły tarcia $T$ pomiędzy deską a płaszczyznami stołów. Jak wynika z rysunku zamieszczonego poniżej siłę tarcia $T$ można w tym przypadku zapisać jako sumę sił $T_1$ i $T_2$ będących siłami tarcia pomiędzy deską i, odpowiednio, stołem pierwszym i drugim. Zgodnie z rysunkiem wartości tych sił zależą od tego, jaka część deski znajduje się na stole pierwszym, a jaka na drugim. Wprowadzając oś $OX$ układu współrzędnych w kierunku przesuwu deski z początkiem w punkcie styku stołów widzimy, że na stole pierwszym znajduje się $(l-x)/l$ deski, a na stole drugim $x/l$. Stąd siła nacisku deski na stół pierwszy wyniesie $(l-x)mg/l$, a na stół drugi $xmg/l$. A więc odpowiednie wartości sił tarcia $T_1$ i $T_2$ są równe

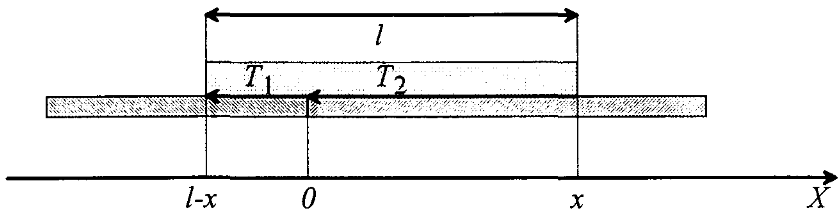
$$T_1 = f_1\frac{l-x}{l}mg, \quad T_2 = f_2\frac{x}{l}mg,$$

a stąd

$$T = T_1 + T_2 = [f_1(l-x) + f_2 x]\frac{mg}{l}.$$

Zgodnie z definicją, praca $W$ wykonywana siłą $F$ w przypadku jednowymiarowym wynosi

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx,$$




gdzie $x_1$ i $x_2$ oznaczają położenie początkowe i końcowe ciała. W naszym przypadku $x_1 = 0$, a $x_2 = l$, natomiast siła $F$, w przypadku pracy minimalnej będzie dokładnie równa wyznaczonej sile tarcia $T$. Czyli:

$$W_{\min} = \int_0^l T\,\mathrm{d}x = \frac{mg}{l}\left[f_1\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + f_2\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^l,$$

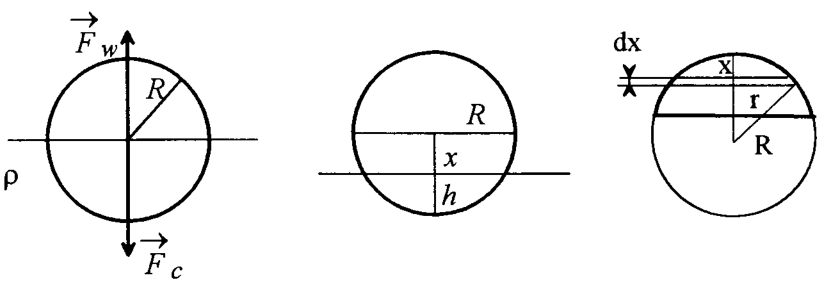
a stąd po dokonaniu prostych obliczeń otrzymujemy:

$$W_{\min} = \frac{mgl}{2}(f_1 + f_2).$$

**42. Kulka o promieniu $R$ pływa w cieczy o gęstości $\rho$, przy czym jest w niej zanurzona do połowy swej objętości. Jaką pracę należy wykonać, aby wydobyć kulkę nad poziom cieczy ?**

Na zanurzoną do połowy swej objętości pływającą kulkę działają dwie równoważące się siły - siła ciężkości $F_c$ oraz siła wyporu $F_w$ równa ciężarowi cieczy wypartej przez połowę objętości kulki

$$F_w = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g.$$




Mamy więc

$$F_c = F_w = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g.$$

Przy wyciąganiu kulki z cieczy siła ciężkości i siła wyporu nie równoważą się wzajemnie i siła wypadkowa działająca na kulkę wynosi

$$F = F_c - F_w(h),$$

gdzie siła wyporu $F_w$ zależy od głębokości zanurzenia kulki $F_w = V\rho g$, a $V$ jest objętością czaszy kulistej o wysokości $h$ i promieniu $R$. Wzór na $V$ otrzymuje się sumując objętości $\mathrm{d}V$ plasterków o promieniu $r$ i grubości $\mathrm{d}x$ (rys.).

Objętość $dV = \pi r^2 dx$ a $r^2 = R^2 - (R-x)^2 = 2Rx - x^2$.
Objętość czaszy kulistej o wysokości $h$ równa jest następującej całce

$$V = \pi \int_0^h \left(2Rx - x^2\right) dx = \pi\left(Rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^h = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3R-h).$$

Zatem wypadkowa siła działająca na kulkę wynosi

$$F = \tfrac{2}{3}\pi R^3 \rho g - \tfrac{1}{3}\pi h^2 (3R-h)\rho g.$$

Siła ta rośnie w miarę wynurzania kulki. Aby wydobyć kulkę na powierzchnię należy działać na nią siłą równą sile $F$ co do wartości, ale przeciwnie skierowaną, na drodze $R$. Zostanie przy tym wykonana praca

$$W = \int_0^R F dx,$$

gdzie $x=R-h$. Podstawiając $h=R-x$ do wyrażenia na siłę wypadkową $F$ otrzymujemy zależność $F(x)$

$$F(x) = \pi \rho g\left(R^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right).$$

Dokonujemy całkowania

$$W = \pi\rho g\left(R^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right) dx = \pi\rho g\left(\tfrac{1}{2}R^2 x^2 - \tfrac{1}{12}x^4\right)\Big|_0^R$$

i otrzymujemy

$$W = \tfrac{5}{12}\pi\rho g R^4.$$

**43. Na podłodze leży łańcuch o masie $m$ i długości $l$. Jeden z jego końców podnosimy do góry dopóki łańcuch nie oderwie się od podłogi. Wyznaczyć minimalną wartość pracy jaką należy wykonać, aby podnieść łańcuch z podłogi w polu grawitacyjnym Ziemi w przypadku, gdy**
**a) łańcuch jest jednorodny**
**b) łańcuch jest niejednorodny i jego masa $m$ zależy od odległości $x$ od jednego z końców według wzoru $m(x) = m_0\left(\frac{x}{l}\right)^2$.**

a) Na element łańcucha o masie $dm$ odległy od jego końca o $x$ działa siła ciężkości $dF=gdm$ (rys.). Ponieważ cały jednorodny łańcuch o długości $l$ ma masę $m$, tak więc z proporcji $dx/l=dm/m$ wynika, że rozpatrywany element ma masę $dm=(m/l)dx$. Element ten należy podnieść na wysokość $x$ działając na niego siłą równą co do wartości sile $dF$ ale przeciwnie skierowaną. Zostanie przy tym wykonana elementarna praca

$$dW = x\, dF = xg\, dm = \frac{mg}{l} x\, dx.$$

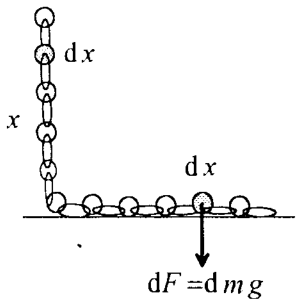
Sumując takie elementarne prace $dW$ otrzymujemy

$$W = \frac{mg}{l}\int_0^l x\, dx = \frac{mg}{l}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^l = \frac{mgl}{2}.$$

b) Dla łańcucha niejednorodnego mamy zależność masy od odległości $x$: $m(x) = m_0\left(\frac{x}{l}\right)^2$.

Masę $dm$ elementu łańcucha o długości $dx$ obliczamy różniczkując tę zależność.

$$dm = \frac{2m_0}{l^2} x\, dx.$$




Siła d$F$ ma teraz postać

$$dF = g\,dm = \frac{2m_0 g}{l^2} x\,dx$$

a elementarna praca

$$dW = x\,dF = \frac{2m_0 g}{l^2} x^2\,dx.$$

Całkowita praca równa jest całce

$$W = \frac{2m_0 g}{l^2} \int_0^l x^2\,dx = \frac{2m_0 g}{3l^2} x^3 \Big|_0^l = \frac{2m_0 g l}{3}.$$

## POLA SIŁ

**44. Cząstka o masie $m$=3kg porusza się w polu siły $\vec{F}$ zależnej od czasu w następujący sposób: $\vec{F} = \left(15t, 3t - 12, -6t^2\right)$N, gdzie czas $t$ jest w $s$. Przyjmując warunki początkowe $\vec{r}_0 = (5, 2, -3)$m, $\vec{v}_0 = (2, 0, 1)$m/s znaleźć zależność położenia i prędkości cząstki od czasu.**

Rozwiązanie tego zadania sprowadza się do rozwiązania równań wynikających z drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Rozpisując powyższe równanie wektorowe na równania dla poszczególnych składowych otrzymujemy układ trzech równań:

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt}, \quad F_y = m\frac{dv_y}{dt}, \quad F_z = m\frac{dv_z}{dt}.$$

Znajdźmy najpierw współrzędną $v_x$ prędkości cząstki, a następnie współrzędną $x$ jej położenia. Wiemy, że: $F_x = 15t$, a ponadto $x_0 = 5$ oraz $v_{x0} = 2$. Tak więc:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m} 15t = 5t, \quad \text{gdyż } m = 3\text{kg}.$$

$$v_x = \int 5t\,dt = \frac{5}{2}t^2 + C_{vx}.$$

Stałą całkowania $C_{vx}$ znajdziemy korzystając z warunku początkowego $v_x(t = 0) = v_{x0} = 2$, a więc $C_{vx} = 2$ i ostateczna postać równania określającego zależność współrzędnej $v_x$ wektora prędkości od czasu jest następująca:

$$v_x[\text{m/s}] = \frac{5}{2}t^2 + 2$$

Dalej znajdujemy zależność $x(t)$ korzystając z zależności $v_x = \frac{dx}{dt}$ :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{2}t^2 + 2$$

$$x = \int\left(\frac{5}{2}t^2 + 2\right)dt$$

$$x = \frac{5}{6}t^3 + 2t + C_x$$

Stałą całkowania $C_x$ znajdziemy korzystając z warunku początkowego $x(t = 0) = x_0 = 5$, a więc $C_x = 5$. Ostatecznie:

$$x[\mathrm{m}] = \frac{5}{6}t^3 + 2t + 5.$$

Podobnie znajdujemy zależność od czasu pozostałych współrzędnych wektora prędkości oraz wektora położenia:

$$\mathrm{v}_y[\mathrm{m/s}] = \frac{1}{2}t^2 - 4t$$

$$\mathrm{v}_z[\mathrm{m/s}] = -\frac{1}{6}t^3 + 1$$

$$y[\mathrm{m}] = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 2$$

$$z[\mathrm{m}] = -\frac{1}{24}t^4 + t - 3$$

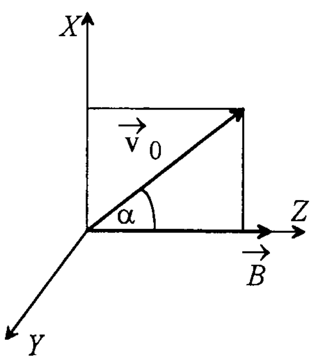
**45. Znaleźć i przedyskutować równania ruchu oraz równania toru cząstki o masie $m$ i ładunku elektrycznym $q$ poruszającej się w stałym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B$. Obliczyć zmianę energii kinetycznej cząstki w zależności od jej położenia oraz czasu. Prędkość początkowa** $\mathrm{v}_0 \neq 0$, **położenie początkowe** $r_0 = 0$.

Na cząstkę o ładunku $q$ i prędkości $\vec{\mathrm{v}}$ działa w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ siła Lorentza

$$\vec{F} = q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}.$$

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki siła ta działając na cząstkę o masie $m$ nadaje jej przyspieszenie $\vec{a}$

$$m\vec{a} = \vec{F},$$




gdzie wektor przyspieszenia $\vec{a}$ definiuje się, jako drugą pochodną wektora położenia po czasie $t$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Równanie ruchu ma więc postać

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}.$$

Wybieramy układ współrzędnych tak, by oś $Z$ była równoległa do wektora $\vec{B}$, natomiast wektor $\vec{\mathrm{v}}$ leżał w płaszczyźnie $XZ$ (rys.).

Oznaczmy kąt pomiędzy osią $Z$ a wektorem $\vec{\mathrm{v}}$ przez $\alpha$. Wówczas mamy

$$\mathrm{v}_{0z} = \mathrm{v}_0 \cos\alpha$$

$$\mathrm{v}_{0x} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha.$$

Rozpiszmy wektorowe równanie ruchu na trzy równania skalarne. Wyznaczmy w tym celu składowe siły Lorentza $\vec{F}$. Mamy

$$q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B} = q\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathrm{v}_x & \mathrm{v}_y & \mathrm{v}_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \vec{i}\,q\mathrm{v}_y B - \vec{j}\,q\mathrm{v}_x B = \left(q\mathrm{v}_y B, -q\mathrm{v}_x B, 0\right).$$

Siła $\vec{F}$ ma zatem dwie składowe $F_x = q\,v_y B$ i $F_y = -q\,v_x B$.
Równania ruchu przybierają teraz postać układu równań różniczkowych

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = q\,v_y B$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -q\,v_x B$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Korzystając z definicji wektora prędkości

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

i wprowadzając oznaczenie $\omega = \frac{qB}{m}$ przekształćmy układ równań do postaci

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega\,v_x$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Rozwiążmy najpierw równanie trzecie, gdyż jest ono niezależne od pozostałych. Otrzymujemy

$$v_z = \int dv_z = c_1,$$

gdzie $c_1$ jest stałą całkowania. Z warunku początkowego otrzymujemy wartość stałej $c_1 = v_{0z}$. Zatem

$$v_z = v_{0z} = v_0 \cos\alpha.$$

Wzdłuż osi równoległej do kierunku pola magnetycznego nie działa na cząstkę żadna siła, tak więc porusza się ona wzdłuż tej osi ruchem jednostajnym z prędkością $v_z = v_0 \cos\alpha$.
Znajdźmy zależność położenia cząstki na osi $OZ$ od czasu $t$. Ponieważ $v_z = \frac{dz}{dt}$ więc mamy

$$z = \int v_z\,dt = v_0 \cos\alpha\, t + c_2.$$

Ponieważ w chwili początkowej $z(t = 0) = 0$ więc stała całkowania $c_2$ jest równa zeru.
Pierwsze dwa równania układu są wzajemnie zależne. Wprowadźmy zmienną zespoloną $\xi = x + iy$ opisującą położenie cząstki na płaszczyźnie prostopadłej do osi $Z$. Moduł $\xi$ równy $\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$ jest odległością cząstki od osi $Z$, argument $\xi$ równy arctg$(y/x)$ jest kątem biegunowym w tej płaszczyźnie.
Jeśli oznaczymy pochodną $\frac{d\xi}{dt}$ przez $v_\xi$, to prawdziwa jest równość

$$v_\xi = v_x + i v_y$$

oraz

$$\frac{dv_\xi}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + i\frac{dv_y}{dt}.$$

Mnożymy teraz drugie równanie układu przez liczbę $i$ i dodajemy stronami do pierwszego równania. Otrzymujemy jedno równanie różniczkowe w postaci

$$\frac{dv_x}{dt} + i\frac{dv_y}{dt} = \omega\left(v_y - i v_x\right),$$

czyli równanie różniczkowe jednej zmiennej $v_\xi$

$$\frac{d v_\xi}{dt} = -i\omega\, v_\xi.$$

Mnożymy obie strony równania przez $dt$, dzielimy przez $v_\xi$ oraz całkujemy stronami

$$\int \frac{d v_\xi}{v_\xi} = i\omega \int dt.$$

Otrzymujemy

$$\ln v_\xi = -i\omega\, t + c,$$

skąd

$$v_\xi = e^c e^{-i\omega t}.$$

Ponieważ w chwili początkowej $v_\xi(t=0) = v_{0x} = v_0 \sin\alpha$ więc

$$v_\xi = v_0 \sin\alpha\, e^{-i\omega t}.$$

Korzystając ze wzoru Eulera

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

otrzymujemy

$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t.$$

Zatem

$$v_x = \mathrm{Re}\, v_\xi = v_0 \sin\alpha\, \cos\omega t$$

$$v_y = \mathrm{Im}\, v_\xi = -v_0 \sin\alpha\, \sin\omega t.$$

Aby znaleźć zależność położenia cząstki na płaszczyźnie prostopadłej do osi $Z$ od czasu $t$ należy scałkować ostatnie dwa równania. Otrzymujemy

$$x = \int v_x\, dt = v_0 \sin\alpha \int \cos\omega t\, dt = \frac{v_0}{\omega} \sin\alpha\, \sin\omega t + c_3$$

$$y = \int v_y\, dt = -v_0 \sin\alpha \int \sin\omega t\, dt = \frac{v_0}{\omega} \sin\alpha\, \cos\omega t + c_4.$$

Ponieważ $x(t=0) = 0$ oraz $y(t=0) = 0$ zatem $c_3 = 0$ a $c_4 = -v_0 \sin\alpha/\omega$.

Ostatecznie

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin\alpha\, \sin\omega t$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin\alpha(\cos\omega t - 1).$$

Eliminując z równań czas $t$ otrzymujemy równanie toru

$$x^2 + (y+a)^2 = a^2,$$

gdzie

$$a = \frac{v_0}{\omega} \sin\alpha.$$

Jest to okrąg o promieniu $r=a$ i środku o współrzędnych $x = 0$ i $y = -a$. Jeśli uwzględnimy ruch w kierunku osi $Z$, to w przestrzeni trójwymiarowej torem jest linia śrubowa, której osią jest prosta $x = 0$, $y = -a$.

Obliczmy zmianę energii kinetycznej cząstki w dowolnym czasie $t$:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - v_0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m\left(v_0^2 \sin^2\alpha\, \cos^2\omega t + v_0^2 \sin^2\alpha \sin^2\omega t + v_0^2 \cos^2\alpha - v_0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m\left(v_0^2 \sin^2\alpha + v_0^2 \cos^2\alpha - v_0^2\right) = 0.$$

W polu magnetycznym zatem wartość energii kinetycznej a więc i wartości prędkości nie ulegają zmianie.

**46. Znajdź równania ruchu cząstki o masie $m$ i ładunku $q$, która porusza się w równoległych, przeciwnie skierowanych jednorodnych polach - elektrycznym i magnetycznym.**

**Przyjąć:** $\vec{E} = (-E, 0, 0)$, $\vec{B} = (B, 0, 0)$, $\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}, 0\right)$, $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$.

Na cząstkę znajdującą się w jednorodnym polu elektrycznym $\vec{E}$ działa stała siła $\vec{F}_E = q\vec{E}$, a w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$ siła Lorenza $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$, gdzie $\vec{v}$ jest prędkością cząstki. W naszym przypadku wypadkowa siła $\vec{F}$ jest sumą obu powyższych sił.

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q(-E, 0, 0) + q\left(v_x, v_y, v_z\right) \times (B, 0, 0).$$

Iloczyn wektorowy występujący w równaniu wynosi:

$$\left(v_x, v_y, v_z\right) \times (B, 0, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}\, v_z B - \vec{k}\, v_y B = \left(0, v_z B, -v_y B\right).$$

Korzystając z powyższej zależności możemy zapisać wzór na siłę $\vec{F}$:

$$\vec{F} = q\left(-E, v_z B, -v_y B\right).$$

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki przyspieszenie cząstki jest proporcjonalne do wypadkowej wszystkich sił działających na cząstkę i odwrotnie proporcjonalne do jej masy, a mianowicie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

gdzie $\vec{a}$ jest wektorem przyspieszenia cząstki. Rozpisując powyższe równanie wektorowe na trzy równania skalarne i podstawiając jawną postać siły $\vec{F}$ mamy:

$$a_x = -\frac{qE}{m},$$

$$a_y = \frac{q v_z B}{m},$$

$$a_z = -\frac{q v_y B}{m}.$$

Zgodnie z definicją wektora przyspieszenia $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ przepiszmy jeszcze raz powyższy układ równań następująco:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{qE}{m},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q v_z B}{m},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{q v_y B}{m}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań różniczkowych, w którym niewiadomymi funkcjami czasu są składowe wektora predkości $v_x$, $v_y$ i $v_z$. Zauważmy, że pierwsze równanie jest niezależne od pozostałych i możemy je rozwiązać przez zwykłe całkowanie otrzymując składową $v_x$ prędkości.

$$v_x = \int\left(-\frac{q}{m}E\right)dt = -\frac{q}{m}Et + C_1.$$

Z warunku, że $v_x(t=0) = v_{0x}$ otrzymujemy wartość stałej całkowania $C_1 = v_{0x}$. Położenie cząstki na osi $OX$ znajdujemy dokonując kolejnego całkowania:

$$x = \int v_x\, dt = -\frac{qE}{2m}t^2 + v_{0x}t + C_2.$$

Ponieważ zgodnie z warunkiem początkowym $x(t=0)=0$, to stała całkowania $C_2$ równa jest zeru.

Przejdźmy teraz do pozostałych dwu równań układu. Równanie drugie i trzecie są wajemnie zależne, gdyż w obydwu występują funkcje $v_y = v_y(t)$ i $v_z = v_z(t)$. Metoda rozwiązania tego układu polega na utworzeniu z dwóch równań pierwszego stopnia jednego równania stopnia drugiego, w którym występuje tylko jedna niewiadoma funkcja. Mianowicie różniczkując obustronnie drugie równanie i korzystając z trzeciego mamy:

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = \frac{q}{m}B\frac{d\,v_z}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y.$$

Wprowadzając (dla wygody zapisu) oznaczenie: $\omega = \frac{qB}{m}$, równanie przybiera postać:

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0.$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe drugiego stopnia o stałych współczynnikach. Równanie to ma ogólne rozwiązanie postaci:

$$v_y = A\cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie stałe $A$ i $\varphi$ są takie, aby spełniały warunki początkowe zadania. Prawdziwość otrzymanego rozwiązania możemy sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie do wyjściowego równania różniczkowego. Otrzymujemy tożsamościowe spełnienie równania niezależnie od stałych $A$ i $\varphi$.

Podstawiając do otrzymanego ogólnego wyrażenia $v_y(t=0) = v_{0y}$ mamy:

$$v_{0y} = A\cos\varphi.$$

Aby wyznaczyć niezależnie obydwie stałe potrzebne jest nam drugie równanie. W tym celu najprościej jest zróżniczkować równanie na $v_y$ i skorzystać z drugiego wyjściowego równania,

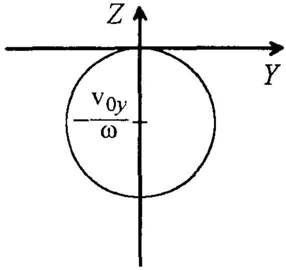
$$\frac{d\,v_y}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = \omega\, v_z.$$

Umożliwia nam to wykorzystanie warunku początkowego $v_z(t=0) = 0$, a mianowicie z tego że $\sin\varphi = 0$ mamy, że wartość fazy początkowej $\varphi = 0$. W konsekwencji wartość stałej $A = v_{0y}$. Podstawiając otrzymane stałe do równań na $v_y$ i $v_z$ mamy:

$$v_y = v_{0y}\cos(\omega t)$$
$$v_z = -v_{0y}\sin(\omega t).$$

Ostatnim etapem rozwiązania naszego zadania jest scałkowanie powyższych równań w celu uzyskania równań ruchu w kierunku osi $OY$ i $OZ$.

$$y = \int v_y\, dt = \frac{v_{0y}}{\omega}\sin(\omega t) + C_3,$$
$$z = \int v_z dt = \frac{v_{0y}}{\omega}\cos(\omega t) + C_4.$$




Ponieważ w chwili początkowej $t=0$, $x = y = 0$, znajdujemy, że $C_3 = 0$, a $C_4 = -\frac{v_{0y}}{\omega}$, czyli ostatecznie równania ruchu cząstki w płaszczyźnie $YOZ$ mają postać:

$$y = \frac{v_{0y}}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$z = \frac{v_{0y}}{\omega}[\cos(\omega t) - 1].$$

Z powyższych równań wynika, że torem ruchu cząstki w płaszczyźnie $YOZ$ jest okrąg o promieniu $R = \frac{v_{oy}}{\omega}$, którego środek ma współrzędne $y = 0, z = -R$. Okres obrotu cząstki po okręgu wynosi $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$.

Wracając jeszcze do równania ruchu w kierunku osi $OX$, możemy zauważyć, że jest to ruch jednostajnie opóźniony z prędkością początkową $v_{0x}$. Cząstka najpierw zmniejsza swoją prędkość poruszając się w kierunku dodatnim osi $OX$, a następnie zawraca zwiększając swoją prędkość w sposób jednostajny. Razem z ruchem w płaszczyźnie $YOZ$ daje to ruch po linii śrubowej, której skok najpierw maleje do zera, a następnie rośnie nieograniczenie w ujemną stronę osi $OX$.

**47. Znaleźć zależność energii potencjalnej od odległości od centrum w polu sił:**

$$\textbf{a)}\ \vec{F}_1 = -\frac{k}{r^4}\hat{r},\quad \textbf{b)}\ \vec{F}_2 = -kr^2\hat{r},\quad \textbf{c)}\ \vec{F}_3 = \frac{k}{r^2}\hat{r},$$

**gdzie: $k$ jest stałą, a $\hat{r}$ wektorem jednostkowym wzdłuż promienia wodzącego.**

Pola sił zadane przez siły $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ są polami centralnymi. Jak wiemy pole sił centralnych jest polem zachowawczym, a przez to potencjalnym. Jeżeli siłę centralną zapiszemy w ogólnej postaci wzorem: $\vec{F} = f(r)\,\hat{r}$,
gdzie $f(r)$ jest funkcją odległości od centrum, to energię potencjalną cząstki w takim polu można zapisać jako: $E_p(r) = -\int f(r)\,\hat{r}\,d\vec{r} = -\int f(r)\,dr$,
gdzie $d\vec{r}$ jest elementarną zmianą wektora wodzącego a $dr$ elementarną zmianą długości promienia (odległości od centrum ). Jak widać $E_p(r)$ jest funkcją jedynie promienia i jest określona z dokładnością do stałej (stałej całkowania), którą zadajemy z warunków brzegowych indywidualnie dla konkretnego przypadku. Dla siły $F_1$ mamy

$$E_{p1} = -\int F_1\,dr = -\int\left(\frac{k}{r^4}\right)dr = -\frac{k}{3r^3} + C_1.$$

Przyjmując, że gdy $r \to \infty$, to $E_{p1} \to 0$ otrzymujemy wartość stałej $C_1 = 0$.

$$E_{p2} = \int kr^2\,dr = \frac{kr^3}{3} + C_2.$$

W tym przypadku logicznym jest przyjąć warunek brzegowy $E_{p2}(r = 0) = 0$, gdyż wtenczas wartość $C_2 = 0$. W podobny sposób otrzymujemy $E_{p3} = \frac{k}{r}$, gdzie odpowiednią stałą $C_3 = 0$ wyznaczono tak jak w przypadku pierwszym żądając, aby energia potencjalna w nieskończoności była równa zeru.

**48. Czy siła $\vec{F} = \left(2xz^2 - 2y, -2x - 6yz, 2x^2z - 3y^2\right)$ jest siłą zachowawczą? Jeśli tak, to znaleźć odpowiadającą jej energię potencjalną $E_p$.**

Siła $\vec{F}$ jest siłą zachowawczą wtedy i tylko wtedy, gdy rot $\vec{F} = 0$. Należy więc dokonać obliczenia rotacji dla wektora podanego w zadaniu.

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(2xz^2 - 2y\right) & (-2x - 6yz) & \left(2x^2z - 3y^2\right) \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-6y + 6y) +$$

$$+\vec{j}\,(4xz - 4xz) + \vec{k}\,(-2 + 2) = 0.$$

A więc siła $\vec{F}$ jest siłą zachowawczą i można dla niej wyznaczyć energię potencjalną z zależności

$$\vec{F} = -\text{grad}\,U$$

czyli po rozpisaniu:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Zacznijmy od obliczeń dla składowej $F_x$ :

$$2xz^2 - 2y = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

czyli

$$U = \int\left(-2xz^2 + 2y\right)\mathrm{d}x + C(y,z),$$

gdzie $C(y,z)$ oznacza nieznaną nam część energii potencjalnej zależną tylko od współrzędnych $y$ i $z$. Składnik ten trzeba dopisać, gdyż pochodna cząstkowa $\frac{\partial C(y,z)}{\partial x} = 0$. Tak więc znaleźliśmy rozwiązanie dla $U(x,y,z)$, w którym całkowicie policzoną jest tylko zależność energii potencjalnej od współrzędnej $x$, czyli:

$$U = 2xy - x^2z^2 + C(y,z).$$

Zastosujmy teraz zależność $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$ :

$$-2x - 6yz = -\frac{\partial}{\partial y}\left[2xy - x^2z^2 + C(y,z)\right]$$

Po przekształceniu otrzymamy następujące równanie:

$$\frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 6yz$$

czyli

$$C(y,z) = \int 6yz\,\mathrm{d}y + C(z),$$

gdzie $C(z)$ oznacza część szukanej funkcji $U(x,y,z)$ mogącą zależeć już tylko od współrzędnej $z$. Całkując otrzymujemy:

$$C(y,z) = 3y^2z + C(z).$$

Z kolei korzystając z ostatniej zależności $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$ otrzymamy równanie:

$$2x^2z - 3y^2 = -\frac{\partial}{\partial z}\left[2xy - x^2z^2 + 3y^2z + C(z)\right],$$

z którego wynika, że

$$\frac{\partial C(z)}{\partial z} = 0,$$

a więc $C(z) = C_0$ =const i ostatecznie szukana energia potencjalna wyraża się funkcją:

$$U(x,y,z) = 2xy - x^2z^2 + 3y^2z + C_0.$$

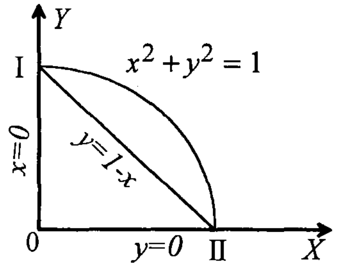
**49. Dane jest pole sił:** $\vec{F} = \left(y^2\,\vec{i} - x^2\,\vec{j}\right)$N.

**a) Oblicz pracę sił pola przy przesuwaniu cząstki od położenia I(0,1) do położenia II(1,0). Zakładamy przy tym, że praca jest wykonywana:**

- **po lini prostej $y$=1-$x$,**
- **po okręgu $x^2 + y^2 = 1$,**
- **po osiach współrzędnych $x$=0, $y$=0.**

**Współrzędne wyrażone są w metrach.**

**b) Czy to pole jest potencjalne?**




Zgodnie z definicją, praca przy przesuwaniu cząstki z położenia I do położenia II wyraża się wzorem:

$$W = \int_I^{II} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_I^{II} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z).$$

Granice całkowania zaznaczyliśmy w sposób symboliczny, a należy przez nie rozumieć współrzędne punktu początkowego i końcowego dane w zadaniu. Zgodnie z danymi zadania należy przyjąć, że składowa siły $F_z = 0$. Podstawiając do wzoru wyrażenia na $F_x$ i $F_y$ otrzymujemy:

$$W = \int_{(0,1)}^{(1,0)} \left(y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y\right)$$

Dalsze obliczenia zależą od drogi, po której wykonywana jest praca, czyli matematycznie od przyjętej drogi całkowania wyrażającej się zależnościami $x(y)$ i $y(x)$.

Jeżeli praca jest wykonywana po drodze, dla której $y$=1-$x$, lub równoważnie $x$=1-$y$, wówczas wzór na pracę możemy zapisać w postaci:

$$W = \int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x - \int_1^0 \left(1-y^2\right)\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{J}.$$

Podobnie obliczamy pracę, gdy jest ona wykonywana po ćwiartce okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$.

$$W = \int_0^1 \left(1-x^2\right)\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(1-y^2\right)\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}\,\mathrm{J}.$$

Zakładając wreszcie, że praca jest wykonywana po osiach współrzędnych mamy:

$$W = \int_{(0,1)}^{(0,0)} \left(y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y\right) + \int_{(0,0)}^{(1,0)} \left(y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y\right) = \int_0^0 y^2\mathrm{d}x - \int_1^0 x^2\mathrm{d}y + \int_0^1 y^2\mathrm{d}x - \int_0^0 x^2\mathrm{d}y = 0.$$

W powyższym wyrażeniu pierwsza i czwarta całka są równe zeru ze względu na granice całkowania, natomiast w całce drugiej i trzeciej funkcje podcałkowe są tożsamościwo równe zeru w obszarze całkowania, stąd i wartości całek są zerowe. Czyli wartość pracy $W = 0$. Jak widać praca zależy od drogi, po której jest wykonywana, stąd pole sił zadane siłą postaci $\vec{F} = y^2\,\vec{i} - x^2\,\vec{j}$ nie jest polem potencjalnym.

## POLE GRAWITACYJNE

**50. Z powierzchni Ziemi wyrzucono cialo pionowo do góry z prędkością początkową $v_0$. Na jaką wysokość wzniesie się cialo? Jaką powinno mieć najmniejszą prędkość początkową, aby nie spadlo nigdy na Ziemię?**

Ponieważ pole grawitacyjne jest polem potencjalnym, wysokość na jaką wzniesie się ciało możemy obliczyć z zasady zachowania energii. Energia całkowita ciała $E$ na powierzchni Ziemi jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej, czyli

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R}.$$

W powyższym równaniu $m$ jest masą ciała, $M$ masą Ziemi, $R$ promieniem Ziemi, a $G$ stałą grawitacji. Energia całkowita ciała na powierzchni Ziemi jest równa energii całkowitej na wysokości $h$.

$$E = -G\frac{Mm}{R+h}.$$

W naszym przypadku energia kinetyczna ciała na wysokości $h$ jest równa zeru. Z porównania energii całkowitych otrzymujemy:

$$\frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM},$$

a stąd:

$$h = \frac{R}{\frac{2GM}{Rv_0^2} - 1}.$$

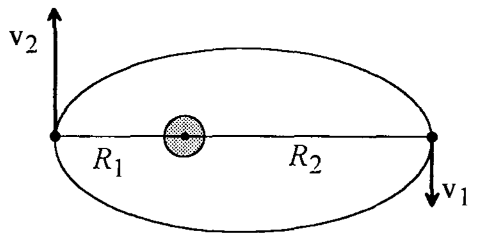
Oznaczmy teraz przez $v_{0\,min}$ najmniejszą prędkość początkową, przy której ciało nie spada nigdy na Ziemię. Matematycznie $v_{0\,min}$ odpowiada granicznej wartości $v_0$, gdy wysokość $h \rightarrow \infty$. Otrzymujemy:

$$v_{0\,min} = \lim_{h\rightarrow\infty} \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Jest to tzw. " druga prędkość kosmiczna ".

**51. Zakładamy że planeta porusza się po elipsie wokól nieruchomego Słońca. Największa odleglość planety od Slońca wynosi $R_1$ a najmniejsza $R_2$. Ile wynosi moment pędu planety? Wykonaj rysunek. Masę planety, masę Slońca i stalą grawitacji przyjąć za dane.**

Ruch planety wokół nieruchomego Słońca możemy traktować jako ruch punktu materialnego w polu siły centralnej, której postać wynika z prawa powszechnego ciążenia. Jak wiemy podczas ruchu cząstki w polu siły centralnej zachowana jest jej energia całkowita $E$, będąca sumą energii kinetycznej, $E_k = \frac{mv^2}{2}$ i energii potencjalnej, która w przypadku pola




grawitacyjnego ma postać: $E_p = -G\frac{Mm}{r}$, gdzie $G$ jest stałą grawitacji, $M$ - masą Słońca, $m$ - masą planety, a $r$ odległością planety od Słońca. Jeżeli do wzoru na energię całkowitą za $r$ podstawimy odpowiednio $R_1$ i $R_2$, a także odpowiadające im prędkości $v_1$ i $v_2$, wówczas możemy napisać:

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - G\frac{Mm}{R_1},$$

$$E = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{R_2}.$$

W polu siły centralnej zachowany jest także moment pędu cząstki dany ogólnym wzorem:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym cząstki a $\vec{v}$ jej wektorem prędkości w danym punkcie toru. W naszym przypadku stałą wartość momentu pędu możemy określić z odległości $R_1$ bądź $R_2$. Mianowicie jeżeli planeta znajduje się w punkcie przysłonecznym lub odsłonecznym to kąt między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{v}$ jest kątem prostym i mamy:

$$L = R_1 m v_1, \text{ lub } L = R_2 m v_2.$$

Ponieważ nie znamy ani $v_1$, ani $v_2$ skorzystajmy dodatkowo ze wzorów na energię całkowitą. Porównując wyrażenia na $E$ i $L$ dla największej i najmniejszej odległości od Słońca otrzymujemy następujący układ równań z niewiadomymi $v_1$ i $v_2$,

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{Mm}{R_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{R_2}.$$

$$R_1 m v_1 = R_2 m v_2.$$

Powyższy układ równań rozwiązujemy wyznaczając z drugiego równania np. $v_1$ i wstawiając do pierwszego równania otrzymujemy równanie na $v_2$ w postaci:

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 v_2^2 - 2G\frac{M}{R_1} = v_2^2 - 2G\frac{M}{R_2}.$$

Stąd

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GMR_1}{R_2(R_1+R_2)}}.$$

Podstawiając $v_2$ do wzoru na $L$ otrzymujemy ostatecznie:

$$L = m\sqrt{\frac{2GMR_1R_2}{R_1+R_2}}.$$

**52. Planeta obiega wokół Słońca po elipsie, której jedno z ognisk pokrywa się z położeniem Słońca. Dowieść, że moment pędu planety względem Słońca jest wielkością stałą.**

Zmiana momentu pędu $\vec{L}$ w czasie jest powiązana zawsze z działaniem momentu siły $\vec{M}$, co wyraża następująca postać drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

W przypadku opisanym w zadaniu na planetę działa zmienna siła grawitacji opisana następującą zależnością:

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

gdzie $r$ to odległość pomiędzy planetą o masie $m$ i Słońcem o masie $M$. Zapis wektorowy tej siły jest następujący:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

gdyż siła grawitacji działa wzdłuż promienia wodzącego łączącego Słońce i planetę. Policzmy moment tej siły względem punktu, w którym znajduje się Słońce

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(-\frac{GmM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

gdyż iloczyn wektorowy $\vec{r} \times \vec{r} = 0$.

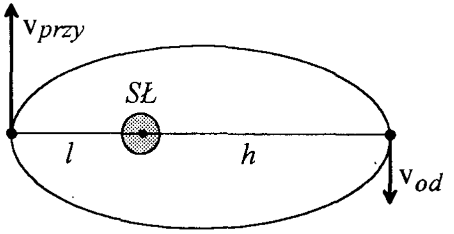
Tak więc

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

a co za tym idzie

$$\vec{L} = \text{const}.$$

**53. Największa odległość komety Halleya od Słońca to $h$=35.4 $R_{ZS}$ ($R_{ZS}$ - odległość pomiędzy Ziemią i Słońcem), a najmniejsza $l$=0.59 $R_{ZS}$. Prędkość liniowa ruchu komety w punkcie najbardziej odległym od Słońca (punkcie odsłonecznym) wynosi 910 m/s. Ile wynosi prędkość komety, gdy jest najbliżej Słońca (w punkcie przysłonecznym)?**




Kometa Halleya krążąc po elipsie zachowuje (zgodnie z zasadami ruchu ciała w polu siły centralnej) swój moment pędu względem Słońca. W punkcie odsłonecznym moment pędu liczymy z zależności

$$L = hm\mathrm{v}_{od},$$

gdzie $m$ jest masą komety, a $\mathrm{v}_{od}$ jej prękością. Kąt między wektorem prędkości a promieniem wodzącym w punktach odsłonecznym i przysłonecznym wynosi $\frac{\pi}{2}$, co upraszcza wzór na moment pędu. Zapiszmy z kolei wartość momentu pędu, gdy kometa znajduje się w punkcie przysłonecznym:

$$L = lm\mathrm{v}_{przy}.$$

Porównując prawe strony równań mamy:

$$hm\,v_{od} = lm\,v_{przy}$$

czyli

$$v_{przy} = \frac{h}{l}\,v_{od}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych:

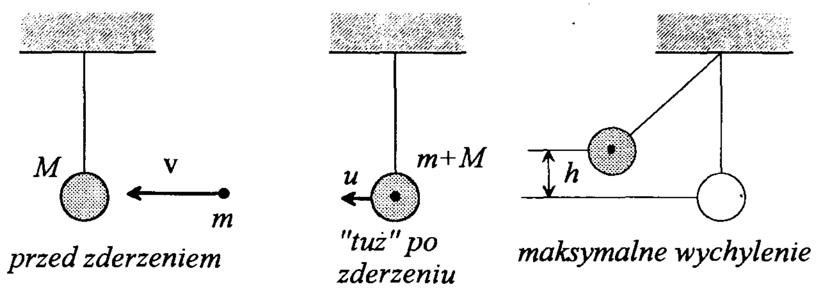
$$v_{przy} = \frac{35.4\,R_{zs}}{0.59\,R_{zs}}\,910\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 54.6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

# DYNAMIKA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

## ZDERZENIA

**54. Na jaką wysokość liczoną od położenia równowagi wzniesie się wahadło o masie $M$=10kg, gdy utkwi w nim pocisk o masie 0.1kg lecący z prędkością v=200m/s.**

W zadaniu tym mamy do czynienia z trzema charakterystycznymi stanami układu wahadło-pocisk. Zostały one zilustrowane na poniższych rysunkach.




Zasada zachowania pędu pozwoli nam wyliczyć prędkość układu wahadło-pocisk tuż po zderzeniu:

$$m\,v = (M+m)\,u$$

czyli

$$u = \frac{m}{M+m}\,v.$$

Należy podkreślić, że nie można tutaj zastosować zasady zachowania energii kinetycznej, gdyż energia kinetyczna pocisku zostanie w części zużytkowana na wykonanie pracy "wbicia się" pocisku do wahadła. Natomiast zasadę zachowania energii mechanicznej zastosujemy w kolejnym punkcie, licząc wysokość $h$ na jaką wzniesie się wahadło. Zakładamy przy tym, że opór powietrza jest pomijalnie mały. Porównajmy więc energię kinetyczną wahadła z pociskiem w najniższym położeniu oraz energię potencjalną w położeniu najwyższym, czyli porównujemy wartości całkowitej energii mechanicznej w dwóch skrajnych położeniach.

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh$$

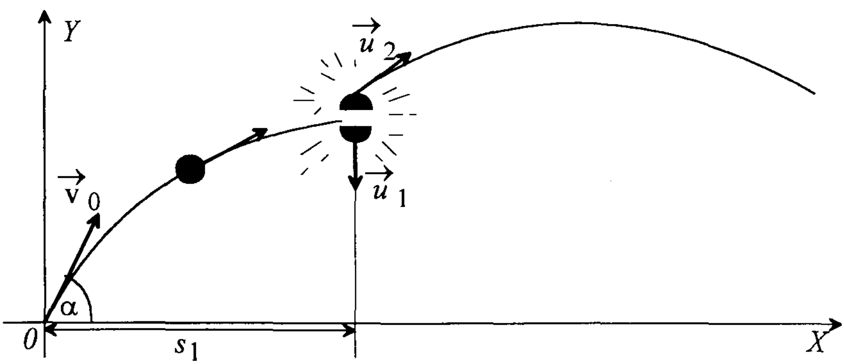
czyli wysokość $h$ na jaką wzniesie się ciało wynosi:

$$h = \frac{u^2}{2g},$$

co po podstawieniu uprzednio wyznaczonej wartości $u$ daje ostateczny wynik:

$$h = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v^2}{2g} \cong 0.2\,\mathrm{m}.$$

**55. Pocisk rozrywa się w najwyższym punkcie toru na wysokości $h$=19.6 m na dwie jednakowe części. W sekundę po wybuchu jedna z tych części spada na Ziemię pod tym miejscem, w którym nastąpił wybuch. W jakiej odległości $s_2$ od miejsca wystrzału upadnie druga część pocisku, jeżeli pierwsza spadła w odległości $s_1$ = 1000 m od miejsca wystrzału? Oporu powietrza nie uwzględniamy. Rozwiązać zadanie w oparciu o:**
**a) zasadę zachowania pędu, która jest spełniona przy założeniu, że czas trwania rozrywu jest równy zeru,**
**b) analizę ruchu środka masy pocisku.**




Do chwili wybuchu pocisk porusza się jak ciało wyrzucone ukośnie pod pewnym kątem $\alpha$ z prędkością początkową $v_0$. Stąd odległość do miejsca rozerwania się pocisku będącego najwyższym punktem toru $s_1$ jest połową zasięgu rzutu ukośnego:

$$s_1 = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\,\cos\alpha.$$

Z kolei znamy też maksymalną wysokość na jaką wzniesie się wyrzucone ciało:

$$h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Z tych dwóch zależności otrzymujemy, że prędkość jeszcze całego pocisku w najwyższym punkcie toru wynosi:

$$v_1 = v_0\cos\alpha = s_1\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

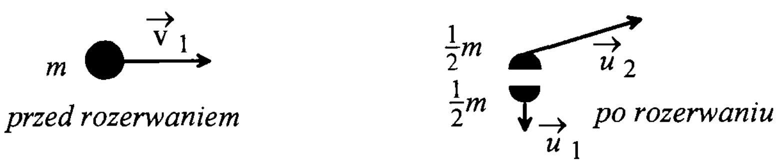
Zajmijmy się teraz kawałkiem pocisku, który po rozerwaniu spadł pionowo na dół z wysokości $h$. Oczywiście musimy uwzględnić to, że ten kawałek pocisku będzie miał pewną prędkość początkową - $u_1$.
Prędkość tą możemy wyznaczyć, gdyż podany jest w zadaniu czas spadania odłamka $\tau_1 = 1$ s. Odłamek będzie spadać ruchem jednostajnie przyspieszonym, a więc:

$$h = u_1\tau_1 + \frac{g\tau_1^2}{2}$$

i stąd

$$u_1 = \frac{2h - g\tau_1^2}{2\tau_1}.$$

Aby opisać ruch drugiego odłamka skorzystajmy z zasady zachowania pędu w sytuacji przedstawionej na poniższym rysunku:



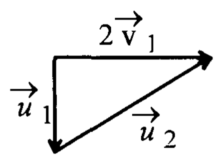

Wektorowy zapis zasady zachowania pędu będzie następujący:

$$m\vec{v}_1 = \frac{1}{2}m\vec{u}_1 + \frac{1}{2}m\vec{u}_2,$$

co po uproszczeniu daje zależność:

$$2\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2,$$

którą ilustruje rysunek:




Rozkładając wektor $\vec{u}_2$ na składową poziomą i pionową, otrzymujemy:

$$u_{2y} = u_1, \quad u_{2x} = 2v_1.$$

Znajomość $u_{2y}$ pozwoli nam wyznaczyć moment upadku drugiego odłamka na ziemię, gdyż współrzędna $y_2$ tego odłamka wyraża się równaniem:

$$y_2 = h + u_{2y}\tau + \frac{g\tau^2}{2},$$

gdzie $\tau$ jest czasem mierzonym od chwili wybuchu. Odłamek spadnie po jakimś czasie $\tau_2$, gdy $y_2 = 0$. Otrzymujemy więc następujące równanie kwadratowe, które pozwoli wyznaczyć $\tau_2$:

$$0 = h + u_{2y}\tau_2 + \frac{g\tau_2^2}{2},$$

$$\tau_2 = \left(u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2gh}\right).$$

Powyższy wzór po wprowadzeniu zależności dla $u_1$ prowadzi do zależności:

$$\tau_2 = \frac{2h}{g\tau_1}$$

Trzeba jeszcze policzyć drogę jaką przebył rozważany odłamek w kierunku poziomym. Wykorzystamy teraz otrzymaną z zasady zachowania pędu relację

$$u_{2x} = 2v_1.$$
$$s_2 - s_1 = u_{2x}\tau_2 = 2v_1\tau_2.$$

Wprowadźmy do powyższego wzoru zależności określające $v_1$ oraz $\tau_2$ i po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$s_2 = s_1\left(1 + \frac{2}{\tau_1}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = 5000\,\text{m}.$$

Powyższe zadanie można także rozwiązać z wykorzystaniem równań ruchu środka masy: najpierw pocisku, a potem układu złożonego z dwóch odłamków. Ten środek masy będzie się przez cały czas poruszać tak, jakby poruszał się cały pocisk bez rozerwania. Przypomnijmy sobie pierwsze kroki poczynione poprzednio przy rozwiązywaniu zadania, lecz zamiast stosować zasadę zachowania pędu wyprowadźmy równania ruchu środka masy po rozerwaniu. Jeśli współrzędne poszczególnych odłamków oznaczymy przez $(x_1, y_1)$ oraz $(x_2, y_2)$, to współrzędne środka masy wyniosą:

$$x_0 = \frac{\frac{1}{2}mx_1 + \frac{1}{2}mx_2}{m} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2}my_1 + \frac{1}{2}my_2}{m} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

Ruch środka masy będą opisywać następujące równania:

$$x_0 = s_1 + v_1\tau$$

$$y_0 = h - \frac{g\tau^2}{2},$$

tak więc otrzymamy następujący układ równań:

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = s_1 + v_1\tau$$

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = h - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Uwzględnijmy teraz posiadane przez nas informacje. Odłamek pierwszy spada pionowo w dół, a więc $x_1 = s_1$ oraz $y_1 = h - u_1\tau - \frac{g\tau^2}{2}$, gdzie $u_1$ jest wyliczoną już wcześniej prędkością z jaką rozpoczyna spadać pierwszy odłamek. Załóżmy teraz, że w chwili $\tau = \tau_2$ spada drugi odłamek, czyli $y_2 = 0$. Interesuje nas wartość $x_2$ w tym momencie czasu, gdyż będzie to właśnie szukana w zadaniu wartość $s_2$. Po uwzględnieniu podanych informacji układ równań ma następującą postać:

$$s_2 = s_1 + 2v_1\tau_2$$

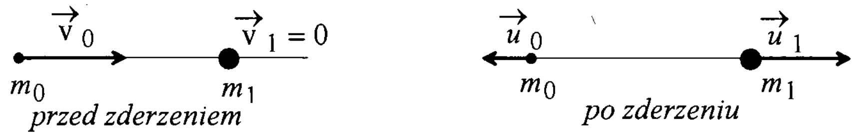
$$0 = h + u_1\tau_2 - \frac{g\tau_2^2}{2}.$$

Z powyższego układu równań wyznaczamy wartość $s_2$ poprzez eliminację zmiennej $\tau_2$. Otrzymamy rezultat identyczny, jak w przypadku rozwiązania zadania z wykorzystaniem zasady zachowania pędu, czyli:

$$s_2 = s_1\left(1 + \frac{2}{\tau_1}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = 5000\,\text{m}.$$

**56. Dwie kule zderzają się, po czym poruszają się wzdłuż jednej prostej. Jedna z kul przed zderzeniem była w spoczynku, a druga poruszała się z prędkością $v_0$. Kula poruszająca się ma masę trzykrotnie mniejszą od kuli spoczywającej. Wyznacz:**
**a) prędkości kul po zderzeniu idealnie sprężystym,**
**b) prędkości kul po zderzeniu idealnie niesprężystym,**
**c) ubytek energii podczas zderzenia idealnie niesprężystego.**

a) Załóżmy, że po zderzeniu kule będą poruszać się w przeciwnych kierunkach.




Napiszmy dla naszego układu dwóch kul równanie wyrażające zasadę zachowania pędu układu:

$$m_0 \vec{v}_0 = m_0 \vec{u}_0 + m_1 \vec{u}_1.$$

Wszystkie wektory leżą na jednej prostej, a więc przejście do postaci skalarnej równania jest proste. Skorzystajmy jeszcze z warunku $m_1 = 3m_0$ oraz z założenia, że po zderzeniu kule będą poruszać się w przeciwnych kierunkach. Otrzymamy następujące równanie:

$$v_0 = 3u_1 - u_0.$$

Zderzenie jest doskonale sprężyste, a więc obowiązuje również zasada zachowania energii kinetycznej:

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = \frac{m_0 u_0^2}{2} + \frac{m_1 u_1^2}{2},$$

co po uproszczeniu prowadzi do zależności:

$$v_0^2 = u_0^2 + 3u_1^2.$$

Wyznaczamy $u_0$ z równania wynikającego z zasady zachowania pędu:

$$u_0 = 3u_1 - v_0$$

podnosimy otrzymane równanie obustronnie do kwadratu i podstawiamy do równania wynikającego z zasady zachowania energii otrzymując równanie, z którego wyznaczymy $u_1$.

$$0 = 12u_1^2 - 6u_1 v_0,$$

czyli

$$u_1 = \frac{v_0}{2}.$$

Drugie poprawne matematycznie rozwiązanie, $u_1 = 0$, nie odpowiada rozważanej sytuacji fizycznej. Z kolei znajdujemy wartość $u_0$ :

$$u_0 = \frac{v_0}{2}.$$

b) Zderzenie idealnie niesprężyste doprowadzi do zlepienia kul.
W tym przypadku zasada zachowania pędu układu kul doprowadzi do równania, które od razu zapiszemy w postaci skalarnej:


$$m_0 v_0 = (m_0 + m_1) u_0.$$

Powyższe równanie po skorzystaniu z zależności $m_1 = 3m_0$ daje bezpośrednio prędkość kul po zderzeniu:

$$u_0 = \frac{v_0}{4}.$$

c) Całkowita energia kinetyczna kul przed zderzeniem wynosi oczywiście $E_0 = \frac{m_0 v_0^2}{2}$. Po zderzeniu idealnie niesprężystym całkowita energia kinetyczna zmieni się, gdyż jej część zostanie zużytkowana na wykonanie pracy potrzebnej do zlepienia kul. Jej wartość wyniesie:

$$E_1 = (m_0 + m_1)\frac{u_0^2}{2} = \frac{m_0 v_0^2}{8} = \frac{E_0}{4}.$$

Stąd ubytek energii kinetycznej podczas zderzenia wyniesie:

$$\Delta E = E_0 - E_1 = \tfrac{3}{4}E_0.$$

**57. Cząstka o masie $m_1$ i prędkości $v_1$ zderza się doskonale sprężyście z inną cząstką o masie $m_2 = 3m_1$, znajdującą się w spoczynku ($v_2 = 0$). Po zderzeniu cząstka o masie $m_2$ porusza się pod kątem $\theta_2 = 45^\circ$ względem pierwotnego kierunku cząstki o masie $m_1$. Znajdź kąt odchylenia $\theta_1$ masy $m_1$ oraz końcowe prędkości cząstek $u_1$ i $u_2$.**


Korzystamy z zasady zachowania pędu dla układu dwóch zderzających się cząstek porównując pęd całkowity przed zderzeniem z pędem całkowitym układu po zderzeniu kul:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_2 \vec{u}_2 + m_1 \vec{u}_1,$$

czy też po skorzystaniu z zależności $m_2 = 3m_1$ i obustronnym podzieleniu powyższego równania przez $m_1$ :

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2.$$

W celu wykonania dalszych obliczeń należy powyższe równanie wektorowe rozpisać na równania dla współrzędnych wektorów. Niech kierunkami osi naszego układu współrzędnych będą: kierunek ruchu masy $m_1$ przed zderzeniem oraz kierunek do niego prostopadły. Równania dla współrzędnych wektorów wyznaczonych dla tych kierunków mają postać:

$$v_1 = u_1\cos\theta_1 + 3u_2\cos\theta_2$$
$$0 = u_1\sin\theta_1 - 3u_2\sin\theta_2$$

po skorzystaniu z tego, że $\theta_2 = 45^\circ$ i co za tym idzie $\sin\theta_2 = \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, otrzymamy następującą postać układu równań:

$$v_1 = u_1\cos\theta_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}u_2$$
$$0 = u_1\sin\theta_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}u_2$$

Wiemy, że zderzenie było zderzeniem sprężystym, a więc obowiązuje również w tym przypadku zasada zachowania energii kinetycznej:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

lub po skorzystaniu z relacji pomiędzy masami cząstek i uproszczeniu:

$$v_1^2 = u_1^2 + 3u_2^2$$

Otrzymujemy więc układ 3 równań z 3 niewiadomymi - $u_1, u_2$ oraz $\theta_1$ :

$$v_1 = u_1\cos\theta_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}u_2$$
$$0 = u_1\sin\theta_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}u_2$$
$$v_1^2 = u_1^2 + 3u_2^2$$

Powyższy układ równań rozwiązujemy wyznaczając z dwóch pierwszych równań odpowiednio $\cos\theta_1$ oraz $\sin\theta_1$, następnie podnosimy otrzymane równania stronami do kwadratu i dodajemy je stronami tak, aby móc skorzystać z "jedynki trygonometrycznej". Po tych przekształceniach otrzymamy 2 równania z dwiema niewiadomymi, z których wyznaczymy wartości $u_1$ oraz $u_2$ :

$$u_1 = \frac{1}{4}\sqrt{10}\,v_1, \qquad u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,v_1,$$

a następnie można już znaleźć kąt $\theta_1$ powracając do dowolnego z równań, w których ten kąt występuje: $\sin\theta_1 = 0.949$

czyli $\theta_1 \cong 71.6^\circ$.

**58. Pokazać, że w przypadku sprężystego zderzenia niecentralnego dwóch kul o jednakowych masach, z których jedna spoczywała, kąt jaki utworzą kule po zderzeniu wynosi 90°.**

Oznaczmy przez $\vec{v}$ prędkość kuli poruszającej się przed zderzeniem, przez $\vec{v}_1$ prędkość tej kuli po zderzeniu, a przez $\vec{v}_2$ prędkość drugiej kuli po zderzeniu.

Z zasady zachowania pędu wynika, że pęd układu dwóch kul przed zderzeniem $\vec{p} = m\vec{v}$ jest równy pędowi układu po zderzeniu

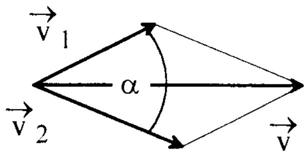
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

Zatem

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2,$$

czyli

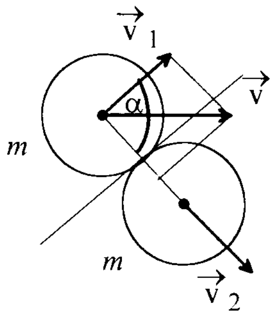
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$




Wektor $\vec{v}$ rozkłada się na wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ (rys.). Zgodnie z twierdzeniem cosinusów dla długości tych wektorów można napisać równość

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}.$$

W zderzeniu sprężystym zachowana jest również energia kinetyczna układu dwóch kul.




Przed zderzeniem energia kinetyczna $E_k = \frac{mv^2}{2}$, natomiast po zderzeniu całkowita energia kinetyczna wyraża się zależnością:

$$E_{k1} + E_{k2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Zatem

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2},$$

czyli

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Porównując ostatnią zależność z tą wynikającą z zasady zachowania pędu mamy, że
$2v_1 v_2 \cos\alpha = 0$,

czyli

$$\cos\alpha = 0,$$

które to równanie jest spełnione w naszym zadaniu dla $\alpha = 90^\circ$. (rys.)

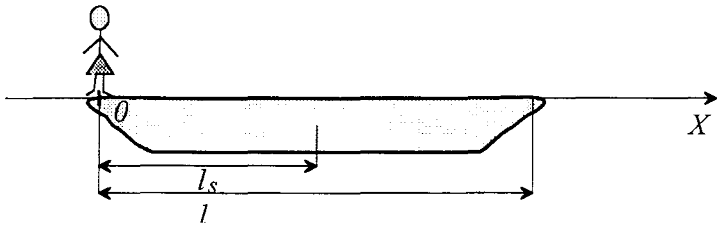
## ŚRODEK MASY

**59. Na końcu nieruchomej łódki, znajdującej się w wodzie, stoi człowiek. Na jaką odległość przesunie się łodka, jeżeli człowiek przejdzie na jej drugi koniec? Ciężar człowieka wynosi *G*, ciężar łódki *P*, a jej długość *l*. Opór wody przy ruchu łódki pomijamy.**

Wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych, w taki sposób, aby ruch człowieka i łódki odbywał się wzdłuż osi *OX*. Załóżmy, że w chwili $t$=0 człowiek znajdował się w początku tego układu.

Znajdźmy teraz położenie środka masy układu człowiek + łódka na osi *OX*. Zgodnie z definicją mamy

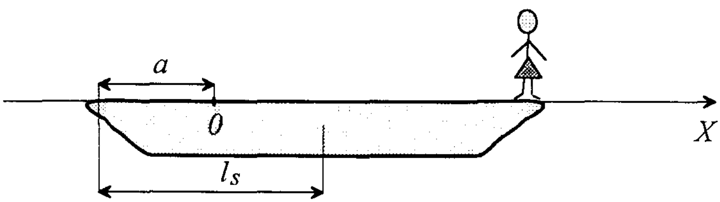
$$x_s = \frac{\frac{G}{g}0 + \frac{P}{g}l_s}{\frac{G}{g} + \frac{P}{g}} = \frac{Pl_s}{G+P}.$$




We wzorze tym $\frac{G}{g}$ jest masą człowieka, $\frac{P}{g}$ masą łódki, a przez $l_s$ oznaczyliśmy położenie środka masy łodzi na osi $OX$. Jeżeli zaniedbamy opór wody przy ruchu łódki, to środek masy przy przejściu człowieka na jej drugi koniec nie zmieni swego położenia, gdyż układ człowiek + łódka jest wtedy układem izolowanym, na który nie działa żadna siła zewnętrzna. Wobec, tego jeżeli człowiek przemieścił się w jedną stronę, to łódka musiała się przemieścić w drugą stronę na odległość $a$, tak że położenie środka masy układu

$$x_s = \frac{G(l-a)+P(l_s-a)}{G+P},$$

jest takie samo jak poprzednio.




Porównując prawe strony powyższych równań otrzymujemy:

$$Pl_s = (l-a)G + (l_s-a)P,$$

a stąd:

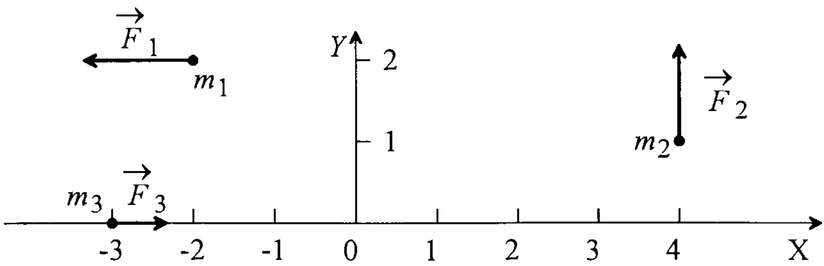
$$a = \frac{G}{P+G}l.$$

**60. Trzy ciała o masach $m_1$ =4kg, $m_2$ =8kg oraz $m_3$ =4kg umieszczono na płaszczyźnie $XOY$. W chwili $t$=0 ciała te są w spoczynku, a ich położenie wynosi odpowiednio : (-2,2)m, (4,1)m oraz (-3,0)m. Na każde z tych ciał działa siła:** $\vec{F}_1 = -F_1\hat{x}$, $F_1 = 16$N ; $\vec{F}_2 = F_2\hat{y}$, $F_2 = 16$N ; $\vec{F}_3 = F_3\hat{x}$, $F_3 = 8$N. **Znaleźć położenie środka masy w chwili $t$=2s.**

Położenie ciał w chwili $t = 0$ i siły działające na te ciała pokazuje w układzie współrzędnych $XOY$ rysunek zamieszczony niżej.

Znajdźmy najpierw wektor położenia środka masy układu ciał w chwili $t = 0$. Zgodnie z definicją:

$$\vec{r}_{0s} = \vec{r}_{0s}(t=0) = \frac{m_1\vec{r}_{01}+m_2\vec{r}_{02}+m_3\vec{r}_{03}}{m},$$




gdzie: $\vec{r}_{01}$, $\vec{r}_{02}$, $\vec{r}_{03}$ oznaczają wektory położenia ciał w chwili $t$=0, a $m = m_1 + m_2 + m_3$ jest masą układu trzech ciał. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$\vec{r}_{0s} = \left(\tfrac{3}{4}, 1\right)\text{m}.$$

Jeżeli w chwili początkowej ciała były w spoczynku, to również środek masy był w spoczynku. Ruch środka masy dla czasu $t$>0, odbywa się pod wpływem siły $\vec{F}$, która jest sumą sił działających na wszystkie ciała układu.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (F_3 - F_1)\,\hat{x} + F_2\,\hat{y} = (F_3 - F_1, F_2) = (-8, 16)\text{N}.$$

Pod wpływem siły $\vec{F}$ środek masy uzyskuje przyspieszenie $\vec{a}_s$ zgodnie ze wzorem

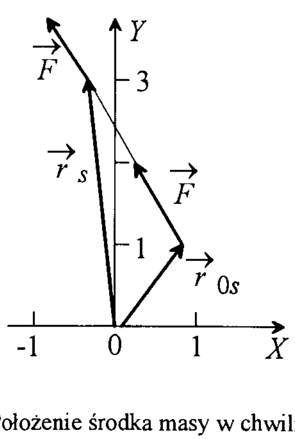
$$\vec{F} = m\,\vec{a}_s,$$

który jest równaniem ruchu środka masy danego układu ciał. Stąd przyspieszenie środka masy wynosi

$$\vec{a}_s = \frac{\vec{F}}{m} = \left(-\tfrac{1}{2}, 1\right)\frac{m}{s^2}.$$

Prędkość środka masy w chwili czasu $t$ wynosi

$$\vec{v}_s = \int \vec{a}_s \mathrm{d}t = \left(-\tfrac{1}{2}t, t\right)\frac{\text{m}}{\text{s}} + \vec{C}_1,$$




gdzie $\vec{C}_1$ jest stałą (wektorową) całkowania, którą wyznaczamy z warunku, że w chwili $t$=0 prędkość środka masy wynosi zero.

$$\vec{v}_s(t=0) = (0,0) = \vec{C}_1.$$

Położenie środka masy układu dane jest przez wektor wodzący środka masy

$$\vec{r}_s = \int \vec{v}_s \mathrm{d}t = \left(-\tfrac{1}{4}t^2, \tfrac{1}{2}t^2\right) + \vec{C}_2,$$

gdzie stałą $\vec{C}_2$, podobnie jak poprzednio, wyznaczamy z warunku początkowego:

$$\vec{r}_s(t=0) = \vec{r}_{0s} = \left(\tfrac{3}{4}, 1\right)\text{m} = \vec{C}_2.$$

$$\vec{r}_s = \left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}t^2, 1 + \tfrac{1}{2}t^2\right)\text{m}.$$

Położenie środka masy w chwili $t$=2s wynosi:

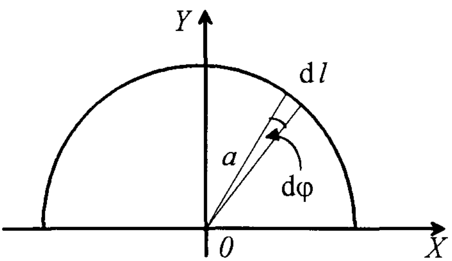
$$\vec{r}_s(t = 2s) = \left(-\tfrac{1}{4}, 3\right)\text{m}.$$

**61. Znaleźć środek masy półokręgu o promieniu *a*.**

Dla danego ciała współrzędne jego środka masy wyznaczamy obliczając następujące całki:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_M x\,\mathrm{d}m, \quad y_0 = \frac{1}{M}\int_M y\,\mathrm{d}m \quad \text{oraz} \quad z_0 = \frac{1}{M}\int_M z\,\mathrm{d}m,$$

gdzie $M$ oznacza masę ciała, natomiast $dm$ jest masą nieskończenie małego elementu ciała mającego współrzędne $(x, y, z)$.




W przypadku półokręgu (zakładamy, że grubość łuku jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z jego promieniem) element masy $\mathrm{d}m$ można zapisać następująco:

$$\mathrm{d}m = \rho S\,\mathrm{d}l,$$

gdzie $\rho$ jest gęstością materiału, z którego wykonano półokrąg, $S$ polem jego przekroju poprzecznego, a $dl$ elementem długości łuku półokręgu, który może być przedstawiony jako iloczyn $a\,\mathrm{d}\varphi$ - $a$ jest promieniem, zaś $\mathrm{d}\varphi$ elementarnym kątem przedstawionym za pomocą miary łukowej. Rozważany element masy ma współrzędne:

$$x = a\cos\varphi, \; y = a\sin\varphi.$$

Współrzędnej $x_0$ środka masy nie trzeba w tym przypadku liczyć, gdyż z symetrii ciała wynika, że jego środek masy musi leżeć na osi $OY$. Należy jedynie wyliczyć jego współrzędną $y_0$.

$$y_0 = \frac{1}{M}\int_M y\,\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} a\sin\varphi\;\rho S a\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{M}2a^2\rho S.$$

I wprowadzając wzór na masę całkowitą, $M = \pi a\rho S$, otrzymamy:

$$y_0 = \frac{2}{\pi}a.$$

**62. Wyznaczyć położenie środka masy stożka prostego o wysokości *h*.**

Środek masy bryły sztywnej ma następujące współrzędne

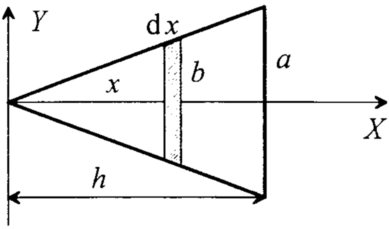
$$x_s = \frac{1}{m}\int_m x\,\mathrm{d}m, \quad y_s = \frac{1}{m}\int_m y\,\mathrm{d}m, \quad z_s = \frac{1}{m}\int z\,\mathrm{d}m.$$

Rysunek niżej przedstawia przecięcie stożka wzdłuż jego osi.

Jak widać ze względu na symetrię środek masy leży na osi $OX$. Tak więc $y_s = z_s = 0$. Dzielimy stożek na bardzo cienkie plasterki i rozpatrujemy dowolny plasterek o promieniu $b$ i grubości $\mathrm{d}x$ odległy od wierzchołka o $x$. Obliczmy masę $\mathrm{d}m$ takiego plasterka. Jak widać z rys. mamy zależność

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{h},$$

skąd




$$b = \frac{ax}{h}.$$

Jeśli założymy, że gęstość materiału, z którego wykonano stożek wynosi ρ, to $dm = \rho\, dV$, gdzie $dV = \pi b^2\, dx$ jest objętością plasterka. Zatem

$$dm = \pi b^2 \rho\, dx = \pi\left(\frac{ax}{h}\right)^2 \rho\, dx.$$

Całkowita masa stożka $m$ to wartość całki

$$m = \int_m dm.$$

Obliczmy zatem $x_s$

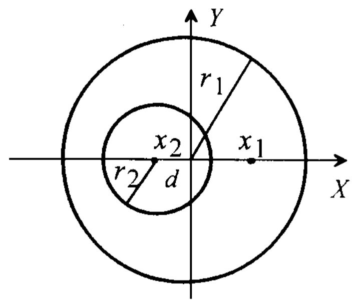
$$x_s = \frac{\pi\rho \int_0^h x\left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx}{\pi\rho \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx} = \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{4}x\Big|_0^h = \frac{3}{4}h.$$

**63. Znaleźć środek masy jednorodnej kuli o promieniu $r_1$ =50 cm, w której wnętrzu znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu $r_2$ =10 cm, przy czym środek kuli mniejszej oddalony jest o $d$=5cm od środka kuli większej.**

Pełna kula o promieniu $r_1$ składa się z małej kuli o promieniu $r_2$ i masie $m_2$ oraz z dużej kuli o promieniu $r_1$ z wydrążeniem (masa $m_1$ ). Dla pełnej kuli środek masy ma w układzie współrzędnych podanych na rys. współrzędne

$$x_s = 0 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad y_s = 0, \quad z_s = 0,$$

przy czym $x_1$ oznacza tu współrzędną środka masy kuli z wydrążeniem, natomiast $x_2$ oznacza współrzędną środka masy małej kuli, którą potem usuwamy tworząc wydrążenie.




Jak widać z rys. $x_2 = -d$. Z pierwszego równania mamy zatem

$$x_1 m_1 - d m_2 = 0,$$

czyli

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1} d.$$

Obliczmy masę $m_2$. Niech gęstość materiału kuli wynosi ρ. Zatem

$$m_2 = V_2 \rho = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \rho.$$

Masa $m_1$ natomiast jest równa różnicy masy całej pełnej kuli i wydrążenia:

$$m_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho - \frac{4}{3}\pi r_2^3 \rho = \frac{4}{3}\pi\rho\left(r_1^3 - r_2^3\right).$$

Zatem współrzędna $x_1$ środka masy wynosi

$$x_1 = \frac{r_2^3 d}{r_1^3 - r_2^3}.$$

Przy takim doborze układu współrzędnych jak na rysunku środek masy leży na osi $OX$ więc pozostałe jego współrzędne, $y_1$ i $z_1$, muszą być równe zeru.

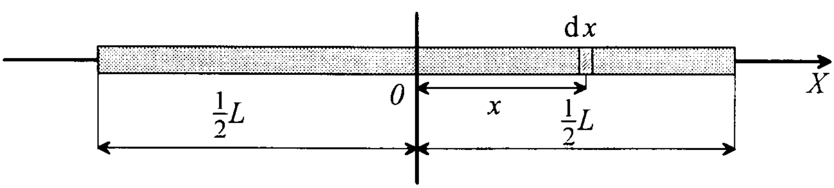
## MOMENT BEZWŁADNOŚCI

**64. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego pręta o długości $L$ i masie $m$ względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez:**
**a) środek pręta,**
**b) koniec pręta.**

Moment bezwładności bryły sztywnej względem zadanej osi obrotu wyznaczamy licząc następującą całkę:

$$I = \int_m r^2 \mathrm{d}m,$$

gdzie $r$ jest odległością elementu masy $dm$ od osi obrotu. Dla jednorodnego pręta element masy $\mathrm{d}m = \rho S\,\mathrm{d}x$, gdzie $\rho$ jest gęstością pręta, $S$ polem jego przekroju poprzecznego.
a) Rysunek poniżej ilustruje przypadek, gdy chcemy policzyć moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego środek.




Pamiętając, że w tym przypadu odległość elementu masy od osi obrotu wynosi $x$, zapiszmy następująco szukany moment bezwładności:

$$I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho S\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}L^3\rho S.$$

Ale wiemy, że całkowita masa pręta $m = \rho SL$ i stąd powyższą zależność zapiszemy w następującej końcowej postaci:

$$I_0 = \frac{1}{12}mL^2.$$

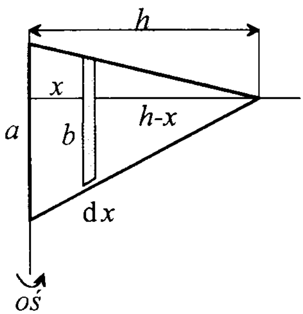
b) Wyznaczenie momentu bezwładności pręta względem osi do niego prostopadłej i przechodzącej przez jego koniec wymaga policzenia takiej samej całki, jak w przypadu a), jedynie w innych granicach będzie się teraz zmieniać współrzędna $x$.

$$I_0 = \int_0^L x^2 \rho S\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}L^3\rho S = \frac{1}{3}mL^2.$$

**65. Jaki jest moment bezwładności trójkąta o podstawie $a$ i wysokości $h$ oraz gęstości powierzchniowej $\sigma$**
**a) względem podstawy jako osi**

**b) względem osi przechodzącej przez wierzchołek *A* równolegle do podstawy *a*.**

a) Dzielimy trójkąt (rys.) na bardzo wąskie paski i rozpatrujemy dowolny pasek o długości $b$ i grubości $dx$ odległy od podstawy trójkąta o $x$. Jego masa $dm$ wynosi $dm = \sigma\, dS = \sigma b\, dx$.




Z rysunku widać, że

$$\frac{b}{a} = \frac{h-x}{h},$$

skąd

$$b = a\frac{h-x}{h}.$$

Zatem

$$dm = \sigma\, a\frac{h-x}{h}.$$

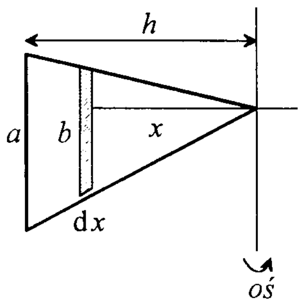
Moment bezwładności trójkąta to całka

$$I = \int_m x^2 dm.$$

Podstawiając $dm$ otrzymujemy

$$I = \sigma\, a\int_0^h \frac{h-x}{h}x^2 dx = \sigma\, a\int_0^h\left(x^2 - \frac{x^3}{h}\right)dx = \sigma a\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h = \frac{1}{12}\sigma a h^3.$$

b) Postępujemy identycznie jak w przypadku a), przy czym teraz odległość cienkiego dowolnego paska od osi obrotu wynosi $x$.




Z rysunku widać, że

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{h},$$

skąd

$$b = a\frac{x}{h}.$$

Masa paska zatem wynosi

$$dm = \sigma\, b\, dx = \frac{\sigma a}{h}x\, dx,$$

a moment bezwładności trójkąta

$$I = \int_m x^2 dm = \frac{\sigma a}{h}\int_0^h x^3 dx = \frac{\sigma a}{4h}x^4\Bigg|_0^h = \frac{1}{4}\sigma a h^3.$$

**66. Wyznaczyć moment bezwładności jednorodnego stożka o wysokości *h*, promieniu podstawy *r* i masie *m* względem prostej stycznej do podstawy i równoległej do osi symetrii obrotowej stożka.**

Moment bezwładności bryły sztywnej względem zadanej osi obrotu wyznaczamy licząc następującą całkę:

$$I = \int_m r^2\, dm,$$

gdzie $r$ jest odległością elementu masy $dm$ od osi obrotu. Jeśli bryła sztywna jest jednorodna, to wtenczas element masy $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$, gdzie $\rho$ jest gęstością bryły a $dx\, dy\, dz$ elementem jej objętości wyrażonym we współrzędnych kartezjańskich. Moment bezwładności jest wtenczas całką trójkrotną:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} r^2 \rho \, dx \, dy \, dz.$$

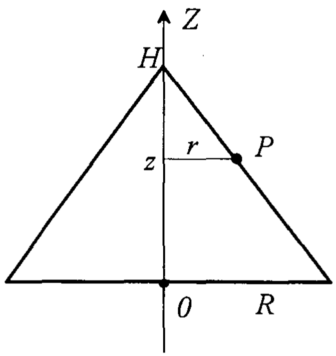
Jeśli wprowadzimy współrzędne cylindryczne, które są wygodniejsze przy liczeniu momentu bezwładności stożka, to musimy element masy zapisać następująco $dm = \rho r \, dr \, d\varphi \, dz$, co doprowadzi do wzoru:

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{z_1}^{z_2} r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

bądź stosując inną konwencję zapisu całki wielokrotnej:

$$I = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r_1(z)}^{r_2(z)} dr \int_{\varphi_1(z,r)}^{\varphi_2(z,r)} d\varphi \, \rho r^3$$

W powyższym wzorze zostały już zapisane explicite granice całkowania dla poszczególnych zmiennych. Zadaną bryłę wprowadzamy do powyższego wzoru poprzez odpowiednie zdefiniowanie granic całkowania po każdej ze współrzędnych. Wykonajmy odpowiedni rysunek, aby znaleźć te granice dla stożka. Załóżmy, że liczymy najpierw moment bezwładności $I_0$ stożka względem jego osi symetrii, potem zastosujemy twierdzenie Steinera i znajdziemy szukany w zadaniu moment bezwładności.




Współrzędna punktu $z$ to po prostu współrzędna na osi obrotu $OZ$. Współrzędna $r$ będzie odległością punktu stożka od osi obrotu, natomiast kąt $\varphi$ jest kątem pomiędzy płaszczyzną rysunku, a płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu i zadany punkt. Tak więc widzimy, że $\varphi$ będzie się zmieniać od $0$ do $2\pi$ (o taki kąt należy obrócić przedstawiony na rysunku przekrój stożka, aby zakreślić cały stożek). Wykonajmy od razu całkowanie po $\varphi$, gdyż jest to trywialne w sytuacji, gdy wyrażenie podcałkowe nie zależy od $\varphi$ :

$$I_0 = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r_1(z)}^{r_2(z)} dr \, 2\pi \rho r^3$$

Teraz będzie nam potrzebny związek pomiędzy $r$ i $z$ dla punktów leżących na tworzącej stożka:

$$\frac{r}{H-z} = \frac{R}{H}$$

Powyższy związek umożliwi wyznaczenie granicy całkowania $r_2(z)$, gdyż $r_1(z) = 0$. Widać, że:

$$r_2(z) = \frac{R}{H}(H-z),$$

a więc można już dokonać całkowania po $r$ w zdefiniowanych granicach, co prowadzi do rezultatu:

$$I_0 = \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{R}{H}\right)^4 (H-z)^4$$

Granice całkowania dla $z$, to $z_1 = 0$ i $z_2 = H$, co widać łatwo z rysunku. Po ostatnim całkowaniu otrzymujemy następującą zależność określającą moment bezwładności stożka względem jego osi symetrii:

$$I_0 = \frac{1}{10}\pi\rho R^4 H^5$$

Skorzystajmy jeszcze ze wzoru na masę jednorodnego stożka o gęstości $\rho$ i objętości $V$:

$$M = V\rho = \frac{1}{3}\pi R^2 H\rho.$$

Ostatecznie więc szukany moment bezwładności wynosi:

$$I_0 = \frac{3}{10}MR^2$$

i zastosowanie twierdzenia Steinera pozwoli wyznaczyć moment bezwładności względem osi stycznej do podstawy stożka i równoległej do jego osi symetrii:

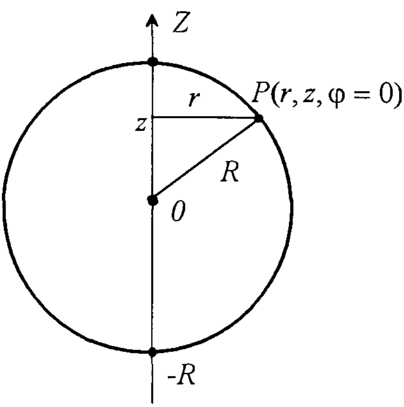
$$I = I_0 + MR^2 = \frac{3}{10}MR^2 + MR^2 = \frac{13}{10}MR^2.$$

**67. Wyznaczyć moment bezwładności jednorodnej kuli o promieniu $R$ oraz masie $M$ względem osi przechodzącej przez jej środek.**

Wyznaczając moment bezwładności kuli wprowadźmy współrzędne cylindryczne pamiętając, że element masy, który we współrzędnych kartezjańskich dla jednorodnej bryły wynosi $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$, we współrzędnych cylindrycznych wyraża się następującą zależnością: $dm = \rho\, r\, dr\, d\varphi\, dz$. Tak więc ogólny wzór na moment bezwładności, gdy używamy współrzędnych cylindrycznych ma postać:

$$I = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r_1(z)}^{r_2(z)} dr \int_{\varphi_1(z,r)}^{\varphi_2(z,r)} d\varphi\, \rho\, r^3$$

Zadaną bryłę wprowadzamy do powyższego wzoru poprzez odpowiednie zdefiniowanie granic całkowania po każdej ze współrzędnych. Wykonajmy odpowiedni rysunek, aby znaleźć te granice dla kuli.




Na rysunku poniżej umieszczono właściwie przekrój osiowy półkuli. Aby otrzymać kulę należy obrócić ten przekrój prostopadle do płaszczyzny rysunku o kąt $2\pi$, czyli widzimy, że współrzędna $\varphi$ będzie zmieniać się od $0$ do $2\pi$. Z kolei granice całkowania dla $r$ (współrzędna ta jest odległością punktu kuli od osi obrotu $OZ$) są powiązane ze współrzędną $z$ punktu leżącego na sferze kuli w następujący sposób:

$$r_1(z) = 0, \quad r_2(z) = \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Współrzędna $z$ w oczywisty sposób zmienia się od $-R$ do $R$. Zapiszmy więc teraz całkę określającą moment bezwładności kuli:

$$I = \int_{-R}^{R} dz \int_{0}^{\sqrt{R^2-z^2}} dr \int_{0}^{2\pi} d\varphi\, \rho\, r^3.$$

Wykonujemy w sposób trywialny całkowanie po $\varphi$, gdyż wyrażenie podcałkowe jest od tej zmiennej niezależne:

$$I = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_{0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \mathrm{d}r\, 2\pi\rho r^3.$$

Z kolei całkujemy po $r$ pamiętając, że wyrażenie podcałkowe to $2\pi\rho r^3$, czyli:

$$I = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \frac{1}{2}\pi\rho\left(R^2 - z^2\right)^2.$$

I pozostało jeszcze trochę bardziej skomplikowane całkowanie po $z$, którego wykonanie daje następujący rezultat:

$$I = \frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

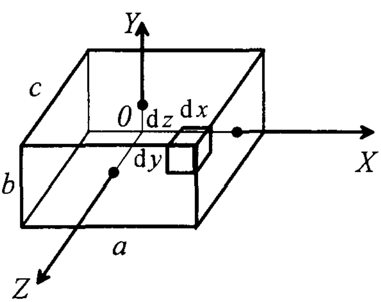
Pozostaje jeszcze uwzględnić wzór określający masę kuli $M$ posiadającej gęstość $\rho$ i promień $R$: $M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$. Wykorzystując tę zależność znajdujemy ostateczną postać wzoru określającego moment bezwładności kuli względem jej osi symetrii:

$$I = \frac{2}{5}MR^2.$$

**68. Znaleźć momenty bezwładności dla prostopadłościanu o bokach *a*, *b* i *c* względem osi przechodzących przez środki przeciwległych ścian.**

Wybieramy układ współrzędnych tak, by jego środek $O$ leżał w środku prostopadłościanu, a osie $OX$, $OY$ i $OZ$ przechodziły przez środki ścian (rys.).

Wyznaczmy moment bezwładności prostopadłościanu względem osi $OX$. Wewnątrz prostopadłościanu wybieramy mały prostopadłościan o bokach $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$. Jego objętość wynosi $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, a masa $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$, gdzie $\rho$ jest gęstością prostopadłościanu. Jest on odległy od osi $OX$ o $r$, które wynosi




$$r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Aby policzyć moment bezwładności prostopadłościanu względem osi $OX$ należy skorzystać z definicji

$$I = \int_m r^2 \mathrm{d}m.$$

Podstawiając $r$ i $\mathrm{d}m$ otrzymujemy całkę

$$I = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Granice całkowania wynikają oczywiście z obranego układu współrzędnych i długości ścian prostopadłościanu.

Całkujemy najpierw po zmiennej $x$. Otrzymujemy

$$I=\rho\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(y^2+z^2\right)x\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dy\,dz=\rho a\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(y^2+z^2\right)dy\,dz.$$

Dokonujemy teraz całkowania po $y$. Mamy

$$I=\rho a\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\left(\tfrac{1}{3}y^3+z^2y\right)\Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dz=\rho a\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\left(\tfrac{1}{12}b^3+z^2b\right)dz.$$

Pozostało całkowanie po $z$. Otrzymujemy

$$I=\rho a\left(\tfrac{1}{12}b^3z+z^3b\right)\Big|_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}=\rho a\left(\tfrac{1}{12}b^3z+\tfrac{1}{12}c^3b\right)=\tfrac{1}{12}\rho\,abc\left(b^2+c^2\right).$$

Ponieważ objętość prostopadłościanu wynosi $V=abc$, a jego masa $m=\rho V$ zatem moment bezwładności względem osi $OX$ wynosi

$$I=\tfrac{1}{12}m\left(b^2+c^2\right).$$

Analogicznie obliczamy momenty bezwładności względem osi $OY$ i $OZ$.
Odległość małego prostopadłościanu od osi $OY$ wynosi

$$r'=\sqrt{x^2+z^2}$$

a od osi $OZ$

$$r''=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Momenty bezwładności zatem względem tych osi obliczymy z całek odpowiednio

$$I'=\rho\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(x^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$$

oraz

$$I''=\rho\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz.$$

Po analogicznych obliczeniach otrzymujemy

$$I'=\tfrac{1}{12}m\left(a^2+c^2\right)$$

oraz

$$I''=\tfrac{1}{12}m\left(a^2+b^2\right).$$

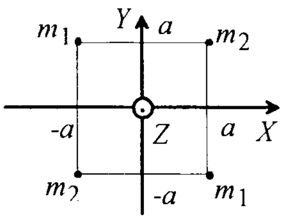
**69. Kwadrat o boku $2a$, leżący w plaszczyźnie $z=0$ ma w swych rogach ułożone masy $m_1$ i $m_2$ (patrz rysunek).**
**a) Obliczyć składowe tensora bezwladności względem osi $X,Y,Z$.**
**b) Sprowadzić ten tensor na osie glówne.**

W ogólnym przypadku moment bezwładności układu $N$ punktów materialnych, o masach $m_i$ i współrzędnych $(x_i,y_i,z_i)$, gdzie $i = 1,2,...,N$, jest symetrycznym tensorem drugiego stopnia, którego składowe mają postać:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right), \qquad I_{xy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right), \qquad I_{xz} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right), \qquad I_{yz} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i$$




i można je zapisać w postaci macierzy:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Sumowanie we wzorach na składowe tensora bezwładności przebiega po wszystkich $N$ punktach układu. W naszym przypadku $N = 4$, a odpowiednie składowe tensora wynoszą:

$$I_{xx} = I_{yy} = 2a^2(m_1 + m_2), \; I_{zz} = 2I_{xx}, \; I_{xy} = 2a^2(m_1 - m_2), \; I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

Jeżeli dla uproszczenia zapisu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$A = 2a^2(m_1 + m_2), \; B = 2a^2(m_1 - m_2),$$

to nasz tensor bezwładności możemy zapisać jako

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix}.$$

Sprowadzić tensor na osie główne, oznacza znaleźć taki nowy układ współrzędnych w którym tensor bezwładności ma tylko składowe diagonalne. Naszym zadaniem jest znalezienie tych składowych, jak również określenie położenia osi nowego układu współrzędnych w starym układzie. Oznaczmy osie nowego układu współrzędnych jako 1, 2, 3, a momenty bezwładności względem nich (składowe diagonalne), jako $I_1$, $I_2$, $I_3$. Załóżmy teraz, że nasz układ obraca się względem którejś z osi głównych z pewną prędkością kątową $\vec{\omega}$ i napiszmy wyrażenie na moment pędu $\vec{L}$.

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix},$$

gdzie $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ są składowymi momentu pędu w starym układzie współrzędnych. Z drugiej strony jeżeli obrót układu zachodzi dookoła którejś z osi głównych, to kierunek wektora momentu pędu jest taki sam jak wektora prędkości kątowej i wynosi $\vec{L} = I\vec{\omega}$, gdzie $I$ jest momentem bezwładności względem tej osi. Jeżeli teraz porównamy obydwa wyrażenia na $\vec{L}$, to otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix},$$

lub

$$\begin{bmatrix} A-I & B & 0 \\ B & A-I & 0 \\ 0 & 0 & 2A-I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 0$$

Otrzymane równanie jest równoważne układowi trzech równań jednorodnych z niewiadomymi $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$. Układ ten ma niezerowe rozwiązania tylko wtedy, gdy wyznacznik główny tego układu równy jest zeru tj.

$$\det \begin{bmatrix} A-I & B & 0 \\ B & A-I & 0 \\ 0 & 0 & 2A-I \end{bmatrix} = 0.$$

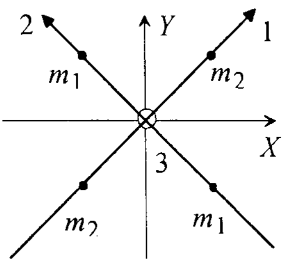
Otrzymujemy stąd równanie na $I$ postaci:

$$(2A-I)\left[(A-I)^2 - B^2\right] = 0,$$

dające trzy rozwiązania:

$$I_1 = A + B = 4a^2 m_1;\ I_2 = A - B = 4a^2 m_2;\ I_3 = 2A = 4a^2(m_1 + m_2).$$

Otrzymane rozwiązania są wartościami głównych momentów bezwładności naszego układu. W zasadzie już z ich postaci możemy wywnioskować, że układ osi nowego układu współrzednych jest jak na poniższym rysunku.




W sposób formalny kierunki osi głownych znajdujemy rozwiązując układ równań na składowe wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ skierowanej wzdłuż jednej z trzech osi głównych odpowiadającej zadanemu głównemu momentowi bezwładności $I$:

$$(A-I)\omega_x + B\omega_y = 0$$

$$B\omega_x + (A-I)\omega_y = 0$$

$$(2A-I)\omega_z = 0.$$

Ponieważ jest to układ równań jednorodnych to tylko dwa równania są liniowo niezależne. Dla $I = I_1$ mamy:

$$-B\omega_x + B\omega_y = 0$$

$$(A-B)\omega_z = 0,$$

a stąd mamy $\omega_x = \omega_y$ i $\omega_z = 0$, co interpretujemy w ten sposób że oś 1 jest w płaszczyźnie $XY$ pod kątem 45° w stosunku do osi $X$ i $Y$. Podobnie, gdy $I = I_2$, mamy $\omega_y = -\omega_x$ i $\omega_z = 0$, (oś 2 na rysunku), natomiast dla $I = I_3$ układ równań ma postać:

$$-A\omega_x + B\omega_y = 0$$

$$B\omega_x - A\omega_y = 0$$

$$0\,\omega_z = 0.$$

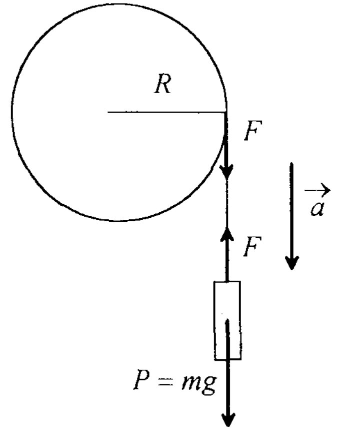
Dwa pierwsze równania są niesprzeczne jedynie, gdy

$$\omega_x = \omega_y = 0,$$

natomiast w trzecim mamy zawsze tożsamość. Stąd wnioskujemy, że wektor $\vec{\omega}$ skierowany wzdłuż osi głównej 3 ma tylko składową $z$, czyli oś 3 pokrywa się z tą osią.

## RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ

**70. Do końca nici nawiniętej na bęben o promieniu $R$=10cm przywiązano ciężar o masie $m$=0.5kg. Znaleźć moment bezwładności bębna, jeżeli wiadomo, że ciężar opuszcza się z przyspieszeniem $a$=1m/s$^2$.**




Zapiszmy drugą zasadę dynamiki dla ruchu postępowego odważnika (I równanie) oraz dla ruchu obrotowego bębna (II równanie), jak i związek pomiędzy tymi ruchami (III równanie).

$$ma = P - F$$
$$I\varepsilon = FR$$
$$a = \varepsilon R$$

W powyższym układzie 3 równań mamy 3 niewiadome $F$, $\varepsilon$ oraz szukane $I$. Wartość $P$ zastąpimy iloczynem $mg$ gdzie $g$ - przyspieszenie ziemskie. Wyznaczmy więc $I$:

$$I = \frac{FR}{\varepsilon}$$
$$F = P - ma = m(g-a)$$
$$\varepsilon = \frac{a}{R}$$
$$I = \frac{m(g-a)R^2}{a}$$

Co po podstawieniu odpowiednich wartości liczbowych prowadzi do rezultatu:

$$I = 0.045\ \text{kg}\,\text{m}^2$$

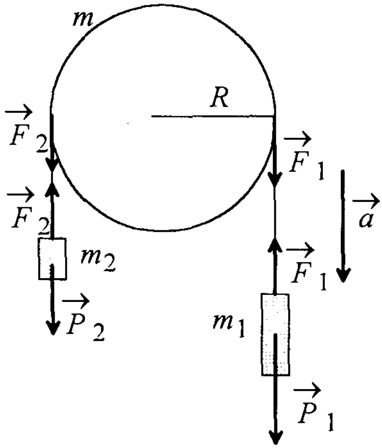
**71. Dwa odważniki o masach $m_1$ =2 kg, $m_2$ =1 kg są połączone nicią przerzuconą przez krążek. Promień krążka $R$=0.1 m, a jego masa $m$=1 kg. Obliczyć:**
**a) przyspieszenie $a$ z jakim poruszają się odważniki,**
**b) naciągi $F_1$ i $F_2$ nici, na których są zawieszone odważniki.**
**Krążek uważać za jednorodny, a tarcie pominąć.**

Należy zapisać drugą zasadę dynamiki dla ruchu postępowego z przyspieszeniem $a$ dla każdego z odważników. Trzeba przy tym uwzględnić to, że jeden z odważników będzie opadać, a drugi będzie się wznosić oraz należy także wziąć pod uwagę ruch obrotowy walca z przyspieszeniem kątowym $\varepsilon$. Załóżmy dla celów rachunkowych, że dodatni zwrot mają wektory skierowane pionowo w dół. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku:

$$m_1 a = P_1 - F_1$$
$$-m_2 a = P_2 - F_2$$
$$I\varepsilon = (F_1 - F_2)R$$

Nić nie ślizga się po krążku i dlatego zachodzi związek:

$$a = \varepsilon R$$




Potrzebny nam jeszcze będzie wzór określający moment bezwładności krążka względem osi obrotu pokrywającej się z osią symetrii krążka:

$$I = \frac{1}{2}mR^2.$$

Oczywiście ciężar każdego z odważników można wyrazić korzystając z wartości przyspieszenia ziemskiego $g$:

$$P_1 = m_1 g$$

$$P_2 = m_2 g$$

a) Wyznaczamy przyspieszenie liniowe $a$ odważników rozwiązując układ trzech równań liniowych powyżej zapisanych.

$$a(m_1 + m_2) = P_1 - P_2 - (F_1 - F_2),$$

natomiast z trzeciego równania układu:

$$F_1 - F_2 = \frac{I\varepsilon}{R} = \frac{Ia}{R^2},$$

co po podstawieniu do poprzedniego równania doprowadzi do końcowego rezultatu:

$$a\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) = P_1 - P_2$$

$$a = \frac{\left(m_1 - m_2\right)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} = 2.8\,\mathrm{m/s^2}.$$

b) Obliczmy teraz siły naciągające nić $F_1$ i $F_2$.

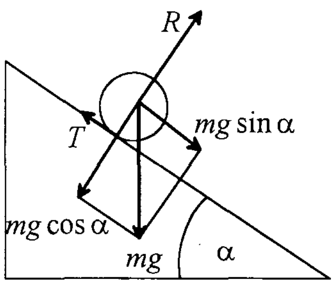
$$F_1 = m_1(g - a) = 14\,\mathrm{N}$$

przy czym skorzystaliśmy przy powyższym obliczeniu z obliczonej w punkcie a) wartości przyspieszenia $a$.
Z kolei

$$F_2 = m_2(g + a) = 12.6\,\mathrm{N}$$

**72. Z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha$ staczają się bez poślizgu: kula i obręcz. Prędkość początkowa kuli wynosi zero. Jaką prędkość początkową należy nadać obręczy aby kula i obręcz przebyły tę samą odległość w jednakowym czasie $t$? Moment bezwladności kuli względem osi przechodzącej przez jej środek wynosi $I = \frac{2}{5}m_k R_k^2$. Grubość obręczy jest dużo mniejsza od jej promienia.**

Na rysunku niżej przedstawiono staczające się z równi ciało, którym może być zarówno kula, jak i obręcz. Na staczające się ciało działa siła ciężkości $mg$, gdzie $m$ jest jego masą a $g$ wektorem przyspiesznia ziemskiego. Siła ta jest sumą wszystkich sił działających na poszczególne punkty ciała i można ją zastąpić jedną siłą działającą na środek masy. Siłę tę wygodnie jest rozłożyć na dwie składowe: składową równą co do wartości $mg\cos\alpha$ prostopadłą do powierzchni równi czyli siłę nacisku i składową styczną do powierzchni równi $mg\sin\alpha$. Siła nacisku jest w całości równoważona siłą reakcji równi, a składowa styczna częściowo siłą tarcia o wartości $T$ i przeciwnym do niej zwrocie. Wypadkowa




wszystkich sił działających na ciało powoduje, zgodnie z drugą zasadą dynamiki, ruch ciała z przyspieszeniem $a$ takim, że

$$ma = mg\sin\alpha - T.$$

Powyższe równanie opisuje ruch postępowy środka masy ciała. Z kolei ruch obrotowy wokół osi przechodzącej przez środek masy jest uwarunkowany wypadkowym momentem sił działających na ciało. Zgodnie z definicją moment $\vec{M}$ siły $\vec{F}$ równy jest:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

gdzie $\vec{r}$ jest ramieniem siły. Wartość momentu siły, zgodnie z definicją iloczynu wektorowego, wynosi

$$M = rF\sin\varphi,$$

gdzie $\varphi$ jest kątem między siłą a ramieniem. W naszym przypadku siła ciężkości (bądź tworzące ją składowe) jest przyłożona w środku masy ciała, dlatego jej moment jest równy zeru. Z kolei moment siły reakcji równy jest zeru, gdyż co prawda punkt przyłożenia siły reakcji jest na obwodzie ciała, ale działa ona wzdłuż ramienia, czyli kąt $\varphi$ we wzorze na $M$ jest równy zeru. Jedyną siłą dającą niezerowy moment jest siła tarcia. Wartość momentu siły $T$ wynosi $RT$, gdzie $R$ jest promieniem staczającego się ciała. Moment siły $T$ powoduje ruch obrotowy, z przyspieszeniem kątowym $\varepsilon$, zgodnie z drugą zasadą dynamiki ruchu obrotowego. W naszym przypadku

$$TR = I\varepsilon,$$

gdzie $I$ jest momentem bezwładności ciała tj. kuli lub obręczy. Moment bezwładności kuli dany jest w zadaniu, a moment bezwładności obręczy o masie $m_o$ i promieniu $R_o$ wynosi $m_oR_o^2$ (zakładając, że obręcz jest cienka i wszystkie punkty masy obręczy znajdują się w tej samej odległości $R_o$ od osi obrotu). Przepiszmy teraz równania ruchu postępowego i obrotowego obu ciał zakładając, że mogą one mieć dowolne masy (wielkości dotyczące kuli oznaczamy znaczkiem $k$ a obręczy - $o$). Zakładamy także, że ciała staczają się bez poślizgu, a stąd związek między przyspieszeniem kątowym $\varepsilon$ a przyspieszeniem środka masy $a$ ma postać $\varepsilon = \frac{a}{R}$.

| Kula. | Obręcz. |
|---|---|
| $m_kg\sin\alpha - T_k = m_ka_k,$ | $m_og\sin\alpha - T_o = m_oa_o,$ |
| $T_kR_k = \frac{2}{5}m_kR_k^2\frac{a_k}{R_k},$ | $T_oR_o = m_oR_o^2\frac{a_o}{R_o}.$ |

Rozwiązując powyższe układy równań znajdujemy odpowiednio przyspieszenia środka masy kuli i obręczy:

$$a_k = \frac{5}{7}g\sin\alpha, \qquad a_o = \frac{1}{2}g\sin\alpha.$$

Zauważmy po pierwsze, że otrzymane przyspieszenia nie zależą od mas i promieni staczających się ciał. Po drugie, przyspieszenie kuli jest większe, toteż aby oba ciała przebyły tę samą odległość w tym samym czasie $t$, obręczy należy nadać pewną prędkość początkową $v_o$. Niech droga przebyta przez kulę i obręcz w czasie $t$ wynosi $S$. Możemy napisać:

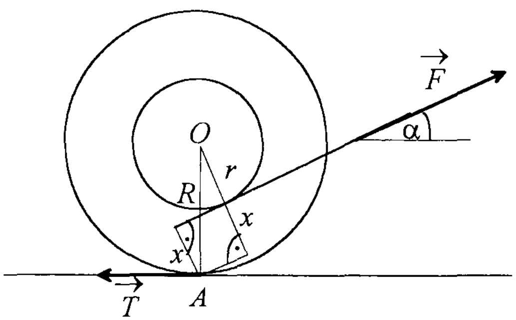
$$S=\frac{a_k t^2}{2} \quad \text{i} \quad S=v_o t+\frac{a_o t^2}{2}.$$

Porównując powyższe wyrażenia na drogę otrzymujemy równanie na $v_o$, którego rozwiązanim jest:

$$v_o=\frac{\left(a_k-a_o\right)t}{2}=\frac{3}{28}g\sin\alpha\ t.$$

**73. Ciężka szpula z nawiniętą nicią, do której przyłożono siłę $\vec{F}$ leży na płaszczyźnie poziomej. W którą stronę i z jakim przyspieszeniem liniowym będzie poruszać się szpula w zależności od kąta między kierunkiem działania siły a płaszczyzną. Masa szpuli $m$, zewnętrzny i wewnętrzny promień odpowiednio $R$ i $r$, moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek $I_0$.**

Załóżmy, że szpula nie ślizga się. Siła $\vec{F}$ wywołuje obrót dookoła chwilowej osi $A$ (rys.). Ramię tej siły wynosi $x$.




Z rysunku widać, że

$$\frac{r+x}{R}=\cos\alpha$$

czyli

$$x=R\cos\alpha-r$$

Ramię siły tarcia $T$ jest równe zeru, gdyż jest ona przyłożona do chwilowej osi obrotu $A$. Zatem równanie tego ruchu ma postać

$$Fx=I_A\,\varepsilon$$

gdzie $\varepsilon=a/R$. Jak wynika z twierdzenia Steinera moment bezwładności szpuli względem osi $A$ $I_A$ można wyrazić za pomocą momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy $I_0$ oraz odległości $R$ pomiędzy tymi osiami:

$$I_A=I_0+mR^2$$

Otrzymujemy równanie

$$F(R\cos\alpha-r)=\frac{\left(I_0+mR^2\right)a}{R},$$

skąd przyspieszenie $a$ wynosi

$$a=\frac{F(R\cos\alpha-r)R}{I_0+mR^2}.$$

Widać, że dla $\cos\alpha > r/R$ szpula nawija się na nić, gdyż wtedy $a>0$, dla $\cos\alpha < r/R$ czyli dla $a<0$ nić rozwija się ze szpuli, a dla $\cos\alpha = r/R$ ($a=0$) szpula spoczywa.

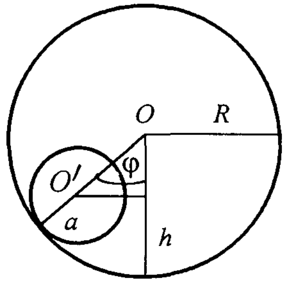
**74. Jednorodny walec o masie $m$ i promieniu $a$ toczy się w polu siły ciężkości wewnątrz walca o promieniu $R$. Znaleźć równanie ruchu walca wychylonego w chwili początkowej z położenia równowagi o kąt $\varphi_0$. Kiedy otrzymane równanie można w prosty sposób rozwiązać ?**

Skorzystajmy z zasady zachowania energii. Środek małego walca porusza się wewnątrz dużego walca po torze będącym wycinkiem okręgu o promieniu $R$-$a$ (rys.) z chwilową prędkością kątową $\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}$ a zatem z prędkością liniową

$$v = \omega_1(R-a) = \frac{d\varphi}{dt}(R-a).$$

Prędkość kątowa obrotu małego walca wokół osi przechodzącej przez jego środek $O'$ wynosi więc

$$\omega_2 = \frac{v}{a} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{R-a}{a}.$$




Całkowita energia kinetyczna małego walca to suma energii kinetycznej ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek $O$ dużego walca i energii kinetycznej ruchu obrotowego małego walca względem osi przechodzącej przez jego środek $O'$. Zatem

$$E_k = \frac{I\omega_1^2}{2} + \frac{I_0\omega_2^2}{2},$$

gdzie $I_0 = ma^2/2$ jest momentem bezwładności małego walca względem osi przechodzącej przez punkt $O'$, a $I$ jest jego momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt $O$. Zgodnie z twierdzeniem Steinera:

$$I = I_0 + m(R-a)^2.$$

Całkowita energia kinetyczna małego walca wychylonego o kąt $\varphi$ od położenia równowagi wynosi zatem

$$E_k = \frac{3}{4}m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[(R-a)^2 + \frac{1}{3}a^2\right].$$

Energia potencjalna w tym samym momencie wynosi $E_p = mg(h-a)$. Z rysunku widać, że

$$\frac{R-h}{R-a} = \cos\varphi,$$

skąd

$$h = R(1-\cos\varphi) + a\cos\varphi.$$

Zatem

$$E_p = mg(R-a)(1-\cos\varphi).$$

Ponieważ suma $E_k + E_p$, zgodnie z zasadą zachowania energii mechanicznej jest stała, więc

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = 0.$$

Obliczamy pochodne
$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{3}{2}m\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\left[(R-a)^2 + \frac{1}{3}a^2\right],$$

$$\frac{dE_p}{dt} = mg(R-a)\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Otrzymujemy równanie ruchu

$$\frac{3}{2}\left[(R-a)^2+\frac{1}{3}a^2\right]\frac{d^2\varphi}{dt^2}+g(R-a)\sin\varphi=0.$$

Nie można go rozwiązać metodami elementarnymi. Gdy jednak amplituda drgań $\varphi_0$ jest mała, możemy zastosować przybliżenie $\sin\varphi\approx\varphi$ i otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0,$$

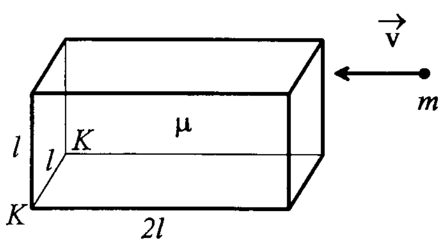
gdzie

$$\omega=\sqrt{\frac{2g(R-a)}{3\left[(R-a)^2+\frac{1}{3}a^2\right]}}$$

jest częstością kołową drgań małego walca.

**75. W górną krawędź prostopadłościanu o wymiarach $l\times l\times 2l$ i masie $\mu$ leżącego poziomo w polu siły ciężkości uderza kulka o masie $m$ lecąca z prędkością v. Przyjmując, że krawędź $KK$ prostopadłościanu jest przymocowana do podłoża oraz, że zderzenie jest sprężyste, a kulka odlatuje do tyłu, znaleźć:**
**a) prędkość kątową, którą uzyskuje klocek w chwili zderzenia**
**b) równanie ruchu klocka po zderzeniu**
**c) minimalną prędkość kulki, potrzebną do postawienia klocka pionowo.**

Podczas zderzenia zachowany jest moment pędu układu kulka-klocek względem osi $KK$ (rys).




Moment pędu kulki $m\mathrm{v}l$ przed zderzeniem jest równy sumie momentu pędu kulki po zderzeniu $-m\mathrm{v}'l$ i momentu pędu klocka po zderzeniu

$$m\mathrm{v}l=-m\mathrm{v}'l+I\omega_0,$$

gdzie $\mathrm{v}'$ oznacza prędkość kulki po zderzeniu, $\omega_0$ - uzyskaną przez klocek prędkością kątową a $I$ jest jego momentem bezwładności względem osi $KK$.

Wyznaczamy z tego równania prędkość $\mathrm{v}'$. Wynosi ona

$$\mathrm{v}'=\frac{I\omega_0-m\mathrm{v}l}{ml}.$$

Zgodnie z rozwiązaniem zadania 68 moment bezwładności prostopadłościanu względem osi równoległej do $KK$ przechodzącej przez środek masy wynosi

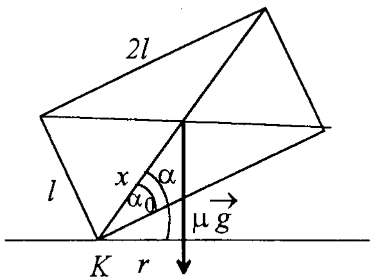
$$I_0=\frac{1}{12}\mu\left(b^2+c^2\right)=\frac{1}{12}\mu\left(l^2+4l^2\right)=\frac{5}{12}\mu l^2,$$

gdzie podstawiliśmy $b=l$ i $c=2l$.

Zgodnie z tw. Steinera moment bezwładności $I$ liczymy ze wzoru

$$I=I_0+\mu x^2,$$

gdzie $x$ jest odległością obu osi obrotu i jest równe połowie przekątnej prostokąta o bokach $l$ i $2l$ (rys.)




$$x = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + 4l^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}l.$$

Zatem

$$I = \frac{5}{12}\mu l^2 + \frac{5}{4}\mu l^2 = \frac{5}{3}\mu l^2.$$

Ponieważ zderzenie jest sprężyste, zachowana jest także energia kinetyczna. Energia kinetyczna kulki przed zderzeniem $m\mathrm{v}^2/2$ jest równa sumie: energii kinetycznej kulki po zderzeniu $m(\mathrm{v}')^2/2$ i energii kinetycznej ruchu obrotowego klocka po zderzeniu $I\omega_0^2/2$

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m(\mathrm{v}')^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2.$$

Podstawiamy tutaj wyznaczoną wcześniej prędkość $\mathrm{v}'$ i po przekształceniach otrzymujemy równanie na $\omega_0$

$$\left(\frac{I^2}{ml^2} + I\right)\omega_0^2 - \frac{2I\mathrm{v}}{l}\omega_0 = 0.$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania, z których jedno, niefizyczne ($\omega_0 = 0$), należy odrzucić. Ostatecznie

$$\omega_0 = \frac{2\mathrm{v}}{\frac{I}{ml}+l} = \frac{2\mathrm{v}}{\frac{5\mu l}{3m}+l}.$$

b)Oznaczmy przez $\alpha$ kąt jaki tworzy w dowolnej chwili przekątna bocznej ściany prostopadłościanu z podłożem. W chwili początkowej $t$=0 mamy dla kąta $\alpha_0 = \alpha(0)$ zależność (rys.)

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2},$$

a prędkość kątowa wynosi wtedy $\omega(0) = \omega_0$.

Ruch klocka po zderzeniu to ruch obrotowy, który można opisać drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego

$$I\varepsilon = M,$$

gdzie $\varepsilon$ jest przyspieszeniem kątowym zdefiniowanym następująco:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}.$$

$M$ jest wypadkowym momentem sił zewnętrznych działających na klocek. W naszym zadaniu $M$ jest momentem siły ciężkości $\mu g$ przyłożonej do środka masy i wynosi on

$$M = \mu g r,$$

gdzie $r = x\cos\alpha$ jest ramieniem działania siły względem osi $KK$ (rys.).

Zatem równanie ruchu ma postać

$$I\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \mu g l\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\alpha = 0$$

c) Energia wystarczająca do postawienia klocka jest różnicą między energią potencjalną takiego ustawienia klocka, gdy przekątna ściany bocznej jest prostopadła do podłoża $\mu g x$ (środek ciężkości przyjmuje najwyższe położenie) i energią potencjalną klocka w położeniu początkowym $\mu g l/2$ (najniższe położenie środka ciężkości)

$$\mu g x - \frac{1}{2}\mu g l = \mu g l\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Właśnie taka energia musi zostać przekazana klockowi przez kulkę. Kulka przekazuje energię

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{2v^2 I}{\left(\frac{I}{ml}+l\right)^2}.$$

Zatem możemy napisać równanie na prędkość minimalną $v_{min}$

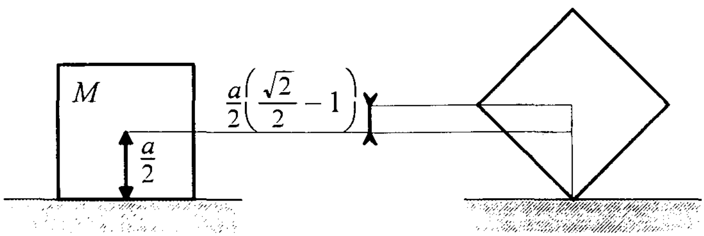
$$\frac{2I\, v_{min}^2}{\left(\frac{I}{ml}+l\right)^2} = \mu g l\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),$$

z którego otrzymujemy

$$v_{min} = \left(\frac{I}{ml}+l\right)\sqrt{\frac{\mu g l}{4I}\left(\sqrt{5}-1\right)}\,.$$

**76. Jaką minimalną pracę trzeba wykonać, aby blok o masie *M*, mający kształt sześcianu o długości krawędzi *a*, przewrócić na drugi bok?**

Minimalną pracę przy przewracaniu bloku wykonamy wtedy, gdy blok w momencie, kiedy stoi (tak jak na rysunku) na jednej ze swoich krawędzi ma prędkość równą zeru, czyli inaczej mówiąc, energia kinetyczna bloku w momencie przechyłu równa jest zeru.

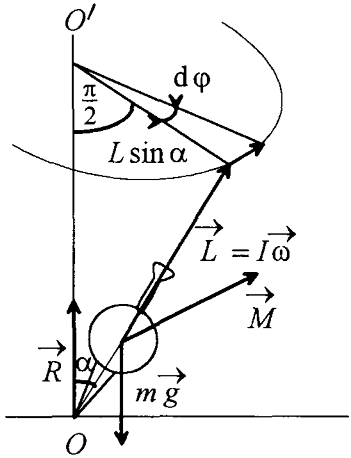



Ponieważ pole grawitacyjne jest polem zachowawczym, w związku z tym praca jaką wykonujemy przy stawianiu bloku na krawędzi zostanie zużyta w całości na zwiększenie jego energii potencjalnej w tym polu. Oczywiście blok nasz składa się z wielu cząstek i nad każdą z nich jest wykonywana praca. Jeżeli jednak, zgodnie z założeniem, nie nadaliśmy mu w momencie przechyłu dodatkowej energii kinetycznej, to przy obliczaniu różnicy energii potencjalnej postępujemy tak jak gdyby cała masa bloku była skupiona w jego środku masy. Czyli zgodnie z rysunkiem mamy

$$W = E_{p2} - E_{p1} = Mg\frac{a\sqrt{2}}{2} - Mg\frac{a}{2} = \frac{Mga}{2}\left(\sqrt{2}-1\right),$$

gdzie $E_{p1}$, $E_{p2}$ oznaczają odpowiednio energię potencjalną środka masy w położeniu początkowym i końcowym, a $g$ jest przyspieszeniem ziemskim. Oczywiście gdy blok się przewróci to zyskana wcześniej energia potencjalna zamieni się na energię kinetyczną ruchu obrotowego względem jego krawędzi, a ta z kolei przy uderzeniu bloku o ziemię na ciepło.

**77. Wokół osi tworzącej z pionem kąt 30° obraca się bąk z prędkością kątową $\omega = 60\,s^{-1}$. Jego masa $m$ = 0.5 kg, moment bezwładności $I = 5 \cdot 10^{-4}\,kg\,m^2$. Środek masy jest odległy od punktu podparcia o 4 cm.**
**Bąk obraca się w kierunku ruchu wskazówek zegara. Jaki jest kierunek i wielkość prędkości kątowej precesji bąka?**




W ogólnym przypadku zagadnienie ruchu precesyjnego bąka jest dość skomplikowane. My założymy jednak,że prędkość kątowa $\omega$ jest dużo większa od prędkości kątowej precesji $\omega_P$, co znacznie upraszcza rozwiązanie. Przyjmijmy, że oś bąka może obracać się swobodnie wokół punktu podparcia oznaczonego na rysunku przez $O$. Na bąk działa para sił, z których jedna to siła ciężkości $mg$, gdzie $g$ jest przyspieszeniem ziemskim, przyłożona w środku masy bąka i skierowana pionowo w dół, natomiast druga to siła reakcji podłoża $R$, równa co do wartości sile ciężkości i skierowana pionowo w górę. Moment tej pary sił równy jest co do wartości

$$M = mgl\sin\alpha$$

i skierowany jest prostopadle do pionowej płaszczyzny przechodzącej przez oś bąka i oś żyroskopu $OO'$. Pod wpływem działania momentu siły $\vec{M}$, moment pędu $\vec{L}$ przyrasta w czasie $dt$ o $d\vec{L} = \vec{M}dt$, zgodnie z równaniem ruchu obrotowego bryły sztywnej. Zakładamy przy tym, że moment pędu $\vec{L} = I\vec{\omega}$, zgodnie z przyjętym na wstępie założeniem, że $\omega >> \omega_P$. Bez tego założenia związek pomiędzy wektorem momentu pędu a całkowitym wektorem prędkości kątowej, która jest sumą prędkości kątowej precesji i prędkości kątowej obrotu bąka wokół osi symetrii, czyli prędkości $\vec{\omega} + \vec{\omega}_p$ jest dany zależnością, w której trzeba uwzględniać wszystkie składowe tensora bezwładności. W takim przypadku kierunki prędkości kątowej i momentu pędu nie pokrywają się. W naszym przypadku jednak, wektor $\vec{L}$ ma kierunek osi obrotu bąka wokół jego osi symetrii. Jak pokazuje rysunek wektor $d\vec{L}$ jest prostopadły do $\vec{L}$, co w konsekwencji daje obrót wektora momentu pędu, a tym samym osi symetrii bąka, po pobocznicy stożka bez przyrostu jego długości. Pionowa płaszczyzna przechodząca przez oś żyroskopu obraca się o kąt $d\varphi$ przy zmianie wektora momentu pędu o $d\vec{L}$. O taki sam kąt obraca się w płaszczyźnie poziomej wektor $\vec{M}$, co daje ten efekt, że po czasie $dt$ wzajemna orientacja wektorów $\vec{M}$ i $\vec{L}$ jest taka jak na początku. W konsekwencji oś bąka obraca się wokół pionu po pobocznicy stożka w sposób ciągły (kąt $\alpha$ = const). Prędkość kątową precesji obliczymy posługując się rysunkiem. Zauważmy, że

$$d\varphi = \frac{\left|d\vec{L}\right|}{L\sin\alpha}.$$

Ponieważ

$$\left|d\vec{L}\right| = M\,dt = mgl\sin\alpha\,dt,$$

a wartość momentu pędu $L = I\omega$ mamy

$$d\varphi = \frac{mgl\sin\alpha\,dt}{I\omega\sin\alpha}.$$

Prędkość kątowa precesji $\omega_P$ równa jest $\omega_P = \frac{d\varphi}{dt}$, co po podstawieniu wyrażenia na $d\varphi$ daje

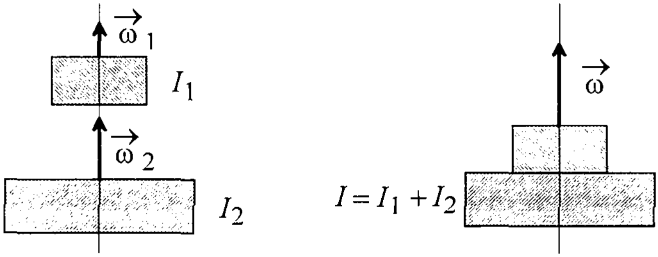
$$\omega_P = \frac{mgl}{I\omega}.$$

Jak widać $\omega_P$ nie zależy (oczywiście w ramach naszego przybliżenia) od kąta $\alpha$. Po podstawieniu do wzoru danych i przyjęciu $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ wartość $\omega_P = 2\,\mathrm{s^{-1}}$. Zwróćmy na koniec uwagę na to, że spełnione jest nasze wstępne założenie, tzn. $\omega >> \omega_P$.

## ZASADA ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU

**78. Dwie poziome tarcze wirują wokół pionowej osi przechodzącej przez ich środek. Momenty bezwładności tarcz wynoszą $I_1, I_2$, a ich prędkości kątowe $\omega_1$ i $\omega_2$. Po upadku tarczy górnej na dolną obie tarcze (w wyniku działania sił tarcia) obracają się dalej jak jedno ciało. Wyznaczyć:**
**a) prędkość kątową tarcz po złączeniu;**
**b) pracę wykonaną przez siły tarcia.**

Poniższy rysunek przedstawia schematycznie obie tarcze przed i po upadku tarczy górnej na dolną.




Wyrównanie się prędkości kątowych obu tarcz następuje pod wpływem sił tarcia, dlatego też nie możemy skorzystać z zasady zachowania energii kinetycznej ruchu obrotowego, gdyż pewna jej część zamienia się na energię cieplną. Możemy natomiast skorzystać z zasady zachowania momentu pędu, ponieważ na układ nie działa żaden zewnętrzny moment sił. Ponieważ obrót następuje wokół osi symetrii tarcz, momenty pędu mają kierunek prędkości kątowych, dlatego możemy pominąć oznaczenia wektorowe. Moment pędu układu $L_1$ przed połączeniem się tarcz wynosi

$$L_1 = I_1\omega_1 + I_2\omega_2,$$

natomiast po połączeniu moment pędu $L_2$ wynosi

$$L_2 = (I_1 + I_2)\omega.$$

W powyższym wzorze $\omega$ jest prędkością kątową po połączeniu się tarcz. Z zasady zachowania momentu pędu $L_1 = L_2$, toteż porównując oba powyższe wzory otrzymujemy wyrażenie na prędkość kątową $\omega$ w postaci:

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}.$$

Pracę, która została wykonana przez siły tarcia podczas wyrównywania się prędkości tarcz (praca ta wydzieliła się w postaci ciepła powodując ogrzanie się tarcz) obliczamy jako różnicę energii kinetycznych układu:

początkowej $\quad E_{k1} = \dfrac{I_1\omega_1^2}{2} + \dfrac{I_2\omega_2^2}{2}$

i końcowej $\quad E_k = \dfrac{\left(I_1 + I_2\right)\omega^2}{2},$

gdzie za $\omega$ podstawiamy otrzymane wcześniej wyrażenie. Po podstawieniu i prostych przekształceniach otrzymujemy wyrażenie na szukaną pracę $W$ jako:

$$W = E_{k1} - E_{k2} = \frac{I_1 I_2\left(\omega_1 - \omega_2\right)^2}{2\left(I_1 + I_2\right)}.$$

Warto zauważyć, że jeżeli w powyższym wzorze wstawimy $\omega_1 = \omega_2$, to praca $W$=0.

**79. Człowiek stoi na osi obrotowego stolika trzymając pionowo nad głową obracające się wokół pionowej osi (za którą człowiek trzyma oburącz) z prędkością kątową $\omega_0$ koło rowerowe o momencie bezwładności $J_0$. Wyznaczyć prędkość kątową $\omega_1$ ruchu obrotowego stolika po:**

**a) obróceniu przez człowieka koła o kąt 180°,**

**b) zahamowaniu koła przez człowieka, jeżeli moment bezwładności człowieka i stolika wynosi J.**

Moment pędu układu człowiek + koło rowerowe wynosi na początku $J_0\omega_0$, gdyż tylko koło rowerowe o momencie bezwładności $J_0$ obraca się z prędkością kątową $\omega_0$.

$$L_{całk} = J_0\omega_0$$

a) Po obróceniu koła o 180° jego moment pędu zmieni się na przeciwny, czego skutkiem będzie wprawienie w ruch obrotowy człowieka ze stolikiem. Jeśli prędkość obrotowa człowieka ze stolikiem będzie $\omega_1$, to całkowity moment pędu teraz wyniesie:

$$L_{całk} = J\omega_1 - J_0\omega_0$$

Skorzystajmy z zasady zachowania momentu pędu dla chwili początkowej oraz dla chwili po obrocie koła rowerowego: $\quad J_0\omega_0 = J\omega_1 - J_0\omega_0$

i wyznaczamy prędkość kątową $\omega_1$ : $\quad \omega_1 = 2\dfrac{J_0\omega_0}{J}.$

b) Po zahamowaniu koła rowerowego całkowity moment pędu układu będzie równy momentowi pędu stolika z człowiekiem.

$$L_{całk} = J\omega_2$$

Stosujemy zasadę zachowania momentu pędu dla chwili początkowej i dla chwili opisanej w punkcie b) otrzymując:

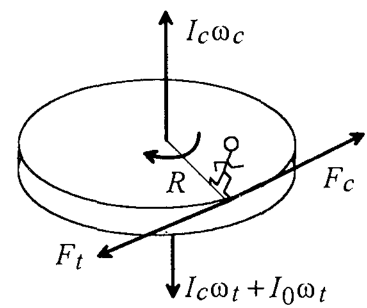
$$J_0\omega_0 = J\omega_2$$

a więc

$$\omega_2 = \frac{J_0\omega_0}{J}.$$

**80. Na brzegu poziomo ustawionej tarczy o momencie bezwładności *I* (względem osi pionowej przechodzącej przez środek tarczy) i promieniu *R* znajduje się człowiek o masie *m*. Obliczyć prędkość kątową tarczy $\omega$, gdy człowiek zacznie się poruszać wzdłuż jej brzegu z prędkością v względem niej.**

Zadanie to można rozwiązać stosując zasadę zachowania momentu pędu układu człowiek-tarcza. Na początku człowiek i tarcza są w spoczynku więc moment pędu układu jest równy zeru. Podczas ruchu po tarczy człowiek działa na tarczę za pośrednictwem stopy siłą $F_t$ w kierunku przeciwnym do swojego ruchu. Zgodnie z III zasadą dynamiki tarcza działa na człowieka siłą $F_c$ taką samą co do wartości i przeciwnie skierowaną (rys.).
Obie siły $F_t$ i $F_c$ są siłami wewnętrznymi działającymi w układzie człowiek-tarcza. Jeżeli na układ nie działają żadne momenty sił zewnętrznych, to moment pędu układu pozostaje stały co do wartości, kierunku i zwrotu.




Momenty sił wewnętrznych działające między ciałami tworzącymi układ mogą zmienić momenty pędów poszczególnych części układu, ale suma tych zmian jest zawsze równa zeru.
Momenty sił wewnętrznych nie mogą zmienić momentu pędu całego układu.
Człowiek porusza się z prędkością kątową $\omega_c = v/R$ względem tarczy i jednocześnie jest unoszony przez tarczę z prędkością kątową $\omega_t$ w kierunku przeciwnym. Zatem jego całkowity moment pędu wynosi

$$L_c = I_c\omega_t - I_c\omega_c$$

gdzie

$$I_c = mR^2$$

jest momentem bezwładności człowieka o masie *m* względem osi obrotu tarczy. Mamy więc

$$L_c = mR^2\left(\omega_t - \frac{v}{R}\right).$$

Moment pędu tarczy wynosi

$$L_t = I_0\omega_t.$$

Z zasady zachowania momentu pędu mamy

$$L_c + L_t = 0,$$

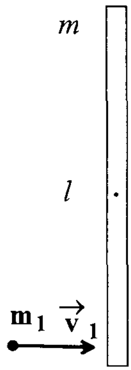
skąd otrzymujemy zależność

$$I_c\omega_t + I_0\omega_t = I_c\omega_c,$$

którą zilustrowano wektorami na rysunku.
Ostatecznie otrzymujemy

$$\omega_f = \frac{mRv}{I_0+mR^2}.$$

**81. Listwa drewniana o długości $l$ i masie $m$ może się obracać dookoła osi prostopadłej do listwy, przechodzącej przez jej środek. W koniec listwy trafia pocisk o masie $m_1$ lecący z prędkością $v_1$ w kierunku prostopadłym do osi i do listwy. Znaleźć prędkość kątową, z jaką listwa zacznie się obracać, gdy utkwi w niej pocisk.**




Skorzystajmy z zasady zachowania momentu pędu. Moment pędu układu pocisk-listwa przed uderzeniem pocisku w listwę wynosi $m_1v_1l/2$, gdzie $m_1v_1$ jest pędem pocisku a $l/2$ jego odległością od osi obrotu listwy przed trafieniem w nią.
Gdy pocisk utkwi w listwie, to całkowity moment pędu układu będzie sumą momentu pędu obracającej się listwy $I_0\omega$ oraz momentu pędu tkwiącego w niej pocisku $I_1\omega$ względem osi obrotu listwy. Wielkość $\omega$ jest tutaj prędkością kątową listwy, $I_0 = ml^2/12$ jest momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy a $I_1 = m_1l^2/4$ momentem bezwładności tkwiącego w niej pocisku względem tej samej osi.
Moment pędu układu przed zderzeniem pocisku z listwą jest równy momentowi pędu układu po zderzeniu. Możemy napisać

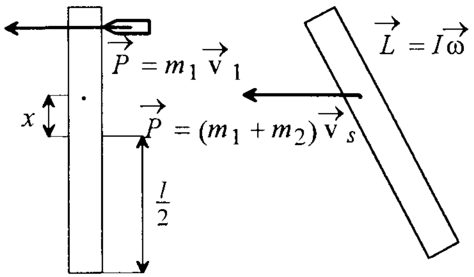
$$\frac{m_1v_1l}{2} = \left(\frac{1}{12}ml^2 + m_1\frac{l^2}{4}\right)\omega,$$

skąd prędkość kątowa $\omega$ z jaką listwa zacznie się obracać wynosi

$$\omega = \frac{2m_1v_1}{l\left(\frac{1}{3}m+m_1\right)}.$$

**82. Na poziomym doskonale gładkim stole leży listwa o długości $l$ i masie $m$. W koniec listwy trafia pocisk o masie $m_1$ lecący z prędkością $v_1$ w kierunku prostopadłym do osi listwy. Znaleźć prędkość kątową z jaką listwa zacznie się obracać gdy utkwi w niej pocisk, oraz prędkość środka masy listwy.**

Ponieważ z założenia listwa leży na doskonale gładkim stole, w płaszczyźnie stołu na układ nie działa żadna siła zewnętrzna powodująca zmianę pędu, ani żaden zewnętrzny moment sił powodujący zmianę momentu pędu układu listwa-pocisk. Siła ciężkości równoważona siłą reakcji podłoża działa w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ruchu układu nie wpływając na przebieg zdarzenia. Dlatego przy rozwiązywaniu zadania korzystamy z zasady zachowania pędu i zasady zachowania momentu pędu układu pocisk-listwa. Przed zderzeniem pęd układu równy jest pędowi pocisku $p_1 = m_1v_1$, gdyż listwa spoczywa. Także moment pędu $L_1$ względem dowolnie wybranego punktu równy jest momentowi pędu pocisku. Wyznaczmy ten moment pędu względem środka masy układu pocisk-listwa. Położenie środka masy układu możemy zadać przy pomocy odległości $x$ od środka pręta jak na rysunku.




$$x = \frac{\frac{1}{2}m_1 + 0m}{m_1 + m} = \frac{l}{2\left(1 + \frac{m}{m1}\right)}.$$

Zero w powyższym wzorze bierze się stąd, że środek masy pręta znajduje się w punkcie, względem którego liczymy środek masy układu. Wartość momentu pędu układu przed zderzeniem zgodnie z definicją wynosi

$$L_1 = \left(\frac{l}{2} - x\right) m_1 v_1.$$

Po zderzeniu kuli z listwą pęd układu równy jest iloczynowi masy układu i prędkości jego środka masy:

$$p_2 = (m_1 + m)v_s,$$

natomiast wartość momentu pędu związana z ruchem obrotowym pręta z kulą, która w nim utkwiła, wokół środka masy wynosi $L_2 = I\omega$, gdzie $\omega$ jest prędkością kątową, a $I$ jest momentem bezwładności całego układu liczonym względem osi przechodzącej pionowo przez środek masy. Możemy napisać:

$$I = I_{pr} + I_{poc}.$$

$I_{pr}$ oznacza moment bezwładności pręta względem środka masy układu. Ponieważ środek masy układu przesunięty jest względem środka masy pręta o $x$, toteż korzystając z twierdzenia Steinera możemy zapisać:

$$I_{pr} = I_{0pr} + mx^2,$$

gdzie $I_{0pr} = \frac{1}{12}ml^2$ jest momentem bezwładności pręta względem jego środka masy. Z kolei moment bezwładności pocisku $I_{poc}$, który liczymy tak jak moment bezwładności punktu materialnego wynosi

$$I_{poc} = m_1\left(\frac{l}{2} - x\right)^2.$$

Porównując wartości pędów przed i po zderzeniu ($p_1 = p_2$) mamy:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_s.$$

Stąd obliczamy wartość prędkości środka masy listwy, z utkwionym w niej pociskiem:

$$v_s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Z kolei porównując momenty pędu przed i po zderzeniu ($L_1 = L_2$), otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{2} - x\right) m_1 v_1 = \left[ m\left(\frac{l^2}{12} + x^2\right)^2 \right]\omega.$$

Stąd wyznaczamy wartość w prędkości kątowej, z jaką listwa zacznie się obracać gdy utkwi w niej pocisk:

$$\omega = \frac{6av_1}{l} \frac{1+a}{1+5a+4a^2},$$

gdzie przez $a$ oznaczyliśmy stosunek mas $\frac{m_1}{m_2}$.

# DRGANIA HARMONICZNE

## DRGANIA SWOBODNE

**83. Na sprężynie jest zawieszona szalka wagi z odważnikami. Okres drgań pionowych jest wówczas równy $T_1$. Po obciążeniu szalki dodatkowymi odważnikami okres drgań pionowych wynosi $T_2$. O ile wydłużyła się sprężyna pod wpływem dodatkowego obciążenia?**

Załóżmy, że początkowa masa odważników wynosiła $m_1$, a końcowa $m_2$. Okresy drgań $T_1$ i $T_2$ są związane z tymi masami, zgodnie z ogólnym wzorem na okres drgań harmonicznych sprężyny, następująco:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}},$$

gdzie $k$ jest współczynnikiem sprężystości sprężyny.
Z powyższych wzorów możemy obliczyć masę dodatkowych odważników:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{\left(T_2^2 - T_1^2\right)k}{4\pi^2}.$$

Jeżeli powyższą masę $\Delta m$ zawiesimy tak, że nie spowodujemy drgań szalki z odważnikami, to sprężyna ulegnie wydłużeniu o pewną długość $l$. Wartość $l$ będzie równa przesunięciu położenia równowagi naszego oscylatora harmonicznego. Wartość $l$ obliczymy korzystając z prawa Hooke'a,

$$\Delta m g = kl,$$

gdzie $g$ jest przyspieszeniem ziemskim. Podstawiając otrzymane wcześniej wyrażenie na $\Delta m$ otrzymujemy wartość wydłużenia $l$ równą

$$l = \frac{T_2^2 - T_1^2}{4\pi^2} g.$$

**84. Na sprężynie wisi szalka o masie $m_1$, pod wpływem której sprężyna rozciąga się o odcinek $d$. Na szalkę z wysokości $h$ spada ciężarek o masie $m_2$, zderzając się z nią niesprężyście. Znaleźć okres drgań $T$, amplitudę $A$ oraz maksymalną wysokość $H$ (od początkowego położenia równowagi), jaką osiągną masy. Opory ruchu zaniedbać.**

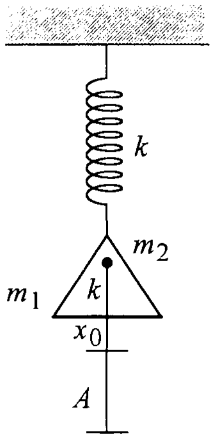
W początkowym stanie równowagi siła sprężystości równa $F_0 = -kd$, gdzie znak minus oznacza, że jest ona przeciwnie skierowana do wychylenia $d$, jest równoważona przez ciężar szalki równy $m_1 g$ czyli

$$-kd + m_1 g = 0,$$

skąd otrzymujemy stałą sprężystości sprężyny $k$ równą

$$k = \frac{m_1 g}{d}.$$

Ciężarek o masie $m_2$ spadając z wysokości $h$ uzyskuje prędkość końcową v, którą wyznaczymy przyrównując energię potencjalną ciężarka na początku ruchu $m_2 gh$ do energii kinetycznej w momencie uderzenia ciężarka o szalkę równej $m_2 v^2/2$ czyli




$$m_2gh=\frac{m_2v^2}{2},$$

skąd

$$v=\sqrt{2gh}.$$

Ciężarek w momencie zderzenia z szalką ma pęd $m_2$v, który zgodnie z zasadą zachowania pędu układu ciężarek-szalka po zderzeniu jest równy $(m_1+m_2)v'$ czyli

$$m_2v=(m_1+m_2)v',$$

skąd

$$v'=\frac{m_2}{m_1+m_2}v=\frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh}$$

jest prędkością układu ciężarek-szalka po zderzeniu. Układ ten będzie wykonywać drgania harmoniczne względem nowego położenia równowagi, które wyznaczymy podobnie jak wcześniej współczynnik $k$ z równości

$$m_2g=kx_0,$$

skąd

$$x_0=\frac{m_2g}{k}=\frac{m_2d}{m_1}.$$

Wielkość $x_0$ mówi nam o ile niżej znajduje się nowe położenie równowagi od starego. W wyniku zderzenia szalka z ciężarkiem posiadają energię kinetyczną równą $(m_1+m_2)(v')^2/2$. W najniższym położeniu natomiast układ będzie posiadał energię sprężystości równą $kA^2/2$, gdzie $A$ jest amplitudą drgań układu względem nowego położenia równowagi. Zgodnie z zasadą zachowania energii możemy napisać równość

$$\frac{(m_1+m_2)(v')^2}{2}+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}kA^2.$$

Podstawiając obliczone wartości v', $x_0$ i $k$ otrzymujemy

$$A=\frac{m_2d}{m_1}\sqrt{1+\frac{2hm_1}{d(m_1+m_2)}}.$$

Maksymalna wysokość $H$ (od początkowego położenia równowagi) jaką osiągną masy jest

równa $$H=A-x_0=\frac{m_2d}{m_1}\left[\sqrt{1+\frac{2hm_1}{d(m_1+m_2)}}-1\right]$$

Okres $T$ drgań wynosi

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{d}{g}\frac{m_1+m_2}{m_1}}.$$

**85. Pozioma platforma wykonuje drgania o amplitudzie $A$. Jaka może być maksymalna częstość drgań platformy, by leżące na niej ciało nie oderwało się?**

Ciało spoczywające na platformie oderwie się od niej wtenczas, gdy platforma będzie się poruszać na dół z większym przyspieszeniem niż wartość przyspieszenia ziemskiego $g$. Tak więc policzmy przyspieszenie z jakim porusza się drgająca platforma. Jeśli zapiszemy drgania w następującej postaci:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi),$$

to przyspieszenie wyniesie:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi).$$

Stąd maksymalne przyspieszenie drgającego ciała wynosi:

$$a_{max} = A\omega^2.$$

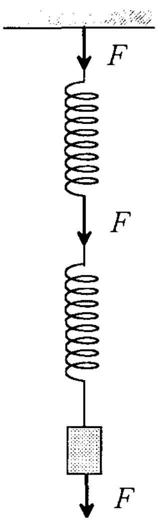
Maksymalna dopuszczalna częstość drgań powinna więc spełniać zależność:

$$A\omega_{max}^2 = g$$

i stąd

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{A}}.$$

**86. Jak zmieni się okres drgań pionowych ciężaru wiszącego na dwóch jednakowych sprężynach, gdy połączenie szeregowe sprężyn zostanie zastąpione połączeniem równoległym?**




Załóżmy, że połączyliśmy dwie sprężyny o współczynnikach sprężystości równych $k$ szeregowo (patrz rysunek poniżej). Wtenczas można dla każdej ze sprężyn zapisać, że:

$$F = -kx,$$

gdzie $F$ jest siłą sprężystości sprężyny równą co do wartości sile rozciągającej sprężynę. Pisząc analogiczne równanie dla układu dwóch sprężyn należy zauważyć, że choć nadal siła rozciągająca sprężyny wynosi $F$, to wychylenie ciężaru jest równe $2x$, czyli

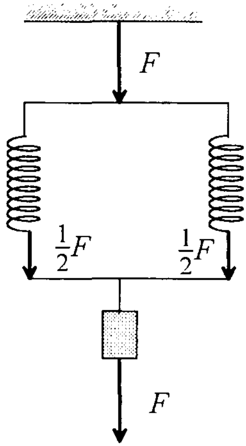
$$F = -k_z 2x,$$

gdzie $k_z$ jest współczynnikiem sprężystości sprężyny zastępczej dla układu dwóch sprężyn połączonych szeregowo. Porównując dwa wyprowadzone wyżej wzory mamy:

$$k_z = \frac{k}{2}$$

i okres drgań odważnika o masie $m$ wyniesie w tym przypadku:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_z}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$




Rozważmy teraz przypadek równoległego połączenia sprężyn. W tym przypadku każda ze sprężyn rozciąga się pod działaniem siły $F/2$, czyli:

$$\frac{F}{2} = -kx$$

Cały układ ma wychylenie $x$, takie samo jak każda ze sprężyn, a więc:

$$F = -k_z x,$$

ale

$$F = \frac{F}{2} + \frac{F}{2} = -2kx$$

i z porównania dwóch ostatnich równań mamy:

$$k_z = 2k.$$

Wyliczmy jeszcze dla tego przypadku okres drgań

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_z}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

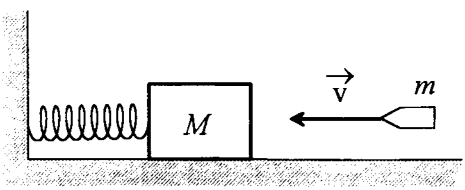
Porównując $T_1$ i $T_2$ widzimy, że

$$T_2 = \frac{T_1}{2}$$

czyli po zmianie łączenia sprężyn z szeregowego na równoległe okres drgań zawieszonej masy zmalał dwukrotnie.

**87. Na poziomym doskonale gładkim stole leży, przymocowane sprężyną do ściany ciało o masie $M$. W ciało to trafia pocisk o masie $m$ lecący poziomo z prędkością v i zostaje w nim. Po zderzeniu ciało wraz z pociskiem wykonuje drgania harmoniczne z amplitudą $A$. Wyznaczyć częstość tych drgań.**

Ruch pocisku i ruch ciała po uderzeniu pocisku możemy traktować jako ruch jednowymiarowy zachodzący w kierunku jednej z osi kartezjańskiego układu współrzędnych. Pocisk przed zderzeniem ma prędkość v, a w związku z tym pęd $m$v. Jest to równocześnie pęd całego układu pocisk-leżące ciało przed zderzeniem.




W czasie zderzenia pocisku z ciałem pęd układu zostaje zachowany zgodnie z równaniem

$$m\mathrm{v} = (M + m)\mathrm{v}_0$$

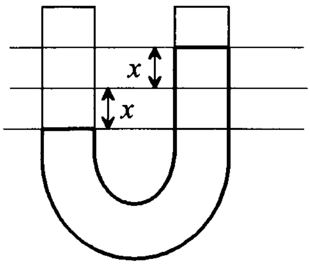
gdzie $\mathrm{v}_0$ jest prędkością ciała z tkwiącym weń pociskiem bezpośrednio po zderzeniu. Zwróćmy uwagę, że nie korzystamy z zasady zachowania energii kinetycznej układu, gdyż część jej zamienia się na ciepło. Bezpośredno po zderzeniu ciało wraz z tkwiącym weń pociskiem ma energię kinetyczną równą $(m + M)\mathrm{v}_0^2/2$, która będzie równa energii całkowitej powstałego oscylatora. Wynika to z tego, że w momencie zderzenia sprężyna nie jest ani ściśnięta, ani rozciągnięta, czyli jej energia potencjalna jest równa zeru. Możemy więc napisać:

$$\frac{(m+M)\mathrm{v}_0^2}{2} = \frac{(m+M)\omega^2 A^2}{2}$$

gdzie $\omega$ w wyrażeniu na energię całkowitą oscylatora jest szukaną częstością (kołową) drgań. Z powyższych równań otrzymujemy:

$$\omega = \frac{\mathrm{v}_0}{A} = \frac{m\mathrm{v}}{(m+M)A}$$

**88. W rurce o przekroju $S$ zgiętej w kształcie litery "U" znajduje się słup wody o długości $l$, przy czym w chwili początkowej poziom wody w jednym ramieniu rurki jest wyższy niż w drugim. Jaki będzie okres drgań słupa wody (pominąć siły lepkości)?**




Załóżmy, że gęstość wody wynosi $\rho$. Masa słupa wody o długości $l$ i przekroju $S$ wynosi zatem $m = \rho l S$. Oznaczmy przez $x$ dowolne wychylenie poziomu wody z położenia równowagi w jednym z ramion rurki (rys.). Niezrównoważony słup wody ma zatem wysokość $2x$, gdyż jeśli w jednym ramieniu poziom wody jest o $x$ wyżej od położenia równowagi , to w drugim ramieniu jest o $x$ poniżej położenia równowagi.
Ciężar niezrównoważonego słupa wody o wysokości $2x$ i przekroju $S$ jest funkcją $x$ i wynosi

$$F(x) = -2xS\rho g,$$

gdzie znak minus oznacza, że siła $F$ jest skierowana przeciwnie do wychylenia $x$, czyli w dół. Widać, że siła $F$ jest do tego wychylenia proporcjonalna. Zależność $F$ od $x$ ma postać

$$F(x) = -kx,$$

gdzie $k = 2S\rho g$.
Napiszmy równanie ruchu (II zasadę dynamiki) dla słupa wody o masie $m$. Wyznaczona powyżej siła $F$ powoduje nadanie masie $m$ wody przyspieszenie $a$

$$ma = F,$$

gdzie $a$ jest drugą pochodną wychylenia $x$ po czasie $t$. Mamy zatem

$$\rho l S \frac{d^2x}{dt^2} = -2S\rho g x,$$

czyli

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l}x = 0.$$

Równanie to ma postać równania ruchu oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

gdzie $\omega$ jest częstością drgań. Wynosi ona zatem

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Okres drgań $T$ równy jest więc

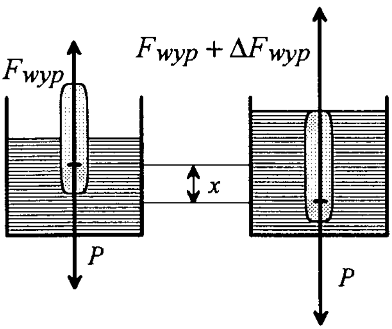
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

**89. Areometr o ciężarze $P$=2N pływa w cieczy. Gdy zanurzy się go w cieczy i puści, zacznie wykonywać drgania z okresem $T$=3.4 s. Przyjmując, że drgania są nietłumione, znaleźć gęstość cieczy $\rho$, w której pływa areometr. Średnica pionowej walcowej rurki areometru $d$=0.01m.**

Dodatkowe zanurzenie areometru spowoduje wzrost siły wyporu o $\Delta F_{wyp}$ :

$$\Delta F_{wyp} = \Delta V \rho g = xS\rho g,$$

gdzie $\Delta V = xS$ jest przyrostem objętości zanurzonej części areometru. W zadaniu podano średnicę $d$ rurki areometru, a więc jej pole przekroju poprzecznego będzie wynosić $s = \pi d^2/4$. Dodatkowa siła będzie powodować ruch w górę areometru, przy czym wartość tej siły będzie się zmieniać w zależności od wartości $x$ - dodatkowego zanurzenia areometru.




Uwzględniając to, że jeśli oś $OX$ będzie skierowana na dół, to współrzędna wektora $\Delta \vec{F}_{wyp}$ na tej osi będzie ujemna, otrzymamy:

$$\Delta F_{wyp} = -\frac{\pi}{4} d^2 \rho g x.$$

Powyższa zależność jest prawdziwa i wówczas, gdy $x < 0$, co oznacza wynurzenie areometru względem stanu równowagi i zmniejszenie wartości $F_{wyp}$. Wyprowadzona zależność ma kształt zależności opisującej drgania harmoniczne

$$F = -kx$$

przy czym współczynnik $k$ jest określony następująco:

$$k = -\frac{\pi}{4} d^2 \rho g.$$

Okres drgań areometru otrzymamy stosując zależność na okres drgań harmonicznych i podstawiając aktualną wartość współczynnika $k$ oraz uwzględniając, że masa areometru $m = P/g$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4P}{\pi d^2 \rho g^2}}.$$

Z powyższej zależności należy wyznaczyć gęstość cieczy $\rho$ : $\rho = \frac{16\pi P}{T^2 d^2 g^2}$,

a po podstawieniu danych liczbowych: $\rho = 950\,\mathrm{kg/m^3}$.

## SKŁADANIE DRGAŃ

**90. Punkt bierze udział w dwóch drganiach równoległych o jednakowych częstościach i różnicy faz wynoszącej $\Delta\varphi = 2\pi/3$. Amplitudy tych drgań wynoszą $A_1$ =3cm i $A_2$ =4cm. Znaleźć amplitudę drgania wypadkowego.**

Załóżmy, że oba drgania zachodzą w kierunku osi $OX$ pewnego układu współrzędnych. Wówczas zależność wychylenia od czasu dla tych drgań ma postać:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

gdzie $t$ jest czasem, $\omega$ wspólną częstością drgań, a $\varphi_1$ i $\varphi_2$ fazami początkowymi. Drganie wypadkowe jest sumą algebraiczną drgań składowych. Z kursu fizyki wiadomo, że ma ono również postać drgania harmonicznego o tej samej częstości $\omega$ i amplitudzie $A$ danej wzorem:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)},$$

gdzie $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, jest różnicą faz początkowych drgań. Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy, że wartość amplitudy drgania wypadkowego wynosi:

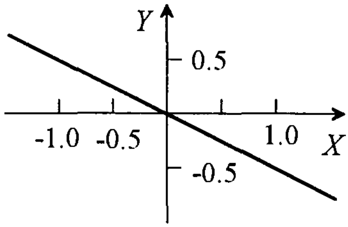
$$A = \sqrt{9 + 16 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\frac{2\pi}{3}}\ \mathrm{cm} = \sqrt{13}\ \mathrm{cm}.$$

**91. Punkt porusza się pod wpływem dwóch prostopadłych drgań składowych. Obliczyć trajektorie w następujących przypadkach:**
**a)** $x = 2\sin(\pi t)$, $\quad y = \cos\pi(t + 0.5)$,
**b)** $x = 2\cos(\omega t)$, $\quad y = 3\sin(\omega t)$.

Zauważmy że zarówno w przypadku a) i b) drgania składowe mają tę samą częstość. Dlatego też trajektorie poruszających się cząstek będą pewnymi szczególnymi przypadkami elipsy.

a) Równanie ruchu cząstki w kierunku $OY$ ma fazę początkową $0.5\pi$. W celu eliminacji fazy początkowej rozpiszmy je zgodnie ze wzorem na cosinus sumy dwóch kątów

$$y = \cos(\pi t + 0.5\pi) =$$
$$= \cos\pi t \cdot \cos 0.5\pi - \sin\pi t \cdot \sin 0.5\pi = -\sin\pi t.$$




Ponieważ teraz oba drgania prostopadłe opisane są funkcją sinus, dlatego równanie toru (trajektorię) otrzymamy najprościej dzieląc oba równania przez siebie. Otrzymujemy:

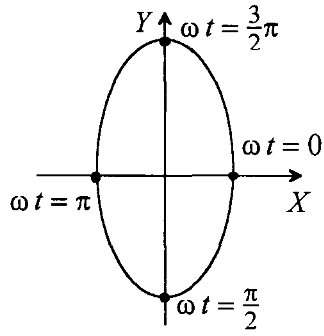
$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}, \text{ lub } y = -\frac{x}{2}.$$

Ze względu na funkcję sinus w równaniach ruchu $x \in [-1, 1]$, a $y \in [-0.5; 0.5]$, torem drgającego punktu jest odcinek jak na rysunku.

b) W równaniach ruchu dzieląc wychylenia z położenia równowagi przez amplitudy tych drgań, a następnie podnosząc do kwadratu i dodając stronami otrzymujemy:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1,$$

czyli równanie elipsy, w której półosie mają kierunek osi układu współrzędnych $OX$ i $OY$. Na rysunku pokazano położenie drgającego punktu na trajektorii dla czasów, dla których odpowiednio $\omega t = 0$, $0.5\pi$, $\pi$, $1.5\pi$. Stąd, jak widać, ruch punktu odbywa się w prawo.




**92. Jeżeli pobudzimy do drgań kamerton o częstotliwości drgań własnych 440Hz i strunę, to uzyskamy dudnienie o częstotliwości 1Hz. Jaka jest częstotliwość drgań własnych struny?**

Składając drgania harmoniczne o zbliżonych do siebie czętotliwościach otrzymujemy efekt dudnień, czyli efekt zmian amplitudy drgań z częstotliwością

$$F_d = f_2 - f_1 = \Delta f.$$

W naszym przypadku $f_d =$ 1Hz. A więc, jeśli jedna z częstotliwości tworzących dudnienie wynosi 440 Hz, to druga częstotliwość będzie wynosić 439 lub 441 Hz.

## DRGANIE TŁUMIONE I WYMUSZONE

**93. Na pionowo wiszącej sprężynie zawieszono ciężarek, co spowodowało wydłużenie sprężyny o 9.8cm. Ciężarek ten wprawiono w drgania, odciągając go w dół i puszczając. Jaką wartość powinien mieć współczynnik tłumienia $\beta$, aby:**
**1) drgania ustały po 10 s (przyjąć umownie, że drgania ustają, gdy ich amplituda zmaleje do 1% wartości początkowej);**
**2) ciężarek powrócił aperiodycznie do położenia równowagi;**
**3) logarytmiczny dekrement tłumienia był równy $\lambda$ =6?**

Podane w zadaniu wydłużenie sprężyny $l$ związane jest z masą ciężarka $m$, i współczynnikiem sprężystości sprężyny $k$, prawem Hooka:

$$mg = kl,$$

gdzie $g$ jest przyspieszeniem ziemskim. Jak wiemy współczynnik sprężystości określa częstość drgań własnych układu zgodnie ze wzorem

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Korzystając z prawa Hooke'a otrzymujemy więc, że

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Jak widać do wyznaczenia częstości drgań własnych wystarcza sama znajomość statycznego wydłużenia po zawieszeniu ciężarka. Rozpatrzmy teraz ruch drgający przy pewnym współczynniku tłumienia $\beta$. Równanie ruchu drgań tłumionych ma postać:

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie: $x$ jest wychyleniem z położenia równowagi, $t$ - czasem, $\varphi$ - fazą początkową; $\omega$ jest częstością (kołową) drgań daną wzorem:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

a $A(t)$ - amplitudą drgań tłumionych zależną od czasu. Zależność ta ma postać:

$$A(t) = A_0 \exp(-\beta t),$$

gdzie $A_0$ jest amplitudą początkową (w chwili $t$=0).

1) Szukamy współczynnika $\beta$ dla warunku, że po czasie $t$=10s amplituda maleje 100 razy. Możemy to zapisać jako:

$$A_0 \exp(-\beta t) = \frac{A_0}{100}$$

a stąd

$$\beta = \frac{\ln(100)}{t} = 0.46\,\mathrm{s}^{-1}.$$

2) Aperiodyczny powrót ciężarka do położenia równowagi oznacza, zgodnie ze wzorem na $\omega$, że współczynnik $\beta$ jest większy lub równy częstości drgań własnych układu. Mamy więc

$$\beta \ge \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3.16\,\mathrm{s}^{-1}.$$

3) Zgodnie z definicją logarytmicznego dekrementu tłumienia :

$$\lambda = \beta T,$$

gdzie $T$ jest okresem drgań:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Podstawiając $T$ do wzoru na $\lambda$ i dokonując elementarnych przekształceń otrzymujemy równanie na $\beta$ :

$$\omega_0^2\lambda^2 - \beta^2\lambda^2 = 4\pi^2\beta^2,$$

którego rozwiązaniem jest

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega_0^2\lambda^2}{4\pi^2+\lambda^2}} = \sqrt{\frac{g}{l\left(1+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)}}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych do wzoru otrzymujemy wartość $\beta$ -

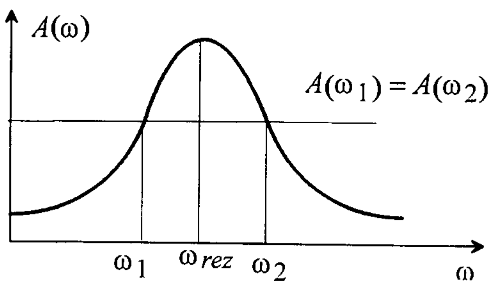
$$\beta = 2.18\,\mathrm{s}^{-1}.$$

**94. Wartości amplitud wymuszonych drgań harmonicznych są równe dla dwóch częstości siły wymuszającej, $\omega_1 = 400$ rad/s oraz $\omega_2 = 600$ rad/s. Wyznaczyć częstość $\omega_{rez}$, dla której amplituda drgań wymuszonych osiągnie maksymalną wartość.**

Amplituda wymuszonych drgań harmonicznych $A$ zależy od częstości drgań siły wymuszającej według wzoru:

$$A = A(\omega) = \frac{F_0}{\mu\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}.$$

gdzie: $F_0$ jest amplitudą siły wymuszającej, $m$ - masą drgającej cząstki, $\omega$ - częstością drgań własnych, a $\beta$ - współczynnikiem tłumienia.




Jak widać na rysunku funkcja $A(\omega)$ ma maksimum dla pewnej częstości $\omega$, którą nazywamy częstością rezonansową. Zależy ona od częstości drgań własnych i współczynnika tłumienia według wzoru:

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Z warunku, że amplitudy są jednakowe dla częstości $\omega_1$ i $\omega_2$, tj.

$$A(\omega_1) = A(\omega_2),$$

otrzymujemy następujące równanie:

$$\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_1^2 = \left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_2^2.$$

W powyższym równaniu występują dwie niewiadome wielkości - $\omega_0$ i $\beta$, ale po przekształceniu do postaci:

$$\omega_1^4 - 2\omega_1^2\left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right) = \omega_2^4 - 2\omega_2^2\left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right),$$

widzimy, że wyrażenie w nawiasie jest kwadratem częstości rezonansowej i możemy je przepisać w postaci:

$$\omega_1^4 - 2\omega_1^2\omega_{rez}^2 = \omega_2^4 - 2\omega_2^2\omega_{rez}^2.$$

Rozwiązaniem tego równania jest częstość rezonansowa dana wzorem:

$$\omega_{rez} = \sqrt{\frac{\omega_2^4-\omega_1^4}{2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}} = \sqrt{\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}}.$$

Podstawiając do wzoru wartości liczbowe otrzymujemy $\omega_{rez} = \sqrt{26} \cdot 10^2$ rad/s.

**95. Po drodze gruntowej przejechał ciągnik pozostawiając ślady w postaci wgłębień w odległości $l$=30 cm od siebie. Po tej drodze przejechał wózek dziecinny o ciężarze 100 N, mający dwa resory, każdy resor ugina się o 2 cm pod wpływem siły 10 N. Z jaką prędkością jechał wózek, jeżeli wskutek wstrząsów wpadł w rezonans.**

Wózek wpadł w rezonans, a więc musiał on napotykać kolejne wgłębienia w odstępach czasu równych okresowi drgań własnych wózka. Policzmy więc najpierw okres $T$ drgań własnych wózka zakładając, że są to drgania harmoniczne:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdzie $m=P/g$ jest masą wózka, a $k$ współczynnikiem sprężystości układu dwóch resorów wózka. Resory tworzą w tym przypadku układ równoległy, więc $k = 2k_0$, gdzie $k_0$ jest współczynnikiem sprężystości pojedynczego resora. W zadaniu podano, że resor ugina się o $x_0 = 2$ cm pod wpływem siły $F_0$ =10N, a więc $k_0 = \frac{F_0}{x_0}$. Stąd wzór na okres drgań własnych wózka ma następującą postać:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Px_0}{2gF_0}}.$$

Jeśli wózek jechał ze stałą prędkością v, to kolejne wgłębienia odległe o $l$ będzie napotykać w odcinkach czasu równych $l$/v. Aby powstał rezonans musi więc zachodzić:

$$T = \frac{l}{\text{v}}$$

i stąd

$$\text{v} = \frac{l}{T} = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{2gF_0}{Px_0}},$$

a po podstawieniu wartości liczbowych: v = 0.47 m/s = 1.7 km/godz.

**96. Ciało o masie $m$=10g wykonuje drgania tłumione o maksymalnej wartości amplitudy 7cm, o fazie początkowej równej zeru, oraz o stałej tłumienia $\beta = 0.5\pi\ s^{-1}$. Na ciało to zaczęła działać zewnętrzna siła okresowa, pod wpływem której ustaliły się drgania wymuszone. Równanie drgań wymuszonych ma postać: $x = 5\cos(2\pi t - 0.75\pi)$ cm. Znaleźć:**

**a) równanie drgań swobodnych,**

**b) równanie zewnętrznej siły okresowej.**

a) Równanie drgań swobodnych (tłumionych) ma postać:

$$x = A_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega' t + \varphi)$$

Z treści zadania znamy $A_0 = 7$cm, $\beta = 1.6$s, i $\varphi = 0$, natomiast nie znamy częstości kołowej $\omega'$ (oznaczenie $\omega$ rezerwujemy dla częstości drgań wymuszonych). Częstość $\omega'$ dana jest wzorem:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

gdzie $\omega_0$ jest częstością drgań własnych układu. W celu wyznaczenia $\omega_0$ trzeba skorzystać z podanego równania drgań wymuszonych, $x = 5\cos(2\pi t - 0.75\pi)$ cm, które porównujemy z ogólną postacią wzoru opisującego drgania wymuszone

$$x = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right),$$

Porównując dwie zależności $x=x($ otrzymujemy:

$$\omega = 2\pi \text{ s}^{-1},$$

$$\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi = -1,$$

$$\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}} = A = 5 \text{ cm}.$$

W ostatniej zależności, $F_0$ jest amplitudą siły wymuszającej, a przez $A$ oznaczyliśmy amplitudę drgań wymuszonych. Podstawiając $\omega$ do drugiego równania otrzymujemy

$$\omega_0^2 = \omega^2 - 2\beta\omega = \omega(\omega - 2\beta),$$

a stąd:

$$\omega_0 = \sqrt{2\pi(2\pi - \pi)} \text{ s}^{-1} = \pi\sqrt{2} \text{ s}^{-1} \text{ i}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \text{ s}^{-1} = \pi \text{ s}^{-1}.$$

Możemy teraz zapisać równanie drgań swobodnych jako:

$$x = 7\exp(-\pi t)\cos(\pi t) \text{ cm}.$$

b) Równanie zewnętrznej siły okresowej ma postać:

$$F = F_0\cos(\omega t),$$

Niewiadomą amplitudę $F_0$ działającej siły okresowej znajdziemy ze wzoru na amplitudę drgań wymuszonych $A$. Otrzymujemy:

$$F_0 = A\, m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2},$$

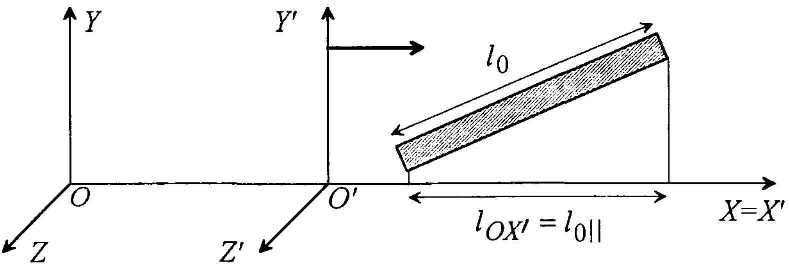
a stąd po podstawieniu znanych wartości:

$$F_0 = 5 \cdot 10 \cdot \sqrt{4\pi^4 + 4\pi^2(2\pi)^2} \text{ cm g s}^{-2} = \sqrt{5}\,\pi^2\, 10^2 \text{ dyn} \cong 7.0 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

# MECHANIKA RELATYWISTYCZNA

## TRNSFORMACJE LORENTZA

**97. Układ $K'$ porusza się względem osi $OX$ układu odniesienia $K$ ze stałą prędością v. W układzie $K'$ znajduje się pręt o długości własnej $l_0$, tworzący z osią $OX'$ kąt $\alpha'$. Jaką długość pręta $l$ i jaki kąt a zmierzy obserwator spoczywający w układzie $K$.**




Na rysunku pokazane są oba układy odniesienia i pręt sztywno związany z układem $K'$. Długość $l_0$ pręta w układzie $K'$ możemy zapisać jako:

$$l_0 = \sqrt{l_{0||}^2 + l_{0\perp}^2},$$

gdzie: $l_{0||} = l_{0x'}$, jest rzutem długości na kierunek osi $OX'$, a $l_{0\perp}$ jest rzutem długości pręta na płaszczyznę prostopadłą do tej osi (płaszczyznę $Y'OZ'$). W układzie $K$, względem którego pręt porusza się wraz z układem $K'$, odpowiednie wyrażenie na długość pręta ma postać:

$$l = \sqrt{l_{||}^2 + l_{\perp}^2},$$

gdzie: $l_{||}$ i $l_{\perp}$ są odpowiednio rzutami długości pręta na kierunek równoległy i prostopadły do osi $OX$. Ponieważ w układzie $K$ pręt porusza się w kierunku osi $OX$, toteż w tym kierunku, zgodnie z transformacjami Lorentza, dla obserwatora związanego z układem $K$ długość pręta ulega skróceniu zgodnie ze wzorem:

$$l_{||} = l_{0||}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

gdzie $c$ jest prędkością światła. W kierunku prostopadłym długość pręta pozostaje niezmieniona tj. $l_{\perp} = l_{0\perp}$. Zgodnie z tym, wyrażenie na całkowitą długość pręta w układzie $K$ ma postać:

$$l = \sqrt{l_{0||}^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + l_{0\perp}^2},$$

Wyraźmy teraz składowe długości pręta przez całkowitą długość $l_0$ i dany w zadaniu kąt $\alpha'$. Wzór na transformację długości pręta przybiera postać:

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}\cos\alpha'}{c}\right)^2}.$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku, gdy v=0 (pręt spoczywa w układzie $K$) lub, gdy $\cos\alpha' = 0$ (pręt jest w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu), długość pręta w obu układach jest taka sama. Znajdźmy obecnie wzór na transformację kąta nachylenia pręta do osi $OX$. Zauważmy że

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{l_\perp}{l_{||}} = \frac{l_{0\perp}}{l_{0||}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha'}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}$$

czyli

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha'}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}\right).$$

**98. Mion (mezon $\mu$) utworzony w górnych warstwach atmosfery przebywa do chwili rozpadu odległość 5 km z prędkością v=0.99*c* (*c* - prędkość światła).**
**a) Jak długi jest czas życia mionu mierzony przez nas, a jaki czas życia mierzony w jego własnym układzie odniesienia?**
**b) Jaka jest grubość atmosfery przebyta przez mion, zmierzona w jego własnym układzie odniesienia?**

W tym zadaniu jest mowa o dwóch układach odniesienia. Jednym układem odniesienia jest układ związany z poruszającym się mionem; oznaczmy przez $\tau$ czas życia mionu w tym układzie (czas własny mionu). Drugim układem odniesienia jest układ związany z Ziemią. W tym układzie obserwuje się czas życia mionu równy $t$ oraz drogę przez niego przebytą $l$=5 km. Prędkość względna tych układów wynosi v=0.99$c$, a więc konieczne jest stosowanie związków relatywistycznych.
a) Zasada dylatacji czasu mówi nam, że czas w układzie spoczywającym płynie wolniej w sposób opisany poniższą relacją:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}.$$

Czas życia $t$ mionu w układzie odniesienia związanym z Ziemią wyznaczymy z obserwacji drogi, jaką przebył mion:

$$t = \frac{l}{\mathrm{v}},$$

czyli:

$$t = 16.8\ \mu\mathrm{s}.$$

Natomiast czas życia $\tau$ mionu w układzie poruszającym się razem z nim wyniesie zgodnie z równaniem określającym dylatację czasu:

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

czyli:

$$\tau = 2.4\,\mu s.$$

b) Grubość atmosfery przebytą przez mion i zmierzoną w jego własnym układzie odniesienia oznaczmy przez $\lambda$. Odległość ta będzie równa iloczynowi czasu wędrówki mionu $\tau$ i jego prędkości względem atmosfery v, czyli

$$\lambda = v\tau$$

i korzystając z wcześniej wyliczonej wartości $\tau$ mamy:

$$\lambda = 705\,\mathrm{m}.$$

**99. Dwa akceleratory dają cząstki poruszające się w przeciwne strony z prędkościami $v_1 = v_2 = 0.9c$. Obliczyć względną prędkość cząstek.**

Jest oczywiste, że dla tak dużych prędkości cząstek nie można zastosować klasycznej zasady superpozycji prędkości, która w tym przypadku dałaby rezultat:

$$v_{wzgl} = v_1 + v_2 = 1.8c.$$

Rezultat ten jest sprzeczny z teorią względności, gdyż otrzymaliśmy prędkość cząstek większą od prędkości światła w próżni. Obliczmy więc $v_{wzgl}$ korzystając z relatywistycznej zasady dodawania prędkości, wynikającej z transformacji Lorentza

$$v_{wzgl} = \frac{v_1 + v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Przypomnijmy, że wyprowadzając powyższą zależność zakładamy, że jeden z układów odniesienia porusza się z prędkością $v_1$ (tak jak jedna z wiązek cząstek) względem pewnego spoczywającego układu odniesienia (związanego z akceleratorem). W tym samym układzie spoczywającym druga wiązka cząstek ma prędkość $v_2$. Pytamy się o to, jaką prędkość $v_{wzgl}$ ma ta wiązka cząstek w układzie związanym z pierwszą wiązką cząstek. Po podstawieniu odpowiednich wartości otrzymujemy następujący wynik:

$$v_{wzgl} = \frac{0.9c + 0.9c}{1+\frac{0.81c^2}{c^2}} = 0.9945c.$$

**100. Kosmonauta porusza się w poprzek pojazdu kosmicznego z prędkością $v_k$ =5 km/h względem ścian pojazdu. Jaką prędkość poprzeczną ma ten kosmonauta względem Ziemi, jeżeli rakieta oddala się od Ziemi z prędkością 180 000 km/h?**

Oznaczmy układ odniesienia związany z rakietą przez $X'O'Y'$. Dalej załóżmy, że układ ten porusza się z prędkością $v = v_x = 180\,000$ km/h = 50 km/s względem układu odniesienia $XOY$ związanego z Ziemią. Niech kosmonauta porusza się wzdłuż osi $O'Y'$ z prędkością $v'_y = v_k$. Pytamy się o to, jaka będzie prędkość kosmonauty $v_y$ zaobserwowana w układzie odniesienia związanym z Ziemią. Z transformacji Lorentza wynika następująca zależność:

$$v_y = v_k\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

W naszym przypadku wartość $v/c = 1.66 \cdot 10^{-4}$ jest bardzo mała, a więc uzasadnione jest wprowadzenie następującego przybliżenia:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cong 1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

W konsekwencji wzór opisujący transformację prędkości poprzecznej przyjmie postać:

$$v_y = v_k\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = v_k - \Delta v_k,$$

gdzie zmiana prędkości poprzecznej:

$$\Delta v_k = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}v_k \cong 7 \cdot 10^{-8}\,\text{km/h}.$$

A więc praktycznie prędkość kosmonauty w kierunku poprzecznym do kierunku ruchu rakiety będzie taka sama w układzie odniesienia związanym z rakietą i w układzie odniesienia związanym z Ziemią. Wynika to z małej prędkości rakiety w porównaniu z prędkością światła w próżni.

## ENERGIA RELATYWISTYCZNA

**101. Jakie powinno być napięcie pola elektrycznego, aby zgodnie z zasadami mechaniki klasycznej poruszający się w tym polu elektron uzyskał prędkość światła? Jaką prędkość w tym polu elektrycznym uzyska elektron według machaniki relatywistycznej?**

Oznaczmy przez $U$ napięcie pola elektrycznego, w którym porusza się elektron. Pole to wykonuje pracę nad elektronem równą zmianie jego energii potencjalnej w tym polu $eU$, gdzie $e$ jest ładunkiem elektronu. Praca ta powoduje z kolei wzrost jego energii kinetycznej. Jeżeli założymy, że prędkość początkowa elektronu była równa zeru, to zgodnie z mechaniką klasyczną, uzyskana energia kinetyczna równa jest:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = eU,$$

gdzie $m$ jest masą elektronu, a v jego prędkością uzyskaną w polu elektrycznym. Podstawiając w powyższym wzorze $v=c$, gdzie $c$ jest prędkością światła mamy

$$eU = \frac{mc^2}{2}.$$

Stąd otrzymujemy szukane napięcie pola równe

$$U = \frac{mc^2}{2e}.$$

Podstawiając (z tablic fizycznych):

$$m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}, \quad c = 3 \cdot 10^8\,\text{m/s} \quad \text{i} \quad e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{C},$$

otrzymujemy $U = 2.7 \cdot 10^5\,\text{V}.$

W mechanice relatywistycznej energia kinetyczna równa jest różnicy energii całkowitej $E$ (bez uwzględnienia energii potencjalnej) i energii spoczynkowej $E_0$ elektronu,

$$E_k = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - mc^2.$$

Ze wzoru tego wynika, że elektron nie może osiągnąć prędkości światła, tak jak jest to możliwe zgodnie z zasadami mechaniki klasycznej, gdyż jego energia kinetyczna musiałaby być wówczas nieskończenie wielka, a to w konsekwencji wymagałoby nieskończenie wielkiego napięcia przyspieszającego $U$. Porównując relatywistyczne wyrażenie na $E_k$ ze zmianą energii potencjalnej elektronu odpowiadającą napięciu pola $U$, które obliczyliśmy poprzednio mamy:

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right) = eU = \frac{mc^2}{2}.$$

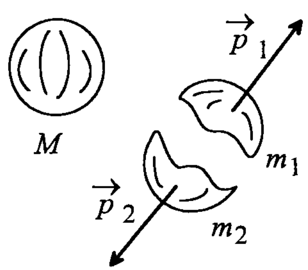
Dokonując elementarnych przekształceń otrzymujemy, że prędkość jaką uzyska elektron w polu, w którym zgodnie z mechaniką klasyczną uzyskałby prędkość równą prędkości światła wynosi:

$$v = \frac{\sqrt{5}}{3}c.$$

**102. Spoczywające ciało o masie $M$ rozpada się na dwa o masach spoczynkowych $m_1$ i $m_2$. Wyznaczyć energie kinetyczne powstałych fragmentów.**

Zakładając, że na rozpadające się ciało o masie $M$ nie działają żadne siły zewnętrzne, napiszmy prawo zachowania energii i pędu w układzie, w którym ciało przed rozpadem spoczywa.

$$Mc^2 = E_1 + E_2$$
$$0 = p_1 + p_2$$




W powyższym układzie równań $Mc^2$ jest energią (spoczynkową) ciała przed rozpadem, $E_1$, $E_2$ energiami (całkowitymi) produktów rozpadu, a $p_1$ i $p_2$ ich pędami. Ponieważ z prawa zachowania pędu

$$p_1 = -p_2,$$

to

$$p_1^2 = p_2^2.$$

Korzystając z relatywistycznego związku pomiędzy energią $E$ cząstki o masie spoczynkowej $m$ i pędzie $p$:

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2},$$

możemy napisać: $$p_1^2 = p_2^2$$

$$E_1^2 - m_1^2c^4 = E_2^2 - m_2^2c^4$$

$$E_1^2 - E_2^2 = c^4\left(m_1^2 - m_2^2\right).$$

Z równania tego i zasady zachowania energii mamy:

$$E_1 - E_2 = \frac{c^2\left(m_1^2 - m_2^2\right)}{M}.$$

Równanie powyższe wraz z zasadą zachowania energii daje nam układ dwóch równań liniowych na $E_1$ i $E_2$. Rozwiązaniem tego układu są energie:

$$E_1 = \frac{M^2c^2 + c^2\left(m_1^2 - m_2^2\right)}{2M}.$$

$$E_2 = \frac{M^2c^2 - c^2\left(m_1^2 - m_2^2\right)}{2M}.$$

Nas interesują jednak nie energie całkowite, a energie kinetyczne powstałych fragmentów, dlatego ze związku, że energia całkowita jest sumą energii kinetycznej i spoczynkowej mamy:

$$T_1 = E_1 - m_1c^2 = \frac{c^2}{2M}\left((M - m_1)^2 - m_2^2\right)$$

$$T_2 = E_2 - m_2c^2 = \frac{c^2}{2M}\left((M - m_2)^2 - m_1^2\right),$$

gdzie $T_1$ i $T_2$ są szukanymi energiami kinetycznymi cząstek powstałych w wyniku rozpadu.

**103. W spoczywającą cząstkę o masie $m_1$ uderza cząstka o masie spoczynkowej $m_2$ i energii kinetycznej $T_2$. W wyniku zderzenia obie cząstki zespalają się w jedną poruszającą się dalej w całości. Znaleźć masę spoczynkową powstałej cząstki oraz jej prędkość.**

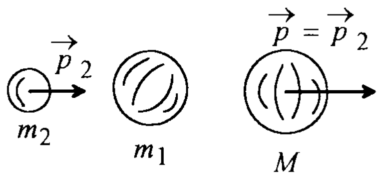
Zakładając, tak jak w poprzednim zadaniu, że rozpatrywany układ jest układem izolowanym można napisać dla tego układu zasadę zachowania energii całkowitej

$$E_1 + E_2 = E,$$

gdzie $E_1 = m_1c^2$, $E_2 = m_2c^2 + T_2$

i zasadę zachowania pędu

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}, \text{ gdzie } \vec{p}_1 = 0.$$




Masę powstałej cząstki znajdujemy z relatywistycznego związku pomiędzy energią całkowitą cząstki, jej masą spoczynkową i pędem:

$$M^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2.$$

W powyższym wzorze energię $E$ powstałej cząstki mamy daną z zasady zachowania energii, natomiast wartość pędu z zasady zachowania pędu $p=p_2$. Wartość $p_2$ można znaleźć porównując równania określające energię $E$, a mianowicie:

$$E_2 = m_2c^2 + T_2$$

$$E_2 = c\sqrt{m_2^2c^2 + p_2^2},$$

stąd:

$$p_2^2 = \frac{\left(m_2c^2+T_2\right)^2}{c^2} - m_2^2c^2.$$

Ostatecznie wzór na masę powstałej cząstki ma postać:

$$M = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + \frac{2T_1m_1}{c^2}}.$$

Aby wyznaczyć prędkość v powstałej cząstki skorzystajmy ze związku między prędkością pędem i energią całkowitą: $v = \frac{c^2p}{E}$, gdzie po podstawieniu $E$ i $p$ otrzymujemy

$$v = \frac{c\sqrt{T_2\left(T_2+2m_2c^2\right)}}{\left(m_1+m_2\right)c^2+T_2}.$$

**104. Słońce emituje w ciągu sekundy energię równą $6.5 \cdot 10^{21}$ kWh. Przyjmując, że promieniowanie Słońca jest stałe, znaleźć czas, w ciągu którego masa Słońca zmaleje do połowy.**

Zgodnie z mechaniką relatywistyczną Słońce tracąc energię wskutek promieniowania zmniejsza swoją masę zgodnie ze wzorem:

$$E = \Delta M c^2$$

gdzie $E$ jest energią straconą wskutek promieniowania, a $\Delta M$ ubytkiem masy Słońca po pewnym czasie $t$. Oznaczmy daną w zadaniu energię traconą w ciągu sekundy, czyli moc promieniowania, przez $P$. Wówczas energia $E=Pt$. Zgodnie z treścią zadania mamy $\Delta M = M/2$, gdzie masę Słońca $M$ przyjmujemy zgodnie z danymi tablicowymi równą $1.99 \cdot 10^{30}$ kg. Po podstawieniu wyrażenia na $E$ i $\Delta M$ do wzoru otrzymujemy, że:

$$t = \frac{Mc^2}{2P}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych znajdujemy czas $t$ równy $1.23 \cdot 10^{11}$ lat, t.j. czas około dwadzieścia razy dłuższy niż wiek Układu Słonecznego.

# DODATEK
## ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZNIA

## KINEMATYKA

### RACHUNEK WEKTOROWY

**D1.** Równania ruchu dwóch punktów materialnych obserwowanych z danego układu odniesienia, są następujące:

$$\vec{r}_1 = \left(3t + t^2, 2 + t, 2t\right); \quad \vec{r}_2 = (1, 2t, 1 + t)$$

Znaleźć:
a) prędkość i przyspieszenie punktu pierwszego,
b) prędkość punktu drugiego względem pierwszego,
c) przyspieszenie punktu drugiego względem pierwszego.

### SKŁADANIE RUCHÓW

**D2.** Łódź płynie z prądem rzeki z przystani $A$ do $B$ w czasie $t_1 = 3$ godz, a z $B$ do $A$ w czasie $t_2 = 6$ godz. Ile czasu trzeba, aby łódź spłynęła z przystani $A$ do $B$ z wyłączonym silnikiem?

**D3.** Prędkość łodzi względem wody w spoczynku wynosi $v_1$. Woda płynie w rzece z prędkością $v_2$. Jak należy skierować łódź, aby przepłynąć rzekę w kierunku prostopadłym do brzegów? W jakim czasie łódź przepłynie rzekę o szerokości s? Obliczenia numeryczne wykonaj dla $v_1 = 5\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 3\,\mathrm{m/s}$, $s = 80\,\mathrm{m}$.

**D4.** Samolot leci z miasta $A$ do miasta $B$, położonego względem $A$ o $s$=2160 km na wschód. Prędkość samolotu względem powietrza wynosi $v_1 = 720$ km/h. Obliczyć czasy przelotu: $t_a$ – przy bezwietrznej pogodzie oraz $t_b$ – gdy na całej trasie wieje wiatr z południa na północ z prędkością $v_2 = 25$ m/s.

### RZUTY I SPADEK SWOBODNY

**D5.** Ciało spadające swobodnie ma w punkcie $A$ prędkość $v_a = 40\,\mathrm{cm/s}$, a w punkcie $B$ prędkość $v_B = 250\,\mathrm{cm/s}$. Obliczyć odległość $AB$. Przyspieszenie ziemskie $g$ jest dane.

**D6.** Ciało spada swobodnie na Ziemię z wysokości $h$. Na jakiej wysokości prędkość tego ciała będzie $n$ razy mniejsza od jego prędkości końcowej? Obliczenia numeryczne wykonaj dla $h$=27 m, $n$=3.

**D7.** Równia pochyła o kącie nachylenia $\alpha$ może przemieszczać się w kierunku poziomym. Z jakim przyspieszeniem powinna poruszać się równia, aby swobodnie spadające na nią z góry ciało znajdowało się stale w tej samej odległości (liczonej wzdłuż linii pionowej) od nachylonej płaszczyzny równi? Zakładamy, że ruch ciała i równi rozpoczyna się w tej samej chwili oraz, że przyspieszenie ziemskie $g$ jest dane.

**D8.** Dom ma być pokryty dachem. Jakie nachylenie należy mu nadać, aby krople deszczu spływały po dachu w jak najkrótszym czasie?

**D9.** Od rakiety, wznoszącej się pionowo do góry, w momencie, gdy ma ona prędkość $v_{0y}$ odczepia się na wysokości $h$ niepotrzebny już zbiornik paliwa. Obliczyć czas spadania $t$ oraz prędkość v z jaką zbiornik spadł na ziemię. Przyspieszenie ziemskie $g$ - dane. Opór powietrza pominąć.

**D10.** W rzucie poziomym prędkość końcowa ciała jest $n$=3 razy większa od prędkości początkowej. Prędkość początkowa ciała wynosi $v_0 = 9.8$ m/s. Obliczyć wysokość początkową rzutu. Przyspieszenie ziemskie $g = 9.8$ m/s$^2$.

**D11.** W rzucie poziomym zasięg równy jest wysokości początkowej. Prędkość początkowa ciała wynosi $v_0$. Obliczyć czas trwania rzutu oraz prędkość końcową ciała. Obliczenia numeryczne wykonać dla $v_0 = 19.6$ m/s, $g = 9.8$ m/s$^2$.

**D12.** Z dachu domu rzucono poziomo kamień z prędkością $v_0$. Oblicz składową przyspieszenia kamienia prostopadłą do toru po czasie $t$. Obliczenia numeryczne wykonaj dla $v_0 = 18.6$ m/s, $t = 2$ s.

**D13.** Chłopiec rzuca piłką z prędkością $v_0$ pod kątem $\alpha$ do poziomu. Piłka uderza o ścianę znajdującą się w odległości $S$ od chłopca. Wyznaczyć wysokość $y$ na jakiej piłka uderzy o ścianę.

**D14.** Jaki powinien być czas opóźnienia zapłonu granatu wyrzuconego z prędkością $v_0$ pod kątem $\alpha$ do poziomu, aby wybuch nastąpił w najwyższym punkcie toru? Przyspieszenie ziemskie $g$ jest dane.

## RUCH PROSTOLINIOWY

**D15.** Pierwszą połowę drogi pojazd przebył z prędkością $v_1$, a drugą z prędkością $v_2$. Obliczyć średnią prędkość pojazdu na trasie. Obliczenia numeryczne wykonać dla $v_1 = 72$ km/h, $v_2 = 90$ km/h. Na wykresie prędkości przedstawić geometrycznie drogę przebytą przez pojazd.

**D16.** W czasie $t$ prędkość $v_0$ poruszającego się ciała wzrosła $n$ razy. Oblicz stałe przyspieszenie ciała, prędkość średnią oraz drogę przebytą przez ciało w czasie $t$. Obliczenia numeryczne wykonaj dla $v_0 = 5$ m/s, $t = 8$ s, $n = 5$. Na wykresie prędkości przedstaw graficznie drogę przebytą przez ciało w czasie $t$.

**D17.** Zależność drogi $s$ przebytej przez ciało od czasu $t$ podaje równanie $s = At - Bt^2 + Ct^3$, gdzie $A$=2 m/s, $B$=3 m/s$^2$, $C$=4 m/s$^3$. Znaleźć:
a) zależność prędkości v i przyspieszenia $a$ od czasu $t$;
b) drogę przebytą przez ciało oraz prędkość i przyspieszenie ciała po upływie 2s od rozpoczęcia ruchu.

**D18.** Na łodzi płynącej z prędkością $v_0$ zwinięto żagiel w chwili $t_0$, lecz łódź płynie w dalszym ciągu. W czasie tego ruchu dokonano pomiarów prędkości łodzi. Pomiary te wykazały hiperboliczną zależność prędkości łodzi od czasu ($v \propto 1/t$). Znaleźć zależności
a) przyspieszenia $a$ łodzi od czasu i prędkości,
b) drogi $S$ przebytej przez łódź od czasu,
c) prędkości v łodzi od drogi przebytej po zwinięciu żagla.

## RUCH KRZYWOLINIOWY

**D19.** Balon odrywa się od powierzchni Ziemi i unosi do góry ze stałą prędkością $v_0$. Wiatr nadaje mu prędkość poziomą $v = by$, gdzie $b$=const, $y$ - wysokość balonu. Znaleźć:
a) drogę przebytą przez balon w kierunku poziomym w zależności od wysokości
b) przyspieszenie balonu, jego składową styczną i normalną.

**D20.** Kolarz rozpoczynając jazdę pierwsze $t$=30s jedzie ruchem jednostajnie przyspieszonym. Jaką prędkość osiąga po tym czasie, jeżeli promień kół rowerowych $r$=0.35m, a przyspieszenie kątowe tych kół $\varepsilon = 0.5$ rad/s$^2$?

**D21.** Znaleźć tor, po jakim w płaszczyźnie $XOY$ leci samolotem ponaddźwiękowym ze stałą prędkością v pilot, który chce aby jego koledzy stojący na lotnisku usłyszeli w tym samym czasie huk silnika z całego toru.

**D22.** Ciało porusza się ruchem płaskim, przy czym prędkość polowa $\sigma = \frac{1}{2}ar$, natomiast prędkość radialna $v_r = b$, gdzie $a$ i $b$ - stałe dodatnie. Znaleźć równania ruchu oraz równanie toru we współrzędnych biegunowych. Przyjąć warunki początkowe $\varphi(0) = 0$, $r(0) = r_0$.

# DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

## RUCH POSTĘPOWY

**D23.** Pojazd o masie $m$=845 kg porusza się po poziomej jezdni z prędkością v=57.6 km/h.
a) Jaka musi być stała siła hamująca, aby zatrzymać ten pojazd na drodze $s$=10 m?
b) Oblicz czas hamowania pojazdu.

**D24.** Dwa jednakowe ciała związane nicią leżą na zupełnie gładkim poziomym stole tak, że nić tworzy linię prostą. Nić może wytrzymać naprężenie nie przekraczające 19.62 N. Jaką siłę poziomą należy przyłożyć do jednego z tych ciał, aby nić się zerwała? Czy zmieni się siła niezbędna do zerwania nici, jeżeli między ciałem a stołem występuje tarcie?

**D25.** Ciało zsuwa się bez prędkości początkowej po równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha$. Po czasie $t$ prędkość ciała wynosi v. Oblicz współczynnik tarcia. Obliczenia numeryczne wykonaj dla $\alpha = 60^0$, $t$=2 s, v=14.7 m/s, $g$=9.8 m/s$^2$.

**D26.** Jaką prędkość początkową $v_0$ trzeba nadać ciału o masie $m$, aby wjechało na szczyt równi o długości $l$ i kącie nachylenia $\alpha$, jeżeli współczynnik tarcia wynosi $f$? Oblicz czas $t$ trwania ruchu. Przyspieszenie ziemskie $g$ - dane.

**D27.** Na gładkiej równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 60^0$ znajduje się ciało o ciężarze $P$=500 N utrzymywane w równowadze przez siłę $R$ działającą w kierunku równoległym do podstawy równi. Obliczyć wartość tej siły oraz wartość siły nacisku $F$, jaka działa na równię.

**D28.** Jaką siłą należy działać w kierunku toru na skrzynię o masie $m$=100 kg, jeżeli współczynnik tarcia $f$=0.5, aby poruszała się ona ruchem jednostajnym:
a) po torze poziomym,
b) po równi pochyłej w górę, jeżeli tworzy ona kąt $\alpha = 30^0$ z poziomem,
c) po tej samej równi pochyłej w dół.
Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

**D29.** Na końcach nieważkiej nici, przerzuconej przez nieważki blok, zawieszono ciężarki o masach $m_1$ = 2 kg i $m_3$ = 3 kg. Lżejszy z nich znajduje się o $l$=2 m niżej od cięższego. Po jakim czasie znajdą się one na tej samej wysokości, jeśli puścimy je swobodnie? Przyjąć $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Wszelkie opory ruchu pominąć.

**D30.** Ciało o masie $m$ rzucono pionowo do góry z prędkością $v_0$. Zakładając, że siła oporu powietrza $R$ jest proporcjonalna do prędkości ($R$ = -$b$v, gdzie $b$ jest dodatnią stałą) obliczyć czas wznoszenia się ciała do najwyżej położonego punktu oraz wysokość tego punktu.

## RUCH CIAŁ ZE ZMIENNĄ MASĄ

**D31.** Rakieta o masie startowej $m_0$ znajduje się w punkcie, w którym zewnętrzne siły są pomijalnie małe. W chwili $t$=0 zostaje włączony silnik, który wyrzuca gazy z prędkością $u$ względem rakiety. Wydajność silnika wynosi $\mu$ ( $\mu = -\frac{dm}{dt}$, gdzie $m$ - aktualna masa rakiety) i jest cały czas stała. Znaleźć zależność prędkości rakiety od jej aktualnej masy. Ile wynosi siła ciągu rakiety?

**D32.** Na transporter sypie się piasek z jednostajną szybkością 5 kg na sekundę. Obliczyć moc silnika napędzającego transporter, jeżeli prędkość, z jaką ma się poruszać wynosi 2m/s.

## SIŁA BEZWŁADNOŚCI

**D33.** Rowerzysta jedzie ze stałą prędkością v=10 m/s po torze kołowym. Kąt nachylenia płaszczyzny roweru do poziomu wynosi $\alpha = 60^0$. Oblicz promień toru.

**D34.** Jaki powinien być minimalny współczynnik tarcia między oponami samochodu a asfaltem, aby samochód mógł przejechać bez poślizgu zakręt o promieniu $R$=100 m z prędkością v=80 km/h? Jezdnia nachylona jest pod kątem $\alpha = 30^0$ do poziomu.

**D35.** Po ilu obrotach kulka regulatora odśrodkowego wprawionego w ruch ze stałym przyspieszeniem kątowym $\varepsilon$ odchyli się o kąt $\alpha$?

**D36.** Pocisk wystrzelono z prędkością początkową $v_0 = 1000$ m/s skierowaną pod kątem $\alpha = 60^0$ do poziomu z działa skierowanego na południe znajdującego się na półkuli północnej w miejscu o szerokości geograficznej $\varphi = 60^0$. Obliczyć odchylenie pocisku od linii strzału w chwili upadku. Okres obrotu Ziemi $T$=86201 s.

**D37.** Jak zależy okres obrotu płaszczyzny drgań wahadła Foucaulta od szerokości geograficznej $\varphi$?

## PRACA I ENERGIA

**D38.** Piłka spada z wysokości $h$ na podłogę i odbija się od niej wielokrotnie. Jaką prędkość początkową $v_0$ należy nadać piłce, aby po $n$ odbiciach wzniosła się na pierwotną wysokość, jeżeli wiadomo, że przy każdym odbiciu piłka traci $k$-tą część swojej energii. Przyspieszenie ziemskie - $g$.

**D39.** Mała kulka stacza się po rynnie zakończonej pionową pętlą o promieniu $r$. Z jakiej wysokości kulka ta powinna się stoczyć, aby
a) nie odpaść od pętli,
b) odpaść na wysokości $h = \frac{3}{2}r$.

**D40.** Oblicz średnią moc silnika samochodu o masie $m$=1000 kg, który poruszając się ruchem jednostajnie zmiennym w ciągu czasu $t$=10 s od początku ruchu uzyskał prędkość v=50 km/h. Współczynnik tarcia $f$=0.01. Pomiń wpływ oporu powietrza.

**D41.** Z jaką największą stałą prędkością może wjeżdżać samochód o masie $m$=900 kg pod wzniesienie o nachyleniu $\alpha = 30^0$, jeżeli maksymalna moc silnika wynosi $M$=50 kW? Współczynnik tarcia $f$=0.05. Opór powietrza pominąć.

**D42.** Sanki ześlizgują się z pagórka, którego zbocze ma długość $l$=10 m i jest nachylone pod kątem $\alpha = 30^0$ do poziomu. Jaką odległość $x$ przebędą sanki na odcinku poziomym po zjechaniu ze zbocza, jeżeli na całej drodze współczynnik tarcia wynosi $f$=0.2 ?

**D43.** W najwyższym punkcie doskonale gładkiej kuli znajduje się maleńka kulka (punkt materialny) w położeniu równowagi chwiejnej. Jeżeli wychylimy ją z tego położenia, to początkowo będzie się ona poruszać po powierzchni kuli a następnie upadnie na poziomą podstawę, na której spoczywała kula. Jaką drogę przebędzie mała kulka po powierzchni dużej kuli i w jakiej odległości od pionu przechodzącego przez środek dużej kuli upadnie ona na podstawę, jeżeli promień dużej kuli $R$=1,5 m ?

## POLA SIŁ

**D44.** W stałym polu elektrycznym o natężeniu $E$=15 V/m elektron przebywa w kierunku pola drogę $s$=2 m z prękością średnią v=2000 km/s. Oblicz przyrost prędkości elektronu. Stosunek ładunku elektronu do jego masy $\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11}$ C/kg.

**D45.** Strumień elektronów rozpędzony polem elektrycznym o napięciu $U_1 = 5000$ V wpada między okładki kondensatora płaskiego równolegle do jego okładek. Jakie napięcie należy przyłożyć do okładek kondensatora, by strumień elektronów został odchylony o $h$=3 mm. Długość kondensatora jest $l$=5 cm, odległość między okładkami $d$=1.5 cm.

**D46.** Naładowany pyłek o masie $m = 2.4 \cdot 10^{-8}$g znajduje się w równowadze w polu elektrostatycznym kondensatora płaskiego. Znaleźć liczbę elektronów znajdujących się na pyłku, jeżeli różnica potencjałów przyłożona do płytek kondensatora $U$=3000 V, a odległość między płytkami $d$=2 cm. Ładunek elektronu $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

**D47.** W oleju o gęstości $\rho_1 = 800\,\mathrm{kg/m^3}$ wytworzono pionowe, jednorodne pole elektryczne o natężeniu $E = 3.6 \cdot 10^6$ V/m. W polu tym umieszczono naelektryzowaną kulkę o promieniu $r$=5 mm i gęstości $\rho_2 = 8600\ \mathrm{kg/m^3}$. Obliczyć ładunek kulki, jeżeli wiadomo, że pozostaje ona w spoczynku.

**D48.** Ciało o masie $m = 10^{-3}$ kg i ładunku $Q = 10^{-4}$ C porusza się w jednorodnym polu elektrostatycznym o natężeniu $\vec{E} = 100\,\vec{j}$ V/m. Prędkość początkowa wynosi $\vec{v} = v_0\,\vec{i}$ m/s. W dowolnie wybranym układzie współrzędnych obliczyć tor cząstki $\vec{r}(t)$ i jej prędkość $\vec{v}(t)$.

**D49.** Elektron o energii kinetycznej $E_k$ wlatuje w jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B$. Ładunek elektronu wynosi $e$, a jego masa $m$. Wektor prędkości elektronu leży w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił pola. Obliczyć:
a) promień $R$ okręgu, po którym będzie krążył elektron,

b) częstotliwość $\nu$ obiegu elektronu po orbicie.

**D50.** Naładowana cząstka porusza się w polu magnetycznym po okręgu o promieniu $R$=4cm z prędkością v= $10^6$ m/s. Indukcja pola magnetycznego jest równa $B$=0.3 T. Znaleźć ładunek $q$ cząstki, jeśli jej energia kinetyczna jest równa $E_k$ =12 keV $\left(1\ eV = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\right)$.

**D51.** Dwa jony mające jednakowy ładunek elektryczny, ale różne masy, wpadają do jednorodnego pola magnetycznego prostopadle do kierunku pola. Pierwszy jon porusza się po okręgu o promieniu $r_1$ = 5 cm, drugi - po okręgu o promieniu $r_2$ = 2.5 cm. Określić stosunek mas jonów, jeśli zostały one przyspieszone jednakową różnicą potencjałów.

**D52.** Naładowana cząstka po przejściu przyspieszającej różnicy potencjałów $U$=104 V wpada w skrzyżowane (pod kątem prostym) pola: elektryczne o natężeniu $E$=100 V/cm i magnetyczne o indukcji $B$=0.1 T. Znajdź stosunek ładunku tej cząstki do jej masy, jeśli cząstka porusza się po torze prostoliniowym w kierunku prostopadłym do obu pól.

**D53.** Dane jest pole sił $\vec{F} = \left(4x^2\vec{i} + 2y^3\vec{j}\right)$N. Sprawdzić czy to pole jest potencjalne. Jeżeli tak, to obliczyć potencjał tego pola oraz pracę sił pola przy przesunięciu cząstki z położenia $\vec{r}_1 = \left(4\vec{i} + 4\vec{j}\right)$m, do położenia $\vec{r}_2 = \left(\vec{i} + 2\vec{j}\right)$m.

**D54.** Energia potencjalna cząstki w pewnym polu ma postać

$$U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r},$$

gdzie $a$ i $b$ są stałymi dodatnimi a $r$ jest odległością od centrum pola. Wyznaczyć wartość $r_0$ odpowiadającą położeniu równowagi. Czy jest to równowaga trwała?

**D55.** Energia potencjalna elektronu w atomie wodoru wynosi $U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, gdzie $e$ jest ładunkiem elektronu, $\varepsilon_0$ przenikalnością dielektryczną próżni, a $r$ odległością elektronu od jądra. Zakładając, że elektron porusza się po orbicie kołowej i korzystając z postulatu Bohra, że moment pędu $L = m\mathrm{v}r = \frac{nh}{2\pi}$, gdzie $m$ jest masą elektronu, v prędkością na orbicie, $n$ liczbą naturalną a $h$ stałą Plancka - obliczyć:

a) energię całkowitą $E$ elektronu,

b) promienie orbit,

c) prędkość i przyspieszenie elektronu na pierwszej orbicie.

## POLE GRAWITACYJNE

**D56.** Sztuczny satelita krąży dookoła Ziemi (promień $R$) po orbicie kołowej o promieniu $r$. Obliczyć okres obiegu satelity. Obliczenia numeryczne wykonać dla $r$=7938km, $R$=6280km, $g$ = 9.8 m/s$^2$.

**D57.** Na jakiej wysokości ciężar ciała jest $n$ razy mniejszy od ciężaru tego ciała na powierzchni Ziemi? Promień Ziemi $R$=6370 km. Szczegółowe obliczenia numeryczne wykonaj dla $n$=9.

## ZASADA ZACHOWANIA PĘDU, ZDERZENIA

**D58.** Człowiek o masie $m_1$ = 60 kg biegnący z prędkością $v_1$ = 8 km/h dogania wózek o masie $m_2$ = 80 kg, który jedzie z prędkością $v_2$ = 2.8 km/h i wskakuje na ten wózek;
a) z jaką prędkością będzie poruszał się wózek z człowiekiem?
b) Jaka będzie prędkość wózka z człowiekiem w przypadku, gdy człowiek przed skokiem będzie biegł naprzeciw wózka?

**D59.** Od dwustopniowej rakiety o masie $M$=1200 kg, po osiągnięciu szybkości v=200 m/s, oddzielił się pierwszy stopień o masie $m$=700 kg. Jaką szybkość osiągnął drugi stopień rakiety, jeśli szybkość pierwszego stopnia zmalała w wyniku tej operacji do $v_1$ = 150 m/s?

**D60.** Granat lecący w pewnej chwili z prędkością v=10 m/s rozerwał się na dwa odłamki. Większy odłamek, którego masa stanowiła $p$=60% masy całego granatu, kontynuował lot w pierwotnym kierunku, lecz ze zwiększoną prędkością $v_1$ = 25m/s. Znaleźć kierunek i wartość prędkości mniejszego odłamka.

**D61.** Masa startowa rakiety (z paliwem) wynosi $m_1$ = 2 kg. Po wyrzuceniu paliwa o masie $m_2$ =400 g rakieta wznosi się pionowo na wysokość $h$=1000 m. Oblicz prędkość wyrzuconego paliwa.

**D62.** Na nieruchomej łodzi o masie $m_0$ stoi dwóch ludzi o masach $m_1$ i $m_2$, jeden na dziobie, drugi na rufie. W pewnej chwili skaczą oni z prędkościami względem łodzi odpowiednio $u_1$ i $u_2$. Kierunki ich prędkości leżą na osi łodzi a zwroty są przeciwne. Opisz zachowanie się łodzi zaniedbując opór wody.

**D63.** Poruszające się ciało o masie $m_1$ zderza się z ciałem nieruchomym o masie $m_2$. Uważając zderzenie za idealnie niesprężyste i centralne, oblicz jaka część $\varepsilon$ początkowej energii kinetycznej $E_{k1}$ zamienia się na ciepło. Zadanie to rozwiąż najpierw w postaci ogólnej a następnie w przypadku: a) $m_1 = m_2$; b) $m_1 = 9m_2$.

**D64.** Ciało o masie $M$ spada z wysokości $H$. W połowie wysokości zostaje trafione poziomo lecącym pociskiem, który wbija się w nie niesprężyście. Masa pocisku wynosi $m$ = 0.1 $M$, a jego prędkość wynosi v. Obliczyć prędkość układu w momencie upadku na Ziemię.

## ŚRODEK MASY

**D65.** Ciało o masie $m_1$ = 2kg, poruszające się z prędkością $\vec{v}_1 = (3,2,-1)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zderza się niesprężyście z drugim ciałem o masie $m_2$ = 3kg, poruszającym się z prędkością

$\vec{v}_2 = (2,2,4)\,\frac{m}{s}$. Oblicz prędkość końcową $\vec{v}$ połączonych ciał. Jakie energie kinetyczne miały te ciała przed zderzeniem, w układzie środka masy?

## MOMENT BEZWŁADNOŚCI

**D66.** Znaleźć moment bezwładności $I$ jednorodnego sześcianu względem jednej z jego krawędzi. Masa sześcianu wynosi $m$, a długość jego krawędzi jest równa $a$ (rys. jak do zad 68, $a = b = c$, oś $OX$ przesunięta równolegle do krawędzi).

**D67.** Oblicz tensor bezwładności bryły sztywnej składającej się z siedmiu punktów materialnych: $A_1$ (1,0,2); $A_2$ (0,0,2); $A_3$ (-1,1,0); $A_4$ (3,0,0); $A_5$ (-1,-1,-1); $A_6$ (0,0,0); $A_7$ (2,2,2). Współrzędne punktów podane są w m, masy punktów z indeksami parzystymi wynoszą 1kg, a z indeksami nieparzystymi 2kg.

**D68.** Oblicz tensor bezwładności bryły sztywnej składającej się z ośmiu punktów materialnych o masie 1kg każdy, leżących w wierzchołkach sześcianu o boku 2m, względem układu odniesienia, którego osie są równoległe do krawędzi sześcianu, a środek znajduje się w
a) środku sześcianu
b) środku jednego z boków
c) wierzchołku sześcianu.

**D69.** Oblicz tensor bezwładności jednorodnego sześcianu o boku 1m i masie 1kg względem układu odniesienia, którego osie równoległe są do krawędzi sześcianu, a środek znajduje się w jednym z wierzchołków sześcianu (rys. jak do zad.68, $a=b=c$, początek układu współrzędnych przesunięty odpowiednio do wierzchołka sześcianu)

## RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ

**D70.** Jaką siłą należy przycisnąć klocek hamulcowy do powierzchni koła rozpędowego o momencie bezwładności $I$ i promieniu $R$, aby zatrzymać je po upływie czasu $t$, jeżeli wiruje ono z prędkością kątową $\omega_0$? Współczynnik tarcia wynosi $f$.

**D71.** Koło zamachowe o momencie bezwładności $I = 245\,\mathrm{kg\,m^2}$ obraca się wykonując w chwili początkowej $n$=20 obr/s i po pewnym czasie zatrzymuje się wykonawszy $N$=1000 obrotów. Oblicz moment sił tarcia oraz czas, po którym koło zatrzymało się.

**D72.** Jednorodny walec o masie $m$ i promieniu podstawy $R$ obraca się jednostajnie dookoła swej osi symetrii z prędkością kątową $\omega$.
a) Oblicz energię kinetyczną obracającego się walca;
b) Oblicz moment stałej siły zatrzymującej walec w czasie $t$.
Obliczenia numeryczne wykonaj dla $m$=2 kg, $R$=30 cm, $\omega$ = 20 rad/s, $t$=9s.

**D73.** Do obwodu koła rowerowego o masie $m$=2 kg przyłożono stałą siłę styczną $F$=10 N i wprawiono je w ruch obrotowy wokół nieruchomej osi. Jaką energię kinetyczną uzyska koło po upływie czasu $t$=5 s od rozpoczęcia działania siły? Koło rowerowe należy rozpatrywać jako cienkościenną obręcz.

**D74.** Na bloczku o promieniu $R$ i momencie bezwładności $I_0$ jest nawinięta nić, na końcu której wisi ciało o masie $m$. Jaką prędkość kątową będzie miał bloczek w chwili, gdy ciało opuści się na odległość $h$?

**D75.** Pionowy słup o wysokości $h$=5m po podpiłowaniu przy podstawie pada na ziemię. Znaleźć liniową prędkość jego górnego końca w chwili uderzenia o ziemię.

### ZASADA ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU

**D76.** Stolik poziomy obraca się z prędkością kątową $\omega$. Na środku stolika stoi człowiek i trzyma w wyciągniętych rękach w odległości $l$ od osi obrotu dwa ciężarki o masie $m$ każdy. Jak zmieni się prędkość obrotów stolika gdy człowiek opuści ręce? Ile razy wzrośnie energia kinetyczna układu? Moment bezwładności stolika wraz z człowiekiem (bez ciężarków) wynosi $I$.

**D77.** Na poziomo wirującym pręcie o masie $M$, przez środek którego przechodzi prostopadle do ziemi oś, siedzi małpka o masie $m$. Pręt ma długość $l$ i wiruje z prędkością kątową $\omega_1$. Jaka będzie prędkość kątowa po przejściu małpki do środka ?

## DRGANIA HARMONICZNE

### DRGANIA SWOBODNE

**D78.** Równanie ruchu punktu dane jest w postaci: $x = \sin(\pi t/6)$. Wyznaczyć chwile $t_v$ i $t_a$, w których występuje maksymalna prędkość i maksymalne przyspieszenie.

**D79.** Maksymalna prędkość punktu drgającego ruchem harmonicznym $v_0 = 2$ m/s, a maksymalne przyspieszenie $a_0 = 3.14\,\mathrm{m/s^2}$. Napisać równanie ruchu tego punktu (zależność wychylenia od czasu), jeżeli wiadomo, że faza początkowa $\delta = 0$.

**D80.** Drgający harmonicznie kamerton jest źródłem fali akustycznej o długości $\lambda$ i prędkości v. Obliczyć maksymalną prędkość punktu kamertonu drgającego z amplitudą $A$. Po jakim czasie prędkość tego punktu będzie $n$ razy mniejsza od prędkości maksymalnej ? Obliczenia numeryczne wykonać dla $\lambda$ = 1 m, v=340 m/s, $A$=0.5 mm, $n$=2.

**D81.** Jak należy zmienić długość $l$ wahadła matematycznego, aby skompensować wpływ przyrostu temperatury $\Delta T$ na jego okres wahań? Współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej nici wahadła wynosi.$\lambda$. Obliczenia numeryczne wykonać dla $l$=100 cm, $\Delta$ T=50 K, $\lambda = 2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.

**D82.** Wahadło matematyczne o długości $l_1$ = 81 cm wykonuje w pewnym czasie $n_1$ =20 drgań. Jak należy zmienić długość tego wahadła, aby w tym samym czasie uzyskać $n_2$ =18 drgań ?

**D83.** Jeżeli wagon jest w spoczynku, to częstotliwość drgań wahadła matematycznego znajdującego się w tym wagonie wynosi $f$=0.5 Hz. Oblicz częstotliwość drgań tego wahadła w wagonie poruszającym się po torze poziomym z przyspieszeniem $a = 4.9\,\mathrm{m/s^2}$. Płaszczyzna drgań wahadła jest równoległa do kierunku ruchu wagonu. Przyspieszenie ziemskie $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

**D84.** Okres wahań matematycznego wahadła wykonanego z nieprzewodzącej nici i małej kulki o masie $m$=25 g wynosi $T_1$ = 1.5 s. Po naładowaniu kulki ładunkiem $q = 1.5 \cdot 10^{-3}$ C okres wahadła wynosi $T_2$ = 1.12 s. Oblicz natężenie pola elektrycznego Ziemi (zakładamy, że kierunek tego pola pokrywa się z kierunkiem pola grawitacyjnego).

**D85.** Wyobraźmy sobie szyb przecinający na wskroś kulę ziemską wzdłuż średnicy. Podać równanie ruchu ciała, które wpadło w ten szyb, biorąc pod uwagę zmienną wartość siły ciężkości wewnątrz Ziemi. Obliczyć czas, w ciągu którego ciało osiągnie środek Ziemi oraz prędkość z jaką go minie.
*Wskazówka*: Przy założeniu, że gęstość Ziemi jest stała siła działająca na ciało we wnętrzu Ziemi jest wprost proporcjonalna do jego odległości od środka Ziemi.

**D86.** Na gumce o długości $l$ i promieniu $r$ wisi odważnik o masie $m$. Wiedząc, że moduł Younga dla tej gumy jest równy $E$ znaleźć okres drgań odważnika.

**D87.** Na cienkiej nici o długości $l$ zawieszano kulę o promieniu $R$=0.1$l$. Wyznaczyć błąd względny $\varepsilon$, jaki zostanie popełniony przy obliczaniu okresu drgań, jeśli potraktuje się ten układ jako wahadło matematyczne.

**D88.** Płytka wykonuje drgania harmoniczne w kierunku poziomym o okresie $T$=5 s. Spoczywający na tej płytce przedmiot zaczyna poruszać się po powierzchni płytki z chwilą, gdy amplituda drgań osiąga wartość $A$=0.4 m. Jaki jest współczynnik tarcia pomiędzy płytką a przedmiotem ?

## SKŁADANIE DRGAŃ

**D89.** Punkt wykonuje równocześnie dwa wzajemnie prostopadłe drgania $x = 2\sin \pi t$ oraz $y = 2\sin(\pi t + \pi/2)$. Znaleźć tor ruchu punktu.

**D90.** Napisać równanie ruchu otrzymanego w wyniku nałożenia dwóch jednakowo skierowanych ruchów drgających harmonicznych o jednakowym okresie 8 s i o identycznej amplitudzie 0.02 m. Różnica faz między tymi drganiami wynosi $\pi/4$, a faza początkowa jednego z tych drgań jest równa zeru.

### DRGANIE TŁUMIONE I WYMUSZONE

**D91.** Logarytmiczny dekrement drgań tłumionych wahadła równa się $\delta = 0.02$. Obliczyć ile razy zmniejszy się amplituda drgań po 100 całkowitych wahnięciach.

**D92.** Określić logarytmiczny dekrement drgań tłumionych wahadła o długości $l=50$ cm, jeżeli w ciągu 8 min. wahań traci ono 99% swojej energii.

**D93.** Wagon kolejowy o ciężarze $Q_0 = 21582$ N jest zawieszony na 4 resorach. Przy zwiększeniu obciążenia o $Q_1 = 9810$ N resor ugina się o $s = 0.016$ m. Dla jakiej prędkości pociągu mogą wystąpić rezonansowe drgania wagonu pod wpływem uderzeń kół o złącza szyn? Długość szyn $l=12.5$ m.

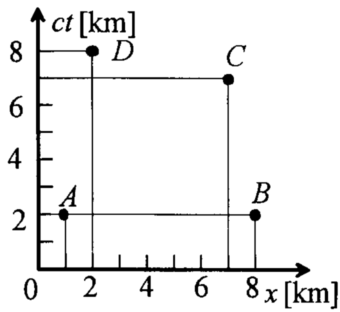
## MECHANIKA RELATYWISTYCZNA

### TRANSFORMACJE LORENTZA

**D94.** W tym samym miejscu korony słonecznej w odstępie 12s nastąpiły dwa wybuchy. Rakieta poruszająca się ze stałą prędkością względem Słońca zarejestrowała oba te zdarzenia w odstępie 13s.
a) Ile wynosi odległość przestrzenna $\Delta l$ między wybuchami w układzie związanym z poruszającą się rakietą?
b) Jaką wartość i jaki kierunek ma wektor prędkości rakiety?

**D95.** Czy można znaleźć taki układ odniesienia, w którym Chrzest Polski i bitwa pod Grunwaldem zaszłyby:
a) w tym samym miejscu?
b) w tym samym czasie?

**D96.** Na diagramie Minkowskiego przedstawione są cztery zdarzenia $A$, $B$, $C$ i $D$. Sklasyfikować interwały czasoprzestrzenne między każdą parą zdarzeń. Podać charakter związku przyczynowego dla każdej pary zdarzeń, implikowany przez typ interwału czasoprzestrzennego.



**D97.** Długość nieruchomego pociągu jest taka sama jak długość tunelu. Pociąg ten jedzie z prędkością v. Czy początek i koniec pociągu miną końce tunelu dokładnie w tym samym momencie czasu?

**D98.** Jak długo trwał przejazd pociągu przez tunel w sytuacji opisanej w poprzednim zadaniu? Czas przejazdu $\Delta t$ określamy jako odstęp czasu pomiędzy momentem, kiedy pociąg mija wlot tunelu i chwilą gdy koniec ostatniego wagonu znajduje się przy końcowej krawędzi tunelu. Czy czasy mierzone przez obserwatora zewnętrznego i pasażera pociągu będą jednakowe?

## ENERGIA RELATYWISTYCZNA

**D99.** Znajdź energię wydzielającą się przy powstawaniu z protonów i neutronów 1 g helu, korzystając z następujących danych: masa protonu $m_p = 1.007277$ jma, masa neutronu $m_n = 1.008665$ jma, masa jądra helu $m_{He} = 4.001509$ jma, 1 jma= $1.6604 \cdot 10^{-27}$ kg, liczba Avogadro $N_A = 6.025 \cdot 10^{23}$ mol$^{-1}$. Prędkość światła w prożni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

**D100.** Kreację pary cząstek elektron-pozytron uzyskano za pomocą promieniowania elektromagnetycznego o częstotliwości $f = 6 \cdot 10^{20}$ Hz. Oblicz energię kinetyczną uzyskanych cząstek. Masa spoczynkowa elektronu $m_0 = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, stała Plancka $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js. Prędkość światła w prożni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

**D101.** Relatywistyczna masa poruszającej się czastki jest $n$=1.25 razy większa od jej masy spoczynkowej. Oblicz prędkość czastki. Prędkość światła w prożni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

**D102.** Cząstka o masie spoczynkowej $m_0$ przyspieszona została do prędkości v=0.6c. Prędkość światła w próżni c=3*10 m/s. $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Jak zmieniła się masa cząstki i jaka jest jej energia kinetyczna? Obliczenia numeryczne wykonać dla $m_0 = 6.64 \cdot 10^{-27}$ kg.

**D103.** W wyniku rozpadu pewnej cząstki powstają dwie nowe cząstki o masach $m_1$ i $m_2$. Wartości pędów powstałych cząstek wynoszą odpowiednio $p_1$ i $p_2$, a kąt między nimi równy jest $\alpha$. Jaka była masa $M$ rozpadającej się cząstki?

**D1.** a) $\vec{v}_1 = (3+2t, 1, 2)$, $\vec{a}_1 = (2, 0, 0)$

b) $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (-3-2t, 1, -1)$

c) $\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (-2, 0, 0) = -\vec{a}$.

**D2.** $t = 2\frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 12$ godz.

**D3.** Aby przepłynąć rzekę prostopadle do jej brzegów należy skierować łódź pod prąd pod kątem $\alpha$, $\sin\alpha = \frac{v_2}{v_1}$, względem brzegu rzeki. Czas przepłynięcia rzeki wyniesie $t = \frac{s}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}} = 20$ s.

**D4.** $t_a = \frac{s}{v_1} = 180$, $t_b = \frac{s}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}} = 181.42$ min.

**D5.** $AB = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} = 31$cm.

**D6.** $h_x = h\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 24$ m.

**D7.** $a = g \operatorname{ctg} \alpha$.

**D8.** $t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin(2\alpha)}}$, gdzie $d$ - szerokość domu, $\alpha$ - kąt nachylenia dachu, $t = t_{\min}$ dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

**D9.** $v = \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}$, $t = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g}$.

**D10.** $H = \frac{v_0^2(n^2 - 1)}{2g} = 39.2$ m

**D11.** $t = \frac{2v_0}{g} = 4$ s., $v_k = v_0\sqrt{5} = 43.8$ m/s.

**D12.** $a_n = v_0 g\left(v_0^2 + g^2 t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 6.9\,\text{m/s}^2$.

**D13.** $y = h + S \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{gS^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, $h$ - wysokość, z której chłopiec rzuca piłką.

**D14.** $t = v_0\frac{\sin\alpha}{g}$.

**D15.** $v_{sr} = \frac{2v_1 v_2}{v_2 + v_1} = 80$ km/h. Droga przebyta przez pojazd jest równa polu pod krzywą przedstawiającą zależność prędkości tego pojazdu od czasu.

**D16.** $a = (n-1)\frac{v_1}{t} = 2.5\,\text{m/s}^2$, $v = v_0\frac{n+1}{2} = 15$ m/s, $s = v_0 t\frac{n+1}{2} = 120$ m.

**D17.** a) $v = A - 2Bt + 3Ct^2$, $a = -2Bt + 6Ct$,

b) $s = 24$ m, $v = 38$ m/s, $a = 42\,\text{m/s}^2$

**D18.** a) $a = -\frac{v_0 t_0}{t^2} = -\frac{v^2}{v_0 t_0}$;

b) $S = v_0 t_0 \ln\frac{t}{t_0}$; $v = v_0 \exp\left(-\frac{S}{v_0 t_0}\right)$.

**D19.** a) $x = \frac{b}{2v_0}y^2$

b) $a = \sqrt{g^2 + b^2 v_0^2}$, $a_n = \sqrt{g^2 + \frac{b^2 v_0^2}{1+b^2 t^2}}$, $a_s = \frac{b^2 v_0^2 t}{\sqrt{1+b^2 t^2}}$

**D20.** v= $\varepsilon r t = 5.25$ m/s

**D21.** W układzie biegunowym $r(\varphi) = r_0 \exp\left(-\frac{c\varphi}{\sqrt{v^2-c^2}}\right)$, $r_0$ - początkowa odległość samolotu od początku układu współrzędnych, $c$ - prędkość dźwięku.

**D22.** $r(t) = r_0 + bt$; $\varphi(t) = \frac{a}{b} \ln \frac{bt+r_0}{r_0}$; $r = r_0 \exp \frac{b}{a}\varphi$.

**D23.** a) $F = \frac{mv^2}{2s} = 10816$ N,

b) $t = \frac{2s}{v} = 1.25$ s

**D24.** $F > 2F_n = 39.24$ N. Siła nie zmieni się pomimo tarcia między ciałem a stołem. $F_n$ - siła naprężenia nici.

**D25.** $k = \frac{gt \sin\alpha - v}{gt \cos\alpha} = 0.23$

**D26.** $v_0 = \sqrt{2gl(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$, $t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$.

**D27.** $R = P \,\mathrm{tg}\,\alpha = 866$ N, $F = \frac{P}{\cos\alpha} = 1000$ N.

**D28.** a) $F = mgf = 500$ N,

b) $F = mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) = 915$ N,

c) $F = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 66$ N.

**D29.** $t = \sqrt{\frac{l(m_1+m_2)}{g(m_2-m_1)}} = 1$ s.

**D30.** $t = \frac{m}{b} \ln\left(1 + \frac{b}{mg} v_0\right)$, $h = \frac{m}{b}\left[\left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) - gt\right]$.

**D31.** v= $u \ln \frac{m_0}{m} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$, $F = u\mu$.

**D32.** $P = v^2 \mu = 20$ W, gdzie v - predkość transportera,

$\mu = \frac{dm}{dt}$ – szybkość sypania się piasku na trnsporter.

**D33.** $R = v^2 \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{g} = 17.6$ m.

**D34.** $k = \frac{Rg \,\mathrm{tg}\,\alpha - v^2}{Rg + v^2 \,\mathrm{tg}\,\alpha} = 0.057$

**D35.** $n = \frac{g}{4\pi\varepsilon l}$, $n$ - ilość obrotów

**D36.** $\Delta x = \frac{8\pi v_0^3}{Tg^2} \sin\varphi \cos\alpha \sin^2\alpha = 1545.5$ m.

**D37.** $T = \frac{2\pi}{\omega \sin\varphi} = \frac{T_z}{\sin\varphi}$, gdzie $\omega$ - prędkość kątowa Ziemi, $T_z = 24$ h - okres obrotu Ziemi.

**D38.** $v_0 = \sqrt{2gh[(1-k)^{-n} - 1]}$

**D39.** a) $H = \frac{5}{2}r$; b) $H = \frac{7}{4}r$

**D40.** $M = \frac{1}{2} m v\left(fg + \frac{v}{t}\right) = 10.3$ kW.

**D41.** $\mathrm{v}=\dfrac{M}{mg(\sin\alpha+f\cos\alpha)}=10.4\,\mathrm{m/s}.$

**D42.** $x=l\,\dfrac{\sin\alpha-f\cos\alpha}{f}=16\,\mathrm{m}.$

**D43.** $R\,arc\cos\frac{2}{3}=1.26\,\mathrm{m},\ x=R\left[\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{27}\left(10-\sqrt{10}\right)\right]=2.19\,\mathrm{m}.$

$s$ - droga przebyta po powierzchni dużej kuli, $x$ - odległość upadku kuli

**D44.** $\Delta\mathrm{v}=\frac{eEs}{m\mathrm{v}}=2.64\cdot10^{6}\,\mathrm{m/s}.$

**D45.** $U=4hdU_1/l^2=360\,\mathrm{V}.$

**D46.** $n=\frac{mgd}{eU}=9810$

**D47.** $q=4\pi r^3 g\frac{\rho_2-\rho_1}{3E}=1.11\cdot10^{-8}\,\mathrm{C}.$

**D48.** $\vec{r}=\vec{r}_0+\mathrm{v}_0t\,\vec{i}+\frac{QE}{2m}t^2\,\vec{j}=\vec{r}_0+\mathrm{v}_0t\,\vec{i}+5t^2\,\vec{j},$

$\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{v}_0\,\vec{i}+\frac{QE}{m}t\,\vec{j}=\mathrm{v}_0\,\vec{i}+10\,\vec{j}$ $\qquad\vec{r}_0$ - położenie początkowe ciała

**D49.** a) $R=\dfrac{\sqrt{2E_k m}}{eB}$; b) $\nu=\dfrac{eB}{2\pi m}.$

**D50.** $q=\dfrac{2E_k}{\mathrm{v}BR}=3.2\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}.$

**D51.** $\frac{m_1}{m_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=4$

**D52.** $\frac{q}{m}=\dfrac{E^2}{2UB^2}=4.81\cdot10^{7}\ \mathrm{C/kg}$

**D53.** Pole jest potencjalne, potencjał pola $U(x,y,z)=-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}y^4+\mathrm{const}$, a praca $W=U(4,4,0)-U(1,2,0)=-204\,\mathrm{J}.$

**D54.** $r_0=\frac{2a}{b};\ \left.\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0}=\dfrac{b^4}{8a^3}>0$ - równowaga trwała

**D55.** Z danej postaci energi potencjalnej wynika, że siła działająca na elektron od jądra wynosi co do wartości $F=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ i jest skierowana do środka. Porównując ją z siłą odśrodkową otrzymujemy związek między v i $r$. Korzystając dodatkowo z postulatu Bohra wyzna czamy v i $r$ jako funkcje $n$. Otrzymujemy:

a) $E=E_n=-\dfrac{me^2}{8\varepsilon_0h^2n^2},$ $\quad$ b) $r=r_n=\dfrac{\varepsilon_0^2h^2}{\pi me^2}n^2,$ $\quad$ c) $\mathrm{v}_1=\dfrac{e^2}{2h\varepsilon_0},\ a_1=\dfrac{\pi me^6}{4h^4\varepsilon_0^3}.$

**D56.** $T=2\pi\frac{r}{R}\sqrt{\frac{r}{g}}=1\,\mathrm{h}\,59\,\mathrm{min}.$

**D57.** $h=R(\sqrt{n}-1)=12740\,\mathrm{km}.$

**D58.** a) $\mathrm{v}=\dfrac{(m_1\mathrm{v}_1+m_2\mathrm{v}_2)}{m_1+m_2}=5.03\ \mathrm{km/h}.$

b) $\mathrm{v}=\dfrac{m_1\mathrm{v}_1-m_2\mathrm{v}_2}{m_1+m_2}=1.83\ \mathrm{km/h}.$

**D59.** $\mathrm{v}_2=\dfrac{M\mathrm{v}-m\mathrm{v}_1}{M-m}=270\,\mathrm{m/s}.$

**D60.** $v_2 = \frac{pv_1 - v}{1-p} = 12.5\,\mathrm{m/s}$.

**D61.** $v = \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)\sqrt{2gh} = 560\,\mathrm{m/s}$.

**D62.** Przyjmując za dodatni zwrot prędkości $u_2$, $v = \frac{m_2u_2 - m_1u_1}{m_0}$.

**D63.** $\varepsilon = \frac{E_{k1} - E_k}{E_{k1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. a) $\varepsilon = 0.5$ b) $\varepsilon = 0.1$

**D64.** Na skutek zderzenia z lecącym poziomo pociskiem ciało uzyskuje prędkość, której składowa pozioma równa jest $\frac{mv}{m+M}$, a pionowa $\frac{M\sqrt{gH}}{m+M}$. Prędkość końcowa $v_k$ wynosi

$$v_k = \sqrt{\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v^2 + \left(\frac{M}{m+M}\right)^2 gH + gH}\,.$$

**D65.** $\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = (2.4, 2, 2)\,\mathrm{m/s}$. W układzie środka masy prędkości ciał przed zderzeniem wynoszą $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}$, $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}$, a ich energie kinetyczne

$$E_{k1} = \frac{m_1u_1^2}{2} = 9.36\,\mathrm{J},\quad E_{k2} = \frac{m_2u_2^2}{2} = 6.24\,\mathrm{J}.$$

**D66.** $I = \rho\int_0^a\int_0^a\int_0^a\left(y^2 + z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\rho a^5 = \frac{2}{3}ma^2$

**D67.** $I_{xx} = \sum_{i=1}^{7} m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) = 34\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{yy} = 45\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{zz} = 35\,\mathrm{kg\,m^2}$,

$I_{xy} = \sum_{i=1}^{7} m_ix_iy_i = -8\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{xz} = -14\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{yz} = -10\,\mathrm{kg\,m^2}$.

**D68.** a) Przyjmując, że współrzędne punktów (w m) wynoszą:

$A_1 = (1,1,1)$; $A_2 = (-1,1,1)$; $A_3 = (1,-1,1)$; $A_4 = (1,1,-1)$;
$A_5 = (-1,-1,1)$; $A_6 = (-1,1,-1)$; $A_7 = (1,-1,-1)$; $A_8 = (-1,-1,-1)$;

składowe tensora bezwładności są równe odpowiednio:

a) $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = 16\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.
b) $I_{xx} = I_{yy} = 24\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{zz} = 32\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{xy} = -8\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{xz} = I_{yz} = -4\,\mathrm{kg\,m^2}$,
c) $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = 32\,\mathrm{kg\ m^2}$, $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = -8\,\mathrm{kg\ m^2}$.

**D69.** $I_{xx} = \rho\int_0^a\int_0^a\int_0^a\left(y^2 + z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\rho a^5 = \frac{2}{3}ma^2 = \frac{2}{3}\,\mathrm{kg\ m^2}$.

$I_{xy} = -\rho\int_0^a\int_0^a\int_0^a xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{4}\rho a^5 = -\frac{1}{4}ma^2 = -\frac{1}{4}\,\mathrm{kg\ m^2}$.

Z symetrii $I_{zz} = I_{yy} = I_{xx}$, a $I_{yz} = I_{xz} = I_{xy}$.

**D70.** $F = \frac{I\omega_0}{fRt}$

**D71.** $t = 2\frac{N}{n} = 100\,\mathrm{s}$, $M_T = I\pi\frac{n^2}{N} = 308\,\mathrm{Nm}$.

**D72.** a) $E_k = mR^2\omega^2/4 = 18\,\mathrm{J}$, b) $M_T = mR^2\frac{\omega}{2t} = 0.2\,\mathrm{Nm}$.

**D73.** $E = \frac{F^2t^2}{2m} = 625\,\mathrm{J}$.

**D74.** $\omega = \sqrt{\frac{2hmg}{I_0+mR^2}}$.

**D75.** $v = \sqrt{3gh}$.

**D76.** Zakładając, że po opuszczeniu hantle znajdują się na osi obrotu stolika, będzie on miał prędkość kątową $\omega_1 = \left(1+\frac{2ml^2}{I}\right)\omega$, a energia kinetyczna układu wzrośnie $\left(1+\frac{2ml^2}{I}\right)$ razy.

**D77.** $\omega_2 = \omega_1\left(1+\frac{3m}{M}\right)$.

**D78.** $t_v = 6k,\ \ t_a = 3+6k,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$

**D79.** $x = \frac{v_0^2}{a_0}\sin\left(\frac{a_0 t}{v_0}\right) = 1.27\sin(1.57\,t)$.

**D80.** $v_{max} = 2\pi A\frac{v}{\lambda} = 1.07$ m/s, $\ t = \frac{\lambda}{6v} = 4.9\cdot 10^{-4}$ s.

**D81.** $\Delta l = \frac{l\lambda\Delta T}{1+\lambda\Delta T} = 1$ mm.

**D82.** $\Delta l = l_1\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}-1\right) = 19$ cm - wahadło należy o $\Delta l$ wydłużyć

**D83.** $f_x = f\left(1+\frac{a^2}{g^2}\right)^{\frac{1}{4}} = 0.53$ Hz.

**D84.** $E = mg\frac{\left(T_1^2/T_2^2-1\right)}{q} = 130$ V/m.

**D85.** Siła działająca na ciało wewnątrz Ziemi wynosi $F = -\frac{mg}{R}x$, gdzie $R$ - promień Ziemi, $g$ - przyspieszenie ziemskie, $m$ - masa ciała, $x$ - współrzędna poruszającego się ciała w układzie, którego początek znajduje się w środku Ziemi. Równanie ruchu: $x = R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)$, okres dtgań: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. Ciało osiągnie środek Ziemi po czasie $T/4$, a jego prędkość równa jest wtedy $v = \sqrt{gR}$.

**D86.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\pi r^2 E}}$.

**D87.** Okres drgań wahadła $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$, gdzie $I = \frac{2}{5}mR^2 + m(l+R)^2$ - moment bezwładności kuli, okres drgań wahadła matematycznego $T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\varepsilon = \frac{T-T_m}{T_m} = \sqrt{1.214}-1 \cong 0.1 = 10\%$.

**D88.** $\mu = 4\pi^2\frac{A}{gT^2} \approx 0.1$

**D89.** równanie elipsy $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4} = 1$.

**D90.** $x = 3.7\cdot 10^{-2}\sin\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$ m.

**D91.** $n = \exp(k\delta) = \exp(2) = 7.39$, gdzie $k = 100$.

**D92.** $\delta = 2\pi\sqrt{\frac{gt^2}{l}\frac{E_t}{E} - 1} \approx \frac{2\pi}{t}\sqrt{\frac{l}{g}\frac{E_0}{E_t}} \approx 0.3$, gdzie $\frac{E_t}{E_0} = 0.01$ jest stosunkiem energii po czasie $t$ i początkowej.

**D93.** $v = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{Q_1 g}{Q_0 s}} \approx 66.4$ m/s= 239 km/h.

**D94.** a) Z niezmiennczości interwału czasoprzestrzenego $\Delta l = 1.5 \cdot 10^9$ m.
b) v= $1.15 \cdot 10^8$ m/s.

**D95.** Interwał czasoprzestrzenny między tymi zdarzeniami jest typu czasowego. Można znaleźć układ, w którym oba zdarzenia zajdą w tym samym miejscu; prędkość tego układu v≅ 1.1 km/rok. Natomiast nie można znaleźć układu, w którym te zdarzenia zaszłyby w tym samym czasie.

**D96.**
$$s_{AB}^2 = -49\,\text{km}^2,\ s_{AC}^2 = -11\,\text{km}^2,\ s_{AD}^2 = 35\,\text{km}^2,$$
$$s_{BC}^2 = 24\,\text{km}^2,\ s_{BD}^2 = 0,\ s_{CD}^2 = -24\,\text{km}^2.$$

Interwały pierwszy, drugi i szósty są typu przestrzennego, interwały trzeci i czwarty typu czasowego, a interwał piąty jest interwałem zerowym.

**D97.** Oznaczając przez $t_1$ moment czasu, w którym koniec ostatniego wagonu mija wlot tunelu a przez $t_2$ moment czasu, w którym początek pociągu mija wylot tunelu, a przez $l_0$ długość tunelu
$$t_2 - t_1 = \frac{l_0}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right).$$

**D98.** Czas mierzony przez oberwatora zewnętrznego $\Delta t = \frac{l_0}{v}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)$;

czas mierzony przez pasażera $\Delta t_p = \dfrac{\left(\Delta t - \frac{v}{c^2} l_0\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \Delta t.$

**D99.** $E = [2(m_p + m_n) - m_{He}]c^2 N_A \frac{m}{\mu_{He}} = 6.83 \cdot 10^{11}$ J.

**D100.** $E = hf - 2m_0c^2 = 2.34 \cdot 10^{-13}$ J.

**D101.** v= $c\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.8 \cdot 10^8$ m/s.

**D102.** $m = 1.25m_0 = 8.3 \cdot 10^{-27}$, $E_k = 0.25m_0c^2 = 1.5 \cdot 10^{-10}$ J.

**D103.** $M^2 = \left(m_1^2 + m_2^2\right) + 2\left(\sqrt{\left(p_1^2 + m_1^2c^2\right)\left(p_2^2 + m_2^2\right)} - p_1p_2\cos\alpha\right)/c^2.$