实验一　信号、系统及系统响应

一、实验目的

1、 熟悉理想采样的性质，了解信号采样前后的频谱变化，加深对采样定理的理解。
2、 熟悉离散信号和系统的时域特性。
3、 熟悉线性卷积的计算编程方法：利用卷积的方法，观察、分析系统响应的时域特性。
4、 掌握序列傅氏变换的计算机实现方法，利用序列的傅氏变换对离散信号、系统及系统响应进行频域分析。

二、实验原理

（一）连续时间信号的采样

采样是从连续时间信号到离散时间信号的过渡桥梁，对采样过程的研究不仅可以了采样前后信号时域和频域特性发生的变化以及信号内容不丢失的条件，而且有助于加深对拉氏变化、傅氏变换、z 变换和序列傅氏变换之间关系的理解。

对一个连续时间信号进行理想采样的过程可以表示为该信号的一个周期冲激脉冲的乘积，即

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)M(t) \qquad (1\text{-}1)$$

其中 $\hat{x}_a(t)$ 是连续信号 $x_a(t)$ 的理想采样， $M(t)$ 是周期冲激脉冲

$$M(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \qquad (1\text{-}2)$$

它也可以用傅立叶级数表示为：

$$M(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jm\Omega_s t} \qquad (1\text{-}3)$$

其中 T 为采样周期， $\Omega_s = 2\pi / T$ 是采样角频率。设 $X_a(s)$ 是连续时间信号 $x_a(t)$ 的双边拉氏变换，即有：

$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)e^{-st}dt \qquad (1\text{-}4)$$

此时理想采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的拉氏变换为

$$\hat{X}_a(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}_a(t)e^{-st}dt \qquad (1\text{-}5)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{jm\Omega_s t}e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)e^{-(s-jm\Omega_s)t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X_a(s-jm\Omega_s)$$

作为拉氏变换的一种特例，信号理想采样的傅立叶变换

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}X_a[j(\Omega-m\Omega_s)] \qquad (1\text{-}6)$$

由式(1-5)和式(1-6)可知，信号理想采样后的频谱是原信号频谱的周期延拓，其延拓周期等于采样频率。根据 Shannon 取样定理，如果原信号是带限信号，且采样频率高于原信号最高频率分量的 2 倍，则采样以后不会发生频谱混淆现象。

在计算机处理时，不采用式(1-6)计算信号的频谱，而是利用序列的傅立叶变换计算信号的频谱，定义序列 x(n) $=x_a(nT)=\hat{x}_a(t)=x_a(t)M(t)$，根据 Z 变换的定义，可以得到序列 x(n) 的 Z 变换为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n} \qquad (1\text{-}7)$$

以 $e^{j\omega}$ 代替上式中的 z，就可以得到序列 x(n)的傅立叶变换

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n} \qquad (1\text{-}8)$$

式（1-6）和式（1-8）具有如下关系：

$$\hat{X}_a(j\Omega)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} \qquad (1\text{-}9)$$

由式（1-9）可知，在分析一个连续时间信号的频谱时，可以通过取样将有关的计算转化为序列傅立叶变换的计算。

（二）有限长序列分析

一般来说，在计算机上不可能，也不必要处理连续的曲线 $X(e^{j\omega})$，通常，我们只要观察、分析 $X(e^{j\omega})$ 在某些频率点上的值。对于长度为 N 的有限长序列

$$x(n)=\begin{cases} f(n), 0 \le n \le N-1 \\ 0, \text{其他} n \end{cases} \qquad (1\text{-}10)$$

一般只需要在 $0-2\pi$ 之间均匀地取 M 个频率点，计算这些点上的序列傅立叶变换

$$X(e^{j\omega k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega_k n} \qquad (1\text{-}11)$$

其中 $\omega_k = 2\pi k / M$ ，k=0,1,..,M-1。$X(e^{j\omega k})$ 是一个复函数，它的模就是幅频特性曲线。

（三）信号卷积

一个线性时不变离散系统的响应 y(n)可以用它的单位冲激响应 h(n)和输入信号 x(n)的卷积来表示：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) h(n-m) \qquad (1\text{-}12)$$

根据傅立叶变换和 Z 变换的性质，与式（1-12）对应应该有

$$Y(z) = X(z) H(z) \qquad (1\text{-}13)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \qquad (1\text{-}14)$$

式（1-12）告诉我们可以通过对两个序列的移位、相乘、累加计算信号响应；而式（1-14）告诉我们卷积运算也可以在频域上用乘积实现。

三、实验内容及步骤

（一）编制实验用主程序及相应子程序

1、信号产生子程序，包括：

（1）理想采样信号序列：对信号 $x_a(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\Omega_0 t)u(t)$ 进行理想采样，可以得到一个理想的采样信号序列：$x_a(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\Omega_0 nT), 0 \le n < 50$，其中 A 为幅度因子，$\alpha$ 是衰减因子，Ω_0 是频率。T 为采样周期。根据实验内容的需要，这些参量请设计为在程序运行过程中输入。

（2）单位脉冲序列　$x_b(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \ne 0 \end{cases}$

（3）矩形序列　$x_c(n)=R_N(n)=\begin{cases}1, 0\le n<N-1\\ 0, 其他\end{cases}$，其中 N=10

2、系统单位脉冲响应序列产生子程序，本实验中用到两种 FIR 系统：

（1）$h_a(n)=R_{10}(n)$

（2）$h_b(n)=\delta(n)+2.5\delta(n-1)+2.5\delta(n-2)+\delta(n-3)$

3、有限长序列线性卷积子程序，用于计算两个给定长度（分别是 M 和 N）的序列的卷积，输出序列长度为 L=N+M-1。

（二）上机实验内容

在编制以上各部分程序以后，编制主程序调用各个功能模块实现对信号、系统和系统响应的时域和频域分析，完成以下实验内容。

1、分析理想采样信号序列的特性。

产生理想采样信号序列 $x_a(n)$，使 $A=444.128$，$\alpha=50\sqrt{2}\pi, \Omega_0=50\sqrt{2}\pi$。（1）首先选用采样频率为 1000Hz，T=1/1000，观察所得理想采样信号的幅频特性，在折叠频率以内和给定的理想幅频特性无明显差异，并做记录；（2）改变采样频率为 300Hz，T=1/300，观察所得到的频谱特性曲线的变化，并做记录；（3）进一步减小采样频率为 200Hz，T=1/200，观察频谱“混淆”现象是否明显存在，说明原因，并记录这时候的幅频特性曲线。

2、离散信号、系统和系统响应的分析

（1）观察信号 $x_b(n)$ 和系统 $h_b(n)$ 的时域和幅频特性；利用线性卷积求信号通过系统以后的响应。比较系统响应和系统 $h_b(n)$ 的时域及幅频特性。注意它们之间有无差异，绘出图形。

（2）观察信号 $x_c(n)$ 和系统 $h_a(n)$ 的时域和幅频特性，利用线性卷积求系统响应。判断响应序列图形及序列非零值长度是否与理论结果一致，说出一种定性判断响应序列图形正确与否的方法（提示：$x_c(n)=h_a(n)=R_{10}(n)$）。利用序列的傅立叶变换数值计算子程序求出 $Y(e^{j\omega_k})$，观察响应序列的幅频特性。定性判断结果正确与否。改变信号 $x_c(n)$ 的矩形宽度，使 N=5，重复以上动作，观察变化，记录改变参数前后的差异。

（3）将实验步骤 2-（2）中的信号换为 $x_a(n)$，其中 $A=1, \alpha=0.4, \Omega_0=2.0734, T=1$。重复实验 2-（2）各步骤，改变 $x_a(n)$ 的参数 $\alpha=0.1$ 再重复实验 2-（2）各步骤；改变参数 $\Omega_0=1.2516$，重复实验 2-（2）各步骤。在实验中观察改变 α 和 Ω_0 对信号及系统响应的时域和幅频特性的影响，绘制相应的图形。

2、卷积定律的验证。利用式（1-14）将 $x_a(n)$ 和系统 $h_a(n)$ 的傅氏变换相乘，直接求得

$Y(e^{j\omega_k})$，将得到的幅频特性曲线和实验 2-（3）中得到的曲线进行比较，观察二者有无差异。验证卷积定律。

（三）* MatLab 上机内容

1、阅读本讲义中有关 MatLab 进行数字信号处理部分简介，熟悉 MatLab 下数字信号处理的过程和方法。
2、在 MatLab 下重复（二）上机内容的所有要求，将 MatLab 的输出结果同自己程序的输出结果进行比较。
3、改变信号 $x_a(t)$ 中的衰减因子α，先定性估计频谱可能产生的变化，然后观察其频谱的变化，记录结果，变化是否你所想的一致，这说明了什么？
4、一个 LTI 系统的冲激响应为 $h(n)=(0.9)^n u(n)$,输入序列为 $x_c(n)$，求系统响应 $H(e^{j\omega})$ 和输出信号 y(n)及其频谱 $Y(e^{j\omega})$；如果 $h(n)=x_c(n)$，其结果又如何？
5、编写一个程序，将 $x_c(n)$ 分解为奇偶序列，绘制奇偶序列时域图形并求出它们频谱 $Xe(e^{j\omega})$ 和 $Xo(e^{j\omega})$，同 $x_c(n)$ 的频谱 $Xc(e^{j\omega})$ 进行比较，可以得出什么结论？

四、思考题

1、回答上机内容 2-（2）中的问题。
2、在分析理想采样信号序列的特性实验中，利用不同采样频率所得到的采样信号序列的傅氏变化频谱，数字频率度量是否相同？它们所对应的模拟频率是否都相同？
3、在卷积定律的验证实验中，如果选用不同的 M 值，例如选 M=50 和 M=30，分别做序列的傅氏变换，并求得 $Y(e^{j\varpi_k})=X_a(e^{j\varpi_k})H_b(e^{j\varpi_k}), k=0,1,...,M-1$，所得的结果之间有何差异？为什么？

五、实验报告要求

1、在实验报告中简述实验目的和实验原理要点。
2、总结在上机实验内容中要求比较时域、幅频曲线差异差异部分内容的结果，定性分析它们正确与否，并简要说明这些结果的含义。
3、总结实验中的主要结论。
4、回答思考题。
5、* 总结一下你在用 MatLab 进行数字信号处理实验项目的时候常用的函数及其功能。
6、* 在用 MatLab 处理时和你自己的程序实验时结果是否一致？对不一致的情况进行一个简要的分析。