第Ⅰ种离散cosine变换的残余相关*

The Residual Correlation of the Version Ⅰ of the Discrete cosine Transform

王中德　许生龙
(中国科学院昆明物理研究所)**

【提要】 给出了第Ⅰ种离散cosine变换(DCT-Ⅰ)的残余相关表达式。它和第Ⅱ种散离cosine变换(DCT-Ⅱ)及第Ⅰ种离散sine变换(DST-Ⅰ)残余相关的比较表明，在相关系数ρ取中等值时，DCT-Ⅰ的残余相关最小。

Abstract: The residual correlation of the version Ⅰ of the discrete cosine transform (DCT-Ⅰ) is given. It is compared with the residual correlations of the version Ⅱ of the discrete cosine transform (DCT-Ⅱ) and of the version Ⅰ of the discrete sine transform (DST-Ⅰ). Results show that the residual correlation of the DCT-Ⅰ is the smallest one if the correlation coefficient ρ is mediate.

在相关系数ρ接近1时，第Ⅱ种离散cosine变换(DCT-Ⅱ)已被证明是统计上的最佳变换，即Karhunen-Loéve变换(KLT)的一种极好近似[1]，并已被广泛用于信号和图象处理[2,3]。王中德和Hunt曾介绍了第Ⅰ种cosine变换(DCT-Ⅰ)，并表明了当$\rho<0.8$或N比较大时，DCT-Ⅰ具有与DCT-Ⅱ同样好的性能[4]。由于DCT-Ⅰ需要的计算量比DCT-Ⅱ的少，因此DCT-Ⅰ也是一种应用前景很好的正交变换。本文给出了DCT-Ⅰ的残余相关的表达式，并以残余相关为标准，把DCT-Ⅰ与DCT-Ⅱ及第Ⅰ种离散sine变换(DST-Ⅰ)进行了比较。

残 余 相 关[5]

评价正交变换优劣的标准，有方差分布[6]、标量滤波[7]、信息率—失真函数[8]以及残余相关等。在这些标准中，只有残余相关是对正交变换与KLT偏离程度的直接度量。而且，正如文献〔5〕、〔9〕、〔12〕及本文所表明，残余相关往往可从理论上得到一个简明的表达式，因而残余相关成为评价正交变换优劣的一种最常用标准。

设U为一N阶正交矩阵；$T=[\rho^{|m-n|}]$为一阶马尔柯夫过程的协方差矩阵；$T'=UTU^{-1}$为变换域协方差矩阵。令$T'_U=\mathrm{diag}(T'_{11},\ T'_{22},\ \cdots T'_{NN})$，$T_U=U^{-1}T'_UU$，则$U$对$T$的残余相关定义为

* 1984年8月收到，1985年2月修改定稿。
** Wang Zhong-de, Xu Sheng-long (Kumming Institute of Physics).

$$RC_U=|T-T_U|^2/|T-I|^2 \tag{1}$$

其中I为单位矩阵，而

$$|A|^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^2 \tag{2}$$

为矩阵A的Hilbert-Schmidt模。由U的正交性可以证明

$$|T-T_U|^2=|T|^2-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(UTU^{-1})_{ii}^2 \tag{3}$$

文献〔5〕已给出了以下两个表达式：

$$|T|^2=\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}-\frac{2\rho^2(1-\rho^{2N})}{N(1-\rho^2)^2} \tag{4}$$

$$|T-I|^2=\frac{2\rho^2(N-1-N\rho^2+\rho^{2N})}{N(1-\rho^2)^2} \tag{5}$$

DCT-Ⅰ的残余相关

$N=M+1$阶的DCT-Ⅰ矩阵为

$$C^{\mathrm{I}}=\sqrt{\frac{2}{M}}\left[k_m k_n\cos\frac{mn\pi}{M}\right] \tag{6}$$

m，$n=0$，1，……，M。其中

$$k_i=\begin{cases}\sqrt{2}/2 & i=0 \quad 或 \quad i=M\\ 1 & i\neq 0 \quad 及 \quad i\neq M\end{cases} \tag{7}$$

显然，C^{I}是一个对称矩阵。我们求得T的变换域对角元素为

$$(C^{\mathrm{I}}TC^{\mathrm{I}})_{00}=\frac{1+\rho}{1-\rho}+\frac{\rho^M}{M}+\frac{2\sqrt{2}(\rho-\rho^M)}{M(1-\rho)}+\frac{2(\rho^M+\rho^2-2\rho)}{M(1-\rho)^2} \tag{8}$$

$$(C^{\mathrm{I}}TC^{\mathrm{I}})_{MM}=\frac{1-\rho}{1+\rho}+\frac{(-\rho)^M}{M}-\frac{2\sqrt{2}[\rho+(-\rho)^M]}{M(1+\rho)}+\frac{2[(-\rho)^M+\rho^2+2\rho]}{M(1+\rho)^2} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(C^{\mathrm{I}}TC^{\mathrm{I}})_{mm}=&\frac{(3-2\sqrt{2})}{M}[1+(-1)^m\rho^M]+\left\{1+\frac{2}{M}(\sqrt{2}-1)[1-(-1)^m\rho^M]\right\}\\&\cdot\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(m\pi/M)}-\frac{[1-(-1)^m\rho^M]}{M}\left[\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(m\pi/M)}\right]^2\\&m\neq 0,\ M\end{aligned} \tag{10}$$

将上述各式平方求和并化简，得：

$$\sum_{m=0}^{M}(C^{\mathrm{I}}TC^{\mathrm{I}})_{mm}^2=(M+1)\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}+\frac{2\rho^2}{(1-\rho^2)^2}\left[5\rho^2-7+4\sqrt{2}(1-\rho^2)+\frac{\psi(\rho)}{M}+\frac{\varphi(\rho)}{M^2}\right] \tag{11}$$

式中

$$\psi(\rho)=a(\rho)\rho^{2M-2}+b(\rho) \tag{12}$$

$$\varphi(\rho)=f(\rho)\rho^{2M-2}+g(\rho)\rho^{M-1}+h(\rho) \tag{13}$$

其中

$$a(\rho)=12\sqrt{2}-(17-15\rho^2+6\rho^4+2\rho^6)/(1-\rho^2) \tag{14}$$

$$b(\rho)=(24-21\rho^2+7\rho^4)/(1-\rho^2)-4\sqrt{2}(4-\rho^2) \tag{15}$$

$$f(\rho)=\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\left[4\sqrt{2}(3+\rho^2)-\frac{17-9\rho^2+7\rho^4+\rho^6}{1-\rho^2}\right] \tag{16}$$

$$g(\rho)=\begin{cases}\dfrac{4\rho}{1-\rho^2}\left[\dfrac{25-19\rho^2+11\rho^4-\rho^6}{1-\rho^2}-\sqrt{2}(17-2\rho^2+\rho^4)\right], & \text{当}N\text{为偶数时}\\ \dfrac{4}{1-\rho^2}\left[\dfrac{10+8\rho^2-6\rho^4+4\rho^6}{1-\rho^2}-\sqrt{2}(7+10\rho^2-\rho^4)\right], & \text{当}N\text{为奇数时}\end{cases} \tag{17}$$

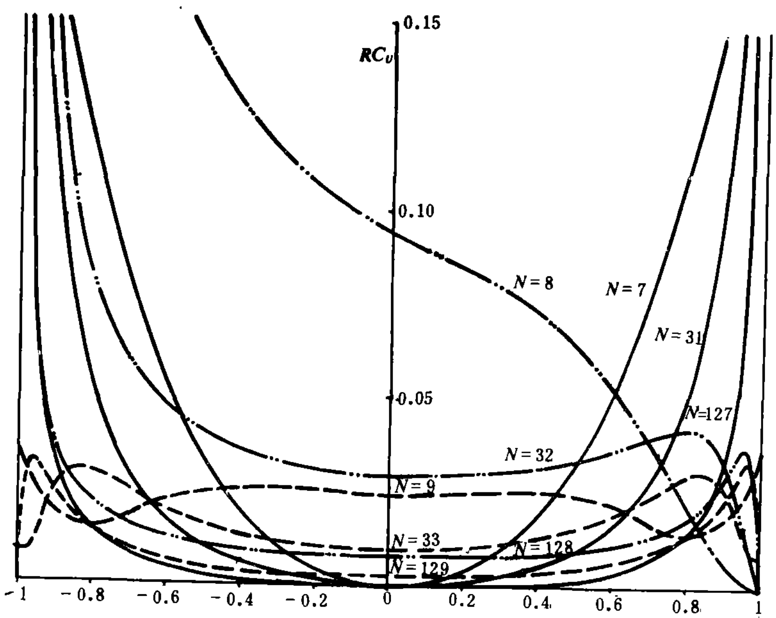

图1 DCT-Ⅰ(虚线表示)、DCT-Ⅱ(点划线表示)和DST-Ⅰ(实线表示)残余相关的比较

$$h(\rho)=\frac{4}{1-\rho^2}\left[2\sqrt{2}(2+3\rho^2-\rho^4)-\frac{6+7\rho^2-8\rho^4+3\rho^6}{1-\rho^2}\right] \tag{18}$$

将$N=M+1$及式(4)、(5)和(11)代入式(3)中，得到DCT-Ⅰ的残余相关为

$$RC_{C\mathrm{I}}=\frac{6-5\rho^2-4\sqrt{2}(1-\rho^2)+\rho^{2M+2}-[\psi(\rho)/M]-[\varphi(\rho)/M^2]}{M-(M+1)\rho^2+\rho^{2M+2}} \tag{19}$$

当$\rho\to0$和$|\rho|\to1$时

$$\lim_{\rho\to0}RC_{C\mathrm{I}}=\frac{6-4\sqrt{2}}{M}-\frac{(24-16\sqrt{2})}{M^2}\left(1-\frac{1}{M}\right) \tag{20}$$

$$\lim_{|\rho|\to1}RC_{C\mathrm{I}}=\frac{6-4\sqrt{2}}{M+1}\left(1-\frac{1}{M^2}\right)-\frac{17-12\sqrt{2}}{M(M+1)}\left(1-\frac{\alpha}{M^2}\right) \tag{21}$$

当M为偶数时，$\alpha=2$；当M为奇数时，$\alpha=1$。

图1中画出了$RC_{C\mathrm{I}}$随ρ而变化的曲线。由于目前对DCT-Ⅰ的快速算法只适用于$N=2^n+1$的情况[10]，因此图1中的N选为9、33和129。

与其他三角变换的比较

图 1 中同时画出了DCT-Ⅱ和DST-Ⅰ的残余相关，其表达式可以在文献〔5〕和〔9〕中找到。因为目前对DST-Ⅰ的算法只适用于$N=2^n-1$，因此图中对DST-Ⅰ的N值选为7、31和127。

已经证明，当$\rho\to1$时，KLT退化为DCT-Ⅱ[1]；当$\rho\to0$时，KLT退化为DST-Ⅰ[11]。Hamidi和Pearl曾指出DCT-Ⅱ的渐近性质[5]，即当$N\to\infty$时，$RC_{C^{\mathrm{II}}}\to0$；也就是说，DCT-Ⅱ→KLT。其他三角变换，例如离散Fourier变换[5]，第Ⅰ种和第Ⅱ种离散sine变换[12]，也都具有这一性质。从式(19)可以看出，当$M=N-1\to\infty$时，$RC_{C^{\mathrm{I}}}\to0$，因而DCT-Ⅰ同样也具有这一性质。然而，在[－1，1]区间上存在着一些例外的点，在这些点上，DCT-Ⅱ和DST-Ⅰ的残余相关并不收敛于0[9]。这样的点，对DCT-Ⅱ是$\rho=-1$；对DST-Ⅰ是$|\rho|=1$。与此相反，DCT-Ⅰ却不存在这种例外的点。这可从式(20)和(21)看出。当$N\to\infty$时，$RC_{C^{\mathrm{I}}}$在整个区间[－1，1]上一致收敛于0。这一点的含意在于，当N很大时，若对系列的相关系数毫无所知，则用DCT-Ⅰ去作为KLT的近似，要比用DCT-Ⅱ或DST-Ⅰ来得安全。

从图 1 中看出，在ρ比较小时，DST-Ⅰ无疑比DCT-Ⅰ和DCT-Ⅱ都要优越。在$\rho\approx1$时，DCT-Ⅱ的残余相关最小。但是，当ρ取中间值时，DCT-Ⅰ则是三者中的最优者。这个中间值的范围，当$M=8$时为0.45～0.85；当$M=32$时为0.65～0.96；当$M=128$时为0.80～0.99。当$M\geqslant128$时，从残余相关的标准来看，在[－1，1]整个区间上，除了在$\rho=1$的极小邻域外，DCT-Ⅰ要比DCT-Ⅱ更优越。由于DCT-Ⅰ所需的计算量比DCT-Ⅱ的要小[10]，因而，在N比较大时，或在ρ取中等值时，把DCT-Ⅰ用于数字信号处理，将会取得比DCT-Ⅱ更好的效果。

参考文献

〔1〕R. J. Clarke: Proc. IEE, Pt. F, Vol. 128, pp. 359—360, 1981.
〔2〕J. M. Tribolet and R. E. Crochiere: IEEE Trans., Vol. ASSP-27, pp. 512—530, 1979.
〔3〕W. H. Chen and C. H. Smith: IEEE Trans., Vol. COM-25, pp. 1285—1292, 1977.
〔4〕Zhongde Wang (王中德) and B. R. Hunt: Proceedings of 1983 International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing, pp. 1256—1259, 1983.
〔5〕M. Hamidi and J. Pearl: IEEE Trans., Vol. ASSP-24, pp. 428—429, 1976.
〔6〕N. Ahmed, T. Natarajin, and K. R. Rao: IEEE Trans., Vol. C-23, pp. 88—93, 1974.
〔7〕W. K. Pratt: IEEE Trans., Vol. C-21 pp. 636—641, 1972.
〔8〕J. Pearl, H. C. Andrews, and W. K. Pratt: IEEE Trans., Vol. COM-22, pp. 411—415, 1972.
〔9〕Zhongde Wang and Shenglong Xu (王中德和许生龙): "Comments on 'On the Computation and the Effectiveness of Discrete Sine Transform'", Comput. Electr. Eng., to be published.
〔10〕Zhongde Wang (王中德): IEEE Trans., Vol. ASSP-32, pp. 803—816, 1984.
〔11〕王中德：Karhunen-Loéve 变换的几种特例，电子学报，Vol. 13, No. 3, p. 118, 1985.
〔12〕P. Yip and K. R. Rao: Comput. Electr. Eng., Vol. 7, pp. 45—55, 1980。