第 3 期 电 子 学 报 Vol.13 №3
1985年5月 ACTA ELECTRONICA SINICA May 1985

Karhunen-Loéve变换的几种特例*

Some Special Cases of the Karhunen-Loéve Transform

王 中 德**
(昆明物理研究所)

【提要】 本文考虑了一阶马尔柯夫过程的Karhunen-Loéve变换（KLT）的两种特殊情况，证明了当相关系数$\rho\to 0$时，一阶马尔柯夫过程的KLT退化为第Ⅰ种离散sine变换（DST-Ⅰ），当$\rho\to -1$时，一阶马尔柯夫过程的KLT退化为第Ⅱ种离散sine变换（DST-Ⅱ）。

Abstract: Two special cases of the Karhunen-Loéve transform for the first order Markov process are considered. It is proven in this paper that, the Karhunen-Loéve transform reduces to the version Ⅰ of the discrete sine transform as $\rho\to 0$, and to the version Ⅱ of the discrete sine transform as $\rho\to -1$.

一、前 言

Karhunen-Lo´ve变换（KLT）可使平稳随机系列的协方差矩阵对角化，因而它是统计意义上的最佳变换[1]。然而，由于KLT不具有快速算法，人们都在寻找一种既能快速运算，又能实现正交变换[2~8]的信号及图象处理的方法。其中最引人注目的是离散cosine变换(DCT)[2]。Clarke证明了[2]当相关系数$\rho\to 1$时，一阶马尔柯夫过程的KLT退化为DCT[3]，解释了DCT用于信号压缩和编码方面的优良性能的原因。本文把Clarke的结果推广到另外两种特例，并证明$\rho\to 0$时，KLT退化为DST-Ⅰ；当$\rho\to -1$时，KLT退化为DST-Ⅱ。

二、一阶马尔柯夫过程的KLT

一阶马尔柯夫过程的协方差矩阵为

$$R=[\rho^{|m-n|}],\qquad m,n=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

式中ρ为随机系列相邻两元素之间的相关系数。当N为偶数时，Ray和Driver导出了一阶马尔柯夫过程的KLT矩阵元素φ_{mn}与本征值λ_m的表达式分别为：

$$\varphi_{mn}=\left(\frac{2}{N+\lambda_m}\right)^{1/2} sin\left[\omega_m\left(n-\frac{N+1}{2}\right)+\frac{m\pi}{2}\right] \tag{2}$$

$$\lambda_m=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\omega_m+\rho^2} \tag{3}$$

式中ω_m为超越方程

$$\tan(N\omega)=\frac{-(1-\rho^2)\sin\omega}{\cos\omega-2\rho+\rho^2\cos\omega} \tag{4}$$

的正根。当$\rho\to 1$时，Clarke证明了[3]

$$\varphi_{mn}\to C_{mn}=\sqrt{\frac{2}{N}}k_m\cos\left[m\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}\right] \tag{5}$$

其中
$$k_m=\begin{cases}\sqrt{2}/2, & m=0(\text{或}=N)\\ 1, & m\neq 0(\text{或}m\neq N)\end{cases} \tag{6}$$

C_{mn}表示DCT矩阵C的元素。Clarke还证明了CRC^{-1}中除最左上方的一个元素为N外，其余元素均为0，即$CRC^{-1}=\mathrm{diag}(N,0,0,\cdots 0)$。

当$\rho\to 0$时，或(4)为$\tan(N\omega)+\tan\omega=0$，满足此式的$N$个正根为

$$\omega_m=m\pi/(N+1),\qquad m=1,2,\cdots,N \tag{7}$$

这时由式(3)知所有的本征值λ_m均为1。这样，将式(7)代入式(2)中，得$\rho\to 0$时的KLT矩阵元素为

$$\varphi_{mn}=\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\frac{mn\pi}{N+1}$$

* 1984年1月收到，同年7月定稿。
** Wang Zhong-de (Kunming Institute of Physics).

$$m, n=1,2,\cdots,N \qquad (8)$$

这正是DST-Ⅰ的矩阵元素[6]。上述结果表明，当$\rho \to 0$时，一阶马尔柯夫过程的KLT退化为DST-Ⅰ。

$\rho \to -1$时的KLT。用$-\rho$代替式(1)中的ρ，可得一新的矩阵，记为$R_- = [(-\rho)^{|m-n|}]$。很易证明R与R_-之间有如下关系：

$$R_- = DRD \qquad (9)$$

式中D为对角矩阵，其主对角线上的元素由1和-1交替组成：

$$D = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, \cdots) \qquad (10)$$

作者已证明[6]，DCT矩阵中C阵与DST-Ⅱ矩阵

$$S_{\text{Ⅱ}} = \sqrt{\frac{2}{N}}\left[k_m \sin\left(m\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}\right)\right]$$

$$m, n=1,2,\cdots,N$$

之间有如下关系

$$S_{\text{Ⅱ}} = \bar{I}CD \qquad (11)$$

式中为反对角单位矩阵，其中D由式(10)、k_m由式(6)给出。通过式(9)、(11)得到

$$S_{\text{Ⅱ}}R_-S_{\text{Ⅱ}}^{-1} = \bar{I}CDR_-DC^{-1}\bar{I} = \bar{I}CRC^{-1}\bar{I} \qquad (12)$$

上式表明，DCT对R的作用，除了在行和列的计数顺序上均需颠倒一下外，与DST-Ⅱ对R_-的作用是完全一样的。由于$\rho \to 1$时的R_-与$\rho \to -1$时的R是一样的，于是便可真接应用Clarke的结果得出以下结论：当$\rho \to -1$时，一阶马尔柯夫过程的KLT退化为DST-Ⅱ。这时，$S_{\text{Ⅱ}}RS_{\text{Ⅱ}}^{-1}$的所有元素中，除最右下方那个元素为$N$外，其余各元素均为0。

结论　虽然在一般情况下，一阶马尔柯夫过程KLT不能由简单的谐波三角变换表示出来，因而KLT一般不具有像FFT那样的运算速度。然而，在几种特殊情况下，KLT则退化为DCT($\rho \to 1$)、DST-Ⅰ($\rho \to 0$)或DST-Ⅱ($\rho \to -1$)。对于这几种三角变换，都有效率很高的快速算法可资利用[7, 8]。因而，我们可以根据随机序列相关系数的取值，在上述三种三角变换中选取一种，作为KLT的一种近似。

参考文献

〔1〕P. V. Wintz: Proc. IEEE, Vol. 60, pp. 809—820, 1972.
〔2〕N. Ahmed, T. Natarajan, K. R. Rao: IEEE Trans., Vol. C-23, pp. 90-93, 1974.
〔3〕R. J. Clarke: Proc. IEE, Pt. F, Vol. 128, pp. 359—360, 1981.
〔4〕W. D. Ray, R. M. Driver: IEEE. Trans., Vol. IT-16, pp. 663—668, 1970.
〔5〕A. K. Jain: IEEE Trans., Vol. COM-24, pp. 1023—1029, 1976.
〔6〕Wang Zhongde: IEEE Trans., Vol. ASSP-30, pp. 814—815, 1982.
〔7〕Wang Zhongde: IEEE Trans., Vol. COM-31, pp. 121—123, 1983.
〔8〕Wang Zhongde: Fast algorithms for the discrete W transform and for the discrete Fourier transform, IEEE Trans., Vol. ASSP-32, No. 3, 1984.

更正启事

1．本刊1984年第6期第79～81页中“Robust检测的二十年”一文的参考文献请作如下更正：

〔13〕应改为“C. T. Chen, S. A. Kassam:Proc. 19th Ann. Allerton Conf. on Comm, Contr. and Computing, pp. 586～595, 1981；

并请把原列文献序号从〔13〕～〔154〕，依项改为〔14〕～〔155〕。

2．作者要求对他们的载于本刊1985年第1期的“鳍线设计的经验公式”中的三处错误作如下更正：

页　号	行或图号	原　(错)　为	应　改　为
10	图1(b)	$\frac{y_0+d}{2}$	$\frac{y_0+d/2}{2}$
11	图2(c)	$\frac{y_0+d}{2}$	$\frac{y_0+d/2}{2}$
15	倒第2行	…由式(20)求得…	…由式(21)求得…

(下转第62页)