《高等数学》(下册)期末总复习

一、 向量代数与空间解析几何

（一）向量代数

1、点 $M(x,y,z) \Leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ；

2、点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2) \Rightarrow$ 向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ ；

3、设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$ ；$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$ （λ 为数）；

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ ；

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$，$(|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a})$ ；

$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$ （对应坐标成比例）；

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ；

$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ；

$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

（二）曲面、空间曲线及其方程

1、曲面及其方程 $\Sigma:F(x,y,z)=0$，旋转曲面【**绕谁不换谁，正负根号里没有谁；作图时先画母线然后绕其轴旋转之**】，柱面【**柱面三缺一，缺谁母线就平行于谁；作图时先画准线结合母线特点得柱面**】，二次曲面【截痕法与伸缩变形法作图】；**要熟悉常见的曲面及其方程并会作图**

2、空间曲线及其方程：一般方程（面交式）、参数方程；

3、曲线（曲面或空间立体）在坐标面上的投影：**投谁便消去谁**

4、会作简单立体图形

（三）平面方程与直线方程：

1、平面方程：

1）一般方程： $Ax+By+Cz+D=0$，其中 $\vec{n}=(A,B,C)$ 为其一法向量.

2）点法式方程：法向量$\vec{n}=(A,B,C)$，点$M(x_0,y_0,z_0)\in\Pi$，则$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

3）截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

4）平面束方程：过直线$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的平面束方程为

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

2、直线方程：

1）对称式方程（点向式方程）：方向向量$\vec{s}=(m,n,p)$，点$M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$，则$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

2）参数式方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

3）一般式方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

3、面面、线线、线面关系：

1)面面：$\cos\theta=|\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})|=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$；

$\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

$\Pi_1\parallel\Pi_2$(或重合)$\Leftrightarrow\vec{n}_1\parallel\vec{n}_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

2)线线：$\cos\theta=|\cos(\widehat{\vec{s}_1,\vec{s}_2})|=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$；

$L_1\perp L_2\Leftrightarrow\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

$L_1\parallel L_2$(或重合)$\Leftrightarrow\vec{s}_1\parallel\vec{s}_2\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$

3)线面：$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}})|=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$；

$L\perp\Pi\Leftrightarrow\vec{s}\parallel\vec{n}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

$L\parallel\Pi$(或L在Π上)$\Leftrightarrow\vec{s}\perp\vec{n}\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$

4、距离

点面：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

点线：$d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$，其中$\vec{s}$为直线的方向向量，$M$为直线上任意一点.

二、多元函数的微分学及其应用

（一） **极限**（求法与一元函数的类似，洛必达法则除外）：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\text{时},\text{有}\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$$

（二） **连续性**： $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

$$\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\text{时},\text{有}\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$$

（三） **偏导数**：

1、 **显函数**： $z=f(x,y)$

1） **定义**： $f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$，

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

2） **求导法则**：对 x 求偏导，暂时视 y 为常量；对 y 求偏导，暂时视 x 为常量

3） **复合函数的求导法则（链式法则）**：若 $z=f(u,v)$ 具有连续偏导数，而 $u=g(x,y)$ 与 $v=h(x,y)$ 都具有偏导数，则复合函数 $z=f[g(x,y),h(x,y)]$ 的偏导数为：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x=f_1'\cdot g_x+f_2'\cdot h_x\text{；}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_u\cdot u_y+f_v\cdot v_y=f_1'\cdot g_y+f_2'\cdot h_y$$

特别的，设 $z=f[h(x),g(x)]$，则 $\dfrac{dz}{dx}=f_1'\cdot h'(x)+f_2'\cdot g'(x)$

例如，设 $z=f(xy,2x+3y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数：

令 $u=xy,v=2x+3y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot2=yf_1'+2f_2'$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1'+3f_2'$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yf_1')+2\frac{\partial}{\partial y}(f_2')=[f_1'+y(f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot3)]+2(f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot3)$$

$$=f_1'+xyf_{11}''+(3y+2x)f_{12}''+6f_{22}''$$

注意：1）解题时，要注意偏导数以及导数的写法.

2）其中 $f_1'=\left.\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=xy\\v=2x+3y}}=f_u(xy,2x+3y)$【即$f_1'(xy,2x+3y)$】与原函数具有相同的复合结构.

2、 **隐函数：**

1） **一个方程的情形：**

二元方程可确定一个一元隐函数：$F(x,y)=0 \xrightarrow{y=y(x)} \begin{cases} \text{公式法}: \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y} \\ \text{隐函数求导法：方程两边对}x\text{求导，注意}y=y(x)\text{为}x\text{的函数} \\ \text{微分法：方程两边取微分，}F_x dx+F_y dy=0 \end{cases}$

三元方程可确定一个二元隐函数：$F(x,y，z)=0 \overset{z=z(x,y)}{\Longrightarrow} \begin{cases} \text{公式法}: \dfrac{\partial z}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_z},\dfrac{\partial z}{dy}=-\dfrac{F_y}{F_z} \\ \text{隐函数求导法：方程两边对}x(\text{或}y)\text{求偏导，注意}z=z(x,y)\text{为}x、y\text{的函数} \\ \text{微分法：方程两边取微分，}F_x dx+F_y dy+F_z dz=0\Rightarrow dz=\cdots \end{cases}$

2） **方程组的情形：（隐函数求导法）**

三元方程组确定两个一元隐函数：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases} \overset{\begin{cases}y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}}{\underset{\text{对}x\text{求导}}{\Longrightarrow}} \dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$

四元方程组可确定两个二元隐函数：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases} \overset{\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}}{\Longrightarrow}$ 对x(或y)求偏导，视y(或x)为常量，得$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ （或$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$）

（四） **全微分**：可微函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为：$dz=z_x dx+z_y dy$.

定义为：$\Delta z[=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]\overset{\Delta}{=}A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

（五） **应用：**

1、 几何应用：

1） **曲线的切线与法平面：**

a、 若曲线 Γ 的方程为参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，点 $M(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma\leftrightarrow t=t_0$，则

切向量为 $\vec{T}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$，

切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$；

法平面方程为 $x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0$

b、 若曲线 Γ 的方程为：$\begin{cases}y=f(x)\\z=g(x)\end{cases}$，点 $M(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$，则切向量为 $\vec{T}=(1,y'(x_0),z'(x_0))$，从而可得切线方程与法平面方程.

c、 若曲线 Γ 的方程为一般方程：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，点 $M(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$，则切向量为

$\vec{T}=(1,y'(x_0),z'(x_0))$（利用隐函数求导法，方程两边对 x 求导，可得 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$），从而可得切线方程与法平面方程．【另解：$\vec{n}_1=(F_x,F_y,F_z)|_M$，$\vec{n}_2=(G_x,G_y,G_z)|_M$，可取切向量为 $\vec{T}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$】

2）**曲面的切平面与法线：**

a、 若曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，点 $M(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，则

法向量为：$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$，

切平面方程为：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$；

法线方程为：$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

b、 若曲面 Σ 的方程为 $z=f(x,y)$，点 $M(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，则法向量为：$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$，

切平面方程为：$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$；

法线方程为：$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$

2、**极值**：1)**无条件**：设 $z=f(x,y)$，由 $\begin{cases}f_x(x,y)=0\\f_y(x,y)=0\end{cases}$ 解得驻点 (x_0,y_0)，

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0)$，然后利用 A,B,C 判定极值与否：

$AC-B^2>0$ 有极值，$A>0$ 极小，$A<0$ 极大；$AC-B^2<0$ 无极值；$AC-B^2=0$ 用此法无法判定．注意：最后必须求出极值．

2）**条件极值**：$z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值：构造 Lagrange 函数，令 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，联立方程 $\begin{cases}L_x(x,y)=0\\L_y(x,y)=0\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$，其解 (x_0,y_0) 为可能的极值点．至于它是否为极值点，一般可由问题的本身性质来判定．

3、**方向导数与梯度**：（以二元函数为例）1）、**方向导数**：设 $z=f(x,y)$ 可微分，

$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$

2）**梯度**：$\mathrm{grad}f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))$，方向导数的最大值为梯度的模，取得方向导数的最大值的方向为梯度的方向．

三、积分

(一)求法

1、 重积分

I、 **二重积分** $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

a、 **直角坐标**：$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, & \text{若}D:\begin{cases}a\le x\le b\\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\end{cases}[X:\text{上下}]\\ \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx, & \text{若}D:\begin{cases}c\le y\le d\\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\end{cases}[Y:\text{左右}]\end{cases}$

若 D 既不是 X－型也不是 Y－型，则适当分割之.

注意：通过二重积分，可交换二次积分的积分次序，这是一类常考的题型.

b、 **极坐标**： $I\xrightleftharpoons[d\sigma=\rho d\rho d\theta]{\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}}\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cdot\rho d\rho d\theta$

$$\xrightleftharpoons{D:\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ \rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\end{cases}}\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

II、 **三重积分** $I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$

a、 **直角坐标** $I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ ：

1） **投影法**：

i）先一后二公式： $I\xrightleftharpoons{\Omega=\{(x,y,z)|z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}}\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

ii) 三次积分公式：$I\xrightleftharpoons{\Omega:\begin{cases}a\le x\le b\\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases}}\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

2）**截面法**：(先二后一公式） $I\xrightleftharpoons{\Omega=\{(x,y,z)|c\le z\le d,(x,y)\in D_z\}}\int_c^d dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$

b、 **柱面坐标**：$I\xrightleftharpoons[dv=\rho d\rho d\theta dz]{\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}}\iiint\limits_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\cdot\rho d\rho d\theta dz$

$$\xrightleftharpoons{\Omega:\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ \rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\\ z_1(\rho,\theta)\le z\le z_2(\rho,\theta)\end{cases}}\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho d\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$$

c、 **球面坐标**：$I \xlongequal[dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta]{\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}} \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

$$\xlongequal{\Omega:\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ \varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta)\\ r_1(\varphi,\theta)\le r\le r_2(\varphi,\theta)\end{cases}} \int_{\alpha}^{\beta} d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\sin\varphi d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2dr$$

2、 **曲线积分**

I、 **第一类（对弧长）**：

a、**平面曲线**：$\int_L f(x,y)ds \xlongequal[\alpha\le t\le\beta]{L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}} \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t)]\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt(\alpha<\beta)$

b、**空间曲线**：$\int_{\Gamma} f(x,y,z)ds \xlongequal[\alpha\le t\le\beta]{\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}} \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt(\alpha<\beta)$

II、 第二类（对坐标）

a、**平面曲线**： $I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

i)参数法：$I \xlongequal[\text{由}\alpha\text{变到}\beta]{L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}} \int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$

ii)与路径无关：选取特殊的路径求之，注意条件：单连通，偏导数处处连续.

定理 *设函数$P(x,y),Q(x,y)$在单连通区域D内处处具有连续的偏导数，则下列命题相互等价：*

（1） $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *在D内与路径无关；*

（2） *沿D内任意一条闭曲线C，* $\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ *；*

（3） *在D内恒有：* $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *；*

（4） $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *在D内为某函数$u(x,y)$的全微分，即存在函数$u(x,y)$，使得*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y).$$

这里$u(x,y)$可由下列三种方法求得：

① 曲线积分法：$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C$ ；

② 凑全微分法：利用微分的运算法则，将$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$凑成$d(\cdots)$，则$u(x,y)=(\cdots)+C$ ；

③偏积分法：由$du=Pdx+Qdy$，得$u_x=P(x,y)$；

两边对 x 求偏积分可得 $u(x,y)=\int P(x,y)dx = f(x,y)+C(y)$

两边对 y 求偏导可得 $u_y = f_y(x,y)+C'(y)$，

再由 $u_y = Q(x,y)$，可解得 $C(y)$，从而得 $u(x,y)$．

iii）Green 公式：$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$；不闭则补之．注意条件：偏导数处处连续，L 为 D 的正向边界．

iv）化为第一类：$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$

b、**空间曲线**：$I=\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$

i) 参数法：$I \xrightleftharpoons[t\text{由}\alpha\text{变到}\beta]{\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}} \int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$

ii) *与路径无关：选取特殊的路径求之，注意条件：单连通，偏导数处处连续．

iii) Stokes 公式：

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} dS \underset{\text{或}}{=} \iint_\Sigma \begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix};$$

不闭则补之．注意方向：**L** 的方向与 Σ 的侧符合右手规则．

iv) 化为第一类：$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

3、**曲面积分**

I、**第一类（对面积）**：

$$I=\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\begin{cases}\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\cdot\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy & \Sigma: z=z(x,y)\\ \iint_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\cdot\sqrt{1+y_x{}^2+y_z{}^2}dzdx & \Sigma: y=y(z,x)\\ \iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\cdot\sqrt{1+x_y{}^2+x_z{}^2}dydz & \Sigma: x=x(y,z)\end{cases}$$

II、**第二类（对坐标）**：$I=\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$

1） Gauss 公式：$\oiint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$

若不闭则补之．注意条件：偏导数处处连续及方向性：Σ 为 Ω 的整个边界曲面的外侧．

2） 投影法：注意垂直性．若不垂直，则

$\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz \underline{\underline{\Sigma: x=x(y,z)}} \pm \iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$ 【前正后负】

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx \underline{\underline{\Sigma: y=y(z,x)}} \pm \iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$ 【右正左负】

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy \underline{\underline{\Sigma: z=z(x,y)}} \pm \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$ 【上正下负】

3）化为第一类：$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$

4）化为单一型：$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R)dxdy$

(二)应用

1、**面积：**

平面 $A=\iint_{D} dxdy$；

曲面 $A=\iint_{\Sigma} dS$，$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy$（$\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+x_y{}^2+x_z{}^2}dydz$ 或 $\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+y_x{}^2+y_z{}^2}dzdx$）

2、**体积：** $V=\iiint_{\Omega} dv$；$V=\iint_{D} f(x,y)d\sigma$ 【曲顶柱体】

3、**物理应用：**质量、功、转动惯量、质心、引力、流量（通量）、环流量等等【自学之】

设 $\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，则

散度 $\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$，

旋度 $\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

四、 级数

（一） 常数项级数及其收敛性

1、**定义**： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛（发散）$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$ 存在（不存在）【部分和 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots u_n$】

2、**基本性质**：1）$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n (k \neq 0)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同的收敛性；

2）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛【口诀：收加收为收，收加发为发，发加发未必发】

3）改变有限项的值不影响级数的收敛性

4）收敛的级数可以任意加括号

5）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；反之未必.

6）若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

3、**特殊级数的收敛性**【必须牢记之】：

①调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；

② p －级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$（常数 $p > 0$）：当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leq 1$ 时发散；

③等比级数（几何级数）$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$，当 $|q| \geq 1$ 时发散，当 $|q| < 1$ 时收敛，且

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = \frac{a}{1-q} (|q| < 1) .$$

4、**正项级数** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 $u_n \geq 0 (n = 1, 2, \cdots)$：

I、$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{s_n\}$ 有界

II、比较：1）$u_n \leq v_n (n > N)$【大的收，小的也收；小的发，大的也发】；

2）$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 < l < +\infty)$【同敛散】

III、比值（根值）：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho)$，当 $\rho<1$ 时收敛；当 $\rho>1(\rho=+\infty)$ 时发散；而当 $\rho=1$ 时用此法不能判定其收敛性．

IV、极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n^p u_n=l(0<l<+\infty)$，当 $p>1$ 时收敛；当 $p\le 1$ 时发散．

5、**交错级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n>0,n=1,2,\cdots)$：$\{u_n\}$ 单调减少趋于零．

6、**一般项级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ （u_n 为任意常数）：发散或收敛（绝对收敛，条件收敛）

（二） **幂级数** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ：

1、**Abel 定理**：若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在当 $x=x_0(x_0\ne 0)$ 时收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 当 $|x|<|x_0|$ 时必绝对收敛；反之，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 当 $x=x_0$ 时发散，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 当 $|x|>|x_0|$ 时必发散.

2、**收敛半径**：1）若 $a_n\ne 0$ 【不缺项】：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|})$，$R=\begin{cases}+\infty, & \rho=0,\\ 1/\rho, & 0<\rho<+\infty,\\ 0, & \rho=+\infty;\end{cases}$

2）若缺项：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\cdots<1$，解得收敛区间．

3、**收敛域**：*先求收敛半径 R，可得收敛区间 $(-R,R)$，再讨论端点 $x=\pm R$ 处的收敛性可得所求的收敛域*

4、**幂级数和函数的求法**：*先求收敛域，再利用幂级数的运算性质（加减乘除四则运算，逐项求导，逐项积分，和函数的连续性）以及换元法，然后代已知的展开式，可得所求的和函数.*

5、**函数展开成幂级数** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\ (x\in I)$ ：

1）**直接展开法**：【利用 Taylor 展开定理】求导数得系数，写出泰勒级数，求其收敛域，最后记得判定余项趋于零，便可得到所求的展开式．
2）**间接展开法**：利用幂级数的运算性质（加减乘除四则运算，逐项求导，逐项积分，和函数的连续性）以及换元法，然后代已知的展开式，可得所求的展开式．
注：以下 7 个常用的展开式必须牢记：

① $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}(|x|<+\infty)$；　　② $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(|x|<+\infty)$

③ $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}(|x|<+\infty)$；　④ $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(|x|<1)$

⑤ $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(|x|<1)$；　⑥ $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}(-1<x\le 1)$

⑦ $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(|x|<1)$ 【α 为常数，$I=\begin{cases}[-1,1] & \alpha>0\\(-1,1] & -1<\alpha<0\\(-1,1) & \alpha\le -1\end{cases}$】

（三） **傅里叶级数**：只复习 $T=2\pi$ 情形，一般周期 $T=2l$ 类似．

1、**系数**：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx(n=1,2,\cdots)$$

2、**收敛性**：条件为在一个周期上 1）处处连续或只有有限个第一类间断点；2）只有有限个极值点．

3、**和**：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}f(x) & x\text{为}f(x)\text{的连续点}\\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & x\text{为}f(x)\text{的间断点}\end{cases}$

4、**傅里叶级数展开式**：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$(x\in C)$

$$\text{其中}C=\{x\mid f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\}$$

5、**函数展开成傅里叶级数**：

1）若 $f(x)$ 为 $T=2\pi$ 的周期函数，则对 $f(x)$ 验证收敛定理的条件，求出 $f(x)$ 的间断点，利用收敛定理，写出 $f(x)$ 的傅氏级数的收敛性，再求出傅氏系数，最后写出所求的傅氏级数展开式．注意：必须写出展开式成立的范围，在展开式不成立的点（必为间断点）必须指明傅氏级数的收敛性．

2）若 $f(x)$ 只在 $[-\pi,\pi]$ 上有定义，则必须对 $f(x)$ 进行周期延拓，然后对周期延拓后所得的函数 $F(x)$ 的傅氏级数展开式限制在 $[-\pi,\pi]$ 上讨论．

3）若 $f(x)$ 只在 $[0,\pi]$ 上有定义，对 $f(x)$ 进行奇（偶）延拓再周期延拓，可得正弦（余弦）级数．

注意：间断点或连续点的判定，必须为周期函数的！

五、微分方程——续

（一） **全微分方程**：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0(\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y})$，

1） 曲线积分法：通解为$u(x,y)=C$，其中$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$；

2） 凑微分法：利用微分的运算法则，设法将原方程凑成$d[\Delta]=0$，则可得通解为$\Delta=C$，.

（二） **常系数线性微分方程**：

1、**齐次**：$y''+py'+qy=0$，其中p,q都为常数

1）特征方程$r^2+pr+q=0\Rightarrow r_1,r_2=?$

2）通解：$y=\begin{cases}C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} & r_1\neq r_2\in\mathbb{R}\\(C_1+C_2x)e^{r_1x} & r_1=r_2\in\mathbb{R}\\e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) & r_{1,2}=\alpha\pm i\beta\in\mathbb{C}\end{cases}$

2、**非齐次**：$y''+py'+qy=f(x)$，其中p,q都为常数

1） 先求出对应的齐次方程$y''+py'+qy=0$的通解：$Y=Y(x)$；

2） 后求原非齐次方程的特解.

A、 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型：令$y^*=x^ke^{\lambda x}Q_m(x)$，其中$k$是特征方程含根$\lambda$的重数

B、 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型：

令$y^*=x^ke^{\lambda x}[Q_m(x)\cos\omega x+R_m(x)\sin\omega x]$，其中$m=\max\{l,n\}$，$k$是特征方程含根$\lambda+i\omega$的重数

（三） **线性微分方程的解的结构**：

1）**齐次**：$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$，

通解：$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，其中$y_1(x),y_2(x)$为该方程线性无关的两个解.

2）**非齐次**：$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$

通解：$y=Y(x)+y^*(x)$，其中$Y(x)$为对应的齐次方程的通解，$y^*(x)$为原方程的一个特解.

3）设$y_1^*(x),y_2^*(x)$分别为$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$

与$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$的特解，则$y^*=y_1^*(x)+y_2^*(x)$

为$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的特解.