杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	线性代数	考试日期	2015 年 1 月 16 日	成 绩			
课程号	A0714030	教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		年级		专业	

题 号	一	二	三	四	五	六
得 分						

注意：所有答案全部书写在试卷上，答案写在其他地方视为无效！本课程考试试卷总共 4 大张，另附两张纸作为草稿纸使用，不得使用其余形式的草稿纸，不得使用计算器等计算工具，否则视为作弊！

得分	

一、填空题（请将答案填写在横线上。本题总共六小题，每题 3 分，总共 18 分）

1、设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ $\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$；

2、设3阶方阵 A 的特征值为1，-1，3，则行列式 $|3A|=$ -81；

3、设 A，B 为3阶方阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$ 3；

4、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$；

5、已知 $\alpha_1=(0,1,2)^T$，$\alpha_2=(1,0,3)^T$，$\alpha_3=(0,-1,k)^T$ 在 k $\neq -2$ 时，α_1，α_2，α_3 线性无关；

6、已知四元非齐次线性方程组 $AX=b$，$R(A)=3$，α_1，α_2 是它的两个解向量，其中 $\alpha_1=(1,1,0,2)^T$，$\alpha_2=(1,0,1,3)^T$，则该非齐次线性方程组的通解为 $(1,1,0,2)^T+k(0,1,-1,-1)^T$

得分	

二、选择题（请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效。本题共六小题，每题 3 分，共 18 分）

1、行列式 $D_1=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&3\\3&1&5\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}$，若 $D_1=D_2$，则 λ 的值为（ C ）；

（A）0，1　　（B）0，2　　（C）1，-1　　（D）2，-1

2、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆阵，矩阵 A 的秩为 r，矩阵 $B=AC$ 的秩为 r_1，则（ C ）；

（A）$r>r_1$　　（B）$r<r_1$　　（C）$r=r_1$　　（D）r 与 r_1 的关系以 C 而定

3、λ_1，λ_2 是 n 阶矩阵 A 的互异特征值，x_1 和 x_2 分别是对应于 λ_1 和 λ_2 的特征向量，当（ D ）时，$x=k_1x_1+k_2x_2$ 必是矩阵 A 的特征向量；

（A）$k_1=0$ 且 $k_2=0$　　（B）$k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$

（C）$k_1k_2=0$　　（D）$k_1\neq 0$ 而 $k_2=0$

4、如果 A，B 都是正定的 n 阶实对称矩阵，则 AB 一定是（ D ）；

（A）实对称矩阵　　（B）正交矩阵　　（C）正定矩阵　　（D）可逆矩阵

5、若向量组 α，β 线性相关，则（ A ）；

（A）α，β 对应分量成比例　　（B）其中必有一零向量

（C）α，β 一定时非零向量　　（D）$\alpha=k\beta$，k 是不为零的数

6、若方程组 $AX=b$ 中，方程的个数小于未知量的个数，则有（ B ）；

（A）$AX=b$ 必有无穷多解　　（B）$AX=0$ 必有非零解

（C）$AX=0$ 仅有零解　　（D）$AX=0$ 一定无解

得分	

三、试求解下列各题（本题共四小题，每题5分，共20分）

1、设向量组 $\alpha_1=(1,1,2,3)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,3,5)^T$，$\alpha_4=(4,-2,5,6)^T$，$\alpha_5=(3,1,5,7)^T$，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&4&3\\1&-1&3&-2&1\\2&1&3&5&5\\3&1&5&6&7\end{pmatrix} \quad 1'$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&3\\0&1&-1&3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad 3'$$

$\therefore$ α_1，α_2 为一个极大无关组　　$1'$

2、设 $f(x)=3x^2-2x+5$，$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}$，求 $f(A)$；

$f(A)=3A^2-2A+5E$　　$1'$

$$A^2=\begin{pmatrix}6&-9&7\\-3&7&4\\-1&4&8\end{pmatrix} \quad 2'$$

$$\therefore f(A)=\begin{pmatrix}21&-23&15\\-13&34&10\\-9&22&25\end{pmatrix} \quad 2'$$

3、已知 $AX+4E=A^2-2X$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\5&-3&2\end{pmatrix}$，求 X：

$(A+2E)X=(A+2E)(A-2E)$　　$2'$

$|A+2E|=60\neq 0$　　$1'$

$\therefore$ $X=A-2E$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\5&-3&0\end{pmatrix} \quad 2'$$

4、设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=(0,1,1)^T$，求对应于 λ_2 的特征向量.

设对应于 λ_2 的特征向量为 $\xi=(x_1,x_2,x_3)^T$

则　$\xi\perp\xi_1$　　$2'$

即　$x_2+x_3=0$

得基础解系为 $\xi_2=(1,0,0)^T$　$\xi_3=(0,1,-1)^T$　　$2'$

$\therefore$ 对应于 λ_2 的特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$（其中 k_2,k_3 不全为0）

得分	

四、试求解下列各题（本题共四小题，每题6分，共24分）

1、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ 相似，求x与y的值；

$\because$ A，B 相似

$\therefore \begin{cases} trA = trB \\ |A| = |B| \end{cases}$ 2′

即 $\begin{cases} x-y=-1 \\ 3x-4y=-8 \end{cases}$ 2′

$\therefore$ $x=4$ $y=5$ 2′

2、在向量空间 R^4 中，设有两组基（I）：α_1，α_2，α_3，α_4 和（II）：$2\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，α_4．α 在基（I）下的坐标为 $X=(1,1,1,1)^T$，求α在基（II）下的坐标Y；

基(I)到基(II)的过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ 2′

$X=PY$ $Y=P^{-1}X$ 1′

$(P \vdots X)=\left(\begin{array}{cccc:c}2&0&0&0&1\\1&1&0&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&1/2\\0&1&0&0&1/2\\0&0&1&0&1/2\\0&0&0&1&1/2\end{array}\right)$ 2′

$\therefore$ $Y=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$ 1′

3、设 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,-1,t+2)^T$，$\alpha_4=(-2,-6,10,t)^T$．

（1）t为何值时，该向量组线性无关？（2）t为何值时，该向量组线性相关？

$|(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)|=\begin{vmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&t+2&t\end{vmatrix}=14(t-2)$ 2′

$t\neq 2$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关 2′

$t=2$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关． 2′

4、已知 $\xi=(2,2,-2)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，确定参数a，b及特征向量ξ所对应的特征值．

设 $A\xi=\lambda\xi$ 1′

即 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ 2′

$\therefore$ $\lambda=-1$

$a=-3$ 3′

$b=0$

得分	

五、(10分) 问 a，b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+3bx_2+x_3=9 \end{cases}$ 有唯一解？无解？无穷多解？在有无穷多解的情况下，用基础解系表示全部解.

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 3b & 1 \end{vmatrix} = -2b(a-1)$$ 2′

$a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时 唯一解 1′

$a=1$ 时 $B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 3b & 1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3-4b \end{array}\right)$ 1′

$a=1$，$b=\frac{3}{4}$ 时 无穷多解 2′

$$B\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

基础解系为 $(1,4,-1)^T$

∴ 通解为 $k(1,4,-1)^T$ (其中 k 为任意常数.) 2′

其它情形，方程组无解 2′

得分	

六、(10分)

求一个正交变换 $X=QY$，将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 化为标准形.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$ 1′

$|A-\lambda E| = -(\lambda+7)(\lambda-2)^2$

∴ A的特征值为 $\lambda_1=-7$ $\lambda_2=2$ (二重根) 1′

$\lambda_1=-7$ 代入 $(A-\lambda_1 E)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(1,2,-2)^T$

$\lambda_2=2$ 代入 $(A-\lambda_2 E)X=0$ ······ $\xi_2=(2,-1,0)^T$

$\xi_3=(2,0,1)^T$

正交化 $\xi_2'=\xi_2=(2,-1,0)^T$

$$\xi_3'=\xi_3-\frac{[\xi_3,\xi_2']}{[\xi_2',\xi_2']}\xi_2'=\frac{1}{5}(2,4,5)^T$$

单位化 $\eta_1=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$

$\eta_2=\frac{1}{\sqrt5}(2,-1,0)^T$

$\eta_3=\frac{1}{3\sqrt5}(2,4,5)^T$ 3′

令 $Q=(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt5}{3} \end{pmatrix}$ 为正交阵. 1′

∴ f经正交变换 $X=QY$ 化为标准形 $-7y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$