

杭州电子科技大学学生考试卷 (A) 卷

考试课程	线性代数	考试日期	2014 年 1 月 11 日	成绩	
课程号	A0714030	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号 (8 位)		年级	

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

注意：所有答案全部书写在试卷上，答案写在其他地方视为无效！本课程考试试卷总共 4 大张，另附两张纸作为草稿纸使用，不得使用其余形式的草稿纸，不得使用计算器等计算工具，否则视为作弊！

得分

一、填空题 (请将答案填写在横线上。本题总共六小题，每题 3 分，总共 18 分)

1、设 A 为五阶方阵，秩 $(A)=4$ ， A^* 是 A 的伴随矩阵，则秩 $(A^*)=$ 1；

2、实二次型 $f=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2$ 的秩为 3，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1；

3、已知三阶方阵 A 的三个特征值分别为 1, 2, 3，则 $|A^2+2A-3E|=$ 0；

4、若向量组 $\alpha_1=[1,1,2]^T$ ， $\alpha_2=[3,t,1]^T$ ， $\alpha_3=[0,2,-t]^T$ 线性相关，则 $t=$ -2 或 5；

5、设 A 是 4×3 矩阵，秩 $(A)=2$ ，而 $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，则秩 $(AB)=$ 2；

6、设 A 是 5×3 矩阵，且秩 $(A)=2$ ，已知 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个相异的解，则 $AX=b$ 的通解为 $k(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$ 。

得分

二、选择题 (请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效。

本题共六小题，每题 3 分，共 18 分)

1、若向量组 α, β 线性相关，则 (A)；

(A) α, β 对应分量成比例

(B) 其中必有一零向量

(C) α, β 一定是非零向量

(D) $\alpha=k\beta$, k 是不为零的数

2、设 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于 (B)；

(A) $\frac{4}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{4}$

3、已知矩阵 $\begin{bmatrix} 22 & 30 \\ -12 & x \end{bmatrix}$ 有一个特征向量 $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，则 $x=$ (C)；

(A) -12

(B) -14

(C) -16

(D) -18

4、若 A 为正交阵，则下列矩阵中不是正交阵的是 (D)；

(A) A^{-1}

(B) A^T

(C) A^3

(D) $3A$

5、若方程组 $AX=b$ 中，方程的个数小于未知量的个数，则有 (B)；

(A) $AX=b$ 必有无穷多解

(B) $AX=0$ 必有非零解

(C) $AX=0$ 仅有零解

(D) $AX=0$ 一定无解

6、设 A 为 $m \times n$ 矩阵， B 为 $n \times m$ 矩阵，则 (B)；

(A) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB| \neq 0$

(B) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$

(C) 当 $m<n$ 时，必有行列式 $|AB| \neq 0$

(D) 当 $m<n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$

得分 三、试求解下列各题 (本题共四小题, 每题 5 分, 共 20 分)

1、求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量;

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$ (二重)

$\lambda_1 = 1$ 代入 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 得基础解系 $\xi_1 = (1, 1, 1)^T$

$\therefore A$ 属于 $\lambda_1 = 1$ 的所有特征向量为 $k_1 \xi_1$ $k_1 \neq 0$

$\lambda_2 = 2$ 代入 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 得基础解系 $\xi_2 = (1, 1, 0)^T$ $\xi_3 = (1, 0, -3)^T$

$\therefore A$ 属于 $\lambda_2 = 2$ 的所有特征向量为 $k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3$, k_2, k_3 不全为 0.

2、设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_4^2$, a 取何值时 f 正定?

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ -1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = a > 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 1 > 0 \\ \Delta_3 = a(a-1)(a+1) > 0 \\ \Delta_4 = \Delta_3 = a(a-1)(a+1) > 0 \end{cases}$$

$\therefore a > 1$ 时 f 正定.

3、在欧氏空间 R^3 中, 设有两组基:

(I): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II): $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3$; 设 α 在基 (I) 下的坐标为 $X = [1, 1, 1]^T$, 求 α 在基 (II) 下的坐标;

基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵为 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

设 α 在基 (II) 下的坐标为 $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$

则有 $Y = M^{-1}X$

$$(M: X) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\therefore \alpha$ 在基 (II) 下的坐标为 $(1, 0, 0)^T$

4、判别矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 能否和对角矩阵相似。若与对角矩阵相似, 求一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

$\therefore A$ 有三个互异特征值为 $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 3$

$\therefore A$ 可对角化.

$\lambda_1 = -1$ 代入 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 得基础解系 $\xi_1 = (3, 0, -1)^T$

$\lambda_2 = 2$ $(\lambda_2 E - A)X = 0$ $\dots \dots \dots \xi_2 = (0, 0, 1)^T$

$\lambda_3 = 3$ $(\lambda_3 E - A)X = 0$ $\dots \dots \dots \xi_3 = (1, 4, 1)^T$

令 $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 为可逆阵且 $P^{-1}AP = \text{diag}(-1, 2, 3)$

四、试求解下列各题（本题共四小题，每题6分，共24分）

1、设向量组 $\alpha_1 = [1, 1, 2]^T$, $\alpha_2 = [0, 2, 1]^T$, $\alpha_3 = [2, 0, 3]^T$, $\alpha_4 = [1, 1, 0]^T$,

求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组，将其余向量用该极大线性无关组线性表示；

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大线性无关组.

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_4; \alpha_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$$

2、设矩阵 A 与 B 相似，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ ，求 x 与 y 的值；

$\therefore A, B$ 相似

$$\therefore \begin{cases} \text{tr} A = \text{tr} B \\ |A| = |B| \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x - y = -1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

3、设 A 为三阶方阵，有 3 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ，

若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ，证明： $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关；

$$\text{令 } k_1\beta + k_2(A\beta) + k_3(A^2\beta) = 0$$

$$A\beta = A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$$

$$A^2\beta = A(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3) = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3$$

$$\therefore k_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + k_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3) + k_3(\lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3) = 0$$

$$(k_1 + \lambda_1 k_2 + \lambda_1^2 k_3)\alpha_1 + (k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_2^2 k_3)\alpha_2 + (k_1 + \lambda_3 k_2 + \lambda_3^2 k_3)\alpha_3 = 0$$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

$$\therefore \begin{cases} k_1 + \lambda_1 k_2 + \lambda_1^2 k_3 = 0 \\ k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_2^2 k_3 = 0 \\ k_1 + \lambda_3 k_2 + \lambda_3^2 k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{系数行列式} = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

$$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0 \quad \therefore \beta, A\beta, A^2\beta \text{ 线性无关}$$

4、设向量组 (I): $\beta_1 = [0, 1, -1]^T, \beta_2 = [a, 2, 1]^T, \beta_3 = [b, 1, 0]^T$ 及向量组 (II): $\alpha_1 = [1, 2, -3]^T,$

$\alpha_2 = [3, 0, 1]^T, \alpha_3 = [9, 6, -7]^T$ 有相同的秩，且 β_3 可由 α_1, α_2 线性表示，求 a, b 的值。

$$\therefore R(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = 2$$

$$\therefore |\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3| = -(a-3b) = 0$$

$$\therefore a = 3b$$

$\therefore \beta_3$ 可由 α_1, α_2 线性表示.

$$\therefore |\alpha_1 \ \alpha_2 \ \beta_3| = 2(b-5) = 0$$

$$\therefore b = 5$$

$$\therefore a = 15$$

五、(10 分) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$, 对应于 λ_3 的特征向量为 $\xi_1 = [-1, 1, 2]^T$, 求

(1) 对应于 λ_1 的特征向量;

(2) 求 A .

(1) 设对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi = (x_1, x_2, x_3)^T$

$$\because \xi \perp \xi_1 \quad \therefore -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

得基础解系 $\xi_2 = (1, 1, 0)^T$ $\xi_3 = (2, 0, 1)^T$

\therefore 对应于 λ_1 的特征向量为 $k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3$ k_2, k_3 不全为 0.

(2) 令 $P = (\xi_1 \xi_2 \xi_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆.

$$P^{-1}AP = \text{diag}(-2, 1, 1)$$

$$A = P \text{diag}(-2, 1, 1) P^{-1}$$

$$\text{其中 } P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

得分

六、(10 分)

用正交线性替换将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

化为标准形, 并写出正交线性替换.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = (\lambda + 7)(\lambda - 2)^2$$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1 = -7$ $\lambda_2 = 2$ (二重)

$\lambda_1 = -7$ 代 λ $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 得基础解系 $\xi_1 = (2, 1, -1)^T$

$\lambda_2 = 2 \dots (\lambda_2 E - A)X = 0 \dots \dots \dots \xi_2 = (2, -1, 0)^T$ $\xi_3 = (2, 0, 1)^T$

$$\xi_2' = \xi_2 = (2, -1, 0)^T$$

$$\xi_3' = \xi_3 - \frac{(\xi_3, \xi_2')}{(\xi_2', \xi_2')} \xi_2' = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)^T$$

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)^T$$

$$\eta_2 = \frac{\xi_2'}{\|\xi_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0)^T$$

$$\eta_3 = \frac{\xi_3'}{\|\xi_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(2, 4, 5)^T$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{35}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix} \text{ 为正交阵.}$$

正交线性替换 $X = UY$.

标准形 $-7y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$