

杭州电子科技大学学生考试卷 (A) 卷

考试课程	线性代数	考试日期	2013 年 1 月 日	成绩	
课程号	A0702020	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号 (8 位)		年级	专业

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

注意: 所有答案全部书写在试卷上, 答案写在其他地方视为无效! 本课程考试试卷总共 4 大张, 另附两张纸作为草稿纸使用, 不得使用其余形式的草稿纸, 不得使用计算器等计算工具, 否则视为作弊!

得分 一、填空题 (请将答案填写在横线上。本题总共六小题, 每题 3 分, 总共 18 分)

1、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2、若向量组 $\alpha_1 = [1, 1, 0]^T$, $\alpha_2 = [1, 3, -1]^T$, $\alpha_3 = [5, 3, a]^T$ 线性相关, 则 a 的取值为 1 ;

3、设 A 为 n 阶正交阵, 且 $|A| > 0$, 则 $|A| = 1$;

4、设 $\alpha_1 = [1, 0, 0]^T$, $\alpha_2 = [-1, -1, 1]^T$, $\alpha_3 = [1, 0, -1]^T$, 是 (是或否) 构成向量空间 \mathbb{R}^3 的一组基;

5、设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, -1, 0, 则 $|3A| = 0$;

6、设 A 为 5 阶方阵, 秩 $(A) = 4$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则齐次线性方程组 $A^*X = 0$ 的基础解所含向量的个数为 4 。

得分

二、选择题 (请将正确答案填写在括号中, 在字母前勾选所得结果视为无效。

本题共六小题, 每题 3 分, 共 18 分)

1、行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}$ (B);

(A) $abcdef$ (B) $-abdf$ (C) $abdf$ (D) cdf

2、若 A 是 n 阶对称矩阵, B 是 n 阶反对称矩阵, 则有 (A);

(A) A^2 是对称矩阵 (B) AB 是反对称矩阵

(C) B^2 是反对称矩阵 (D) $AB - BA$ 是反对称矩阵

3、设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 A 与 B 相似, 则 (B);

(A) A 与 B 的特征矩阵相同 (B) A 与 B 的特征方程相同

(C) A 与 B 相似于同一个对角阵 (D) 存在正交阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$

4、下列二阶矩阵可对角化的是 (C);

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

5、已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且满足 $AB = 0$, 则 (C);

(A) $t = 6$ 时 B 的秩为 1 (B) $t = 6$ 时 B 的秩为 2

(C) $t \neq 6$ 时 B 的秩为 1 (D) $t \neq 6$ 时 B 的秩为 2

6、设 A 是 5×3 矩阵, 则齐次线性方程组 $(AA^T)X = 0$ 有 (C);

(A) 无解 (B) 有惟一解

(C) 有无穷多解 (D) 可能有解, 可能无解

得分

三、试求解下列各题 (本题共四小题, 每题 5 分, 共 20 分)

1、求解矩阵方程 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & -1 \end{array} \right)$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -7 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad 2'$$

2、设 A 是 n 阶可逆方阵, 将 A 的第 i 列和第 j 列互换后得到的矩阵记为 B .

(1) 证明 B 为可逆矩阵; (2) 求 $B^{-1}A$.

证(1) $\because A$ 可逆 $\therefore |A| \neq 0$

$$|B| = -|A| \neq 0$$

$$\therefore B \text{ 可逆} \quad 2'$$

12) $\because B = AE^{(i,j)} \quad 2'$

$$\therefore B^{-1}A = (AE^{(i,j)})^{-1}A = (E^{(i,j)})^{-1} = E^{(i,j)}, \quad 1'$$

3、已知 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + tx_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$ 正定, 求 t 的取值范围:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & t & 0 \\ -2 & 0 & t \end{pmatrix} \quad 1'$$

$\therefore f$ 正定.

$$\therefore \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & t \end{vmatrix} = 2(t-2) > 0 \\ \Delta_3 = |A| = t(t-4) > 0 \end{cases} \quad 1'$$

$$\therefore t > 4 \quad 2'$$

4、设 $\alpha_1 = [-2, 1, 3]^T$, $\alpha_2 = [-1, 0, 1]^T$, $\alpha_3 = [-2, -5, -1]^T$, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 R^3 的一组

基. 并求 $\alpha = [4, 12, 6]^T$ 在这组基下的坐标.

证: $\because |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = 2 \neq 0$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 R^3 的一组基. $2'$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -5 & 12 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad 2'$$

$\therefore \alpha$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下坐标为 $(7, -16, -1)^T$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

四、试求解下列各题 (本题共四小题, 每题6分, 共24分)

1. 设 $\alpha_1 = [1, 1, 2, 3]^T$, $\alpha_2 = [1, -1, 1, 1]^T$, $\alpha_3 = [1, 3, 3, 5]^T$, $\alpha_4 = [4, -2, 5, 6]^T$, $\alpha_5 = [3, 1, 5, 7]^T$, 求该向量组的秩, 并确定一个极大线性无关组, 将其余向量用该极大线性无关组线性表示;

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\therefore 该向量组的秩为2.

选取 α_1, α_2 为一个极大线性无关组.

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_4 &= \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_5 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

2. 已知 $\xi = [2, 2, -2]^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量, 确定参数 a, b 及特征值 λ 所对应的特征值;

$$A\xi = \lambda\xi \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = 2\lambda \\ 2a + 4 = 2\lambda \\ 2b + 2 = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$$

3. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似, 求 x 与 y 的值;

$$\begin{aligned} \therefore A, B \text{ 相似} \\ \therefore \text{tr} A &= \text{tr} B \\ \therefore \begin{cases} x = y + 2 \\ x + y = -2 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

4. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, 若 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 - \alpha_1$, 讨论 t 满足什么条件时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 $AX = 0$ 的基础解系.

$$\begin{aligned} \text{令 } k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 &= 0 \\ \text{即 } k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(\alpha_2 - \alpha_3) + k_3(\alpha_3 - \alpha_1) &= 0 \\ (k_1 - k_3)\alpha_1 + (k_2 - k_1)\alpha_2 + (k_3 - k_2)\alpha_3 &= 0 \\ \therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 是 } AX=0 \text{ 的一个基础解系} \\ \therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关} \\ \therefore \begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_2 - k_1 = 0 \\ k_3 - k_2 = 0 \end{cases} \\ \therefore \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ 是 } AX=0 \text{ 的基础解系} \\ \therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0 \\ \therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{即 } t \neq 1 \end{aligned}$$

得分

五、(10分) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\xi_1 = [1, 1, 1]^T$, 求

(1) 与特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 对应的特征向量;

(2) 求矩阵 A .

(1) 设与特征值 $\lambda_2 = 3$ 对应的特征向量为 $\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

则 $\xi \perp \xi_1$

$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = 0$

得基础解系 $\xi_2 = (1, -1, 0)^T$

$\xi_3 = (1, 0, -1)^T$

\therefore 与特征值 λ_2 对应的特征向量为 $k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3$

(k_2, k_3 不全为 0)

令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 可逆 且有

$P^{-1}AP = \text{diag}(6, 3, 3)$ 其中 $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore A = P \text{diag}(6, 3, 3) P^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

得分

六、(10分) 用正交线性替换化实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

为标准形, 并写出正交线性替换.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = |\lambda I + 7I - 2I| = (\lambda + 5)^3$$

$$\lambda_1 = -5 \text{ 代入 } (\lambda_1 E - A)X = 0 \text{ 得基础解系 } \xi_1 = (1, 2, -2)^T$$

$$\lambda_2 = -5 \text{ 代入 } (\lambda_2 E - A)X = 0 \text{ 得基础解系 } \xi_2 = (-2, 1, 0)^T$$

$$\lambda_3 = -5 \text{ 代入 } (\lambda_3 E - A)X = 0 \text{ 得基础解系 } \xi_3 = (2, 0, 1)^T$$

$$\text{正交化 } \xi'_2 = \xi_2$$

$$\xi'_3 = \xi_3 - \frac{(\xi_3, \xi'_2)}{(\xi'_2, \xi'_2)} \xi'_2 = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T$$

$$\text{单位化 } \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T$$

$$\eta_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^T$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$$

$$\text{令 } U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\text{作正交线性替换 } X = UY, \text{ 化二次型为标准形 } -7y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$$