电路IA复习（8）
线性动态电路暂态过程的时域分析

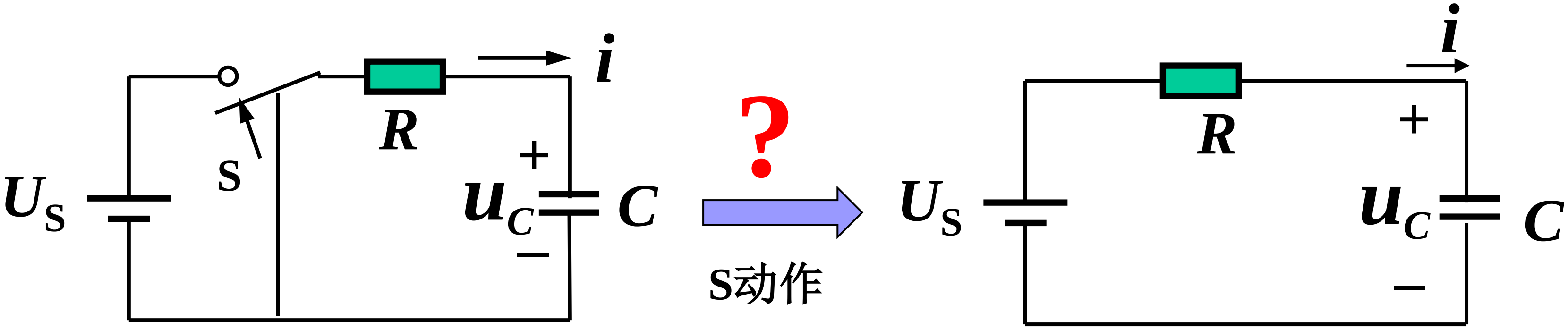
2022.8

本讲主要内容

ppt目录	对应教材章节
8 线性动态电路暂态过程的时域分析	第8章
8.1 线性动态电路暂态过程的基本概念	8.1
8.2 电路量初值的求解	8.2
8.3 求解一阶电路暂态过程的三要素法	8.9
8.4 一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应	8.3-8.8
8.5 卷积积分法	8.10
8.6 二阶电路的暂态过程	8.11
8.7 状态变量分析法	8.12

要学好本部分，主要是要把握好本章的“新”内容和之前的分析方法的配合。如：确定电路量初始值中的分压公式、分流公式、KVL/KCL，求时间常数中的戴维南等效，正弦电源作用下的一阶电路中的相量分析法等。我们在这部分的题目中失分，往往并非因为这部分的题真的很难，而是因为这部分的题比较综合、需要运用的之前学过的分析方法繁多而我们的知识点掌握不熟练；或是我们不知道如何与时域分析中的新概念配合而无从下手。多练习、多感受新旧知识的“配合”，不要被困难吓倒，相信大家会有更大进步。不要只求正确答案，注意规范书写、逻辑清晰（每一步有因有果，前后连贯）。

8.1 线性动态电路暂态过程的基本概念

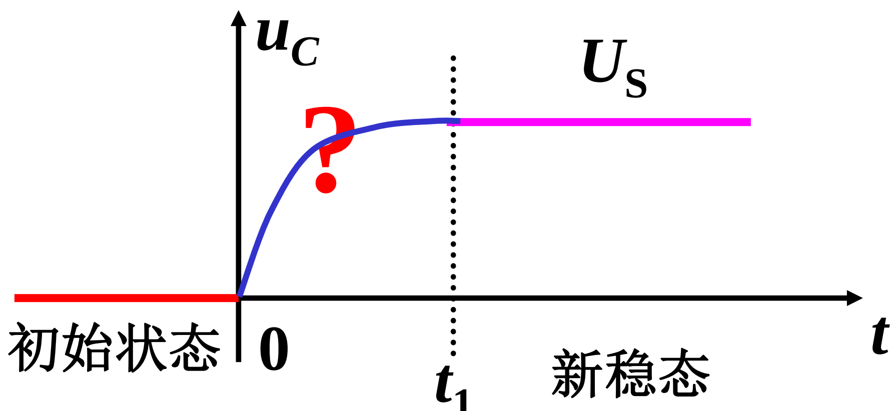


S未动作前（稳态）

$i = 0$， $u_C = 0$

S接通电源后很长时间（新稳态）

$i = 0$ ， $u_C = U_S$



过渡过程

8.1 线性动态电路暂态过程的基本概念

过渡过程（暂态过程）：电路由一个稳态过渡到另一个稳态需要经历的过程。

过渡状态（瞬态、暂态）

含有动态元件（L、C）的电路称为**动态电路**

过渡过程产生的原因？

1. 电路内部含有储能元件 L，C。　能量不能跃变　$p=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$
2. 电路结构发生变化。

开关动作、参数变化等统称为**换路**

过渡过程中，电路变量仍必须服从电路的结构约束和元件约束

8.2 电路量初值的求解

设电路在$t=0$时(也可以设为$t=t_0$时)换路。

$t=0_-$　$t=0$ 的前一瞬间　　　$t=0_+$　$t=0$ 的后一瞬间

$u(0_+)$、$i(0_+)$表示换路后瞬间的电压、电流，称为初始值

换路定律

$$\begin{cases} q(0_+)=q(0_-) \\ u_C(0_+)=u_C(0_-) \end{cases}$$

电容

$$\begin{cases} \psi(0_+)=\psi(0_-) \\ i_L(0_+)=i_L(0_-) \end{cases}$$

电感

除了电容电压和电感电流以外，电路中其他电压、电流在换路后都可能发生跃变。为确定这些电路量的初始值，可在换路后，将电容用大小为$u_C(0_+)$的电压源、电感用大小为$i_L(0_+)$的电流源替代，于是电路中只剩下电阻、受控源和独立源，成为电阻电路，可用分析直流电路的各种一般方法求某一支路的电压或电流。

8.2 电路量初值的求解

注意：出现冲激（强迫跃变）时换路定律不成立

常见特殊情况：

①若在换路后形成一个纯电容（或仅有电容和电压源）回路，该回路中无电阻，则电容电压可能跃变。如发生跃变，在不与电压源相连的节点/不包括电源的闭合面上所有电容器极板上的电荷在换路瞬间守恒，即$\Sigma q(0_+) = \Sigma q(0_-)$，其中与该节点相连的正极板电荷取正号，负极板电荷取负号。将该回路的KVL方程和上式电荷守恒方程联立，可求出电容电压初始值。【详见后面例题】

另一种需要用此法求解的情形：若两电容串联，且换路后两电容均有初值，则稳态时，两电容不是按与电容成反比分配电压，需按KVL及闭合面内电荷守恒求电容电压。【课本习题8.25、8.28】

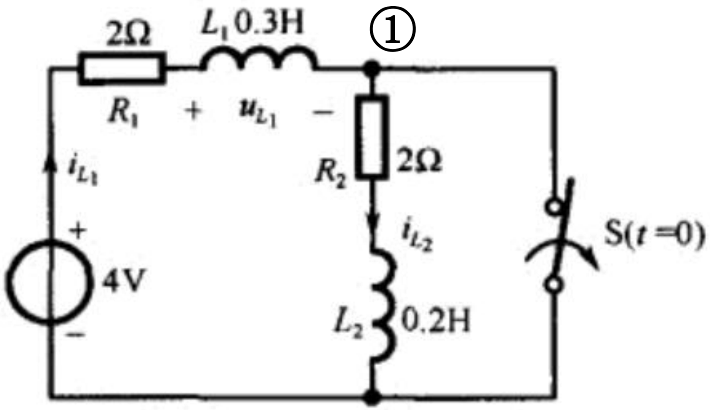
8.2 电路量初值的求解

注意：出现冲激（强迫跃变）时换路定律不成立

常见特殊情况：

**(含下学期知识点)②若在换路后形成一个纯电感（或仅有电感和电流源）割集，则电感电流可能跃变。如发生跃变，在某回路（该回路不含电流源支路）中所有电感的磁链在换路瞬间守恒，即$\Sigma\psi(0_+)=\Sigma\psi(0_-)$，其中当电感电流方向与回路方向一致时，该电感磁链为正，反之取负号。将该割集的KCL方程和上述磁链守恒方程联立，可求出电感电流初始值。

【在尚未学习“割集”的概念时，我们通常观察电路中是否出现仅有双电感（或双电感和电流源）共用的节点。例：如右图，$t=0$时开关断开。换路前两个电感电流一个为0，另一个为2A，换路后节点①上只接了这两个电感，则两个电感电流在换路瞬间必须发生跃变，使电流相等，才能使节点①的KCL成立。】



8.3 求解一阶电路暂态过程的三要素法

可用一阶常微分方程描述的电路称为一阶电路。电路中除电阻之外只含一个电容或一个电感的电路，或经串并联等效变换后可等效为一个电容或一个电感的电路，都是一阶电路。

用于描述一阶电路的微分方程的普遍形式为

$$\begin{cases} \dfrac{df(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} f(t) = g(t) \\ f(0_+) = F_0 \end{cases} \qquad (t=0\text{时换路})$$

其解等于特解加上齐次方程的解，形式为

$$f(t) = f_p(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

令 $t = 0^+$ $\quad f(0_+) = f_p(0_+) + A \Rightarrow A = f(0_+) - f_p(0_+)$

$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

三要素 $\begin{cases} f_p(t) & \text{特解} \\ f(0_+) & \text{起始值} \\ \tau & \text{时间常数} \end{cases}$

8.3 求解一阶电路暂态过程的三要素法

$$f(t)=f_p(t)+[f(0_+)-f_p(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f_p(t)$ 函数形式由外加激励决定，与初始值无关，称为强制分量。当激励是直流、阶跃或周期电源时，该强制分量又称为稳态分量。

$[f(0_+)-f_p(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ 与外加激励无关，决定于电路结构和参数，称为自由分量。最终衰减为0。

全响应＝强制分量＋自由分量

τ 时间常数，是暂态过程进行快慢的标志，τ越大，暂态过程越长。对于RC一阶电路，$\tau=RC$；对于RL一阶电路，$\tau=L/R$。其中R是从储能元件看进去的戴维南等效电阻。

8.3 求解一阶电路暂态过程的三要素法

$$f(t)=f_p(t)+[f(0_+)-f_p(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

对于正弦激励的一阶电路，特解 $f_p(t)$ 是正弦稳态解，可用相量法求得响应相量再转化为瞬时值形式。上式中$f_p(0_+)$是正弦稳态解在$t=0_+$时的值。

激励为直流或阶跃电源时，特解为常量，且等于直流稳态解，记作$f(\infty)$，则三要素公式可写为

$$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

另：若在$t=t_0$时换路，则将三要素公式右端的t换为$t-t_0$，0_+换为t_{0+}即可.

8.3 求解一阶电路暂态过程的三要素法

$$f(t)=f_p(t)+[f(0_+)-f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

利用三要素法的一般求解步骤：

①求特解 $f_p(t)$：当激励是直流、阶跃或周期电源时，稳态解即可作为该特解；如果激励是其他种类电源，通常列出原始的微分方程求解(P223 例8.9，习题8.17) 或利用卷积积分法计算。

②求初始值$f(0_+)$：参看本ppt 8.2“电路量初始值的求解”。

③求时间常数：求解换路后从储能元件看进去的戴维南等效电路，从而求出等效电阻，最后利用公式$\tau=RC$ (对于RC一阶电路)或$\tau=L/R$(对于RL一阶电路)。

8.4 一阶电路零输入响应、零状态响应和全响应

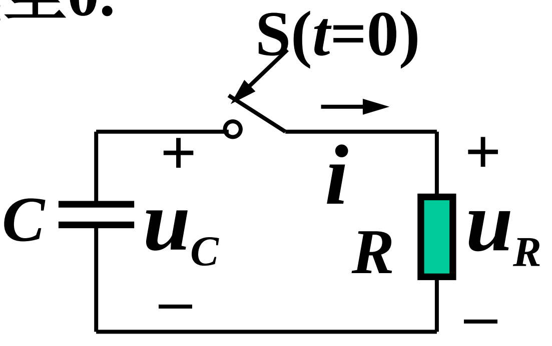
全响应＝零输入响应＋零状态响应

一、零输入响应：

激励（电源）为零，由初始储能引起的响应。

$$f(t) = f(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f(t)$ 从初始值$f(0_+)$开始按指数规律单调衰减至0.



如*RC*放电电路：

$$u_C = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \ge 0)$$

$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$

再如*RL*放电电路：

$$i = I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}} \quad (t \ge 0)$$

8.4 一阶电路零输入响应、零状态响应和全响应

二、零状态响应：

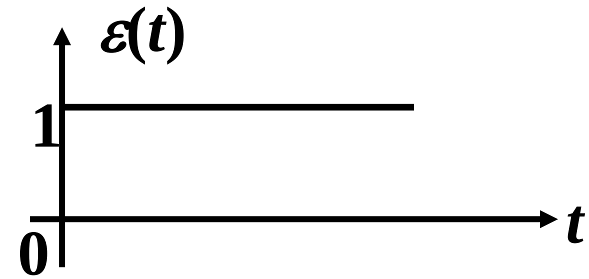
电路储能元件初始能量为零（电容电压、电感电流为0），在激励（电源）作用下产生的响应。一般利用KCL/KVL列写微分方程或利用三要素法求解。

阶跃响应/冲激响应/正弦电源作用下的一阶电路，有一些特殊的知识点。

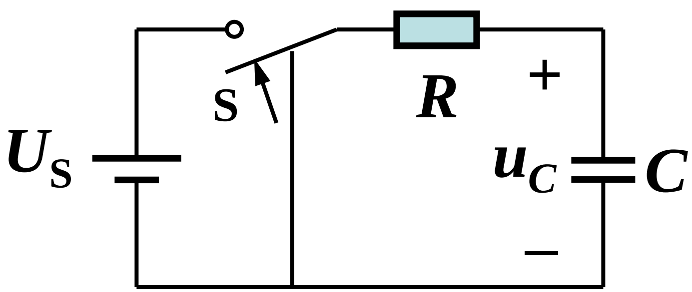
8.4 一阶电路零输入响应、零状态响应和全响应

※单位阶跃函数

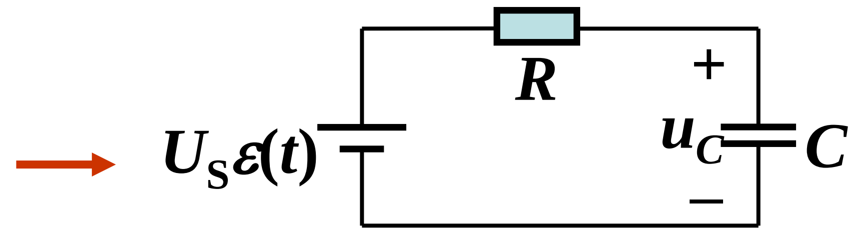
$$\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t>0) \end{cases}$$



用$\varepsilon(t)$可描述开关的动作。



开关在$t=0$时闭合

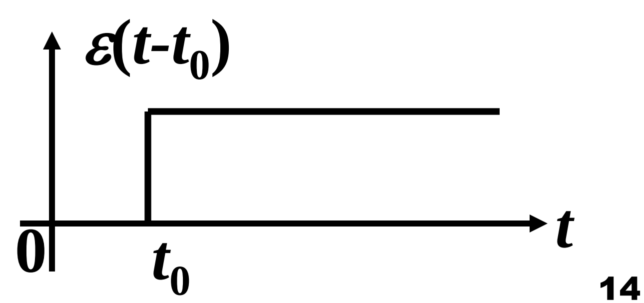


$$U_S\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & (t<0) \\ U_S & (t>0) \end{cases}$$

延迟？

$$\varepsilon(t-t_0) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & (t<t_0) \\ 1 & (t>t_0) \end{cases}$$

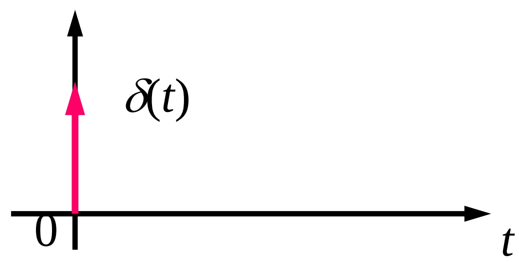
可表征开关在$t=t_0$时闭合



8.4 一阶电路零输入响应、零状态响应和全响应

※单位冲激函数（延迟类比阶跃函数）

$$\begin{cases} \delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t>0)\end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$



$$\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

※脉冲强度为k的冲激函数 $k\delta(t)$

$$\begin{cases} k\delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t>0)\end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty}k\delta(t)\mathrm{d}t=k \end{cases}$$

※$\varepsilon(t)$ 和$\delta(t)$的关系： $\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$

8.4 一阶电路零输入响应、零状态响应和全响应

阶跃响应： 阶跃函数激励下电路中产生的零状态响应。

单位阶跃响应（单位阶跃特性）： $s(t)$ 单位阶跃函数激励下电路中产生的零状态响应。阶跃响应÷阶跃电源幅值

冲激响应： 电路在冲激激励作用下的零状态响应。

单位冲激特性： $h(t)$ 单位冲激函数激励下电路中产生的零状态响应。冲激响应÷冲激强度

单位阶跃响应和单位冲激特性的关系： $h(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)$ 或 $s(t)=\int_0^t h(\xi)\mathrm{d}\xi$

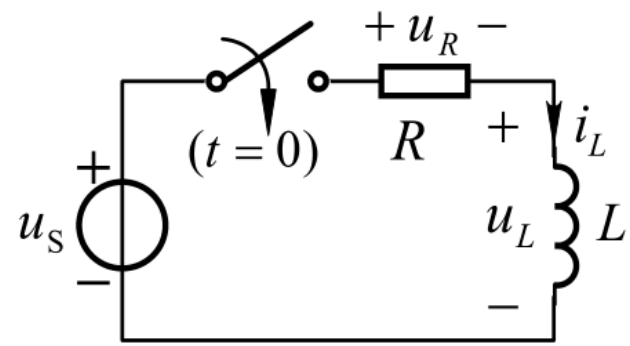
利用单位阶跃特性的导数获得单位冲激特性，再乘以任意冲激强度，便得到对该冲激激励的零状态响应。这是计算冲激响应的重要方法。

8.4 一阶电路零输入响应、零状态响应和全响应

正弦电流作用下的一阶电路：

$u_S = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$　　ψ_u 称为接入相角（简称**接入角**）

以右图所示的电路为例，讨论$t>0$时的零状态响应i，可得



$$i = I_{mp}\cos(\omega t + \psi_i) - (I_{mp}\cos\psi_i)e^{-t/\tau}$$

式中 I_{mp} 是稳态时电流的最大值

$\psi_i = \psi_u - \varphi$ 是电流相位角（具体从哪里来请自行对照书本）

式子共两项，第一项是强制分量，第二项是自由分量，

从自由分量的表达式可看出：

ψ_i 或者说 ψ_u **会影响自由分量的量值**。

书本列出了一些特殊情况，请关注。（直接进入稳态？过电流？）

8.1-8.4 结果的书写

如果题中明确指出求$t>0$时的响应，则直接写即可；

(可以不标$t>0$但最好标上)

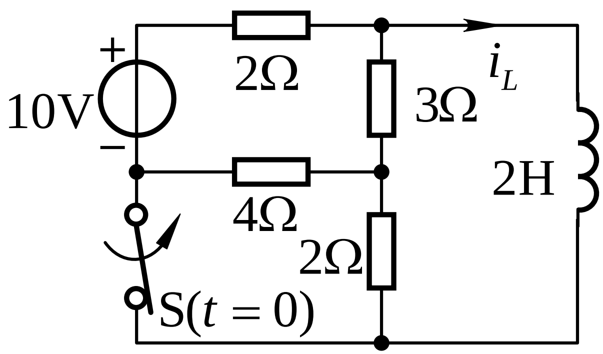
如果题中没有明确指出，则就要写整个时域上的表达式。以下两种书写方式都可以：

①在求出$t>0$时的表达式后，在表达式后注明$t>0$（有的量可以写$t\geqslant0$，是因为这些量在换路前后不变【例如（大多数不发生强迫跃变的题目中的）电容电压和电感电流】

②利用阶跃函数表示。 设电路在$t=0$时换路(大多数题目情境都如此)，则将$t<0$时的表达式乘上$\varepsilon(-t)$， $t>0(t\geqslant0)$时的表达式乘上$\varepsilon(t)$，再将两部分表达式合并起来即可。如书本P217例8.4，求出$t\geqslant0$时的电容电压全响应为$4-e^{-5t}$， $t<0$时的电容电压为恒定值3V，则$-\infty<t<+\infty$(全时域)上电容电压的表达式就可以写为$[3\,\varepsilon(-t)+(4-e^{-5t})\,\varepsilon(t)]$V. 在需要对式子求导得到全时域上的结果或式子存在不连续点时，<u>只能写成第二种形式【如P217例8.4】</u>。

8.1-8.4 例1

图(a)所示电路 $t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时开关断开。求 $t>0$ 时的电感电流 i_L 。



（直流电源作用下的一阶电路，三要素法）

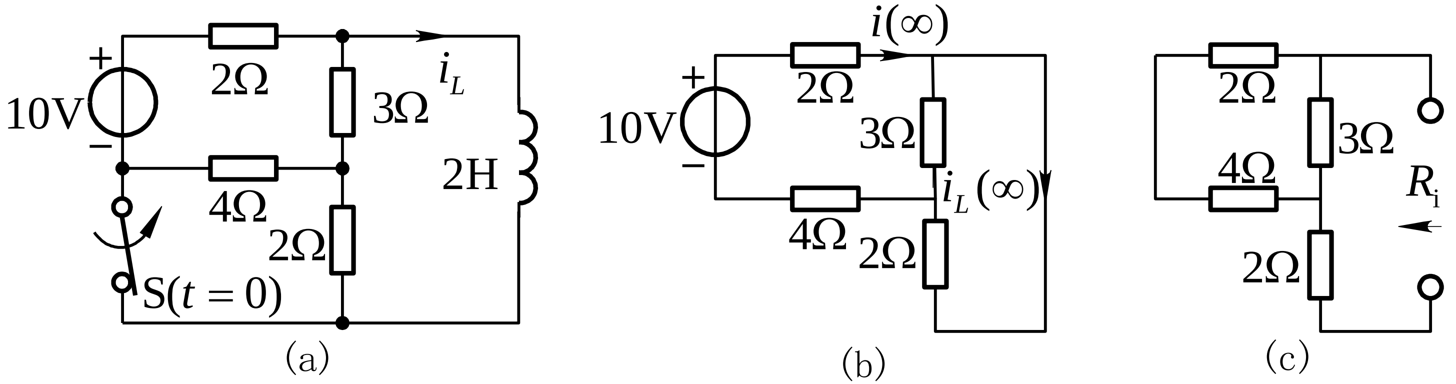
请先独立完成后，再翻到次页查看答案！

注：此处列举了7道例题，这些题所代表的题型考试中都经常出现，请大家仔细分析、订正，并把课本习题中的同类型题归类整理、重新训练。另外还有一些比较少出现的题型未被收录，可参看课本习题自行整理（如8.15、8.23抽象电路的暂态分析；8.16、8.17 激励不是直流或正弦情形下的处理）。

8.1–8.4 例1

$$f(t)=f_p(t)+[f(0_+)-f_p(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

图(a)所示电路 $t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时开关断开。求 $t>0$ 时的电感电流 i_L。



解：由换路定律得：$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\dfrac{10\text{V}}{2\Omega}=5\text{A}$

→①求初始值，此处为电感电流，直接运用换路定律

求稳态值的电路如图(b)所示。(对于直流电源作用下的一阶电路，特解即为稳态解)(稳态时开关为断开状态)

利用分流公式：$i_L(\infty)=\dfrac{3}{3+2}\times i(\infty)=\dfrac{3}{3+2}\times\dfrac{10\text{V}}{(2+4+3//2)\Omega}=\dfrac{5}{6}\text{A}$

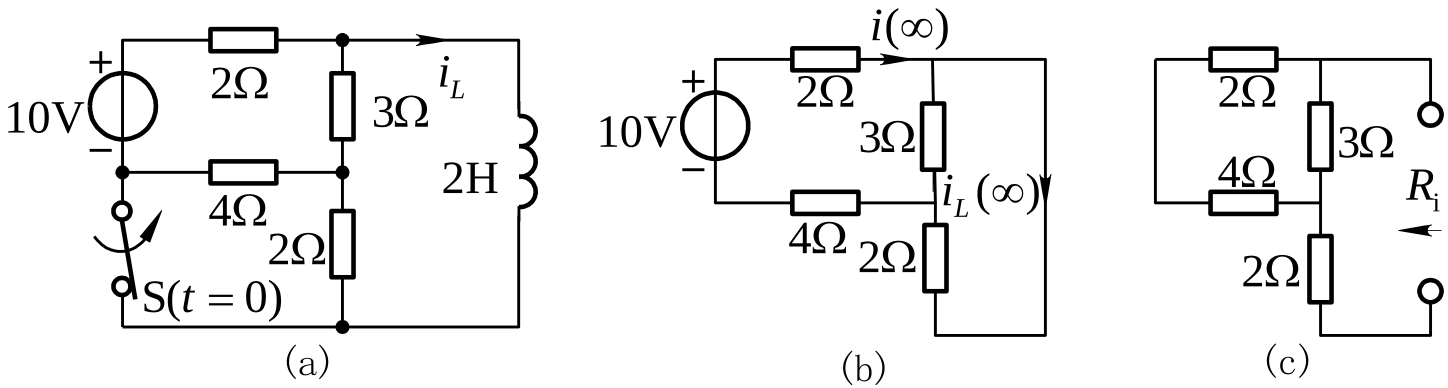
总等效电阻

→②求特解(稳态解)

8.1−8.4 例1

$$f(t)=f_p(t)+[f(0_+)-f_p(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

图(a)所示电路$t<0$时处于稳态，$t=0$时开关断开。求$t>0$时的电感电流i_L。



求等效电阻的电路如图(c)所示。(将电感去除，内部独立源置零)

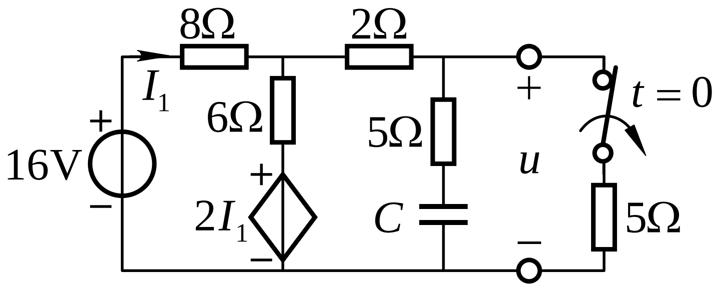
等效电阻为 $R_i=[2+\dfrac{3(2+4)}{3+2+4}]\Omega=4\Omega$ **→2Ω和4Ω电阻串联再和3Ω电阻并联，这一整体再和2Ω电阻串联。**

时间常数 $\tau=L/R_i=2/4=0.5\mathrm{s}$ **→③求时间常数**

由三要素公式得：$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}=\dfrac{5}{6}(1+5\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{A}$

8.1-8.4 例2

图示电路$t<0$时处于稳态，$C=0.01\text{F}$，$t=0$时开关断开，求$t>0$时的电压u。



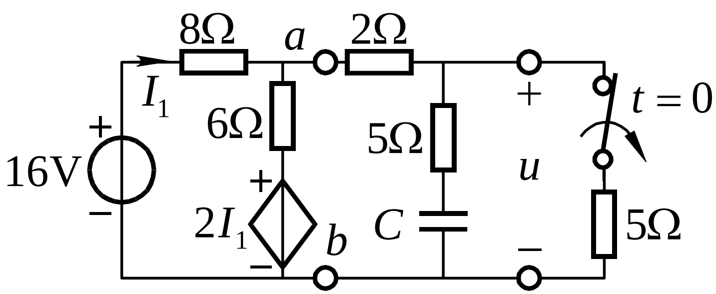
（直流电源作用下的一阶电路，适当简化，三要素法）

提示：利用戴维南定理

请先独立完成后，再翻到次页查看答案！

8.1-8.4 例2

图示电路$t<0$时处于稳态，$C=0.01\mathrm{F}$，$t=0$时开关断开，求$t>0$时的电压u。



解： 首先求ab端左侧的戴维南等效电路。

当ab端开路时：(如图1，对$l1$列KVL)

$8I_1+6I_1+2I_1=16$，解得$I_1=1\mathrm{A}$

ab端的开路电压$U_{OC}=6I_1+2I_1=8\mathrm{V}$

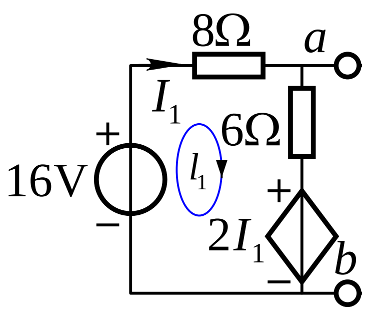


图1

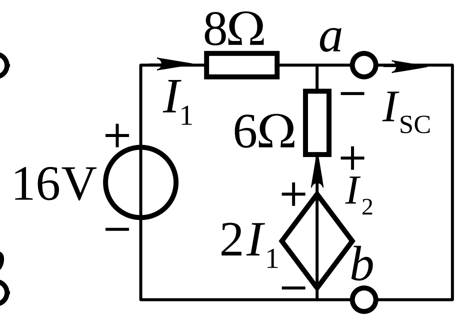


图2

当ab端短路时： $I_1=\dfrac{16}{8}=2\mathrm{A}$

ab端的短路电流：(如图2) $I_{SC}=I_1+I_2=I_1+\dfrac{2I_1}{6}=\dfrac{8}{3}\mathrm{A}$

ab端左侧的等效电阻 $R_i=\dfrac{U_{OC}}{I_{SC}}=\dfrac{8}{8/3}=3\Omega$

(第2次复习课内容：开路短路法求等效电阻)亦可用外施激励法。

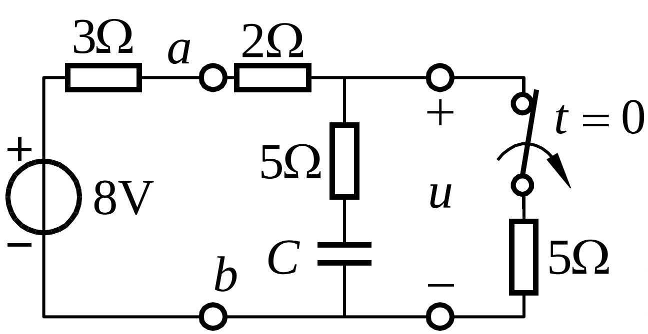


图3

等效后的电路如左图3所示。

8.1-8.4 例2

图示电路$t<0$时处于稳态，$C=0.01\text{F}$，$t=0$时开关断开，求$t>0$时的电压u。

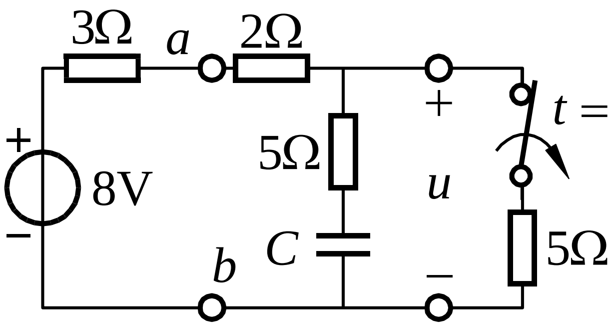


图3

等效后的电路如左图3所示。

当$t<0$时，电路处于稳态，电容开路。

$$u_C(0_-)=\frac{5}{2+3+5}\times 8=4\text{V}$$

由换路定律，$u_C(0_+)=u_C(0_-)=4\text{V}$

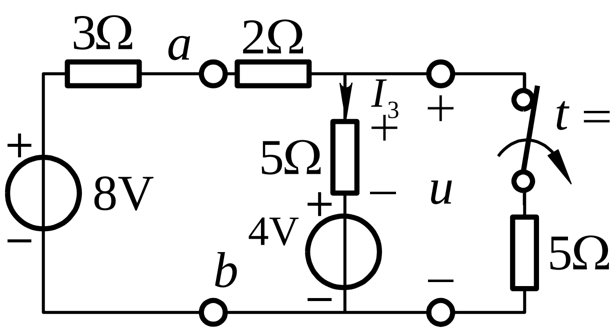


图4

为求解$u(0_+)$，将电容处换成一量值为$u_C(0_+)$的电压源，电路可改画为左图4（熟练后也可不改画）

$$u(0_+)=u_C(0_+)+5I_3=u_C(0_+)+\frac{8-u_C(0_+)}{3+2+5}\times 5=6\text{V}$$

稳态解 $u(\infty)=U_{OC}=8\text{V}$

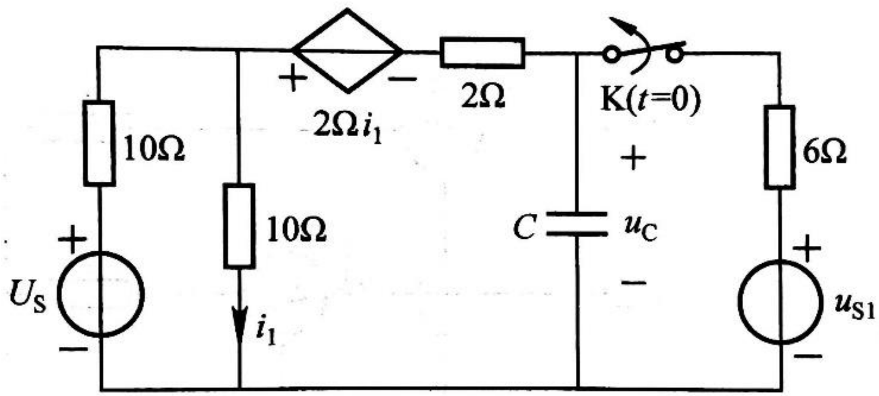
时间常数 $\tau=RC=10\times 0.01=0.1\text{s}$

由三要素公式得：$u(t)=[8-2\text{e}^{-10t}]\text{V}(t>0)$

或：$u(t)=u_C(t)+5\Omega\cdot i_C(t)=u_C(t)+5C\dfrac{\text{d}u_C(t)}{\text{d}t}$ 再对$u_C(t)$用三要素公式

8.1-8.4 例3

图示电路原处于稳态，U_S＝20V，C＝0.025F，u_{S1}＝5cos(10t)V。t＝0时开关K由闭合突然断开，试用三要素分析法求t＞0时的全响应u_C。



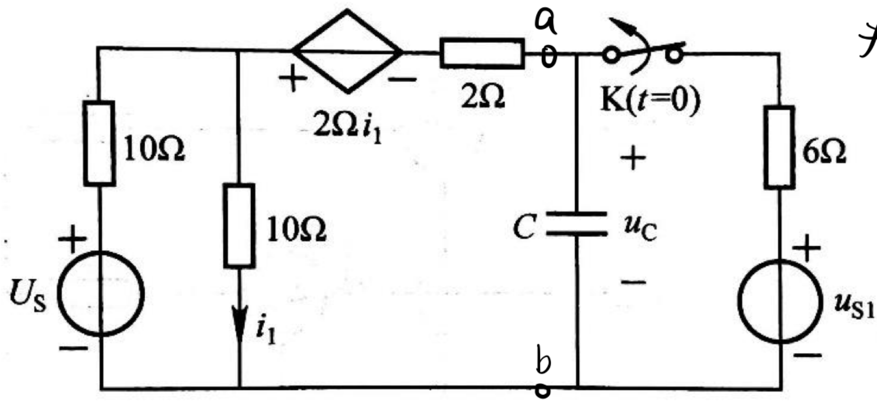
（直流+正弦电源作用下的一阶电路，适当简化，三要素法）

提示：利用戴维南定理

请先独立完成后，再翻到次页查看答案！

8.1-8.4 例3

图示电路原处于稳态，U_S＝20V，C＝0.025F，u_{S1}＝5cos(10t)V。t＝0时开关K由闭合突然断开，试用三要素分析法求t＞0时的全响应u_C。

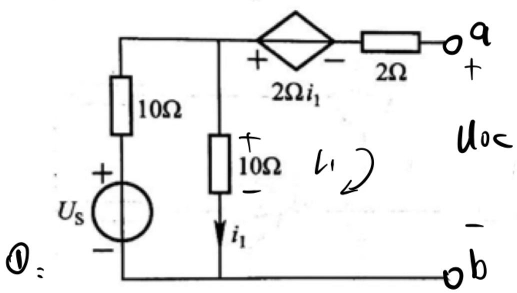


为方便分析，先将图中 a b 端口左侧电路作一戴维南等效。

① 求开路电压：由 KVL：$i_1 = \frac{20}{10+10}A = 1A$

作虚拟回路如图①所示

则 $u_{oc} = 10\times1 - 2\times1 = 8V$



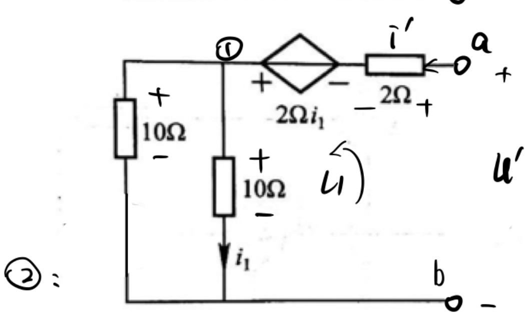
② 求等效电阻：

(注意参考方向)

在外界加一激励u'，由回路l_1 KVL得 $u' + 2i_1 = 10i_1 + 2i'$

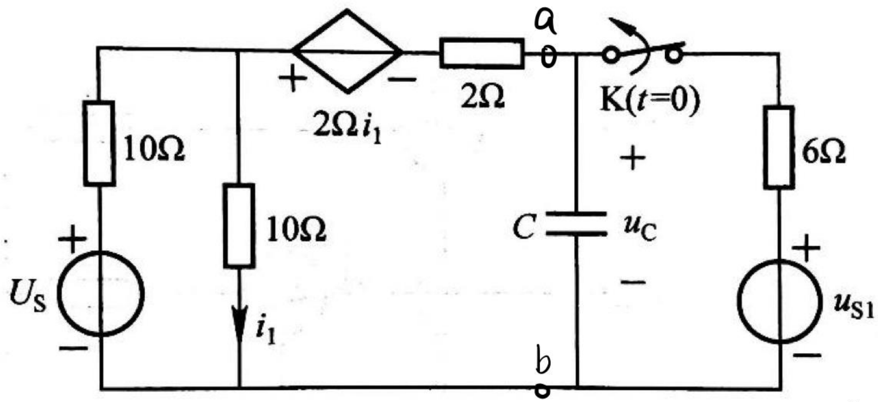
由节点① KCL结合并联分流规律得 $i' = 2i_1$

代入上式，有 $u' = 12i_1 = 6i'$ → $R_{eq} = \frac{u'}{i'} = 6\Omega$



8.1-8.4 例3

图示电路原处于稳态，U_S＝20V，C＝0.025F，u_{S1}＝5cos(10t)V。t＝0时开关K由闭合突然断开，试用三要素分析法求t＞0时的全响应u_C。



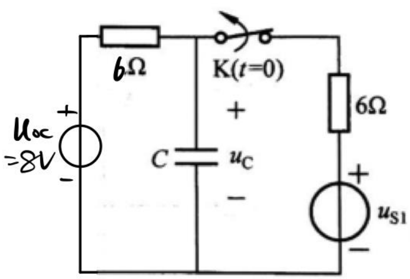
等效后电路如左下 所示.

稳态时 $u_C(\infty)=U_{oc}=8V$

换路前后，由换路定律知 电容电压不突变.

则利用叠加定理 求换路前 电容电压.

① 仅有直流电源作用时，$u_{C(0)}=4V$.



② 仅有交流电源作用，用相量法。

$$Z_{eq}=6+\frac{-24j}{6-4j}=6-\frac{6}{13}j(6+4j)=\frac{102}{13}-\frac{36}{13}j$$

$$\dot{U}_{Cm}=\frac{\dot{U}_{S1m}}{Z_{eq}}\times\frac{6}{6-4j}\times(-4j)=\frac{5\angle 0^\circ}{36-48j}\times(-24j)=\frac{8}{5}-\frac{6}{5}j.$$

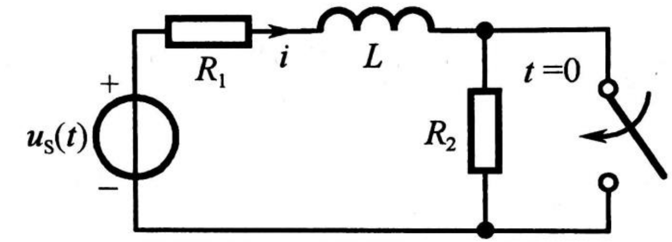
∴ 仅有交流电源作用时的 $u_C=2\cos(10t-36.9^\circ)$

∴ $u_C=[4+2\cos(10t-36.9^\circ)]\ V\ (t\le 0)$　　$u_C(0+)=u_C(0-)=4+1.6=5.6\ V$

时间常数 $\tau=RC=6\Omega\times 0.025F=\frac{3}{20}s$　　∴ 由三要素公式有 $u_C(t)=[8-2.4e^{-(20/3)t}]V.$

8.1-8.4 例4

图示电路原处于稳态，$u_S(t)=60\cos(100t+90^\circ)$V， $R_1=9\Omega$，$R_2=7\Omega$，$L=0.12$H。$t=0$时开关突然闭合，试用三要素分析法求$t>0$时的电流$i(t)$。

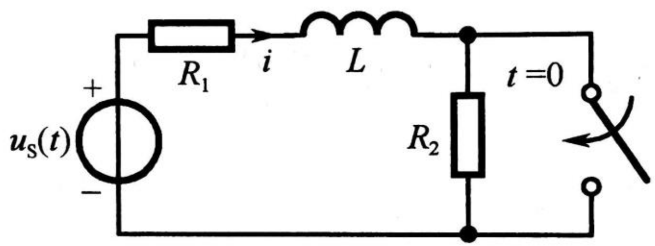


（正弦电源作用下的一阶电路，三要素法）

请先独立完成后，再翻到次页查看答案！

8.1-8.4 例4

图示电路原处于稳态，$u_S(t)=60\cos(100t+90^\circ)$V， $R_1=9\Omega$，$R_2=7\Omega$，$L=0.12$H。$t=0$时开关突然闭合，试用三要素分析法求$t>0$时的电流$i(t)$。



解：$t<0$时电路已达稳态，所以可用相量法求电流$\dot{I}$

$$\dot{I}_m=\frac{\dot{U}_{Sm}}{R_1+R_2+j\omega L}=\frac{60\angle 90^\circ}{9+7+j12}=3\angle 53.1^\circ\text{A}$$

瞬时表达式为$i(t)=3\cos(100t+53.1^\circ)$A　　$t=0_-$时$i(0_-)=1.8$A

由于电感电流不能跃变，所以$i(0_+)=i(0_-)=1.8$A

当开关闭合后达到新的稳态时，其特解（稳态解）为

$$\dot{I}_{mp}=\frac{\dot{U}_{Sm}}{R_1+j\omega L}=\frac{60\angle 90^\circ}{9+j12}=4\angle 36.9^\circ\text{A}$$

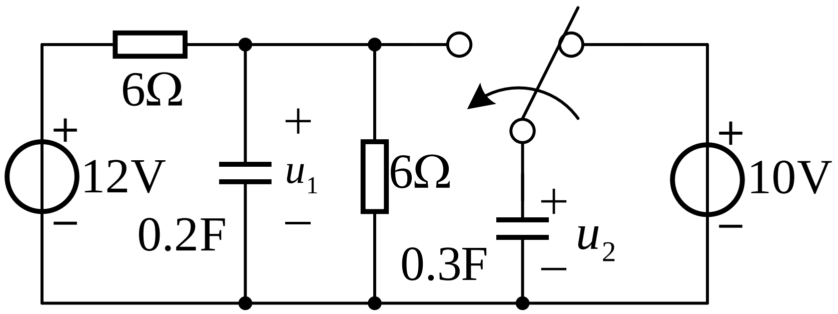
特解的瞬时表达式为$i_p(t)=4\cos(100t+36.9^\circ)$A，其初始值为$i_p(0_+)=4\cos 36.9^\circ=3.2$A

时间常数为 $\tau=\frac{L}{R}=\frac{0.12}{9}=\frac{1}{75}\text{s}$

由三要素公式得： $i(t)=i_p(t)+[i(0_+)-i_p(0_+)]e^{-t/\tau}=4\cos(100t+36.9^\circ)-1.4e^{-75t}\ \text{A}(t>0)$

8.1-8.4 例5

图示电路原处于稳态，$t=0$时换路，求$t>0$时的电压u_2。



（直流电源作用下的一阶电路，三要素法、强迫跃变【利用电荷守恒定初值】）

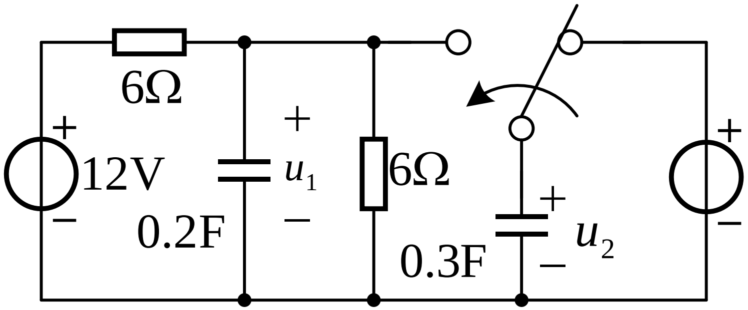
提示：　$u_1(0_-)=6\text{V}$　　$u_2(0_-)=10\text{V}$

t＝0时换路，两电压原始值不等的电容相并联【形成纯电容回路】，**电容电压将发生跃变【否则不能满足KVL】**。利用电荷守恒计算。

请先独立完成后，再翻到次页查看答案！

8.1–8.4 例5

图示电路原处于稳态，$t=0$ 时换路，求 $t>0$ 时的电压 u_2。



（两个电容并联可以变换为一个，按一阶电路计算。等效电容为直接相加。）

解：$u_1(0_-)=6\text{V}$　　$u_2(0_-)=10\text{V}$

$t=0$时换路，两电压原始值不等的电容并联，电容电压将发生跃变。利用两正极板电荷之和在开关动作前后瞬间相等来计算$u_2(0_+)$：

$$\begin{cases} 0.2u_1(0_+)+0.3u_2(0_+)=0.2u_1(0_-)+0.3u_2(0_-) \\ u_1(0_+)=u_2(0_+) \end{cases}$$

解得　$u_1(0_+)=u_2(0_+)=8.4\text{V}$

稳态值　$u_2(\infty)=\dfrac{6}{6+6}\times 12\text{V}=6\text{V}$

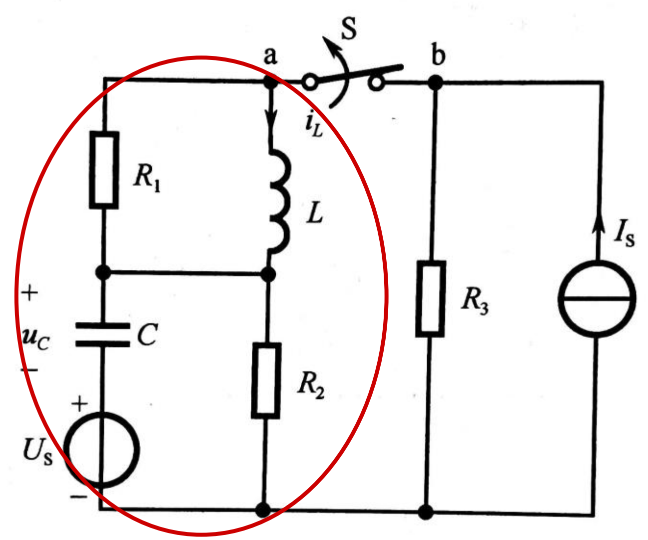
时间常数　$\tau=RC=(6/2)\times(0.2+0.3)=1.5\text{s}$

(为求时间常数，先求电容看进去的戴维南等效电阻，发现是两个6Ω电阻并联)

由三要素公式得：$u_2(t)=u_2(\infty)+[u_2(0_+)-u_2(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}=(6+2.4\mathrm{e}^{-t/1.5})\ \text{V}$

8.1-8.4 例6

图示电路中，$R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$，$L = 0.5\text{H}$，$C = 0.05\text{F}$，$U_S = 8\text{V}$，$I_S = 4\text{A}$。开关S打开前，电路已达稳态，在$t=0$时将S打开。求S打开后的电容电压$u_C(t)$、电感电流$i_L(t)$和电压$u_{ab}(t)$。



【**伪二阶电路。**当电路中含有电感和电容时，一般属于二阶电路，特殊情况下可能为一阶电路。有两种方法判断它是一阶电路还是二阶电路：

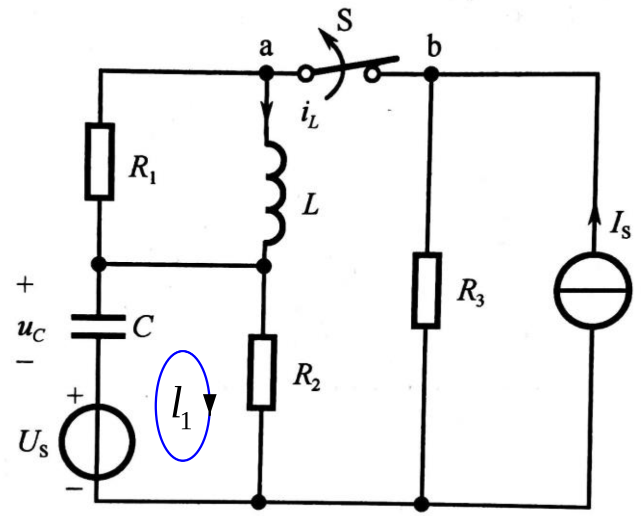
一是列写电路的微分方程，若列写的微分方程为两个独立的一阶微分方程则为一阶电路；

二是将电路中<u>独立源置零后</u>，从一个动态元件两端注入电流，若该电流流不到另一个不同的动态元件中，则为一阶电路。

本例中，换路后电路的左半部分（画红圈部分）由于中间被短路线短路，所以上下两个回路将分别单独作用而不互相影响，可用求解一阶电路的三要素法求解。】

8.1-8.4 例6

图示电路中，$R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$，$L = 0.5\text{H}$，$C = 0.05\text{F}$，$U_S = 8\text{V}$，$I_S = 4\text{A}$。开关S打开前，电路已达稳态，在$t = 0$时将S打开。求S打开后的电容电压$u_C(t)$、电感电流$i_L(t)$和电压$u_{ab}(t)$。



解： 换路前瞬间，即$t = 0_$时电路处于稳态，**电容相当于开路，电感相当于短路。**此时

$$i_L(0_-) = \frac{R_3}{R_3 + R_2} I_S = 2\text{A} \qquad u_C(0_-) = i_L(0_-) \times R_2 - U_S = 12\text{V}$$

(分流公式，电流源电流在流过b节点后分成两支，一支流过R_3，另一支流过R_2)

(左下角回路KVL)

由换路定律，$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 12\text{V}$，$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$

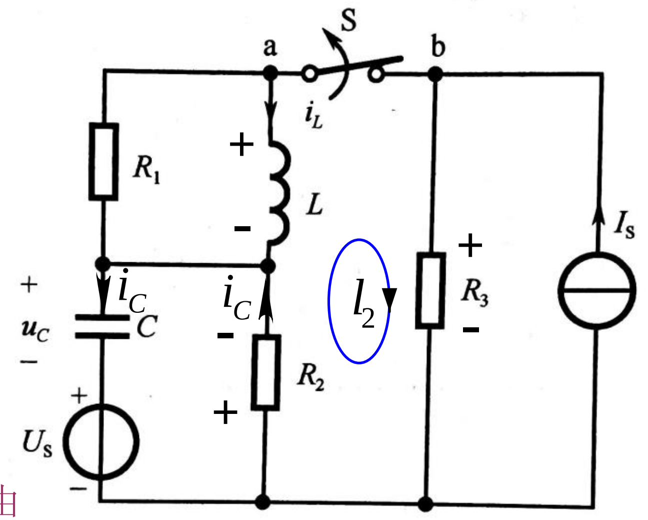
$t \to \infty$，即稳态时有 $u_C(\infty) = -U_S = -8\text{V}$，$i_L(\infty) = 0$

$t > 0$时对于上方RL回路，可求得其时间常数 $\tau_1 = \dfrac{L}{R_1} = 0.05\text{s}$

$t > 0$时对于下方RC回路，可求得其时间常数 $\tau_2 = CR_2 = 0.5\text{s}$

8.1–8.4 例6

图示电路中，$R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$，$L = 0.5\text{H}$，$C = 0.05\text{F}$，$U_S = 8\text{V}$，$I_S = 4\text{A}$。开关S打开前，电路已达稳态，在$t = 0$时将S打开。求S打开后的电容电压$u_C(t)$、电感电流$i_L(t)$和电压$u_{ab}(t)$。



$t > 0$时运用三要素公式可分别求得

$$i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} = 2\mathrm{e}^{-20t}\text{A}(t \geq 0)$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} = -8 + 20\mathrm{e}^{-2t}\text{V}(t \geq 0)$$

则此时开关两端的电压为

$$u_{ab}(t) = u_L - u_{R2} - u_{R3}$$

$$= L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} - C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}R_2 - R_3 I_S$$

$$= -40 - 20\mathrm{e}^{-20t} + 20\mathrm{e}^{-2t}\text{V}(t > 0)$$

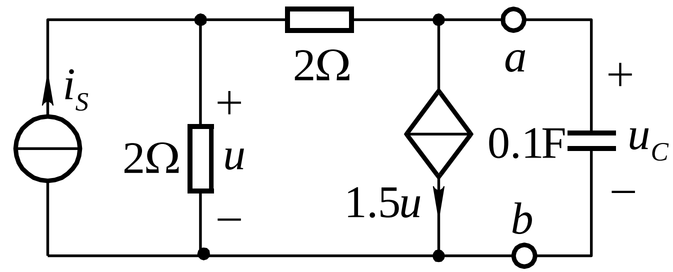
($l2$回路KVL。若熟练，可不写是由哪个回路KVL得到)
注意右边回路的参考方向选取。

8.1-8.4 例7

电路如图所示。

（1）求u_C的单位阶跃特性；

（2）求u_C的单位冲激特性。



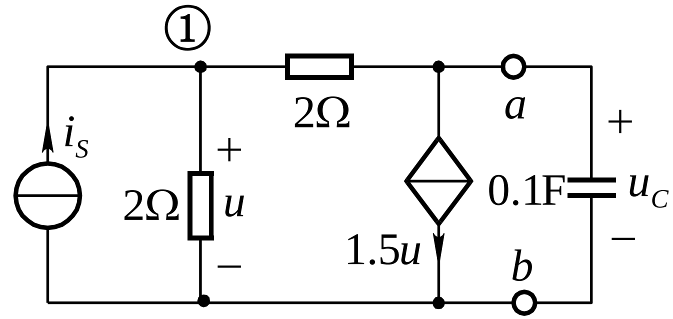
【求解阶跃响应/单位阶跃特性、冲激响应/单位冲激特性。此类题目常先通过用单位阶跃电源作激励，求出单位阶跃特性；再通过对单位阶跃特性求导求出单位冲激特性。此种题型还会在利用卷积积分法求解的题目中考查，因为要利用卷积积分法首先也要求出待求量的单位冲激特性。】

8.1-8.4 例7

电路如图所示。

（1）求u_C的单位阶跃特性；

（2）求u_C的单位冲激特性。



解：（1）当 $i_S = \varepsilon(t)\mathrm{A}$ 时（电源换成单位阶跃电源）

先求ab两端的戴维南等效电路。ab端开路时，由①KCL得：$\frac{u}{2} + 1.5u = i_S = \varepsilon(t) \Rightarrow u = 0.5\varepsilon(t)\mathrm{V}$

开路电压 $u_{OC} = u - 2\times1.5u = -2\times u = -1\varepsilon(t)\mathrm{V}$

求等效电阻的电路如右图1所示。

$$u_1 = (2+2)i = (2+2)\times\frac{u}{2} = 2u \qquad i_1 = i + 1.5u = \frac{1}{2}u + 1.5u = 2u$$

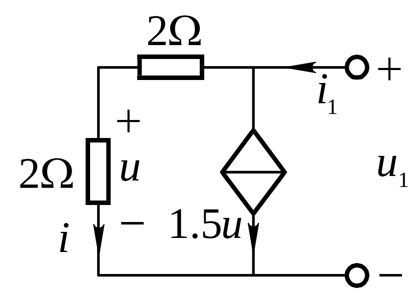


图1

等效电阻 $R_i = \frac{u_1}{i_1} = 1\Omega$

戴维南等效后的电路如右图2所示。时间常数 $\tau = R_i C = 0.1\mathrm{s}$

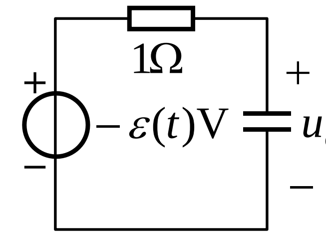


图2

根据**三要素公式**得 u_C的单位阶跃特性为：$s(t) = -1(1-\mathrm{e}^{-10t})\varepsilon(t)\ \Omega$

(2)单位冲激特性为单位阶跃特性的导数：$h(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -10\mathrm{e}^{-10t}\varepsilon(t)\ \Omega/\mathrm{s}$

8.5 卷积积分法

若$y(t)$为电路在t时刻对激励$x(t)$的零状态响应，则

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{0_-}^{t_+} x(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

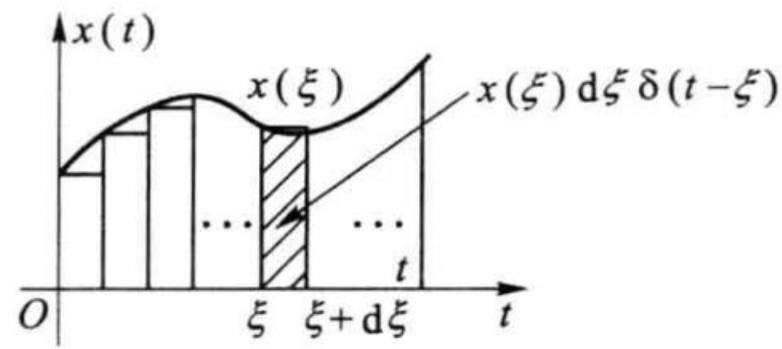
※解释

激励划分成若干脉冲激励，当实现无限细分（脉冲个数无限多、脉冲宽度无限小即为微分量$d\xi$）时，脉冲就成为延迟的冲激激励，脉冲函数所围面积就成为冲激强度. 例如，开始于$t=\xi$处的延迟冲激激励近似为 $x(\xi)\mathrm{d}\xi \cdot \delta(t-\xi)$

其引起的响应为 $x(\xi)\mathrm{d}\xi \cdot h(t-\xi)$

将响应叠加，由于$\mathrm{d}\xi \to 0$，因此叠加即为积分，即得卷积积分公式

$$y(t) = \int_0^t x(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$



8.5 卷积积分法

若$y(t)$为电路在t时刻对激励$x(t)$的零状态响应，则

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{0_-}^{t_+}x(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

※应用

常用于求解非周期激励作用下的零状态响应。

先求出待求量的单位阶跃特性，求导得到单位冲激特性；

再按照上式卷积积分即可。

卷积的具体应用，参看课本例题8.10、8.11，习题8.36。

8.6 二阶电路暂态过程

二阶电路：用二阶微分方程描述的电路。

对于*RLC*串联电路，有

$R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 两个不等的负实根 过阻尼

$R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 两个相等负实根 临界阻尼

$R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 两个共轭复根 欠阻尼

对于其他情形，也有上述三种情况。

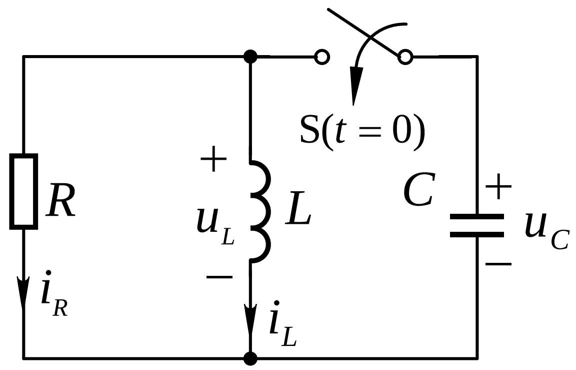
按照解二阶线性微分方程的方法求出通解即可。

8.6 例题

图示电路，$t=0$ 时开关突然接通。

(1)求电路为振荡、非振荡暂态过程时电阻 R 应满足的条件。

(2)设 $R=5\Omega, L=0.1\text{H}, C=0.001\text{F}, i_L(0_-)=0, u_C(0_-)=20\text{V}$。求零输入响应 i_L。

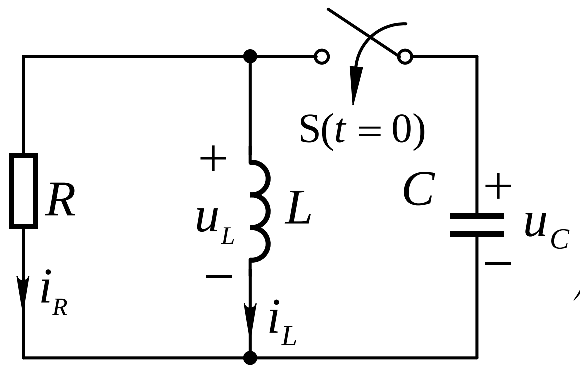


8.6 例题解

图示电路，$t=0$时开关突然接通。

(1)求电路为振荡、非振荡暂态过程时电阻 R 应满足的条件。

(2)设 $R=5\Omega, L=0.1\text{H}, C=0.001\text{F}, i_L(0_-)=0, u_C(0_-)=20\text{V}$ 。求零输入响应 i_L 。



解：(1) $t>0$时，由 KCL 得 $i_R+i_L+i_C=0$ (1)

将 $i_R=\dfrac{u_C}{R}$， $i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$， $u_C=u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

代入式(1)并整理成关于i_L的二阶微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}i_L=0 \qquad (2)$$

该微分方程的特征方程为： $p^2+\dfrac{1}{RC}p+\dfrac{1}{LC}=0$ 判别式 $\Delta=(\dfrac{1}{RC})^2-\dfrac{4}{LC}$

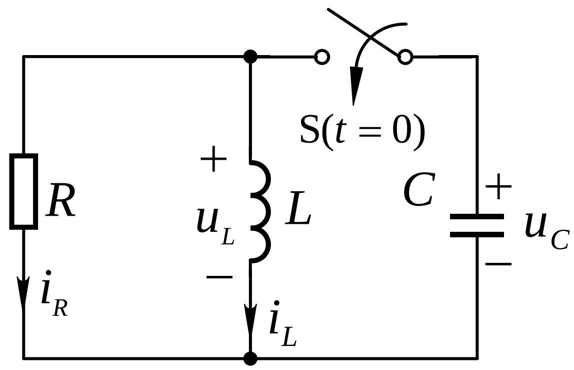
当$\Delta>0$即 $R<\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时为非振荡， 当$\Delta<0$即 $R>\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时振荡。

8.6 例题解

图示电路，$t=0$ 时开关突然接通。

(1)求电路为振荡、非振荡暂态过程时电阻 R 应满足的条件。

(2)设 $R=5\Omega, L=0.1\text{H}, C=0.001\text{F}, i_L(0_-)=0, u_C(0_-)=20\text{V}$。求零输入响应 i_L。



(2)将给定R、L、C数值代入微分方程(2)得

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+200\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+10^4\times i_L=0$$

由换路定律得 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$，

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0_+}=u_L(0_+)=u_C(0_+)=u_C(0_-)=20\text{V} \quad (\text{即}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0_+}=200)$$

特征方程的判别式 $\Delta=200^2-4\times10000=0$ 特征根 $p_{1,2}=\dfrac{-200}{2}=-100$， 存在二重根，

令齐次方程通解为 $i_L(t)=(A_1+A_2 t)\mathrm{e}^{-100t}$ (3)

根据初始条件，在式(3)中令 $t=0_+$ 得： $i(0_+)=A_1=0$

$$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0_+}=\mathrm{e}^{-100t}[A_2-100A_1-100A_2 t]_{t=0_+}=200$$，解得 $A_2=200$。 所以 $i_L(t)=200t\mathrm{e}^{-100t}\,\text{A}$

8.7 状态变量分析法

经典法处理高阶电路时的不足

- 微分方程的列写困难
- 初始值难以确定
- 求解过程复杂

→ 状态变量分析法

优点

- 状态方程易于列写
- 易于确定初始值
- 便于计算机求数值解

状态变量与状态方程

状态变量 能完整地、确定地描述动态电路时域行为的最少变量，是一组独立的动态变量，如 u_C和 i_L 。

状态方程 由状态变量及其一阶导数组成的一阶微分方程组。

8.7 状态变量分析法

列写方法：

取u_C和i_L为状态变量

(1) 对联接单电容的节点列KCL方程； $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \to C\dot{u}_C$

(2) 对包含单电感的回路列KVL方程； $L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \to L\dot{i}_L$

(3) 消去上述方程中的非状态变量；

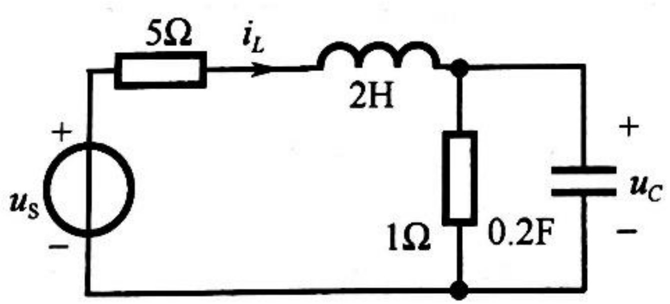
(4) 整理成标准形式的状态方程。

输出方程

将输出变量表示为状态变量和输入激励之间的关系、写成矩阵形式的方程。

8.7 例

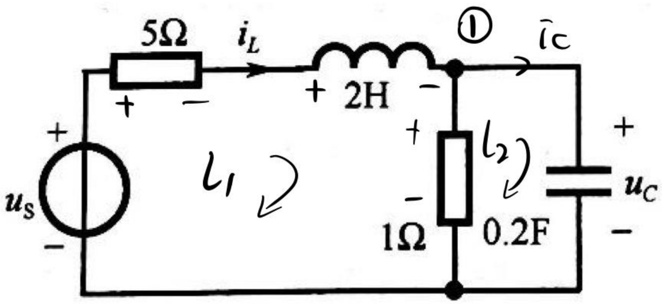
如图所示电路，若以i_L和u_C为状态变量，写出电路的状态方程：（以矩阵形式表达）



请先独立完成后，再翻到次页查看答案！

8.7 例

如图所示电路，若以i_L和u_C为状态变量，写出电路的状态方程：（以矩阵形式表达）



$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} [u_S]$$

[解析] 对回路l_1列写KVL方程：$u_S = 5i_L + u_L + i_1$　其中 $u_L = 2\frac{di_L}{dt}$

(步骤①：对含一个电感的回路列KVL方程)

对节点①列写KCL方程：$i_L = i_1 + i_C$　其中 $i_C = \frac{1}{5}\frac{du_C}{dt}$ (步骤②：对含一个电容的节点列KCL方程)

为消去i_1，列补充方程：(回路l_2的KVL方程) $i_1 = u_C$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{1}{2}u_S - \frac{5}{2}i_L - \frac{1}{2}u_C = \frac{di_L}{dt} \\ 5i_L - 5u_C = \frac{du_C}{dt} \end{cases}$.

整理即得状态方程。

本讲内容结束
谢谢！

2022.8