2021 年秋季学期自动控制理论（1）期末试题答案

1. 某负反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{2(s+1)(Ts+1)}{s^2}$，试求：

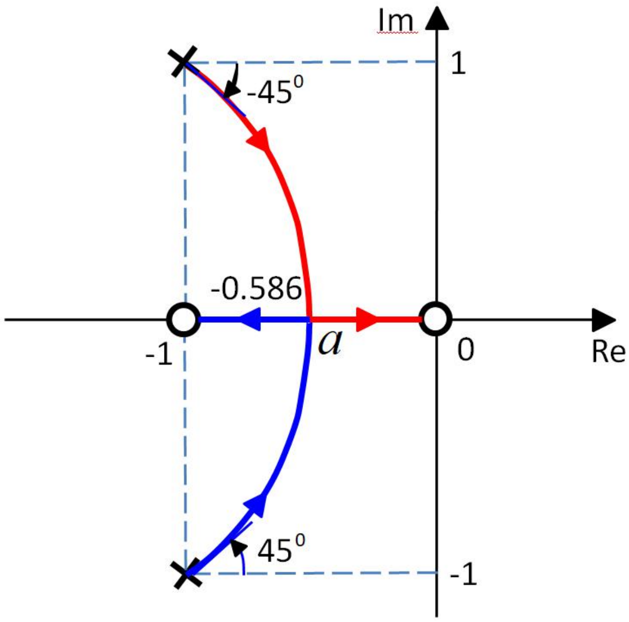
（1）$T:0\to+\infty$ 变化时的根轨迹略图，要求标出相关的出射角及汇合分离点坐标；

（2）使闭环系统单位阶跃响应具有衰减振荡的 T 的取值范围。

【解】系统的闭环特征方程为 $1+G(s)H(s)=1+\dfrac{2(s+1)(Ts+1)}{s^2}=0$，即 $(1+2T)s^2+(2+2T)s+2=0$，整理成 $1+\dfrac{2T(s^2+s)}{s^2+2s+2}=0$，所以等效开环传递函数为 $\bar{G}(s)\bar{H}(s)=\dfrac{2Ts(s+1)}{s^2+2s+2}$。开环极点为 $p_{1,2}=-1\pm j$，开环零点为 $z_1=0$，$z_2=-1$。根轨迹如图所示，其中，开环极点 $p_1=-1+j$ 的出射角为

$$\theta_{p_1}=180^\circ+\angle(p_1-z_1)+\angle(p_1-z_2)-\angle(p_1-p_2)=180^\circ+\angle(-1+j)+\angle(-1+j+1)-90^\circ$$

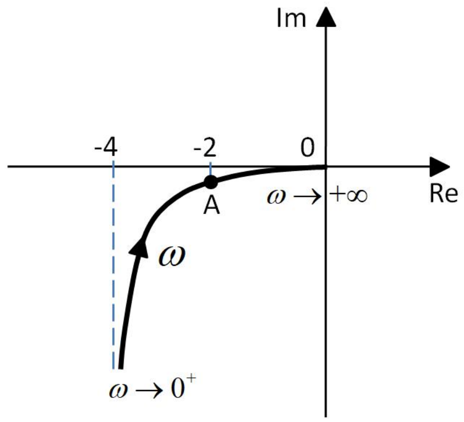
$=180^\circ+135^\circ+90^\circ-90^\circ=315^\circ$，即 -45°。求汇合分离点的坐标，令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\dfrac{2Ts(s+1)}{s^2+2s+2}\right]=0$，得 $s_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}$，如图取汇合分离点 $a=-2+\sqrt{2}\approx-0.586$，代入特征方程 $(1+2T)s^2+(2+2T)s+2=0$ 得 $T=1+\sqrt{2}\approx2.414$。所以，使闭环系统单位阶跃响应具有衰减振荡的 T 的取值范围是：$0<T<2.414$。



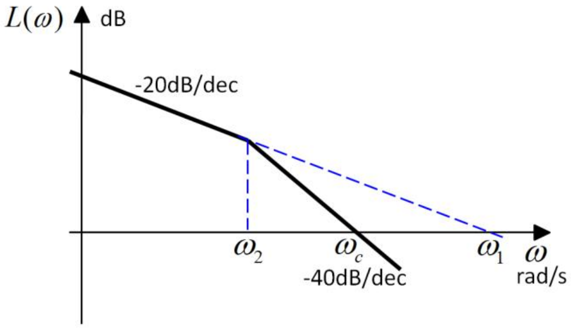
2. 已知单位负反馈系统的开环频率特性 Nyquist 曲线如图 2（a）所示，其开环渐近对数幅频特性如图 2（b）所示，图中 A 点的角频率为ω=2 rad/s。试求：

（1）ω_1，ω_2，ω_c 的值；

（2）闭环系统的阻尼比ζ 及无阻尼自然频率ω_n。



图（a）



图（b）

第 2 题图

【解】（1）由图可知系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$，则其开环频率特性为

$G(j\omega)=\dfrac{K}{j\omega(jT\omega+1)}$，$\mathrm{Re}\,G(j\omega)=-\dfrac{KT}{T^2\omega^2+1}$，由图（a）可知：当$\omega\to 0^+$时，$\mathrm{Re}\,G(j\omega)\to -4$，当$\omega=2$时，$\mathrm{Re}\,G(j\omega)=-2$，即

$$\begin{cases}-\dfrac{KT}{\omega^2T^2+1}\bigg|_{\omega\to 0^+}=-4\\ -\dfrac{KT}{\omega^2T^2+1}\bigg|_{\omega=2}=-2\end{cases},\quad \begin{cases}KT=4\\ \dfrac{KT}{4T^2+1}=2\end{cases},\text{ 解得}\begin{cases}T=0.5\\ K=8\end{cases}\text{，所以开环传递函数为}$$

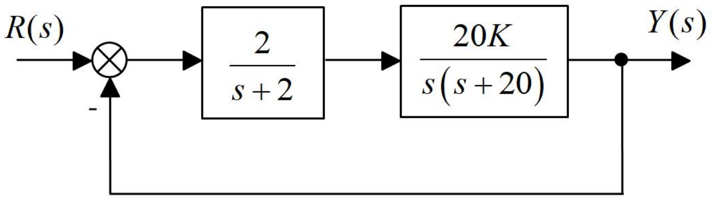
$G(s)=\dfrac{8}{s(0.5s+1)}$。由图（b）可知$\omega_1=K=8$ rad/s，$\omega_2=\dfrac{1}{T}=2$ rad/s，

$40(\lg\omega_c-\lg\omega_2)=20(\lg\omega_1-\lg\omega_2)$，即$40(\lg\omega_c-\lg 2)=20(\lg 8-\lg 2)$，解得$\omega_c=4$ rad/s。

（2）闭环传递函数为$\Phi(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{\dfrac{8}{s(0.5s+1)}}{1+\dfrac{8}{s(0.5s+1)}}=\dfrac{16}{s^2+2s+16}$，所以无阻尼自然频率$\omega_n=4$ rad/s，

$2\zeta\omega_n=2$，即阻尼比$\zeta=0.25$。

3. 设控制系统的结构如图 3 所示，要求当输入单位斜坡信号时的稳态误差小于 0.2，且幅值裕度不小于 6dB。试求参数 K 的取值范围，并概略地画出当 $K=10$ 时系统的开环渐近对数幅频特性图。



第 3 题图

【解】系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{40K}{s(s+2)(s+20)}=\dfrac{K}{s(0.5s+1)(0.05s+1)}$，这是一个 I 型系统，开环增益为 K，当输入单位斜坡信号时的稳态误差为 $e_{ss}=\dfrac{1}{K}$，根据题意要求，有 $e_{ss}=\dfrac{1}{K}<0.2$，即 $K>5$。

为求幅值裕度，先求相位穿越频率 ω_g，即

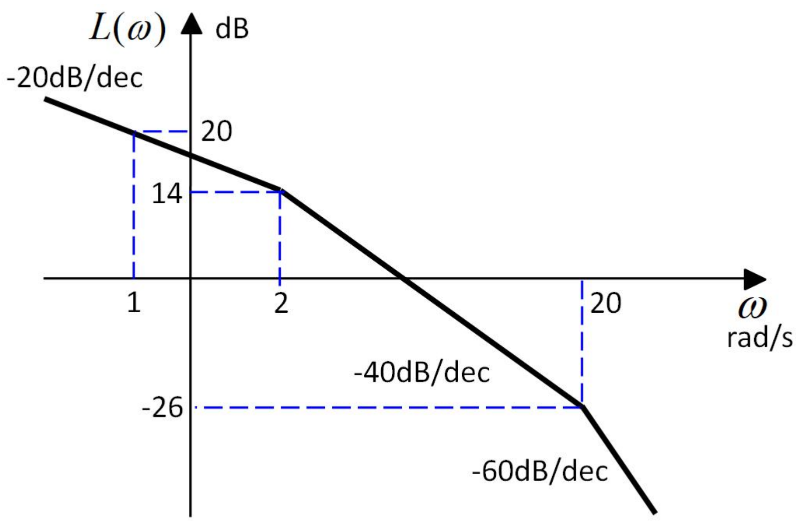
$$-90^\circ-\arctan\left(0.5\omega_g\right)-\arctan\left(0.05\omega_g\right)=-180^\circ,$$

解得 $\omega_g=2\sqrt{10}$，则幅值裕度为

$$K_g=\frac{1}{\left|G\left(j\omega_g\right)\right|}=\frac{\omega_g\sqrt{\left(0.5\omega_g\right)^2+1}\cdot\sqrt{\left(0.05\omega_g\right)^2+1}}{K}=\frac{22}{K}$$，根据题意有

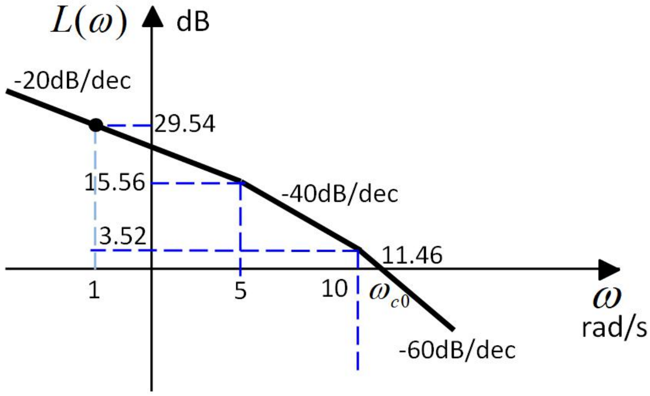
$20\lg K_g=20\lg\dfrac{22}{K}\geq 6$，解得 $K\leq 11.03$，因此参数 K 的取值范围为：$5<K\leq 11.03$。

当 $K=10$ 时，系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{s(0.5s+1)(0.05s+1)}$，系统的开环渐近对数幅频特性图如下：



4． 已知单位负反馈系统的被控对象传递函数为$G_0(s)=\dfrac{1}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$，欲使闭环系统满足下列指标：$K_v$=30，相角裕度$\gamma\ge 40^\circ$，开环剪切频率$\omega_c\ge 2.5$ rad/s，试设计一个校正装置，求出校正环节的传递函数。

【解】考虑开环增益后的广义被控对象为$G_0'(s)=\dfrac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$，$20\lg 30=29.54$，其两个转折频率分别为 5 和 10，开环渐近 Bode 图如下，不难求得其开环剪切频率为$\omega_{c0}=11.46$ rad/s，



其相频特性为$\angle G_0'(j\omega)=-90^\circ-\arctan(0.1\omega)-\arctan(0.2\omega)$，其相角裕度为

$\gamma_0=180^\circ+\angle G_0'(j\omega_{c0})=90^\circ-\arctan(0.1\omega_{c0})-\arctan(0.2\omega_{c0})$

$=90^\circ-\arctan(0.1\times 11.46)-\arctan(0.2\times 11.46)$

$=90^\circ-48.89^\circ-66.43^\circ=-25.32^\circ$。这说明相角裕度明显小于设计指标，而开环剪切频率却远高于设计指标，适合于运用串联迟后校正，设校正装置的传递函数为

$G_c(s)=\dfrac{K_c(\tau s+1)}{Ts+1}$，$T=\beta\tau$。在广义对象的相频特性上令

$-90^\circ-\arctan(0.1\omega)-\arctan(0.2\omega)=-180^\circ+\gamma+\Delta=-180^\circ+40^\circ+5^\circ=-135^\circ$

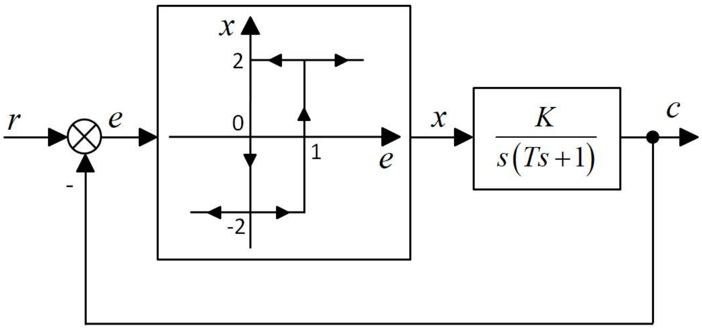
解得$\omega_c=2.8075$ rad/s。根据上面的 Bode 图，可得

$20\lg|G(j\omega_c)|=29.54-20\times(\lg 2.8075-\lg 1)=20.57$ dB，令$20\lg\beta=20.57$，解得$\beta=10.678$，取$\dfrac{1}{\tau}=0.1\omega_c=0.28075$，则$\tau=3.56$，

此外$T=\beta\tau=10.678\times 3.56=38.014$，$K_c=30$，于是$G_c(s)=\dfrac{30(3.56s+1)}{38.01s+1}$。

检验：略。

5. 某非线性系统如图 5 所示，输入信号为$r(t)=R\cdot 1(t)$，且已知$e(0)=2$，$\dot{e}(0)=0$。试在$e-\dot{e}$平面上绘制系统相轨迹的略图，并判断闭环系统的稳定性。



第 5 题图

【解】该非线性环节的数学模型可描述为

$$x=\begin{cases}2, & e>1\text{或}\left(0<e<1,\dot{e}<0\right)\\ -2, & e<0\text{或}\left(0<e<1,\dot{e}>0\right)\end{cases}$$

由$C(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}X(s)$可得$Ts^2C(s)+sC(s)=KX(s)$，$T\ddot{c}(t)+\dot{c}(t)=Kx(t)$，

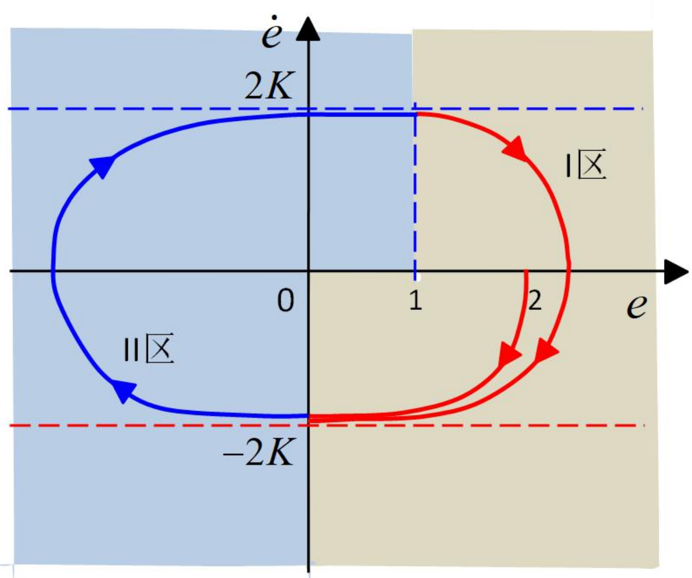
因为$c(t)=r(t)-e(t)$，再考虑到输入为阶跃信号，所以$\dot{c}(t)=\dot{r}(t)-\dot{e}(t)=-\dot{e}(t)$，$\ddot{c}(t)=\ddot{r}(t)-\ddot{e}(t)=-\ddot{e}(t)$，因此$-T\ddot{e}(t)-\dot{e}(t)=Kx(t)$，

I 区：$-T\ddot{e}(t)-\dot{e}(t)=2K$，相轨迹的斜率方程为$\dfrac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}=\dfrac{-\dot{e}-2K}{T\dot{e}}$，可得水平等倾线

$\dot{e}=\dfrac{-2K}{1+aT}$，进而可得水平渐近线$\dot{e}=-2K$。

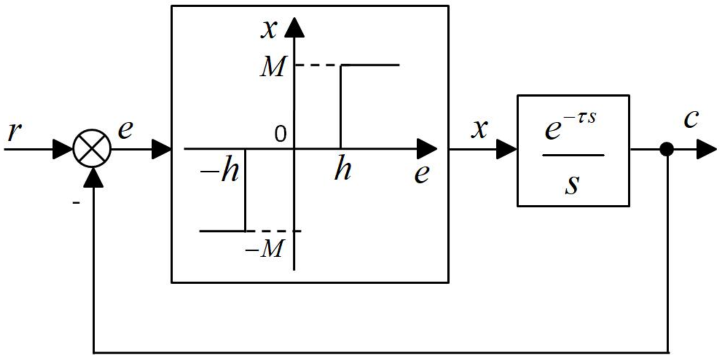
II 区：$-T\ddot{e}(t)-\dot{e}(t)=-2K$，相轨迹的斜率方程为$\dfrac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}=\dfrac{-\dot{e}+2K}{T\dot{e}}$，可得水平等倾线

$\dot{e}=\dfrac{2K}{1+aT}$，进而可得水平渐近线$\dot{e}=2K$。



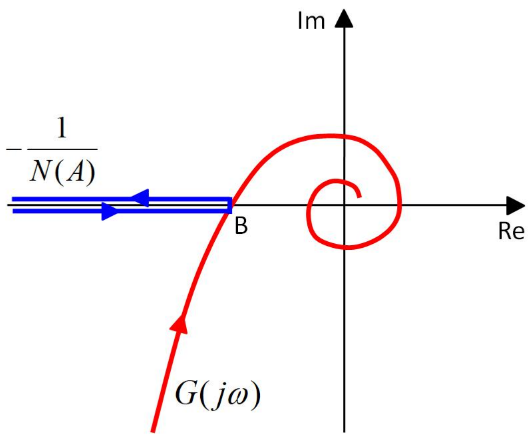
整个相轨迹如图所示，相轨迹不断地向两条渐近线趋近，故必然存在稳定极限环，系统出现自持振荡。

6. 已知非线性系统的结构如图 6 所示，试求延迟时间 τ 为何值时，系统开始产生自激振荡？此时非线性元件输入信号的振幅及角频率各为多少？（提示：非线性元件的描述函数为 $N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2}$ ）



第 6 题图

【解】根据题意，当系统产生自激振荡时，非线性元件的负倒描述函数 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线与 $G(j\omega)$ 曲线的位置如下图所示。首先应该求出 B 点的坐标，B 点是负倒描述函数 $-\frac{1}{N(A)}$ 的极值点。



$N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2}$， $-\frac{1}{N(A)}=-\frac{1}{\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2}}$， 令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\left[-\frac{1}{N(A)}\right]=0$ 可解得

$A=\sqrt{2}h$，于是 $-\frac{1}{N(A)}\bigg|_{A=\sqrt{2}h}=-\frac{\pi h}{2M}$，即 B 点的坐标为 $\left(-\frac{\pi h}{2M},j0\right)$。另一方面，由于 $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega\tau}$，

故 $|G(j\omega)|=\frac{1}{\omega}$， $\angle G(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-\omega\tau$ ，

令 $\angle G(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-\omega\tau=-\pi$ 解得 $\omega\tau=\frac{\pi}{2}$，则显然成立如下方程组

$$\begin{cases}\frac{\pi h}{2M}=\frac{1}{\omega}\\ \omega\tau=\frac{\pi}{2}\end{cases}，解得\begin{cases}\omega=\frac{2M}{\pi h}\\ \tau=\frac{\pi^2 h}{4M}\end{cases}。$$

结论：当延迟时间为 $\tau=\frac{\pi^2 h}{4M}$ 时，系统出现自激振荡，振荡的角频率为 $\omega=\frac{2M}{\pi h}$，振幅为 $A=\sqrt{2}h$。