**28** 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}\quad (\theta \text{ 为常数})$$

$Z=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

解:

根据分布函数定义得:

$$F_z(z)=P(Z\le z)=P(min\{X_1 \dots\dots X_n\}\le z)=1-P(min\{X_1 \dots\dots X_n\}>z)$$

$$=1-P(X_1>z \dots\dots X_n>z)=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i>z)=1-[1-F_X(z)]^n$$

其中对 X 的概率密度函数积分得:

$$F_X(z)=\int_{\theta}^{z}f_X(x)\,dx=1-e^{-2(z-\theta)}$$

对 Z 的分布函数求导得 Z 的概率密度函数:

$$f_z(z)=F_z'(z)=\{1-[1-F_X(z)]^n\}'=2ne^{-2n(z-\theta)}, z>\theta$$

根据期望、方差的求解公式:

$$E(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_z(z)dz=\frac{1}{2n}+\theta$$

$$E(z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}z^2f_z(z)dz=\frac{1}{2n^2}+\theta^2+\frac{\theta}{n}$$

$$D(z)=E(z^2)-E(z)^2=\frac{1}{4n^2}$$