پردازش اطلاعات کوانتومی

پاییز ۱۴۰۱

ارائه ۳

در این ارائه با مفروضات محاسبات کوانتومی آشنا می‌شوید. این مفروضات به شما اجازه می‌دهند بدانید محیط کوانتومی به چه صورت مدل‌سازی شده است و چگونه می‌توانید با مدل انتزاعی تعامل کنید.

به صورت خاص، شما چهار فرض را مطالعه خواهید کرد.

۱ فرض ۱

در هر لحظه، حالت یک «سیستم بسته که با بیرون تعامل ندارد» را چگونه می‌توان نمایش داد؟ می‌توان با یک «بردار از اعداد مختلط» این کار را انجام داد که اندازه این بردار «یک» است. یعنی مجموع احتمال حضور در هر کدام از حالت‌های مختلفش برابر یک است. در این درس ما مدل‌سازی‌های خود را بر مبنای مفهوم کیوبیت بنا می‌کنیم که فضای حالت آن یک بردار دوبعدی در فضای اعداد مختلط است. برای ساختن و توصیف سیستم‌های بزرگ‌تر تعداد بیشتری کیوبیت و تعامل آنها را در نظر می‌گیریم (در مورد نحوه تعامل در ادامه درس بیشتر توضیح می‌دهیم). در اینجا ممکن است سؤالی مطرح شود که معادل یک کیوبیت در دنیای فیزیکی چیست؟ از جمله سیستم‌های فیزیکی که می‌توان برای ساخت یک کیوبیت استفاده کرد می‌توان به «اسپین یک الکترون»، «قطبش یک فوتون» و یا «جریان در یک مدار ابررسانا» اشاره کرد. اسلاید شماره ۳ را ببینید.

۲ فرض ۲

یک «سیستم بسته» طی چه فرایندی تغییر حالت می‌دهد؟ تحول یک سیستم بسته در طول زمان با استفاده از معادله شرودینگر نشان داده می‌شود که در اسلاید ۴ نمایش داده شده است. اما، در این درس ما به حالت زمان‌گسسته این معادله توجه داریم و برای کاربردهای ما کافی است. حالت زمان‌گسسته که در اسلاید ۵ آمده است بیان می‌کند که حاصلضرب یک ماتریس یکانی (unitary) در «بردار حالت»، تغییر یک سیستم را نشان می‌دهد. در مورد رابطه معادله شرودینگر و معادله تحول زمان‌گسسته یک فایل مجزا بر روی سایت درس قرار می‌گیرد که لازم است آن را نیز مطالعه کنید. توضیحات مختصری از ارتباط عملگر H در معادله شرودینگر با عملگر U در معادله زمان‌گسسته، در اسلاید ۶ آمده است. نکته مهم در این اسلاید این است که بدانید عملگرهای یکانی «نُرم» را حفظ می‌کنند که عملاً به این معنی است که جمع احتمال حضور در هر کدام از حالت‌های پایه برابر یک است.

به عنوان مثال، در اسلاید ۷ با عملگرهای پاولی آشنا می‌شوید که ماتریس‌های یکانی هستند و بر روی یک کیوبیت عمل می‌کنند. توجه کنید، مثلاً، کارکرد عملگر X شبیه NOT در محاسبات کلاسیک است و حالت 0 را به 1 و بالعکس تبدیل می‌کند. در اسلاید ۹ نیز با یک ماتریس یکانی مهم دیگر که بر روی یک کیوبیت عمل می‌کند آشنا می‌شوید. این ماتریس هادامارد نام دارد و با حرف H نشان داده می‌شود. تعریف آن در ابتدای صفحه ۹ آمده است. تأثیر اجرای این ماتریس بر روی حالت‌های ۰ و ۱ را نیز در میانه صفحه ملاحظه می‌کنید. قبل مشاهده است که این عملگر، حالت ۰ و یا ۱ را در حالت «superposition» قرار می‌دهد. با اجرای مجدد این عملگر می‌توان از روی کیوبیتی که در حالت «superposition» قرار دارد حالت اولیه را بازیابی کرد.

۳ فرض ۳

اگر بخواهیم با یک «سیستم بسته» تعامل کنیم تا بدانیم در چه حالتی قرار دارد باید چکار کنیم و این تعامل چه تأثیری بر سیستم می‌گذارد؟ در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که سیستم را «اندازه‌گیری» می‌کنیم. ملاحظه کردید که سیستم کوانتومی به صورت احتمالاتی در تعدادی حالت قرار دارد (superposition). برای اندازه‌گیری ما باید تعدادی «ماتریس» (M_m) تعریف کنیم که عملگر اندازه‌گیری نامیده می‌شوند و بر اساس یک پایه به‌دست می‌آیند. احتمال مشاهده هر حالت خروجی ($p(m)$) بر اساس ماتریس‌های مورد استفاده M_m از پیش قابل محاسبه است. اسلاید شماره ۱۰ را ببینید. دقت کنید که پس از اندازه‌گیری حالت سیستم نیز تغییر می‌کند و به حالت دیگری می‌رود که در انتهای اسلاید ۱۰ توصیف شده است. نکته مهم در انتخاب عملگرهای اندازه‌گیری M_m این است که باید جمع احتمال حضور در هر کدام از حالت‌های پایه برابر ۱ باشد. این قید در ابتدای اسلاید ۱۱ توصیف شده است. برای دستیابی به این پیش‌نیاز لازم است که ماتریس‌های M_m قید میانه اسلاید ۱۱ را برقرار کنند. اثبات این رابطه نیز در انتهای این اسلاید آمده است.

معمولاً منظور از اندازه‌گیری، اندازه‌گیری یک کیوبیت در پایه محاسباتی است ($\langle 0|$ و $\langle 1|$). عملگرهای اندازه‌گیری این پایه‌ها در ابتدای صفحه ۱۲ آمده است. در میانه صفحه مشاهده می‌کنید که این ماتریس‌ها پیش‌نیاز لازم ماتریس‌های اندازه‌گیری که در اسلاید قبلی آمده بود را برآورده می‌کنند. در انتهای اسلاید نیز یک مثال از نتیجه اندازه‌گیری یک کیوبیت مثالی در پایه‌های محاسباتی را می‌بینید.

در اسلاید ۱۳ با عملگرهای اندازه‌گیری M_+ و M_- آشنا می‌شوید. مشاهده می‌کنید که اگر سعی کنیم با عملگرهای اندازه‌گیری محاسباتی یک کیوبیت در حالت superposition را اندازه‌گیری کنیم خروجی معنی‌داری بدست نمی‌آید. یعنی مثلاً اگر حالت $\langle +|$ را در پایه‌های محاسباتی اندازه بگیریم با احتمال ۰.۵ به حالت $\langle 1|$ می‌رسیم و با احتمال ۰.۵ به حالت $\langle 0|$ می‌رسیم. اما اگر با پایه‌های $\langle +|$ و $\langle -|$ اندازه‌گیری را انجام دهیم با احتمال ۱ متوجه می‌شویم که کیوبیت در حالت $\langle +|$ قرار دارد. برای بررسی دقیق‌تر محاسبات اسلاید ۱۴ را ملاحظه کنید. برای اینکه به صورت عمیق‌تر و دقیق‌تر این مفهوم را ببینید باید به مفهوم فازهای نسبی و سراسری بپردازیم که مبحث ارائه آتی خواهد بود.

به خاطر بیاورید که با انتخاب «پایه‌های اندازه‌گیری» مناسب توانستیم فرق یک کیوبیت در حالت $|+\rangle$ و $|-\rangle$ را متوجه شویم و دیدیم در صورت انتخاب نامناسب (استفاده از پایه‌های محاسباتی) نمی‌توان اطلاعات مفید و معناداری از کیوبیتی که در یکی از این حالت‌ها قرار دارد استخراج کرد (اسلاید ۱۴ را ببینید). با اطلاعاتی که تا کنون به دست آورده‌ایم متوجه شدیم که یک کیوبیت در هر کدام از حالت‌های پایه‌های هادامارد ($|+\rangle$ و $|-\rangle$) با احتمال ۵.۰ صفر و با احتمال ۵.۰ یک است. در اسلاید ۴ با مفهوم فاز آشنا می‌شوید که اجازه می‌دهد بیشتر متوجه شویم که تفاوت حالت‌های $|+\rangle$ و $|-\rangle$ چیست و چگونه می‌توان آنها را از یکدیگر تشخیص داد.

به صورت خاص، به معادله ابتدای اسلاید ۱۵ نگاه کنید. این معادله حالت کلی یک کیوبیت را نشان می‌دهد. برای اینکه این موضوع را بهتر متوجه شویم ابتدا توجه کنید که ضرایب «آلفا» و «بتا» اعداد مختلط هستند. هر عدد مختلط را می‌توان به فرم $r \times e^{ix}$ نیز نمایش داد (i یکّه مختلط است). بنابراین یک کیوبیت را به صورت زیر هم می‌توان نمایش داد:

$$\text{Qbit} = \alpha \times e^{i\theta}|0\rangle + \beta \times e^{i\phi}|1\rangle \tag{۱}$$

که در آن آلفا به توان ۲ بعلاوه بتا به توان ۲ برابر یک است (می‌دانید چرا؟). حال با یک فاکتورگیری به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\text{Qbit} = e^{i\theta}(\alpha \times |0\rangle + \beta \times e^{i(\phi-\theta)}|1\rangle) \tag{۲}$$

در این معادله، به θ فاز سراسری گفته می‌شود. در معادله دوم در اسلاید ۱۵ می‌بینید که تحت هر عملگر یکانی U مقدار فاز سراسری بدون تغییر باقی می‌ماند و در معادله سوم می‌بینید که تحت هر روش اندازه‌گیری امکان استخراج این مقدار وجود ندارد و نتیجه اندازه‌گیری مستقل از فاز سراسری است. به همین دلیل به فاز سراسری توجه خاصی نمی‌شود و اهمیتی ندارد که مقدار آن چقدر باشد. اما برای مقدار $(\phi - \theta)$ این مسئله صادق نیست و از تأثیر آن نمی‌توان صرف نظر کرد. به این مقدار فاز نسبی گفته می‌شود و همان مفهومی است که به ما اجازه می‌دهد حالت‌های $|+\rangle$ و $|-\rangle$ را از یکدیگر تمیز دهیم، در حالی که احتمال صفر و یک بودن هر دو برابر است. به عنوان مثال، اگر فاز نسبی $|+\rangle$ را محاسبه کنیم می‌بینیم که این مقدار برابر صفر است، اما فاز نسبی $|-\rangle$ برابر عدد پی است و دقیقاً به خاطر همین تفاوت است که می‌توان آنها را کاملاً از یکدیگر تشخیص داد. توضیحات بیشتری

۴ فرض ۴

اگر یک سیستم از چند زیرسیستم تشکیل شده باشد، حالت سیستم کلی را چگونه می‌توان بر اساس حالت زیرسیستم‌ها نمایش داد؟ حالت سیستم کلی از حاصلضرب «تانسوری» حالت زیرسیستم‌ها بدست می‌آید. اسلاید ۱۶ را ببینید. حال به اسلاید شماره ۷ در ارائه ۲ نگاه کنید. در آنجا دیدیم که اگر دو ماتریس و دو بردار را ضرب تانسوری کنیم و حاصل

اولی را در دومی ضرب ماتریسی کنیم معادل این است که ماتریس اول را در بردار اول و ماتریس دوم را در بردار دوم ضرب ماتریسی کنیم و سپس نتیجه را ضرب تانسوری کنیم. این ویژگی جالب به این معنی است که اگر عملگرهای یک کیوبیتی را بر تعدادی کیوبیت تفکیک‌پذیر اعمال کنیم نتیجه همچنان تفکیک‌پذیر است و درهم‌تنیدگی ایجاد نمی‌شود.

در اسلاید ۱۷ یک نمونه از یک عملگر «دوکیوبیتی» به نام CNOT را ملاحظه می‌کنید (بعداً بیشتر با این عملگر آشنا می‌شوید). حال محاسبات این اسلاید نشان می‌دهد که اگر این عملگر را به دو کیوبیت تفکیک‌پذیرِ نشان‌داده‌شده اعمال کنیم حاصل نهایی یک سیستم درهم‌تنیده است.

به این ترتیب، تا این قسمت از درس در این ارائه با مبانی مکانیک کوانتوم آشنا شدیم، ماتریس‌های پاولی و هادامارد را دیدیم، با مفهوم فاز سراسری و نسبی آشنا شدیم، و دیدیم که چگونه می‌توان سیستم‌های درهم‌تنیده ایجاد کرد.