	پردازش اطلاعات کوانتومی پاییز ۱۴۰۱	
ارائه ۲		

در اسلاید ۲ با مفهوم فضای Hilbert space آشنا می‌شوید. این فضا شامل بردارهایی است که به وسیله عملیات خطی به یکدیگر ارتباط پیدا می‌کنند. خواهید دید که سیستم‌های کوانتومی را می‌توان با استفاده از بردارها نمایش داد. نحوه تغییر و تحول و تعامل سیستم‌ها نیز به وسیله عملیات خطی مشخص می‌شود.

در اسلاید ۳ مروری بر اعداد مختلط و ویژگی‌های آن خواهیم داشت. در اسلاید ۴ نمونه‌هایی از یک بردار در فضای اعداد مختلط را مشاهده می‌کنید. همچنین عملیات جمع بردارها و ضرب اسکالر نمایش داده شده‌اند. در اسلاید ۵ مفهوم ماتریس آشنا می‌شوید و نمونه‌هایی از آن را می‌بینید. جمع ماتریس‌ها و ضرب اسکالر را نیز در این اسلاید مشاهده می‌کنید. در اسلاید ۶ با مفهوم ضرب دو ماتریس در یکدیگر آشنا می‌شوید. به خاطر بیاورید که یک ماتریس $m \times n$ فقط می‌تواند در یک ماتریس $l \times m$ ضرب شود و نتیجه یک ماتریس $l \times n$ می‌شود. سه خاصیت ضرب ماتریسی نیز در این اسلاید یادآوری شده‌اند: (۱) انجمنی، (۲) توزیعی، (۳) نداشتن جابه‌جایی.

در اسلاید ۷ با یک نوع جدید از ضرب آشنا می‌شوید که به آن ضرب تانسوری گفته می‌شود. این ضرب هیچ محدودیتی بر روی ابعاد ماتریس‌ها ندارد. در این ضرب هر درایه ماتریس اول در تمام ماتریس دوم به صورت اسکالر ضرب می‌شود. مثالی از این نوع ضرب در پایین صفحه آمده است. در اسلاید ۸ نمونه‌ای از ترکیب ضرب عادی و ضرب تانسوری را مشاهده می‌کنید.

در اسلاید ۹، با مفاهیم complex conjugate (مزدوج مختلط)، transpose (ترانهاده) و conjugate transpose (ترانهاد مزدوج) آشنا می‌شوید. در اولی بخش مختلط عدد از نظر علامت معکوس می‌شود. دومی به معنی جابه‌جا کردن سطرها و ستون‌های یک ماتریس است. سومی از ترکیب اولی و دومی به‌دست می‌آید. در آینده مثال‌های عددی را از این عملگرها مشاهده خواهید کرد.

در اسلاید ۱۰ با مفهوم نمادگذاری دیراک و برا-کت (Bra-Ket) آشنا می‌شوید. نمونه‌هایی از آن در اسلاید شماره ۱۱ آمده است. Ket یک بردار ستونی است و Bra ترانهاد مزدوج آن است. به نحوه تعامل Ketها در انتهای اسلاید ۱۱ دقت کنید. در مواقعی که بین آنها هیچ عملگری قرار ندارد و یا تمام نمادها در داخل یک Ket قرار گرفته‌اند، در واقع منظور این است که آنها در یکدیگر ضرب تانسوری شده‌اند.

در اسلاید شماره ۱۲، با ضرب داخلی، تعامد (orthogonality) و نُرم (norm) آشنا می‌شوید. به نمادگذاری ضرب‌داخلی Bra و Ket در میانه صفحه توجه کنید. ویژگی‌های ضرب داخلی و همچنین ارتباط آن با تعامد در این اسلاید توضیح داده شده است. به طور خاص اگر ضرب داخلی دو بردار در یکدیگر صفر شود، می‌گویند دو بردار بر هم

عمود هستند. مجذور ضرب داخلی یک بردار در خودش (Bra-Ket) را نُرم می‌گویند.

در اسلاید ۱۳ با مفهوم ضرب خارجی و projection آشنا می‌شوید. ضرب خارجی دو بردار در یکدیگر یک ماتریس را ایجاد می‌کند (از همان قواعد ضرب ماتریسی پیروی می‌کند). ضرب خارجی یک بردار یکه (یعنی نُرم آن برابر یک است) در یک بردار دلخواه، projection آن بردار بر محور بردار یکه است. شکل انتهای صفحه ۱۲ را ببینید.

در اسلاید ۱۴ با مفهوم پایه (basis) آشنا می‌شوید. طبق تعریف، پایه‌های یک فضای عدد مختلط n بعدی حداقل تعداد بردارهایی است که هر بردار دیگری را بتوان به صورت جمع خطی آنها نمایش داد. اینکه تعداد آنها حداقل است به این معنی است که تمام آنها از هم مستقل هستند. یعنی هیچ کدام از آنها را نمی‌توان به صورت جمع خطی سایرین نوشت. اگر تعداد پایه‌های یک فضا m باشد می‌گوییم آن فضا m بعدی است. از میان تمام پایه‌هایی که برای یک فضا قابل فرض هستند، یک مجموعه که به آن «orthonormal» می‌گویند بیشتر از سایرین مورد استفاده قرار می‌گیرد. پایه‌های orthonormal هر کدام دارای نُرم یک هستند و دوبه‌دو بر هم عمودند.

در اسلاید ۱۵ سه مجموعه از پایه‌ها برای فضای سه‌بعدی مختلط را مشاهده می‌کنید. دوتای آخر orthonormal هستند. مجموعه سمت راست به پایه استاندارد یا محاسباتی نیز مشهور است. در میانه صفحه نیز قالب کلی پایه استاندارد فضای n بعدی مختلط را مشاهده می‌کنید. به نمادگذاری Ket آنها نیز دقت کنید.

در اسلاید ۱۶ می‌بینید که هر بردار را می‌توان به صورت یک جمع وزن‌دار پایه‌های استاندارد نمایش داد. به صورت مشابه هر ماتریس را نیز می‌توان با استفاده از این پایه‌ها نمایش داد.

در اسلاید ۱۷ با مفهوم بردار ویژه و مقدار ویژه آشنا می‌شوید. به طور خاص، هر ماتریس مربعی اگر در یک بردار ستونی ضرب شود ممکن است آن را دوران دهد، انتقال دهد، و یا تغییر طول بدهد. اگر یک بردار غیرصفر وجود داشته باشد که تنها تغییر آن پس از ضرب در یک ماتریس تغییر اندازه باشد، به آن بردار، بردار ویژه آن ماتریس می‌گوییم. به اولین فرمول وسط صفحه نگاه کنید. به آن ضریب تغییر اندازه نیز مقدار ویژه می‌گوییم. مقادیر ویژه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه ماتریس هستند (تعریف آن در میانه صفحه را ببینید). دترمینان یک ماتریس برابر حاصلضرب مقادیر ویژه‌اش است و اثر (trace) ماتریس جمع مقادیر ویژه است.

در اسلاید ۱۸ ملاحظه می‌کنید که یک ماتریس را می‌توان به صورت جمع وزن‌دار ضرب خارجی بردارهای ویژه نمایش داد که وزن‌ها همان مقادیر ویژه هستند. به این نمایش «eigendecomposition» یا «spectral decomposition» گفته می‌شود. در پایین صفحه یک نحوه نمایش ماتریس در پایه بردارهای ویژه‌اش را مشاهده می‌کنید که در آن ماتریس قطری است (درایه‌های خارج قطر اصلی صفر هستند).

در نهایت در اسلاید ۱۹ با ماتریس‌های یکانی (unitary) آشنا می‌شوید. بعداً ملاحظه خواهید کرد که عملگرهای کوانتومی را می‌توان با ماتریس‌های یکانی نمایش داد. ابتدا تعریف ماتریس نرمال را ملاحظه می‌کنید که حاصلضرب آن در ترانهاد مزدوجش خاصیت جابه‌جایی دارد. ماتریس‌های نرمال خاصیت قطری‌شدن را دارند. سپس تعریف ماتریس هرمیتی (hermitian) را می‌بینید که به معنی مساوی بودن یک ماتریس با ترانهاد مزدوج خودش است. یک ماتریس

یکانی است اگر نرمال باشد و حاصلضرب آن در ترانهاد مزدوج خودش ماتریس همانی بشود. از خواص ماتریس‌های یکانی این است که قدر مطلق تمام مقادیر ویژه آنها یک است. همچنین ماتریس‌های یکانی حاصلضرب داخلی را تغییر نمی‌دهند. یعنی حاصلضرب داخلی دو بردار در هم برابر است با حاصلضرب داخلی آنها پس از اینکه تک تک در یک ماتریس یکانی ضرب شده باشند. اثبات این ویژگی در پایان اسلاید آمده است.