ارزیابی کارایی سیستم های کامپیوتری

Spring 2023

پاسخ نامه کوئیز اول

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۱۲/۲

۱. چند مورد از موارد زیر صحیح نمی باشند؟ (۳ نمره)

(آ) مجموعه چند رخداد را فضای نمونه می نامیم و با Ω آن را نمایش می دهیم

(ب) فرض کنید A و B دو مجموعه از نتایج باشند که رخدادها را تعریف می کنند آنگاه عبارت $A-B = A\cap B^c$ صحیح می باشد.

(ج) اندازه، مجموعه توانی کوچکترین $\sigma - filed$ مربوط به Ω برابر ۴ می باشد.

(د) اگر شرط Pairwise Exclusive برای رخدادها برقرار باشد آنگاه همیشه خواهیم داشت که

$$Pr\{\sum_k A_k\} = \sum_k Pr\{A_k\}$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

پاسخ:

مورد الف غلط هست، با توجه به اسلاید ۹ از لکچر اول می دونیم که Ω برابر مجموعه تمام outcomeهای یک آزمایش هست.

مورد ب، با توجه به قواعد تئوری مجموعه ها که در کتاب مرجع درس هستن این مورد صحیح هست

مورد ج، با توجه به اسلاید ۱۶ از لکچر اول تون میدونید که کوچکترین فیلد برای Ω دارای دوتا عضو هستش و بنابراین مجموعه توانی این مجموعه ۴ عضو خواهد داشت.

در مورد د، این مورد صحیح هستش، با توجه به اسلاید ۳۳ از لکچر اول همچنین با در نظر داشتن نکته این اسلاید و مراجع به اسلاید ۲۵ از لکچر اول متوجه خواهید شد این مورد نیز درست هستش البته این مورد رو در نظر داشته باشید این نکته فقط در مورد رخدادها برقرار هستش و در مورد استقلال قابل تعمیم نیست هدف از این بخش فهم دقیق تفاوت این دو مورد بود.

بنابراین جواب این سوال مورد ب خواهد بود و تنها یک گزینه غلط خواهیم داشت.

۲. تفاوت event و outcome را بیان کنید.(۳ نمره)

پاسخ:

این سوال به طور کامل در اسلاید شماره ۴ از لکچر اول بیان شده،

۳. Union Bound را به صورت مختصر توضیح دهید. (۳ نمره)

پاسخ:

این سوال هم تمرین کلاسی شما بوده و فک کنم اکثرتون با جوابش آشنا باشید،
Union Bound تکنیکی است که در تئوری احتمالات و آمار برای محدود کردن احتمال وقوع اتحاد چندین رویداد بر اساس احتمالات رویدادهای فردی استفاده می شود. به عبارت دیگر، Union Bound یک کران بالایی بر احتمال وقوع حداقل یکی از رویدادها می دهد.
به طور رسمی‌تر، فرض کنید مجموعه‌ای از رویدادهای $A_1A_2 \dots A_n$ داریم که هر کدام با احتمال P_i رخ می‌دهند. union bound بیان می‌کند که احتمال اجتماع این رویدادها، که با $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ نشان داده می‌شود، بیشتر از مجموع احتمالات فردی نیست.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_i p_i$$

این نابرابری صرف نظر از اینکه رویدادها mutuallly exclusive هستند یا خیر، برقرار است. union bound ابزار مفیدی برای محدود کردن احتمال رویدادهای نادری است که ممکن است در حضور چندین منبع عدم قطعیت یا تصادفی رخ دهند.

۴. اندازه کوچکترین $\sigma - filed$ برای مجموعه $T = \{\{5\}, \{1,5\}\}$ در پرتاب یک تاس سالم چند می باشد؟ (۳ نمره)

الف)۶ ب)۷ ج)۸ د)۹ هـ)۱۶

پاسخ:

نمونه این سوال داخل اسلاید ۱۶ و ۱۷ لکچر اول بوده،
با فرض اینکه $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $T = \{\{5\}, \{1,5\}\}$ خواهیم داشت که:

$$\varnothing, \Omega$$

$$\{5\}, \{1,2,3,4,6\}$$

$$\{1,5\}, \{2,3,4,6\}$$

$$\{2,3,4,5,6\}, \{1\}$$

با این تفاسیر گزینه ج جواب این سوال می باشد.

۵. چند مورد از موارد زیر صحیح می باشد؟ (۳ نمره)

(آ) اگر A و B از هم مستقل باشند آنگاه A و B^c از هم مستقل نیستند.

(ب) عبارت $P(A|B)P(A) = P(B|A)P(B)$ بنا به قانون بیز صحیح می باشد.

(ج) رخداد A را غیرممکن گوییم اگر $P(A) = 0$ برقرار باشد.

(د) در پرتاب سه سکه سالم احتمال اینکه دقیقا دوبار شیر نیاید برابر با $\frac{5}{8}$ می باشد.

(ه) عبارت $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cap A^c) + P(C \cap A^c \cap B^c)$ صحیح می باشد.

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

پاسخ:

مورد الف، علط است با توجه به توضیحات مندرج در صفحه ۳۸ از فصل اول کتاب مرجع

مورد ب، نیز غلط میباشد با توجه به قانون بیز.

مورد ج، نیز غلط است با توجه به توضیحات اسلاید ۲۹ از لکچر اول.

مورد د، درست است با توجه به اینکه در صفحه ۱۰ از کتاب مرجع مکمل آن محاسبه شده است.

مورد هـ نیز درست است با توجه به توضیحات موجود در صفحه ۱۴ کتاب مرجع.

با این تفاسیر ۲ گزینه صحیح داریم و گزینه ج جواب این سوال است.

۶. علی و رضا می خواهند با انداختن یک سکه سالم بین درس خواندن و فوتبال یکی را انتخاب کنند. متأسفانه تنها سکه ای که موجود است سالم نیست (همچنین بایاس آن نیز دقیقاً مشخص نیست). چگونه می توانند از سکه ناسالم برای تصمیم گیری استفاده کنند تا احتمال انتخاب هر یک از گزینه ها هم اندازه باشد؟(۵ نمره)

پاسخ:

ابتدا سکه را دوبار می اندازیم.اگر نتیجه خط-شیر بود درس خواندن و اگر نتیجه شیر-خط بود فوتبال را انتخاب می کنیم.در غیر این صورت همین روند را ادامه می دهیم تا زمانی که بتوانیم با توجه به نتیجه دو پرتاب سکه تصمیم گیری کنیم.فرض کنید که A_k رخدادی باشد که در k_اُمین دور تصمیم گیری انجام شده باشد.

$$P(football) = \sum_{k=1}^{\infty} P(football|A_k)P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}P(A_k) = \frac{1}{2}.$$

در این اثبات از عبارت $\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = 1$ که با توجه به اینکه احتمال آمدن خط و شیر بزرگتر از صفر است، درست می باشد استفاده شده است.