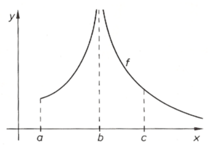
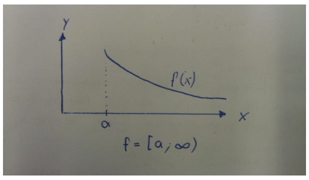
Formelsammlung An2E

1 Integralrechnung

Darstellungsformen			
Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
$(uv)'$	$u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{t}\right)'$	$\left(\frac{u't - ut'}{t^2}\right)$
$(u^v)'$	$u^v\left(v'\ln(u) + \frac{vu'}{u}\right)$	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$arccot(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$arsinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$arcosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$artanh(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$arcoth(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$tanh(x)$	$\frac{1}{cosh^2(x)} = 1 - tanh(x)^2$		

Integrationsmethoden	
Linearität	$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C$
Partielle Integration	$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx$
Rationalisierung	$t = \tan\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\int R(\sin(x)\cos(x))dx$
Substitution	$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)dt \quad t = g^{-1}(x)$ $\boxed{\text{x=g(t)}} \quad dx = g'(t) \cdot dt$
Logarithmische	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C \quad (f(x) \neq 1)$
Potenzregel	$\int f'(x) \cdot (f(x))^\alpha dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Differentiation	$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ $\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x)$

Uneigentliche Integrale	
Für unbeschränkte Funktionen	Für unbeschränkte Grenzen
 $I = \int_a^c f(x)dx = \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to b+} \int_t^c f(x)dx$	 $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t_1 \to \infty} \lim_{t_2 \to \infty} \int_{-t_1}^{a} f(x)dx + \int_a^{t_2} f(x)dx$

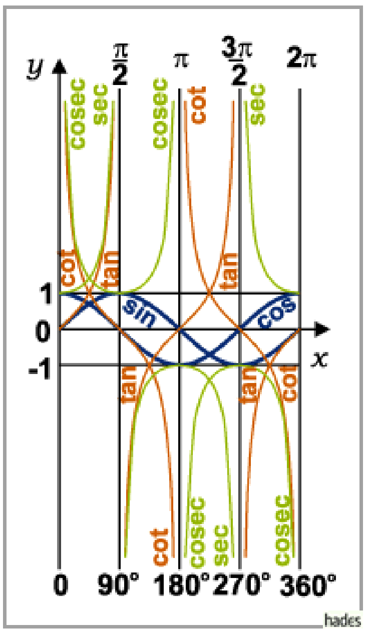
Majorantenprinzip (konvergent)	Minorantenprinzip(divergent)
Majorante $g(x) \geq f(x)$: Konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, dann konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$. ($x \in [a, \infty)$)	Minorante $g(x) \leq f(x)$: Divergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, dann divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$. ($x \in [a, \infty)$

Cauchy Hauptwert: bei unbeschränkter Funktion, welche Symmetrisch ist. $\Rightarrow$ Nur ein limit

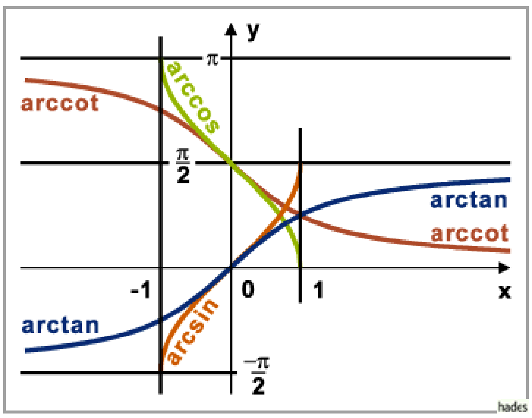
$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_a^{\xi - \epsilon} f(x)dx + \int_{\xi + \epsilon}^{b} f(x)dx \right)$$

2 Funktionsgraphen

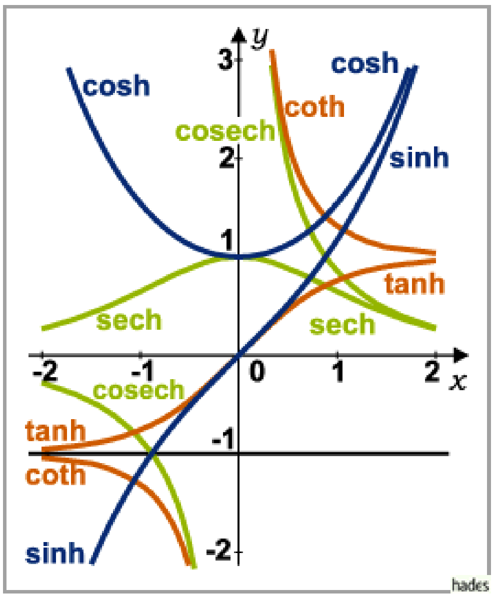
Trigo-Funktionen



Arcus-Funktion



Hyperbel-Funktionen



3 Anwendung der Differential- und Integralrechnung

Darstellungsformen		
Parameterform $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$	Explizite Form $y = f(x)$ $r = f(\varphi)$	Implizite Form $F(x, y) = 0$ $F(\varphi, r) = 0$

Umrechnung

Polar ⇔ Kartesisch (Falls Polgerade = x-Achse)

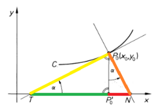
$x = r \cdot \cos\varphi$ $\quad$ $y = r \cdot \sin\varphi$ $\quad$ $r^2 = x^2 + y^2$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0;\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0;\ y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = y = 0 \end{cases}$$

Kurvenarten

Polarform:	'+', Kurve auf linke Seite geöffnet	'-' , Kurve auf rechte Seite geöffnet
	Kreis	**Ellipse**
Implizit	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$
Polarform	$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}; \epsilon = 0$	$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}; 0 < \epsilon < 1$ (rechter Brennpkt)
Parameterform	$x = x_0 + R\cos(t), y = y_0 + R\sin(t)$	$x = a\cos(t); y = b\sin(t)$ um $P(0, 0)$
p, ϵ	$p = \frac{b^2}{a}$	$\epsilon = \frac{c}{a}$
	Hyperbel	**Parabel**
Implizit	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$y^2 = 2p(x - x_0)$
Polarform	$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(\varphi)}; \epsilon > 1_{(rechts)}$	$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(\varphi)}; \epsilon = 1$
Parameterform	$x = a\cosh(t); y = b\sinh(t)$	$x = \frac{t^2}{2p}; y = t$ p =Halbparameter (2·Abstand Scheitel-Brennpunkt)

Kardioide/Herzk.: $r = a(1 + \cos(\varphi))$	**Lemniskate "∞":** $r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$
Strophoide/harm. K.: $r = -a\frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)}; (a > 0)$	**log. Spirale:** $r = e^{a\varphi}$

Gleichungen		
linearer MW $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$	absoluter MW (gleichrichtwert) $\frac{1}{b-a}\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$	quadratischer MW(Effektivwert) $\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \lvert f(x)\rvert^2 dx}$
Tangentengleichung $y - y_0 = m(x - x_0)$	Normalengleichung $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$	Hessesche Normalform $x \cdot \cos\varphi_0 + y \cdot \sin\varphi_0 = r_0$
Abstand zum Ursprung $\frac{\lvert y_0 - m \cdot x_0\rvert}{\sqrt{m^2+1}}$	Doppelpunkt $t_1 \neq t_2 \Rightarrow P(t_1) = P(t_2)$	glatte Kurve(keine Ecken) $\dot{\varphi(t)}^2 + \dot{\psi(t)}^2 \neq 0$
Länge Subtangente $\frac{y_0}{\lvert y_0'\rvert}$	Länge Subnormale $\lvert y_0' \cdot y_0\rvert$	

Berührung in n-ter Ordnung: Zwei explizit gegebene Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ berühren einander im Punkt P x_0, y_0 von der Ordnung n, wenn die Funktionswerte und die ersten n Ableitungen existieren und übereinstimmen.
$f(x_0) = g(x_0);\ f'(x_0) = g'(x_0);\ f''(x_0) = g''(x_0);\ \ldots;\ f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$
Für annäherung von Polynom an beliebige Kurve

Kartesisch	**Parameter**	**Polar**
Anstieg einer Kurve, Ableitung, 2. Ableitung		
$y' = f'(x_o) \quad y'' = f''(x_0)$	$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$	$y' = \frac{r'(\varphi)\sin(\varphi) + r(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{r'(\varphi)\cos(\varphi) - r(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}$
Bogenlänge		
$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$	$\lvert s\rvert = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$	$\lvert s\rvert = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}d\varphi$
Krümmung ebener Kurven $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$	Scheitel bei: $K'(x) = 0$ und	$K''(x) \neq 0 \begin{cases} K(x) < 0 & \text{Maxima} \\ K(x) > 0 & \text{Minima} \end{cases}$
$\kappa = \frac{f''(x)}{(\sqrt{1 + (f'(x))^2})^3}$	$\kappa = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2})^3}$	$\kappa = \frac{2(r'(\varphi))^2 - r(\varphi)r''(\varphi) + (r(\varphi))^2}{(\sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2})^3}$
Konvex (Linkskurve): $\kappa \geq 0$ Streng konvex: $\kappa > 0$	Wendepunkt: $\kappa = 0$	Analog für konkav
Krümmungskreisradius $r = \lvert\frac{1}{\kappa}\rvert$		
$r = \frac{(\sqrt{1 + (f'(x))^2})^3}{f''(x)}$	$r = \frac{(\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2})^3}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$	$r = \frac{(\sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2})^3}{2(r'(\varphi))^2 - r(\varphi)r''(\varphi) + (r(\varphi))^2}$

Kartesisch	**Parameter**	**Polar**
Flächeninhalt um x-Achse	y-Achse: Umkerhfunktion $f^{-1}(x)$ von y_0 bis y_1 integrieren	
$A = \int_a^b f(x)dx$	$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [x\dot{y} - \dot{x}y]dt$	$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$
Volumen	**Symmetrie!** nur 1.Hälfte der Kurve integrieren (pos. Meridian)	
$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$	$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2\dot{x}dt$	$V = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\sin^2\varphi[r'\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)]d\varphi$
Oberflächeninhalt	**Symmertire!** nur 1.Hälfte der Kurve integrieren (pos. Meridian)	
$O = 2\pi\int_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$O = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} \lvert y\rvert\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$	$O = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \lvert r\sin\varphi\rvert\sqrt{(r')^2+r^2}d\varphi$
Polar: $\sin\varphi$ = Drehung um Polgerade	$\cos y$ = Drehung um y-Achse ($f = \frac{\pi}{2}$)	→ siehe Fläche
Krümmungskreismittelpunkt		
$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx}[1+(\frac{dy}{dx})^2]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ $y_c = y + \frac{1+(\frac{dy}{dx})^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$	$x_c = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$ $y_c = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$	$x_c = r\cdot\cos\varphi - \frac{(r^2+r'^2)(r\cdot\cos\varphi + r'\cdot\sin\varphi)}{r^2+2r'^2 - r\cdot r''}$ $y_c = r\cdot\sin\varphi - \frac{(r^2+r'^2)(r\cdot\sin\varphi - r'\cdot\cos\varphi)}{r^2+2r'^2 - r\cdot r''}$
Umrechnung Kart ⇔ Komp.: $x(t)$, $y(t)$ und $\int f(x)dx \Rightarrow$	$dx = \dot{x}dt \Rightarrow$	$\int y(t)\dot{x}(t)dt$

4 Reihen

Grundlegendes	
Reihe	Folge $\langle a_n \rangle = a_1, a_2 ... a_n$ Folge $\langle s_1 \rangle = a_1$ und $\langle s_2 \rangle = a_1 + a_2$ Eine Reihe ist eine Folge ihrer Partialsummen $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$
Konvergenz/Divergenz	Konvergiert die unendliche Reihe $\langle s_n \rangle$so besitzt sie die Summe s. $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ Existiert der Grenzwert nicht, so ist die Reihe divergent. Wenn man in einer Reihe endlich viele Summanden hinzu/weglässt, so bleibt sie Konvergent oder Divergent(nicht so bei Folge)
Vertauschen der Summanden	Für **unendliche Reihen** gilt , dass die einzelnen Summen untereinander nicht vertauscht werden können
Es gilt ausserdem	$a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $b = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sind konvergente Reihen $a_k \leq b_k$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dann ist $a \leq b$

Konvergenzkriterien	
Notwendiges Konvergenzkriterium	Wenn ein Grenzwert konvergieren soll,muss $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ sein. (Reihe kann trotzdem divergieren z.B. unbestimmt)
Notwendiges Divergenzkriterium	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$
Cauchyches Konvergenzkrit.	Es existiert ein $\epsilon > 0$ $\epsilon \geq s_0 = \sum\limits_{k=1}^{n_0}$ Nun gilt für alle $m > n > n_0$ $\lvert \sum\limits_{k=n}^{m} a_k \rvert < \epsilon$ Dann Konvergiert die Reihe, ansonsten divergiert sie. $(\lvert s_m - s_n \rvert < \epsilon)$
Reziprokkrit	$s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konvergent für} & \alpha > 1 \\ \text{divergent für} & \alpha \leq 1 \end{cases}$
Majorantenkrit	Ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ und somit auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ für $\lvert a_n \rvert \leq c_n$ (absolut). Dies gilt auch für $\lvert a_n \rvert \leq c_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.
Minorantenkrit.	Ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ gegen $+\infty$ divergent, so gilt dies auch für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bei $a_n \geq d_n$. Dies gilt auch für $a_n \geq d_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.
Quotientenkrit. Wurzelkrit.	$\lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = \alpha$ der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = \alpha$ der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\begin{cases} \alpha < 1 & \text{(aboslut) konvergent} \\ \alpha = 1 & \text{keine Aussage!} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$
Integralkrit.	$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent. Gilt nur, wenn f auf $[1, \infty)$ definiert und monoton fallend $(f'(x) \leq 0)$ ist. Zudem muss $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, \infty)$ sein.

Leibniz Krit.	Die **alternierende** Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $\langle \lvert a_n \rvert \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge ($\lim_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert = 0$) ist. Monotonie mittels Verhältnis $\left(\left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert \right)$, Differenz $(\lvert a_{n+1} \rvert - \lvert a_n \rvert)$ oder vollständiger Induktion beweisen. Abschätzung Restglied einer alternierenden konvergenten Reihe: $\lvert R_n \rvert = \lvert s - s_n \rvert \leq \lvert a_n + 1 \rvert$
Absolute Konvergenz	Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ konvergent ist.
Unbedingt Konvergent	Unbedingt Konvergent ist eine Reihe die durch umordnen einen anderen Grenzwert hat oder wird divergiert.
Bedingt Konvergent	Unbedingt kann man umordnen, ohne dass sich konvergenz oder Grenzwert ändert.

Potenzreihen	
Grundlegend	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und a_n als Koeffizienten
Konvergenzkrit	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Es sei $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = a \begin{cases} a = 0 & \text{absolut Konvergent } \forall x \in \mathbb{R} \\ a > 0 & \text{absolut Konvergent für } \lvert x \rvert < \dfrac{1}{a} \end{cases}$
Konvergenzradius Wurzelkrit. Quotientenkrit. Mehrere Summen	Ist die Folge $\langle \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} \rangle$ konvergent, so heisst die Zahl $\rho = \dfrac{1}{a}$ Konvergenzradius Wurzelkrit. $\rho = \lim_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat ρ_1 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ hat ρ_2 $\rho = min\{\rho_1, \rho_2\}$ Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$
Ableitung Potreihen	$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ Der Konvergenzradius ρ bleibt gleich Es gilt auch: $f^{(i)}(x) = \sum_{n=i}^{\infty} n(n-1)\dots(n-i+1) \cdot a_n x^{n-i}$
Aufleitung Potreihen	$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$
Taylor-Reihe	Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion gibt es die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$ Für alle Glieder der Taylorreihe muss die folgende Bedingung erfüllt sein $\lim_{n\to 0} T(\xi) = 0$

Grenzwerte			
$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^a}) = 1$ (a const.)	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}) = 1$ ($a > 0$ und const.)
$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{K}{n!}) = 0$ (K const.)	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{\lvert p(n)\rvert}) = 1$ ($p(n) \neq 0$)	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n!}) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}}) = 0$ ($K > 0$ und const.)
$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}) = e$			

Einige Reihen		
Geometrische: $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$	Arithmetische: $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_0 + k \cdot d = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	Harmonische: (divergiert) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}...$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} : \rho = 1$ für $\rho = 1 \begin{cases} \alpha = 0 & \textit{divergent} \\ 0 < \alpha \leq 1 & \textit{beachte} \quad x \\ \alpha > 1 & \textit{konvergiert} \end{cases}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \rho = +\infty \qquad$ quotkrit.	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n = (1+x)^\alpha \qquad \lvert\rho\rvert = 1$ p.m. $\binom{u}{k} = \frac{u!}{(u-k)!k!}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n (x-3)^n \qquad \lvert p\rvert = \frac{1}{2}$ $[3-\rho, 3+\rho] = [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

5 Differentialgleichungen

Grundlegendes	
Grundsätzlich	Eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion heisst Differentialgleichung, wenn sie mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion enthält
Ordnung	Die Ordnung wird bestimmt durch die höchste Ableitung der gesuchten Funktion
Anfangswertproblem	Funktion: $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ Das Anfangswertproblem hat die Aufgabe, eine Funktion zu finden, die folgendes erfüllt: $y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \quad ... \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ Anfangswerte: $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ mit Anfangspunkt x_0
Existenz/Eindeutigkeit (Piccard-Lindelöf)	Die Funktion $f(x, u, u_1, ..., u_{n-1})$ sei in einer Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R^{n+1}}$ stetig und besitzt dort stetige partielle Ableitungen nach $u, u_1, ..., u_{n-1}$ dann existiert in einer geeigneten Umgebung des Anfangspunktes x_0 genau eine Lösung des Anfangswertproblems $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ mit $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ $\frac{\partial f}{\partial y} \; ... \; \frac{\partial f}{\partial f^{(n-1)}}$ endlich beschränkt $\Rightarrow$ eindeutige Lösbarkeit
	$y' = -\frac{x}{2} - \sqrt{4 + \frac{x^2}{4}} \quad AW : y(0) = 1$ $y' = f(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{y + \frac{x^2}{4}}}$ Allgemein: $y \neq -\frac{x^2}{4}$ für dieses AW-Problem AW einsetzen: $-\frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ eindeutig lösbar
	Anfangsbedingungen müssen ungabhängig sein: $y_0 = ae^{x_0} + be^{-x_0} \quad y_1 = ae^{x_0} - be^{-x_0} \Rightarrow$ $det \begin{pmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{pmatrix} = -2 \neq 0$

DGL 1. Ordnung		
Art	Form	Lösung
Separation	$y' = f(x) \cdot g(y)$	$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$, nun ist die DGL beidseitig nach x integrierbar $(dy = y'(x)dx)$: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx$
separierte Lösung	$y' = ax + by + c = z$	1. Substitution: $z = ax + by + c \qquad z' = a + by' = a + b \cdot z$ $\int_{z_0}^{z} \frac{z'}{a+bz} d\tilde{x}$ $[d\tilde{z} = \underbrace{(a + by')}_{z'} d\tilde{x}]$ oder
Gleichgradigkeit	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	1. Substitution: $z = \frac{y}{x} \qquad zx = y \quad z'x + z = y'$ Glg mit z,x: eine seite z, andere x $\Rightarrow \int$
Allgemeine DGL 1. Ordnung	$y' + f(x)y = g(x)$ $g(x)$: Störterm	$y = e^{-\int f(x)dx}(k + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx) \qquad (k \in \mathbf{R})$ $Y = y_H + y_p$ Var. K ist Konstante

DGL 1. Ordnung	
Orthagonaltrajektorien	Orthogonaltrajektorien sind die normalen der DGL. Sie stehen senkrecht auf den Kurven die durch die DGL entstehen. Um Orthagonaltrajektorien zu erhalten y' ersetzen durch $-\frac{1}{y'}$ und DGL lösen. y Ableiten $\Rightarrow y' \to -\frac{1}{y'} \to$ DGL lösen

DGL 2. Ordnung	
Form	Lösung
$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x)$	Wie bei 1. Ordnung: $Y = y_H + y_p$ Homogene DGL: $g(x) = 0$ Inhomogene DGL: $g(x) \neq 0$
Homogene DGL $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$	
Charakt. Polynom: $\underline{\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0}$ von $\underline{y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0}$ $(\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2})$	
$(D > 0)$ Falls:$\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$: $Y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ } starke Dämpfung	
$(D = 0)$ Falls: $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$: $Y_H = e^{\lambda_1 x}(A + B \cdot x)$ } aperiodischer Grenzfall	
$(D < 0)$ Falls $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \alpha$: $Y_H = e^{-\frac{1}{2}a_1 x}(Acos(\alpha x) + Bsin(\alpha x))$ } schwache Dämpfung / Schwingfall	
Eigenfrequenz	$\omega = \alpha = \frac{\sqrt{\lvert a_1^2 - 4a_0 \rvert}}{2}$
inhomogene DGL $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x)$	
Grundlöseverfahren	1. Homogene DGL lösen: $g(x) = 0$ setzen ergibt Y_H 2. Anfangsbedingungen in Hom. DGL einsetzen: Wenn möglich $x_0 = 0$ $y(x_0) = 0$ $y'(x_0) = 1$ A,B bestimmen 3. Einsetzen der Hom. Glg. in Faltungsintegral 4. $y_P(x) = \int_{x_o}^{x} y_H(x + x_0 - t) \cdot g(t) dt$ 5. $Y = y_H + y_P$

Ansatz in Form des Störgliedes

$\mathbf{f(x) = p_n(x)}$	($p_n(x)$ und $q_n(x)$ sind Polynome vom gleichen Grad)
Fall a: $a_0 \neq 0$:	$y_P = q_n(x)$
Fall b: $a_0 = 0, a_1 \neq 0$:	$y_P = x \cdot q_n(x)$
Fall c: $a_0 = a_1 = 0$:	$y_P = x^2 \cdot q_n(x)$
a_0 und a_1 beziehen sich auf die **linke Seite** der DGL	

$\mathbf{f(x) = e^{bx} \cdot p_n(x)}$	
Fall a: b nicht Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot q_n(x)$
Fall b: b einfache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x \cdot q_n(x)$
Fall c: b zweifache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x^2 \cdot q_n(x)$

$\mathbf{f(x) = e^{\alpha x}(p_n(x) \cos \beta x + q_n(x) \sin \beta x)}$	
Fall a: $\alpha + j\beta$ **nicht Lösung** der charakteristischen Gleichung:	$y_p = e^{\alpha x}(r_n(x) \cos \beta x + s_n(x) \sin \beta x)$
Fall b: $\alpha + j\beta$ **Lösung** der charakteristischen Gleichung:	$y_p = e^{\alpha x}\mathbf{x}(r_n(x) \cos \beta x + s_n(x) \sin \beta x)$

Vorgehen bei einer DGL in Form des Störgliedes	
1.	Y_H mit λ_1 und λ_2 berechnen
2.	Ordnung n anhand der r.h.s der DGL bestimmen Koeffizient b anhand der r.h.s der DGL bestimmen (Achtung kann aus mehreren Elementen bestehen z.B. $x^2e^x + x$; Superposition)
3.	Anhand der Störglied Tabellen y_p bestimmen
4.	$q_n = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + cx + d$
5.	y_p ableiten und in die **l.h.s** der DGL einsetzen. $y_p'' + a_1y_p' + a_0y_p = f(x)$
6.	Koeffizienten bestimmen: $x^2e^x \cdot 18a + xe^x(6a + 12b) + e^x(2b + 6c) = x^2e^x$ $18a = 1$ — $18a$ kommt 1mal in der r.h.s vor $(6a + 12b) = 0$ — $(6a + 12b)$ kommt 0mal vor auf der r.h.s $(2b + 6c) = 0$ — $(2b + 6c)$ kommt 0mal vor auf der r.h.s
7.	Koeffizienten in y_p einsetzen
8.	Wenn das Störglied $f(x)$ aus mehreren Teilen besteht (z.B. $x^2e^x + x$), Störglied auseinander nehmen und in zwei Teile x^2e^x und x unterteilen und Schritt 3 - 6 wiederholen
9.	$y = Y_H + y_{p1} + y_{p2} + \ldots$

Superpositionsprinzip	$f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ y_1 ist spezielle Lösung der DGL y_2 ist spezielle Lösung der DGL dann ist $y_P = c_1y_1 + c_2y_2$	 $y_1'' + a_1 \cdot y_1' + a_0 \cdot y_1 = c_1f_1(x)$ $y_2'' + a_1 \cdot y_2' + a_0 \cdot y_2 = c_2f_2(x)$

Lineare DGL n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten		
Form	$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = g(x)$	
	n-verschiedene Homogene Lösungen	
Fall a: r reelle Lösungen λ_1:	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, $\ldots$,$y_r = x^{r-1}e^{\lambda_1 x}$	Starke Dämpfung / Kriechfall
Fall b: k komplexe Lösungen $\lambda_2 = \alpha + j\beta$:	$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $\ldots$, $y_k = e^{\alpha x}x^{k-1}\cos(\beta x)$ $y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\ldots$, $y_{2k} = e^{\alpha x}x^{k-1}\sin(\beta x)$	Schwache Dämpfung / Schwingfall
$Y_H = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + ... + Ny_n$		

Allgemeinste Lösung des partikulären Teils	
$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}}_{f(y,y',y'',\ldots)} = \underbrace{e^{\alpha x}(p_{m1}(x)\cos(\beta x) + q_{m2}(x)\sin(\beta x))}_{\text{Störglied}}$ λ aus Homogenlösung	
Unterscheide die Lösungen des charakteristischen Polynoms (λ):	mit m = max(m1, m2)
Fall a: $\alpha + j\beta \neq \lambda$, so ist	$y_P = e^{\alpha x}(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$
Fall b: $\alpha + j\beta$ ist u-fache Lösung von λ, so ist	$y_P = e^{\alpha x}x^u(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$ u-fache Resonanz

Grundlöseverfahren	
$\begin{pmatrix} g(x_0) = & 0 & = & Ay_1(x_0) + By_2(x_0) + \ldots + Ny_n(x_0) \\ g'(x_0) = & 0 & = & Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) + \ldots + Ny_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \\ g^{(n-1)}(x_0) = & 1 & = & Ay_1^{(n-1)}(x_0) + By_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + Ny_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$	ergibt $c_1, \ldots, c_n$ für $y_P(x) = \int_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t) f(t) dt$
Anfangswertproblem	$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \quad y''(x_0) = y_2 \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	
Form:	$\begin{matrix} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$
Die allgem. Lösung ergibt sich aus der DGL:	$\underbrace{\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = \dot{f}(t) - df(t) + bg(t)}_{\text{normale DGL 2.Ordnung} \rightarrow \text{nach } x \text{ auflösen}}$
	$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax - f(t)))$
Anfangsbedinung:	$x_0(t_0) = x_0, \dot{x}_0(t_0) = ax_0 + by_0 + f(t_0)$
Anordnung beachten! Gesuchte Grösse immer zu oberst (in diesem Fall ist die gesuchte Grösse x)	

6 Anhang und AN1E

6.1 Für Prüfung

- Definitionsbereich aufschreiben wenn Variable gebraucht wird.
- Induktion: **IA**: Induktionsannahme und **IE**: Induktionsschritt

Spezielle Ungleichungen	
Bernoulli-Ungleichung	$(1+a)^n > 1 + n \cdot a$ für $n \in N, n \geq 2, a \in R, a > -1, a \neq 0$
Binomische Ungleichung	$\|a \cdot b\| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$
Dreiecksumgleichung	$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ $\|a-b\| \leq \|a\| + \|b\|$ $\|a-b\| \geq \|\|a\| - \|b\|\|$
Geometrisches Mittel	$a_i \geq 0,\ n \in \mathbb{N},\ i \in \{1, 2, ..., n\}:$
Arithmetisches Mittel	$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$
Natürliche Funktionen	$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ $1 - \frac{1}{x} \leq ln(x) \leq x - 1$
Fakultät	$n! > 2^{n-1}$

Summenzeichen und Binomischer Satz			
$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1-j}^{n-j} a_{i+j}$	$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$	$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$	$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot i}$
$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$	$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$	$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{0}{0} = 1$
$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)((2n)!)$			

Transformationen	
$\pm\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}(\pm\, \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \pm \mathbf{c})) \pm \mathbf{d}$	1. **a** Vertikale Streckung um **a** bzw. Spiegelung an x bei **-a** 2. **b** Horizontale Streckung um **1/b** bzw. Spiegelung an y bei **-b** 3. **c** Verschiebung nach links (+**c**) oder rechts (**-c**) 4. **d** Verschiebung nach oben (+**d**) oder unten (**-d**)

Gerade/Ungerade Funktionen	
Gerade Funktionen(Achsensymmetrisch): $f(-x) = f(x)$	Ungerade Funktionen(Punktsymmetrisch): $f(-x) = -f(x)$

uneigentliche Grenzwerte

Bestimmte Form	$\infty + \infty = \infty$ $\frac{1}{\infty} = 0$	$-\infty - \infty = -\infty$ $\frac{\infty}{0+} = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$ $\frac{\infty}{0-} = -\infty$	$-\infty \cdot (\infty) = -\infty$
Unbestimmte Form	$\frac{0}{0}$ ∞^0	$\frac{\infty}{\infty}$ 1^∞	$\infty - \infty$	0^0

Trigonometrische Funktionen

Winkel	Bogen	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\sin\alpha$	-	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-sin^2\alpha}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	-

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

Schnittwinkel zweier Geraden: $\tan\delta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

Orthoganalitätsbedingung: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Hyperbolicus Funktionen

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
$arsinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$arcosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ mit $x \in [1, \infty)$	$artanh(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ mit $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$e^x = \cosh x + \sinh x$	

Partialbruchzerlegung	
1. Nenner hat n verschiedene Nullstellen	$q(x) = k(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ Ansatz: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$
2. Nenner hat n reelle Nullstellen (mehrfache Nullstellen)	$q(x) = k(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}...(x-x_n)^{n_i}$ Ansatz: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_i)} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + ... + \frac{A_{n_i}}{(x-x_i)^{n_i}}$
3. Nenner enthält nicht zerlegbare Nullstellen	x^2+bx+c Ansatz: $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

Kurvendiskussion Programm	
1	**Definitionsmenge/Wertemenge**
2	**Symmetrien** (gerade↔ Achsensymmetrie, ungerade ↔Punktsymmetrie), **Periodizität** ($k\pi$), **Transformation** ($a \cdot f(bx+c)+d$)
3	**Nullstellen** ($f(x)=0$)
4	**Stetigkeit**(voraussetzung für Differenzierbarkeit), **Differenzierbarkeit** (f', f'', f''') Hinweis: Zu beachten sind hier besonders Lücken, Polstellen, Sprungstellen, Oszillationsstellen
5	A) **Monotonieverhalten**, **Extremalstellen** B) **Krümmungsverhalten, Wendestellen/Wendetangenten**
6	**Grenzverhalten** $x \to \pm\infty$/**Randstellen/Polstellen**

Spezielle Grenzwerte		
$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \frac{\sin 4x}{x} = 4$	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0 \; (a>1;\; \alpha,\beta>0)$	$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$	$\lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$
$\lim_{x\to0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$	$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\tan x}$
$\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{x\to0+} x \ln x = 0$	$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to0} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} +\infty & q\geq1 \\ \frac{1}{1-q} & \|q\|<1 \\ \text{unbest.divergent} & q\leq-1 \end{cases}$	$\lim_{\alpha\to0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \; (x>0)$	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{q^x} = 0 \; (q>1;\; k\in\mathbb{N})$	$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{p} = 1$

Zahlenfolge

arithmetische Folge $a_1 = c$ und $a_n n + 1 = a_n + d$ $(d = a_{an+1} - a_n \Rightarrow$ Monotonie$)$	geometrische Folge $a_1 = c$ und $a_{n+1} = q \cdot a_n$ $\left(q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \text{Monotonie}\right)$
Grenzwerte von rekursiven Folgen	
1. **Monotonie** annehmen(ev. erste Glieder Berechnen)	$\Rightarrow$ mit vollständiger Induktion beweisen Verankerung: $f_1 < f_2$ Vererbung : $f_n < f_{n+1}$
2. **Hypothetischer Grenzwert ausrechnen**	Beschränktheit annehmen und Limes ziehen $f_n = f_{n+1}$ in unendlichkeit (für f_n und f_{n+1}einfach x einsetzen)
3. **Beweisen**	Beschränktheit mittels des hypotthetischen Grenzwertes und vollständiger Induktion beweisen

Asymptote

Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion $r(x) = \frac{p_m(x)}{Q_n(x)}$

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} =$	0	$\frac{a_m}{b_n}$	$\pm\infty$
Asymptote	x-Achse	Parallel zur x-Achse: $y = \frac{a_m}{b_n}$	Ganzrationaler Teil der Pol. division

für Funktionen, die nicht gebrochenrational sind(existiert nur wenn alle Grenzwerte existieren)

Asymptote: $g = ax + b \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0$

$a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ oder $a = \lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$	$b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax$

Differentialrechnung

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	Tangentengleichung: $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Normalengleichung: $n(x) = \frac{x_0 - x}{f'(x_0)} + f(x_0)$	Mittelwertsatz: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$
abs. Fehler: $\lvert\Delta y\rvert \approx \lvert dy\rvert = \lvert f'(x)\rvert \cdot \lvert\Delta\delta\rvert$	rel. Fehler: $\left\lvert\frac{f'(x)}{y}\right\rvert \cdot \lvert dx\rvert \leq \left\lvert\frac{f'(x)}{f(x)}\right\rvert \cdot \lvert\Delta\delta\rvert$
$f'(x) \geq 0$ Monoton steigend $\uparrow$	$f'(x) \leq 0$ Monoton fallend $\downarrow$

konvex(linkskrümmung) $\Leftrightarrow f' \uparrow \Leftrightarrow f'' \geq 0$	konkav(rechtskrümmung) $\Leftrightarrow f' \downarrow \Leftrightarrow f'' \leq 0$

Extremalstelle: $f'(x_0) = 0$ /Wendepunkt: $f''(x_0) = 0$ potentieller Kandidat

$$f''(x_0) = 0, ..., f^{n-1}(x_0) = 0, f^n(x_0) \neq 0 \begin{cases} \text{n gerade} \begin{cases} f^n(x_0) > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum bei } x_0 \\ f^n(x_0) < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum bei } x_0 \end{cases} \\ \text{n ungerade} \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_0 (\text{Terrassenpunkt} f'(x_0) = 0) \end{cases}$$

Benoulli

$$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} \text{ das gilt für } \frac{0}{0} \text{ oder den} \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ fall.}$$

$0 \cdot \pm\infty \Rightarrow \frac{f_1}{\frac{1}{f_2}} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{f_2}{\frac{1}{f_1}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\infty - \infty \Rightarrow \frac{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_1 \cdot f_2}}$	bei $f^g = 1^\infty, 0^0, \infty^0 \Rightarrow e^{g \cdot \ln(f)}$

Taylor-Polynom

(x_0=Entwicklungspunkt) $\quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0, h)$

R_n(**Lagrange**): $\quad R_n(x_0, h) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, (0 < \theta < 1)$

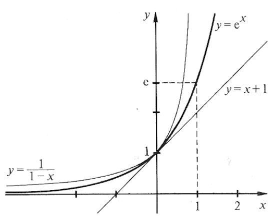
$$\lim_{n \to \infty} R_n(x_0, h) = 0 \Longrightarrow f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$$

MacLaurinsche-Form (gilt für $x_0 = 0, h = x$) : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n$

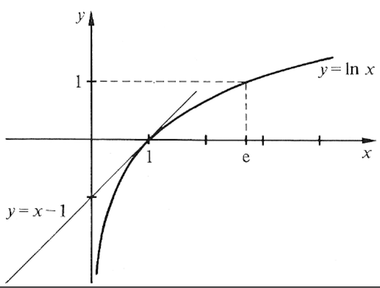
$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, (0 < \theta < 1)$$

Funktionsgraphen

e-Funktion



Logarithmusfunktion



$\frac{1}{x} - Funktion$