1 Integralrechnung 493

1.1 Integrationsregeln 496ff und letzte Seite

Linearität	$\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha}\cdot F(\alpha x+\beta)+C$
Summenregel	$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
Faktorregel	$\int n\cdot f(x)dx = n\cdot \int f(x)dx$
Potenzregel	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\cdot n^{n+1}+C \qquad (n\neq -1)$
Partielle Integration	$\int\limits_a^b u'(x)\cdot v(x)dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$
Rationalisierung / Weierstrass-Substitution	$t=\tan\frac{x}{2} \iff \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2} \iff dx=\frac{2dt}{1+t^2} \qquad \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan(x)=\frac{2t}{1-t^2} \iff \cot(x)=\frac{1-t^2}{2t} \qquad \int R(\sin(x)\cos(x))dx$
Allgemeine Substitution	$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)dt \qquad t=g^{-1}(x)$ $z=g(t) \iff \frac{dz}{dt}=g'(t) \iff dt=\frac{dz}{g'(t)}dt$
Logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C \qquad (f(x)\neq 1)$
Differentiation	$\int\limits_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a) \qquad \frac{d}{dx}\int\limits_1^x f(t)dt = f(x)$
Spezielle Form des Integranden	$\int f'(x)\cdot (f(x))^\alpha dx = f(x)^{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\alpha+1}+C \qquad (\alpha\neq -1)$

1.2 Uneigentliches Integral 519ff

Uneigentliches Integral heisst, dass entweder eine **unbeschränkte Funktion** integriert wird, oder eine Funktion über einen **unbeschränkten Integrationsberech** integriert wird.

- $f(x)$ auf abgeschlossenem Intervall definiert, aber **nicht** beschränkt.
- $f(x)$ auf abgeschlossenem Intervall definiert mit Ausnahme eines Punktes.
- $f(x)$ hat eine Unendlichkeitsstelle.

Für unbeschränkte Funktionen:

$$I=\int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{t\to b-}\int\limits_a^t f(x)dx + \lim_{t\to b+}\int\limits_t^c f(x)dx$$

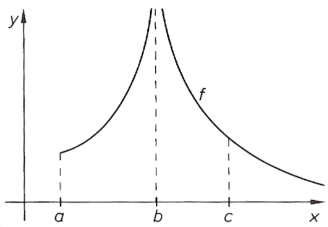
Für die unbeschränkte Integration:

$$I=\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_a^t f(x)dx;$$

$$I=\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^a f(x)dx;$$

$$I=\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t_1\to\infty}\lim_{t_2\to\infty}\int\limits_{t_1}^a f(x)dx + \int\limits_a^{t_2} f(x)dx$$

Beispiel: $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{1} = 1$



unbeschränkte Funktion

1.2.1 Prinzip der Restfläche

Wenn $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_t^\infty f(x)dx = 0$, dann konvergiert $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ und umgekehrt.

1.2.2 Majorantenprinzip (konvergent)

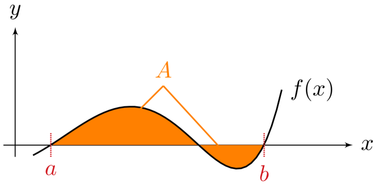
Um nachzuweisen, ob eine Funktion $\lvert f(x)\rvert \geq 0$ konvergiert, wird eine zweite Funktion $g(x)\geq\lvert f(x)\rvert$ (Majorante) gesucht. Konvergiert $\int\limits_a^\infty g(x)dx$, dann konvergiert auch $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. $(x\in[a,\infty))$

1.2.3 Minorantenprinzip (divergent)

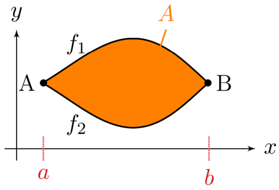
Um nachzuweisen, ob eine Funktion $f(x)$ divergiert, wird eine zweite Funktion $0 \leq g(x) \leq f(x)$ (Minorante) gesucht. Divergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, dann divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$. ($x \in [a, \infty)$)

1.3 Fläche zwischen zwei Funktionen ????

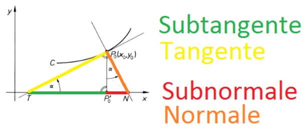
$A = \int_a^b |f(x)|dx$



$A = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx \quad$ für $f_1(x) \geq f_2(x)$



2 Gleichungen ????

linearer MW $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$	absoluter MW (gleichrichtwert) $\frac{1}{b-a}\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$	quadratischer MW(Effektivwert) $\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \lvert f(x)\rvert^2 dx}$
Tangentengleichung $y - y_0 = m(x - x_0)$	Normalengleichung $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$	Hessesche Normalform $x \cdot \cos\varphi_0 + y \cdot \sin\varphi_0 = r_0$
Abstand zum Ursprung $\frac{\lvert y_0 - m \cdot x_0\rvert}{\sqrt{m^2+1}}$	Doppelpunkt $t_1 \neq t_2 \Rightarrow P(t_1) = P(t_2)$	glatte Kurve(keine Ecken) $\dot{\varphi(t)}^2 + \dot{\psi(t)}^2 \neq 0$
Länge Subtangente $\frac{y_0}{\lvert y_0'\rvert}$	Länge Subnormale $\lvert y_0' \cdot y_0\rvert$	
Berührung in n-ter Ordnung: Zwei explizit gegebene Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ berühren einander im Punkt P x_0, y_0 von der Ordnung n, wenn die Funktionswerte und die ersten n Ableitungen existieren und übereinstimmen. $f(x_0) = g(x_0);\ f'(x_0) = g'(x_0);\ f''(x_0) = g''(x_0);\ \ldots;\ f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$ Für annäherung von Polynom an beliebige Kurve		

2.1 Scheitel 257

Scheitelpunkte sind Extremalwerte der Krümmungs- bzw. Krümmungsradiusfunktion. Falls bei $\kappa'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremalstelle.

2.2 Krümmung 253-255

$\kappa > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Linkskrümmung $\iff$ konvex | $\kappa = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt | $\kappa < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Rechtskrümmung $\iff$ konkav

3 Kurven

3.1 Darstellungsarten von Kurven 49ff

Funktion (explizit)
$y = f(x)$
(Bronstein Form 2.4)

Koordinatengleichung (implizit)
$F(x, y) = 0$
(Bronstein Form 2.5)

$F(\varphi, r) = 0$

Parameterform
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$
(Bronstein Form 2.6)

$$\begin{pmatrix} r = g(t) \\ \varphi = h(t) \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{I}$, wobei $\mathbb{I}$ ein Intervall ist

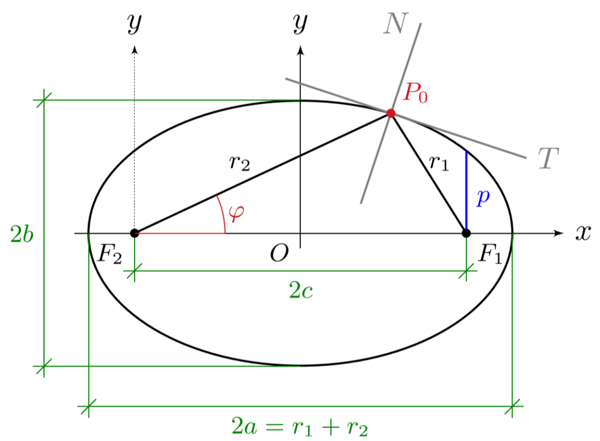
Polarform x
$r = f(\varphi) mit \varphi \in \mathbb{D}_f$
(Bronstein Form 3.427)

3.2 Umrechnen diverser Systeme 197

von	nach	Umrechnung
Parameter	$\Rightarrow$ explizit	$t = f(x) \qquad y = g(f(x))$
Ex- bzw. implizit	$\Rightarrow$ Polar	Ersetze: $x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi) \qquad x^2 + y^2 = r^2$
Polar	$\Rightarrow$ implizit	Ersetze: $r \cdot \cos(\varphi) = x \qquad r \cdot \sin(\varphi) = y \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Polar	$\Rightarrow$ Parameterform	$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$
Explizit	$\Rightarrow$ Parameter	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix}$
Einzelner Punkt	$\Rightarrow$ Polar	$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \left\{\begin{matrix} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0;\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0;\ y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = y = 0 \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & x \geqq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & x < 0 \end{cases}$

3.3 Wichtige Beispiele 204ff

3.3.1 Ellipse 205



Nummerische Exzentrizität: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ mit $0 < \varepsilon < 1$

Exzentrizität: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Halbparameter: $p = \dfrac{b^2}{a}$

Polarabstand: $r = r_2$

Polarwinkel: $0 \leq \varphi < 2\pi$

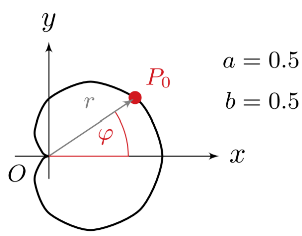
Kreis: **Ellipse mit** $c = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad a = b = p$

	Implizit (Achsenkreuz in O)	Parametrisch (Achsenkreuz in O)	Polar Achsenkreuz in F_2)
Kurve	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ $0 \leq t < 2\pi$	$r = \dfrac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$
Tangente	$y - y_0 = -\dfrac{x_0\, b^2}{y_0\, a^2}(x - x_0)$	$y - y(t_0) = -\dfrac{b}{a} \cot(t)\,(x - x(t_0))$ $t \neq 0; \pi$	$y - y(\varphi_0) = \dfrac{\varepsilon - \cos(\varphi_0)}{\sin(\varphi_0)}(x - x(\varphi_0))$
Normale	$y - y_0 = \dfrac{y_0\, a^2}{x_0\, b^2}(x - x_0)$	$y - y(t_0) = \dfrac{a}{b} \tan(t)\,(x - x(t_0))$	$y - y(\varphi_0) = \dfrac{-\sin(\varphi_0)}{\varepsilon - \cos(\varphi_0)}(x - x(\varphi_0))$

3.3.2 Kardoide 100

$r(\varphi) = a + b \cdot \cos(\varphi)$

$a + b = 1 \quad \cap \quad 0 \leq a \leq 1 \quad \cap \quad 0 \leq b \leq 1$



Polarform:

Kardioide/Herzk. 100
$r = a(1 + \cos(\varphi))$
Lemniskate "∞" 102
$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$
Strophoide/harm. K. 97
$r = -a\frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)}, (a > 0)$

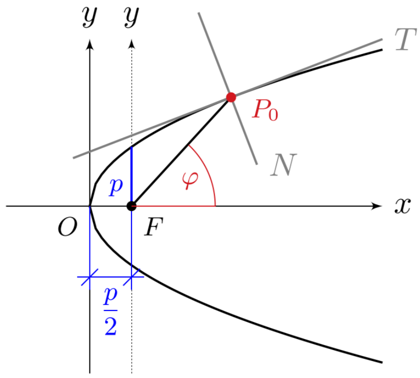
3.3.3 Parabel *210*

Nummerische Exzentrizität: $\varepsilon = 1$

Halbparameter: p

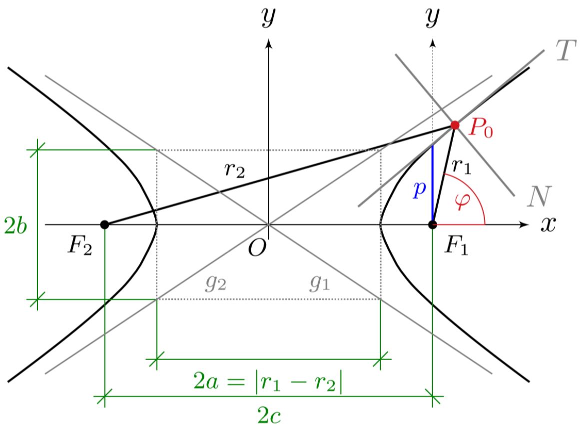
Polarabstand: $r = \overline{FP_0}$

Polarwinkel: $0 < \varphi < 2\pi$



	Implizit (Achsenkreuz in O)	Parametrisch (Achsenkreuz in O)	Polar Achsenkreuz in F_2)
Kurve	$y^2 = 2\,p\,x$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2p} \\ y \end{pmatrix} \quad y \in \mathbb{R}$	$r = \dfrac{p}{1-\cos(\varphi)}$
Tangente	$y - y_0 = \dfrac{p}{y_0}(x - x_0)$	$y - y(t_0) = \dfrac{p}{y(t_0)}(x - x(t_0))$ $t \neq 0; \pi$	$y - y(\varphi_0) = \dfrac{1-\cos(\varphi_0)}{\sin(\varphi_0)}(x - x(\varphi_0))$
Normale	$y - y_0 = -\dfrac{y_0}{p}(x - x_0)$	$y - y(t_0) = -\dfrac{y(t_0)}{p}(x - x(t_0))$	$y - y(\varphi_0) = \dfrac{-\sin(\varphi_0)}{1-\cos(\varphi_0)}(x - x(\varphi_0))$

3.3.4 Hyperbel *207*



Nummerische Exzentrizität: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ mit $\varepsilon > 1$

Exzentrizität: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Halbparameter: $p = \dfrac{b^2}{a}$

Polarabstand: $r = r_1$

Polarwinkel: $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) < \varphi < 2\pi - \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$

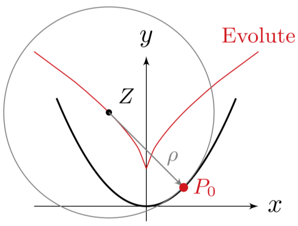
Asymptoten: $g_1(x) = \dfrac{b}{a}\,x \qquad g_2(x) = -\dfrac{b}{a}\,x$

	Implizit (Achsenkreuz in O)	Parametrisch (Achsenkreuz in O)	Polar Achsenkreuz in F_2)
Kurve	$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cosh(t) \\ b \cdot \sinh(t) \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$ rechter Hyperbelast	$r = \dfrac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$ rechter Hyperbelast
Tangente	$y - y_0 = \dfrac{x_0\, b^2}{y_0\, a^2}(x - x_0)$	$y - y(t_0) = \dfrac{b}{a}\coth(t)\,(x - x(t_0))$ $t \neq 0; \pi$	$y - y(\varphi_0) = \dfrac{\varepsilon - \cos(\varphi_0)}{\sin(\varphi_0)}(x - x(\varphi_0))$
Normale	$y - y_0 = -\dfrac{y_0\, a^2}{x_0\, b^2}(x - x_0)$	$y - y(t_0) = -\dfrac{a}{b}\tanh(t)\,(x - x(t_0))$	$y - y(\varphi_0) = \dfrac{-\sin(\varphi_0)}{\varepsilon - \cos(\varphi_0)}(x - x(\varphi_0))$

4 Wichtige Formeln

Explizit (Kartesisch)	**Parameter**	**Polar**
Anstieg einer Kurve ???? *1.Ableitung, 2. Ableitung*	*Anstieg in $P_0 \in C$*	
$m = y' = f'(x_o) \qquad y'' = f''(x_0)$	$m = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$	$m = y' = \frac{r'(\varphi)\sin(\varphi)+r(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{r'(\varphi)\cos(\varphi)-r(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}$
Bogenlänge 514 *zwischen $P_1, P_2 \in C$*		
$s = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$\lvert s\rvert = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$	$\lvert s\rvert = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}d\varphi$
Krümmung ebener Kurven 253ff	$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ Scheitel bei: $K'(x)=0$ *und*	$K''(x) \neq 0 \begin{cases} K(x)<0 & \text{Maxima} \\ K(x)>0 & \text{Minima} \end{cases}$
$\kappa = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1+(f'(x))^2}\right)^3}$	$\kappa = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\left(\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\right)^3}$	$\kappa = \frac{2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)+(r(\varphi))^2}{\left(\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}\right)^3}$
Konvex (Linkskurve): $\kappa \geq 0$ Streng konvex: $\kappa > 0$	Wendepunkt: $\kappa = 0$	Analog für konkav
Krümmungskreisradius 254 $r = \lvert\frac{1}{\kappa}\rvert$		
$r = \frac{\left(\sqrt{1+(f'(x))^2}\right)^3}{f''(x)}$	$r = \frac{\left(\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\right)^3}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$	$r = \frac{\left((\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}\right)^3}{2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)+(r(\varphi))^2}$
Flächeninhalt 514 *um x-Achse*	*y-Achse: Umkerhfunktion $f^{-1}(x)$ von y_0 bis y_1 integrieren*	
$A = \int\limits_a^b f(x)dx$	$A = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}[x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)]dt$	$A = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}(r(\varphi))^2d\varphi$
Volumen 515 *mit Meridian C (Rotationskörper)*		
$V = \pi\int\limits_a^b (f(x))^2dx$	$V = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2}(y(t))^2\dot{x}(t)dt$	$V = \pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\sin^2\varphi[r'(\varphi)\cos(\varphi)-r(\varphi)\sin(\varphi)]d\varphi$
Oberflächeninhalt 515 *mit Meridian C (Rotationskörper)*		
$O = 2\pi\int\limits_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$O = 2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2}\lvert y(t)\rvert\sqrt{\dot{x}^2(t)+(\dot{y}^2(t))}dt$	$O = 2\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\lvert r(\varphi)\sin\varphi\rvert\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}d\varphi$
Polar: $\sin\varphi$ = Drehung um Polgerade	$\cos y$ = Drehung um y-Achse $\left(f=\frac{\pi}{2}\right)$	$\rightarrow$ siehe Fläche

4.1 Evolute (Kurve des Krümmungskreis-Zentrums) 262



$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}}$$

Normalenvektor Richtung Zentrum mit der Länge 1!

Krümmungskreismittelpunkt 255		
Explizit (Kartesisch)	**Parameter**	**Polar**
$x_c = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$	$x_c(t) = x(t) - \dot{y}(t)\frac{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)}$	$x_c = r(\varphi)\cos(\varphi) - \frac{\left[(r(\varphi))^2+\left(r'(\varphi)\right)^2\right]\cdot\left[r(\varphi)\cos(\varphi)+r'(\varphi)\sin(\varphi)\right]}{(r(\varphi))^2+2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)}$
$y_c = y + \frac{1+y'^2}{y''}$	$y_c(t) = y(t) + \dot{x}(t)\frac{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)}$	$y_c = r(\varphi)\sin(\varphi) - \frac{\left[(r(\varphi))^2+\left(r'(\varphi)\right)^2\right]\cdot\left[r(\varphi)\sin(\varphi)-r'(\varphi)\cos(\varphi)\right]}{(r(\varphi))^2+2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)}$
Umrechnung Kart $\Leftrightarrow$ Komp.: $x(t), y(t)$ und $\int f(x)dx \Rightarrow$	$dx = \dot{x}dt \Rightarrow$	$\int y(t)\dot{x}(t)dt$

7 Integrations- und Ableitungstabelle

Ableitung $\frac{df}{dx}$ $\leftarrow$	Funktion $f(x)$	$\rightarrow$ Integral $\int f(x)\,dx$
Konstanten		
0	$c \quad c \in \mathbb{R}$	cx
Potenzfunktionen		
c	$c \cdot x$	$\frac{c}{2}x^2$
$r \cdot x^{r-1}$	$x^r \quad r \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\|x\|$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
Exponentialfunktionen		
e^x	e^x	e^x
$a\,\mathrm{e}^{ax}$	e^{ax}	$\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}$
$a^x\,\ln\|a\|$	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln\|a\|}$
Logarithmusfunktionen		
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$x\,(\ln\|x\| - 1)$
$\frac{1}{x\,\ln\|a\|}$	$\log_a\|x\|$	$x\,(\log_a\|a\| - \log_a \mathrm{e})$
Winkelfunktionen		
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
$-1 - \cot^2(x)$	$\cot(x)$	$\ln\|\sin(x)\|$
Inverse Winkelfunktionen		
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \textbf{arccos(x)} - \sqrt{1-x^2} + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arccot}(x)$	$x \cdot \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
Hyperbolische Funktionen		
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$	$\cosh(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$	$\sinh(x) + C$
$1 - \tanh^2(x)$	$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\ln(\cosh(x)) + C$
Area Hyperbolische Funktionen		
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$x \cdot \mathrm{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$x \cdot \mathrm{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1} + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	$x \cdot \mathrm{artanh}(x) - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

5 Anhang

5.1 Integrations Methoden

5.1.1 Substitutionsmethode

Raten und Prüfen

Bsp.: $\int \sin(3x)dx$

1. bekannte/ vereinfachte Funktion integerieren $\Rightarrow \int \sin(z)dz = -\cos(z) + C$
2. z ersetzen: $z := 3x \quad \Rightarrow \quad -\cos(3x) + C$
3. ableiten: $\frac{d}{dx}(-\cos(3x) + C) = 3 \cdot \sin(3x)$
4. überprüfen: $3 \cdot \sin(3x) \neq \sin(3x)$
5. korrigieren: $\int \sin(3x)dx = \underline{-\frac{1}{3} \cdot \cos(3x) + C}$

Schritt für Schritt

Bsp.: $\int \sin(3 - 7x)dx$

1. substitutieren und ableiten: $z = 3 - 7x \xLeftrightarrow{\text{nach x ableiten}} \frac{dz}{dx} = -7 \xLeftrightarrow{\cdot dx \quad \& \quad :-7} dx = \frac{dz}{-7}$
2. z einsetzen: $\int \sin(z) \cdot \frac{dz}{-7}$
3. Integral nach z auflösen: $\int \sin(z) \cdot \frac{dz}{-7} = -\frac{1}{7} \int \sin(z)dz = \frac{1}{7} \cdot \cos(z) + C$
4. Substitution von z rückgängig machen: $\frac{1}{7} \cdot \cos(z) + C = \underline{\frac{1}{7} \cdot \cos(3 - 7x) + C}$

5.1.2 Partiell integrieren

Standard-Verfahren

Bsp.: $\int x \cdot e^x dx$

1. Partiell integrieren: $e^x x - \int e^x dx$
2. e^x integrieren: $e^x x - e^x + C$
3. Ausdruck vereinfachen (Algebra): $\underline{e^x(x - 1) + C}$

Integrieren im Kreis

Bsp.: $\int \sin(x) \cdot \cos(x)dx$

1. partiell integrieren: $\sin(x) \cdot \sin(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x)$
2. Algebra anwenden: $\int \sin(x) \cdot \cos(x)dx = \sin^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x)$

$$\xLeftrightarrow{+\int \sin(x) \cdot \cos(x)} \quad 2\int \sin(x) \cdot \cos(x)dx = \sin^2(x) + C$$

$$\xLeftrightarrow{:2} \quad \int \sin(x) \cdot \cos(x)dx = \underline{\frac{\sin^2(x)}{2} + C}$$

5.1.3 Trigonometrische Substitution

Bsp.: $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 25}}dx$

1.

5.1.4 Rationale Ausdrücke integrieren

Algebra anwenden

Bsp.: $\int \frac{(x^2+5)(x-3)^2}{\sqrt{x}}dx$

1. Zähler aus multiplizieren und Nenner in Exponentialform bringen: $\int \frac{x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 30x + 45}{x^{\frac{1}{2}}}dx$
2. Ausdruck in Terme aufteilen: $\int \left(x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{2}} + 14x^{\frac{3}{2}} - 30x^{\frac{1}{2}} + 45x^{\frac{1}{2}}\right)dx$
3. Summenregel: $\int x^{\frac{7}{2}}dx - 6\int x^{\frac{5}{2}}dx + 14\int x^{\frac{3}{2}}dx - 30\int x^{\frac{1}{2}}dx + 45\int x^{\frac{1}{2}}dx$
4. Potenzregel: $\underline{\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{28}{5}x^{\frac{5}{2}} - 20x^{\frac{3}{2}} + 90x^{\frac{1}{2}} + C}$

Partialbruch

Bsp.: $\frac{x^4-x^3-5x+4}{(x-2)(x^2+3)}$

1. Bsp. $\begin{cases} \text{Zählergrad} > \text{Nennergrad} & \Rightarrow \text{Polynomdivision:} \quad x+1+\frac{-x^2-2x+10}{(x-2)(x^2+3)} \\ \text{Zählergrad} < \text{Nennergrad} & \Rightarrow \text{echt gebrochen} \end{cases}$
2. Partialbruchzerlegung (echt gebrochener Teil): $\frac{-x^2-2x+10}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} = \frac{2}{7(x-2)} + \frac{-9x-32}{7(x^2+3)}$
3. echt und unecht gebrochener Teil integrieren: $\int \left[x+1+\frac{2}{7(x-2)} + \frac{9x-32}{7(x^2+3)}\right] dx$
4. Summenregel: $\underline{\int x dx + \int dx + \frac{2}{7}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{9}{7}\int \frac{x}{x^2+3}dx - \frac{32}{7}\int \frac{1}{x^2+3}dx}$