

Inhaltsverzeichnis

1	Wahrscheinlichkeitsrechnen und Zufallsvariablen	Skript S. 129-6	2
1.1	Wahrscheinlichkeit	Skript S. 128-6.2	2
1.2	Zufallsvariablen	Skript S. 131-6.3	2
1.3	Zweidimensionale Zufallsvariablen	Skript S. 133-6.4	2
1.4	Funktionen von Zufallsvariablen	Skript S. 135-6.5	2
1.5	Statistische Mittelwerte	Skript S. 137-6.6	2
1.6	Spezielle WSK-Verteilungen	Skript S. 138-6.7	2
2	Zufallsprozesse	S165-7	3
2.1	Statistische Mittelwerte (Scharmittel)	Skript S. 166-7.3.B	3
2.2	Zeitliche Mittelwerte (Zeitmittel)	Skript S. 168-7.3.D	3
2.3	Stationarität	Skript S. 167-7.3.C	4
2.4	Ergodizität	Skript S. 168-7.3.D	4
2.5	Vergleich Stationär - Ergodisch		4
2.6	Korrelationen und Leistungsspektren	Skript S. 169-7.4	5
2.7	Übertragung von Zufallsprozessen durch LTI-Systeme	Skript S. 171-7.5	5
2.8	Spezielle Zufallsprozesse	Skript S. 172-7.6	5
3	Rauschen in analogen Kommunikationssystemen	S202-8	7
3.1	Basisband	Skript S. 203-8.3	7
3.2	Amplitudenmodulation	Skript S. 204-8.4	7
3.3	Winkelmodulation	Skript S. 208-8.5	8
3.4	Zusammenfassende Tabelle	(Freundlicherweise zur Verfügung gestellt von Herrn T. Kneubuehler)	9
4	Optimaler Detektor - Rauschen in digitalen Kommunikationssys.	S227-9	10
4.1	Binäres Übertragungssystem	Skript S. 226-9.2	10
4.2	Optimaler Detektor		10
4.3	Lineares Filter		11
4.4	Fehlerwahrscheinlichkeit verschiedener binären Übertragungen	Skript S. 231-9.5	11
5	Informationstheorie und Quellencodierung	S245-10	11
5.1	DMS - Discrete Memoryless Source		11
5.2	DMC - Discrete Memoryless Channels	Skript S. 247-10.3	12
5.3	Kanalkapazität	Skript S. 251-10.5	13
5.4	Quellencodierung	Skript S. 253-10.7	13
5.5	Entropie Codierung	Skript S. 255-10.8	14
6	Kanalcodierung	S282-11	15
6.1	Kanalkodierungstheorem - Shannon	S282-11.2B	15
6.2	Systematische Codes		15
6.3	Blockcodes		15
6.4	Lineare Blockcodes	S283-11.4	15
6.5	Zyklische Blockcodes	S286-11.5	17
6.6	Faltungscodes	S290-11.6	18
7	Übungsverzeichnis		18
7.1	Wahrscheinlichkeitsrechnen und Zufallsvariablen		18
7.2	Zufallsprozesse		19
7.3	Rauschen in analogen Kommunikationssystemen		19
7.4	Optimaler Detektor - Rauschen in digitalen Kommunikationssystemen		19
7.5	Informationstheorie und Quellencodierung		19
7.6	Kanalcodierung		19
7.7	Sonstiges		19

1 Wahrscheinlichkeitsrechnen und Zufallsvariablen Skript S. 129-6

Dieses Kapitel dient, ausser den Ergänzungen bei der Binominalverteilung (siehe 1.6.1) , lediglich als Inhaltsverzeichnis für besseres Zurechtfinden im Schaum. Für detailliertere Angaben siehe WrStat-Zusammenfassung!

1.1 Wahrscheinlichkeit Skript S. 128-6.2

1.1.1 Zufallsexperiment Skript S. 128-6.2.A

1.1.2 Zufallsraum und Ereignisse Skript S. 128-6.2.B

1.1.3 Ereignisalgebra Skript S. 129-6.2.C

1.1.4 Ereigniswahrscheinlichkeit Skript S. 129-6.2.D

1.1.5 Laplace Ereignis Skript S. 130-6.2.E

1.1.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit Skript S. 130-6.2.F

1.1.7 Unabhängige Ereignisse Skript S. 130-6.2.G

1.1.8 Totale Wahrscheinlichkeit Skript S. 131-6.2.H

1.2 Zufallsvariablen Skript S. 131-6.3

1.2.1 Verteilungsfunktion (CDF) Skript S. 132-6.3.B

1.2.2 Diskrete Zufallsvariablen und diskrete Dichtefunktion (PMF) Skript S. 132-6.3.C

1.2.3 Kontinuierliche Zufallsvariablen und kontinuierliche Dichtefunktion (PDF) Skript S. 132-6.3.C

1.3 Zweidimensionale Zufallsvariablen Skript S. 133-6.4

1.3.1 Verbundfunktionen Skript S. 133,134-6.4.A,C,E

1.3.2 Randfunktionen Skript S. 133,134-6.4.B,D,F

1.4 Funktionen von Zufallsvariablen Skript S. 135-6.5

1.4.1 Zufallsvariable - Eine Funktion von einer Zufallsvariable Skript S. 135-6.5.A

1.4.2 Eine Funktion von zweier Zufallsvariable Skript S. 136-6.5.B

1.4.3 Zwei Funktionen von zweier Zufallsvariable Skript S. 136-6.5.C

1.5 Statistische Mittelwerte Skript S. 137-6.6

1.5.1 Erwartungswert Skript S. 137-6.6.A

1.5.2 Moment (n-ter Erwartungswert) Skript S. 137-6.6.B

1.5.3 Varianz Skript S. 137-6.6.C

1.5.4 Kovarianz und Korrelationskoeffizient Skript S. 137-6.6.D

1.6 Spezielle WSK-Verteilungen Skript S. 138-6.7

1.6.1 Binominalverteilung Skript S. 138-6.7.A

Approximation mit Poissionverteilung

Falls $p < 0.05$ und $n > 10$, dann gilt die Approximation mit $\alpha = n \cdot p$.

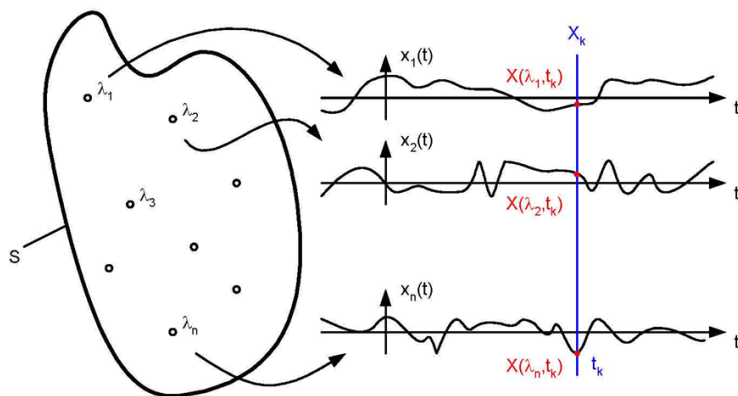
Approximation mit Normalverteilung

Falls $n \cdot p \cdot q > 9$, dann gilt die Approximation mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$.

1.6.2 Poissonverteilung Skript S. 139-6.7.B

1.6.3 Normal(Gauss-)verteilung Skript S. 139-6.7.C

2 Zufallsprozesse S165-7



Bei einem **Zufallsprozess** wird jedem **Ergebnis** λ aus dem **Ergebnisraum** S eine **deterministische Funktion** $x(\lambda, t)$ zugewiesen.

Zufallsprozesse beschreiben eine deterministische Zeitfunktion ausgelöst durch ein Ergebnis eines Zufallsexperiments.

Zeitlich **zufällig** ablaufende **Funktionen** können ebenfalls als **deterministische Funktionen** aufgefasst werden, bei denen der Beobachter nie weiss, welche Funktion $x_\lambda(t)$ konkret vorliegt.

Zum Vergleich: Bei Zufallsvariablen wird jedem Elementarereignis eine Zahl zugewiesen.

Beispiele von Zufallsprozessen:

- **Binäre Datenquelle:** Das auftreten einer 1 oder 0 (Ergebnis λ) ist zufällig, jedoch sind die dazugehörigen Pulsformen $x(\lambda_0, t)$ und $x(\lambda_1, t)$ bekannt.
- **Ethernet-Paket:** Da die Paketlänge 1518 Bytes beträgt ist der Ergebnisraum S endlich und beinhaltet alle möglichen Bitkombinationen der Länge von 1518 Bytes. Das Auftreten der jeweiligen Bitfolgen ist zufällig, jedoch ist dann der zeitliche Verlauf der jeweiligen Pulsformen vorbestimmt.
- **Manchester-Puls mit Rauschen:** Am Empfänger ist den Bitpulsen **thermisches Rauschen** überlagert. Da man den zeitlichen Verlauf der Rauschspannung nicht vorhersagen kann, existiert eine **unendliche Anzahl Ergebnisse** λ . Eine deterministische Berechnung des zeitlichen Verlaufs ist nicht möglich, jedoch kann man die **statistischen Eigenschaften** der Rauschquellen aufgrund des physikalischen Modells exakt berechnet werden.

2.1 Statistische Mittelwerte (Scharmittel) Skript S. 166-7.3.B

Die statistischen Mittelwerte sind eine Funktion der Zeit t , da es sich um Mittelwerte über das Ensemble (ganzer Ergebnisraum) handelt. Hierbei werden alle deterministischen Funktionen zu einem bestimmten Zeitpunkt t gemittelt.

Erwartungswert: $\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x; t) dx$

Autokorrelation: $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$

Autokovarianz: $C_{XX}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1)) \cdot (X(t_2) - \mu_X(t_2))] = R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_X(t_2)$

2.2 Zeitliche Mittelwerte (Zeitmittel) Skript S. 168-7.3.D

Hierbei werden die jeweiligen deterministischen Funktionen (Musterfunktionen) zeitlich gemittelt. Wird das zeitliche Mittel über den gesamten Zufallsprozess berechnet, so handelt es sich bei den zeitlichen Mittelwerten um **Zufallsvariablen**, d.h. die folgenden zwei Ausdrücke sind abhängig davon (darum Index i), welche Funktion genutzt wird.

Mittelwert: $\bar{x}_i = \langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_i(t) dt$

Autokorrelation: $\bar{R}_{X_i X_i}(\tau) = \langle x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) dt$

Falls der **Prozess stationär** ist gilt zudem:

Mittelwert: $E[\bar{x}] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} E[x(t)] dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mu_X dt = \mu_X(t)$

Autokorrelation: $E[\bar{R}_{XX}(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} E[x(t)x(t + \tau)] dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} R_{XX}(\tau) dt = R_{XX}(\tau)$

2.3 Stationarität Skript S. 167-7.3.C

Ein stationärer Prozess verändert seine statistischen Eigenschaften über die Zeit nicht. Wenn ein Prozess ergodisch ist, ist er auch stationär (nicht umgekehrt).

2.3.1 Streng Stationär (SSS - Strict Sense Stationary)

Bei einem streng stationären Prozess bleiben die n-dimensionale WSK-Dichten über die Zeit konstant. D.h. die **statistischen Eigenschaften** und somit auch die WSK-Dichten sind zu **allen Zeitpunkten dieselben**.

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_n + c) \quad \forall (c, n \in \mathbb{R})$$

2.3.2 Schwach Stationär (WSS - Wide Sense Stationary) - Stationarität 2. Ordnung

Bei einem schwach stationären Prozess sind die statistischen Eigenschaften zwar **nicht zu jedem Zeitpunkt die selben**, jedoch sind sie **nicht** von einem **absoluten** Zeitpunkt, sondern von der **Differenz** (τ) **zweier Zeitpunkte** (t_1, t_2) abhängig.

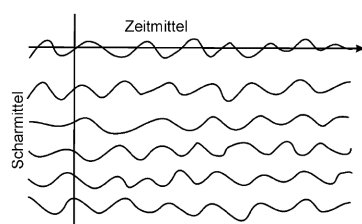
$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + c, t_2 + c) \quad \forall (c \in \mathbb{R})$$

Mittelwert:	$E[X(t)] = \mu_X(t) = \text{const.}$	bleibt über die ganze Zeit konstant
quad. Mittelwert:	$E[X^2(t)] = R_X(0)$	
Autokorrelation:	$R_{XX}(t_1, t_2) = R_X(\tau)$	nur abhängig von der Zeitdifferenz ($\tau = t_2 - t_1$)
Autokovarianz:	$C_{XX}(t_1, t_2) = R_X(\tau) - \mu_X(t)^2 = C_{XX}(\tau)$	und nicht direkt von der Zeit t

Bei einem Zufallsprozess handelt es sich immer um ein WSS-Prozess, sobald der Erwartungswert für jede Zeit t konstant bleibt und die Autokorrelationsfunktion nur eine Funktion von τ ist, d.h. beide statistischen Kennwerte bzgl. einer zeitlichen Verschiebung unabhängig sind. Jeder streng stationäre Prozess ist auch schwach stationär, aber nicht umgekehrt.

2.4 Ergodizität Skript S. 168-7.3.D

Ein stationärer Prozess ist zudem noch ergodisch, wenn **alle zeitlichen Mittelwerten** (Zeitmittelwert und zeitlich gemittelte Autokorrelation) den **statistischen Mittelwerten** (Erwartungswert und statistisch gemittelte Autokorrelation) **entsprechen**. Jeder ergodische Zufallsprozess ist auch stationär, aber nicht umgekehrt.

	Statistische MW $\left\{ \begin{array}{l} E[X(t)] = \bar{x}_i \\ R_{XX}(\tau) = \bar{R}_{X_i X_i}(\tau) \end{array} \right\}$ Zeitliche MW (const. für alle i)
	Nur bei ergodischen Prozessen gilt zwingend:
	$E[X(t)] = \bar{x} = \langle x(t) \rangle$ DC-Level
	$E[X(t)]^2 = (\bar{x})^2 = \langle x(t) \rangle^2$ DC-Leistung
	$E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = \bar{x}^2 = \langle x^2(t) \rangle$ Gesamtleistung
	$\sigma_X^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ AC-Leistung
	$\sigma_X(t) = \bar{\sigma}_X$ RMS-Level (Effektivwert) des AC-Signals

2.5 Vergleich Stationär - Ergodisch

2.5.1 Mückenschwarm

Ergodisch: Fliegen alle Mücken zusammen in einem Schwarm, so fliegt jede Mücke über die ganze Zeit gemittelt (Zeitmittel) so schnell wie der ganze Schwarm im Mittel (Scharmittel), ansonsten würde der Schwarm nicht zusammenhalten können.

Stationär: Ist eine Mücke krank und kann mit dem Schwarm nicht mithalten, so fliegt sie alleine und v.a. langsamer. Somit ist ihre Durchschnittsgeschwindigkeit (Zeitmittel) nicht gleich derjenigen des Schwarms (Scharmittel), also kommt sie später am Ziel an.

Weder noch: Fliegen die Mücken nach dem Start immer langsamer, so ist die durchschnittliche Geschwindigkeit des Schwarms (Scharmittel) nicht konstant.

2.5.2 Schulnoten

Ergodisch: Alle Schüler müssten dieselbe Zeugnisnote (Zeitmittel) haben und zudem müsste diese Note jeweils auch dem Klassenschnitt (Scharmittel) der einzelnen Prüfungen entsprechen.

Stationär: Der Klassenschnitt (Scharmittel) ist bei jeder Prüfung gleich, jedoch gibt es unterschiedlich starke Schüler mit unterschiedlichen Zeugnisnoten (Zeitmittel).

Weder noch: Der Klassenschnitt (Scharmittel) ist immer unterschiedlich.

2.5.3 Thermisches Widerstandsrauschen

Dies ist bei gleichbleibender Temperatur **ergodisch**.

2.6 Korrelationen und Leistungsspektren Skript S. 169-7.4

Formeln in diesem Abschnitt gelten für **stationäre** Prozesse.

Autokorrelation:	$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$	
	$ R_{XX}(\tau) \leq R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$	$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$ (gerade)
Kreuzkorrelation:	$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$	$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$ (Reihenfolge Indizes!)
	$ R_{XY}(\tau) \leq \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)]$	$ R_{XY}(\tau) \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$
Autokovarianz:	$C_{XX}(\tau) = E[(X(t) - E[X(t)]) \cdot (X(t+\tau) - E[X(t+\tau)])] = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2$	
Kreuzkovarianz:	$C_{XY}(\tau) = E[(X(t) - E[X(t)]) \cdot (Y(t+\tau) - E[Y(t+\tau)])] = R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y$	
	Zufallsprozesse bezeichnet man als zueinander unkorreliert , wenn $C_{XY}(\tau) = 0$	

2.6.1 Spektrale Leistung Skript S. 170-7.4.E,F

Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(\tau)$ und Leistungsspektraldichte $S_{XX}(\omega)$ bilden ein Fourier-**Transformationspaar**. Die Leistungsspektraldichte kann als **mittlere Leistung pro Frequenzband** aufgefasst werden, sie ist wie folgt definiert:

$$E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot |X(\omega)|^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \boxed{S_{XX}(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad R_{XX}(\tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$$

$S_{XX}(\omega)$ ist rein reell und ≥ 0 .

Kreuzkorrelationen ($R_{YX}(\tau), R_{XY}(\tau)$) und Kreuz-Spektraldichten ($S_{YX}(\tau), S_{XY}(\tau)$) bilden ein Fourier-Transformationspaar.

$$R_{YX}(\tau) \circ \text{---} \bullet S_{YX}(\omega) \quad R_{XY}(\tau) \circ \text{---} \bullet S_{XY}(\omega)$$

2.7 Übertragung von Zufallsprozessen durch LTI-Systeme Skript S. 171-7.5

Ein Zufallsprozess wird durch ein LTI-System übertragen.

$$Y(t) = L[X(t)] \Rightarrow Y(t) = h(t) * X(t)$$

	Allgemein	WSS-Prozess
Mittelwert	$\mu_Y(t) = h(t) * \mu_X(t)$	$\mu_Y = H(0)\mu_X$
Auto-korrelation*	$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)h(\beta)R_{XX}(t_1-\alpha, t_2-\beta) d\alpha d\beta$	$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)h(\beta)R_{XX}(\tau+\alpha-\beta) d\alpha d\beta$
Spektrale Leistung		$S_{YY}(\omega) = H^*(\omega)H(\omega)S_{XX}(\omega) = H(\omega) ^2 S_{XX}(\omega)$

* = Es ist viel einfacher die Autokorrelation aus der Spektralen Leistung (Transformationspaar) - anstatt aus diesem höllischen Integral - auszurechnen.

Ein WSS-Prozess am Eingang erzeugt auch einen WSS-Prozess am Ausgang.

2.8 Spezielle Zufallsprozesse Skript S. 172-7.6

2.8.1 Gauss Zufallsprozess Skript S. 172-7.6.A

Bein diesem Prozess ist die **Zufallsvariable** $X(t_i)$ zu **jedem Zeitpunkt** t_i **gaussverteilt**. Bsp.: thermisches Rauschen.

Zweidimensionaler Fall (gauss'sche Verbunddichte): $f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu_{x_1})^2}{2\sigma_{x_1}^2}} \cdot e^{-\frac{(x_2-\mu_{x_2})^2}{2\sigma_{x_2}^2}}$

Für $X(t_1)$ und $X(t_2)$ unkorreliert ($C_{XX}(t_1, t_2) = 0$) gilt: $f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1; t_1) \cdot f_X(x_2; t_2)$

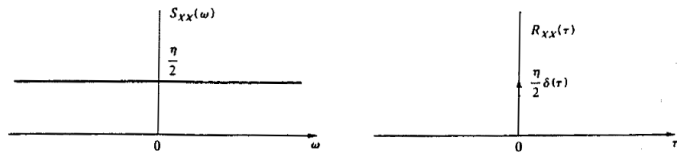
$\mu_X(t)$ und $R_{XX}(t_1, t_2)$ charakterisieren einen gauss'schen Zufallsprozess vollständig.

Ist ein gauss'scher Prozess WSS ist er zugleich auch SSS. Zudem ist wird ein gauss'scher Zufallsprozess $X(t)$ am Ausgang eines LTI Systems $Y(t)$ wiederum gaussisch.

2.8.2 Weisses Rauschen Skript S. 173-7.6.B

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2} \quad R_{XX}(\tau) = \frac{\eta}{2} \cdot \delta(\tau)$$

Beispiel: therm. Rauschen von Widerständen
Nimmt in der Praxis im Tera-Hz Bereich ab!



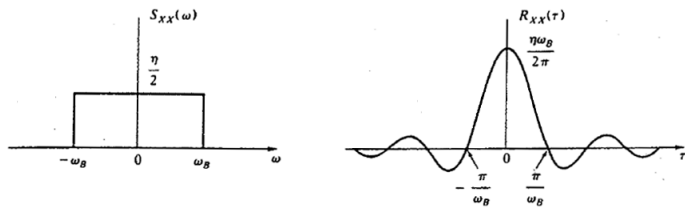
2.8.3 Farbige Rauschsignale

Bezeichnung (De)	Bezeichnung (En)	Leist.-Spektrum	Anmerkung
Rosa Rauschen	Pink Noise	$S_{XX}(\omega) = c \cdot \frac{1}{\omega}$	Testsignal für Tontechnik, wegen konstanter Leistung pro Oktave
Braunes/Rotes Rauschen	Brown/Red Noise	$S_{XX}(\omega) = c \cdot \frac{1}{\omega^2}$	
Blaues Rauschen	Blue Noise	$S_{XX}(\omega) = c \cdot \omega$	
Violettes Rauschen	Purple/Violet Noise	$S_{XX}(\omega) = c \cdot \omega^2$	Bsp.: FM Demodulator Noise

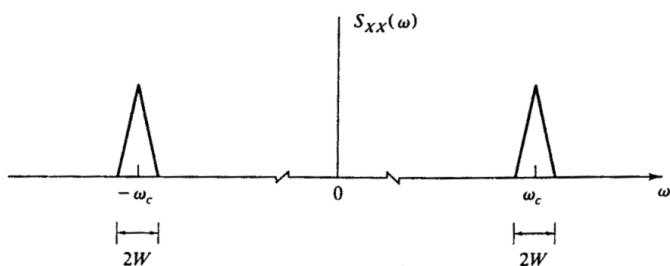
2.8.4 Bandbeschränktes Rauschen Skript S. 174-7.6.C

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} & |\omega| \leq \omega_B \\ 0 & |\omega| > \omega_B \end{cases}$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{+\omega_B} \frac{\eta}{2} \cdot e^{j\omega\tau} d\tau = \frac{\eta\omega_B}{2\pi} \frac{\sin(\omega_B\tau)}{\omega_B\tau}$$



2.8.5 Schmalbandiger Zufallsprozess Skript S. 174-7.6.D



$$X(t) = V(t) \cdot \cos[\omega_c t + \phi(t)]$$

$$X(t) = X_c(t) \cos \omega_c t - X_s(t) \sin \omega_c t$$

$$X_c(t) = V(t) \cos \phi(t) \quad X_s(t) = V(t) \sin \phi(t)$$

$$V(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)} \quad \phi(t) = \arctan \frac{X_s(t)}{X_c(t)}$$

Eigenschaften von $X_c(t)$ und $X_s(t)$:

$$\mu_{X_c} = \mu_{X_s} = \mu_X = 0$$

$$\sigma_{X_c}^2 = \sigma_{X_s}^2 = \sigma_X^2$$

$$E[X_c(t)X_s(t)] = 0 \text{ (unkorreliert \& orthogonal)}$$

$$S_{X_c X_c}(\omega) = S_{X_s X_s}(\omega) = \begin{cases} S_{XX}(\omega - \omega_c) + S_{XX}(\omega + \omega_c) & |\omega| \leq W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

Ist $X(t)$ ein Gauss-Prozess, sind auch $X_c(t)$ und $X_s(t)$ gaussisch. Dann ist $V(t)$ Rayleigh-verteilt zu jedem Zeitpunkt t und $\Phi(t)$ gleichverteilt $(0..2\pi)$ zu jedem Zeitpunkt t .

Hierbei handelt es sich um einen WSS-Prozess mit **sehr kleiner Bandbreite** $2W$ verglichen mit der Mittenfrequenz ω_c .

Dies ist beispielsweise der Fall wenn **thermisches Widerstandrauschen** durch ein schmalbandiges Bandpass gefiltert wird.

Im **Zeitbereich** manifestiert sich diese Funktion als **sinusförmiges** Signal mit zufälliger Amplitude und Phase. Bei $X_c(t)$ und $X_s(t)$ handelt es sich damit um bandbeschränktes Rauschen im Basisband.

$V(t)$ Enveloppen-Funktion

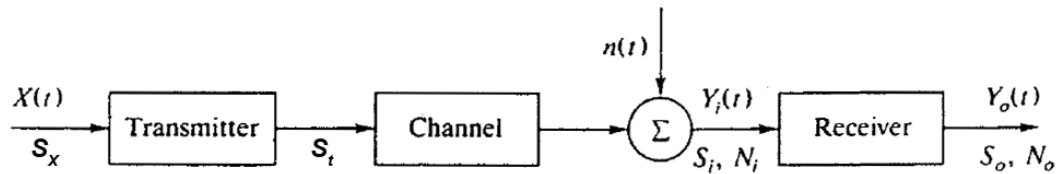
$\phi(t)$ Phasenfunktion.

$X_c(t)$ gleichphasiger Anteil

$X_s(t)$ Quadratur-Anteil

3 Rauschen in analogen Kommunikationssystemen S202-8

Rauschen verschlechtert die Performance. Bei **analogen** Systemen macht sich dies beim **Signal-Rausch-Abstand (SNR)** bemerkbar.



Die Voraussetzungen für eine einfache Berechnung mit Hilfe von diesem Modell (gauss'scher Kanal) sind die folgenden:

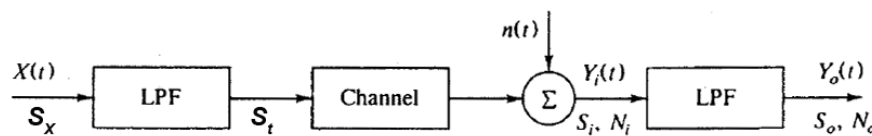
- $n(t)$ ist **mittelwertfrei** ($E[n] = 0$) gauss'sches Rauschen mit ..
- $S_{nn}(\omega) = \eta/2$ und ...
- ist mit $X(t)$ **unkorreliert** ($\text{cov}(X, n) = E[X \cdot n] - E[X] \cdot E[n] = 0$)

Somit gilt: $E[(X_0 + n_0)^2] = E[X_0^2] + E[2 \cdot X_0 \cdot n_0] + E[n_0^2] = S_0 + N_0$ und $\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{E[X_0(t)^2]}{E[n_0(t)^2]}$

Weist der Kanal eine **Dämpfung** A_{db} auf, so muss diese bei den Berechnungen berücksichtigt werden: $S_{i_{dB}} = S_{t_{dB}} - A_{dB}$

3.1 Basisband Skript S. 203-8.3

Die Berechnungen im Basisband gelten als **Referenz**, für den **Vergleich** mit **anderen Systemen**.

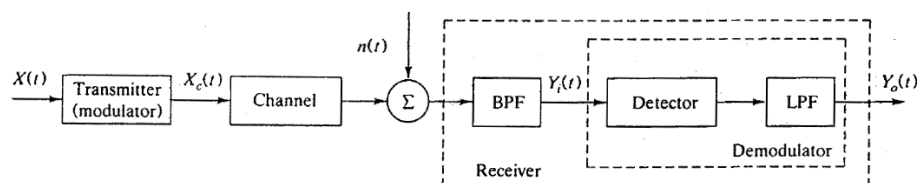


Wiederum müssen wieder gewisse Einschränkungen gemacht werden für eine einfachere Berechnung:

- $X(t)$ ist mittelwertfrei $\Rightarrow E[X] = 0$
- $X(t)$ ist stationär und ergodisch $\Rightarrow \langle x_\lambda(t) \rangle = E[X] = 0$ (für alle $x_\lambda(t)$)
- $X(t)$ ist bandbeschränkt ($S_{XX}(\omega) = 0$ für $\omega > W$) durch den Tiefpassfilter mit idealer Bandbreite $W = 2\pi B$
- Der Kanal ist verzerrungsfrei

Die Rauschleistung im Basisband: $\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{S_0}{N_0} = \frac{S_i}{\eta B} = \gamma$ dient zum Vergleich mit anderen Systemen.

3.2 Amplitudenmodulation Skript S. 204-8.4



Das Rauschsignal am Eingang des Demodulators ist wie folgt definiert (siehe auch 2.8.5, Schmalbandiger Zufallsprozess (S. 6)):

$$n_i(t) = n_c(t) \cos(\omega_c t) - n_s(t) \sin(\omega_c t)$$

3.2.1 DSB-SC, SSB Skript S. 205-8.4.A.1,2

Ein Mass für die Effizienz des Demodulators ist der sogenannte Detektor-Gewinn:

$$\alpha_{d_{DSB-SC}} = \frac{\text{SNR}_{out}}{\text{SNR}_{in}} = 2 \approx 3\text{dB} \quad \alpha_{d_{SSB}} = \frac{\text{SNR}_{out}}{\text{SNR}_{in}} = 1$$

Ein DSB-SC Demodulator verbessert also die SNR zwischen Ein- und Ausgang um Faktor 2, bei SSB bleibt die SNR gleich. Da SSB jedoch nur die halbe Bandbreite von DSB-SC besitzt, ist auch die Eingangs-Rauschleistung bei SSB halb so gross wie bei DSB-SC. Somit haben im Endeffekt SSB und DSB-SC **dieselbe Rausch-Performance**:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{A_c^2 S_x}{2\eta B} = \frac{\frac{1}{2} A_c^2 S_x}{\eta B} = \frac{S_i}{\eta B} = \gamma$$

3.2.2 Gewöhnliche AM Skript S. 206-8.4.A.3

Synchroner Detektor

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \left(\frac{S_i}{\eta B}\right) = \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \gamma \leq \frac{\gamma}{2} \quad \alpha_d = \frac{2\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \leq 1$$

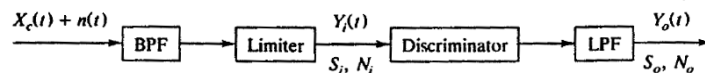
Envelope Detektor

Für $\text{SNR}_i \gg 1$ gelten dieselben Formeln wie beim **synchronen Detektor**.

Für $\text{SNR}_i \ll 1$ lohnt es sich nicht solche Berechnungen aufzustellen, da das demodulierte Signal **nicht mehr brauchbar** wird, weil das Rauschen so enorm dominiert.

Der **Übergang** zwischen **ausreichender** Übertragungsqualität und **unbrauchbarer** Übertragung beginnt ab $\text{SNR}_{i_{dB}} \approx 10\text{dB}$ und erfolgt **sehr schnell**.

3.3 Winkelmodulation Skript S. 208-8.5



Der Limiter **limitiert** das Signal - somit auch das Rauschen - in der **Amplitude**, sodass das **Rauschen** nur noch in der **Phase** **enthalten** ist. Die SNR wird daher **nur durch** die **Phase** **beeinflusst**.

Für die Winkelmodulation ist der Träger-Rauschabstand (CNR - Carrier-to-Noise-Ratio) wichtig: $\text{CNR} = \frac{A_c^2}{2\eta B_T} = \left(\frac{S}{N}\right)_i$.

Nur wenn das **Signal dominant** ist ($\text{CNR} \gg 1$), können die unten aufgeführten Formeln angewendet werden.

Im Falle von ($\text{CNR} \ll 1$) tritt ein ähnlicher Effekt auf wie bei AM ($\text{SNR} \ll 1$), sodass das demodulierte Signal nicht mehr brauchbar wird.

3.3.1 SNR bei PM Skript S. 210-8.5.B

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{k_p^2 A_c^2 S_x}{2\eta B} = k_p^2 S_x \gamma$$

3.3.2 SNR bei FM Skript S. 210-8.5.C

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 3 \left(\frac{k_f^2 S_x}{W^2}\right) \left(\frac{A_c^2}{2\eta B}\right) = 3 \left(\frac{k_f^2 S_x}{W^2}\right) \gamma = 3 \left(\frac{\Delta\omega}{W}\right)^2 S_x \gamma = 3D^2 S_x \gamma$$

3.4 Zusammenfassende Tabelle (Freundlicherweise zur Verfügung gestellt von Herrn T. Kneubuehler)

	Baseband	DSB-SC	AM Coherent	AM Envelope	PM	FM
Nachrichtensignal						
Leistung S_X von $X(t)$		Zufallsprozess $X(t)$ mit $ X(t) \leq 1$ bzw. $ x_X(t) \leq 1$ für alle λ des Ergebnisraums S				
		$S_X = S_X(t) = E[X^2(t)] \leq 1$, (weil $ X(t) \leq 1$)				
Bandbreite von $X(t)$		B				
Eingangsnutzsignal $X_i(t)$	$X(t)$	$X(t)A_c \cos(\omega_c t)$	$A_c(1 + \mu X(t)) \cos(\omega_c t)$	$A_c \cos(\omega_c t + k_p X(t))$	$A_c \cos(\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau)$	
Leistung S_i von $X_i(t)$	S_X	$\frac{1}{2} A_c^2 S_X$	$\frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_X)$	$\frac{1}{2} A_c^2$	$\frac{1}{2} A_c^2$	
Bandbreite von $X_i(t)$	B	$2B$	$2B$	$2(D+1)B$	$2(D+1)B$	
Rauschleistung am Eingang	ηB	$2\eta B$	$2\eta B$	$2(D+1)\eta B$	$2(D+1)\eta B$	
SNR am Eingang $\left(\frac{S}{N}\right)_i$	$\frac{S_i}{\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2} A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_X)}{2\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2} A_c^2}{2(D+1)\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2} A_c^2}{2(D+1)\eta B}$	
Ausgangsnutzsignal $X_o(t)$	$X(t)$	$A_c X(t)$	$A_c \mu X(t)$	$k_p X(t)$	$k_f X(t)$	
Leistung S_o von $X_o(t)$	S_X	$A_c^2 S_X$	$A_c^2 \mu^2 S_X$	$k_p^2 S_X$	$k_f^2 S_X$	
Rauschleistung am Ausgang	ηB	$2\eta B$	$2\eta B$	$\frac{1}{A_c^2/2} \eta B$	$\frac{1}{3} \frac{(2\pi B)^2}{A_c^2/2} \eta B$	
SNR am Ausgang $\left(\frac{S}{N}\right)_o$	$\frac{S_i}{\eta B}$	$\frac{A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{A_c^2 \mu^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{k_p^2 A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{3D^2 A_c^2 S_X}{2\eta B}$	
$\left(\frac{S}{N}\right)_o$ ausgedrückt mit $\gamma = \frac{S_i}{\eta B}$	γ	γ	$\frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \gamma$	$k_p^2 S_X \gamma$	$3D^2 S_X \gamma$	

Wichtige Anmerkung

- Die Formeln der Tabelle gelten für dimensionslose Signale.
- Der Zufallsprozess liegt zudem in normierter Form vor, wie aus der Tabelle hervorgeht.
- Soll die SNR für konkrete physikalisch vorliegende Signale berechnet werden, müssen für die Amplituden und Leistungen am Eingang des Empfängers geeignete Skalierungsfaktoren verwendet werden.
- Handelt es sich beim Empfänger zudem um einen aktiven Schaltungsblock, ist das Signal (sowie der Rauschanteil) am Ausgang des Empfängers ebenfalls mit den Parametern des Empfängers zu skalieren.

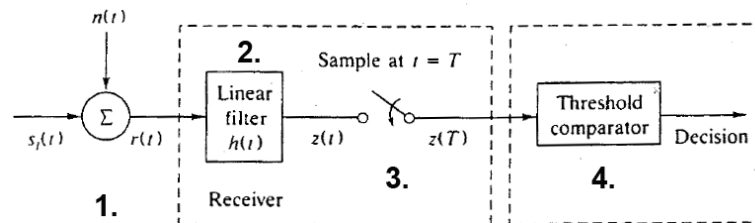
4 Optimaler Detektor - Rauschen in digitalen Kommunikationssys. S227-9

Rauschen verschlechtert die Performance, bei **digitalen** Systemen zeigt sich dies in der **Bitfehlerrate** P_e .

Diese Kapitel behandelt digitale Signale, welche über einen verzerrungsfreien Kanal gesendet werden und mit einem Additiven Weissen Gauss'schen Rauschen (AWGN) versetzt werden.

4.1 Binäres Übertragungssystem Skript S. 226-9.2

Ein **binäres Signal** $s_i(t)$ (siehe 4.4) wird über einen verzerrungsfreien Kanal gesendet.



$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 \leq t \leq T & \text{für Logisch 1} \\ s_2(t) & 0 \leq t \leq T & \text{für Logisch 0} \end{cases} \xrightarrow{\text{Rauschen}} r(t) = s_i(t) + n(t) \xrightarrow{\text{Filter}} z(t) = r(t) * h(t)$$

1. Am **Empfänger** $r(t)$ liegt das **Signal** $s(t)$ zusätzlich mit einem Additiven Weissen Gauss'schen (AWGN) **Rauschen** $n(t)$ vor.
2. Mit dem **linearen Filter** wird das Signal-Rausch-Verhältnis (**SNR**) **optimiert** (so **gross** wie möglich gemacht). Das Signal nach dem Filter sollte möglichst **wenig Rauschen** aber **viel Signalanteil** enthalten.
Hierbei können zwei Strategien angewendet werden, das Matched Filter (siehe 4.3.1) oder der Korrelator (siehe 4.3.2).
3. Anschliessend wird das Signal **zeitdiskretisiert**, also immer nach einer konstanten Zeit (Samplingzeit $t = T$) abgetastet. Dadurch resultiert: $z(T) = a_i(T) + n_o(T)$, wobei $a_i(T)$ dem Signalanteil und $n_o(T)$ dem Rauschanteil entspricht. Dies entspricht zwei Normalverteilungen, welche um die Mittelwerte (a_1, a_2) angeordnet sind.
4. Schlussendlich wird mit dem Schwellwertdetektor entschieden, welches Signal höchstwahrscheinlich gesendet wurde. Man unterscheidet die zwei verschiedenen Arten von Detektoren:

Hard-Decision: Das Resultat des Detektors ist eine endgültige Entscheidung (0 oder 1). Die Entscheidung wird mit Hilfe des Schwellwerts λ_0 gefällt.

Soft-Decision: Für 0 und 1 werden Wahrscheinlichkeiten bestimmt und verarbeitet.

4.2 Optimaler Detektor

4.2.1 Hypothesen und Fehlerwahrscheinlichkeit Skript S. 227-9.2,3.A

Für die Entscheidung existieren zwei **Hypothesen** ($H_1 \Rightarrow s_1$ wurde gesendet, $H_2 \Rightarrow s_2$ wurde gesendet):

Falls das gesampelte Signal ($z(T) > \lambda_0$) ist, wird H_1 , für ($z(T) < \lambda_0$) wird H_2 gewählt.

detektiert \ gesendet	Log. 1 = H_1	Log. 0 = H_2
Log. 1 = s_1 , mit $P(s_1)$	$P(H_1 s_1)$	$P(H_2 s_1)$
Log. 0 = s_2 , mit $P(s_2)$	$P(H_1 s_2)$	$P(H_2 s_2)$

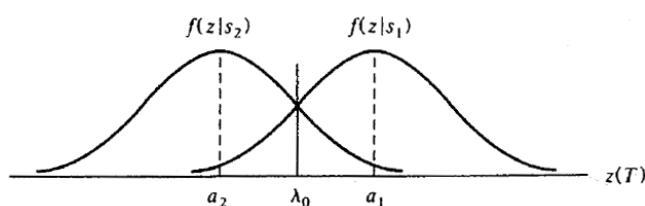
Die **Fehler-WSK** P_e ist somit wie folgt definiert:

$$P_e = P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2)$$

4.2.2 Maximum Likelihood Detektor Skript S. 227-9.3.B

Bei einem Maximum Likelihood Detektor ist der Schwellwert λ_0 genau so gewählt, dass die **Fehler-WSK** P_e **minimal** wird.

Konkret kann dies berechnet werden, indem man das **Minimum** von P_e bestimmt, also: $\frac{dP_e}{d\lambda_0} = 0$ setzt.



$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{\sigma_{n_0}^2}{a_1 - a_2} \ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

$$\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (\text{gilt für: } P(s_2) = P(s_1) = \frac{1}{2})$$

Somit beträgt die Fehler-WSK: $P_e = P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2) = P(s_1) \int_{-\infty}^{\lambda_0} f(z|s_1) dz + P(s_2) \int_{\lambda_0}^{\infty} f(z|s_2) dz$

Mit $(P(s_2) = P(s_1) = \frac{1}{2})$ und $(\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2})$ gilt für ein **NRZ-Signal**: $P_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_0}}\right)$

4.3 Lineares Filter

4.3.1 Matched Filter Skript S. 229-9.4.A

Ziel: Maximierung von $(a_1 - a_2)$ bei gleichzeitiger Minimierung von n_0 . Mit $E_{s(t)}$ als Energie des Eingangssignals $s(t)$.

$$\text{SNR wird maximal bei } H(\omega) = S^*(\omega) e^{-j\omega T} \quad \bullet \longrightarrow \quad h(t) = \begin{cases} s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{wobei } \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{max}} = \frac{2E_{s(t)}}{\eta}$$

4.3.2 Korrelator Skript S. 230-9.4.B

Für den Sample Zeitpunkt ($t = T$) sind die Eigenschaften eines **Matched-Filter** und diejenigen eines **Korrelators** **identisch**. Somit können beide für den selben Zweck eingesetzt werden.

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \xrightarrow{h(t)=h_{\text{MatchedFilter}}(t)} \int_0^t r(\tau) s[T-(t-\tau)] d\tau \quad \xrightarrow{t=T} \int_0^T r(\tau) s(\tau) d\tau$$

4.3.3 Unmatched RC-Filter Skript S. 238-Prob.9.9

Hierbei wird an Stelle eines Matched Filters ein RC-Tiefpassfilter verwendet.

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

4.4 Fehlerwahrscheinlichkeit verschiedener binären Übertragungen Skript S. 231-9.5

E_b bezeichnet die mittlere Signalenergie pro Bit.

Unipolar Baseband Signaling

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = \frac{A^2 T}{2} \quad s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Bipolar Baseband Signaling

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = A^2 T \quad s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = +A & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = -A & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Amplitude-Shift Keying

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{4\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = \frac{A^2 T}{4} \quad s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_c t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Phase-Shift Keying

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = \frac{A^2 T}{2} \quad s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_c t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos(\omega_c t + \pi) = -A \cos \omega_c t & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Frequency-Shift Keying

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = \frac{A^2 T}{2} \quad s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_1 t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos \omega_2 t & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

5 Informationstheorie und Quellencodierung S245-10

5.1 DMS - Discrete Memoryless Source

Eine Informationsquelle ist ein Objekt welches **Ereignisse**, welche zufällig aus einer WSK-Dichtefunktion ausgewählt werden, **generiert**.

Eine diskrete Quelle hat einen endlichen **Satz an Symbolen**, welcher auch **Alphabet** genannt wird. Die Elemente dieses Satzes nennt man **Symbole** oder **Zeichen**.

Wird ein Symbol unabhängig vom Vorherigen generiert, so handelt es sich um eine DMS (diskrete gedächtnisfreie Quelle). Eine solche wird mit folgenden Eigenschaften charakterisiert:

- Liste der Symbole - Alphabet
- Auftretenswahrscheinlichkeiten dieser Symbole - WSK-Dichtefunktion
- Symbolrate

5.1.1 Informationsgehalt, Binary Unit, Entropie, Informationsrate Skript S. 246-10.2-B.1,2,3

Mathematisch gesehen kann man sagen, je **unwahrscheinlicher** das **Eintreten** eines **spezifischen Ereignisses** ist, desto **größer** ist dessen **Informationsgehalt**.

$$I(x_i) = \log_{base} \frac{1}{P(x_i)} = -\log_{base} P(x_i) \quad R = rH(X)$$

$$H(X) = E[I(x_i)] = \sum_{i=1}^m P(x_i) I(x_i) = -\sum_{i=1}^m P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad 0 \leq H(x) \leq \log_2(m)$$

$$H(X|Y) = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log_2(P(x_i|y_j))$$

$$H(X, Y) = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log_2(P(x_i, y_j))$$

$$I(X; Y) = I(Y; X) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$$

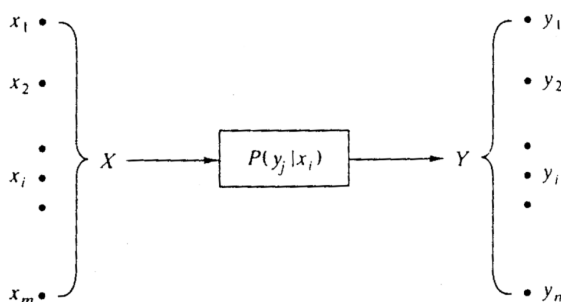
$I(x_i)$ Informationsgehalt, $[I(x_i)] = b$
 $base = 2$ siehe nachfolgender Text
 $P(x_i)$ Auftretens-WSK eines Symbols
 $H(x_i)$ Entropie, $[H(x_i)] = b/\text{Symbol}$
 R Informationsrate, $[R] = b/s$
 r Symbolrate/Bitrate, $[r] = \text{Symbole}/s$

Der Informationsgehalt kann in folgenden Masseneinheiten angegeben werden:

$$[I(X)] = \begin{cases} \text{bit (binary unit)} & \text{falls } base = 2. \\ \text{hartley oder decit} & \text{falls } base = 10. \\ \text{nat (natural unit)} & \text{falls } base = e \end{cases}$$

Standardmässig verwenden wir $base = 2$, also bit oder gekürzt **b**. Binary Unit ist ein Mass für den Informationsgehalt und sollte nicht mit dem Term "bit" (Binäres Zeichen) verwechselt werden.

5.2 DMC - Discrete Memoryless Channels Skript S. 247-10.3



Ein DMC (diskreter gedächtnisfreier Kanal) ist ein statistisches Modell mit Eingang X und Ausgang Y .

Er besitzt m **Eingänge** und n **Ausgänge**.

Alle Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(x_i)$ der einzelnen Eingangs-Symbole werden als gegeben betrachtet. Jeder Übertragungspfad ist durch die Kanal-Übertragungswahrscheinlichkeiten (channel transition probabilities) $P(y_j|x_i)$ definiert.

5.2.1 Darstellung in Matritzenform

Kanalmatrix

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) & \dots & P(y_n|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) & \dots & P(y_n|x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1|x_m) & P(y_2|x_m) & \dots & P(y_n|x_m) \end{bmatrix}$$

$$[P(Y)] = [P(y_1) \ P(y_2) \ \dots \ P(y_n)] = [P(X)] \cdot [P(Y|X)]$$

$$[P(X)] = [P(x_1) \ P(x_2) \ \dots \ P(x_m)]$$

$$\sum_{j=1}^n P(y_j|x_i) = 1 (\forall i) \quad \sum \text{jeder Zeile von } [P(Y|X)] = 1$$

Verbundmatrix

$$[P(Y, X)] = \begin{bmatrix} P(y_1, x_1) & P(y_2, x_1) & \dots & P(y_n, x_1) \\ P(y_1, x_2) & P(y_2, x_2) & \dots & P(y_n, x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1, x_m) & P(y_2, x_m) & \dots & P(y_n, x_m) \end{bmatrix}$$

$$[P(Y, X)] = \begin{bmatrix} P(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(x_m) \end{bmatrix} [P(Y|X)]$$

Elemente auf der Diagonale sollten den grössten Wert gegenüber anderen Elementen auf der Zeile besitzen.

$$\sum \text{aller Elemente von } [P(Y, X)] = 1$$

5.2.2 Spezielle Kanäle Skript S. 248-10.3.C

Verlustfreier (lossless) Kanal

Auf jeder Spalte der Kanalmatrix gibt es jeweils nur ein Element $\neq 0$.

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deterministischer (deterministic) Kanal

Auf jeder Zeile der Kanalmatrix gibt es jeweils nur ein Element $\neq 0$, welches 1 sein muss.

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

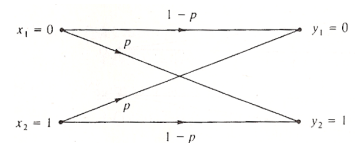
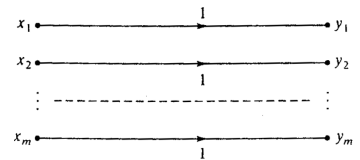
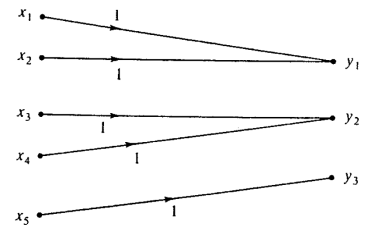
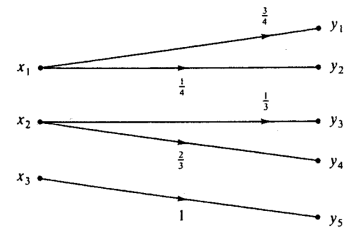
Rauschfreier (noiseless) Kanal

Die Kanalmatrix entspricht der Einheitsmatrix.

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Binärer Symmetrischer (binary symmetrical) Kanal

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1-p_e & p_e \\ p_e & 1-p_e \end{bmatrix}$$



5.3 Kanalkapazität Skript S. 251-10.5

$$C_s = \max_{\{P(x_i)\}} I(X;Y)$$

$$C = r_b C_s$$

$$r_s H(X) \leq C$$

C_s Kanalkapazität pro Symbol, $[C_s] = \text{b/Symbol}$

C Kanalkapazität pro Sekunde, $[C] = \text{b/s}$

r_s Symbolrate Quelle, r_b Bitrate Kanal, $[r] = \text{Symbol/s}$

Bedingung für eine (theoretisch) fehlerfreie Übertragung

5.3.1 Kanalkapazitäten spezieller Kanäle

Verlustfrei	$I(X;Y) = H(X)$	$C_s = \max_{\{P(x_i)\}} H(X) = \log_2 m$
Deterministisch	$I(X;Y) = H(Y)$	$C_s = \max_{\{P(x_i)\}} H(Y) = \log_2 n$
Rauschfrei	$I(X;Y) = H(Y) = H(X)$	$C_s = \log_2 n = \log_2 m$
Binär Symmetrisch	$I(X;Y) = H(Y) + p_e \log_2 p_e + (1-p_e) \log_2 (1-p_e)$	$C_s = 1 + p_e \log_2 p_e + (1-p_e) \log_2 (1-p_e)$
AWGN	$C = 2BC_s = B \log_2 (1 + (\frac{S}{N})_0)$	$C_s = \max I(X;Y) = \frac{1}{2} \log_2 (1 + (\frac{S}{N})_0)$

Wobei B der Bandbreite des Kanals entspricht.

5.4 Quellencodierung Skript S. 253-10.7

5.4.1 Code-Länge, -Effizienz, -Redundanz Skript S. 253-10.7.A/B

Gilt für eine DMS mit endlicher Entropie.

$$L = \sum_{i=1}^m P(x_i) n_i$$

$$\eta = \frac{H(x)}{L} = \frac{L_{min}}{L} \quad \gamma_c = 1 - \eta$$

$$\gamma_q = R(x) = H_{max} - H(x) = \log_2(m) - H(x)$$

L Durchschnittliche Codewort-Länge, $[L] = \text{Bits/Symbol}$
 L_{min} kleinstmögliches L
 $P(x_i)$ Auftretenswahrscheinlichkeit des Symbols
 n_i Symbollänge, $[n_i] = \text{Bits}$
 m Anzahl Symbole des Codes
 η Effizienz
 γ_c Redundanz des Codes; $\gamma_q = R(x)$ Redundanz der Quelle
 $H(X)$ Entropie, $[H(X)] = \text{b/Symbol}$

5.4.2 Klassifizierung von Codes Skript S. 254-10.7.C

Bezeichnung	Eigenschaften
Fixed Length Code feste Länge	Alle Codewörter haben die gleiche Länge. Bsp.: ASCII-Code.
Variable Length Code variable Länge	Codewörter haben unterschiedliche Länge. Bsp.: Shannon-Fano, Huffman und Morse Code.
Prefix-Free Code präfixfrei	Kein Codewort dient als Präfix (Vorsible) für ein anderes Codewort. Bsp.: Shannon-Fano oder Huffman Code, aber nicht Morse-Code.
Uniquely Decodeable Code eindeutig decodierbar	Kette von Codewörtern kann eindeutig wieder in die ursprünglichen Symbolfolgen zurückgewandelt werden. Präfixfreie Codes sind eindeutig decodierbar.
Instantaneous Code sofort decodierbar	Liefert nach Empfang jedes einzelnen Codeworts sofort ein eindeutiges Symbol. Jeder Instantaneous Code mit minimaler Codelänge ist optimaler Code.
Optimal Code	$\eta = 1 = 100\%$

5.4.3 Kraft'sche Ungleichung Skript S. 255-10.7.D

Wenn diese Ungleichung erfüllt ist, besagt sie, dass ein **eindeutig** und **sofort decodierbarer** Code gefunden werden kann. Gegeben ist eine Quelle mit **Alphabet** x_i der **Länge** m , wobei jedem **Symbol** x_i kein Codewort aber eine **Codelänge** n_i zugewiesen ist.

$$K = \sum_{i=1}^m 2^{-n_i} \leq 1$$

Die Kraft'sche Ungleichung hilft jedoch zum Auffinden dieses Codes nicht weiter.

5.5 Entropie Codierung Skript S. 255-10.8

Ziel: Durchschnittliche Codelänge an Entropie annähern \Rightarrow Wirkungsgrad steigern.

5.5.1 Shannon - Fanno Codierung Skript S. 255-10.8.A

x_i	$P(x_i)$	Step 1	Step 2	Step 3	Step 4	Code 5
x_1	0.30	0	0			00
x_2	0.25	0	1			01
x_3	0.20	1	0			10
x_4	0.12	1	1	0		110
x_5	0.08	1	1	1	0	1110
x_6	0.05	1	1	1	1	1111

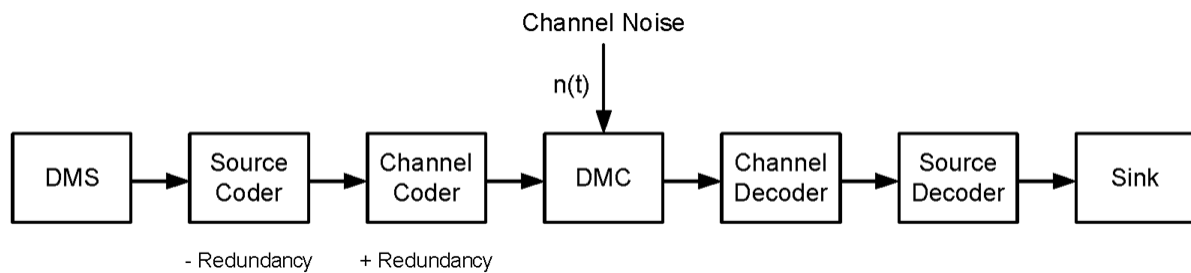
1. Symbole mit **absteigender** Wahrscheinlichkeit anordnen.
2. Trennung in **2 Teilmengen** mit möglichst gleicher WSK.
3. **Obere** Teilmenge Symbol **0**, **unterer** Teilmenge Symbol **1** zuordnen.
4. Weiterhin unterteilen gemäss obigen Schritten, bis keine Teilung mehr möglich ist.

5.5.2 Huffman Codierung Skript S. 256-10.8.B

x_i	$P(x_i)$	Code
x_1	0.30	00
x_2	0.25	01
x_3	0.20	11
x_4	0.12	101
x_5	0.08	1000
x_6	0.05	1001

1. Symbole mit **absteigender** Wahrscheinlichkeit anordnen.
2. **Unterste 2** Symbole als Gruppe zusammenfassen.
3. Beide Schritte wiederholen, bis nur noch zwei Gruppen vorliegen.
4. **Grössere WSK 0**, **kleinere WSK 1** zuordnen.
5. Reduktion rückgängig machen und vorheriger Schritt für alle Teilschritte wiederholen.

6 Kanalcodierung S282-11



Mit der Kanalcodierung können **Übertragungsfehler erkannt** und **beseitigt** werden. Dies geschieht durch beifügen geeigneter **Redundanz**.

Je nachdem wieviel Redundanz in dem Code beinhaltet ist, handelt es sich um einen *error-detecting code* oder sogar um einen *error-correcting code*.

6.1 Kanalkodierungstheorem - Shannon S282-11.2B

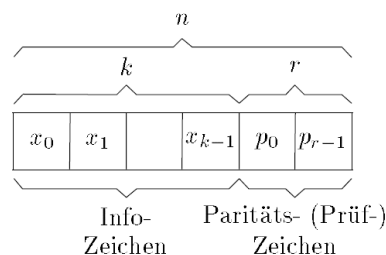
Gegeben seien DMS mit Entropie $H(X)$ und DMC mit Kanalkapazität C_s .

- Für $H(X) \leq C_s$ kann mit geeigneter Kanalcodierung die **Fehlerrate** der Übertragung **beliebig klein** gemacht werden.
- Für $H(X) > C_s$ ist eine **fehlerfreie** Übertragung **nicht möglich**.

Wenn man jedoch $n = \frac{H(x)}{C_s}$ Bits (binary digits) pro Symbol der Datenquelle bei geeigneter Codierung überträgt kann die Übertragung mit beliebig kleinen Fehlerrate erfolgen.

Bitfehler in der Übertragung verunmöglichen einen zuverlässigen Informationsaustausch nicht, sondern beschränken die nutzbare Übertragungsrate - je mehr Fehler desto mehr Übertragungsrate wird für die Fehlerkorrektur benötigt.

6.2 Systematische Codes



Ein Code gilt als systematisch, sobald alle **Datenbits** d_i an irgend einer Stelle des Codes c_i **unmodifiziert** vorkommen. Die nötigen Prüfzeichen werden meist am Ende der Datenbits angefügt und können wenn gewünscht ausgewertet werden. Anwendungsbeispiele:

- CRC (Cycle Redundancy Check) bei MP3, JPEG, ...
- Parity Check bei RS232

6.3 Blockcodes

Hierbei wird aus (relativ kleinen) Datenblöcken mit k **Eingangssymbolen** Codes mit je n **Ausgangssymbolen** (mit $n > k$) generiert. Wobei jeder dieser Blöcke separat Codiert wird.

Man spricht dann auch von einem (n, k) -Code. Beispielsweise handelt es sich bei einer RS232-Übertragung mit 8 Daten- und 1 Paritätsbit um einen $(9, 8)$ -Code.

In unserem Fall (binär) kann ein Symbol zwei Zustände aufweisen. Diese Zustände sind in der binären Menge ($K = \{0, 1\}$) definiert. Folgende mathematische Operatoren werden auf diese Menge angewendet:

- Modulo-2-Addition: " \oplus " = logisches XOR $\Rightarrow (0, 0) = 0 / (0, 1) = 1 / (1, 0) = 1 / (1, 1) = 0$
- Multiplikation: " \cdot " = logisches AND

6.4 Lineare Blockcodes S283-11.4

Ein Code gilt als linear, falls die Summe jeder beliebigen Codeworte (a, b) wiederum auch ein Codewort (c) ist.

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{und} \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad \Rightarrow \quad c = a \oplus b = (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n)$$

Wegen: $a \oplus a = b \oplus b = 0 = (0, 0, \dots, 0)$, gilt **zwingend**, dass zu jedem linearen Code der **Nullvektor** 0 gehört.

6.4.1 Hamming-Gewicht, (minimale) Hamming-Distanz S283-11.4.C,D

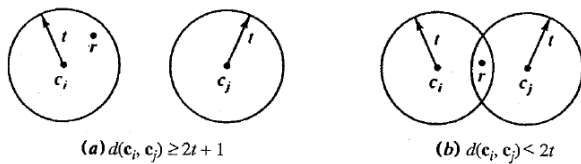
Hamming-Distanz:	$d(a, b) = w(a \oplus b)$	Anzahl unterschiedliche Stellen zweier Codeworte
Minimale Hamming-Distanz*:	$d_{min} = \min [w(c)]$	Kleinstes Hamming-Gewicht aller Codeworte
Hamming-Gewicht:	$w(c) = d(c, 0)$	Anzahl 1 eines Codeworts exkl. Nullvektor

*: Die Minimale Hamming-Distanz kann auch mittels der Paritätsprüfmatrix (siehe 6.4.4) berechnet werden.

6.4.2 Fehlererkennung- und Fehlerkorrektur-Möglichkeiten

Durch die minimale Hamming-Distanz ist die Anzahl korrigierbarer und detektierbarer Fehler gegeben.

Anzahl detektierbare Fehler	$t_d = d_{min} - 1$
Anzahl korrigierbare Fehler	$t_c = \frac{1}{2}(d_{min} - 1) = \frac{1}{2}t_d$



Neben eine geometrische Veranschaulichung: Je mehr unterschiedliche Stellen (Hamming-Distanz) zwei Codeworte haben, desto weiter entfernt liegen die beiden Kreise - Abb. (a). Liegt deren Abstand (Hamming-Distanz) jedoch unter dem doppelten Radius (< 2), so kann der Decoder nicht mehr eindeutig feststellen, zu welchem "Kreis" das empfangene Zeichen gehört - Abb. (b).

6.4.3 Generatormatrix G S285-11.4.F

Mittels der **Generatormatrix** G kann das jeweilige **Codewort** c aus dem **Datenwort** d generiert werden. Dimensionen: $[H \times B]$

$$c_{[1 \times n]} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] = d_{[1 \times k]} \cdot G_{[k \times n]} = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_k] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & p_{11} & p_{21} & \dots & p_{m1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{12} & p_{22} & \dots & p_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{1k} & p_{2k} & \dots & p_{mk} \end{bmatrix} \stackrel{*}{=} d \cdot [I_{[k \times k]} \quad P^T_{[k \times (n-k)]}]$$

Bei P^T handelt es sich um die transponierte Paritätsmatrix P , bei I_k um die $[k \times k]$ - Einheitsmatrix (I dentität).

*: Das letzte Gleichheitszeichen gilt nur, falls es sich um einen systematischen Code handelt. Ansonsten ist auch der linke Teil der Generatormatrix nicht genau mit der Einheitsmatrix "gefüllt".

6.4.4 Paritätsprüfmatrix H S285-11.4.G

Die Paritätsprüfmatrix H dient zur **Erkennung von Übertragungsfehlern**.

$$H_{[(n-k) \times n]} = [P \quad I_{n-k}] \Rightarrow H^T_{[n \times (n-k)]} = \begin{bmatrix} P^T \\ I_{n-k} \end{bmatrix} \quad G \cdot H^T = [I_k \quad P^T] \cdot \begin{bmatrix} P^T \\ I_{n-k} \end{bmatrix} = P^T \oplus P^T = 0 \quad c \cdot H^T = d \cdot G \cdot H^T = 0$$

Die Multiplikation der Generatormatrix mit der transportierten Paritätsprüfmatrix ergibt eine $[k \times (n-k)]$ -**Nullmatrix**. Somit ergibt die Multiplikation von einem **gültigen Codewort** und der transportierte Paritätsprüfmatrix immer ein $[1 \times (n-k)]$ -**Nullvektor**.

Die **minimale Hamming-Distanz** d_{min} vom Code C entspricht genau der minimalen nötigen Anzahl irgendwelcher Zeilen von H^T , sodass deren **Linearkombination Null** ergibt.

6.4.5 Auswertung des Fehlersyndroms s S286-11.4.H

Das **Fehlersyndrom** s erlaubt die Erkennung und eventuelle Korrektur von Übertragungsfehlern. Angenommen das empfangene Codewort c_r ist mit einem **Fehlermuster** e versehen.

$$c_r = c \oplus e \quad s_{[1 \times (n-k)]} = c_r \cdot H^T = c \cdot H^T \oplus e \cdot H^T = e \cdot H^T$$

Bei einem Einzelfehler entspricht das Fehlersyndrom s gerade einer **Zeile von** H^T . Die **Zeilennummer** i entspricht genau der **fehlerhaften Position** im Code.

$$e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Sind **alle** Zeilen von H^T **unterschiedlich** entspricht dies $d_{min} \geq 3$. Zugleich kann bei Einzelfehlern aus s das **Fehlerbit** e_i **eindeutig** bestimmt und das empfangene Codewort c_r **korrigiert** werden.

Hamming-Schranke

Ein (n, k) -Blockcode kann bis zu t Fehler korrigieren, falls n und k die nebenstehende Ungleichung erfüllen. Diese Bedingung ist notwendig aber **nicht hinreichend**. Massgebend sind die Linearität und die minimale Hamming-Distanz.

Gilt das Gleichheitszeichen, so handelt es sich um einen sog. **perfekten Code**.

Einzelfehler korrigierende perfekte Codes nennt man **Hamming-Codes**.

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

6.5 Zyklische Blockcodes S286-11.5

Coder und Decoder von gewissen **linearen Blockcodes** sind ab einem Umfang von $n \gg 1$ und $k \gg 1$ sehr **aufwendig** zu realisieren. **Abhilfe** schaffen die zyklischen Blockcodes - eine **Untergruppe** der linearen Blockcodes - welche es erlauben mit einem **kleinen Hardwareaufwand** Coder und Decoder zu realisieren.

$$\sigma(c) = c^{(1)} = (c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2}) \quad \sigma^2(c) = \sigma\{\sigma(c)\} = c^{(2)} = (c_{n-2}, c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-3}) \quad \sigma^n(c) = c$$

Wenn die **zyklische Verschiebung** $\sigma(c)$ eines Codeworts $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ wiederum ein **gültiges Codewort** c ergibt, so handelt es sich bei dem Code um einen linearen Blockcode.

6.5.1 Code-Polynom $c(x)$, Modulo-2-Polynom Arithmetik S287-11.5.B

Zur mathematischen Behandlung werden zyklische Codes als Polynome dargestellt, wobei die Koeffizienten c_i jeweils der binären Menge $K = \{0, 1\}$ angehören.

$$c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \iff c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} \quad \text{Bsp.: } c = (1, 0, 0, 1, 1, 0) \iff c(x) = 1 + x^3 + x^4$$

Addition, Subtraktion, Multiplikation:

Die Polynome können auf die **übliche** Weise **multipliziert** und **addiert** werden, **ausser** bei **gleichem Exponent** ergibt eine **Addition Null**. Im binären Fall sind die Modulo-2-**Addition** und **-Subtraktion identische** Operationen.

$$x^k + x^k = 0 \quad x^k - x^k = 0 \quad 0 + x^k = x^k \quad 0 - x^k = x^k$$

Division:

Die Modulo-2-Division stellt eine etwas **spezielle** Rechnung dar. Eine Division von $f(x)$ durch $h(x)$ ergibt den Quotienten $q(x)$ mit Rest $r(x)$.

$$\frac{f(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \iff f(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x)$$

Um $q(x)$ und $r(x)$ zu berechnen muss man die **übliche Polynomdivision** anwenden, **jedoch** bei Addition und Subtraktion zwischen den Koeffizienten Modulo-2-Addition anwenden.

Der **Modulo Operator** stellt eine vereinfachte Schreibweise dar, die jedoch teils auch **verwirrend** sein kann.

$$(1) \quad r(x) = f(x) \mod h(x) \quad (2) \quad a(x) = b(x) \mod h(x) \quad (3) \quad x^n = 1 \mod (1 + x^n)$$

Gleichung 1 bedeutet, dass $f(x)$ geteilt durch $h(x)$ den Rest $r(x)$ ergibt.

Gleichung 2 soll ausdrücken, dass beide Polynome $a(x), b(x)$ durch $h(x)$ dividiert den selben Rest ergeben.

Gleichung 3 will sagen, dass - für ein beliebiges n - x^n durch $(1 + x^n)$ geteilt, denn Rest 1 ergibt.

Somit ist das **Chaos** perfekt. Folgendes ist zu beachten um Klarheit zu schaffen:

Generell steht der Modulo Operator **immer** auf der **rechten Seite der Gleichung**. Das **Rest-Polynom** $r(x)$ ist immer dasjenige mit dem **kleinsten Grad** ($\text{PolyGrad}[r(x)] < \text{PolyGrad}[h(x)]$ und $\text{PolyGrad}[r(x)] < \text{PolyGrad}[f(x)]$).

Zyklische Verschiebung

Eine **i-fache zyklische Verschiebung** eines Polynoms erfolgt in drei Schritten:

$$c^{(i)}(x) = c(x)x^i \mod (1 + x^n)$$

1. Multiplikation des Codepolynoms $c(x)$ mit x^i
2. Division mit $(1 + x^n)$
3. Divisionsrest $r(x)$ entspricht gerade $c^{(i)}(x)$

6.5.2 Generator-Polynom $g(x)$ S287-11.5.C

Jeder $[n, k]$ zyklische Code kann mit Hilfe des Generator-Polynoms $g(x)$ (vom Grade $(n - k)$) durch Multiplikation mit dem Daten-Polynom $d = d_0 + d_1 + \dots + d_{k-1}x^{k-1}$ gebildet werden.

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots + g_{n-k}x^{n-k} \quad \text{mit } (g_{n-k} = g_0 = 1) \implies c(x) = d(x)g(x)$$

Das Generatorpolynom wird durch **Modulo-2-Faktorzerlegung** (sehr kompliziert) gewonnen:

$$(x^n + 1) = q(x) \cdot g(x) \quad \text{Bsp.: } (n = 7, k = 4) \implies (x^7 + 1) = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

Jedes Polynom der Faktorzerlegung vom Grad $(n - k)$ mit $g_{n-k} = g_0 = 1$ kann als Generatorpolynom verwendet werden. Mittels (**Matlab**: `cyclpoly(n,k,'all')`) können alle möglichen Generatorpolynome erzeugt werden.

6.5.3 Syndrom-Polynom $s(x)$ S288-11.5.E

Das Fehlersyndrom $s(x)$ (vom Grad $(n - k)$) dient zur **Ermittlung von Übertragungsfehlern**. Enthält das empfangene Codewort $c_r(x)$ ein **Fehlermuster** $e(x)$, so entspricht der Rest der Division (Decodierung) dem sog. Fehlersyndrom $s(x)$.

$$c_r(x) = c(x) + e(x) \quad d(x) = \frac{c(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{c_r(x)}{g(x)} = d(x) + \frac{s(x)}{g(x)} \Rightarrow s(x) = e(x) \mod (g(x))$$

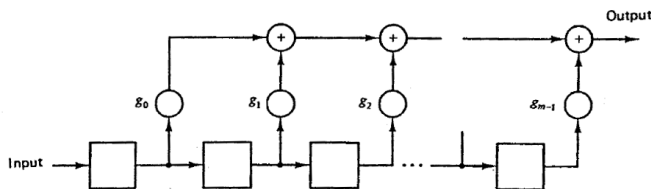
Die Fehlermuster $e(x)$ und die dazugehörigen Fehlersyndrome $s(x)$ werden in einer **Tabelle** erfasst, sodass bei einem Syndrom gerade auf das entsprechende Fehlermuster geschlossen, und dieses korrigiert werden kann.

Ist der **empfangene Code korrekt**, so ist das Fehlersyndrom $s(x) = 0$.

Für einen zyklischen Code mit minimaler Hamming-Distanz d_{min} hat jedes Fehlermuster mit Hamming-Gewicht $< \frac{1}{2}d_{min}$ ein ganz **charakteristisches Syndrom**, welches nur vom Fehler abhängig ist.

Fehler $e(x)$	Fehlersyndrom $s(x) = e(x) \mod g(x)$
1	$1 \mod g(x)$
x	$x \mod g(x)$
x^2	$x^2 \mod g(x)$
\vdots	\vdots
$1 + x$	$1 + x \mod g(x)$
$1 + x^2$	$1 + x^2 \mod g(x)$
\vdots	\vdots

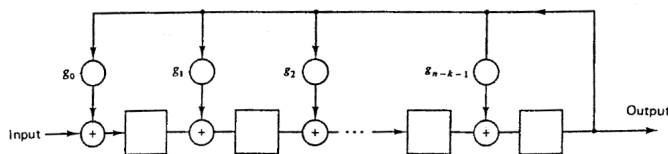
6.5.4 Codierung - Multiplikation S289-11.5.F



Zur Codierung der Datenworte dient ein m -faches ($m = n - k$) **Schieberegister**.

Das Datenwort muss mit **Zero-Padding** (konstante Länge, d.h. vorne mit 0 aufgefüllt) vorhanden sein. Zudem gilt in der nebenstehenden Form "**LSB first**" (d_0). Ist "**MSB first**" gewünscht, so muss lediglich die Reihenfolge von g_i getauscht werden.

6.5.5 Decodierung - Division S289-11.5.F



Die Decodierung der Codeworte erfolgt durch ein $(n-k-1)$ -faches **Feedback-Schieberegister**.

Nach n -Taktzyklen entspricht der Ausgang dem Datenwort d und der Inhalt des Schieberegisters dem Fehlersyndrom (Rest der Division).

Das Codewort muss in der nebenstehenden Form mit "**MSB first**" vorliegen.

6.5.6 Realisierung eines systematischen Codes

Ein zyklischer Blockcode kann immer in eine systematische Form gebracht werden, ohne dass die Hamming-Distanz verändert wird oder die zyklische Eigenschaft verloren geht.

6.6 Faltungscode S290-11.6

Nicht prüfungsrelevant!

Hierbei werden ganze Daten Streams codiert. Der Code hängt hier nicht nur vom aktuellen Datenblock ab, denn der Codierer bezieht auch noch einige vorgängige Blöcke in die Codierung mit ein.

7 Übungsverzeichnis

7.1 Wahrscheinlichkeitsrechnen und Zufallsvariablen

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
Allgemein	1.1, 1.2	6.5, 6.7	
Satz von Bayes	1.3		
Binäres Kommunikationssystem	1.4	6.14	
MAP (maximale a posteriori) Entscheidungstheorie	1.5	6.15	
Zufallsvariable	2.1	6.17	
Bitfehlerwahrscheinlichkeit binäre Datenübertragung	2.2	6.20, 6.41	
Gleichverteilung	2.3	6.23	
Exponentielle Verteilung	2.4	6.25	
Schütze - 2 dimensionale WSK-Verteilung	2.5		

7.2 Zufallsprozesse

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
Autokorrelation	4.1, 4.5		2
Leistungsdichtespektrum	4.1, 4.2, 4.3, 4.5	7.10, 7.12	3
Stationarität	3.1, 3.2, 3.3	7.1, 7.2, 7.4	
Erdodizität	3.4	7.6	
Farbige Rauschsignale			3-2.4
Zufallsprozess und LTI-System	4.4	7.17	

7.3 Rauschen in analogen Kommunikationssystemen

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
Basisband	5.1	8.1	4-3.1
Equalizer	5.2	8.2	
AM (DSB-SC, DSB-SSB)	5.3, 5.6, 5.4	8.3, 8.13, 8.8	
AM (ordinary AM)	5.6, 5.4	8.13, 8.8	4-3.2
FM, PM	5.5, 5.6	8.10, 8.13	4-3.3

7.4 Optimaler Detektor - Rauschen in digitalen Kommunikationssystemen

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
Entscheidungsschwelle λ	6.1, 6.2	9.2, 9.3, 9.4	
Bitfehlerwahrscheinlichkeit	6.3	9.5, 9.6	
Matched Filter, Korrelator	6.4	9.8	5
Unmatched Filter	6.5	9.9	

7.5 Informationstheorie und Quellencodierung

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
Allgemein			6
Binärer asymmetrischer Kanal	7.1	10.7	
Binärer symmetrischer Kanal	7.2	10.16	
AWGN-Kanal	7.3	10.24	
Shannon Fano Codierung	7.4, 7.5, 7.6	10.32, 10.33, 10.34	
Huffman Codierung	7.5, 7.6	10.33, 10.34	

7.6 Kanalcodierung

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
Mehrfachübertragung	8.1	11.3	
Blockcodes	8.2	11.13	7-2
Zyklische Codes			7-3

7.7 Sonstiges

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
PLL - Phase Locked Loop			1
DTMF - Dual Tone Multiple Frequency			5