SigSys 1

Braun & Co, Rast & Co., Gwerder, Körner, Badertscher, Bruhin, Ehrler, Leuenberger

18. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

$\boldsymbol{F(s)}$,	**Konvergenzbereich**	$\boldsymbol{f(t)}$, wobei $\boldsymbol{f(t)=0}$ für $t<0$ mit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}$.
$1,$	$\sigma\in\mathbb{R}$	$\delta(t)$
$\frac{1}{s},$	$\sigma>0$	$1\ (\equiv u(t))$
$\frac{1}{s+\alpha},$	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{s^2},$	$\sigma>0$	t
$\frac{1}{s(s+\alpha)},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},0\}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{\alpha e^{-\alpha t}-\beta e^{-\beta t}}{\alpha-\beta}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2},$	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2},$	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$e^{-\alpha t}(1-\alpha t)$
$\frac{1}{s^2-\alpha^2},$	$\sigma>\lvert\Re\{\alpha\}\rvert$	$\frac{\sinh(\alpha t)}{\alpha}$
$\frac{s}{s^2-\alpha^2},$	$\sigma>\lvert\Re\{\alpha\}\rvert$	$\cosh(\alpha t)$
$\frac{1}{s^2+\alpha^2},$	$\sigma>\lvert\Im\{\alpha\}\rvert$	$\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}$
$\frac{s}{s^2+\alpha^2},$	$\sigma>\lvert\Im\{\alpha\}\rvert$	$\cos(\alpha t)$
$\frac{1}{(s+\beta)^2+\alpha^2},$	$\sigma>\lvert\Im\{\alpha\}\rvert-\Re\{\beta\}$	$\frac{e^{-\beta t}\sin(\alpha t)}{\alpha}$
$\frac{s}{(s+\beta)^2+\alpha^2},$	$\sigma>\lvert\Im\{\alpha\}\rvert-\Re\{\beta\}$	$\frac{e^{-\beta t}(\alpha\cos(\alpha t)-\beta\sin(\alpha t))}{\alpha}$
$\frac{1}{s^3},$	$\sigma>0$	$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},0\}$	$\frac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^2}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\},0\}$	$\frac{(\alpha-\beta)+\beta e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},0\}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}-\alpha te^{-\alpha t}}{\alpha^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\},\Re\{\gamma\}\}$	$\frac{(\gamma-\beta)e^{-\alpha t}+(\alpha-\gamma)e^{-\beta t}+(\beta-\alpha)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\},\Re\{\gamma\}\}$	$\frac{\alpha(\beta-\gamma)e^{-\alpha t}+\beta(\gamma-\alpha)e^{-\beta t}+\gamma(\alpha-\beta)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\},\Re\{\gamma\}\}$	$\frac{-\alpha^2(\beta-\gamma)e^{-\alpha t}-\beta^2(\gamma-\alpha)e^{-\beta t}-\gamma^2(\alpha-\beta)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)^2},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{e^{-\alpha t}-[1+(\beta-\alpha)t]e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)^2},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{-\alpha e^{-\alpha t}+[\alpha+t\beta(\beta-\alpha)]e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)(s+\beta)^2},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{\alpha^2e^{-\alpha t}+\beta(\beta-2\alpha-t\beta^2+\alpha\beta t)e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^3},$	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$\frac{t^2e^{-\alpha t}}{2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^3},$	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$\frac{(2-\alpha t)te^{-\alpha t}}{2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)^3},$	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$\frac{(2-4\alpha t+\alpha^2t^2)e^{-\alpha t}}{2}$
$\frac{1}{s[(s+\beta)^2+\alpha^2]},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\beta\}-\lvert\Im\{\alpha\}\rvert,0\}$	$\frac{\alpha-e^{-\beta t}[\alpha\cos(\alpha t)+\beta\sin(\alpha t)]}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}$
$\frac{1}{s(s^2+\alpha^2)},$	$\sigma>\lvert\Im\{\alpha\}\rvert$	$\frac{1-\cos(\alpha t)}{\alpha^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)},$	$\sigma>-\min\{-\lvert\Im\{\beta\}\rvert,\Re\{\alpha\}\}$	$\frac{\beta e^{-\alpha t}+\alpha\sin(\beta t)-\beta\cos(\beta t)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)},$	$\sigma>-\min\{-\lvert\Im\{\beta\}\rvert,\Re\{\alpha\}\}$	$\frac{-\alpha e^{-\alpha t}+\alpha\cos(\beta t)+\beta\sin(\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)},$	$\sigma>-\min\{-\lvert\Im\{\beta\}\rvert,\Re\{\alpha\}\}$	$\frac{\alpha^2e^{-\alpha t}-\alpha\beta\sin(\beta t)+\beta^2\cos(\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)[(s+\beta)^2+\gamma^2]},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}-\lvert\Im\{\gamma\}\rvert\}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}\cos(\gamma t)+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}e^{-\beta t}\sin(\gamma t)}{(\beta-\alpha)^2+\gamma^2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)[(s+\beta)^2+\gamma^2]},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}-\lvert\Im\{\gamma\}\rvert\}$	$\frac{-\alpha e^{-\alpha t}+\alpha e^{-\beta t}\cos(\gamma t)-\frac{\alpha\beta-\beta^2-\gamma^2}{\gamma}e^{-\beta t}\sin(\gamma t)}{(\beta-\alpha)^2+\gamma^2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)[(s+\beta)^2+\gamma^2]},$	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}-\lvert\Im\{\gamma\}\rvert\}$	$\frac{\alpha^2e^{-\alpha t}+[(\alpha-\beta)^2+\gamma^2-\alpha^2]e^{-\beta t}\cos(\gamma t)-\big(\alpha\gamma+\beta\big(\gamma-\frac{\beta(\alpha-\beta)}{\gamma}\big)\big)e^{-\beta t}\sin(\gamma t)}{(\beta-\alpha)^2+\gamma^2}$
$\frac{1}{s^4},$	$\sigma>0$	$\frac{t^3}{6}$

Tabelle 2.11: Laplace-Transformationspaare

2.B Tabelle von Laplace-Transformationspaaren

Die Transformationspaare sind mehrheitlich [6, 7, 21, 47, 69] entnommen. Es gilt: $0 < \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a,\ \nu \in \mathbb{C},\ s = \sigma + j\omega$ und somit $\Re\{s\} = \sigma$ und $\Im\{s\} = \omega$.

#	$\boldsymbol{f(t)}$, wobei $f(t) = 0$ für $t < 0$	$\boldsymbol{F(s)}$ **mit Konvergenzbereich**
1	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{df(0)}{dt} - \ldots - \frac{d^{n-1}f(0)}{d^{n-1}t}$
2	$\int\limits_0^t f(x)dx$	$\frac{F(s)}{s}$
3	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_0^\infty F(s)ds$
4	$f(t-\alpha)u(t-\alpha)$	$e^{-s\alpha}F(s)$
5	$f(t+\alpha)u(t+\alpha)$	$e^{+s\alpha}\left(F(s) - \int\limits_0^a e^{-st}f(t)dt\right)$
6	$f_1(t) * f_2(t) * f_3(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s) \cdot F_3(s)$
7	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}(F_1(s) * F_2(s))$
8	$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$	$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$
9	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$	$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$
10	$u(t)$	$\frac{1}{s}$ mit $\sigma > 0$
11	$\delta(t)$	1 mit $\sigma \in \mathbb{R}$
12	$\frac{d\delta(t)}{dt}$	s
13	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
14	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
15	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
16	$\frac{n!4^n t^{n-\frac{1}{2}}}{(2n)!\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{s^n\sqrt{s}}$
17	$J_\nu(at)$ mit $\Re\{\nu\} > -1$	$\frac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^\nu}{a^\nu\sqrt{s^2+a^2}}$ mit $\sigma > \lvert\Im\{a\}\rvert$
18	$I_\nu(at)$ mit $\Re\{\nu\} > -1$	$\frac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^\nu}{a^\nu\sqrt{s^2-a^2}}$ mit $\sigma > \lvert\Re\{a\}\rvert$
19	$\frac{\sin(\alpha t)}{t}$	$\underbrace{\arctan}_{\tan^{-1}}\left(\frac{\alpha}{s}\right)$ mit $\sigma > 0$

Tabelle 2.10: Laplace-Transformationspaare

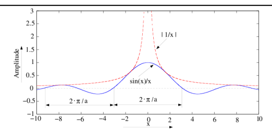
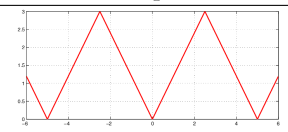
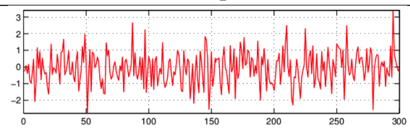
$J_\nu(at)$ ist die **Bessel-** oder **Zylinderfunktion $\boldsymbol{\nu}$. Ordnung 1. Gattung** und $I_\nu(at)$ ist die **modifizierte Bessel-Funktion $\boldsymbol{\nu}$. Ordnung** [7].
Die folgende Tabelle ist nach dem Grad des Nenners geordnet. Die Tabelle ist bis zum Nennergrad 3 vollständig und stammt von [6, 21].

1 Signalbeschreibung Skript S.1

1.1 Signalklassen Skript S.2

periodisch	$\Longleftrightarrow$	nicht-periodisch
kontinuierlich	$\Longleftrightarrow$	zeitdiskret
analog	$\Longleftrightarrow$	digital
reell	$\Longleftrightarrow$	komplex
eindimensional	$\Longleftrightarrow$	mehrdimensional
deterministisch	$\Longleftrightarrow$	stochastisch

1.1.1 Energie- und Leistungssignale Skript S.3

	Klasse 1: Energiesignale	Klasse 2: Leistungssignale	
		Klasse 2a: periodisch	Klasse 2b: aperiodisch
			
Energie-/Leistungs-dichtespektrum	$E(j\omega) = \lvert F(j\omega)\rvert^2$	$\Phi(j\omega) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{\lvert F(j\omega)\rvert^2}{T}$	
Normierte Signalleistung	$P_n = 0$	$\boxed{P_n = X^2}$ (quadr. Mittelwert) (Formeln rechts gelten auch)	$P_n = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\lvert f(t)\rvert^2 dt$ $P_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(j\omega)d\omega$
Normierte Signalenergie	$W_n = \lim\limits_{T\to\infty}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\lvert f(t)\rvert^2 dt$ $W_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(j\omega)d\omega$	$W_n = \infty$	

1.2 Mittelwerte Skript S.5

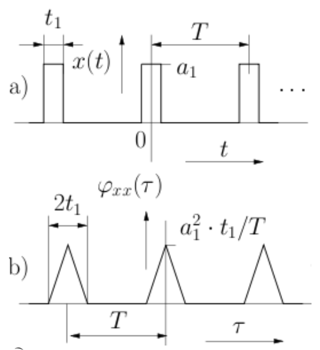
Arithmetischer Mittelwert, Gleichwert, Linearer MW	$X_0 = \overline{X} = X_m = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}x(t)dt$	Ist die Fläche unter der Zeitfunktion über eine Periode, nur Klasse 2a
	$X_0 = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}x(t)dt$	nur Klasse 2b
Quadratischer MW, Leistung	$X^2 = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt$	nur Klasse 2a
Mittelwert n. Ordnung	$X^n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}x^n(t)dt$	nur Klasse 2a
Effektivwert	$X = X_{\text{eff}} = \sqrt{X^2} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt}$	nur Klasse 2a
Gleichrichtwert	$X_{\lvert m\rvert} = \lvert\bar{X}\rvert = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\lvert x(t)\rvert dt$	Arithm. Mittelwert der Zweiweggleichrichterschaltung
Varianz, Standardabweichung	$\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}(x(t)-X_0)^2dt = X^2 - X_0^2$	Mittlerer Fehler im Quadrat

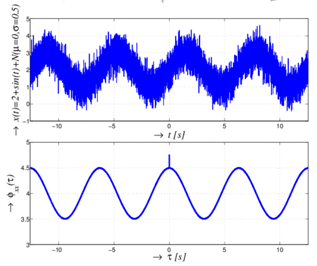
Hinweis:
Für **reelle Signale** gilt: $X^2 = \lvert X\rvert^2 = Var(\lvert x\rvert) + \lvert X_0\rvert^2$ Dies kann die Berechnung des quadratischen Mittelwertes eines zum linearen Mittelwert symmetrischen Signales erleichtern.

1.3 Autokorrelationsfunktion (AKF) Skript S.8

Die Autokorrelation ist ein Mass für die innere Kohärenz (Ähnlichkeit) eines Signals (Wie weit wird die Zukunft von der Vergangenheit geprägt?).

Energiesignale (Klasse 1)	**periodische Leistungssignale** (2a)	**stochastische Leistungssignale** (2b)
$\varphi_{xx}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt$	$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt$	$\varphi_{xx}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt$
$= \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x(t)dt$	$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x(t)dt$	$= \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x(t)dt$
$= \varphi_{xx}(-\tau)$	$= \varphi_{xx}(-\tau)$	$= \varphi_{xx}(-\tau)$





Eigenschaften

- $\varphi_{xx}(0) = X^2 = (X_0)^2 + \sigma^2$ (Hat immer Diracstoss bei $\tau = 0$)
- $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau \pm mT)$, d.h. die AKF ist periodisch mit der gleichen Periode T wie das Signal $x(t)$.
- $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau)$: d.h. die AKF ist eine **gerade Funktion**
- $\varphi_{xx}(0) \geq |\varphi_{xx}(\tau)|$
- $\varphi_{xx}(\tau) \geq (X_0)^2 - \sigma^2$

Für Leistungssignale gilt: $\Phi(j\omega)$: *Leistungsdichtespektrum*

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \varphi_{xx}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Für Energiesignale gilt: $E(j\omega)$: *Energiedichtespektrum*

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \varphi_{xx}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, E(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

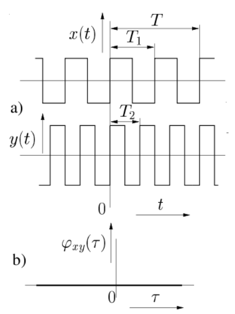
Beispiele

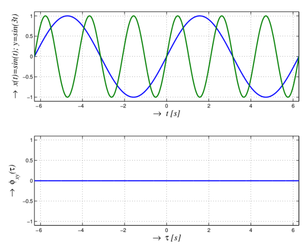
- $x(t) = a_k \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \varphi_{xx}(t) = \frac{a_k^2}{2} \cos(\omega t)$
- $x(t) = b_k \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \varphi_{xx}(t) = \frac{b_k^2}{2} \cos(\omega t)$

1.4 Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) Skript S.11

Die Kreuzkorrelationsfunktion von periodischen Leistungssignalen (Klasse 2a) ist ein Mass für die Ähnlichkeit von zwei verschiedenen Signalen . *"Wie ähnlich sind sich zwei Signale?"* *(Matlab: `xcorr`)*

Energiesignale (Klasse 1)	**periodische Leistungssignale** (2a)	**stochastische Leistungssignale** (2b)
$\varphi_{xy}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t-\tau)dt$	$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t-\tau)dt$	$\varphi_{xy}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t-\tau)dt$
$= \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y(t)dt$	$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y(t)dt$	$= \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y(t)dt$





Eigenschaften

- Bei Signalen mit verschiedenen Frequenzen ist φ_{xy} immer 0!
- Bei stochastischen Signalen ist φ_{xy} immer 0!

Für stochastische Leistungssignale (Klasse 2b) gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \varphi_{xy}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \Phi_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(t) e^{-j\omega t} dt$$

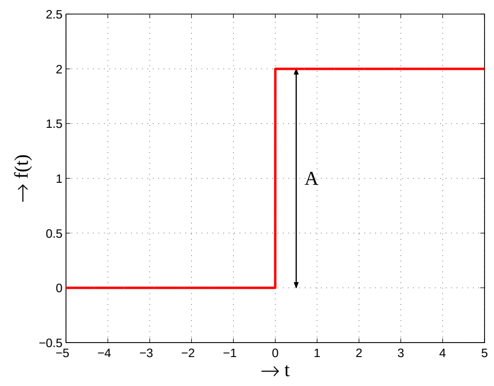
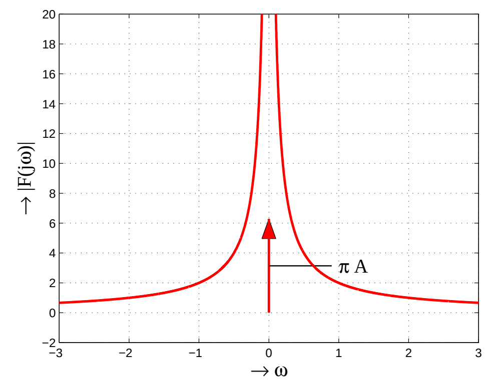
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
30	$A \cdot u(t)$ 	$A \cdot \left(\pi \cdot \delta(\omega) - j\frac{1}{\omega}\right)$ 
31	$\frac{1}{t}$	$j\pi sgn(\omega)$
32	t^{-n}	$-j\pi\frac{(-j\omega)^{n-1}}{(n-1)!}sgn(\omega)$
33	$\|t\|$	$-\frac{2}{\omega^2}$
34	$r(t) = t \cdot u(t)$	$j\pi\frac{d\delta(\omega)}{dt} - \frac{1}{\omega^2}$
35	$A \cdot sgn(t)$	$\frac{-2jA}{\omega}$
36	$t^{-n}sgn(t)$	$(-j)^{n+1}\frac{2\cdot n!}{\omega^{n+1}}$
37	$\sqrt{\|t\|}$	$-\sqrt{\frac{2\pi}{\|\omega\|}}$
38	$A \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0)$	$\frac{2\pi A}{t_0} \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$
39	$A \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0 - \frac{t_0}{2})$	$\frac{2\pi A}{t_0} \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$
40	$A \cdot \sum\limits_{n=0}^{N-1} \delta(t - n \cdot t_0 - \beta + \frac{(N-1)t_0}{2})$	$Ae^{j\beta\omega}\frac{\sin(N\omega t_o/2)}{\sin(\omega t_0/2)}$
41	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0)\,(A + \alpha\cos(\omega_0 t))$	$\frac{2\pi}{t_0} \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(A\delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0}) + \frac{\alpha}{2}\left(\delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0} + \omega_0) + \delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0} - \omega_0)\right)\right)$
42	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0)\,(A + \alpha\sin(\omega_0 t))$	$\frac{2\pi}{t_0} \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(A\delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0}) + \frac{j\alpha}{2}\left(\delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0} + \omega_0) - \delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0} - \omega_0)\right)\right)$
43	$A\delta(t)$	A
44	$A\delta(t - t_0)$	$Ae^{-jt_0\omega}$
45	$A\,(\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0))$	$2A\cos(\omega t_0)$
46	$e^{j\beta t}\,(A + \alpha\cos(\omega_0 t))$	$2\pi\left(A\delta(\omega-\beta) + \frac{\alpha}{2}(\delta(\omega-\beta+\omega_0) + \delta(\omega-\beta-\omega_0))\right)$
47	$e^{j\beta t}\,(A + \alpha\sin(\omega_0 t))$	$2\pi\left(A\delta(\omega-\beta) + \frac{j\alpha}{2}(\delta(\omega-\beta+\omega_0) - \delta(\omega-\beta-\omega_0))\right)$
48	$A\,(1 - e^{-at})\,u(t)$	$\pi A\delta(\omega) - A\left(\frac{a}{a^2+\omega^2} + \frac{ja^2}{\omega(a^2+\omega^2)}\right)$
49	$sgn(t) \cdot A \cdot e^{-a\|t\|}$	$-2jA\frac{\omega}{\omega^2+a^2}$
50	$A \cdot e^{j\omega_0 t - a\|t\|}$	$\frac{2A}{a} \cdot \frac{a^2}{(\omega-\omega_0)^2+a^2}$
51	$A \cdot \cos(\omega_0 t)e^{-a\|t\|}$	$\frac{A}{a} \cdot \frac{2a^2(a^2+\omega_0^2+\omega^2)}{(a^2+\omega_0^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}$
52	$A \cdot p_\alpha(t - \beta)$	$2Ae^{-j\beta\omega}\frac{\sin(\alpha\omega)}{\omega} = \frac{jA}{\omega}\left(e^{-j\omega(\beta+\alpha)} - e^{-j\omega(\beta-\alpha)}\right)$
53	$A \cdot e^{j\omega_0 t}p_\alpha(t)$	$2A\frac{\sin(\alpha(\omega_0-\omega))}{\omega_0-\omega}$
54	$A \cdot (p_\alpha(t - \beta) + p_\alpha(t + \beta))$	$2A\frac{\cos(\beta\omega)\sin(\alpha\omega)}{\omega}$

Tabelle 2.9: Fourier-Transformationspaare

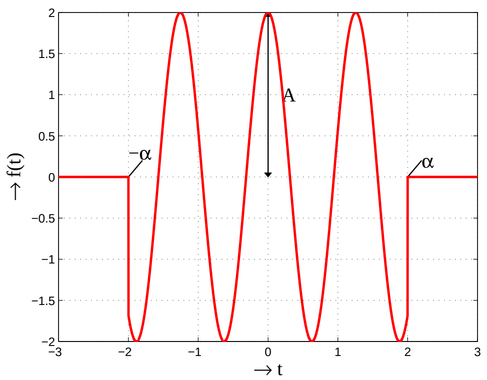
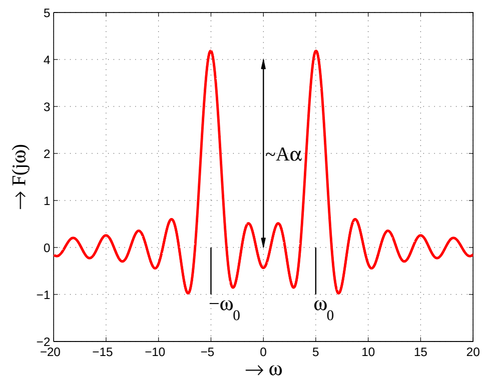
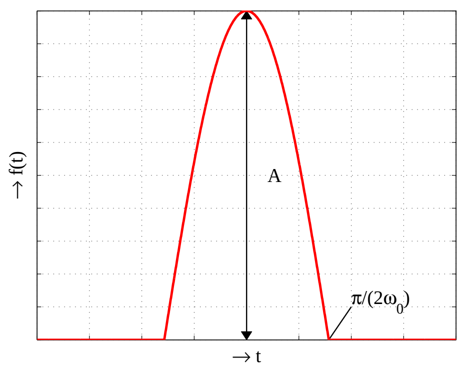
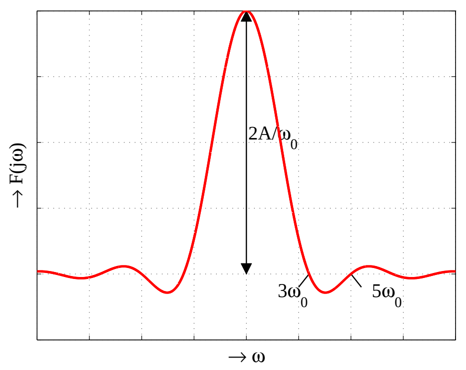
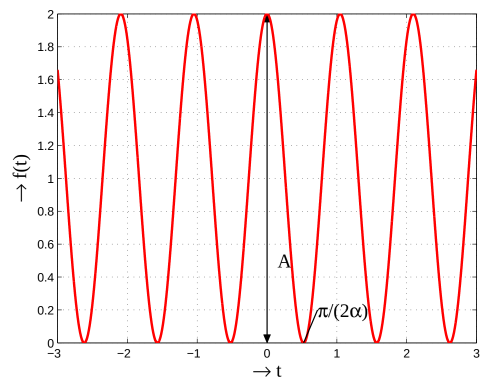
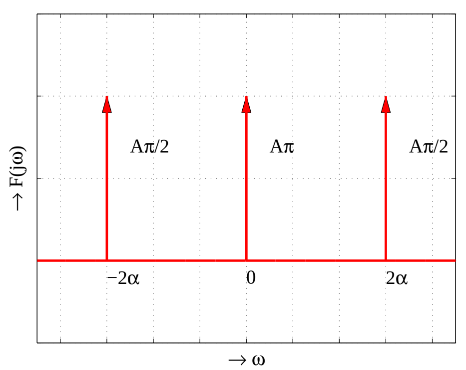
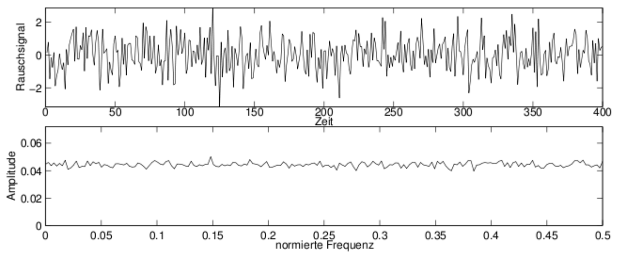
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
25	$A\cos(\omega_0 t)p_\alpha(t)$ 	$A\left(\frac{\sin(\alpha(\omega+\omega_0))}{\omega+\omega_0}+\frac{\sin(\alpha(\omega-\omega_0))}{\omega-\omega_0}\right)$ 
26	$A\cos(\omega_0 t)p_{\frac{\pi}{2\omega_0}}(t)$ 	$A\frac{2\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right)$ 
27	$A\left(\cos(\alpha t)\right)^2$ 	$\frac{A\pi}{2}[\delta(\omega+2\alpha)+2\delta(\omega)+\delta(\omega-2\alpha)]$ 
28	$\sin(\alpha t^2)$	$-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{\omega^2-\alpha\pi}{4\alpha}\right)$
29	$\cos(\alpha t^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\left(\frac{\omega^2-\alpha\pi}{4\alpha}\right)$

Tabelle 2.8: Fourier-Transformationspaare

1.5 Rauschen Skript S.25 (Matlab: randn)



Ist die Intensität der Rauschspannung über viele Frequenzdekaden gleich verteilt, so spricht man von weissem Rauschen.

Ideale Blindwiderstände verursachen kein Rauschen!

- SNR $=\frac{P_s}{P_r}=\frac{\text{Signalleistung}}{\text{Rauschleistung}}$ (rauschfrei: SNR $\rightarrow\infty$)
- Effektive Rauschspannung: $\boxed{U_r=\sqrt{4\cdot k\cdot T\cdot\Delta f\cdot R}}$
- Effektive Rauschleistung: $\boxed{P_r=k\cdot T\cdot\Delta f}$
- Bolzmann-Konstante: $k=1.380662\cdot 10^{-23}\frac{J}{K}$

1.6 Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) Skript S.27

Zur Qualitätsbeurteilung von Signalen wird das Verhältnis zwischen der Leistung des Nutzsignales P_s und der des Rauschsignales P_r gebildet. Dieses Verhältnis wird **Störabstand** oder **Rauschabstand** a_r genannt.

$$\boxed{a_r=10\cdot log_{10}\left(\frac{P_s}{P_r}\right)=20\cdot log_{10}\left(\frac{U_s}{U_r}\right)}\quad [a_r]=dB$$

Mindestwert für eine rauschfreie Übertragung:
Musik und Sprache → 30 dB
Bilder → 40 dB

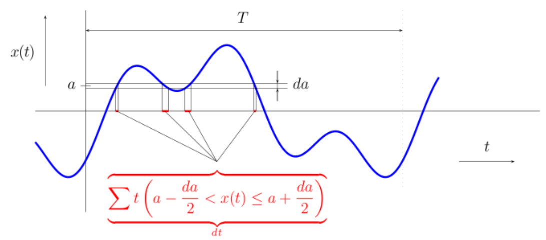
1.7 Rauschzahl F und Rauschmass a_F Skript S.27

Jeder Vierpol verkleinert den Rauschabstand des Ausgangssignales gegenüber dem Rauschabstand des Eingangssignales. Die Verschlechterung des Rauschleistungsabstandes wird durch die Rauschzahl F *(noise figure)* angegeben. Es ist das Verhältnis des Rauschabstandes am Eingang zum Rauschabstand am Ausgang eines Vierpoles.

Rauschzahl: $\boxed{F=\frac{\text{SNR}_{Eingang}}{\text{SNR}_{Ausgang}}=\frac{\frac{P_{sEingang}}{P_{rEingang}}}{\frac{P_{sAusgang}}{P_{rAusgang}}}=\frac{P_{sEingang}}{P_{rEingang}}\cdot\frac{P_{rAusgang}}{P_{sAusgang}}}$ Idealer Vierpol: $F=1$

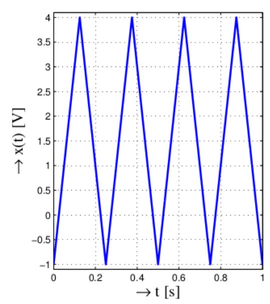
Rauschmass (logarithmisch): $\boxed{a_F=10\cdot log_{10}(F)=a_{rEingang}-a_{rAusgang}}$ $[a_F]=dB$

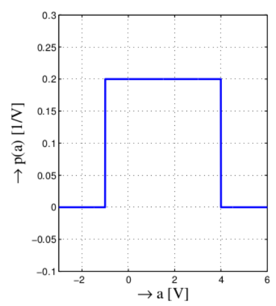
1.8 Amplitudenanalyse von Signalen Skript S.29



Die Amplitudendichte $p(a)$ ist ein Mass für u die relative Zeit (Zeit / Gesamtzeit = Wahrscheinlichkeit), während der sich das Signal in einem bestimmten Amplitudenintervall a +- da / 2 aufhält. "Zeit während sich Signal in bestimmtem Amplitudenintervall aufhält"

$$\boxed{p(a)=\lim_{da\to 0}\frac{\overbrace{\sum t\left(a-\frac{da}{2}<x(t)\le a+\frac{da}{2}\right)}^{dt}}{T\cdot da}=\frac{1}{T}\cdot\frac{dt}{da}}$$





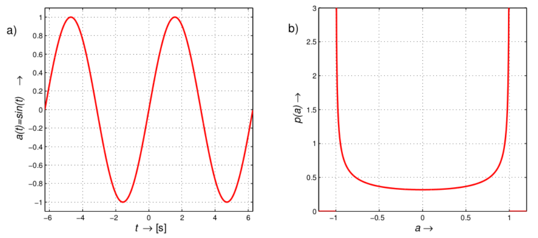
Eigenschaften

- Es gibt keine negativen Werte! $p(a)\ge 0\quad\forall a$
- $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}p(a)da=1}$
- $\boxed{p(a_1<a<a_2)=\int_{a_1}^{a_2}p(a)da}$

Linearer Mittelwert: $\boxed{X_0 = \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot p(a) da}$ **Mittelwert n. Ordnung:** $\boxed{X^n = \int_{-\infty}^{\infty} a^n \cdot p(a) da}$

Varianz: $\boxed{Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (a - X_0)^2 \cdot p(a) da}$

Beispiel:



$\boxed{f(t) = sin(t)}$

$t = arcsin(a)$

$\frac{dt}{da} = 2 \cdot \frac{d(arcsin(a))}{da} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

Der Faktor 2 kommt daher, dass die Sinusfunktion nicht eindeutig ist!

$\boxed{p(a) = \frac{1}{T} \cdot \frac{dt}{da} = \frac{2}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}}$

1.9 Zentraler Grenzwertsatz

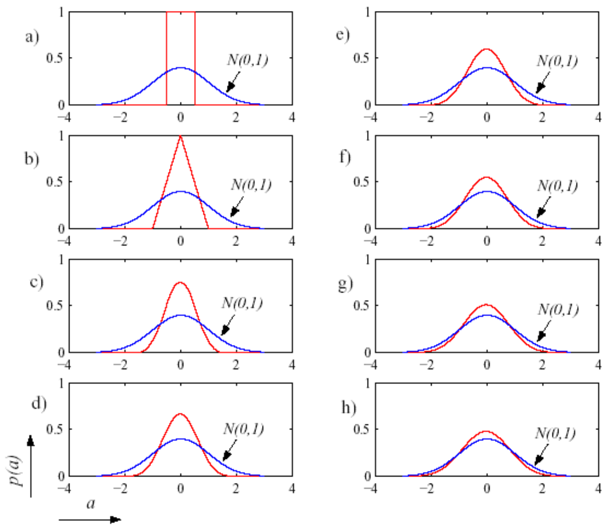
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind lauter identisch verteilte (nicht notwendig normalverteilt!) unabhängige Zufallsvariablen mit demselben Erwartungswert μ und derselben Varianz σ^2 und mit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ Dann hat die Summe

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

den Erwartungswert $n\mu$ und die Varianz $n\sigma^2$.
Die damit verbundene standardisierte $(E(S_n) = 0, var(S_n) = 1)$ Variable S_n ist somit wie folgt definiert:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) - n\mu \right] = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

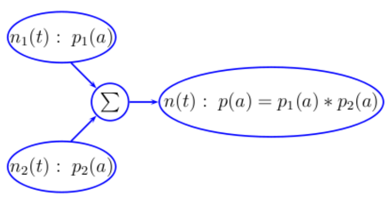
Für $\boldsymbol{n \to \infty}$ strebt die Verteilung von S_n gegen die Standardnormalverteilung.



1.10 Faltung Skript S.34

Convolution, "Addition zweier unabhängiger ergodischer Prozesse n_i" (Matlab: `conv`)

$$\boxed{p(a) = p_1(a) * p_2(a) = p_2(a) * p_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\xi) \cdot p_2(a - \xi) d\xi}$$



- Gesamtbreite der Faltung = Summe der Breiten aller Funktionen
- Startpunkt = Summe aller Startpunkte
- Endpunkt = Summe aller Endpunkte
- $f(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)G(s)$
- $F(s) * G(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{2\pi} f(t)g(t)$

Faltung zweier Normalverteilungen: Ergibt wieder eine Normalverteilung:

$$\boxed{N(\mu_1, \sigma_1) * N(\mu_2, \sigma_2) = N\left(\underbrace{\mu_1 + \mu_2}_{\mu} \underbrace{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}_{\sigma} \right)}$$

Zentraler Grenzwertsatz: Unendlich viele unabhängige Prozesse miteinander gefaltet ergibt (unabhängig von den einzelnen Verteilungen) eine **Normalverteilung**.

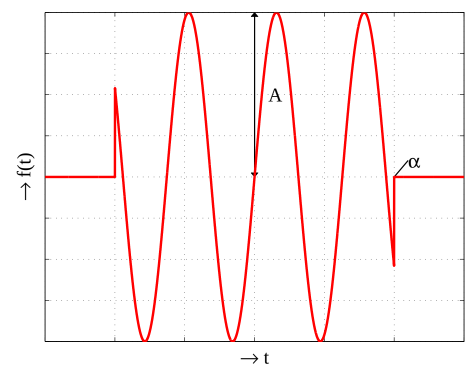
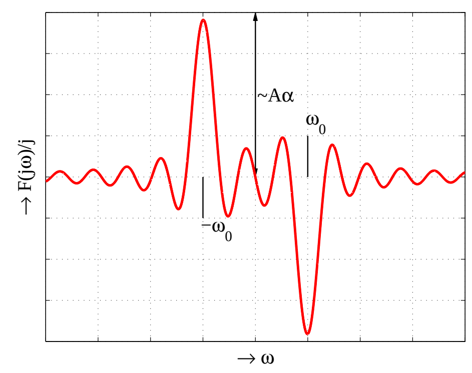
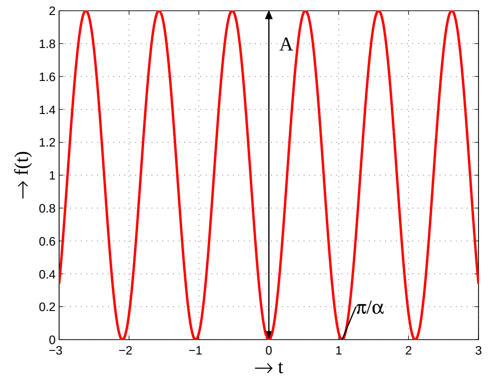
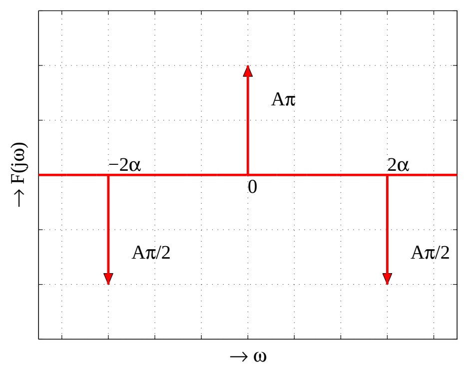
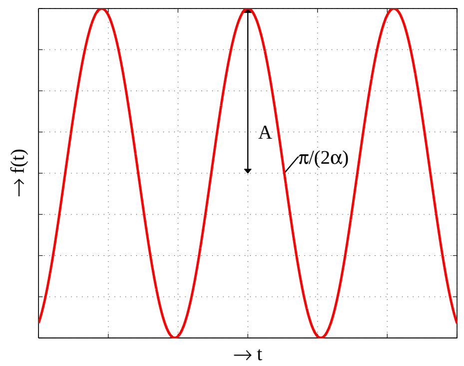
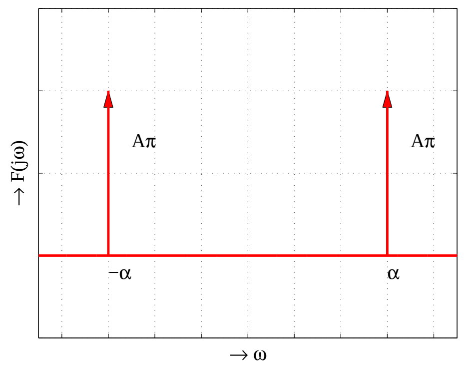
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
20	$A \sin(\omega_0 t) p_\alpha(t)$ 	$jA \left(\frac{\sin(\alpha(\omega+\omega_0))}{\omega+\omega_0} - \frac{\sin(\alpha(\omega-\omega_0))}{\omega-\omega_0} \right)$ 
21	$A (\sin(\alpha t))^2$ 	$\frac{A\pi}{2}[-\delta(\omega + 2\alpha) + 2\delta(\omega) - \delta(\omega - 2\alpha)]$ 
22	$A \cos(\alpha t)$ 	$A\pi[\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)]$ 
23	$A \cdot \sin(\omega_0 t) e^{-at} u(t)$	$\frac{A\omega_0}{a^2+\omega_0^2-\omega^2+j2a\omega} = \frac{A\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
24	$A \cdot \cos(\omega_0 t) e^{-at} u(t)$	$\frac{A(a+j\omega)}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

Tabelle 2.7: Fourier-Transformationspaare

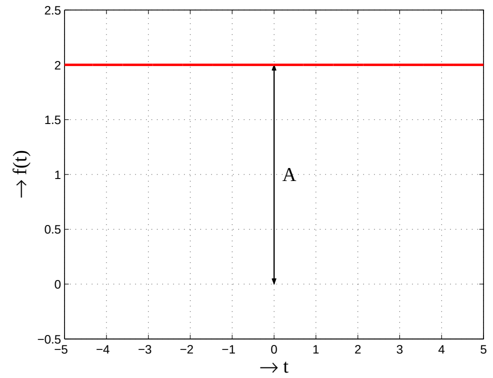
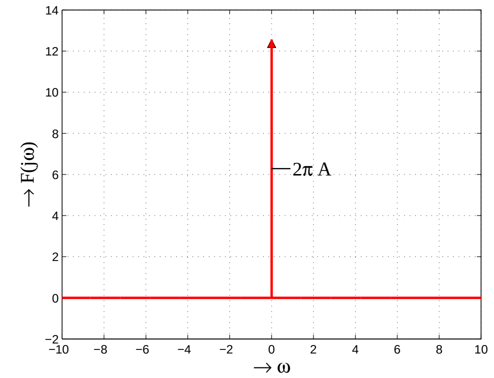
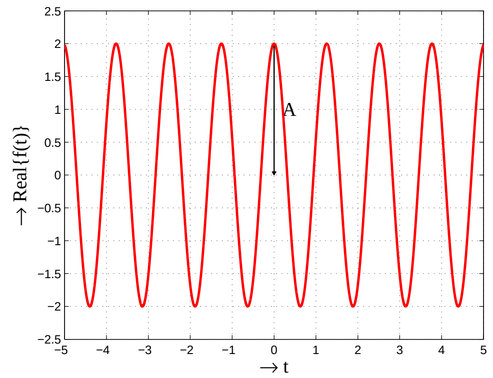
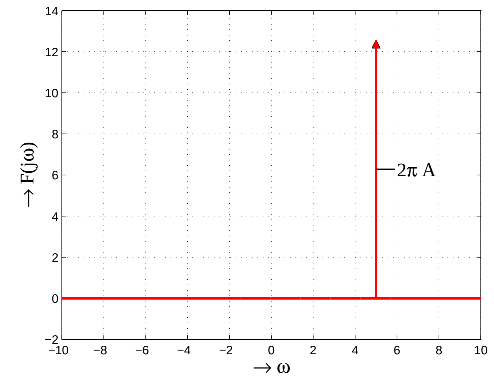
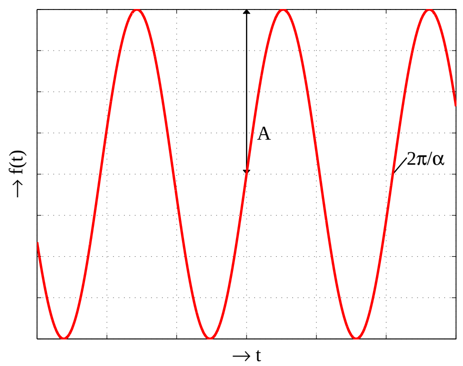
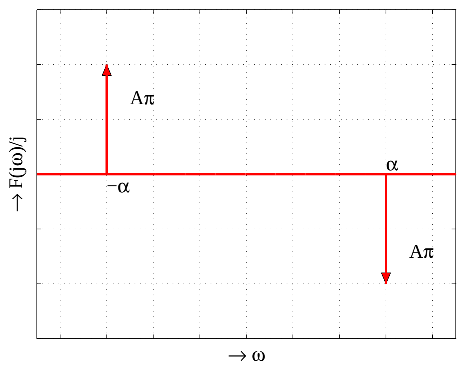
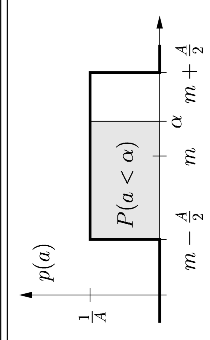
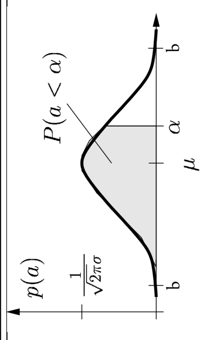
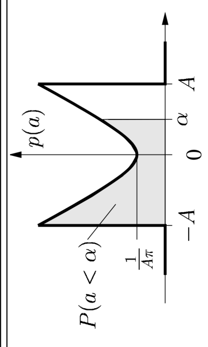
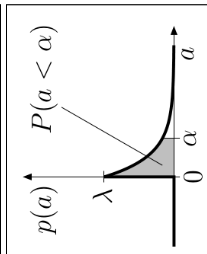
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
14	$\left(\frac{1}{t}\sin(\alpha t)\right)^2 = (sinc_\alpha(t))^2$	$\frac{\pi}{2}\cdot(2\alpha-\|\omega\|)\cdot p_{2\alpha}(\omega)=\pi\alpha\cdot\Lambda_{2\alpha}(\omega)$
15	$\frac{1}{\|t\|}\sin(\alpha t)$	$-j\cdot sgn(\omega)\ln\left\|\frac{\|\omega\|+\alpha}{\|\omega\|-\alpha}\right\|$
16	A 	$2\pi\cdot A\cdot\delta(\omega)$ 
17	$A\cdot e^{j\omega_0 t}$ 	$2\pi A\cdot\delta(\omega-\omega_0)$ 
18	$\delta(t-\beta)$	$e^{-j\beta\omega}$
19	$A\sin(\alpha t)$ 	$jA\pi[\delta(\omega+\alpha)-\delta(\omega-\alpha)]$ 

Tabelle 2.6: Fourier-Transformationspaare

1.11 Stochastische Signale und deren Verteilungen Skript S.38

Verteilung	gleichverteilt	gaussförmig	sinusförmig	exponentiell
				
Amplitudendichte $p(a) =$	$\begin{cases}\frac{1}{A} & \|a-m\|\le\frac{A}{2},\\ 0 & \|a-m\|>\frac{A}{2}.\end{cases}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-a^2}} & \|a\|\le A,\\ 0 & \|a\|>A.\end{cases}$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda a} & a\ge 0,\\ 0 & a<0.\end{cases}$
Wahrscheinlichkeit, dass die Amplitude a kleiner gleich α ist $P(a\le\alpha)=\int_{-\infty}^{\alpha}p(a)da=$	$\begin{cases}0 & \alpha<m-\frac{A}{2},\\ \frac{\alpha-(m-\frac{A}{2})}{A} & \|\alpha-m\|\le\frac{A}{2}\\ 1 & \alpha\ge m+\frac{A}{2}.\end{cases}$	$Q\left(\frac{\mu-\alpha}{\sigma}\right)$	$\begin{cases}0 & \alpha\le -A,\\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{A}\right)\right) & \|\alpha\|<A,\\ 1 & \alpha\ge A.\end{cases}$	$\begin{cases}0 & \alpha<0,\\ 1-e^{-\lambda\alpha} & \alpha\ge 0.\end{cases}$
linearer Mittelwert $X_0 =$	m	μ	0	$\frac{1}{\lambda}$
Varianz $\mathrm{Var}(x) = X^2 - X_0^2$	$\frac{A^2}{12}$	σ^2	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Leistung $X^2 = \mathrm{Var}(x) + X_0^2$ (quadratischer Mittelwert)	$m^2+\frac{A^2}{12}$	$\mu^2+\sigma^2$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{2}{\lambda^2}$

Anmerkung zur gaussförmigen Verteilung:
Im Intervall $\mu\pm3\sigma$ sind 99,73% aller Messwerte zu finden. In der Zeichnung ist diese Stelle mit **b** gekennzeichnet.

Allgemein: $\boxed{\mathrm{Var}(x) = X^2 - X_0^2}$

1.12 Zusammenstellung einiger wichtiger Funktionen Skript S.44

Signal / Funktion	Endliche Signalleistung $0 < P_n < \infty$, $(W_n = \infty)$ periodisch $(\omega_0 = 2\pi/T_0)$	Endliche Signalleistung $0 < P_n < \infty$, $(W_n = \infty)$ stochastisch (stationär)	Endliche Signalenergie $W_n < \infty$ abklingend, zeitbegrenzt
Autokorrelationsfunktion (AKF)	$\varphi(\tau) = \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)f(t+\tau)dt$	$\varphi(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt$	$\varphi(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt$
Fourier-Transformation der AKF	$P_n = \frac{1}{T_0}\int\limits_{T_0/2}^{T_0/2} \varphi(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau$	$\Phi(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$	$E(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$
Rücktransformation der AKF	$\varphi(\tau) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0\tau}$	$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$	$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$
Amplitudenspektrum	$c_n = \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$	–	–
Amplitudendichtespektrum	–	–	$F(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$
Leistungsspektrum	$P_n = \|c_n\|^2$	–	–
Leistungsdichtespektrum	–	$\Phi(j\omega) = E\left\{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\|\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega t}dt\right\|^2\right\}$	–
Energiedichtespektrum	–	–	$E(j\omega) = \|F(j\omega)\|^2$
Energie	–	–	$W = \varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)d\omega$
Leistung	$P = \varphi(0) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P_n$	$P = \varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)d\omega$	–
Fourier-Reihe	$f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$	–	–
Fourier-Integral	–	–	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

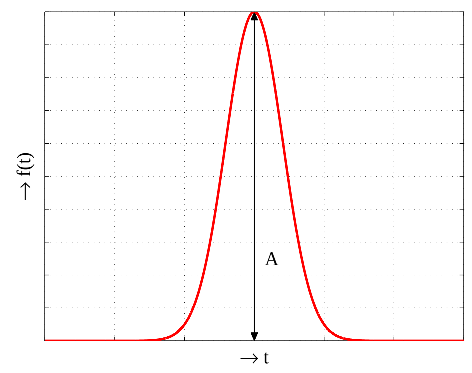
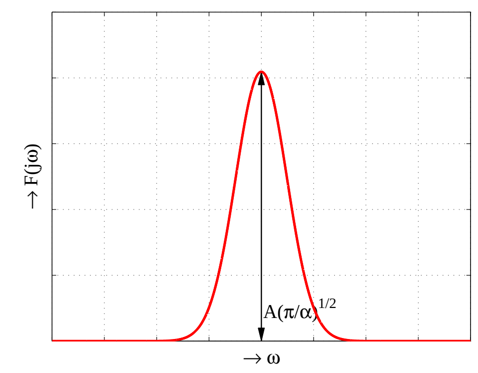
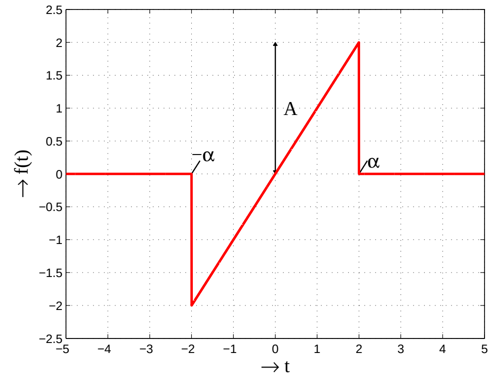
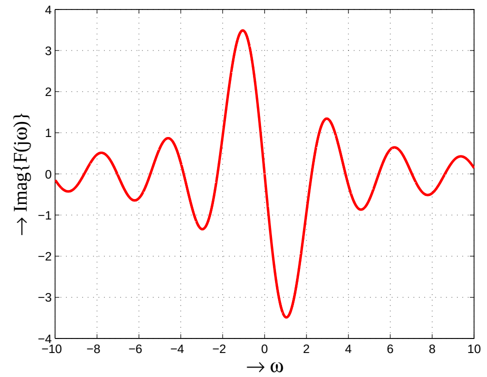
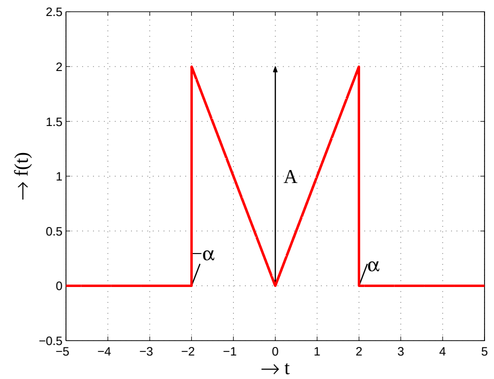
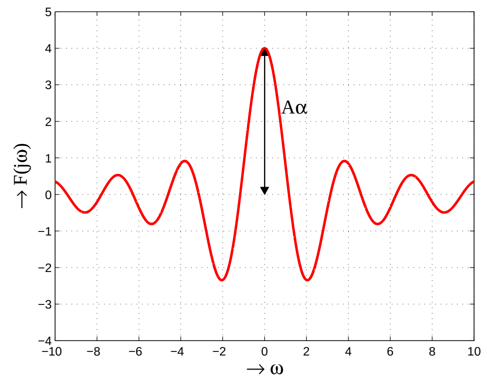
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
7	$Ae^{-\alpha t^2}$ 	$A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{-\omega^2}{4\alpha}}$ 
8	$e^{-\alpha t^2+\beta t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2-j2\alpha\beta\omega-\omega^2}{4\alpha}}$
9	$e^{\pm j\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\mp j\frac{\omega^2-\alpha\pi}{4\alpha}}$
10	$\frac{1}{t}\sin(\alpha t) = sinc_\alpha(t)$	$\pi \cdot p_\alpha(\omega)$
11	$sinc(\alpha t)$	$\frac{\pi}{\alpha} \cdot p_\alpha(\omega)$
12	$\frac{A\cdot t}{\alpha} \cdot p_\alpha(t)$ 	$j\frac{2A}{\omega}\left(\cos(\omega\alpha) - \frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega\alpha}\right)$ 
13	$\frac{A\cdot\|t\|}{\alpha} \cdot p_\alpha(t)$ 	$2A\alpha\left(\frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega\alpha} - 2\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega\alpha}{2}\right)}{\omega\alpha}\right)^2\right)$ 

Tabelle 2.5: Fourier-Transformationspaare

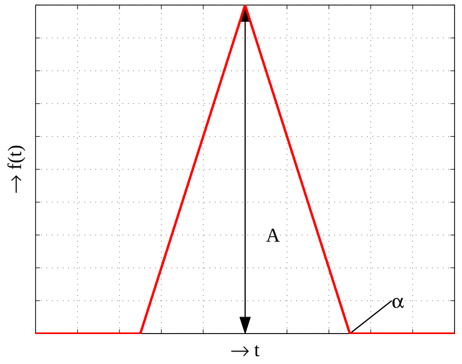
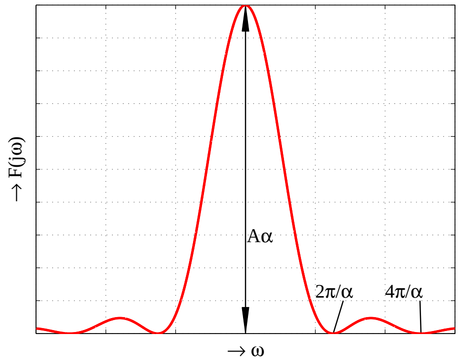
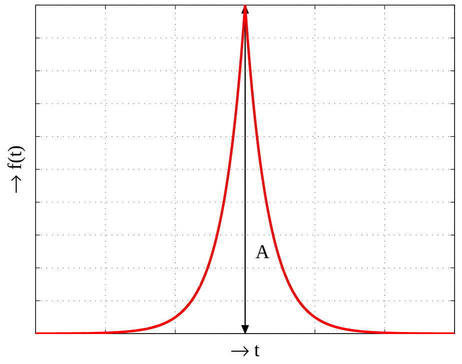
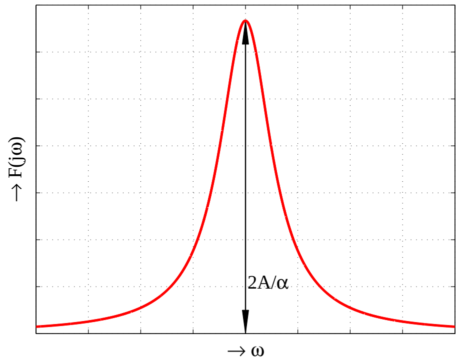
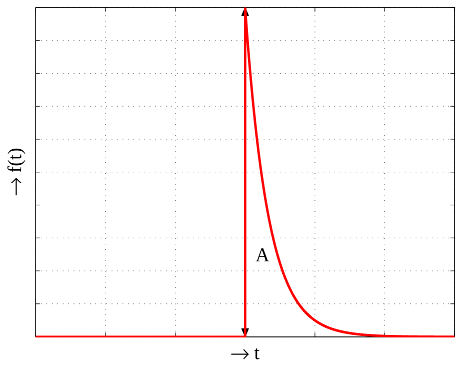
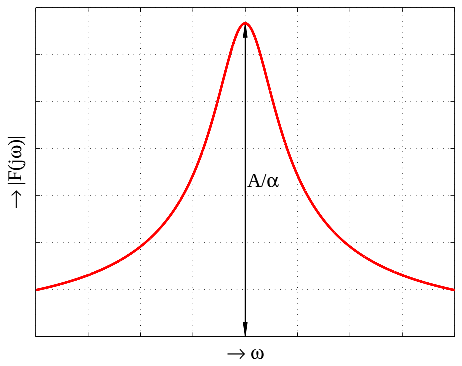
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
4	$A \cdot \Lambda_\alpha(t) = \begin{cases} A - \frac{A\lvert t\rvert}{\alpha} & \text{für } \lvert t\rvert < \alpha, \\ 0 & \text{für } \lvert t\rvert \geq 0. \end{cases}$ 	$A\alpha \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)}{\frac{\alpha\omega}{2}}\right)^2 = A\alpha \cdot \left(sinc\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)\right)^2$ 
5	$Ae^{-\alpha\lvert t\rvert}$ 	$\frac{2\alpha A}{\alpha^2+\omega^2}$ 
6	$Ae^{-\alpha t}u(t)$ 	$A\frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{A}{\alpha + j\omega}$ 

Tabelle 2.4: Fourier-Transformationspaare

2 Signalflussdiagramm Skript S.55

- Graphische Lösung linearer Gleichungen
- Graphische Darstellung von LTI-Systemen
- Änderung der Topologie ohne UTF zu ändern

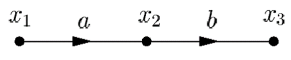
2.1 Glossar Skript S.56

Knoten:	Darstellung einer Grösse, eines Signals oder einer Variable
Zweig:	Funktionelle Abhängigkeit einer Grösse
Quelle:	Unabhängiger Knoten, es münden keine Zweige ein
Senke:	Knoten, ohne weggehende Zweige
Pfad:	Kontinuierliche Folge von Zweigen, die in die gleiche Richtung zeigen
Offener Pfade:	Ein Pfad, bei dem jeder beteiligte Knoten nur einmal durchquert wird
Vorwärtspfad:	Ein offener Pfad zwischen einer Quelle und einer Senke
Schleife (L):	Ein geschlossener Pfad, welcher zum Ausgangsknoten zurückkehrt, wobei jeder beteiligte Knoten nur einmal durchlaufen wird, ausgenommen der Ausgangsknoten
Eigenschleife:	Eine (Rückkopplungs)schleife, die aus einem Zweig und einem Knoten besteht
Zweigtransmittanz:	Die lineare Grösse, unabhängig von ihrer Dimension, die einen Knoten eines Zweiges zum anderen Knoten in Beziehung setzt.
Schleifentransmittanz:	Das Produkt der Zweigtransmittanzen in einer Schleife.

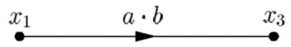
2.2 Reduktionsregel Skript S.61

2.2.1 Regel 1: Kettentransformation Skript S.61

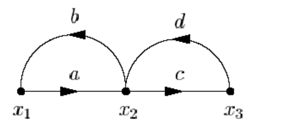
Die gesamte Übertragung einer Kaskade von Zweigen (d.h. einem Pfad) ist gleich dem Produkt der einzelnen Transmittanzen.



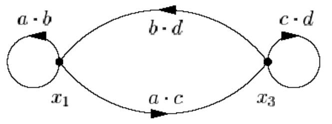
$x_2 = a \cdot x_1, \quad x_3 = b \cdot x_2$



$x_3 = a \cdot b \cdot x_1$



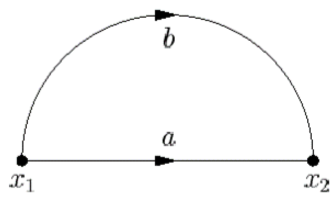
$x_1 = b \cdot x_2, \quad x_3 = c \cdot x_2$
$x_2 = a \cdot x_1 + d \cdot x_3$



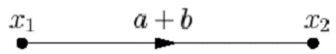
$x_1 = a \cdot b \cdot x_1 + b \cdot d \cdot x_3$
$x_3 = a \cdot c \cdot x_1 + c \cdot d \cdot x_3$

2.2.2 Regel 2: Paralleltransformation Skript S.61

Die gesamte Transmittanz paralleler Zweige ist gleich der Summe der einzelnen Zweigtransmittanzen.



$x_2 = a \cdot x_1 + b \cdot x_1$

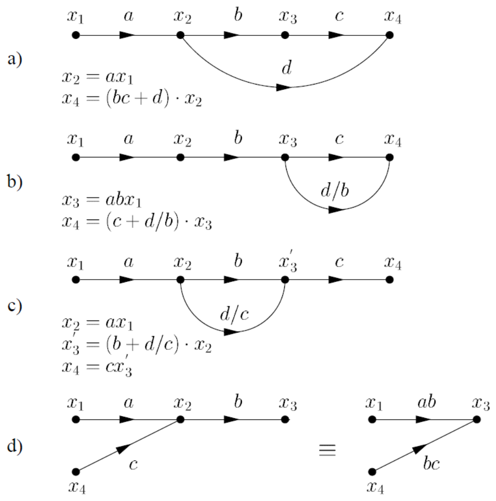


$x_2 = (a+b) \cdot x_1$

2.2.3 Regel 3: Entfernung eines Knotens Skript S.61

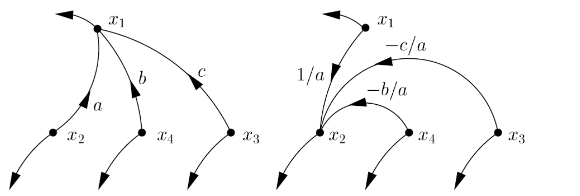
Der Anfangs- oder Endpunkt einer Transmittanz kann entfernt oder verschoben werden, solange die Transmittanz zwischen den interessierenden Knoten im System unverändert bleibt.

2.2.4 Regel 4: Transmittanzverschiebung Skript S.62



Wichtig ist, dass eine neue Variable x_3' eingeführt wird, wenn der Endpunkt eines inneren Zweiges verschoben wird. (siehe c)

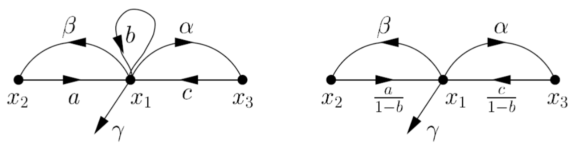
2.2.5 Regel 5: Pfadinversion Skript S.63



a) $x_1 = ax_2 + bx_4 + cx_3$ b) $x_2 = 1/a \cdot x_1 - b/a \cdot x_4 - c/a \cdot x_3$

Es gilt zu beachten, das die Inversion eines Pfaden (dessen Anfangspunkt nach Definition eine Quelle sein muss) den Effekt hat, dass die Quelle vom einen Ende des Pfades zum anderen Ende verschoben wird. Der Pfad von x_i nach x_j hat eine Transmittanz von L. Den zu invertierenden Pfad setzten wir $\frac{1}{L}$ und alle Pfade welche ursprünglich in x_i endeten, werden verschoben, dass sie neu in x_j enden und ihre Transmittanzen werden mit $-\frac{1}{L}$ multipliziert.

2.2.6 Regel 6: Entfernen einer Eigenschleife Skript S.64

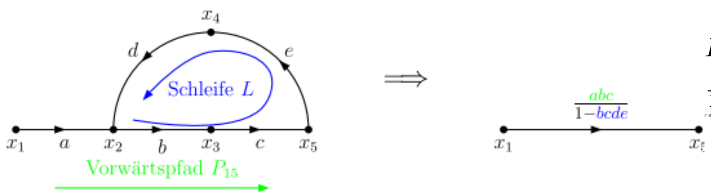


a) $x_1 = bx_1 + ax_2 + cx_3$ b) $x_1 = \frac{a}{1-b} \cdot x_2 + \frac{c}{1-b} \cdot x_3$

Die Eigenschleife hat die Transmittanz L. Sie wird entfernt indem man bei allen anderen Zweigen welche **in den Knoten münden**, durch $(1 - L)$ **dividiert**.

2.2.7 Regel 7: Schleifenreduktion Skript S.65

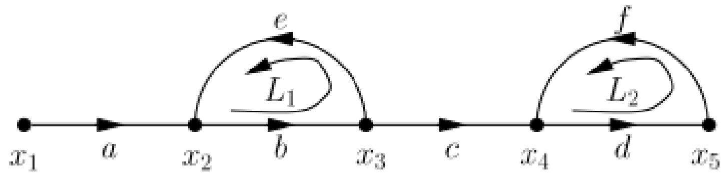
Einzelne Schleife
Die Transmittanz einer unabhängigen Variablen x_i (d. h. einer Quelle) zu einer abhängigen Variable (d. h. einem inneren Knoten oder einer Senke) in einem SFD, das nur eine Schleife und einen Vorwärtspfad enthält, ist gleich $H_{ij} = \frac{P_{ij}}{1-L}$ wobei P_{ij} die Transmittanz des Vorwärtspfades von x_i nach x_j und L die Transmittanz der Schleife ist. Die Formel lässt sich mittels der Lösung des entsprechenden Gleichungssystems oder äquivalent durch Transmittanzverschiebung und Entfernung der Eigenschleife beweisen.



a) $x_2 = a \cdot x_1 + d \cdot e \cdot x_5$
$x_5 = b \cdot c \cdot x_2$
$\Rightarrow \frac{x_5}{bc} = ax_1 + dex_5 \Rightarrow \frac{x_5}{x_1} = \frac{abc}{1-bcde}$

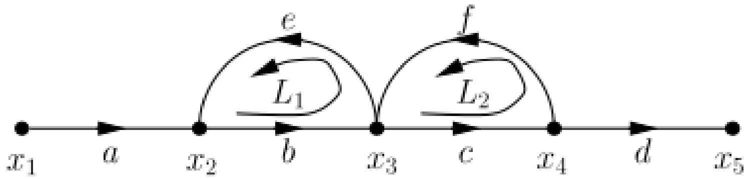
b) $H_{15} = \frac{x_5}{x_1} = \frac{P_{15}}{1-L}$
Vorwärtspfad $P_{15} = abc$
Schleifentransmittanz $L = bcde$

Mehrere sich nicht berührende Schleifen
Bei einer Kaskade von sich nicht berührenden Schleifen (d. h. , dass sie keine jeweils gemeinsamen Knoten haben) ist die gesamte Transmittanz gleich dem Produkt der einzelnen Transmittanzen: $H_{in} = \frac{P_{ij}}{1-L_j} \cdot \frac{P_{jk}}{1-L_k} \cdot \ldots \cdot \frac{P_{(n-1)n}}{1-L_n}$



$H_{15} = \frac{x_5}{x_1} = \frac{P_{13}}{1-L_1} \cdot \frac{P_{35}}{1-L_2} = \frac{P_{15}}{1-L_1-L_2+L_1 \cdot L_2} = \frac{abcd}{1-be-df+bedf}$

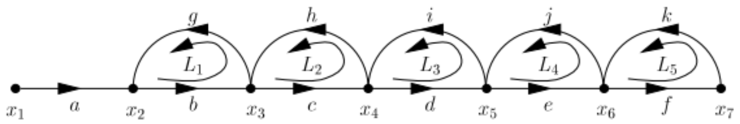
Mehrere sich berührende Schleifen
Für den Fall, dass die zwei Schleifen mindestens einen gemeinsamen Knoten haben, ist die gesamte Transmittanz gegeben durch: $H_{ij} = \frac{P_{ij}}{1-L_i-L_j}$



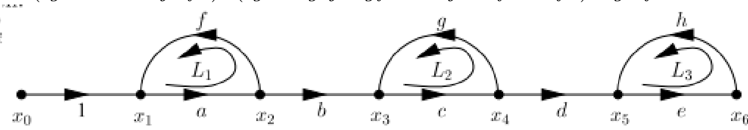
$H_{15} = \frac{x_5}{x_1} = \frac{P_{15}}{1-L_1-L_2} = \frac{abcd}{1-be-cf}$

2.2.8 Regel 8: Allgemeine Mehrfachschleifen-Reduktionsregel für einfache Pfade Skript S.66

Wir betrachten hier den Mehrfachschleifenfall wo nur ein Pfad zwischen einer Quelle x_i und einem abhängigen Knoten x_j existiert, wobei dieser Pfad jede Schleife im SFD berührt, (d. h. dass er wenigstens einen Knoten mit jeder Schleife gemeinsam hat). Kurz ausgedrückt, lautet die Mehrfachschleifen Reduktionsregel für einfache Pfade: $H_{ij} = \frac{P_{ij}}{\Delta}$
Die Grösse δ ist die Graph- oder Netzwerkdeterminante. Δ wird folgendermassen ermittelt:
$\Delta = 1-$(Summe alle Schleifen)+(Summe aller Produkte zweier Schleifen, die sich nicht be
(Summe aller Produkte dreier Schleifen, die sich nicht berühren)+
...



$H_{17} = \frac{x_7}{x_1} = \frac{P_{17}}{\Delta} = \frac{P_{17}}{1-(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5)+(L_1L_3+L_1L_4+L_1L_5+L_2L_4+L_2L_5+L_3L_5)-L_1L_3L_5} =$
$\frac{abcdef}{1-(bg+ch+di+ej+fk)+(bgdi+bgej+bgfk+chej+chfk+difk)-bgdifk}$



$H_{06} = \frac{x_6}{x_0} = \frac{P_{06}}{\Delta} = \frac{P_{06}}{1-(L_1+L_2+L_3)+(L_1L_2+L_1L_3+L_2L_3)-L_1L_2L_3} =$
$\frac{abcde}{1-af-cg-eh+afcg+afeh+cgeh-afcgeh}$

Anhang zum Kapitel 2

2.A Tabelle von Fourier-Transformationspaaren

Die Fourier-Transformationspaare sind zum Teil von [6, 47, 69] entnommen. Es gilt jeweils: $0 < (\alpha, \beta, t_0, \omega_0, A) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

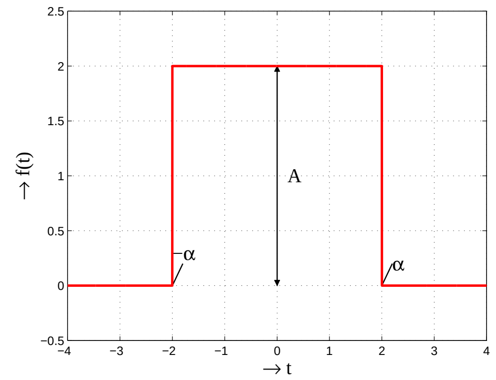
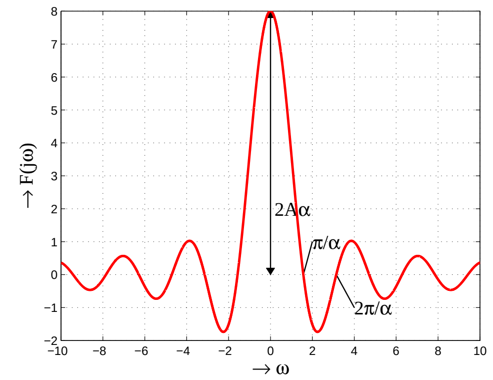
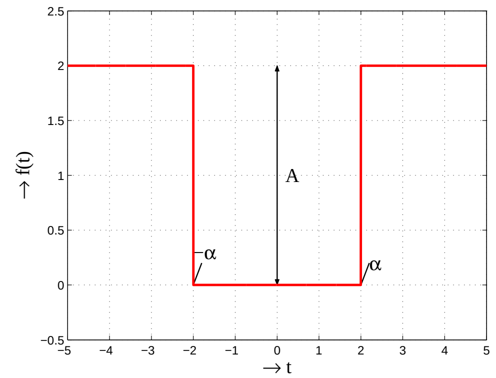
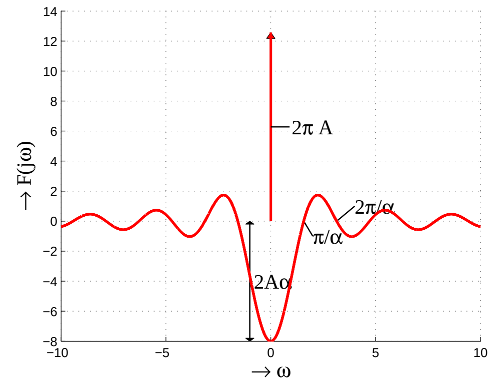
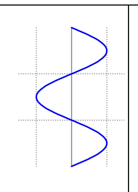
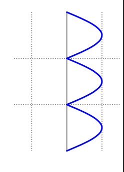
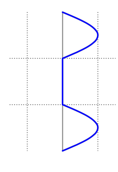
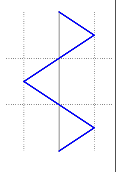
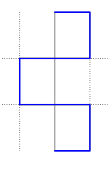
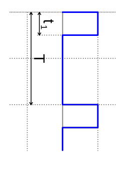
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
1	$A \cdot p_\alpha(t) = \begin{cases} A & \text{für } \lvert t\rvert < \alpha, \\ \frac{A}{2} & \text{für } \lvert t\rvert = \alpha, \\ 0 & \text{für } \lvert t\rvert > \alpha. \end{cases}$ 	$\frac{2A}{\omega}\sin(\alpha\omega) = 2A\alpha \cdot sinc(\alpha\omega)$ 
3	$A(1-p_\alpha(t)) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lvert t\rvert < \alpha, \\ \frac{A}{2} & \text{für } \lvert t\rvert = \alpha, \\ A & \text{für } \lvert t\rvert > \alpha. \end{cases}$ 	$2 \cdot \pi \cdot A\delta(\omega) - 2A\alpha \cdot sinc(\alpha\omega)$ 

Tabelle 2.3: Fourier-Transformationspaare

6.3 Eigenschaften unterschiedlicher Schwingungsformen

Schwingungsform	Funktion	Gleichrichtwert	Formfaktor	Effektivwert	Scheitelfaktor	X_0	X^2	**var(X)**
Formel		$\overline{\lvert x\rvert} = \frac{1}{T}\int_0^T \lvert x(t)\rvert\, dt$	$\frac{X}{\overline{\lvert x\rvert}}$	$X = \sqrt{\overline{X^2}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt}$	$k_s = \frac{X_{\max}}{X_{\text{eff}}}$			
	$A \cdot \sin(t)$	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\sqrt{2} \approx 1.414$	0	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2}$
	$A \cdot \lvert\sin(t)\rvert$	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\sqrt{2} \approx 1.414$	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2} - \frac{4A^2}{\pi^2}$
	$\begin{cases} A \cdot \sin(t) & 0 < t < \pi \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \approx 0.318$	$\frac{\pi}{2} \approx 1.571$	$\frac{1}{2} = 0.5$	2	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A^2}{4}$	$\frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2}$
	$A \cdot \Lambda(t)$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.557$	$\sqrt{3} \approx 1.732$	0	$\frac{A^2}{3}$	$\frac{A^2}{3}$
	$\begin{cases} A & 0 < x < t \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	1	1	1	1	0	A^2	A^2
DC	1	1	1	1	1	-	-	-
		$\frac{t_1}{T}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$\sqrt{\frac{t_1}{T}}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$A\frac{t}{T}$	$A^2\frac{t}{T}$	$\frac{A^2 t}{T} - \frac{A^2 t^2}{T^2}$

2.3 Mason's Regel Skript S.69

$$\boxed{H_{ij} = \frac{\sum_k P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}}$$ $\Rightarrow$ UTF von x_i nach x_j, wobei x_i eine **Quelle**, x_j jedoch nicht zwingend eine **Senke** sein muss.

$P_k \Rightarrow$ Vorwärtspfad k (bezogen auf 1 Eingang) $\quad \Delta_k \Rightarrow$ Kofaktor de k-ten Pfades $\quad \Delta \Rightarrow$ Netzwerkdet/Graphdet

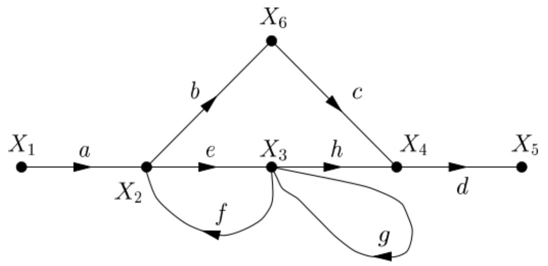
Δ = 1- (Summe aller Schleifen) + (Summe aller Produkte zweier Schleifen, die sich nicht berühren) - (Summe aller Produkte dreier Schleifen, die sich nicht berühren) + ...

Δ_k = 1- (Summe aller Schleifen die P_k nicht berühren) + (Summe aller Produkte zweier Schleifen, die P_k und sich selbst nicht berühren)-(Summe aller Produkte dreier Schleifen, die P_k und sich selbst nicht berühren) + ...

Falls die **UTF eines SFD von einem beliebigen Knoten** (keiner Quelle) gesucht wird, kann Mason's Regel nicht direkt angewandt werden. Abhilfe:

$$\boxed{H_{ij} = \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_j}{x_q}\frac{x_q}{x_i} = \frac{H_{qj}}{H_{qi}}}$$ Wobei x_q eine Quelle sei. Schlussendlich kürzt sich die Netzwerkdeterminante heraus.

2.4 Beispiel eines SFD Skript S.73

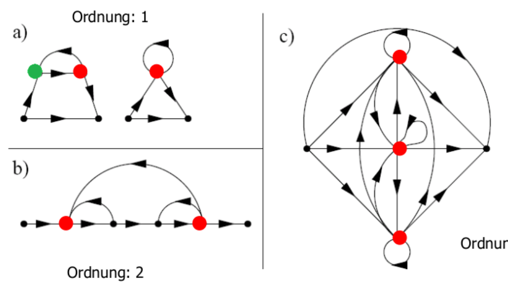


a) Die UTF zwischen X_1 und X_4 ist (mit Mason's Regel): $H_{14} = \frac{X_4}{X_1} = \frac{aeh+abc(1-g)}{1-ef-g}$

b) Das folgende Gleichungssystem beschreibt das SFD.
$X_2 = a \cdot X_1 + f \cdot X_3$
$X_3 = e \cdot X_2 + g \cdot X_3$
$X_4 = h \cdot X_3 + c \cdot X_6$
$X_5 = d \cdot X_4$
$X_6 = b \cdot X_2$

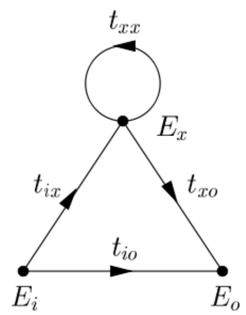
1. Nach Umformung der Gleichungen erhalten wir: $X_4 = h \cdot X_3 + \frac{bc}{e} \cdot (1-g) \cdot X_3 \quad \& \quad X_3 \cdot \frac{1-g}{e} = a \cdot X_1 + f \cdot X3.$
2. Somit ist $X_4 = \frac{h + \frac{bc}{e}(1-g)}{\frac{1-g}{ae} - \frac{f}{a}} X_1 = \frac{aeh+abc(1-g)}{1-g-ef} X_1.$

2.5 Fundamentales SFD Skript S.74



Ordnung eines SFD = Anzahl der fundamentalen Knoten: Knoten, welche entfernt werden müssen, um *alle* Schleifen aufzubrechen.

2.5.1 Fundamentales SFD erster Ordnung Skript S.75



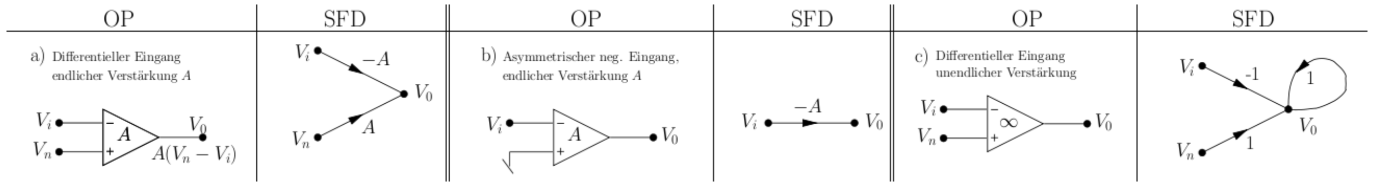
Durch Reduzieren auf das fundamentale SFD 1. Ordnung, kann die UTF direkt ermittelt werden:

$$H_{io} = \frac{E_o}{E_i} = t_{io} + \frac{t_{ix}t_{xo}}{1 - t_{xx}} = \frac{t_{io} - t_{io}t_{xx} + t_{ix}t_{xo}}{1 - t_{xx}}$$

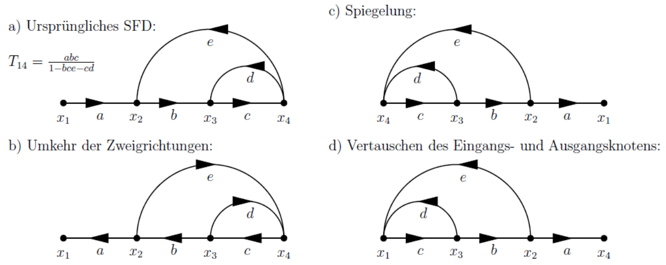
E_x	=	Fundamentaler Knoten
E_i	=	Quelle (Eingang)
E_o	=	Senke (Ausgang)
t_{xx}	=	alle Eigenschleifen des Knoten E_x
t_{ix}	=	alle Pfade von der Quelle zum Knoten E_x
t_{xo}	=	alle Pfade vom Knoten E_x zur Senke
t_{io}	=	Leckpfad, alle Pfade von der Quelle zur Senke, welche nicht durch den Knoten E_x führen.

Wenn es mehrere Wege gibt, dann zusammen zählen:
Bsp.: $tix = tix_1 + tix_2$

2.6 Einbezug analoger Verstärker Skript S.80



2.7 Transposition Skript S.84

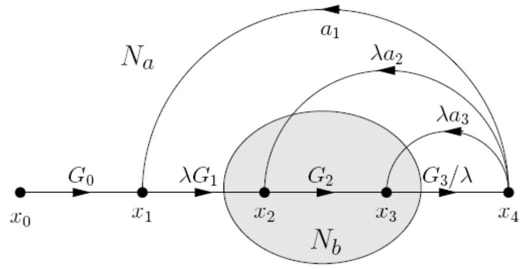


Ablauf:

1. Richtungsumdrehung aller Zweigtransmittanzen bei gleichbleibenden Transmittanzen
2. Spiegelung des resultierenden SFD
3. Bezeichnungswechsel von Eingangs- und Ausgangsknoten

Die UTF des transponierten SFD ist **identisch** mit der UTF des ursprünglichen SFD, aber ihre Topologie ist verschieden.

2.8 Skalierung Skript S.85



Um einen oder mehrere Knoten zu ändern, ohne das gesamte System zu ändern (Voraussetzung: Start/Endknoten werden nicht mitmaskiert), kann man diese Knoten skalieren.
Vorgehen:

1. Skalierungszone festlegen (Trennbündel) N_b
2. Alle eingehende Zweige mit λ multiplizieren
3. Alle ausgehende Zweige mit $\frac{1}{\lambda}$ multiplizieren

Wenn alle maximalen Signalniveaus gleich → maximal möglichen Dynamikbereich

Die Skalierung kann verwendet werden um den Dynamikbereich zu maximieren, Inverter zu entfernen und die Verstärkung und Signalniveaus innerhalb eines Systems zu ändern.

3 Frequenzanalyse Skript S.132

3.1 Divere Formeln

Bessel's Theorem Skript S.124	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(j\omega)\rvert^2 d\omega$
Parseval's Theorem Skript S.124	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot G^*(j\omega) d\omega$
Gibbschesphänomen Skript S.112	Überschwinger beträgt ca. 18% der Amplitude oder ca. 9% der Sprunghöhe. $S_\infty = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ (approximiert)
Autokorrelation Skript S.132	$\varphi_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{-k} e^{-j\frac{2\pi k}{T_0}\tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2 e^{-j\frac{2\pi k}{T_0}\tau} = \lvert c_0\rvert^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2 \cdot \cos(\frac{2\pi k}{T_0}\tau)$
Leistung Skript S.119	$X^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2 = \lvert c_0\rvert^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2 = (\frac{a_0}{2})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2+b_k^2}{2} = (\frac{a_0}{2})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}$
Bandbreitentheorem Skript S.122	$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \gamma \quad$ mit $\gamma \geq \frac{1}{2}$

3.2 Leisungsdichtespektrum Skript S.132

$\phi(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\lvert F(j\omega)\rvert^2}{T}$ $\phi(j\omega)$: Leistungsdichtespektrum

$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(j\omega) d\omega$ P_n: normierte Leistung

$E(j\omega) = \lvert F(j\omega)\rvert^2$ $E(j\omega)$: Energiedichtespektrum

6.2 Einige unbestimmte Integrale S1074

$\int dx = x + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a\epsilon\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\ x \neq k\pi$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit$k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\ x \neq 0$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C,\ a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{ax-b}{ax+b}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq \frac{b}{a},\ x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2} - \frac{b^2}{2a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0, a^2x^2 \geqq b^2$
$\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 \leqq b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} = \frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 > b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 < b^2$
Die Integrale $\int \frac{dx}{X}, \int \sqrt{X}dx, \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2+2bx+c,\ a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a(x+\frac{b}{a})^2 + (c-\frac{b^2}{a})$ und die Substitution $t = x + \frac{b}{a}$ in die oberen 4 Zeilen transformiert.	$\int \frac{xdx}{X} = \frac{1}{2a}\ln\lvert X\rvert - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{X},\ a \neq 0,\ X = ax^2+2bx+c$
$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$
$\int \sin^n ax dx = -\frac{\sin^{n-1}ax\cdot\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\lvert\tan\frac{ax}{2}\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\lvert\tan(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4})\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}mitk\epsilon\mathbb{Z}$
$\int x^n \sin ax dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int x^n \cos ax dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+$
$\int x^\alpha \cdot \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x - 1] + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	

6 Idiotenseite

6.1 Ableitungen elementarer Funktionen S436

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
C (Konstante)	0	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
x	1	$\sec^{-1} x$	$\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{R})$	nx^{n-1}	$\arcsin x \quad (\lvert x\rvert < 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\arccos x \quad (\lvert x\rvert < 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq 0, x > 0)$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
e^x	e^x	$\operatorname{arcossec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$e^{bx} \quad (b \in \mathbb{R})$	be^{bx}	$\sinh x$	$\cosh x$
$a^x \quad (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\cosh x$	$\sinh x$
$a^{bx} \quad (b \in \mathbb{R}, a > 0)$	$ba^{bx} \ln a$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\coth x \quad (x \neq 0)$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{Arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\lg x \quad (x > 0)$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0.4343}{x}$	$\operatorname{Arcosh} x \quad (x > 1)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{Artanh} x \quad (\lvert x\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{Arcoth} x \quad (\lvert x\rvert > 1)$	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\tan x \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$[f(x)]^n \quad (n \in \mathbb{R})$	$n[f(x)]^{n-1} f'(x)$
$\cot x \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -cosec^2 x$	$\ln f(x) \quad (f(x) > 0)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

3.3 Wiener-Chintchine Theorem Skript S.133

Leistungssignal 2a:

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \circ\!\!-\!\!\bullet\ \phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(t)e^{-j\omega t}dt$$

Energiesignal:

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \circ\!\!-\!\!\bullet\ E(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(t)e^{-j\omega t}dt$$

Leistungssignal 2b:

$$\varphi_{xy}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \circ\!\!-\!\!\bullet\ \phi_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(t)e^{-j\omega t}dt$$

3.4 Eigenschaften von $\phi(j\omega)$

1. $\phi(j\omega)$ ist reell
2. $\phi(j\omega) \geq 0$
3. $\phi(j\omega) = \phi(-j\omega)$
4. $P = X^2 = \varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(j\omega)d\omega$
5. $\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau)d\tau$

4 Systeme Skript S.161

4.1 Begriffe

Bezeichnung	Beschreibung	Bedingung, Erkennung
Wirkungsfreiheit Skript S.161	Eingang des Systems hochohmig, Ausgang niederohmig	Kaskadierte Systeme durch Einheitsverstärker verbunden
Statische bzw. dynamische Systeme Skript S.162	Statisch: ohne Gedächtnis Dynamisch: mit Gedächtnis	Statisch: $u_2(t)$ nur vom Eingangssignal $u_1(t)$ bei t abhängig Dynamisch: $\int dt$; $\frac{d}{dt}$; $f(t \pm t_0)$
Kausale bzw. akausale Systeme Skript S.164	Kausal: Keine zukünftigen Werte Akausal: System "sieht in die Zukunft" **Statische und reale (physikalische) Systeme sind immer kausal!**	Kausal: $f(t-t_0)$; $\int^t f(\tau)d\tau \quad (t_0 > 0)$ $Impulsantwort:\ h(t) = 0 \ \ \forall\, t < 0$ Akausal: $f(-t)$; $f(t+t_0)$; $\int^{t+t_0} f(\tau)d\tau$
Lineare bzw. nichtlineare Systeme Skript S.165	Nichtlinear: Ausgangssignal kann **neue Frequenzanteile** enthalten Linear: Ausgangssignal hat keine neuen Frequenzanteile	Nichtlinear: $f^{\alpha}(t)$; $\alpha + f(t)$; $\alpha^{x(t)}$ $\Longrightarrow$ **Kennlinie nicht durch Ursprung** Linear: $S(x1+x2) = S(x1) + S(x2)$ $S(c \cdot x) = c \cdot S(x)$
Zeitinvariante bzw. zeitvariante Systeme Skript S.170	Zeitvariant: Von der Zeit abhängig Zeitinvariant: Von der Zeit unabhängig	Zeitvariant: $\cos(t)x(t); t^{\alpha}x(t) \quad (\alpha \neq 0)$ Zeitinvariant: $S(x(t-t_0) = S(x) \cdot x(t-t_0)$

4.1.1 Beispiele Skript S.118

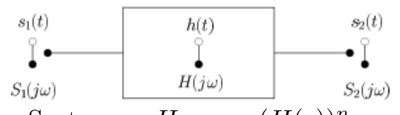
Systemtyp			Mathem. Form	Beispiel (kausal)	Beispiel (akausal)
statisch	linear	zeitinvariant	$y(t) = \gamma \cdot x(t)$	$y(t) = 3 \cdot x(t)$	
statisch	linear	zeitvariant	$y(t) = \gamma(t) \cdot x(t)$	$y(t) = t^2 \cdot x(t)$	
statisch	nichtlinear	zeitinvariant	$y(t) = f\{x(t)\}$	$y(t) = 4 \cdot x^2(t)$	
statisch	nichtlinear	zeitvariant	$y(t) = f\{x(t), t\}$	$y(t) = t \cdot x^3(t)$	
dynamisch	linear	zeitinvariant		$y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{2dx(t)}{dt}$	$y(t) = \frac{d^2x(t+1)}{dt^2} - \frac{2dx(t)}{dt}$
dynamisch	linear	zeitvariant		$y(t) = cos(t) \cdot \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$y(t) = cos(t) \cdot \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau)d\tau$
dynamisch	nichtlinear	zeitinvariant		$y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{2dx(t)}{dt} + 1$	$y(t) = \frac{d^2x(t+1)}{dt^2} - \frac{2dx(t)}{dt} + 1$
dynamisch	nichtlinear	zeitvariant		$\ddot{y}(t) = cos(t) \cdot x(t-1) - 0.5$	$\ddot{y}(t) = cos(t) \cdot x(t+1) - 0.5$

4.1.2 Linearisierung von Systemen: Siehe Skript S.169

4.2 Übertragungsfunktion von LTI-Systemen Skript S.174

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H(s)$$

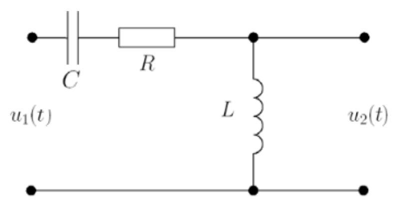
$$s_2(t) = h(t) * s_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_2(s) = H(s)S_1(s)$$



Kaskadierung von wirkungsfreien Systemen: $H_{total}(s) = H_1(s)H_2(s)$ bzw. bei n gleichen Systemen: $H_{total} = (H(s))^n$

Beispiel: Gesucht UTF $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

$$H(s) = \frac{sL}{\frac{1}{sC} + sL + R} = \frac{s^2}{\frac{1}{LC} + s\frac{R}{L} + s^2}$$



$\Longrightarrow$ Pole bei $s = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$; Doppelte Nullstelle bei $s = 0$

Differentialgleichung: $\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y = \ddot{x}(t)$

4.2.1 Bestimmung der UTF

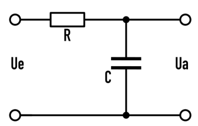
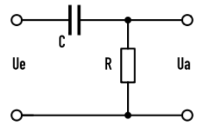
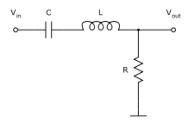
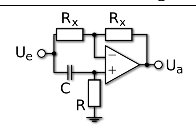
Bauteil	Ersatz
R	R
L	sL
C	$\frac{1}{sC}$

Parallelschaltung $= \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC}$

Das Potential in einem Punkt berechnet man mit $= \frac{\text{Summe aller Elemente zwischen Punkt und GND}}{\text{Summe aller Elemente der Kompletten Schaltung}}$

Die **Ordnung der UTF** ist die Anzahl unabhängiger Speicher (L oder C).

4.2.2 Beispiele von Übertragungsfunktionen (verschiedene Filter)

	Tiefpassfilter 1. Ordnung	Hochpassfilter 1. Ordnung	Bandpassfilter 2. Ordnung	Allpassfilter 1. Ordnung
				
Übertragungsfunktion $H(s)$	$\frac{1}{1+sRC}$	$\frac{sRC}{1+sRC}$	$\frac{sRC}{1+sRC+s^2LC}$	$\frac{sRC-1}{sRC+1}$
Amplitudengang $\lvert H(\omega)\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$	$\frac{\lvert\omega RC\rvert}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$	$\frac{\lvert\omega RC\rvert}{\sqrt{(\omega^2 LC-1)^2+(\omega RC)^2}}$	1
Phasengang $\varphi(\omega)$	$-arctan(\omega RC)$	$arctan(\frac{1}{\omega RC})$	$-arctan(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega RC})$	$\pi - 2arctan(\omega RC)$
Grenzfrequenz f_c	$\frac{1}{2\pi RC}$	$\frac{1}{2\pi RC}$		
Spannung am Ausgang	Spannung am Eingang $\cdot \lvert H(\omega)\rvert$			

4.2.3 Berechnung des Amplituden- und Phasengangs aus der Übertragungsfunktion

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \underbrace{|H(j\omega)|}_{Amplitudengang} e^{j\overbrace{\Theta(\omega)}^{Phasengang}} = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|}e^{j(\arg(Y(j\omega))-\arg(X(j\omega)))} = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|}e^{j\left[\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{Y(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{Y(j\omega)\}}\right)-\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}}\right)\right]}$$

Phasengang: $\Theta(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(H(j\omega))}{\mathrm{Re}(H(j\omega))}\right)$

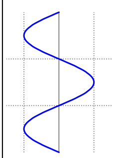
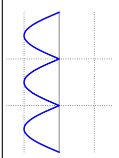
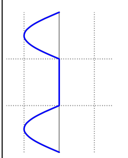
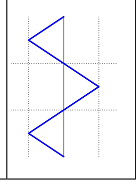
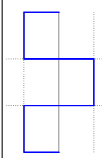
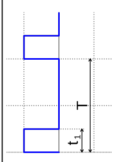
Amplitudengang: $|H(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|}$

4.2.4 Zusammenhang zwischen Impuls- & Einheitssprungantwort, Endwerte Skript S.175

Einheitssprungantwort $g(t)$, Impulsantwort $h(t)$

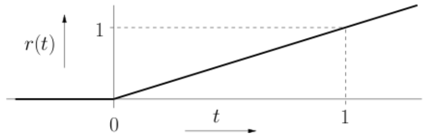
$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad \text{bzw.} \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} H(s)$$

5.2 Eigenschaften unterschiedlicher Schwingungsformen

Schwingungsform	Funktion	Gleichrichtwert	Formfaktor	Effektivwert	Scheitelfaktor	X_0	X^2	var(X)
Formel		$\overline{\lvert x\rvert} = \frac{1}{T}\int_0^T \lvert x(t)\rvert\, dt$	$\frac{X}{\lvert x\rvert}$	$X = \sqrt{X^2} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt}$	$k_s = \frac{X_{\max}}{X_{\mathrm{eff}}}$			
	$A \cdot \sin(t)$	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\sqrt{2} \approx 1.414$	0	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2}$
	$A \cdot \lvert\sin(t)\rvert$	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\sqrt{2} \approx 1.414$	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2} - \frac{4A^2}{\pi^2}$
	$\begin{cases} A \cdot \sin(t) & 0 < t < \pi \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \approx 0.318$	$\frac{\pi}{2} \approx 1.571$	$\frac{1}{2} = 0.5$	2	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A^2}{4}$	$\frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2}$
	$A \cdot \Lambda(t)$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.557$	$\sqrt{3} \approx 1.732$	0	$\frac{A^2}{3}$	$\frac{A^2}{3}$
	$\begin{cases} A & 0 < x < t \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	1	1	1	1	0	A^2	A^2
DC	1	1	1	1	1	-	-	-
		$\frac{t_1}{T}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$\sqrt{\frac{t_1}{T}}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$A\frac{t}{T}$	$A^2\frac{t}{T}$	$\frac{A^2 t}{T} - \frac{A^2 t^2}{T^2}$

Rampenfunktion Skript S.18

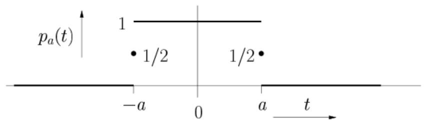
(Matlab: `ramp`)



$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}: \quad r(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$$

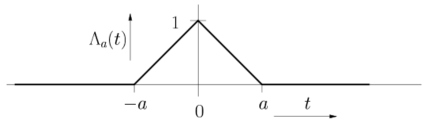
Rechteckimpuls Skript S.19



$$p_a(t) = u(t+a) - u(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < a \\ \frac{1}{2} & \text{für } |t| = a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases}$$

$$\mathcal{F}: \quad p_a(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2a\,\mathrm{sinc}(a\omega) = \frac{2}{\omega}\sin(a\omega)$$

Dreieckimpuls Skript S.20

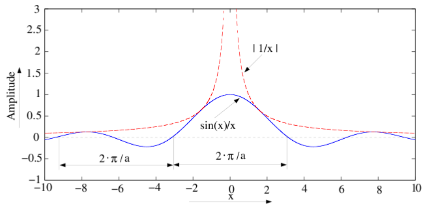


$$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{für } |t| < a \\ 0 & \text{für } |t| \geq a \end{cases}$$

$$\mathcal{F}: \quad \Lambda_a(t) \circ\!\!-\!\!\bullet a\left(\frac{\sin(\frac{a\omega}{2})}{\frac{a\omega}{2}}\right)^2 = a\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)$$

Sincfunktion Skript S.20

(Matlab: `sinc`)



$$\mathrm{sinc}_\alpha(t) = \frac{\sin(\alpha t)}{t} \qquad \mathrm{sinc}(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t}$$

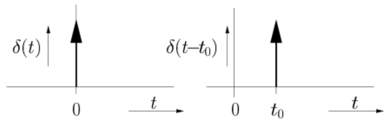
$$\mathcal{F}: \quad \mathrm{sinc}_\alpha(t) = \frac{\sin(\alpha t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \pi p_\alpha(\omega)$$

$$\mathcal{F}: \quad \mathrm{sinc}(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\pi}{\alpha} p_\alpha(\omega)$$

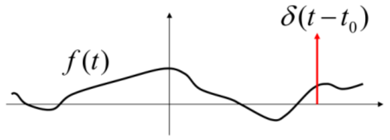
Impulsfunktion Skript S.21

Diracimpuls, Diracstoss, Deltaimpuls (Matlab: `dirac`)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Siebungseigenschaft



1.	$\delta(at) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\delta(t)$	Skalierung
2.	$\delta(\frac{t-t_0}{a}) = \lvert a\rvert \cdot \delta(t-t_0)$	Skalierung und Verschiebung
3.	$\delta(-t+t_0) = \delta(t-t_0)$	symmetrisch
4.	$\delta(-t) = \delta(t)$	$\delta(t) =$ gerade Funktion
5.	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$	**Siebungseigenschaft**
6.	$\delta(t-t_0)f(t) = f(t_0)\delta(t-t_0)$	Abtastung
7.	$\int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t)dt = A$	**Spezialfall der Siebungseigenschaft**
8.	$\delta(t-t_0) * f(t) = f(t-t_0)$	Faltung
9.	$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$	Faltung
10.	$\delta(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}$	Ableitung des Einheitssprungs
11.	$\delta(t) = \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t}$	Definition
12.	$\mathcal{L},\mathcal{F}: \quad \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 1$	Frequenzbereich

4.2.5 Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Kausalität eines Systems Skript S.176

Damit ein System kausal ist, muss dessen Impulsantwort $h(t)$ für alle $t < 0$ gleich Null sein.

$\boxed{h(t) = 0 \;\; \forall\, t < 0 \;\; \Longrightarrow \text{System kausal!}}$

4.3 Stabilität von LTI-Systemen Skript S.177

4.3.1 BIBO-Stabilität Skript S.177

BIBO = Bounded Input Bounded Output

Ein beliebiges System ist **BIBO-stabil**, wenn auf jedes **beschränkte Eingangssignal** das **Ausgangssignal** ebenfalls **beschränkt** ist.$|u_{in}(t)| < A \rightarrow |u_{out}(t)| < B$ mit $0 < A, B \in \mathbf{N} < \infty$

4.3.2 Asymptotische Stabilität Skript S.178

Stabil:	$\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = 0$ Pole **nur** in der linken s-Halbebene. **Achtung: Nur <u>Pole</u>, nicht <u>Nullstellen</u>!!**
Instabil:	Mind. ein Pol in der rechten s-Halbebene oder mind. ein **mehrfacher** Pol auf der j-Achse der s-Ebene.
Grenzstabil:	mindestens ein **einfacher Pol** (aber kein mehrfacher) auf der j-Achse, keine Pole rechts der j-Achse

4.3.3 Stabilität mit Hurwitz-Polynom Skript S.179

Es wird jeweils das Polynom im **Nenner der Übertragungsfunktion** betrachtet: $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$
Ist ein solches Polynom ein Hurwitz-Polynom, so ist das System **asymptotisch stabil**. Handelt es sich um ein **modifiziertes Hurwitz-Polynom** so ergibt es ein **grenzstabiles** System.

$P(s)$ ist nur dann ein Hurwitz-Polynom, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. alle Koeffizienten a_i von $P(s)$ sind grösser als Null (und sind vorhanden).
   (bis zum und mit Polynomen von Grad 2, ist es notwendig, dass alle Koeffizienten positiv sind, damit das Polynom asymptotisch stabil ist)

2. alle Hurwitz-Determinanten D_1 bis D_n sind grösser als Null

$$D_1 = a_{n-1} > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & a_1 \end{vmatrix} > 0$$

$$D_n = a_0 D_{n-1} > 0$$

Modifiziertes Hurwitz-Polynom
Nebst allen $a_i \geq 0$ müssen alle Hurwitz-Determinanten $D_1, D_2, \ldots, D_{n-2} > 0$ und $D_{n-1} = D_n = 0$ sein.

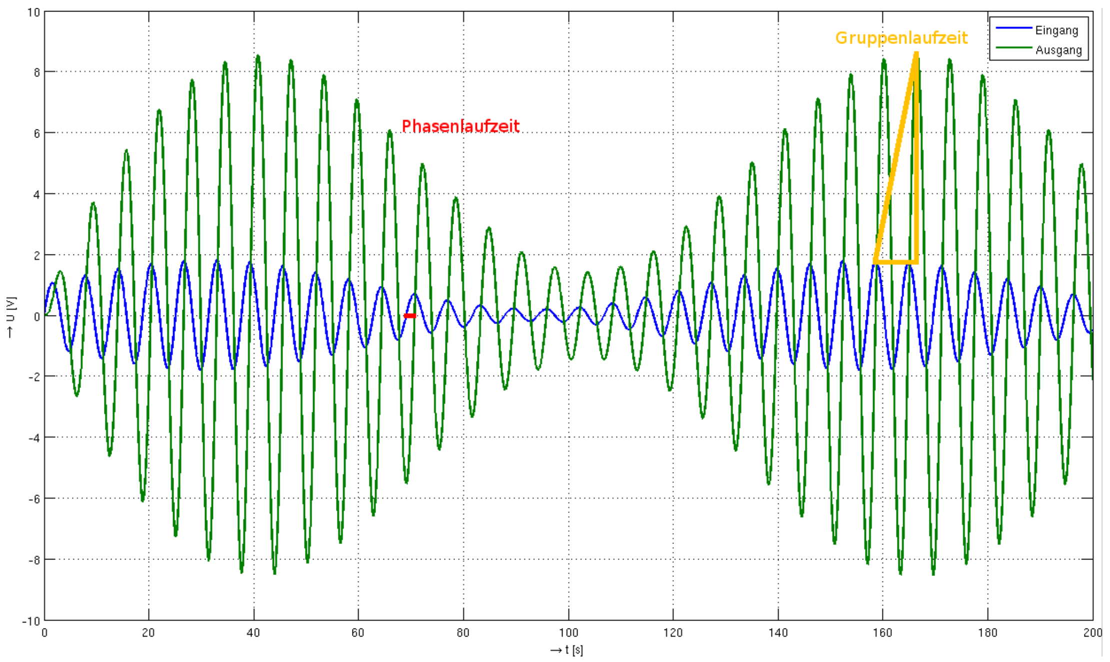
Für Polynome $P(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s^1 + a_0$ vom Grad n gilt für $a_i > 0$:

N	$P(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom (stabil)	$P(s)$ ist ein modifiziertes Hurwitz-Polynom (grenzstabil)
1	gilt für alle $P(s)$	$a_0 = 0$
2	gilt für alle $P(s)$	$a_1 = 0$
3	$a_1 a_2 > a_0 a_3$	$a_1 a_2 = a_0 a_3$
4	$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > a_1^2 a_4$	$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) = a_1^2 a_4$
5	$a_3 a_4 > a_2 a_5$ und $(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) > (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2$	$a_3 a_4 > a_2 a_5$ $(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) = (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2$

- Wenn **mindestens ein Koeffizient negativ** ist ($a_x < 0$), dann ist das System **instabil**.
- Wenn **alle Koeffizienten negativ** sind, kann -1 ausgeklammert werden und in den Zähler verschoben werden $\Rightarrow$ **System stabil** oder **grenzstabil**
- Wenn **ein Koeffizient nicht vorhanden** ist ($a_x = 0$), dann ist das System evtl. grenzstabil, d.h. es ist eine **Überprüfung mit modifiziertem Hurwitz-Polynom** nötig.

4.4 Phasen- & Gruppenlaufzeit Skript S.182

Die Phasenlaufzeit ist nur für reine Sinussignale bestimmbar: $\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$
Die Gruppenlaufzeit hingegen ist für sämtliche Signale möglich: $\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$



Eingangssignal $x(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ des Systems $H(s) = \frac{1}{s^2+0.2s+1}$. Bemerkung: $y(t)$ ist grösser als $x(t)$.

4.4.1 Signalverzögerung, Phasen- und Gruppenlaufzeit Skript S.186

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ und **Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn:

- $\boxed{\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0}$
- und der Amplitudengang ebenfalls konstant ist

Das heisst, $H(j\omega)$ hat die Form $\boxed{H(j\omega) = a \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t_0}}$.
Die Signalverzögerung beträgt dann für alle Frequenzen $\boxed{t_0 = \tau_G = \tau_P}$.

4.5 Verzerrungen und Klirrfaktor Skript S.187

4.5.1 Verzerrungen Skript S.187

Lineare Verzerrungen:

- Erzeugen keine neuen Frequenzen
- z.B. Dämpfung (auch einzelner Frequenzen)

Nichtlineare Verzerrungen:

- Erzeugen neue Frequenzen
- z.B. Diode, Übersteuern, nichtlineare Kennlinien

4.5.2 Klirrfaktor Skript S.189

Als Mass für nichtlineare Verzerrungen gilt der *Klirrfaktor*. Betrachtet wird jeweils der Effektivwert am Ausgang.

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{U_2^2+U_3^2+\ldots+U_n^2}{U_1^2+U_2^2+\ldots+U_n^2}}} \quad 0 \le k \le 1$$

Teilklirrfaktor (frequenzselektiv): $\boxed{k_m = \frac{U_m}{\sqrt{U_1^2+U_2^2+\ldots+U_n^2}}}$

Klirrdämpfungsmass: $\boxed{a_k = 20\log\left(\frac{1}{k}\right)}$

Teilklirrdämpfungmass: $\boxed{a_k = 20\log\left(\frac{1}{k_m}\right)}$

4.5.3 Total Harmonic Distortion (THD) Skript S.189

$$\boxed{\mathrm{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2+U_3^2+\ldots+U_n^2}{U_1^2}}} \quad \infty > \mathrm{THD} \ge k \ge 0; \quad \text{Für kleine Verzerrungen: } \mathrm{THD} \approx k$$

4.6 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen Skript S.190

Für eine Übertragung ohne Amplitudenverzerrung (konstante Amplitude über alle Frequenzen) muss gelten: $\boxed{|H(j\omega)| = konstant}$

Für eine Übertragung ohne Phasenverzerrung (Phase proportional zur Frequenz) muss gelten: $\boxed{\theta(\omega) = -\omega t_0}$

Für eine **verzerrungsfreie Signalübertragung** müssen **beide Kriterien** erfüllt sein!
Dann gilt:

- $\boxed{y(t) = a \cdot x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(j\omega) = a \cdot X(j\omega) \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t_0}}$
- $\boxed{H(j\omega) = a \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot \mathrm{e}^{j\theta(\omega)} \bullet\!\!-\!\!\circ\ h(t) = a \cdot \delta(t-t_0)}$

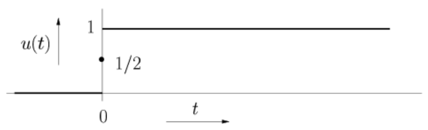
4.7 Übertragung von stochastischen Signalen Skript S.193

- Linearer Mittelwert und Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignales Skript S.193
- Leistungsdichtespektrum Skript S.193
- Kreuzkorrelationen Skript S.194
- **Beispiel:** Leistungsdichtespektrum am Ausgang eines RC-Tiefpasses Skript S.195

5 Einheitssignale

5.1 Funktionen

Sprungfunktion Skript S.17

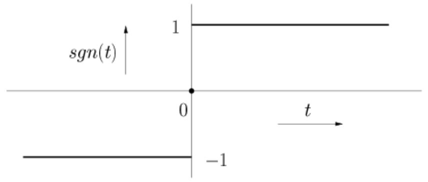


Einschaltfunktion, Einheitssprung, Heaviside-Function (Matlab: `heaviside`)

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}: \quad u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$$

Signumfunktion Skript S.17



Vorzeichenfunktion (Matlab: `sign`)

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F}: \quad \mathrm{sgn}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{-2j}{\omega}$$