MSE CFD
Zusammenfassung

dstrebel, s1bischo, sboller

Gradient eines Skalarfeldes: gibt die Richtung und Stärke des steilsten Anstiegs eines Skalarfeldes an. Skalarfeld =¿ Vektorfeld

Divergenz eines Vektorfeldes (Quellendichte eins Vektorfeldes): Gibt die Tendenz eines Vektorfeldes an, von Punkten wegzufliessen (das gilt für positives Vorzeichen; bei negativem Vorzeichen handelt es sich dementsprechend um die Tendenz zu den Punkten hinzufliessen) Vektorfeld =¿ Skalarfeld

Rotation eines Vektorfeldes: Gibt die Tendenz eines Vektorfeldes an, um Punkte zu rotieren; die Rotation eines Vektorfeldes ist ein Vektorfeld von Pseudovektoren. Und zwar folgt aus dem Stokes'schen Integralsatz (siehe unten), dass die Rotation die lokale Wirbeldichte eines Vektorfeldes beschreibt.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Vektoranalysis

1 Description of Physical Phenomena

1.1 Einheiten

Mathe
$[\lambda] = \frac{W}{mK}$
$[\nabla] = \frac{1}{m}$

Wärme
$[\rho] = \frac{kg}{m^3}(Dichte)$
$[c_p] = \frac{J}{kgK}$
$[m] = kg(Masse)$
$[T] = K(Temperatur)$
$[j_w] = \frac{W}{m^2}(Energieflussdichte)$
$[I_W] = W(Waermefluss)$
$[W] = \frac{J}{m^3}(???weissnichtfuerwas)$

Elektronik
$[Q] = As(el.Ladung)$
$[F] = N(Kraft)$
$[W] = W(thermischeEnergie)$
$[w] = \frac{kg}{ms^2}nochmalskontrollieren!!!$

Mechanik
$[d] = \frac{N}{m}(Federkonstante)(springconstant)$
$[E] = \frac{N}{m^2}(Federkonstante)(springconstant)$
$[A] = A^2(Flaeche)$
$[F] = N(Kraft)$
$[\sigma] = \frac{N}{m^2}(Spannung)(Stress)$
$[l_0] = m(urspruenglicheLaenge)$
$[\delta l] = m(Laengenausdehnung)$
$[\epsilon l] = -(Dehnung)(strain)$
$[p] = Ns(Impuls)$

1.2 SI-Einheiten

$J = \frac{kgm^2}{s^2}$

1.3 Begriffe

- extensive Grösse: wenn sich System verdoppelt verdoppelt sich auch die Eigenschaft z.B. Impuls, Volumen ...
- intensive Grösse: wenn sich System verdoppelt verdoppelt sich Eigenschaft nicht z.B. Druck, Temperatur, ...

1.4 Bilanzgleichungen

	Stoffliche Grösse	Potential	Balance Equation uniform	Bala
Charge Transport	Charge Q	el. Potential ???	$\frac{dQ}{dt} = I_Q$	
Heat Transport	thermal Energy W	Temperatur T	$\frac{\|W}{\partial t} = I_W + Q_W$	
Particle Transport	Partical number N	Particle density c	$\frac{dN}{dt} = I_N + Q_N$	
Mechanics (Momentum Transport)	Momentum p	Velocity v	$\frac{\partial p}{\partial t} = F$	

1.5 Constitutive Laws

	Storage Laws	Constitutive Laws
Charge Transport	$j_Q = -\sigma \cdot \nabla ??? = \sigma \cdot E$	
Heat Transport	$w = c_p \rho T$	$j_W = -\lambda \cdot \nabla T$
Particle Transport (Diffusion)	c=c	$j_N = -D \cdot \nabla c_N$
Mechanics	$p = mv$	$F_hook = -k\Delta u$ (Hook's Law) $F_visc = -C\eta \cdot v$ (Visco

2 Vektoranalysis und Integraltheorem

2.1 Nabla Operator

$$\nabla \text{ oder } \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \tag{1}$$

2.2 Gradient

Der Gradient ist ein mathematischer Operator, genauer ein Differentialoperator, der auf ein Skalarfeld angewandt werden kann und in diesem Fall ein Gradientenfeld genanntes Vektorfeld liefert, das die Änderungsrate d Richtung der größten Änderung des Skalarfeldes angibt.

$$\text{grad}(f(x,y,z)) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \tag{2}$$

2.3 Divergenz

In der Mathematik ist die Divergenz ein Differentialoperator, der einem Vektorfeld ein Skalarfeld zuordnet. Während bei einem Vektorfeld jedem Punkt ein Vektor zugeordnet wird, wird bei einem Skalarfeld jedem Punkt ein Skalar, also eine Zahl, zugeodnet. Interpretiert man das Vektorfeld als Strömungsfeld, so gibt die Divergenz für jeden Raumpunkt an, wie viel mehr aus einer Umgebung dieses Punkts hinausfließt als in sie hineinfließt. Mithilfe der Divergenz lässt sich also herausfinden, ob und wo das Vektorfeld Quellen (Divergenz größer als Null) oder Senken (Divergenz kleiner als Null) hat. Ist die Divergenz überall gleich Null, so bezeichnet man das Feld als quellenfrei.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} F_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} F_3 \tag{4}$$

2.4 Rotation

Als Rotation bezeichnet man in der Vektoranalysis, einem Teilgebiet der Mathematik, einen bestimmten Differentialoperator, der einem Vektorfeld im dreidimensionalen euklidischen Raum mit Hilfe der Differentiation ein neues Vektorfeld zuordnet. Handelt es sich beispielsweise um ein Strömungsfeld, so gibt die Rotation für jeden Ort das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit an, mit der ein mitschwimmender Körper rotiert, also wie schnell und um welche Achse er sich dreht. Dieser Zusammenhang ist namensgebend.

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.5 Rechenregeln

Es seien $\vec{F}$, $\vec{G}$ Vektorfelder und U, V Skalarfelder.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \nabla \times (\nabla U) = 0 \tag{6}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \tag{7}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F} \tag{8}$$

$$\operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U \tag{9}$$

$$\operatorname{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\operatorname{grad} \vec{F})^{\mathrm{t}} \vec{G} + (\operatorname{grad} \vec{G})^{\mathrm{t}} \vec{F} \tag{10}$$

$$\operatorname{div}(U\vec{F}) = U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U \tag{11}$$

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G} \tag{12}$$

$$\operatorname{rot}(U\vec{F}) = U \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U \tag{13}$$

2.6 Satz von Gauss

Der Integralsatz von liefert den Zusammenhang zwischen einem Volumenintegral über ein Volumen V, das von einem Feld $\vec{F}$ durchsetzt ist, und einem Oberflächenintegral über die dieses Volumen umschliessende Fläche A. Die Orientierung der Fläche sei so festgelegt, daß die Aussenseite die positive Seite ist.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{u} \, \mathrm{d}^{(n)} V = \oint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}^{(n-1)} A \,. \tag{14}$$

2.7 Satz von Stokes

Das Kurven- oder Linienintegral eines räumlichen Vektorfeldes $\vec{u}$ längs einer geschlossenen Kurve ∂F ist gleich dem Oberflächenintegral der Rotation von $\vec{u}$ über eine beliebige Fläche F, die durch die Kurve ∂F berandet wird:

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial F} \vec{u} \cdot d\vec{r} \tag{15}$$

3 Mathematical Basics

3.1 Grundlagen

Einsteinnotation: $w_i = \sum_{j=1}^{3} A_i j v_j = A_i j v_j$
Orthogonale Matrix ist, wenn gilt $MM^T = E$

3.2 Vector Algebra

	Allgemein	in components
Vector Addition	$w = u + v$	$w_i = u_i + v_i$
Multiplication with a Scalar	$w = \alpha v$	$w_i = \alpha v_i$
Scalar Product	$\alpha = v \cdot w$	$\alpha = v_i w_i$

3.3 Tensor Algebra

	Allgemein	in components
Addition	$C = A + B$	$C_{ij} = A_{ij} + v_{ij}$
Multiplication	$B = \alpha A$	$B_{ij} = \alpha A_{ij}$
Product I	$C = a \otimes b$	$C = a_i b_i$
Product II	$C = A \otimes B$	$C = A_{ij} B_{ij}$

3.4 Tensorverjüngung

	Allgemein	in components
	$c = A : B$	$c = A_{ij} + v_{ij}$
	$B = \mathbb{D} : A$	$B_{kl} = D_{klij} + A_{ij}$
	$C = AB$	$C_{ij} = A_{ik} + B_{kj}$
Multiplication	$w = Av$	$w_i = A_{ij} + v_j$

3.5 Bestimmen der Transformationsmatrix

Gegeben eine Matrix M... mit $det(A - \lambda E)$ die Eigenvektoren bestimmen und zusammensetzen ergibt die Transformationsmatrix R am Schluss Kontrollieren mit $M^{diag} = R \cdot R^T$

3.6 Übungen

$E'_{kl} = R_{ki} R_{lj} E_{ij} = R_{ki} E_{ij} R^T_{jl}$

Rotationsmatrix

$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$