WrStat

Braun & Co, Rast, Körner, Gwerder, Badertscher, Niedermann, Leuenberger, Walker

4. April 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorik **2**

2 Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit **3**

3 Erwartungswert und Varianz **5**

4 Wahrscheinlichkeitsverteilung **7**

5 Schätzen **11**

6 Hypothesentest **13**

7 Prozessverbesserungen **15**

8 Wichtige Formeln **16**

9 Auswahl der Verteilung **16**

10 Tabellen **17**

1 Kombinatorik

1.1 Produktregel

Für-jedes-gibt-es-Regel k Positionen müssen unabhängig von einander markiert werden, wobei n_i verschiedene Markierungen zur Verfügung stehen.

$$\boxed{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i}$$

Beispiel: Wie viele mögliche Augenzahlbilder können entstehen, wenn zwei verschiedenfarbige Würfel geworfen werden?
Antwort: Der erste Würfel kann $n_1 = 6$ verschiedene Augenzahlen anzeigen, der zweite $n_2 = 6$. Da die beiden unabhängig sind gibt es $n_1 \cdot n_2 = 36$ verschiedene Augenzahlbilder.

1.2 Permutation

Grundfrage: Auf wie viele Arten lassen sich n verschiedene Objekte anordnen? resp. Wie viele Permutationen von n Objekten gibt es?

$\boxed{P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!}$ oder Rekursiv: $\boxed{P_n = n \cdot P_{n-1}}$

Beispiel: In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können acht Läufer eines Rennens im Ziel eintreffen?
Antwort: Jede Reihenfolge ist möglich, also $8! = 40'320$ mögliche Reihenfolgen.

1.3 Kombination

Grundfrage: Auf wie viele Arten kann k aus n verschiedenen Objekte auswählen.

$$\boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_k^n = \binom{n}{k}}$$

Beispiel: Für ein Projekt stellt eine Firma mit 30 Mitarbeitern ein Team aus 5 Leuten zusammen. Auf wie viele Arten ist dies möglich?
Antwort: Es geht darum 5 von 30 Mitarbeitern auszuwählen, was auf $\binom{30}{5} = 142'506$ möglich ist.

1.4 Variation

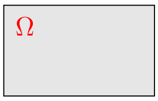
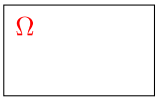
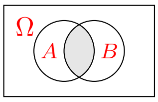
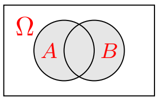
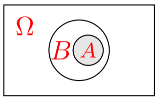
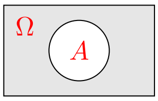
Grundfrage: Auf wie viele Arten kann man k mal unter n verschiedenen Objekten auswählen?

$\boxed{V_{n,k} = n^k}$

Beispiel: Auf wie viele Arten kann man eine Perlenkette der Länge $k = 10$ aus $n = 5$ Farben von Perlen herstellen?
Antwort: Die Variation Formel lässt sich auch über die Produktregel herleiten. Für jede Perle stehen wieder n verschiedene folge Perlen zur Auswahl. $V_{n,k} = n^k = 5^1 0 = 9'765'625$

2 Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit

Begriff	Beschreibung	Modell
Elementarereignis	Der Ausgang eines Experiments	ω
alle Elementarereignisse	Alle mögliche Ausgänge eines Experiments	Ω
Ereignis	Teilmenge von Ω A eingetreten $\Leftrightarrow$ Versuchsausgang $\omega \in A$	$A \subset \Omega$

Begriff	Beschreibung	Bild	Modell
Sicheres Ereignis	tritt immer ein		Ω
Unmögliches Ereignis	kann nicht eintreten		$\emptyset = \{\}$
A und B	Schnittmenge		$A \cap B$
A oder B	Vereinigung		$A \cup B$
A hat B zur folge	A ist in B enthalten		$A \subset B$
nicht A	Komplementär Ereignis		$\Omega \setminus A$

2.1 Wahrscheinlichkeit & Rechenregeln

Wertebereich:	$0 \leq P(A) \leq 1$
Sicheres Ereignis:	$P(\Omega) = 1$
unmögliches Ereignis:	$P(\emptyset) = 0$
komplementär Ereignis:	$P(\bar{A}) = P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$
Differenz der Ereignisse A und B:	$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
Vereinigung zweier Ereignisse:	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A) = \lim_{\text{Anzahl Versuche} \to \infty} \frac{\text{Anzahl Versuche bei der A eingetreten ist}}{\text{Anzahl Versuche}}$$

2.2 Laplace-Experiment

In einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum Ω haben alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit.

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

Beispiele: Münzen werfen wenn der Rand vernachlässigt wird, Würfeln...

2.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist.

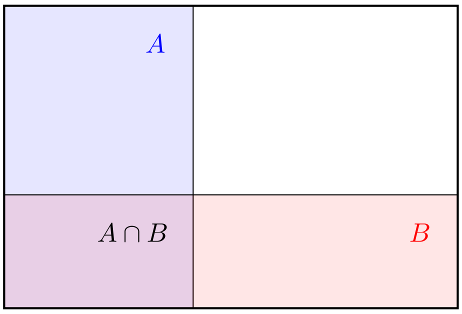
$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} = \underbrace{\frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)}_{\text{nur wenn unabhängig}}$$

$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$

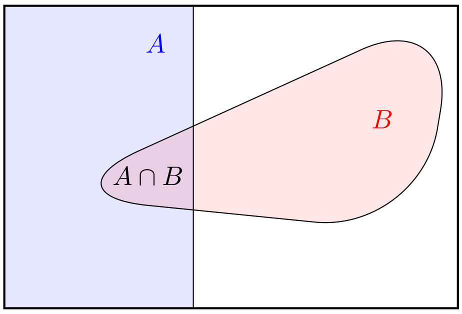
2.4 Unabhängige Ereignise

Für sie gilt $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

Die Tatsache, dass A eingetreten ist, hat keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von B.
Unabhängige Ereignisse A und B liegen vor, wenn: $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$
Wenn Ereignisse nicht gleichzeitig eintreten können, so sind sie abhängig.



Unabhänige Ereignisse



Abhänige Ereignisse

Beim Beispiel mit abhängigen Ereignissen wird A unwahrscheinlicher, wenn bereits B eingetroffen ist.

2.5 Totale Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}$$

in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} P(A_1) \\ P(A_2) \\ \vdots \\ P(A_n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P(A_1|B_1) & P(A_1|B_2) & \dots & P(A_1|B_n) \\ P(A_2|B_1) & P(A_2|B_2) & \dots & P(A_2|B_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ P(A_m|B_1) & P(A_m|B_2) & \dots & P(A_m|B_n) \end{pmatrix}}_{\text{W'keitsmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} P(B_1) \\ P(B_2) \\ \vdots \\ P(B_n) \end{pmatrix}$$

2.6 Satz von Bayes

$$\boxed{P(B \mid A) = P(A \mid B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}}$$

Tauscht die Ereignisse der Bedingten Wahrscheinlichkeit.

2.7 Google Matrix

Es gibt folgende Ereignisse: $P(S_i) =$\{Ein User ist auf der Seite i\} und
$P(S'_j) =$\{Ein User ist nach einem Klick auf der Seite j\}
nach einiger Zeit ergibt sich ein Gleichgewicht $P(S_i) = P(S'_j)$
$P(S'_j) = P(S'_j|S_1)P(S_1) + P(S'_j|S_2)P(S_2) + \dots$

$$\begin{pmatrix} P(S'_1) \\ P(S'_2) \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P(S'_1|S_1)P(S_1) & P(S'_1|S_2)P(S_2) & \dots \\ P(S'_2|S_1)P(S_1) & P(S'_2|S_2)P(S_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{\text{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} P(S_1) \\ P(S_2) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{p (Pagerank)}} \to Hp = p$$

Wird der freie Wille noch einberechnet, dann gilt: $H' = \alpha H + \frac{1-\alpha}{\textbf{Anzahl Seiten}} A$ wobei A nur aus 1en besteht.

3 Erwartungswert und Varianz

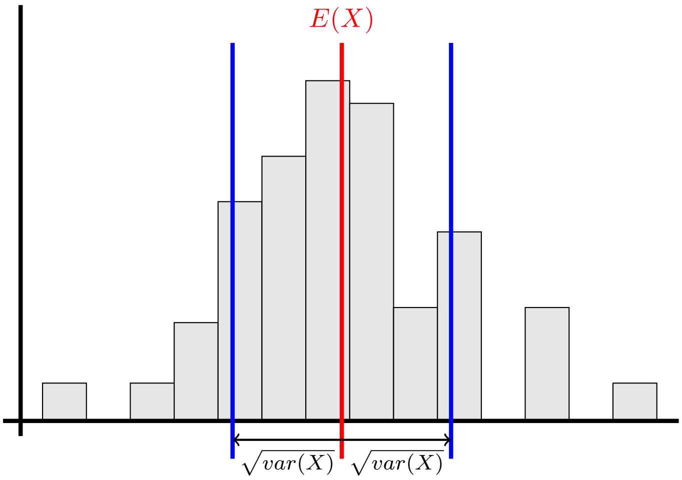
3.1 Erwartungswert

Sei X eine Funktion auf Ω, und lasse sich Ω in endlich viele Ereignisse A_i zerlegen, auf denen $X(\omega)$ konstant ist, dann ist der Erwartungswert von X

$$\text{Erwartungswert} = \sum \text{Wert} \cdot \text{Wahrscheinlichkeit}$$

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{X(A_i)}_{\text{Wert}} \cdot \underbrace{P(A_i)}_{\text{W'keit}}}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{x} x \cdot \varphi(x) dx \text{ mit } \varphi(x) = \text{Dichtefunktion}$$



3.1.1 Rechenregeln

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
$E(\lambda X + \mu) = \lambda \cdot E(X) + \mu \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ wenn X,Y unabhängig sind

3.2 Varianz

$$\boxed{var(X) = E(X^2) - E(X)^2} = E[(X - E(X))^2]$$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{var(X)}$

Achtung: Wenn endliche Werte vorliegen muss die Formel der Stichprobenvarianz angewendet werden, Kapitel 5.2 Seite 11.

3.2.1 Kovarianz

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \underbrace{0}_{\text{falls X,Y unabhängig}}$$

Ist die Kovarianz positiv so tendieren höhere X-Werte zu höheren Y-Werten.

3.2.2 Rechenregeln

$var(\lambda X) = \lambda^2 var(X) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \neq var(nX)$

$$var(X+Y) = \begin{cases} var(X) + var(Y) & \text{(X,Y unabh.)} \\ var(X) + var(Y) + 2 \cdot cov(X,Y) & \text{(X,Y abhängig)} \end{cases}$$

$var(XY) = var(Y)var(X) + var(Y)E(X)^2 + var(X)E(Y)^2$

3.3 Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels

Es sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit gleichem Erwartungswert μ und gleicher Varianz σ^2 gegeben.

Mittelwert: $\boxed{M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}}$ Erwartungswert: $\boxed{E(X) = E(M_n) = \mu}$ Varianz: $\boxed{var(M_n) = \frac{1}{n} var(X) = \frac{\sigma^2}{n}}$

3.4 Satz von Tschebyscheff

Satz von Tschebyscheff: $\boxed{P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}}$ Wahrscheinlichkeit, dass X um mehr als ε vom Erwartungswert μ abweicht.

Satz von Bernoulli: $\boxed{P(|M_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{n\varepsilon^2}}$ W'keit, dass M_n von n unabh. ZV mit Erwartungswert μ und Varianz $var(X)$ um mehr als ε von μ abweicht.

Gesetz der grossen Zahlen: $\boxed{P(|h_n - P(A)| > \varepsilon) \leq \frac{P(A)(1-P(A))}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}}$ Warscheinlichkeit, dass h_n um mehr als ε von der Wahrscheinlichkeit abweicht.

$\rightarrow$ mit relativer Häufigkeit: $\boxed{h_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}}$ und $\{X_1, \ldots, X_n$, Stichprobe von $X\}$ als wiederholtes Experiment.

3.5 Regression

Allgemein:	X,Y Zufallsvariable
Gesucht:	Regressionsgerade $y = ax + b$ mit min. Fehler
Fehler:	$E(Y - (aX + b)) = 0$

Regressionskoeffizient r

r ist ein Mass für die Qualität der Regression (standardisiert)

$$r^2 = \frac{cov(X,Y)^2}{var(X)var(Y)} = a^2 \cdot \frac{var(X)}{var(Y)}$$

Liegt r nahe bei 1 $\hat{=}$ gute Approximation

Mittlerer quadratischer Fehler

$$\Delta^2 = var(Y)(1 - r^2) = var(Y)\left(1 - \frac{cov(X,Y)^2}{var(X)var(Y)}\right)$$

Vorgehen: mit Fehlerberechnung

1. Tabelle mit bekannten Werten aufstellen:
   Vorlage-Tabelle ist auf GitHub

k	x	x^2	y	y^2	xy
1	x_1	x_1^2	y_1	y_1^2	x_1y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n^2	y_n	y_n^2	x_ny_n
$\sum$	$\sum x_k$	$\sum x_k^2$	$\sum y_k$	$\sum y_k^2$	$\sum x_ky_k$
E	$\frac{\sum x_k}{n}$	$\frac{\sum x_k^2}{n}$	$\frac{\sum y_k}{n}$	$\frac{\sum y_k^2}{n}$	$\frac{\sum x_ky_k}{n}$

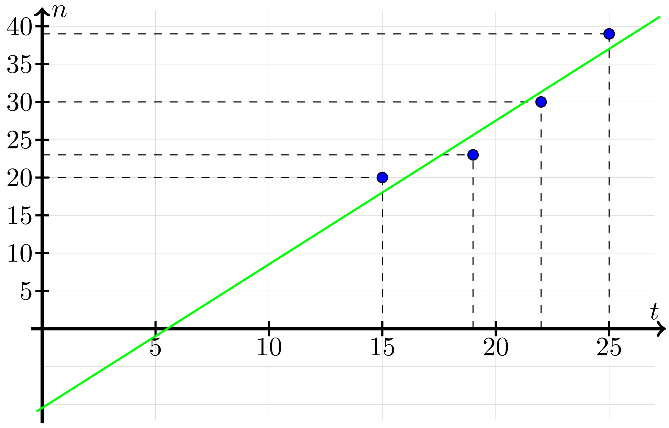
2. Varianzen, Kovarianz berechnen:
   $var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
   $var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$
   $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. Koeffizienten und Fehler der Gerade berechnen:
   $a = \frac{cov(X,Y)}{var(X)}$ $\quad \Delta^2 = var(Y)\left(1 - \frac{cov(X,Y)^2}{var(X)var(Y)}\right)$
   $b = E(Y) - aE(X)$
4. Gerade:
   $y = ax + b$

3.5.1 Beispiel Regression

Je wärmer es ist, desto schneller zirpen die Grillen.
Folgende Daten wurden erhoben:

T [°C]	N[Zirpen/15 Sekunden]
15	20
19	23
22	30
25	39

Es wird vermutet, dass die Anzahl der Zirplaute pro 15 Sekunden linear von der Temperatur abhängt. Finden Sie eine solche Gesetzmässigkeit und beurteilen Sie ihre Qualität.



1. Tabelle ausfüllen:

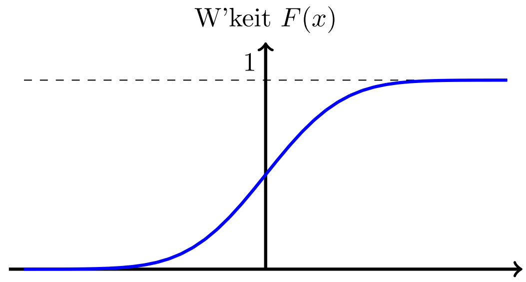
k	t	t^2	n	n^2	tn
1	15	225	20	400	300
2	19	361	23	529	437
3	22	484	30	900	660
4	25	625	39	1521	975
$\sum$	81	1695	112	3350	2372
E	20.25	423.75	28	837.5	593

2. Varianzen und Kovarianzen berechnen:
   $var(t) = E(t^2) - E^2(t) = 423.75 - 20.25^2 = 13.6875$
   $var(n) = E(n^2) - E^2(n) = 837.5 - 28^2 = 53.5$
   $cov(t,n) = E(tn) - E(t)E(n) = 593 - 20.25 \cdot 28 = 26$
3. Koeffizienten und Fehler der Gerade berechnen:
   $a = \frac{cov(t,n)}{var(t)} = \frac{26}{13.6875} = 1.8995$
   $b = E(n) - aE(t) = 28 - 1.8995 \cdot 20.25 = -10.4649$
   $r = \sqrt{\frac{cov(t,n)^2}{var(t)var(n)}} = \sqrt{\frac{26^2}{13.6875 \cdot 53.5}} = 0.9608$

4 Wahrscheinlichkeitsverteilung

4.1 Verteilungsfunktion

allgemein	diskret	kontinuierlich
$P(X \leq x) = F(x)$	$= \sum\limits_{k=-\infty}^{x} p_k$	$= \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(\tilde{x})d\tilde{x}$
$P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$		
$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$	$= \sum\limits_{k=a}^{b} p_k$	$= \int\limits_{a}^{b} \varphi(\tilde{x})d\tilde{x}$



Verteilungsfunktion der Normalverteilung

4.1.1 Eigenschaften

Bei einem Sprung gilt: **Sprunghöhe = Wahrscheinlichkeit des Wertes x**

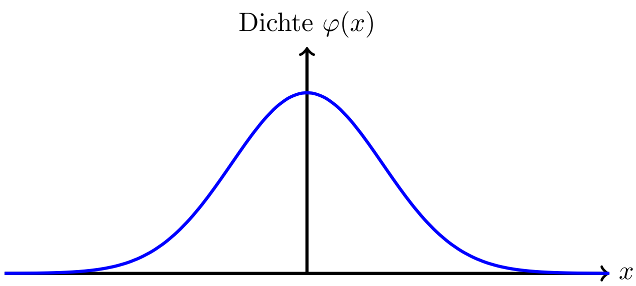
$\underbrace{\boxed{\mathbb{D}(F) = \mathbb{R}}}_{\text{Definitionsbereich}}$ $\underbrace{\boxed{\mathbb{W}(F) \in [0,1]}}_{\text{Wertebereich}}$ $\boxed{F(-\infty) = 0}$ $\boxed{F(\infty) = 1}$ $\boxed{F(x) \text{ ist monoton steigend}}$

4.2 Wahrscheinlichkeitsdichte

Dichtefunktion oder Wahrscheinlichkeitsdichte:
$\varphi(x) = F'(x)$
Bei Sprungstellen von F(x):
$\varphi(x)$ = Dirac mit Gewichtung der Sprunghöhe
Allgemein gilt:
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$

Erwartungswert: Wert mal W'keit

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)dx \quad \text{bzw.} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_k$$
$$E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x)dx \quad \text{bzw.} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_k$$
$$E(X^N) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^N \cdot \varphi(x)dx \quad \text{bzw.} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} x^N \cdot p_k$$



Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung

4.3 Rechenregeln für φ und F

Gegeben: X, Y Zufallsvariablen und φ_X, φ_Y bekannt

Verteilungsfunktion:	**Dichte:**
$F_{X+a}(x) = F_X(x-a)$	$\varphi_{X+a}(x) = \varphi_X(x-a)$
$F_{\lambda X}(x) = F_X(\frac{x}{\lambda})$	$\varphi_{\lambda X}(x) = \varphi_X(\frac{x}{\lambda})\frac{1}{\lambda}$
$F_{X+Y}(x) = F_X * \varphi_Y(y) = F_Y * \varphi_X(x)$	$\varphi_{X+Y}(x) = \varphi_X * \varphi_Y(x)$
$F_{\sqrt{X}}(x) = F_X(x^2)$	$\varphi_{\sqrt{X}}(x) = 2x\varphi_X(x^2)$
$F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$	$\varphi_{X^2}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\varphi_X(\sqrt{x}) + \varphi_X(-\sqrt{x}))$

4.3.1 Algorithmus Bsp.

1. Definition von F anwenden: $F_{\lambda X}(x) = P(\underbrace{\lambda X \leq x}_{*})$
2. Bedingung * umformen: $P(X \leq \frac{x}{\lambda}) = F_X(\frac{x}{\lambda})$
3. für Dichte: $\frac{d}{dx}$

$\varphi_{\lambda X}(x) = \frac{d}{dx}F_{\lambda X}(x) = \frac{d}{dx}F_X(\frac{x}{\lambda}) = \varphi_X(\frac{x}{\lambda})\frac{1}{\lambda}$

4.3.2 Maximalwert eines Intervalls

$X_1, \ldots X_i$ sind auf dem Intervall $[0, l]$ mit $F_X(x)$ verteilt
M=max$\{X_1, \ldots, X_i\}$
$F_M(x) = F_X(x)^n$

4.3.3 Median

Der Median $med(X)$ von X ist eine Zufallsvariable, welche für $F(med(X)) = \frac{1}{2}$ ist.

4.4 Normalverteilung

Viele kleine, unabhängige Zufallsvariable sammeln sich zu einer normalverteilten Zufallsvariable.

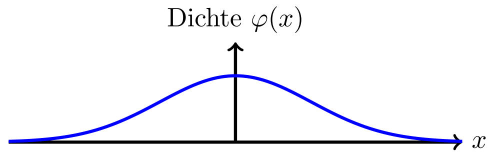
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = N(\mu;\sigma)$

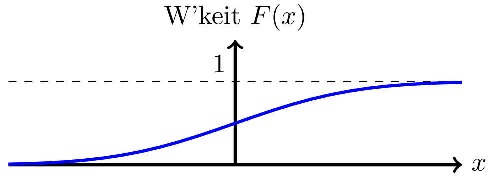
$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\tilde{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tilde{x}$

Addieren von Normalverteilungen:

$\boxed{N(\mu_1;\sigma_1) + N(\mu_2;\sigma_2) = N(\mu_1+\mu_2;\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})}$

Für $F(-x)$ gilt $F(-x) = 1 - F(x)$





4.4.1 Standardisierung

Erwartungswert: $E(X) = \mu$ (=0 bei Standardnormalver.)
Varianz : $var(X) = \sigma^2$ (=1 bei Standardnormalver.)

$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$ mit $E(Z) = 0$ und $var(Z) = 1$

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = F_X(\sigma z + \mu)$
$F_X(x) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$
$\varphi_Z(z) = \sigma \cdot \varphi_X(\sigma z + \mu)$
$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$

68% der Werte liegen im Intervall $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$
95% in $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$
99.7% in $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$

Rezept: (Berechnen der W'keit das $X \in [x_{min}, x_{max}]$)

1. W'keit Formel hinschreiben
   $P(x_{min} \leq X \leq x_{max})$
2. Standardisieren:
   $P_Z\left(\frac{x_{min}-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x_{max}-\mu}{\sigma}\right)$
3. In Verteilungsfunktion einfüllen:
   $P_Z = F\left(\frac{x_{max}-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{x_{min}-\mu}{\sigma}\right)$
4. Werte aus der Tabelle auf Seite 17 auslesen:
   Bei negativen Werten:
   $F(-0.7) = 1 - F(0.7) = 1 - 0.7580 = 0.2420$
   Ist der gesuchte Wert **zwischen zwei Werten** der Tabelle, dann der Wert aus den benachbarten Werten abschätzen. Bsp:
   $F(0.72) = 0.7642, \quad F(0.73) = 0.7673 \rightarrow F(0.725) \approx 0.765$

Beispiel:
Ein Signal mit normalverteilten Werten X mit Erwartungswert 1 und Standardabweichung 2 wird über einen Eingangsverstärker geleitet, der Werte zwischen ± 3.3 verarbeiten kann, bevor er übersteuert wird. Wie häufig wird der Verstärker übersteuert?
$\mu = 1$, $\sigma = 2$

1. $P(-3.3 \leq X \leq 3.3)$
2. $P\left(\frac{-3.3-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{3.3-\mu}{\sigma}\right)$
   $P\left(\frac{-3.3-1}{2} \leq Z \leq \frac{3.3-1}{2}\right)$
   $P(-2.15 \leq Z \leq 1.15)$
3. $F(1.15) - F(-2.15) = F(1.15) - 1 + F(2.15)$
4. $0.8749 + 0.9842 - 1 = 0.8591$

4.4.2 Zentraler Grenzwertsatz

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind lauter identisch verteilte (nicht notwendig normalverteilt!) unabhängige Zufallsvariablen mit demselben Erwartungswert μ und derselben Varianz σ^2 und mit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Dann hat die Summe

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

den Erwartungswert $n\mu$ und die Varianz $n\sigma^2$.
Die damit verbundene standardisierte ($E(S_n) = 0, var(S_n) = 1$) Variable S_n ist somit wie folgt definiert:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - n\mu\right] = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

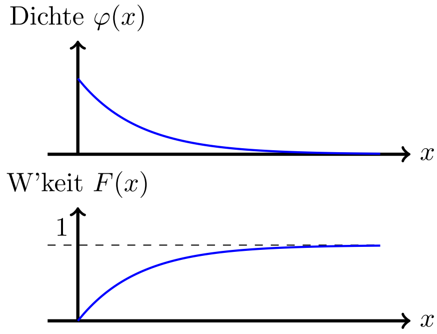
Für $\boldsymbol{n \rightarrow \infty}$ strebt die Verteilung von S_n gegen die Standardnormalverteilung.

4.5 Exponentialverteilung

Zur Ermittlung der Dauer bis zum Ausfall/Zerfall von Bauteilen/Stoffen ohne Gedächnis
(W'keit, dass X in der nächsten Minute defekt geht = const.).
Beispiele :

- Lebensdauer von Atomen beim radioaktiven Zerfall
- Lebensdauer von Bauteilen, Maschinen & Geräten (MTBF - Mean Time Between Failure = $\frac{1}{a}$)

gilt $P(X \leq t) = P(X \leq t_0 + t | X > t_0)$
$P(X > t) = P(X > t_0 + t | X > t_0)$



<u>Dichtefunktion und Verteilungsfunktion</u>

$$\varphi(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$X < x$ Ausfall/Zerfall
$X > x$ kein Ausfall/Zerfall

<u>Halbwertszeit</u>

$$t_{1/2} = \frac{log(2)}{a} \qquad a = \frac{log(2)}{t_{1/2}}$$

<u>Erwartungswert und Varianz</u>

$$E(X) = \frac{1}{a}$$
$$var(X) = \frac{1}{a^2}$$

<u>Lebensdauer von mehreren **unabhängigen** Bauteilen</u>

$$\begin{aligned} P(X > x) &= P(X_1 > x_1 \cap X_2 > x_2 \cap X_3 > x_3 \dots) \\ &= P(X_1 > x_1) \cdot P(X_2 > x_2) \cdot P(X_3 > x_3) \dots \\ &= (1 - P(X_1 \leq x_1)) \cdot (1 - P(X_2 \leq x_2)) \cdot (1 - P(X_3 \leq x_3)) \dots \\ &= (1 - F(x_1)) \cdot (1 - F(x_2)) \cdot (1 - F(x_3)) \dots \end{aligned}$$

4.6 Hypergeometrische Verteilung

Ist die Wahrscheinlichkeit dass in einer n Elemente umfassenden Stichprobe aus einer Grundgesamtheit von N Elementen, von denen M eine spezielle Eigenschaft besitzen, m Elemente mit der Eigenschaft zu finden sind.

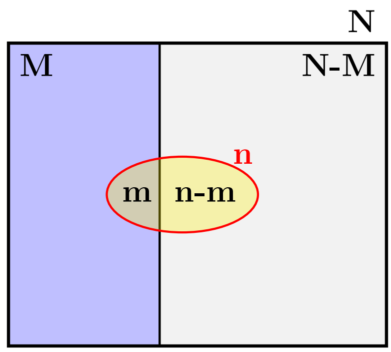
$$p(m) = P(X = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{für } 0 \leq m \leq M \text{ und } m \leq N$$

Erwartungswert: $E(X) = n\frac{M}{N}$

Varianz: $var(X) = n\frac{M(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$

Beispiel:
Lotto, $N = 45$ Zahlen, $M = 6$ (die gezogenen Zahlen), $n = 6$ (meine Zahlen)

$$P(X = 4) = P(\text{Ein Vierer}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} = 0.001364$$



4.7 Poissonverteilung

Kann als Approximation der Binominalverteilung (für kleine p) verwendet werden.

$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ W'keit dass k Ereignisse im Intervall [0,x] auftreten

Erwartungswert: $E(X) = \lambda$

Varianz: $var(X) = \lambda$

$P(X < k) \leq \sum_0^k P_\lambda(k) = \sum_0^k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
$P(X > k) = 1 - P(X < k)$
x = Anzahl Versuche
λ = Ereignisse pro Intervall im Mittel

Anwendungsbeispiele:
Für die Häufigkeiten seltener Ereignisse. Anzahl Anrufe bei einer Telefonzentrale in einer gewissen Periode. Anzahl grosse Versicherungsschäden in einer gewissen Periode. Anzahl Jobs, die bei einem Server ankommen. Anzahl Ereignisse in einem Zeitintervall. Anzahl Lokomotiven der SBB, die in der nächsten Woche einen Defekt haben. Anzahl der Gewinner mit 4 Richtigen im Lotto.

4.8 Binomialverteilung

Wird angewendet bei einem Experiment mit nur zwei Ausgängen (Ereignis mit W'keit p tritt ein, Ereignis tritt nicht ein). Eine Zufallsvariable mit diskreten Werten $k \in \{0, \dots, n\}$ heisst binomialverteilt zum Parameter p, wenn die Wahrscheinlichkeit des Wertes k wie folgt ist:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \mu = E(X) = p \cdot n \qquad \sigma^2 = var(X) = n \cdot p(1-p)$$

n: Versuche k: k-mal erfolgreich p: Wahrscheinlichkeit

Approximation mit Normalverteilung: $P(a \leq x \leq b) \simeq \underbrace{P(a - 0.5 \leq x \leq b + 0.5)}_{\text{Normalverteilung}}$

Achtung: Für seltene Ereignisse Poissonverteilung verwenden!

Beispiel: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 350 Leuten genau k ($k \leq 350$) heute Geburtstag haben?
$P(k) = \binom{350}{k} \left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{350-k}$

4.9 Gleichverteilung

Stetig

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Erwartungswert: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Varianz: $var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Diskret

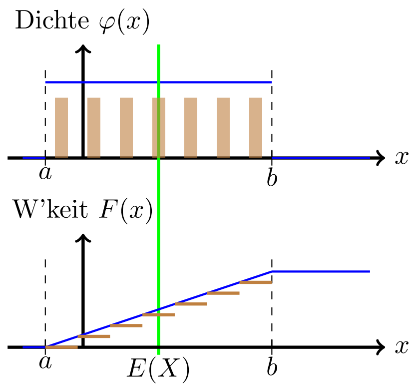
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{n} & 1 \leq x \leq n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeit: $p(k) = \frac{1}{n}$

Erwartungswert: $E(X) = \frac{n+1}{2}$

Varianz: $var(X) = \frac{n^2-1}{12}$

$E(X^2) = \frac{2n^2+3n+1}{6}$



Stetig: Blau Diskret: Braun

4.10 Potenzgesetze (Power-Laws)

Die Normalverteilung beschreibt (physikalische) Grössen, die vor allem in einer bestimmten Grössenordnung vorkommen. Die Potenzgesetze dienen dazu, Grössen welche einen grossen Wertebereich annehmen können, zu beschreiben.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\alpha - 1}{x_{min}} \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha} & x \geq x_{min} \\ 0 & sonst \end{cases} \qquad \text{mit } \alpha > 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{1-\alpha} & x \geq x_{min} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2} \cdot x_{min} \qquad \alpha > 2$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} \cdot x_{min}^2 \qquad \alpha > 3$$

$$var(X) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}\right)^2\right) \cdot x_{min}^2 \qquad \alpha > 3$$

$$x_{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{\alpha - 1}} \cdot x_{min} \quad \text{Median} \qquad \alpha > 1$$

Eine nach dem Potenzgesetz verteilte Zufallsvariable kann man daran erkennen, dass die Dichtefunktion in doppelt logarithmischer Darstellung eine Gerade ist. Wegen $\log p(x) = -\alpha \log x + \log C$ ist die Steigung der Geraden $-\alpha$.

Der Parameter α kann mithilfe eines Maximum-Likelihood Schätzers bestimmt werden. Es gilt: $\alpha = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}} \log \frac{x_i}{x_{m}in}$

5 Schätzen

5.1 Konsistente Schätzer

Ein Schätzer ist konsistent, wenn $\lim\limits_{n\to\infty}$ = E(X) ergibt

Der Mittelwert der Stichprobe ist ein konsistenter Schätzer. $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{X_1+...+X_n}{n} = E(X)$

Der Schätzer $\bar{X} = \frac{X_1+...+X_n}{n}$ heisst der Stichprobenmittelwert der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$.

5.2 Erwartungstreue Schätzer

Ein Schätzer ist erwartungstreu, wenn $E(\text{Schätzer}) = E(\text{realer Wert})$

Ist der Stichprobenmittelwert ein konsistenter Schätzer, aber er ist sogar erwartungstreu: $E(\mu(X_1, \ldots, X_n)) = \frac{E(X_1)+...+E(X_n)}{n} = E(X)$

Erwartungstreue Schätzer für **var(x)** ist:

$$\boxed{S^2 = \frac{n}{n-1}(\underbrace{\frac{1}{n}\sum X_i^2}_{E(X^2)} - \underbrace{(\frac{1}{n}\sum X_i)^2)}_{E(X)^2}}$$

Stichprobenvarianz, empirische Varianz

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

$\bar{X} = M_n$ heisst Stichprobenmittelwert

5.2.1 Kleinstmöglicher Fehler

$E((E(X) - \frac{x_1+...+x_n}{n})^2) = minimal$

5.3 Maximum Likelihood Schätzer

Sinn des Likelihoodschäzers ist einen unbekannten Parameter ϑ einer Dichtefunktion $\phi(x, \vartheta)$ zu schätzen.

$$L(x_1, \ldots, x_n; \vartheta) = \phi(x_1, \vartheta) \cdot \ldots \cdot \phi(x_n, \vartheta) \implies \frac{d}{d\vartheta}L(x_1, \ldots, x_n; \vartheta) = 0 \implies \vartheta = ?\ \text{(Maximum-Likelihood-Schätzer)}$$

Für eine normalverteilte Grösse lautet die Likelihood Funktion: $L(x_1, \ldots, x_n; \vartheta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta)^2}$

Der unbekannte Parameter ϑ kann nun durch suchen des Maximums der Funktion ermittelt werden (ϑ wird variert). Die Funktion wird maximal, wenn die Summe im Exponent minimal wird. Das ϑ, das die Summe minimiert, kann durch **ableiten nach ϑ und null setzen ermittelt** werden. Es können auch Stichprobenvarianz S^2 oder Ähnliches ermittelt werden.

5.4 Verteilung der Schätzwerte

$X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt

1. $\bar{X}$ und S^2 sind unabhängig
2. $\bar{X} = \frac{X_1+...X_n}{n}$ ist normalverteilt mit $E(\bar{X}) = \mu$ und $var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
3. $\boxed{\frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2 \text{ ist } \chi^2_{n-1}\text{-verteilt}}$ mit $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

5.5 Konfidenzintervall von Messwerten

5.5.1 Konfidenzintervall

Ein Intervall $[L(X_1,\dots,X_n), R(X_1,\dots,X_n)]$ heisst ein $1-\alpha$- Konfidenzintervall für den Parameter ϑ, wenn der wahre Wert des Parameters ϑ höchstens mit Wahrscheinlichkeit α ausserhalb des Intervalls liegt.

Es gilt: $P(L \le \vartheta \le R) = 1-\alpha$

5.5.2 Bei bekannter Varianz σ^2

Falls Varianz σ^2 von Messwerten bekannt ist, handelt es sich bei $\bar{X}$ um **normalverteilte** Zufallsvariable mit Varianz σ^2/n.

Also kann sehr einfach ein x für das Konfidenzintervall gefunden werden: (Quantilen der Normalverteilung s. 17) $P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le x\right) = 1-\alpha \Rightarrow F(x) = 1-\frac{\alpha}{2}$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall $\mu \in \left[\bar{X} - x\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + x\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ mit W'keit $1-\alpha$

5.5.3 Bei geschätzter Varianz S^2

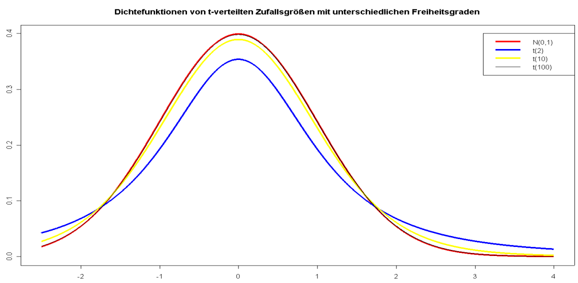
t-Verteilung (Tabelle Quantilen der t-Verteilung verwenden s.19)
Der Mittelwert $(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n})$ normalverteilter Daten ist t-Verteilt, wenn Varianz mit Stichprobenvarianz geschätzt wurde.
Ab einer gewissen Anzahl Messungen ($n \ge 30$) kann näherungsweise auch mit der Normalverteilung gerechnet werden.

Checkliste

1) $\bar{X}, S$ als Schätzungen aus x_i bestimmen
2) t aus *t-Tabelle* ($k = n-1$) für $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ = W'keit für eine Seite
3) Intervall $\left[\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$, $(1-\alpha)$ Konfidenzintervall

Anwendung

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ t-Verteilt



$\lim\limits_{x\to\infty} = 0$ aber langsamer wie bei Gaussverteilung

Beispiel: 10 Messungen ergeben Durchschnittswert 4,7 und eine Standardabweichung 0,1. Finde ein 99% Konfidenzintervall für μ.

Finde t:

$k = n-1$	...	0,995
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	...	3,2498

$\left[\bar{X} - 3,2498\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 3,2498\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow \left[4{,}7 - 3{,}2498\frac{0{,}1}{\sqrt{10}}, 4{,}7 + 3{,}2498\frac{0{,}1}{\sqrt{10}}\right]$

$\mu \in [4{,}5072, 4{,}8028]$ mit Wahrscheinlichkeit 99%

6 Hypothesentest

6.1 Grundsätze

- "Man braucht Aussagen, die man widerlegen könnte."
- Irrtum ist möglich (Irrtumsw'keit α)
- Beweis durch Widerlegen des Gegenbeweises

6.2 Vorgehen (Nullhypothese)

1. Hypothese, die der Test **widerlegen** soll
   $\rightarrow$ Nullhypothese $\Rightarrow$ Keine Wirkung/Effekt
2. Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05, 0.01, \ldots$ (Niveau=1-α)
3. Testgrösse X, W'keitsverteilung $\rightarrow$ Nur Werte bis zum getesteten Ereignis betrachten! (Nicht Zukunft mit einbeziehen)
4. Bestimmung der Schranken x_{krit} für:
   - Einseitiger Test $P(X > x_{krit}) = \alpha$
   - Zweiseitiger Test $P(|X| > x_{krit}) = \alpha/2$
5. Wert für $F\left(\frac{x_{krit}-\mu}{\sigma}\right)$ aus Tabelle 10.1 (S. 17)
6. Falls Messungen ergeben $X > x_{krit} \Longrightarrow$ Hypothese **falsch** mit W'keit $1-\alpha$

6.3 Testen einer diskreten Verteilung

6.3.1 χ^2-Test mit k-möglichen Ausgängen

Mögliche Ausgänge: I_i, $i = 1, \ldots, k$

Wahrscheinlichkeit von Ausgang i: $P(X \in I_i) = p_i$

n Beobachtungen, davon jeweils n_i mit Ausgang i

$$\boxed{D = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}}$$

ist χ^2_{k-1}, mit $k-1$ Freiheitsgrade

Durchführung des χ^2-Tests

1. Daten erfassen: Damit der Test optimal funktioniert muss folgende Bedingung erfüllt sein: $\boldsymbol{n_i \geq 5 \ \forall\ i}$

2. **Diskrepanz** D berechnen Vorlage auf GitHub

i	Ausgang	p_i	n_i	$(n_i - np_i)$	$(n_i - np_i)^2/np_i$
1					
2					
3					
4					
5					
			n		$D = \sum$

3. Schwellenwert für D: $x_{1-\alpha}$ für $F_{\chi^2_{k-1}}(x) = 1-\alpha$ aus χ^2_{k-1}-Tabelle lesen.

Wenn α nicht vorgegeben, dann α z.B. 0.1 oder 0.05 wählen.

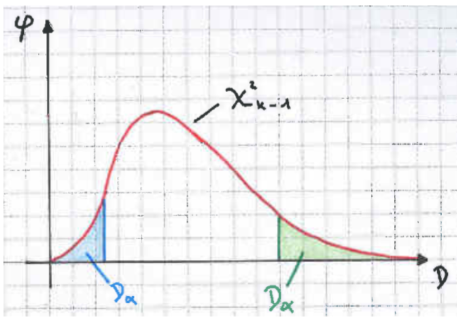
Anzahl Freiheitsgrade= Anzahl Ausgänge$-1 = k-1$

$p = 1-\alpha$ $\qquad \alpha =$Irrtumswahrscheinlichkeit

$D \geq x_{1-\alpha}$ Hypothese ist unwahrscheinlich!

$D < x_{1-\alpha}$ Hypothese nicht wiederlegbar!

$D \leq x_{\alpha}$ Daten möglicherweise "fabriziert"!



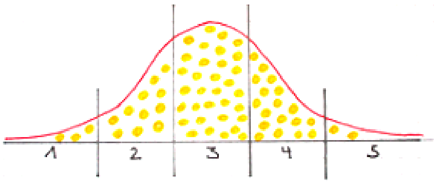
Nachteile: -Grob verpixeltes Bild der Verteilung

-wenn wenig Messwerte $\Longrightarrow$ geringe Aussagekraft

6.4 Testen einer stetigen Verteilung

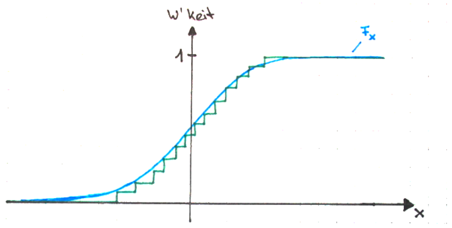
6.4.1 Mit χ^2-Test

Der χ^2-Test kann im Prinzip nur diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen testen.
→ Will man eine stetige Verteilung testen, muss man zunächst Klassen von Werten bilden. → Anschliessend deren Wahrscheinlichkeiten berechnen und dann prüfen ob die künstlich diskrete Verteilung im χ^2-Test Bestand hat.
⇒ Achtung: Durch die Klassenbildung wird eine künstliche Diskretisierung eingeführt.



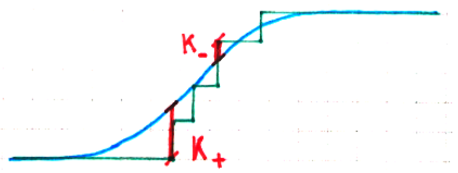
6.4.2 Kolmogorov-Smirnov Test

Nullhypothese	Messwerte $x_1, ..., x_n$ haben Verteilungsfunktion F_X
Idee:	Vergleiche Verteilungsfunktionen (statt der Dichtefunktionen)
Daten:	X Zufallsvariable, Verteilungsfunktion F_X, n Messungen ergeben Stichprobe x_i



F_X theoretische Verteilungsfunktion von X

empirische Verteilungsfunktion $\frac{Anzahl\{x_i \leq x\}}{n}$



Testgrösse
max (F_{emp}(x) - F_x(x))
min ($F_{emp}(x)$- $F_x(x)$)

Durchführen des Kolmogorov-Smirnov Test

1. Werte $x_1, ..., x_n$ in aufsteigender Reihenfolge sortieren
2. **$K_n^{\pm}$ berechnen**

$$\boxed{K_n^+ = \sqrt{n} \max_{1<x<n} \left(\frac{i}{n} - F_X(x_i) \right)}$$

$$\boxed{K_n^- = \sqrt{n} \max_{1<x<n} \left(F_X(x_i) - \frac{i-1}{n} \right)}$$

Mit Tabelle:

i	x_i	i/n	$F_X(x_i)$	$(i-1)/n$
1	$min(x_i)$			
	$\vdots$			
n	$max(x_i)$			

3. Finde $t_{n,1-\alpha}$,$t_{n,\alpha}$ in der Tabelle 10.3 (S. 18)
4. Falls $K_n^+ > t_{n,1-\alpha}$ oder $K_n^- < t_{n,\alpha}$, verwerfe die Hypothese, dass X die Verteilungsfunktion F_X hat.

6.5 Vergleichen von Mittelwerten (t-Test)

Nullhypothese	$\Rightarrow E(X) = E(Y)$
Daten	**n** Messungen von $x_i \Rightarrow \bar{X}$; S_X^2
	m Messungen von $y_i \Rightarrow \bar{Y}$; S_Y^2
Testgrösse	$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1) \cdot S_X^2 + (m-1) \cdot S_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$
	T ist t-verteilt
Schwellenwert	t_{krit} aus Tabelle 10.4 mit Freiheitsgrad $n+m-2$ und $p = 1-\alpha$
Test	Falls $T > t_{krit}$ wird die Hypothese $E(X) = E(Y)$ verworfen

7 Prozessverbesserungen

7.1 Gewichteter Mittelwert

Besitzt man die Möglichkeit Messwerte aus zwei Messsystemen X_1 und X_2 mit unterschiedlicher Genauigkeit $(var(X_1)/var(X_2))$ zu beziehen, so kann man die Messwerte so gewichten, dass eine optimale Genauigkeit besteht.

$\boxed{X_{opt} = t \cdot X_1 + (1-t) \cdot X_2}$ $\quad \rightarrow t$ so wählen, dass $var(X_{opt})$ minimal wird

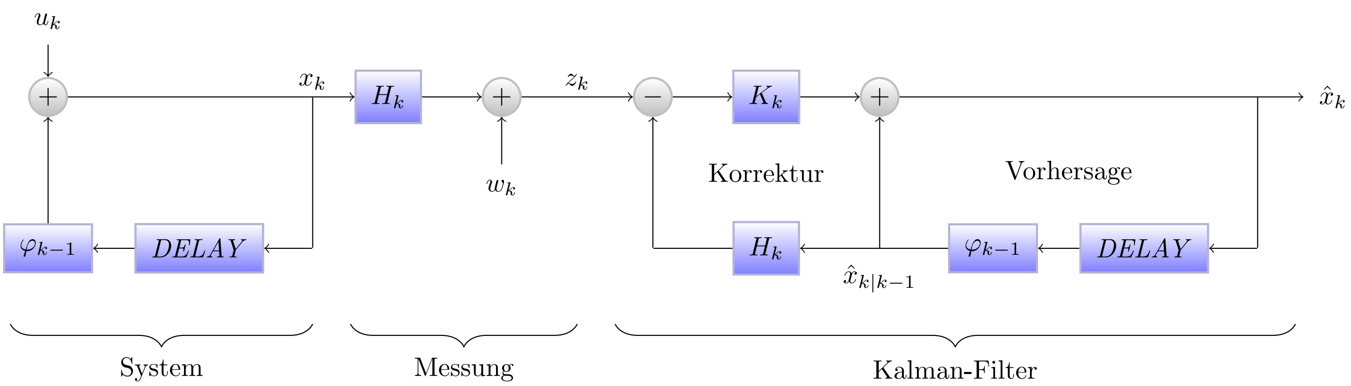
$$var(X_{opt}) = t^2 \cdot var(X_1) + (1-t)^2 \cdot var(X_2) \qquad \rightarrow \text{nach } t \text{ ableiten und Null setzen}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} ; \boxed{1 - t = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \qquad var(X_{opt}) = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

7.2 Kalman-Filter

Prinzip: bestmögliche Schätzung für Systemzustand auf Grund von fehlerbehafteter Messung und Systementwicklung.

7.2.1 Datenfluss im Kalman-Filter



u_k:	Systemungenauigkeiten
w_k:	Messfehler
x_k:	Unbeobachtete Zustandsvariable
z_k:	Fehlerbehaftete Messung von x_k
$\hat{x}_{k\|k-1}$:	Vorhersage: $\hat{x}_{k\|k-1} = \varphi_{k-1}\hat{x}_{k-1}$
$\hat{x}_k$:	Schätzer für x_k (aus $\hat{x}_{k\|k-1}$ und z_k)

φ_{k-1}:	Systementwicklung: $x_{k+1} = \varphi_k x_k + u_k$
H_k:	Messung der Zustandsvariablen: $z_k = H_k x_k + w_k$
K_k:	Kalman-Matrix: $\hat{x}_k = (I - K_k H_k)\hat{x}_{k\|k-1} + K_k z_k$

$$Q_k = E(u_k u_k^t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$R_k = E(w_k w_k^t) = \begin{pmatrix} \rho_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \rho_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$P_k = E(\tilde{x}_k \tilde{x}_k^t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{k,1}^2 & \tilde{x}_{k,1}\tilde{x}_{k,2} & \dots \\ \tilde{x}_{k,2}\tilde{x}_{k,1} & \tilde{x}_{k,2}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Q_k:	Systemfehler-Kovarianzmatrix
u_k:	Systemungenauigkeiten
σ_i:	Varianz der Systemungenauigkeiten
R_k:	Messfehler-Kovarianzmatrix
w_k:	Messfehler
ρ_i:	Varianz der Messungen
P_k:	Schätzfehler-Kovarianzmatrix
$\tilde{x}_k$:	Schätzfehler: $\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k$

7.2.2 Vorgehen

1. Bestimmung des Zustandsvektors x_k und des Messvektors z_k
2. Aufstellen der Messmatrix H_k aus: $z_k = H_k x_k$
3. Berechnen der Systementwicklung φ_k damit $x_{k+1} = \varphi_k x_k$
4. Aufstellen der Fehler-Kovarianzmatrixen Q_k und R_k
5. **Vorhersage-Schritt:** $\boxed{\hat{x}_{k+1|k} = \varphi_k \hat{x}_k \qquad P_{k+1|k} = \varphi_k P_k \varphi_k^t + Q_k}$
6. **Korrektur-Schritt:** $\boxed{\hat{x}_k = (I - K_k H_k)\hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k \qquad P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^t + K_k R_k K_k^t}$
7. **Bestimmung des optimalen K_k:** $\boxed{K_k = P_{k|k-1} H_k^t (H_k P_{k|k-1} H_k^t + R_k)^{-1}}$
8. Damit wird P_k vereinfacht zu: $P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$ $\rightarrow$ P_k bleibt variabel

7.2.3 Vereinfachung

In der Praxis kann meist davon ausgegangen werden, dass φ_k, R_k, Q_k und H_k konstant sind. Damit werden auch P_k und K_k konstant und die Vorhersage wird vereinfacht zu: $\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K(z_k - H\hat{x}_{k|k-1})$

8 Wichtige Formeln

8.1 Reihenentwicklungen

Geometrische Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad x \neq 1$$

Binominalreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha \qquad x \in (-1,1)$$

E-Funktion
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

9 Auswahl der Verteilung

Gleichverteilung	Alle möglichen Werte haben die gleiche Wahrscheinlichkeit
Exponentialverteilung	Dauer von zufälligen Zeitintervallen ohne Gedächtnis
Normalverteilung	Viele kleine, unabhängige Zufallsprozesse sammeln sich zu einer normalverteilten Zufallsvariable
Binomialverteilung	Experiment mit zwei Ausgängen
Hypergeometrische Verteilung	Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe, Elemente einer Teilmenge zu finden sind
Poissonverteilung	Häufigkeiten seltener Ereignisse
t-Verteilung	Varianz aus Stichproben geschätzt (für grosse n kann Normalverteilung verwendet werden)
χ^2-Verteilung	Test ob eine Zufallsvariable Normalverteilt ist. Anwendung bei Hypothesentests

10 Tabellen

10.1 Quantilen der Normalverteilung

p	x
0.75	0.6745
0.8	0.8416
0.9	1.2816
0.95	1.6449
0.975	1.9600
0.99	2.3263
0.995	2.5758
0.999	3.0902
0.9995	3.2905

10.2 Verteilungsfunktion der Normalverteilung

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

10.3 Quantilen für den Kolmogorov-Smirnov-Test

n	$p = 0.01$	$p = 0.05$	$p = 0.1$	$p = 0.25$	$p = 0.5$	$p = 0.75$	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
1	0.01000	0.05000	0.10000	0.25000	0.50000	0.75000	0.90000	0.95000	0.99000
2	0.01400	0.06749	0.12955	0.29289	0.51764	0.70711	0.96700	1.09799	1.27279
3	0.01699	0.07919	0.14714	0.31117	0.51469	0.75394	0.97828	1.10166	1.35889
4	0.01943	0.08789	0.15899	0.32023	0.51104	0.76419	0.98531	1.13043	1.37774
5	0.02152	0.09471	0.16750	0.32490	0.52449	0.76741	0.99948	1.13916	1.40242
6	0.02336	0.10022	0.17385	0.32717	0.53193	0.77028	1.00520	1.14634	1.41435
7	0.02501	0.10479	0.17873	0.32804	0.53635	0.77552	1.00929	1.15373	1.42457
8	0.02650	0.10863	0.18256	0.32802	0.53916	0.77971	1.01346	1.15859	1.43272
9	0.02786	0.11191	0.18560	0.32745	0.54109	0.78246	1.01731	1.16239	1.43878
10	0.02912	0.11473	0.18803	0.32975	0.54258	0.78454	1.02016	1.16582	1.44397
11	0.03028	0.11718	0.19000	0.33304	0.54390	0.78633	1.02249	1.16885	1.44837
12	0.03137	0.11933	0.19160	0.33570	0.54527	0.78802	1.02458	1.17139	1.45207
13	0.03239	0.12123	0.19291	0.33789	0.54682	0.78966	1.02649	1.17357	1.45527
14	0.03334	0.12290	0.19396	0.33970	0.54856	0.79122	1.02823	1.17552	1.45810
15	0.03424	0.12439	0.19482	0.34122	0.55002	0.79259	1.02977	1.17728	1.46060
16	0.03509	0.12573	0.19552	0.34250	0.55123	0.79377	1.03113	1.17888	1.46283
17	0.03589	0.12692	0.19607	0.34360	0.55228	0.79482	1.03237	1.18032	1.46483
18	0.03665	0.12799	0.19650	0.34454	0.55319	0.79578	1.03351	1.18162	1.46664
19	0.03738	0.12895	0.19684	0.34535	0.55400	0.79667	1.03457	1.18282	1.46830
20	0.03807	0.12982	0.19709	0.34607	0.55475	0.79752	1.03555	1.18392	1.46981
30	0.04354	0.13510	0.20063	0.35087	0.56047	0.80362	1.04243	1.19164	1.48009
50	0.05005	0.13755	0.20794	0.35713	0.56644	0.80988	1.04933	1.19921	1.48969
100	0.05698	0.14472	0.21370	0.36331	0.57269	0.81634	1.05627	1.20666	1.49864
200	0.06049	0.14887	0.21816	0.36784	0.57725	0.82099	1.06117	1.21180	1.50458

10.4 Quantilen der t-Verteilung

$k = n - 1$	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.8165	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.6901	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.6858	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
50	0.6794	0.8489	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
100	0.6770	0.8452	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
500	0.6750	0.8423	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857
10^3	0.6747	0.8420	1.2824	1.6464	1.9623	2.3301	2.5808
10^4	0.6745	0.8417	1.2816	1.6450	1.9602	2.3267	2.5763
10^5	0.6745	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5759
10^6	0.6745	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758

10.5 Quantilen der χ^2-Verteilung

$k = n - 1$	$p = 0.01$	$p = 0.05$	$p = 0.1$	$p = 0.25$	$p = 0.5$	$p = 0.75$	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	6.635
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	9.210
3	0.115	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	11.345
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	13.277
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	15.086
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	16.812
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	18.475
8	1.646	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	20.090
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	23.209
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.701	17.275	19.675	24.725
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.845	18.549	21.026	26.217
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.984	19.812	22.362	27.688
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.117	21.064	23.685	29.141
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.245	22.307	24.996	30.578
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.369	23.542	26.296	32.000
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.489	24.769	27.587	33.409
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.605	25.989	28.869	34.805
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.718	27.204	30.144	36.191
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.828	28.412	31.410	37.566
21	8.897	11.591	13.240	16.344	20.337	24.935	29.615	32.671	38.932
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.039	30.813	33.924	40.289
23	10.196	13.091	14.848	18.137	22.337	27.141	32.007	35.172	41.638
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.241	33.196	36.415	42.980
25	11.524	14.611	16.473	19.939	24.337	29.339	34.382	37.652	44.314
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.435	35.563	38.885	45.642
27	12.879	16.151	18.114	21.749	26.336	31.528	36.741	40.113	46.963
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.620	37.916	41.337	48.278
29	14.256	17.708	19.768	23.567	28.336	33.711	39.087	42.557	49.588
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.800	40.256	43.773	50.892
50	29.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.334	63.167	67.505	76.154
100	70.065	77.929	82.358	90.133	99.334	109.141	118.498	124.342	135.807
500	429.388	449.147	459.926	478.323	499.333	520.950	540.930	553.127	576.493
1000	898.912	927.594	943.133	969.484	999.333	1029.790	1057.724	1074.679	1106.969

