# WrStat

S.Walker sowie weiter Autoren

3. Dezember 2019

## Inhaltsverzeichnis


| | |
|---|---|
| **1 Kombinatorik** | **2** |
| **2 Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit** | **3** |
| **3 Erwartungswert und Varianz** | **5** |
| **4 Wahrscheinlichkeitsverteilung** | **6** |
| **5 Schätzen** Skript S.?? | **10** |
| **6 Hypothesentest** Skript S.?? | **12** |
| **7 Prozessverbesserungen** Skript S.?? | **14** |
| **8 Wichtige Formeln** | **15** |
| **9 Auswahl der Verteilung** | **15** |
| **10 Statistik / Wahrscheinlichkeit** | **16** |
| **11 Tabellen** | **17** |

# 1 Kombinatorik

## 1.1 Produktregel

**Für-jedes-gibt-es-Regel** $k$ Positionen müssen unabhängig von einander markiert werden, wobei $n_i$ verschiedene Markierungen zur Verfügung stehen.

$$\boxed{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i}$$

**Beispiel:** Wie viele mögliche Augenzahlbilder können entstehen, wenn zwei verschiedenfarbige Würfel geworfen werden?
**Antwort:** Der erste Würfel kann $n_1 = 6$ verschiedene Augenzahlen anzeigen, der zweite $n_2 = 6$. Da die beiden unabhängig sind gibt es $n_1 \cdot n_2 = 36$ verschiedene Augenzahlbilder.

## 1.2 Permutation

**Grundfrage:** Auf wie viele Arten lassen sich $n$ verschiedene Objekte anordnen? resp. Wie viele Permutationen von $n$ Objekten gibt es?

$\boxed{P_n = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!}$ oder Rekursiv: $\boxed{P_n = n \cdot P_{n-1}}$

**Beispiel:** In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können acht Läufer eines Rennens im Ziel eintreffen?
**Antwort:** Jede Reihenfolge ist möglich, also $8! = 40'320$ mögliche Reihenfolgen.

## 1.3 Kombination

**Grundfrage:** Auf wie viele Arten kann $k$ aus $n$ verschiedenen Objekte auswählen.

$$\boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_k^n = \binom{n}{k}}$$

**Beispiel:** Für ein Projekt stellt eine Firma mit 30 Mitarbeitern ein Team aus 5 Leuten zusammen. Auf wie viele Arten ist dies möglich?
**Antwort:** Es geht darum 5 von 30 Mitarbeitern auszuwählen, was auf $\binom{30}{5} = 142'506$ möglich ist.

## 1.4 Variation

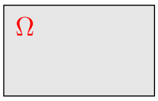
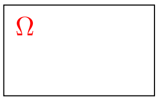
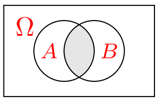
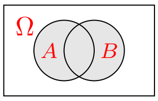
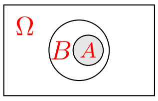
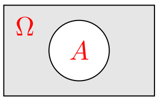
**Grundfrage:** Auf wie viele Arten kann man $k$ mal unter $n$ verschiedenen Objekten auswählen?

$$\boxed{V_{n,k} = n^k}$$

**Beispiel:** Auf wie viele Arten kann man eine Perlenkette der Länge $k = 10$ aus $n = 5$ Farben von Perlen herstellen?
**Antwort:** Die Variation Formel lässt sich auch über die Produktregel herleiten. Für jede Perle stehen wieder n verschiedene folge Perlen zur Auswahl. $V_{n,k} = n^k = 5^1 0 = 9'765'625$

# 2 Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit

| Begriff | Beschreibung | Modell |
|---|---|---|
| Elementarereignis | Der Ausgang eines Experiments | $\omega$ |
| alle Elementarereignisse | Alle mögliche Ausgänge eines Experiments | $\Omega$ |
| Ereignis | Teilmenge von $\Omega$ $\quad A$ eingetreten $\Leftrightarrow$ Versuchsausgang $\omega \in A$ | $A \subset \Omega$ |

| Begriff | Beschreibung | Bild | Modell |
|---|---|---|---|
| Sicheres Ereignis | tritt immer ein |   | $\Omega$ |
| Unmögliches Ereignis | kann nicht eintreten |   | $\emptyset = \{\}$ |
| $A$ und $B$ | Schnittmenge |   | $A \cap B$ |
| $A$ oder $B$ | Vereinigung |   | $A \cup B$ |
| $A$ hat $B$ zur folge | A ist in B enthalten |   | $A \subset B$ |
| nicht $A$ | Komplementär Ereignis |   | $\Omega \setminus A$ |

## 2.1 Wahrscheinlichkeit & Rechenregeln

| | |
|---|---|
| Wertebereich: | $0 \leq P(A) \leq 1$ |
| Sicheres Ereignis: | $P(\Omega) = 1$ |
| unmögliches Ereignis: | $P(\emptyset) = 0$ |
| komplementär Ereignis: | $P(\bar{A}) = P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$ |
| Differenz der Ereignisse A und B: | $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ |
| Vereinigung zweier Ereignisse: | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ |

$$P(A) = \lim_{\text{Anzahl Versuche}\to\infty} \frac{\text{Anzahl Versuche bei der A eingetreten ist}}{\text{Anzahl Versuche}}$$

## 2.2 Laplace-Experiment

In einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega$ haben alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit.

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

**Beispiele:** Münzen werfen wenn der Rand vernachlässigt wird, Würfeln...

## 2.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $A$ unter der Bedingung, dass das Ereignis $B$ bereits eingetreten ist.

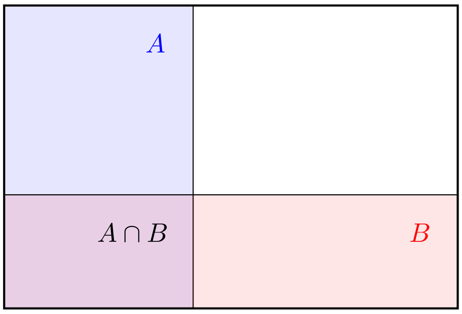
$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} = \underbrace{\frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)}_{\text{nur wenn unabhängig}}$$

$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$

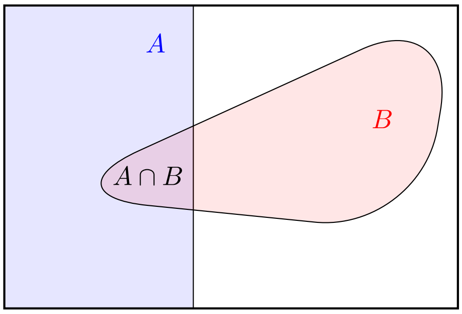
## 2.4 Unabhängige Ereignise

Für sie gilt $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

Die Tatsache, dass A eingetreten ist, hat keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von B.
Unabhängige Ereignisse $A$ und $B$ liegen vor, wenn: $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$
Wenn Ereignisse nicht gleichzeitig eintreten können, so sind sie abhängig.




Unabhänige Ereignisse




Abhänige Ereignisse

Beim Beispiel mit abhängigen Ereignissen wird $A$ unwahrscheinlicher, wenn bereits $B$ eingetroffen ist.

## 2.5 Totale Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}$$

in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} P(A_1) \\ P(A_2) \\ \vdots \\ P(A_n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P(A_1|B_1) & P(A_1|B_2) & \dots & P(A_1|B_n) \\ P(A_2|B_1) & P(A_2|B_2) & \dots & P(A_2|B_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ P(A_m|B_1) & P(A_m|B_2) & \dots & P(A_m|B_n) \end{pmatrix}}_{\text{W'keitsmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} P(B_1) \\ P(B_2) \\ \vdots \\ P(B_n) \end{pmatrix}$$

## 2.6 Satz von Bayes

$$\boxed{P(B \mid A) = P(A \mid B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}}$$

## 2.7 Google Matrix

Es gibt folgende Ereignisse: $P(S_i)$ ={Ein User ist auf der Seite i} und
$P(S'_j)$ ={Ein User ist nach einem Klick auf der Seite j}
nach einiger Zeit ergibt sich ein Gleichgewicht $P(S_i) = P(S'_j)$
$P(S'_j) = P(S'_j|S_1)P(S_1) + P(S'_j|S_2)P(S_2) + \dots$

$$\begin{pmatrix} P(S'_1) \\ P(S'_2) \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P(S'_1|S_1)P(S_1) & P(S'_1|S_2)P(S_2) & \dots \\ P(S'_2|S_1)P(S_1) & P(S'_2|S_2)P(S_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{\text{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} P(S_1) \\ P(S_2) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{p (Pagerank)}} \rightarrow Hp = p$$

Wird der freie Wille noch einberechnet, dann gilt: $H' = \alpha H + \frac{1-\alpha}{\textbf{Anzahl Seiten}} A$ wobei A nur aus 1en besteht.

# 3 Erwartungswert und Varianz

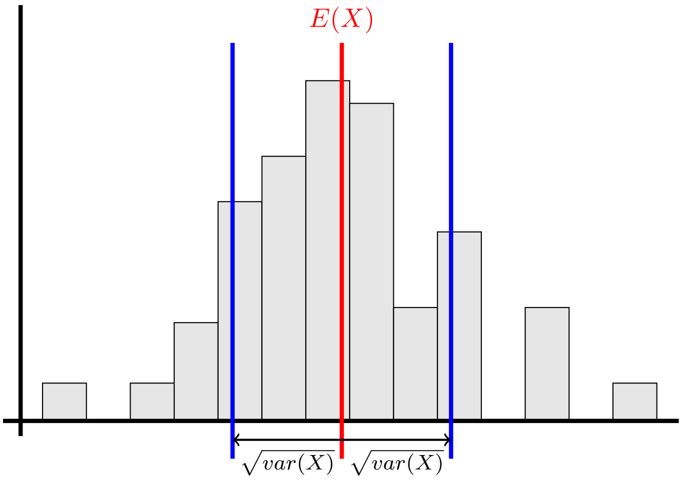
## 3.1 Erwartungswert

Sei $X$ eine Funktion auf $\Omega$, und lasse sich $\Omega$ in endlich viele Ereignisse $A_i$ zerlegen, auf denen $X(\omega)$ konstant ist, dann ist der Erwartungswert von $X$

$$\text{Erwartungswert} = \sum \text{Wert} \cdot \text{Wahrscheinlichkeit}$$

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{X(A_i)}_{\text{Wert}} \cdot \underbrace{P(A_i)}_{\text{W'keit}}}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{x} x \cdot \varphi(x) dx \text{ mit } \varphi(x) = \text{Dichtefunktion}$$




### 3.1.1 Rechenregeln

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
$E(\lambda X + \mu) = \lambda \cdot E(X) + \mu \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ wenn X,Y unabhängig sind

## 3.2 Varianz

$$\boxed{var(X) = E(X^2) - E(X)^2} = E[(X - E(X))^2]$$

**Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{var(X)}$

### 3.2.1 Kovarianz

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \underbrace{0}_{\text{falls X,Y unabhängig}}$$

Ist die Kovarianz positiv so tendieren höhere $X$-Werte zu höheren $Y$-Werten.

### 3.2.2 Rechenregeln

$var(\lambda X) = \lambda^2 var(X) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \neq var(nX)$

$$var(X+Y) = \begin{cases} var(X) + var(Y) & \text{(X,Y unabh.)} \\ var(X) + var(Y) + 2 \cdot cov(X,Y) & \text{(X,Y abhängig)} \end{cases}$$

$var(XY) = var(Y)var(X) + var(Y)E(X)^2 + var(X)E(Y)^2$

## 3.3 Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels

Es sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit gleichem Erwartungswert $\mu$ und gleicher Varianz $\sigma^2$ gegeben.

Mittelwert: $M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ Erwartungswert: $E(X) = E(M_n) = \mu$ Varianz: $var(M_n) = \frac{1}{n} var(X) = \frac{\sigma^2}{n}$

## 3.4 Satz von Tschebyscheff Skript S.??

$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}$ Wahrscheinlichkeit, dass $X$ um mehr als $\varepsilon$ vom Erwartungswert $E(X)$ abweicht.

$P(|M_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$ W'keit, dass $M_n$ von $n$ unab. ZV mit Mittelwert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$ mehr als $\varepsilon$ von $\mu$ abweicht.

## 3.5 Regression Skript S.??

Allgemein: X,Y Zufallsvariable

Gesucht: Regressionsgerade $y = ax + b$ mit min. Fehler

Fehler: $E(Y - (aX + b)) = 0$

**Regressionskoeffizient r**
$r$ ist ein Mass für die Qualität der Regression (standardisiert)

$$r^2 = \frac{cov(X,Y)^2}{var(X)var(Y)} = a^2 \cdot \frac{var(X)}{var(Y)}$$

Liegt $r$ nahe bei 1 $\widehat{=}$ gute Approximation

**Mittlerer quadratischer Fehler**

$$\Delta^2 = var(Y)(1 - r^2) = var(Y)\left(1 - \frac{cov(X,Y)^2}{var(X)var(Y)}\right)$$

**Vorgehen:** mit Fehlerberechnung

1. Tabelle mit bekannten Werten aufstellen:

| $k$ | $x$ | $x^2$ | $y$ | $y^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | $x_1^2$ | $y_1$ | $y_1^2$ | $x_1y_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $x_n$ | $y_n^2$ | $y_n$ | $y_n^2$ | $x_ny_n$ |
| $\sum$ | $\sum x_k$ | $\sum x_k^2$ | $\sum y_k$ | $\sum y_k^2$ | $\sum x_ky_k$ |
| $E$ | $\frac{\sum x_k}{n}$ | $\frac{\sum x_k^2}{n}$ | $\frac{\sum y_k}{n}$ | $\frac{\sum y_k^2}{n}$ | $\frac{\sum x_ky_k}{n}$ |

2. Varianzen, Kovarianz berechnen:
   $var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
   $var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$
   $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. Koeffizienten und Fehler der Gerade berechnen:
   $a = \frac{cov(X,Y)}{var(X)}$ $\quad \Delta^2 = var(Y)\left(1 - \frac{cov(X,Y)^2}{var(X)var(Y)}\right)$
   $b = E(Y) - aE(X)$
4. Gerade:
   $y = ax + b$

# 4 Wahrscheinlichkeitsverteilung

## 4.1 Verteilungsfunktion Skript S.??

| allgemein | diskret | kontinuierlich |
|---|---|---|
| $P(X \leq x) = F(x)$ | $= \sum\limits_{k=-\infty}^{x} p_k$ | $= \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(\tilde{x})d\tilde{x}$ |
| $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$ | | |
| $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ | $= \sum\limits_{k=a}^{b} p_k$ | $= \int\limits_{a}^{b} \varphi(\tilde{x})d\tilde{x}$ |

### 4.1.1 Eigenschaften

Bei einem Sprung gilt: **Sprunghöhe = Wahrscheinlichkeit des Wertes x**

$\boxed{\mathbb{D}(F) = \mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{W}(F) \in [0,1]}$ $\boxed{F(-\infty) = 0}$ $\boxed{F(\infty) = 1}$ $\boxed{F(x) \text{ ist monoton steigend}}$

## 4.2 Wahrscheinlichkeitsdichte Skript S.??

**Dichtefunktion oder Wahrscheinlichkeitsdichte:**
$\varphi(x) = F'(x)$
**Bei Sprungstellen von F(x):**
$\varphi(x) =$ Dirac mit Gewichtung der Sprunghöhe
**Allgemein gilt:**

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dy = 1$$

**Erwartungswert**

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)dx \quad \text{bzw.} \quad \sum\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_k$$

$$E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x)dx \quad \text{bzw.} \quad \sum\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_k$$

$$E(X^N) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^N \cdot \varphi(x)dx \quad \text{bzw.} \quad \sum\limits_{-\infty}^{\infty} x^N \cdot p_k$$

## 4.3 Rechenregeln für $\varphi$ und $F$ Skript S.??

**Gegeben:** X, Y Zufallsvariablen und $\varphi_X$, $\varphi_Y$ bekannt

| **Verteilungsfunktion:** | **Dichte:** |
|---|---|
| $F_{X+a}(x) = F_X(x-a)$ | $\varphi_{X+a}(x) = \varphi_X(x-a)$ |
| $F_{\lambda X}(x) = F_X(\frac{x}{\lambda})$ | $\varphi_{\lambda X}(x) = \varphi_X(\frac{x}{\lambda})\frac{1}{\lambda}$ |
| $F_{X+Y}(x) = F_X * \varphi_Y(y) = F_Y * \varphi_X(x)$ | $\varphi_{X+Y}(x) = \varphi_X * \varphi_Y(x)$ |
| $F_{\sqrt{X}}(x) = F_X(x^2)$ | $\varphi_{\sqrt{X}}(x) = 2x\varphi_X(x^2)$ |
| $F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$ | $\varphi_{X^2}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\varphi_X(\sqrt{x}) + \varphi_X(-\sqrt{x}))$ |

### 4.3.1 Algorithmus Bsp.

1. Definition von $F$ anwenden: $F_{\lambda X}(x) = P(\underbrace{\lambda X \le x}_{*})$
2. Bedingung * umformen: $P(X \le \frac{x}{\lambda}) = F_X(\frac{x}{\lambda})$
3. für Dichte: $\frac{d}{dx}$
   $\varphi_{\lambda X}(x) = \frac{d}{dx}F_{\lambda X}(x) = \frac{d}{dx}F_X(\frac{x}{\lambda}) = \varphi_X(\frac{x}{\lambda})\frac{1}{\lambda}$

### 4.3.2 Maximalwert eines Intervalls

$X_1, \dots X_i$ sind auf dem Intervall $[0, l]$ mit $F_X(x)$ verteilt
M=max$\{X_1, \dots, X_i\}$
$F_M(x) = F_X(x)^n$

### 4.3.3 Median Skript S.??

Der Median $med(X)$ von $X$ ist eine Zufallsvariable, welche für $F(med(X)) = \frac{1}{2}$ ist.

---

## 4.4 Standardisierung Skript S.??

Erwartungswert: $E(X) = \mu$ (=0 bei Standardnormalver.)
Varianz : $var(X) = \sigma^2$ (=1 bei Standardnormalver.)

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$ mit $E(Z) = 0$ und $var(Z) = 1$

$F_Z(z) = P(Z \le z) = F_X(\sigma z + \mu)$
$F_X(x) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$
$\varphi_Z(z) = \sigma \cdot \varphi_X(\sigma z + \mu)$
$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$

68% der Werte liegen im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
95% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
99.7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

---

## 4.5 Normalverteilung Skript S.??

Viele kleine, unabhängige Zufallsvariable sammeln sich zu einer normalverteilten Zufallsvariable.

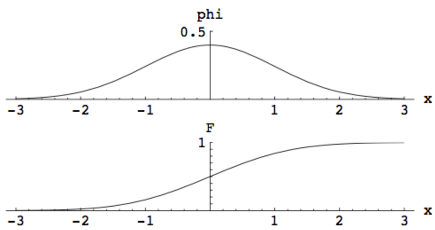
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = N(\mu; \sigma)$

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\tilde{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tilde{x}$

Addieren von Normalverteilungen:

$\boxed{N(\mu_1; \sigma_1) + N(\mu_2; \sigma_2) = N(\mu_1 + \mu_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})}$

Für $F(-x)$ gilt $F(-x) = 1 - F(x)$




Dichtefunktion (oben) und Verteilungsfunktion (unten) der Normalverteilung.

---

## 4.6 Zentraler Grenzwertsatz Skript S.??

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sind lauter identisch verteilte (nicht notwendig normalverteilt!) unabhängige Zufallsvariablen mit demselben Erwartungswert $\mu$ und derselben Varianz $\sigma^2$ und mit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Dann hat die Summe

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

den Erwartungswert $n\mu$ und die Varianz $n\sigma^2$.
Die damit verbundene standardisierte $(E(S_n) = 0, var(S_n) = 1)$ Variable $S_n$ ist somit wie folgt definiert:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \left[ \left( \sum_{i=1}^{n} X_i \right) - n\mu \right] = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Für $\boldsymbol{n \to \infty}$ strebt die Verteilung von $S_n$ gegen die Standardnormalverteilung.

## 4.7 Exponentialverteilung Skript S.??

Zur Ermittlung der Dauer bis zum Ausfall/Zerfall von Bauteilen/-Stoffen ohne Gedächnis (W'keit, dass X in der nächsten Minute defekt geht = const.). Beispiele :

- Lebensdauer von Atomen beim radioaktiven Zerfall
- Lebensdauer von Bauteilen, Maschinen & Geräten (MTBF - Mean Time Between Failure = $\frac{1}{a}$)

gilt $P(X \le t) = P(X \le t_0 + t | X > t_0)$
$P(X > t) = P(X > t_0 + t | X > t_0)$

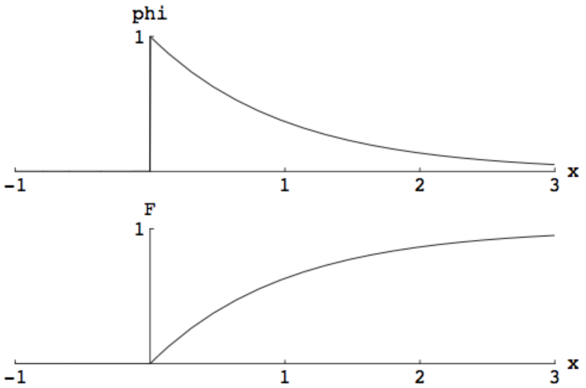


Abbildung 1: Dichtefunktion (oben) und Verteilungsfunktion (unten) der Exponentialverteilung.

Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$X < x$ Ausfall/Zerfall
$X > x$ kein Ausfall/Zerfall

Erwartungswert und Varianz
$E(X) = \frac{1}{a}$
$var(X) = \frac{1}{a^2}$

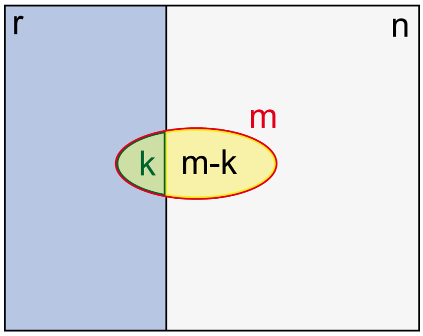
Lebensdauer von mehreren **unabhängigen** Bauteilen

$$\begin{aligned} P(X > x) &= P(X_1 > x_1 \cap X_2 > x_2 \cap X_3 > x_3 \dots) \\ &= P(X_1 > x_1) \cdot P(X_2 > x_2) \cdot P(X_3 > x_3) \dots \\ &= (1 - P(X_1 \le x_1)) \cdot (1 - P(X_2 \le x_2)) \cdot (1 - P(X_3 \le x_3)) \dots \\ &= (1 - F(x_1)) \cdot (1 - F(x_2)) \cdot (1 - F(x_3)) \dots \end{aligned}$$

## 4.8 Hypergeometrische Verteilung Skript S.??

Ist die Wahrscheinlichkeit dass in einer $m$ Elemente umfassenden Stichprobe aus einer Grundgesamtheit von $n$ Elementen, von denen $r$ eine spezielle Eigenschaft besitzen, $k$ Elemente mit der Eigenschaft zu finden sind.

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}} \qquad \text{für } 0 \le k \le r \text{ und } k \le n$$




Erwartungswert: $E(X) = m\frac{r}{n}$

Varianz: $var(X) = m\frac{r(n-r)(n-m)}{n^2(n-1)}$

**Beispiel:**
Lotto, $n = 45$ Zahlen, $r = 6$ (die gezogenen Zahlen), $m = 6$ (meine Zahlen)

$$P(X = 4) = P(\text{Ein Vierer}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} = 0.001364$$

## 4.9 Poissonverteilung Skript S.??

| | |
|---|---|
| $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ | W'keit dass k Ereignisse im Intervall [0,x] auftreten |
| Erwartungswert: | $E(X) = \lambda$ |
| Varianz: | $var(X) = \lambda$ |

$P(X < k) \le \sum_0^k P_\lambda(k) = \sum_0^k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
$P(X > k) = 1 - P(X < k)$
$x$ = Anzahl Versuche
$\lambda$ = Ereignisse pro Intervall im Mittel

**Anwendungsbeispiele:**
Für die Häufigkeiten seltener Ereignisse. Anzahl Anrufe bei einer Telefonzentrale in einer gewissen Periode. Anzahl grosse Versicherungsschäden in einer gewissen Periode. Anzahl Jobs, die bei einem Server ankommen. Anzahl Ereignisse in einem Zeitintervall. Anzahl Lokomotiven der SBB, die in der nächsten Woche einen Defekt haben. Anzahl der Gewinner mit 4 Richtigen im Lotto.

## 4.10 Binomialverteilung Skript S.??

Wird angewendet bei einem Experiment mit nur zwei Ausgängen (Ereignis mit W'keit $p$ tritt ein, Ereignis tritt nicht ein). Eine Zufallsvariable mit diskreten Werten $k \in \{0, \dots, n\}$ heisst binomialverteilt zum Parameter $p$, wenn die Wahrscheinlichkeit des Wertes $k$ wie folgt ist:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \mu=E(X)=p\cdot n \qquad \sigma^2=var(X)=n\cdot p(1-p)$$

$n$: Versuche $k$: k-mal erfolgreich $p$: Wahrscheinlichkeit

Approximation mit Normalverteilung: $P(a\le x\le b)\simeq \underbrace{P(a-0.5\le x\le b+0.5)}_{\text{Normalverteilung}}$

**Beispiel:** Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 350 Leuten genau k ($k\le 350$) heute Geburtstag haben?
$P(k)=\binom{350}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k\left(\frac{364}{365}\right)^{350-k}$

## 4.11 Gleichverteilung

**Stetig** Skript S.??

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & x>b\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & x\in[a,b]\\ 1 & x>b\end{cases}$$

Erwartungswert: $E(X)=\frac{a+b}{2}$

Varianz: $var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

**Diskret** Skript S.??

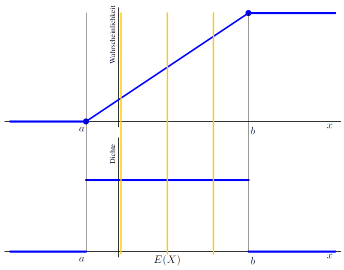
$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ \frac{\lfloor x\rfloor}{n} & 1\le x\le n\\ 1 & x\ge n\end{cases}$$

Wahrscheinlichkeit: $p(k)=\frac{1}{n}$

Erwartungswert: $E(X)=\frac{n+1}{2}$

Varianz: $var(X)=\frac{n^2-1}{12}$

$E(X^2)=\frac{2n^2+3n+1}{6}$




Verteilungsfunktion(oben) und Wahrscheinlichkeitsdichte (unten) der Gleichverteilung

## 4.12 Potenzgesetze (Power-Laws) Skript S.??

Die Normalverteilung beschreibt (physikalische) Grössen, die vor allem in einer bestimmten Grössenordnung vorkommen. Die Potenzgesetze dienen dazu, Grössen welche einen grossen Wertebereich annehmen können, zu beschreiben.

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\alpha-1}{x_{min}^{1-\alpha}}\cdot x^{-\alpha} & x>x_{min}\\ 0 & sonst\end{cases} \qquad \text{mit } \alpha>1$$

$$E(X)=\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\cdot x_{min}$$
$$E(X^2)=\frac{\alpha-1}{\alpha-3}\cdot x_{min}^2$$
$$var(X)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-3}-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2\right)\cdot x_{min}^2$$
$$x_{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{\alpha-1}}\cdot x_{min}$$

Eine nach dem Potenzgesetz verteilte Zufallsvariable kann man daran erkennen, dass die Dichtefunktion in doppelt logarithmischer Darstellung eine Gerade ist. Wegen $\log p(x)=-\alpha\log x+\log C$ ist die Steigung der Geraden $-\alpha$.

Der Parameter $\alpha$ kann mithilfe eines Maximum-Likelihood Schätzers bestimmt werden. Es gilt: $\alpha=1+\frac{n}{\sum_{i=1}^n}\log\frac{x_i}{x_min}$

# 5 Schätzen Skript S.??

## 5.1 Konsistente Schätzer Skript S.??

Ein Schätzer ist konsistent, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} = \mathrm{E(X)}$ ergibt

Der Mittelwert der Stichprobe ist ein konsistenter Schätzer. $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} = E(X)$

Der Schätzer $\bar{X} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ heisst der Stichprobenmittelwert der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$.

## 5.2 Erwartungstreue Schätzer Skript S.??

Ein Schätzer ist erwartungstreu, wenn $E(\text{Schätzer}) = E(\text{realer Wert})$

Ist der Stichprobenmittelwert ein konsistenter Schätzer, aber er ist sogar erwartungstreu: $E(\mu(X_1, \ldots, X_n)) = \frac{E(X_1)+\ldots+E(X_n)}{n} = E(X)$

Erwartungstreue Schätzer für $var(x)$ ist:

$\boxed{S^2 = \frac{n}{n-1}(\underbrace{\frac{1}{n}\sum X_i^2}_{E(X^2)} - \underbrace{(\frac{1}{n}\sum X_i)^2}_{E(X)^2})}$ Stichprobenvarianz, empirische Varianz

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ $\bar{X} = M_n$ heisst Stichprobenmittelwert

### 5.2.1 Kleinstmöglicher Fehler

$E((E(X) - \frac{x_1+\ldots+x_n}{n})^2) = minimal$

---

## 5.3 Maximum Likelihood Schätzer Skript S.??

Sinn des Likelihoodschäzers ist einen unbekannten Parameter $\vartheta$ einer Dichtefunktion $\phi(x, \vartheta)$ zu schätzen.

$$L(x_1, \ldots, x_n; \vartheta) = \phi(x_1, \vartheta) \cdot \ldots \cdot \phi(x_n, \vartheta) \implies \frac{d}{d\vartheta}L(x_1, \ldots, x_n; \vartheta) = 0 \implies \vartheta =? \text{ (Maximum-Likelihood-Schätzer)}$$

Für eine normalverteilte Grösse lautet die Likelihood Funktion: $L(x_1, \ldots, x_n; \vartheta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta)^2}$

Der unbekannte Parameter $\vartheta$ kann nun durch suchen des Maximums der Funktion ermittelt werden ($\vartheta$ wird variert). Die Funktion wird maximal, wenn die Summe im Exponent minimal wird. Das $\vartheta$, das die Summe minimiert, kann durch **ableiten nach $\vartheta$ und null setzen ermittelt** werden. Es können auch Stichprobenvarianz $S^2$ oder Ähnliches ermittelt werden.

---

## 5.4 Verteilung der Schätzwerte Skript S.??

$X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$. Dann gilt

1. $\bar{X}$ und $S^2$ sind unabhängig
2. $\bar{X} = \frac{X_1+\ldots X_n}{n}$ ist normalverteilt mit $E(\bar{X}) = \mu$ und $var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{2}$
3. $\boxed{\frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2 \text{ ist } \chi^2_{n-1}\text{-verteilt}}$ mit $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

## 5.5 Konfidenzintervall von Messwerten

### 5.5.1 Konfidenzintervall Skript S.??

Ein Intervall $[L(X_1, \ldots, X_n), R(X_1, \ldots, X_n)]$ heisst ein $1-\alpha$- Konfidenzintervall für den Parameter $\vartheta$, wenn der wahre Wert des Parameters $\vartheta$ höchstens mit Wahrscheinlichkeit $\alpha$ ausserhalb des Intervalls liegt.

Es gilt: $P(L \leq \vartheta \leq R) = 1 - \alpha$

### 5.5.2 Bei bekannter Varianz $\sigma^2$

Falls Varianz $\sigma^2$ von Messwerten bekannt ist, handelt es sich bei $\bar{X}$ um **normalverteilte** Zufallsvariable mit Varianz $\sigma^2/n$.

| | |
|---|---|
| Also kann sehr einfach ein x für das Konfidenzintervall gefunden werden: | $P\left(\left\lvert\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert \leq x\right) = 1 - \alpha \Rightarrow F(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ |
| Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall | $\mu \in \left[\bar{X} - x\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + x\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ mit W'keit $1 - \alpha$ |

### 5.5.3 Bei geschätzter Varianz $S^2$

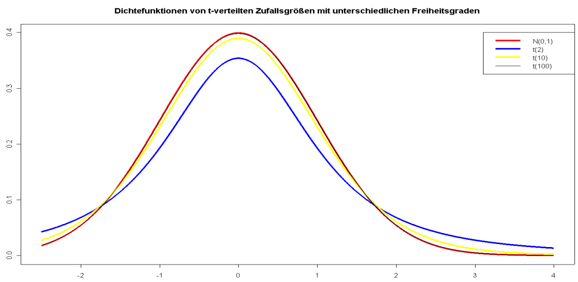
**t-Verteilung**
Der Mittelwert $(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n})$ normalverteilter Daten ist t-Verteilt, wenn Varianz mit Stichprobenvarianz geschätzt wurde. Ab einer gewissen Anzahl Messungen $(n \geq 30)$ kann näherungsweise auch mit der Normalverteilung gerechnet werden.

**Checkliste**

1) $\bar{X}, S$ als Schätzungen aus $x_i$ bestimmen
2) $t$ aus *t-Tabelle* $(k = n - 1)$ für $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ = W'keit für eine Seite
3) Intervall $\left[\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$, $(1-\alpha)$ Konfidenzintervall

**Anwendung**

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ t-Verteilt




$\lim\limits_{x\to\infty} = 0$ aber langsamer wie bei Gaussverteilung

Beispiel: 10 Messungen ergeben Durchschnittswert 4,7 und eine Standardabweichung 0,1. Finde ein 99% Konfidenzintervall für $\mu$.

Finde t:

| $k = n - 1$ | $\ldots$ | 0,995 |
|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 9 | $\ldots$ | 3,2498 |

$\left[\bar{X} - 3,2498\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 3,2498\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow \left[4{,}7 - 3{,}2498\frac{0{,}1}{\sqrt{10}}, 4{,}7 + 3{,}2498\frac{0{,}1}{\sqrt{10}}\right]$

$\mu \in [4{,}5072, 4{,}8028]$ mit Wahrscheinlichkeit 99%

# 6 Hypothesentest Skript S.??

## 6.1 Grundsätze

- "Man braucht Aussagen, die man widerlegen könnte."
- Irrtum ist möglich (Irrtumsw'keit $\alpha$)
- Beweis durch Widerlegen des Gegenbeweises

## 6.2 Vorgehen (Nullhypothese)

1. Hypothese, die der Test **widerlegen** soll
   $\rightarrow$ Nullhypothese $\Rightarrow$ Keine Wirkung/Effekt
2. Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05, 0.01, \ldots$ (Niveau=1-$\alpha$)
3. Testgrösse X, W'keitsverteilung $\rightarrow$ Nur Werte bis zum getesteten Ereignis betrachten! (Nicht Zukunft mit einbeziehen)
4. Bestimmung der Schranken $x_{krit}$ für:
   - Einseitiger Test $P(X > x_{krit}) = \alpha$
   - Zweiseitiger Test $P(|X| > x_{krit}) = \alpha/2$
5. Wert für $F\left(\frac{x_{krit}-\mu}{\sigma}\right)$ aus Tabelle 11.1 (S. 17)
6. Falls Messungen ergeben $X > x_{krit} \Longrightarrow$ Hypothese **falsch** mit W'keit $1-\alpha$

## 6.3 Testen einer diskreten Verteilung Skript S.??

### 6.3.1 $\chi^2$-Test mit k-möglichen Ausgängen

Mögliche Ausgänge: $I_i$, $i = 1, \ldots, k$

Wahrscheinlichkeit von Ausgang $i$: $P(X \in I_i) = p_i$

$n$ Beobachtungen, davon jeweils $n_i$ mit Ausgang $i$

$$\boxed{D = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}}$$

ist $\chi^2_{k-1}$, mit $k-1$ Freiheitsgrade

**Durchführung des $\chi^2$-Tests**

1. Daten erfassen: Damit der Test optimal funktioniert muss folgende Bedingung erfüllt sein: $\boldsymbol{n_i \geq 5 \; \forall \; i}$

2. **Diskrepanz** $D$ berechnen

| $i$ | Ausgang | $p_i$ | $n_i$ | $(n_i - np_i)$ | $(n_i - np_i)^2/np_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| | | | n | | $D = \sum$ |

3. Schwellenwert für $D$

$x_{1-\alpha}$ für $F_{\chi^2_{k-1}}(x) = 1-\alpha$ aus $\chi^2_{k-1}$-Tabelle lesen.

Wenn $\alpha$ nicht vorgegeben, dann $\alpha$ z.B. 0.1 oder 0.05 wählen.

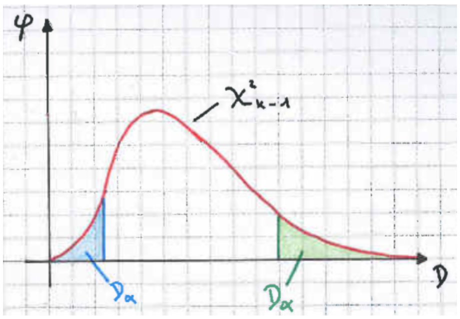
Anzahl Freiheitsgrade= Anzahl Ausgänge$-1 = k-1$

$p = 1-\alpha$ $\qquad \alpha =$Irrtumswahrscheinlichkeit

$D \geq x_{1-\alpha}$ Hypothese ist unwahrscheinlich!

$D < x_{1-\alpha}$ Hypothese nicht wiederlegbar!

$D \leq x_{\alpha}$ Daten möglicherweise "fabriziert"!




Nachteile: -Grob verpixeltes Bild der Verteilung

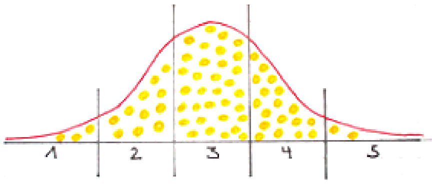
-wenn wenig Messwerte $\Longrightarrow$ geringe Aussagekraft

## 6.4 Testen einer stetigen VerteilungSkript S.??

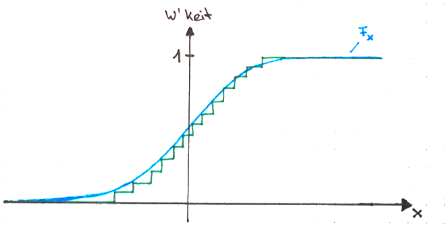
### 6.4.1 Mit $\chi^2$-Test

Der $\chi^2$-Test kann im Prinzip nur diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen testen.
→ Will man eine stetige Verteilung testen, muss man zunächst Klassen von Werten bilden. → Anschliessend deren Wahrscheinlichkeiten berechnen und dann prüfen ob die künstlich diskrete Verteilung im $\chi^2$-Test Bestand hat.
⇒ Achtung: Durch die Klassenbildung wird eine künstliche Diskretisierung eingeführt.



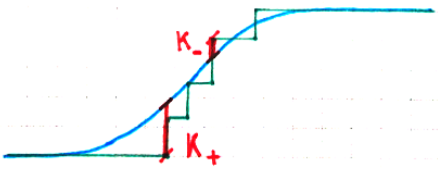

### 6.4.2 Kolmogorov-Smirnov Test

| | |
|---|---|
| **Nullhypothese** | Messwerte $x_1, ..., x_n$ haben Verteilungsfunktion $F_X$ |
| Idee: | Vergleiche Verteilungsfunktionen (statt der Dichtefunktionen) |
| Daten: | $X$ Zufallsvariable, Verteilungsfunktion $F_X$, $n$ Messungen ergeben Stichprobe $x_i$ |




$F_X$ theoretische Verteilungsfunktion von X

empirische Verteilungsfunktion $\frac{Anzahl\{x_i \leq x\}}{n}$




Testgrösse
max ($F_{emp}$(x) - $F_x$(x))
min ($F_{emp}(x)$- $F_x(x)$)

**Durchführen des Kolmogorov-Smirnov Test**

1. Werte $x_1, ..., x_n$ in aufsteigender Reihenfolge sortieren
2. **$K_n^{\pm}$ berechnen**

$$\boxed{K_n^+ = \sqrt{n} \max_{1<x<n} \left( \frac{i}{n} - F_X(x_i) \right)}$$

$$\boxed{K_n^- = \sqrt{n} \max_{1<x<n} \left( F_X(x_i) - \frac{i-1}{n} \right)}$$

Mit Tabelle:

| $i$ | $x_i$ | $i/n$ | $F_X(x_i)$ | $(i-1)/n$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $min(x_i)$ | | | |
| | $\vdots$ | | | |
| n | $max(x_i)$ | | | |

3. Finde $t_{n,1-\alpha}$,$t_{n,\alpha}$ in der Tabelle 11.3 (S. 18)
4. Falls $K_n^+ > t_{n,1-\alpha}$ oder $K_n^- < t_{n,\alpha}$, verwerfe die Hypothese, dass $X$ die Verteilungsfunktion $F_X$ hat.

## 6.5 Vergleichen von Mittelwerten (t-Test)Skript S.??

| | |
|---|---|
| **Nullhypothese** | $\Rightarrow E(X) = E(Y)$ |
| **Daten** | **n** Messungen von $x_i \Rightarrow \bar{X}$ ; $S_X^2$ |
| | **m** Messungen von $y_i \Rightarrow \bar{Y}$ ; $S_Y^2$ |
| **Testgrösse** | $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1) \cdot S_X^2 + (m-1) \cdot S_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$ |
| | T ist t-verteilt |
| **Schwellenwert** | $t_{krit}$ aus Tabelle 11.4 mit Freiheitsgrad $n+m-2$ und $p = 1 - \alpha$ |
| **Test** | Falls $T > t_{krit}$ wird die Hypothese $E(X) = E(Y)$ verworfen |

# 7 Prozessverbesserungen Skript S.??

## 7.1 Gewichteter Mittelwert

Besitzt man die Möglichkeit Messwerte aus zwei Messsystemen $X_1$ und $X_2$ mit unterschiedlicher Genauigkeit $(var(X_1)/var(X_2))$ zu beziehen, so kann man die Messwerte so gewichten, dass eine optimale Genauigkeit besteht.

$\boxed{X_{opt} = t \cdot X_1 + (1-t) \cdot X_2}$ $\rightarrow t$ so wählen, dass $var(X_{opt})$ minimal wird

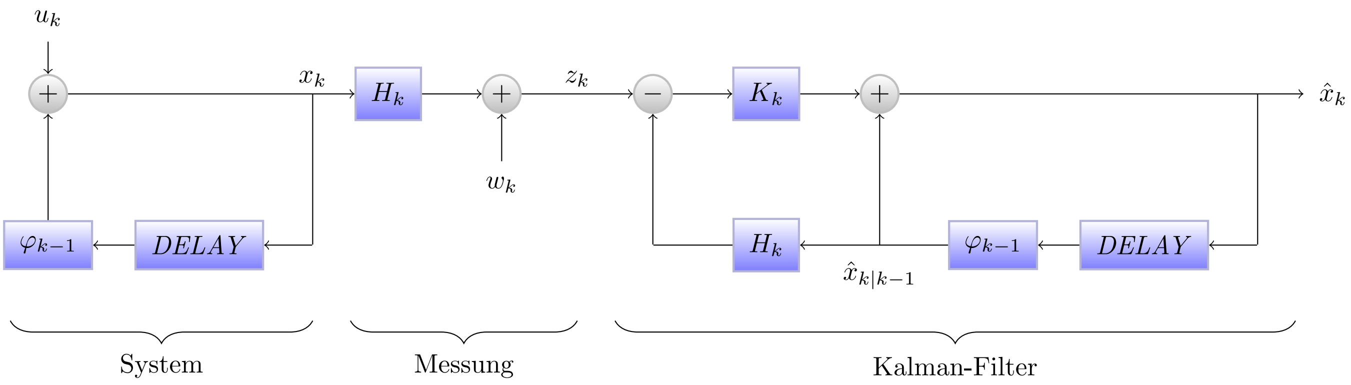
$$var(X_{opt}) = t^2 \cdot var(X_1) + (1-t)^2 \cdot var(X_2) \qquad \rightarrow \text{nach } t \text{ ableiten und Null setzen}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\ ; \ \boxed{1 - t = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \qquad var(X_{opt}) = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

## 7.2 Kalman-Filter

**Prinzip:** bestmögliche Schätzung für Systemzustand auf Grund von fehlerbehafteter Messung und Systementwicklung.

### 7.2.1 Datenfluss im Kalman-Filter Skript S.??




| | |
|---|---|
| $u_k$: | Systemungenauigkeiten |
| $w_k$: | Messfehler |
| $x_k$: | Unbeobachtete Zustandsvariable |
| $z_k$: | Fehlerbehaftete Messung von $x_k$ |
| $\hat{x}_{k\|k-1}$: | Vorhersage: $\hat{x}_{k\|k-1} = \varphi_{k-1}\hat{x}_{k-1}$ |
| $\hat{x}_k$: | Schätzer für $x_k$ (aus $\hat{x}_{k\|k-1}$ und $z_k$) |

| | |
|---|---|
| $\varphi_{k-1}$: | Systementwicklung: $x_{k+1} = \varphi_k x_k + u_k$ |
| $H_k$: | Messung der Zustandsvariablen: $z_k = H_k x_k + w_k$ |
| $K_k$: | Kalman-Matrix: $\hat{x}_k = (I - K_k H_k)\hat{x}_{k\|k-1} + K_k z_k$ |

$$Q_k = E(u_k u_k^t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$R_k = E(w_k w_k^t) = \begin{pmatrix} \rho_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \rho_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$P_k = E(\tilde{x}_k \tilde{x}_k^t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{k,1}^2 & \tilde{x}_{k,1}\tilde{x}_{k,2} & \dots \\ \tilde{x}_{k,2}\tilde{x}_{k,1} & \tilde{x}_{k,2}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

| | |
|---|---|
| $Q_k$: | Systemfehler-Kovarianzmatrix |
| $u_k$: | Systemungenauigkeiten |
| $\sigma_i$: | Varianz der Systemungenauigkeiten |
| $R_k$: | Messfehler-Kovarianzmatrix |
| $w_k$: | Messfehler |
| $\rho_i$: | Varianz der Messungen |
| $P_k$: | Schätzfehler-Kovarianzmatrix |
| $\tilde{x}_k$: | Schätzfehler: $\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k$ |

#### 7.2.2 Vorgehen

1. Bestimmung des Zustandsvektors $x_k$ und des Messvektors $z_k$
2. Aufstellen der Messmatrix $H_k$ aus: $z_k = H_k x_k$
3. Berechnen der Systementwicklung $\varphi_k$ damit $x_{k+1} = \varphi_k x_k$
4. Aufstellen der Fehler-Kovarianzmatrixen $Q_k$ und $R_k$
5. **Vorhersage-Schritt:** $\boxed{\hat{x}_{k+1|k} = \varphi_k \hat{x}_k \qquad P_{k+1|k} = \varphi_k P_k \varphi_k^t + Q_k}$
6. **Korrektur-Schritt:** $\boxed{\hat{x}_k = (I - K_k H_k)\hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k \qquad P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^t + K_k R_k K_k^t}$
7. **Bestimmung des optimalen $K_k$:** $\boxed{K_k = P_{k|k-1} H_k^t (H_k P_{k|k-1} H_k^t + R_k)^{-1}}$
8. Damit wird $P_k$ vereinfacht zu: $P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$ $\quad\rightarrow P_k$ bleibt variabel

#### 7.2.3 Vereinfachung

In der Praxis kann meist davon ausgegangen werden, dass $\varphi_k$, $R_k$, $Q_k$ und $H_k$ konstant sind. Damit werden auch $P_k$ und $K_k$ konstant und die Vorhersage wird vereinfacht zu: $\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K(z_k - H\hat{x}_{k|k-1})$

# 8 Wichtige Formeln

## 8.1 Reihenentwicklungen

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Geometrische Reihe** | $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ | $= \frac{1}{1-x}$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| | $\sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k$ | $= x \sum_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$ | $x \neq 1$ |
| **Binominalreihe** | $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ | $= (1+x)^{\alpha}$ | $x \in (-1, 1)$ |
| **E-Funktion** | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ | $= e^x$ | |

# 9 Auswahl der Verteilung

| | |
|---|---|
| Gleichverteilung | Alle möglichen Werte haben die gleiche Wahrscheinlichkeit |
| Exponentialverteilung | Dauer von zufälligen Zeitintervallen ohne Gedächtnis |
| Normalverteilung | Viele kleine, unabhängige Zufallsprozesse sammeln sich zu einer normalverteilten Zufallsvariable |
| Binomialverteilung | Experiment mit zwei Ausgängen |
| Hypergeometrische Verteilung | Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe, Elemente einer Teilmenge zu finden sind |
| Poissonverteilung | Häufigkeiten seltener Ereignisse |
| t-Verteilung | Varianz aus Stichproben geschätzt (für grosse $n$ kann Normalverteilung verwendet werden) |
| $\chi^2$-Verteilung | Test ob eine Zufallsvariable Normalverteilt ist. Anwendung bei Hypothesentests |

# 10 Statistik / Wahrscheinlichkeit

## 10.1 Funktionen

| | |
|---|---|
| $mean(\{...\})$<br>$mean(\{...\},\{...\})$ | Berechnet das arithmetische Mittel der Elemente der Liste.<br>Mit einer zweiten Liste lassen sich die Elemente einzeln gewichten. |
| $mean(A)$<br>$mean(A,B)$ | Gibt einen Zeilenvektor mit den arith. Mitteln der Spalten zurück.<br>Mit einer Matrix $B$ lassen sich die Elemente von $A$ gewichten. |
| $median(\{...\})$<br>$median(A)$ | Berechnet den Median der Elemente der Liste.<br>Gibt einen Zeilenvektor mit den Medianwerten der Spalten zurück. |
| $stdDev(\{...\})$ | Berechnet die Standardabweichung $\sigma$ der Liste |
| $variance(\{...\}$ | Berechnet die Varianz $\sigma^2$ der Liste |
| $nCr(n,k)$ | Binominalkoeffizient $\binom{n}{k}$ - funktioniert auch für Listen und Matrizen |
| $nPr(n,k)$ | Anzahl Möglichkeiten unter Berücksichtigung der Reihenfolge $k$ Elemente aus $n$ auszuwählen. |
| $OneVar L1,[L2],[L3],[L4]$<br>$ShowStat$ | Berechnet die Statistiken der Liste L1. Die Statistik wird mit $ShowStat$ eingeblendet.<br>Folgende Werte werden berechnet: $\bar{x}$, $\sum x$, $\sum x^2$, $\sigma x$, ...<br>Optionale Listen: $L2$: Häufigkeit, $L3$: Klassencodes, $L4$: Klassenliste |
| $TwoVar L1,L2,[L3],[L4],[L5]$<br>$ShowStat$ | Gleich wie $OneVar$, einfach für 2 Variablen.<br>$L1$, $L2$: Variablen $X$ und $Y$, $L3-5$: wie bei $OneVar$ |

## 10.2 Regression

Zur Berechnung einer Regression muss eine Liste ({...}) die x-Werte enthalten und eine zweite Liste die y-Werte. Der Befehl $LinReg\,L1,L2$ berechnet die lineare Regression. Mit $ShowStat$ werden die berechneten Werte angezeigt. Es ist auch möglich, die Datenpunkte und die Regressionskurve zu plotten: $Regeq(x) \to y1(x)$ und $NewPlot\,1,1,L1,L2$ Optional können weitere Listen angegeben werden: L3: Häufigkeit, L4: Klassencodes, L5: Klassenliste, wobei alle Listen ausser L5 die gleiche Dimension besitzen müssen. 'Iterationen' gibt die maximale Anzahl Lösungsversuche an. (standardmäsig: 64)

| | |
|---|---|
| Lineare Regression | $LinReg\ L1,L2,[L3],[L4,L5]$ |
| Logarithmische Regression | $LnReg\ L1,L2,[L3],[L4,L5]$ |
| Logistische Regression | $Logistic\ L1,L2,[\text{Iterationen}],[L3],[L4,L5]$ |
| Potenz-Regression | $PowerReg\ L1,L2,[L3],[L4,L5]$ |
| Quadratische Polynomische Regression | $QuadReg\ L1,L2,[L3],[L4,L5]$ |
| Kubische Regression | $CubReg\ L1,L2,[L3],[L4,L5]$ |
| Polynomische Regression 4-ter Ordnung | $QuartReg\ L1,L2,[L3],[L4,L5]$ |

## 10.3 Zufallszahlen

| | |
|---|---|
| $RandSeed\,1147$ | Setzt die Ausgangsbasis (Seed) für den Zufallszahl-Generator |
| $rand()$<br>$rand(n)$ | Gibt eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 zurück.<br>Gibt eine Zufallszahl zwischen 0 und $n$ (für $n$ pos.)<br>bzw. zwischen $n$ und 0 (für $n$ neg.) zurück. |
| $randMat(n,m)$ | Erzeugt eine ganzzahlige Matrix mit $n$ Zeilen und $m$ Spalten mit Werten $-9 < x < +9$. |
| $randNorm(a,sd)$ | Gibt eine reelle Zufallszahl um den Mittelwert $a$ mit der Standardabweichung $sd$ aus. |
| $randPoly(x,n)$ | Erzeugt ein Polynom der Variable $x$ der Ordnung $n$ mit Koeffizienten $-9 < x < +9$ |

# 11 Tabellen



## 11.1 Quantilen der Normalverteilung

| $p$ | $x$ |
|---|---|
| 0.75 | 0.6745 |
| 0.8 | 0.8416 |
| 0.9 | 1.2816 |
| 0.95 | 1.6449 |
| 0.975 | 1.9600 |
| 0.99 | 2.3263 |
| 0.995 | 2.5758 |
| 0.999 | 3.0902 |
| 0.9995 | 3.2905 |

## 11.2 Verteilungsfunktion der Normalverteilung

| $x$ | +0.00 | +0.01 | +0.02 | +0.03 | +0.04 | +0.05 | +0.06 | +0.07 | +0.08 | +0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

## 11.3 Quantilen für den Kolmogorov-Smirnov-Test

| $n$ | $p = 0.01$ | $p = 0.05$ | $p = 0.1$ | $p = 0.25$ | $p = 0.5$ | $p = 0.75$ | $p = 0.9$ | $p = 0.95$ | $p = 0.99$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01000 | 0.05000 | 0.10000 | 0.25000 | 0.50000 | 0.75000 | 0.90000 | 0.95000 | 0.99000 |
| 2 | 0.01400 | 0.06749 | 0.12955 | 0.29289 | 0.51764 | 0.70711 | 0.96700 | 1.09799 | 1.27279 |
| 3 | 0.01699 | 0.07919 | 0.14714 | 0.31117 | 0.51469 | 0.75394 | 0.97828 | 1.10166 | 1.35889 |
| 4 | 0.01943 | 0.08789 | 0.15899 | 0.32023 | 0.51104 | 0.76419 | 0.98531 | 1.13043 | 1.37774 |
| 5 | 0.02152 | 0.09471 | 0.16750 | 0.32490 | 0.52449 | 0.76741 | 0.99948 | 1.13916 | 1.40242 |
| 6 | 0.02336 | 0.10022 | 0.17385 | 0.32717 | 0.53193 | 0.77028 | 1.00520 | 1.14634 | 1.41435 |
| 7 | 0.02501 | 0.10479 | 0.17873 | 0.32804 | 0.53635 | 0.77552 | 1.00929 | 1.15373 | 1.42457 |
| 8 | 0.02650 | 0.10863 | 0.18256 | 0.32802 | 0.53916 | 0.77971 | 1.01346 | 1.15859 | 1.43272 |
| 9 | 0.02786 | 0.11191 | 0.18560 | 0.32745 | 0.54109 | 0.78246 | 1.01731 | 1.16239 | 1.43878 |
| 10 | 0.02912 | 0.11473 | 0.18803 | 0.32975 | 0.54258 | 0.78454 | 1.02016 | 1.16582 | 1.44397 |
| 11 | 0.03028 | 0.11718 | 0.19000 | 0.33304 | 0.54390 | 0.78633 | 1.02249 | 1.16885 | 1.44837 |
| 12 | 0.03137 | 0.11933 | 0.19160 | 0.33570 | 0.54527 | 0.78802 | 1.02458 | 1.17139 | 1.45207 |
| 13 | 0.03239 | 0.12123 | 0.19291 | 0.33789 | 0.54682 | 0.78966 | 1.02649 | 1.17357 | 1.45527 |
| 14 | 0.03334 | 0.12290 | 0.19396 | 0.33970 | 0.54856 | 0.79122 | 1.02823 | 1.17552 | 1.45810 |
| 15 | 0.03424 | 0.12439 | 0.19482 | 0.34122 | 0.55002 | 0.79259 | 1.02977 | 1.17728 | 1.46060 |
| 16 | 0.03509 | 0.12573 | 0.19552 | 0.34250 | 0.55123 | 0.79377 | 1.03113 | 1.17888 | 1.46283 |
| 17 | 0.03589 | 0.12692 | 0.19607 | 0.34360 | 0.55228 | 0.79482 | 1.03237 | 1.18032 | 1.46483 |
| 18 | 0.03665 | 0.12799 | 0.19650 | 0.34454 | 0.55319 | 0.79578 | 1.03351 | 1.18162 | 1.46664 |
| 19 | 0.03738 | 0.12895 | 0.19684 | 0.34535 | 0.55400 | 0.79667 | 1.03457 | 1.18282 | 1.46830 |
| 20 | 0.03807 | 0.12982 | 0.19709 | 0.34607 | 0.55475 | 0.79752 | 1.03555 | 1.18392 | 1.46981 |
| 30 | 0.04354 | 0.13510 | 0.20063 | 0.35087 | 0.56047 | 0.80362 | 1.04243 | 1.19164 | 1.48009 |
| 50 | 0.05005 | 0.13755 | 0.20794 | 0.35713 | 0.56644 | 0.80988 | 1.04933 | 1.19921 | 1.48969 |
| 100 | 0.05698 | 0.14472 | 0.21370 | 0.36331 | 0.57269 | 0.81634 | 1.05627 | 1.20666 | 1.49864 |
| 200 | 0.06049 | 0.14887 | 0.21816 | 0.36784 | 0.57725 | 0.82099 | 1.06117 | 1.21180 | 1.50458 |

## 11.4 Quantilen der t-Verteilung

| $k = n - 1$ | 0.75 | 0.8 | 0.9 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|---:|---:|---:|---:|---:|---:|---:|---:|
| 1 | 1.0000 | 1.3764 | 3.0777 | 6.3138 | 12.7062 | 31.8205 | 63.6567 |
| 2 | 0.8165 | 1.0607 | 1.8856 | 2.9200 | 4.3027 | 6.9646 | 9.9248 |
| 3 | 0.7649 | 0.9785 | 1.6377 | 2.3534 | 3.1824 | 4.5407 | 5.8409 |
| 4 | 0.7407 | 0.9410 | 1.5332 | 2.1318 | 2.7764 | 3.7469 | 4.6041 |
| 5 | 0.7267 | 0.9195 | 1.4759 | 2.0150 | 2.5706 | 3.3649 | 4.0321 |
| 6 | 0.7176 | 0.9057 | 1.4398 | 1.9432 | 2.4469 | 3.1427 | 3.7074 |
| 7 | 0.7111 | 0.8960 | 1.4149 | 1.8946 | 2.3646 | 2.9980 | 3.4995 |
| 8 | 0.7064 | 0.8889 | 1.3968 | 1.8595 | 2.3060 | 2.8965 | 3.3554 |
| 9 | 0.7027 | 0.8834 | 1.3830 | 1.8331 | 2.2622 | 2.8214 | 3.2498 |
| 10 | 0.6998 | 0.8791 | 1.3722 | 1.8125 | 2.2281 | 2.7638 | 3.1693 |
| 11 | 0.6974 | 0.8755 | 1.3634 | 1.7959 | 2.2010 | 2.7181 | 3.1058 |
| 12 | 0.6955 | 0.8726 | 1.3562 | 1.7823 | 2.1788 | 2.6810 | 3.0545 |
| 13 | 0.6938 | 0.8702 | 1.3502 | 1.7709 | 2.1604 | 2.6503 | 3.0123 |
| 14 | 0.6924 | 0.8681 | 1.3450 | 1.7613 | 2.1448 | 2.6245 | 2.9768 |
| 15 | 0.6912 | 0.8662 | 1.3406 | 1.7531 | 2.1314 | 2.6025 | 2.9467 |
| 16 | 0.6901 | 0.8647 | 1.3368 | 1.7459 | 2.1199 | 2.5835 | 2.9208 |
| 17 | 0.6892 | 0.8633 | 1.3334 | 1.7396 | 2.1098 | 2.5669 | 2.8982 |
| 18 | 0.6884 | 0.8620 | 1.3304 | 1.7341 | 2.1009 | 2.5524 | 2.8784 |
| 19 | 0.6876 | 0.8610 | 1.3277 | 1.7291 | 2.0930 | 2.5395 | 2.8609 |
| 20 | 0.6870 | 0.8600 | 1.3253 | 1.7247 | 2.0860 | 2.5280 | 2.8453 |
| 21 | 0.6864 | 0.8591 | 1.3232 | 1.7207 | 2.0796 | 2.5176 | 2.8314 |
| 22 | 0.6858 | 0.8583 | 1.3212 | 1.7171 | 2.0739 | 2.5083 | 2.8188 |
| 23 | 0.6853 | 0.8575 | 1.3195 | 1.7139 | 2.0687 | 2.4999 | 2.8073 |
| 24 | 0.6848 | 0.8569 | 1.3178 | 1.7109 | 2.0639 | 2.4922 | 2.7969 |
| 25 | 0.6844 | 0.8562 | 1.3163 | 1.7081 | 2.0595 | 2.4851 | 2.7874 |
| 26 | 0.6840 | 0.8557 | 1.3150 | 1.7056 | 2.0555 | 2.4786 | 2.7787 |
| 27 | 0.6837 | 0.8551 | 1.3137 | 1.7033 | 2.0518 | 2.4727 | 2.7707 |
| 28 | 0.6834 | 0.8546 | 1.3125 | 1.7011 | 2.0484 | 2.4671 | 2.7633 |
| 29 | 0.6830 | 0.8542 | 1.3114 | 1.6991 | 2.0452 | 2.4620 | 2.7564 |
| 30 | 0.6828 | 0.8538 | 1.3104 | 1.6973 | 2.0423 | 2.4573 | 2.7500 |
| 50 | 0.6794 | 0.8489 | 1.2987 | 1.6759 | 2.0086 | 2.4033 | 2.6778 |
| 100 | 0.6770 | 0.8452 | 1.2901 | 1.6602 | 1.9840 | 2.3642 | 2.6259 |
| 500 | 0.6750 | 0.8423 | 1.2832 | 1.6479 | 1.9647 | 2.3338 | 2.5857 |
| $10^3$ | 0.6747 | 0.8420 | 1.2824 | 1.6464 | 1.9623 | 2.3301 | 2.5808 |
| $10^4$ | 0.6745 | 0.8417 | 1.2816 | 1.6450 | 1.9602 | 2.3267 | 2.5763 |
| $10^5$ | 0.6745 | 0.8416 | 1.2816 | 1.6449 | 1.9600 | 2.3264 | 2.5759 |
| $10^6$ | 0.6745 | 0.8416 | 1.2816 | 1.6449 | 1.9600 | 2.3264 | 2.5758 |

## 11.5 Quantilen der $\chi^2$-Verteilung

| $k = n - 1$ | $p = 0.01$ | $p = 0.05$ | $p = 0.1$ | $p = 0.25$ | $p = 0.5$ | $p = 0.75$ | $p = 0.9$ | $p = 0.95$ | $p = 0.99$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000 | 0.004 | 0.016 | 0.102 | 0.455 | 1.323 | 2.706 | 3.841 | 6.635 |
| 2 | 0.020 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.386 | 2.773 | 4.605 | 5.991 | 9.210 |
| 3 | 0.115 | 0.352 | 0.584 | 1.213 | 2.366 | 4.108 | 6.251 | 7.815 | 11.345 |
| 4 | 0.297 | 0.711 | 1.064 | 1.923 | 3.357 | 5.385 | 7.779 | 9.488 | 13.277 |
| 5 | 0.554 | 1.145 | 1.610 | 2.675 | 4.351 | 6.626 | 9.236 | 11.070 | 15.086 |
| 6 | 0.872 | 1.635 | 2.204 | 3.455 | 5.348 | 7.841 | 10.645 | 12.592 | 16.812 |
| 7 | 1.239 | 2.167 | 2.833 | 4.255 | 6.346 | 9.037 | 12.017 | 14.067 | 18.475 |
| 8 | 1.646 | 2.733 | 3.490 | 5.071 | 7.344 | 10.219 | 13.362 | 15.507 | 20.090 |
| 9 | 2.088 | 3.325 | 4.168 | 5.899 | 8.343 | 11.389 | 14.684 | 16.919 | 21.666 |
| 10 | 2.558 | 3.940 | 4.865 | 6.737 | 9.342 | 12.549 | 15.987 | 18.307 | 23.209 |
| 11 | 3.053 | 4.575 | 5.578 | 7.584 | 10.341 | 13.701 | 17.275 | 19.675 | 24.725 |
| 12 | 3.571 | 5.226 | 6.304 | 8.438 | 11.340 | 14.845 | 18.549 | 21.026 | 26.217 |
| 13 | 4.107 | 5.892 | 7.042 | 9.299 | 12.340 | 15.984 | 19.812 | 22.362 | 27.688 |
| 14 | 4.660 | 6.571 | 7.790 | 10.165 | 13.339 | 17.117 | 21.064 | 23.685 | 29.141 |
| 15 | 5.229 | 7.261 | 8.547 | 11.037 | 14.339 | 18.245 | 22.307 | 24.996 | 30.578 |
| 16 | 5.812 | 7.962 | 9.312 | 11.912 | 15.338 | 19.369 | 23.542 | 26.296 | 32.000 |
| 17 | 6.408 | 8.672 | 10.085 | 12.792 | 16.338 | 20.489 | 24.769 | 27.587 | 33.409 |
| 18 | 7.015 | 9.390 | 10.865 | 13.675 | 17.338 | 21.605 | 25.989 | 28.869 | 34.805 |
| 19 | 7.633 | 10.117 | 11.651 | 14.562 | 18.338 | 22.718 | 27.204 | 30.144 | 36.191 |
| 20 | 8.260 | 10.851 | 12.443 | 15.452 | 19.337 | 23.828 | 28.412 | 31.410 | 37.566 |
| 21 | 8.897 | 11.591 | 13.240 | 16.344 | 20.337 | 24.935 | 29.615 | 32.671 | 38.932 |
| 22 | 9.542 | 12.338 | 14.041 | 17.240 | 21.337 | 26.039 | 30.813 | 33.924 | 40.289 |
| 23 | 10.196 | 13.091 | 14.848 | 18.137 | 22.337 | 27.141 | 32.007 | 35.172 | 41.638 |
| 24 | 10.856 | 13.848 | 15.659 | 19.037 | 23.337 | 28.241 | 33.196 | 36.415 | 42.980 |
| 25 | 11.524 | 14.611 | 16.473 | 19.939 | 24.337 | 29.339 | 34.382 | 37.652 | 44.314 |
| 26 | 12.198 | 15.379 | 17.292 | 20.843 | 25.336 | 30.435 | 35.563 | 38.885 | 45.642 |
| 27 | 12.879 | 16.151 | 18.114 | 21.749 | 26.336 | 31.528 | 36.741 | 40.113 | 46.963 |
| 28 | 13.565 | 16.928 | 18.939 | 22.657 | 27.336 | 32.620 | 37.916 | 41.337 | 48.278 |
| 29 | 14.256 | 17.708 | 19.768 | 23.567 | 28.336 | 33.711 | 39.087 | 42.557 | 49.588 |
| 30 | 14.953 | 18.493 | 20.599 | 24.478 | 29.336 | 34.800 | 40.256 | 43.773 | 50.892 |
| 50 | 29.707 | 34.764 | 37.689 | 42.942 | 49.335 | 56.334 | 63.167 | 67.505 | 76.154 |
| 100 | 70.065 | 77.929 | 82.358 | 90.133 | 99.334 | 109.141 | 118.498 | 124.342 | 135.807 |
| 500 | 429.388 | 449.147 | 459.926 | 478.323 | 499.333 | 520.950 | 540.930 | 553.127 | 576.493 |
| 1000 | 898.912 | 927.594 | 943.133 | 969.484 | 999.333 | 1029.790 | 1057.724 | 1074.679 | 1106.969 |