Tutorium 14

Aufgabe 1: Monoide

1.a) Sei $U := \{ x \in \mathbb{Z} \ : \ x \text{ ist ungerade} \}$ *Beweise oder Widerlege:* $(U, +, 0)$ ist ein Monoid.

-------------------------------- Lösung --------------------------------

Methode 1: Wir widerlegen durch ein Gegenbeispiel: Wähle $x, y \in U$ als $x = 1$ und $y = 1$.
Dann ist $1 + 1 = 2$. Aber 2 ist gerade also $2 \notin U$.
Damit ist U nicht unter $+$ abgeschlossen.
Also ist $(U, +, 0)$ kein Monoid. ((U, $+$) ist noch nicht einmal eine Halbgruppe.)

Methode 2: $0 \notin U$. Damit kann $(U, +, 0)$ kein Monoid sein.

———————————————— \Lösung ————————————————

1.b) Sei $M := \{ x \in \mathbb{Z} \ : \ x \text{ ist gerade} \}$ *Beweise oder Widerlege:* $(M, +, 0)$ ist ein kommutatives Monoid.

-------------------------------- Lösung --------------------------------

- *Abgeschlossenheit:*
  $+ : (M \times M) \to M$
  (die Addition zweier gerader Zahlen ist wieder eine gerade Zahl)
- *Assoziativität:*
  Zu Zeigen: $\forall x, y, z \in M \ . \ x + (y + z) = (x + y) + z$
  Seien $x, y, z \in M$ beliebig. Es gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Damit ist $(M, +)$ eine Halbgruppe.

- *Neutrales Element:*
  Zu Zeigen: $\forall x \in M \ . \ x + 0 = x = 0 + x$
  Sei $x \in M$ beliebig. Es gilt $x + 0 = x = 0 + x$.
- *Kommutativität:*
  Zu Zeigen: $\forall x, y \in M \ . \ x + y = y + x$
  Sei $x, y \in M$ beliebig. Es gilt $x + y = y + x$.

Damit ist $(M, +, 0)$ ein kommutatives Monoid.

———————————————— \Lösung ————————————————

Aufgabe 2: Gruppen

2.a) *Beweise oder Widerlege:* Es gibt ein $e \in \mathbb{N}$ so, dass $(\mathbb{N}, *, e)$ eine Gruppe ist.

-------------------------------- Lösung --------------------------------

Wir widerlegen die Aussage per Widerspruch. Angenommen es handelt sich um eine Gruppe. Dann muss $(\mathbb{N}, *, e)$ ein Monoid sein, d. h. e muss neutral bzgl. $(\mathbb{N}, *)$ sein. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{N} \ . \ x * e = x = e * x$. Insbesondere gilt $1 * e = 1$, also folgt $e = 1$. Damit $(\mathbb{N}, *, e)$ eine Gruppe ist, muss weiterhin ein x^{-1} existieren, das invers zu x bzgl. $(\mathbb{N}, *, e)$ ist, d. h. $\forall x \in \mathbb{N} \ . \ \exists x^{-1} \in M \ . \ x^{-1} * x = 1 = x * x^{-1}$. Damit muss auch gelten, dass $1 = (0)^{-1} * 0 = 0$. Da $0 \neq 1$, ist das ein Widerspruch und somit existiert kein inverses Element für jedes $x \in M$. Damit ist $(\mathbb{N}, *, e)$ keine Gruppe.

———————————————— \Lösung ————————————————

2.b) Sei $M := \{ x \in \mathbb{Z} \ : \ x \text{ ist gerade} \}$ *Beweise oder Widerlege:* $(M, +, 0)$ ist eine Gruppe.

-------------------------------- Lösung --------------------------------

Aus Aufgabe 1(b) wissen wir, dass $(M, +, 0)$ ein (kommutatives) Monoid ist. Sei $x \in M$. Wir wählen $x^{-1} := -x$.

- *Inverses Element:*
  Zu Zeigen: $\forall x \in M \ . \ -x + x = 0 = x + (-x)$
  Sei $x \in M$ beliebig. Es gilt $-x + x = 0 = x + (-x)$.

Damit ist $(M, +, 0)$ eine (kommutative) Gruppe.

———————————————— \Lösung ————————————————

2.c) *Beweise oder Widerlege:* $(\ \mathbb{R}\setminus\{\ 0\ \},\ \circ,\ 1\ )$ für $\circ\colon ((\mathbb{R}\setminus\{\ 0\ \})\times(\mathbb{R}\setminus\{\ 0\ \}))\to\mathbb{R}\setminus\{\ 0\ \}$ mit $(\ a,\ b\ )\mapsto a/b$ ist Gruppe.

Lösung

Methode 1: $(\ \mathbb{R}\setminus\{\ 0\ \},\ \circ,\ 1\ )$ ist keine Gruppe, da die Assoziativität

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{\ 0\ \}\ .\ \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$$

verletzt ist. Beweis durch Gegenbeispiel: Wähle $a=2$, $b=3$ und $c=4$.

$$\frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{2*4}{3}=\frac{8}{3}\neq\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{2}{3*4}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{4}$$

Methode 2: $(\ \mathbb{R}\setminus\{\ 0\ \},\ \circ\ )$ ist keine Gruppe, da 1 nicht neutral bzgl. $(\ \mathbb{R}\setminus\{\ 0\ \},\ \circ\ )$ ist. Dafür müsste gelten:

$$\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{\ 0\ \}\ .\ \frac{1}{a}=a=\frac{a}{1}$$

Beweis durch Gegenbeispiel: Wähle $a=2$. Dann ist $\frac{1}{2}\neq 2$.

\Lösung