**FG Logik und Semantik**
**Technische Universität Berlin**
**Prof. Stephan Kreutzer**

WS 2014/2015
Stand: 22.10.2014

# 2. Präsenzübung – Logik

## Aufgabe 1

Sei $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass es eine aussagenlogische Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ gibt mit

$$[\![\varphi]\!]^\beta = f(\beta(X_1), \dots, \beta(X_n))$$

für alle passenden Belegungen $\beta$.

## Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es bis auf Äquivalenz genau $2^{2^n}$ verschiedene aussagenlogische Formeln mit den Variablen $X_1, \dots, X_n$ gibt.

## Aufgabe 3

*(i)* Konstruieren Sie eine Formel $\varphi(X_1, X_2, X_3)$, so dass für alle passenden Belegungen $\beta, \beta'$ für $\varphi$ gilt: wenn es ein $1 \leq i \leq 3$ gibt, so dass $\beta(X_i) \neq \beta'(X_i)$ aber $\beta(X_j) = \beta'(X_j)$ für alle $j \neq i$, dann gilt $[\![\varphi]\!]^\beta \neq [\![\varphi]\!]^{\beta'}$.

Das heißt, ändert man den Wahrheitswert genau einer Variablen in $\varphi$, so ändert sich der Wahrheitswert von $\varphi$.

*(ii)* Verallgemeinern Sie dies auf Formeln mit $n$ Variablen $X_1, \dots, X_n$. D. h., geben Sie für jedes $n$ eine Formel $\varphi_n$ mit $\mathrm{var}(\varphi_n) := \{X_1, \dots, X_n\}$ an, so dass das Ändern des Wahrheitswertes genau einer Variablen $X_i$, mit $1 \leq i \leq n$, den Wahrheitswert von $\varphi_n$ ändert.

## Aufgabe 4

Sei $\varphi := ((X \leftrightarrow \neg Y) \leftrightarrow Z) \to (((X \leftrightarrow \neg Y) \land Z) \leftrightarrow Y)$.

*(i)* Sei $\mathcal{S}$ die wie folgt definierte Substitution: $\mathcal{S}(X) := (Z \land U \leftrightarrow \neg Y)$ und $\mathcal{S}(Y) := (Z \to Y)$. Berechnen Sie $\varphi\mathcal{S}$.

*(ii)* Sei $\beta$ die wie folgt definierte Belegung: $\beta(U) := 1$, $\beta(Y) := 0$ und $\beta(Z) := 1$. Berechnen Sie $\beta\mathcal{S}$, wie im Beweis des Substitutionslemmas definiert, und verifizieren Sie, dass

- $\beta\mathcal{S}$ für $\varphi$ und $\beta$ für $\varphi\mathcal{S}$ passend ist, sowie dass
- $\beta\mathcal{S} \models \varphi$ genau dann, wenn $\beta \models \varphi\mathcal{S}$.