FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2014/2015
Stand: 22.10.2014

2. Hausaufgabe – Logik

Abgabe: 6.11.2014 in der Vorlesung

Hausaufgabe 1

5 Punkte

Sei $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ und

$$\bigvee_{1 \leq i' \leq i} \left(\bigwedge_{1 \leq j' \leq j} L_{i',j'} \right) \equiv \bigwedge_{1 \leq k' \leq k} \left(\bigvee_{1 \leq l' \leq l} L'_{k',l'} \right),$$

wobei $L_{i',j'}, L'_{k',l'}$ (mglw. negierte) Literale sind, d.h., Variablen oder negierte Variablen.

Außerdem nehmen wir an, dass auf beiden Seiten der Gleichung in den großen Klammern jeweils jede Variable höchstens einmal auftritt. Anders gesagt, jede große Konjunktion auf der linken Seite muss erfüllbar und jede große Disjunktion auf der rechten Seite falsifizierbar sein.

Zeigen Sie, dass es für jedes $1 \leq i' \leq i$ und $1 \leq k' \leq k$ ein $1 \leq j' \leq j$ und $1 \leq l' \leq l$ gibt, sodass $L_{i',j'} = L'_{k',l'}$.

Hausaufgabe 2

5 Punkte

Betrachten Sie folgende Formeln:

$$\begin{array}{ll}
\varphi_1 := X \to (Y \land Z) & \psi_1 := (X \to Y) \land (X \to Z) \\
\varphi_2 := (X \land Y \land Z) \to Q & \psi_2 := X \to (Y \to (Z \to Q)) \\
\varphi_3 := (X \leftrightarrow \neg Y) \lor \neg X & \psi_3 := (X \land Y) \to \neg(Z \to X) \\
\varphi_4 := (Y \to Z) \to (Y \to X) & \psi_4 := X \lor (\neg Y \lor \neg Z) \\
\varphi_5 := (X \land \neg Y) \lor (Y \land \neg X) & \psi_5 := \neg(X \leftrightarrow Y)
\end{array}$$

Für alle $1 \leq i \leq 5$: Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Äquivalenzen, dass $\varphi_i \equiv \psi_i$ oder widerlegen Sie dies. Sie können weiterhin folgende Äquivalenzen benutzen: $\top \equiv (X \lor \neg X)$, $\top \lor X \equiv \top$, $\bot \land X \equiv \bot$ und $X \land \neg X \equiv \bot$.

Hausaufgabe 3

5 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Wir identifizieren G mit einer aussagenlogischen Interpretation β_G in folgender Weise: Der Definitionsbereich von β_G ist die Menge $\{X_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ und es gilt $[\![X_{ij}]\!]^{\beta_G} = 1 \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E$.

Ein Graph ist *zusammenhängend* genau dann, wenn für jede Menge $V' \subseteq V$ mit $V' \notin \{\emptyset, V\}$ gilt, dass es $v \in V'$ und $w \in V \setminus V'$ gibt mit $\{v, w\} \in E$.

Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel φ_n an, so dass für jeden Graphen G mit n Knoten gilt

$$[\![\varphi_n]\!]^{\beta_G} = 1 \iff G \text{ ist zusammenhängend.}$$

Hausaufgabe 4 5 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien β, β' Belegungen der Variablen $X_1, \ldots, X_n$. Wir schreiben $\beta \leq \beta'$, wenn $\beta(X_i) \leq \beta'(X_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$. Eine Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ der Aussagenlogik heißt monoton, falls $[\![\varphi]\!]^{\beta} \leq [\![\varphi]\!]^{\beta'}$ für alle Belegungen β, β' der Variablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $\beta \leq \beta'$.

Zeigen Sie, dass eine Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ monoton ist genau dann, wenn sie alleine mit den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ und $\top, \bot, \wedge$ und $\vee$ dargestellt werden kann.

***Hausaufgabe 5** +5 Punkte

Seien φ, χ zwei Formeln der Aussagenlogik, sodass $\varphi \to \chi$ allgemeingültig ist. Zeigen Sie, dass es eine Formel ψ gibt mit $\mathrm{var}(\psi) \subseteq \mathrm{var}(\varphi) \cap \mathrm{var}(\chi)$ und der Eigenschaft, dass $\varphi \to \psi$ und $\psi \to \chi$ allgemeingültig sind.