Aufgaben zur Vorlesung **SoSe 2015**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Niedermeier/Chen/Froese **23.04.2015**

2. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 27.04.2015-30.04.2015)

Die Lösung für die freiwilligen (Haus)aufgaben ist in der Woche vom 04.05.2015-08.05.2015 abzugeben. Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen!

Aufgabe 1. Analyse einer Turingmaschine

Gegeben sei die Turingmaschine $(\{ z_0, z_1, z_2, z_e, z_f \}, \{ 0, 1 \}, \{ 0, 1, \Box \}, \delta, z_0, \Box, \{ z_e \})$, wobei δ wie folgt gegeben ist:

δ	0	1	$\Box$
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, \Box, L)$
z_1	$(z_1, 1, L)$	$(z_2, 0, L)$	$(z_f, \Box, N)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	$(z_e, \Box, R)$
z_e	–	–	–
z_f	–	–	–

Geben Sie die Konfigurationsfolge der Turingmaschine bei Eingabe 1100 an. Welche Funktion berechnet die Turingmaschine? (Der berechnete Funktionswert sei der Inhalt des Bandes nach Erreichen eines akzeptierenden Endzustandes.)

Aufgabe 2. Konstruktion von Turingmaschinen

Gegeben sei die Sprache $L := \{w_1\#w_2\#w_3 \mid w_1, w_2, w_3 \in \{0,1\}^*$ sind drei Binärzahlen ohne führende Nullen, und $f(w_1, w_2) = w_3\}$, wobei $f : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ die binäre Subtraktion zweier Binärzahlen darstellt und # ein von 0 und 1 verschiedenes Sonderzeichen ist:

$$f(w_1, w_2) = \begin{cases} 0, & \text{falls } w_1 \leq w_2 \\ w_1 - w_2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei indentifizieren wir die Binärkodierung mit dem jeweiligen Wert. Beispielsweise gilt $f(101, 10) = 11$ und $f(10, 101) = 0$.

Geben Sie eine Turingmaschine an, die die Sprache L erkennt. Als Begründung ist es dabei ausreichend, die prinzipielle Arbeitsweise Ihrer Turingmaschine in Worten zu beschreiben.

Aufgabe 3. Berechenbar oder nicht?

Die Goldbachsche Vermutung lautet: „Jede gerade Zahl größer 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.“

1. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, die bei allen Eingaben genau dann 1 ausgibt, wenn die Goldbachsche Vermutung gilt, und sonst 0. Existiert ein Algorithmus, der bei Eingabe $n \in \mathbb{N}$ nach endlicher Zeit $f(n)$ ausgibt?

2. Existiert ein Algorithmus, der bei Eingabe einer binär kodierten natürlichen Zahl n genau dann 1 ausgibt, wenn n eine gerade Zahl größer 2 ist und sich als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt, und sonst 0?

3. Beschreiben Sie den sich ergebenden Unterschied, wenn folgende, gegenüber 2. modifizierte Aufgabe betrachtet wird: Bei Eingabe n ist genau dann 1 auszugeben, wenn n eine gerade Zahl größer 2 ist und sich als Differenz zweier Primzahlen darstellen läßt, und 0 sonst.

Hausaufgaben

Aufgabe 4. Konstruktion von Turingmaschinen

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen eine Turingmaschine an, die diese erkennt. Als Begründung ist es dabei jeweils ausreichend die prinzipielle Arbeitsweise Ihrer Turingmaschine in Worten zu beschreiben.

1. $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.
2. $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

Aufgabe 5. Berechenbar oder nicht?

Geben Sie an, ob folgende Funktionen berechenbar sind. Begründen Sie ihre Antworten.

1. $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ die Summe der Lottozahlen vom 15.11.2042 ist.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
2. $g(n) = p_n$, wobei p_n die n-te Primzahl ist $(p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots)$

Aufgabe 6. LOOP-Programme

Seien $P1$ und $P2$ zwei LOOP-Programme. Simulieren Sie jede der folgenden Rechenoperationen, indem Sie ein LOOP-Programm dafür angeben.

1. **IF** $x1 > x2$ **THEN** $P1$ **ELSE** $P2$ **END**
2. $f(x_1, x_2) := x_1 \bmod x_2$