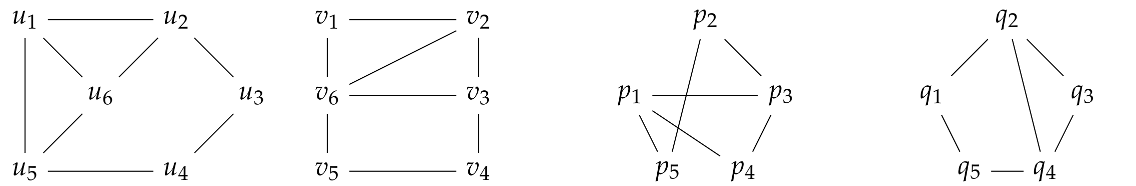
Tutorium 11

Aufgabe 1: Graph Isomorphismen

Gegeben seien die Graphen $G_1 := (\ V_1,\ E_1\ )\ G_2 := (\ V_2,\ E_2\ ),\ G_3 := (\ V_3,\ E_3\ ),\ G_4 := (\ V_4,\ E_4\ )$:



G_1 G_2 G_3 G_4

Welche Graphen sind zueinander isomorph und welche nicht? Beweise Deine Aussage.

Lösung

Alle $G \in \{\ G_1,\ G_2\ \}$ und G' aus $\{\ G_3,\ G_4\ \}$ sind nicht isomorph zueinander, da G 6 Knoten hat und G' nur 5 Knoten hat. Weiterhin sind G_1 und G_2 nicht isomorph, da G_1 drei Knoten vom Grad 3 hat, aber G_2 nur 2 Knoten vom Grad 3 hat.
Die Graphen G_3 und G_4 sind isomorph. Wir geben ein Isomorphismus $f : V_3 \to V_4$ an: $f(p_1) := q_4$, $f(p_2) := q_1$, $f(p_3) := q_2$, $f(p_4) := q_3$ und $f(p_5) := q_5$. Offensichtlich ist f injektiv, surjektiv und total und damit eine Bijektion. Nun ist zu zeigen, dass f ein Isomorphismus zwischen G_3 und G_4 ist, d.h. $\forall u, v \in V_3\ .\ \{\ u,\ v\ \} \in E_3 \Leftrightarrow \{\ f(u),\ f(v)\ \} \in E_4$. Dies gilt, da:

$$
\begin{aligned}
&\{\ p_1,\ p_4\ \} \in E_3 \quad \text{und } \{\ f(p_1),\ f(p_4)\ \} = \{\ q_4,\ q_3\ \} \in E_4\\
&\{\ p_1,\ p_5\ \} \in E_3 \quad \text{und } \{\ f(p_1),\ f(p_5)\ \} = \{\ q_4,\ q_5\ \} \in E_4\\
&\{\ p_1,\ p_3\ \} \in E_3 \quad \text{und } \{\ f(p_1),\ f(p_3)\ \} = \{\ q_4,\ q_2\ \} \in E_4\\
&\{\ p_2,\ p_3\ \} \in E_3 \quad \text{und } \{\ f(p_2),\ f(p_3)\ \} = \{\ q_1,\ q_2\ \} \in E_4\\
&\{\ p_2,\ p_5\ \} \in E_3 \quad \text{und } \{\ f(p_2),\ f(p_5)\ \} = \{\ q_1,\ q_5\ \} \in E_4\\
&\{\ p_3,\ p_4\ \} \in E_3 \quad \text{und } \{\ f(p_3),\ f(p_4)\ \} = \{\ q_2,\ q_3\ \} \in E_4
\end{aligned}
$$

Da wir in beiden Graphen keine Kanten mehr haben, die wir betrachten müssen, gilt $\forall u, v \in V_3\ .\ \{\ u,\ v\ \} \in E_3 \Leftrightarrow \{\ f(u),\ f(v)\ \} \in E_4$. Somit ist f ein Isomorphismus zwischen G_3 und G_4.

\Lösung

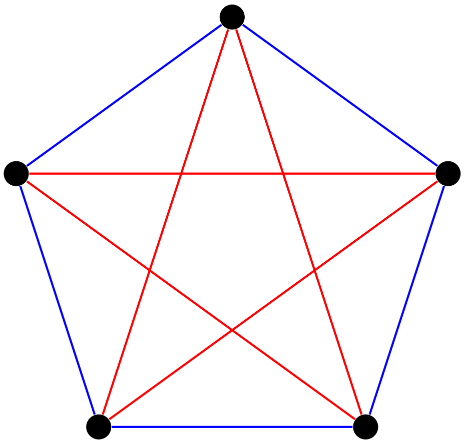
Aufgabe 2: Ramsey Theorem

Gib an: Eine möglichst kleine Anzahl von Knoten, die ein vollständiger, rot-blau gefärbter Graph haben muss , damit er einen vollständigen monochromatischen Untergraphen mit 3 Knoten enthält? Beweise Deine Aussage.

Lösung

Wir zeigen $R(3) > 5$ und $R(3) \leq 6$ und erhalten so $R(3) = 6$.

- Wir zeigen, dass $R(3) > 5$ indem wir einen K^5 so blau und rot färben, dass er kein monochromatisches Dreieck enthält.

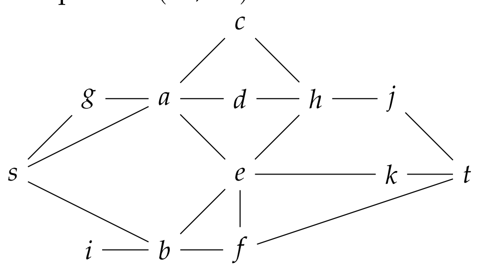


- Wir zeigen $R(3) \leq 6$ indem wir zeigen, dass jeder blau-rot gefärbter K^6 ein monochromatisches Dreieck enthalten muss. Sei v ein beliebiger Knoten des K^6. Dann gibt es laut Schubfachprinzip mindestens 3 gleichfarbige Kanten von v zu anderen Knoten. Sei die Farbe dieser Kanten o.B.d.A. rot. Nun gibt es 2 Fälle:
  - Mindestens 2 der Endknoten sind ebenfalls durch eine rote Kante verbunden. Dann gibt es zwischen diesen Knoten und v ein rotes Dreieck.
  - Alle Endknoten sind durch blaue Kanten verbunden. Dann bilden die Endknoten auch mindestens ein blaues Dreieck.

\Lösung

Aufgabe 3: Grapheigenschaften

3.a) Gegeben sei der folgende Graph $G := (V, E)$:



Gib an:

3.a(i) Alle zentralen Knoten, den Radius und Durchmesser von G.

Lösung

Zentraler Knoten ist nur e. $\mathrm{rad}_G = 2$, $\mathrm{diam}_G = 4$

\Lösung

3.a(ii) Wie viele Zusammenhangskomponenten hat G?

Lösung

Eine

\Lösung

3.a(iii) Eine möglichst kleine Knotenmenge V_1 der Knoten, die man entfernen muss, so dass es keinen Pfad mehr zwischen s und t gibt (Ausgenommen s und t)?

Lösung

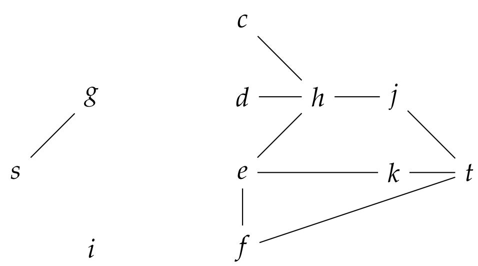
Z.B. $V_1 := \{a, b\}$

\Lösung

3.a(iv) Wie viele Zusammenhangskomponenten hat $G - V_1$? Zeichne den neuen Graphen.

Lösung

$G - V_1$ hat drei Zusammenhangskomponenten.



\Lösung

3.b) *Gib an:* Den Durchmesser eines vollständigen Graphen mit 26 Knoten.

Lösung

1

\Lösung

3.c) *Beweise:* Für alle Graphen G gilt: $\mathrm{rad}_G \le \mathrm{diam}_G \le 2\,\mathrm{rad}_G$

Lösung

Sei G ein beliebiger Graph. Zu zeigen: $\mathrm{rad}_G \le \mathrm{diam}_G \le 2\,\mathrm{rad}_G$ Für nicht zusammenhängende Graphen ist die Aussage trivialerweise erfüllt, denn dann ist $\mathrm{rad}_G = \mathrm{diam}_G = \infty$ (vgl. Großübung). Im folgenden nehmen wir daher an, dass G zusammenhängend ist.

$$\mathrm{rad}_G := \min_{x\in G} \max_{y\in G} d(x,y) \tag{1}$$

$$\mathrm{diam}_G := \max_{x\in G} \max_{y\in G} d(x,y) \tag{2}$$

- $\mathrm{rad}_G \le \mathrm{diam}_G$

$$\begin{aligned} \mathrm{rad}_G &\overset{1}{=} \min_{x\in G} \max_{y\in G} d(x,y) \\ &\le \max_{x\in G} \max_{y\in G} d(x,y) \\ &\overset{2}{=} \mathrm{diam}_G \end{aligned}$$

- $\mathrm{diam}_G \le 2\,\mathrm{rad}_G$
  Es gibt einen Knoten $c \in V$, so dass für alle Knoten $y \in V$ gilt $d(c,y) \le \mathrm{rad}_G$. Seien v_1 und v_2 die zwei am weitesten voneinander Knoten im Graph. Also gilt $\mathrm{diam}_G = d(v_1,v_2)$. Dann gibt es auch einen Pfad von v_1 zu c und von v_2 zu c. Da $d(v_1,v_2)$ die Länge des kürzesten Pfades zwischen v_1 und v_2 ist, kann $d(v_1,v_2)$ nicht größer sein als die Summe von $d(v_1,c)$ und $d(c,v_2)$. Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}_G &= d(v_1,v_2) \\ &\le d(v_1,c) + d(v_2,c) \\ &\le \mathrm{rad}_G + \mathrm{rad}_G \\ &= 2\,\mathrm{rad}_G\,. \end{aligned}$$

\Lösung

Aufgabe 4: Bäume

4.a) *Beweise:* Jeder endliche Baum mit mindestens 2 Knoten enthält mindestens 2 Blätter.

Lösung

Sei $B := (\ V,\ E\ )$ ein endlicher Baum mit mindestens 2 Knoten. Seien v_1 und v_n die am weitesten voneinander entfernten Knoten und sei $P = (\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\ )$ der Pfad zwischen ihnen. Wir zeigen per Widerspruch, dass v_1 und v_n Blätter sind.
Annahme: v_1 ist kein Blatt, d.h. $\mathrm{d}_{\mathrm{B}}(v) > 1$. Dann existiert eine Kante $e := \{\ v_1,\ v\ \}$, mit $v \neq v_2$. Dann gibt es zwei Fälle:

- Fall 1: $v = v_i$ liegt auf P. In diesem Fall gibt es zwei Pfade von v_1 nach v_i und zwar ein direkter und einer über $v_1, \ldots v_{i-1}$. D.h. insbesondere, dass B einen Zyklus enthält, was per Definition ein Widerspruch dazu ist, dass B ein Baum ist.

- Fall 2: v liegt nicht auf P. Dann können wir aber einen längeren Pfad definieren, indem wir v an P anhängen, d.h. $P' := (\ v,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\ )$. Da P' ein Knoten mehr enthält als P, ist P' länger als P was der Annahme widerspricht, dass P der längste Pfad im B ist. Also erhalten wir in diesem Fall auch einen Widerspruch.

Da wir in beiden Fälle einen Widerspruch erhalten haben, gilt die Annahme nicht und v_1 ist ein Blatt. Analog zeigt man, dass v_n auch ein Blatt ist. Somit gibt es in jedem endlichen Baum mit mindestens 2 Knoten auch 2 Blätter.

\Lösung

4.b) *Beweise:* Für alle endlichen Bäume gilt: Auf dem längsten Pfad im Baum liegt immer ein zentraler Knoten.

Lösung

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Sei $B := (\ V,\ E\ )$ ein beliebiger endlicher Baum. Seien $v_1, v_2 \in V$ die zwei am weitesten entfernten Knoten und P der (eindeutige) Pfad zwischen v_1 und v_2. Angenommen, in P ist kein zentraler Knoten. Sei c der zentrale Knoten von B, der am dichtesten zu P liegt (da es auch mehrere zentrale Knoten geben kann). Sei dann p auf P der dichteste Knoten, mit dem c verbunden ist und sei $n := d(c, p) > 0$. Sei V_P die Menge aller Knoten die entweder auf P oder auf dem eindeutigen Pfad zwischen p und c liegen. Dann haben wir zwei Fälle:

- Fall 1: Es gibt ein Knoten v, so dass $d(c, v) = \mathrm{rad}_B$ und kein Knoten aus V_P liegt auf dem Pfad von c nach v. Sei o.B.d.A. v_1 der Knoten, der weiter entfernt ist von p. Da $d(v_1, v_2) = \mathrm{diam}_B \leq 2\,\mathrm{rad}_B$, gilt, dass $d(p, v_2) \leq \mathrm{rad}_G$. Wir zeigen nun, dass $d(v, v_1) > d(v_1, v_2)$ was bedeuten würde, dass P nicht der längste Pfad ist. Da p der dichteste Knoten von P an c ist, gibt es ein Pfad von c über p zu v_1. Da weiterhin auf dem Pfad zwischen c und v kein Knoten aus V_P liegt, gibt es ein Pfad zwischen v und v_1, der über c und p geht. D.h.

$$
\begin{aligned}
d(v, v_1) &= d(v, c) + d(c, p) + d(p, v_1) \\
&\overset{\text{Def. } v}{=} \mathrm{rad}_B + d(c, p) + d(p, v_1) \\
&\overset{\mathrm{rad}_B \geq d(p, v_2)}{\geq} d(p, v_2) + d(c, p) + d(p, v_1) \\
&\overset{d(v_1, v_2) = d(p, v_2) + d(p, v_1)}{=} d(v_1, v_2) + d(c, p) \\
&\overset{d(c,p) > 0}{>} d(v_1, v_2)
\end{aligned}
$$

  was ein Widerspruch dazu ist, dass v_1 und v_2 die am weitesten entfernten Knoten in B sind.
- Fall 2: Alle Knoten, die in $B - V_P$ sind, haben eine um mindestens 1 kürzere Distanz zu c, als rad_G. Sei v so ein Knoten mit $d(c, v) \leq \mathrm{rad}_B - 1$. Sei c_1 der direkte Nachbar von c, der auf dem Pfad von c nach p liegt. Dann ist $d(c_1, v) = d(c, v) + 1 \leq \mathrm{rad}_B$. Da c_1 auch dichter ist an v_1 und v_2, sowie an allen Knoten aus V_P, ist c_1 auch ein zentraler Knoten, der unter anderem auch dichter an p liegt als c. Da aber per Annahme c der dichteste zentrale Knoten an p ist, erhalten wir ein Widerspruch.

Somit liegt mindestens ein zentraler Knoten in P.

\Lösung