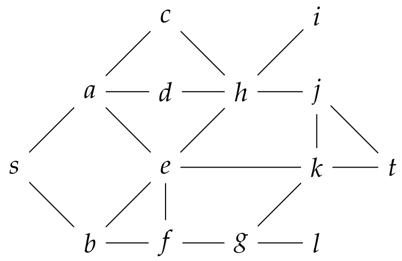
Grundlagen und algebraische Strukturen (WiSe 13/14)

LaS: Logik und Semantik *27.01.2014 – 02.02.2014*

Tutorium 12

Aufgabe 1: Bäume

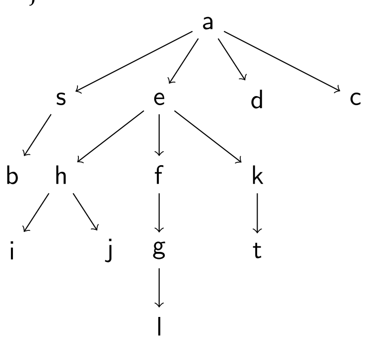
1.a) Gegeben sei folgender Graph $G := (V, E)$:



Zeichne einen gerichtete Spannbaum B des Graphen G mit Wurzel a, indem Du eine Breitensuche auf G anwendest.

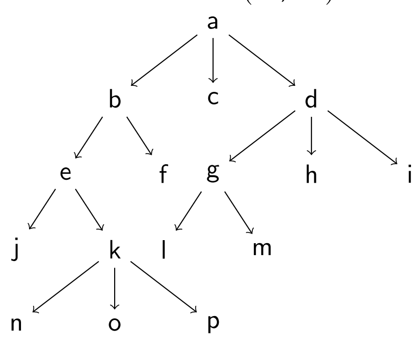
------------------------------ Lösung ------------------------------

Andere Lösungen sind möglich je nachdem wie man die Nachfolger ordnet.



\Lösung

1.b) Gegeben sei der folgende gerichtete Baum $B := (V, E)$ mit Wurzelknoten a:



1.b(i) *Gib an:* In welcher Reihenfolge wird der Baum bei Breiten- bzw. bei Tiefensuche durchlaufen?

------------------------------ Lösung ------------------------------

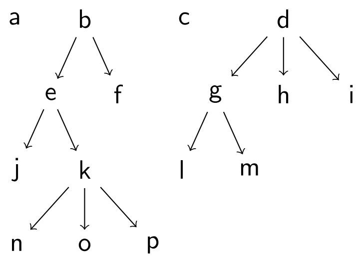
Breitensuche liefert $a \to b \to c \to d \to e \to f \to g \to h \to i \to j \to k \to l \to m \to n \to o \to p$.
Tiefensuche liefert $a \to b \to e \to j \to k \to n \to o \to p \to f \to c \to d \to g \to l \to m \to h \to i$

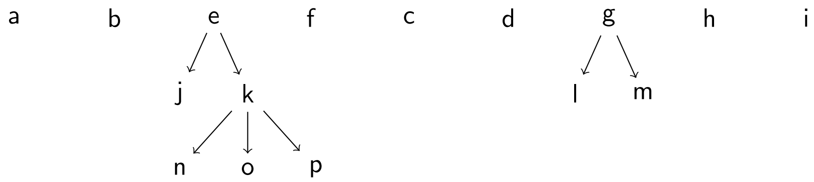
\Lösung

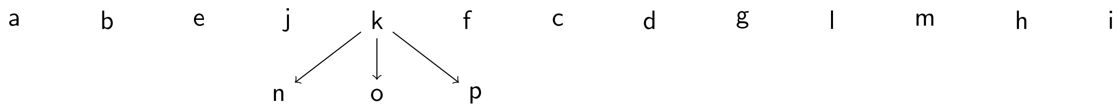
1.b(ii) *Gib an:* Die preorder-, inorder- und postorder-Traversierungen B
Hinweis: Es reicht, das Ergebnis anzugeben.

------------------------------ Lösung ------------------------------

preorder:

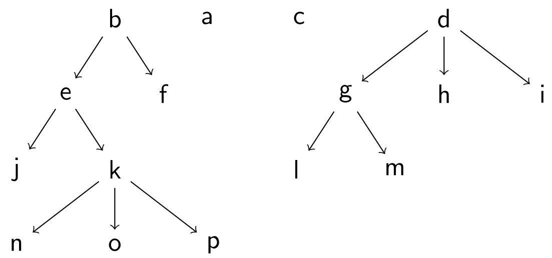


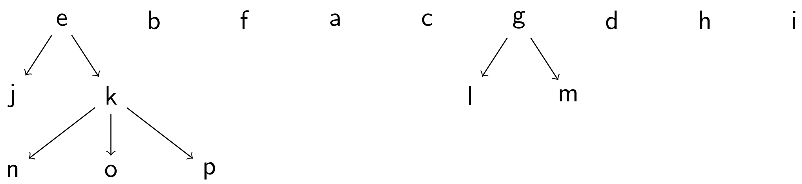


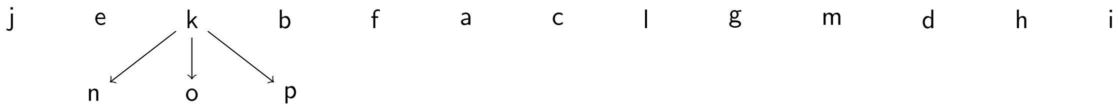


a b e j k n o p f c d g l m h i

inorder:

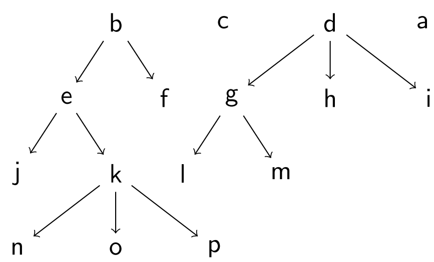


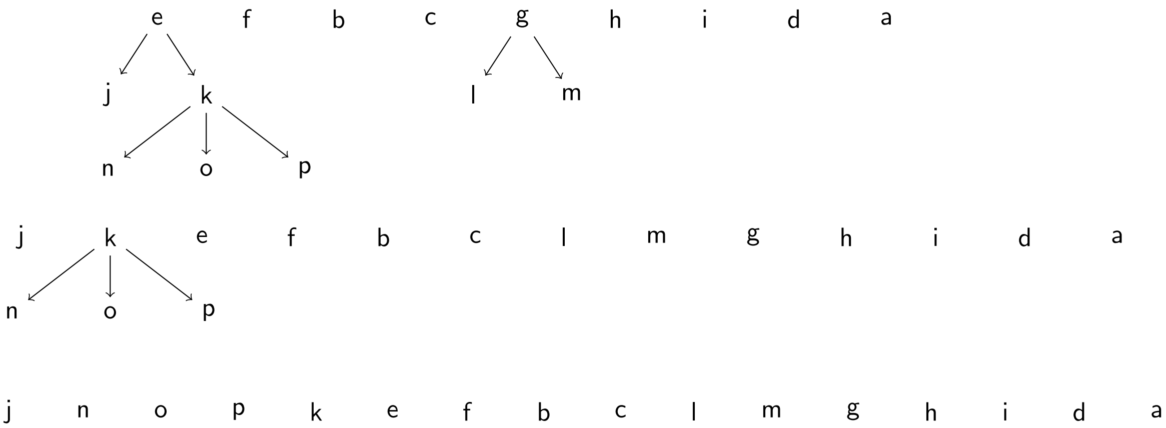




j e n k o p b f a c l g m d h i

postorder:





\Lösung

Aufgabe 2: Graphen

Beweise: In jedem Graphen mit Minimalgrad $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es einen Pfad der Länge n.

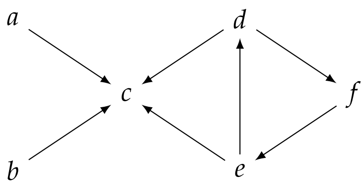
Lösung

Induktion über den Minimalgrad $\delta(G)$.
I.A.: Sei $G := (\ V,\ E\ )$ ein Graph mit $\delta(G) = 1$. Wir zeigen, dass er einen Pfad der Länge 1 enthält. Da $\delta(G) = 1$, haben also alle Knoten mindestens den Grad 1. Sei v_1 ein solcher Knoten. Da $\mathrm{d}_G(v_1) \geq 1$, hat v_1 also einen Nachbarn $v_2 \in V$ mit $v_2 \neq v_1$, d.h. es existiert eine Kante $e := \{\ v_1,\ v_2\ \} \in E$. Folglich existiert auch ein Pfad $P := (\ v_1,\ v_2\ )$ der Länge 1.
I.V.: Für ein festes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt, dass alle Graphen mit Minimalgrad n einen Pfad der Länge n enthalten.
I.S.: Sei nun $G := (\ V,\ E\ )$ ein Graph mit Minimalgrad $n+1$. Wir zeigen, dass G einen Pfad der Länge $n+1$ enthält. Entfernen wir von G solange Kanten, bis wir einen Graph G' mit Minimalgrad n erhalten, können wir die **IV** anwenden und erhalten so einen Pfad $P := (\ v_1,\ \ldots,\ v_{n+1}\ )$ der Länge n (Anzahl an Kanten in P). Fügen wir die entfernten Kanten wieder hinzu, bekommen wir wieder den Ursprungsgraphen mit Minimalgrad $n+1$, der Pfad P ist aber auch ein Pfad im Graph G, da durch hinzufügen von Kanten die bestehenden Pfade nicht verändert werden. D.h. wir müssen nur noch zeigen, dass in G ein Pfad der Länge $n+1$ existiert. Betrachten wir den Knoten v_{n+1}. Da $\delta(G) = n+1$, hat v_{n+1} mindestens $n+1$ Nachbarn. Da im Pfad P nur n von v_{n+1} verschiedene Knoten enthalten sind, können also diese Knoten nicht die einzigen Nachbarn von v_{n+1} sein, sondern es gibt mindestens noch einen Knoten $v \in V$ mit $\{\ v_{n+1},\ v\ \} \in E$ und $v \neq v_i$ für alle $1 \leq i \leq n+1$. Daher kann man v zum Pfad P hinzufügen und erhält so einen Pfad $P := (\ v_1,\ \ldots,\ v_{n+1},\ v\ )$ vom G der Länge $n+1$.

\Lösung

Aufgabe 3: Gerichtete Graphen

3.a) Gegeben sei der Graph G mit



3.a(i) *Begründe:* Ist G stark zusammenhängend? Ist G schwach zusammenhängend?

Lösung

G ist nicht stark zusammenhängend, da es z.B. zwischen a und b keinen Pfad gibt. G ist aber schwach zusammenhängend, da es in dem ungerichteten Graphen $\mathrm{u}(G)$ einen Pfad zwischen je zwei Knoten gibt.

\Lösung

3.a(ii) *Gib an:* Bestimme alle stark zusammenhängenden Untergraphen von G, die mindestens eine Kante enthalten.

Lösung

Nur der Untergraph $(\{d, e, f\}, \{(d, f), (e, d), (f, e)\})$ ist ein stark zusammenhängender Untergraph von G.

\Lösung

3.a(iii) *Gib an:* Bestimme alle Quellen von G.

Lösung

Die Knoten a und b sind Quellen in G.

\Lösung

3.a(iv) *Gib an:* Bestimme alle Senken von G.

Lösung

Der Knoten c ist die einzige Senke in G

\Lösung

3.b) *Gib an:* Wie viele Kanten muss ein gerichteter Graph mit $n \geq 2$ Knoten mindestens haben, damit er schwach zusammenhängend sein kann?
Beweise: Beweise, das es für die angegebene Zahl von Kanten tatsächlich immer einen schwach zusamenhängenden Graphen mit n Knoten gibt.

Lösung

Ein Graph mit n Knoten muss mindestens $n - 1$ Kanten haben, um schwach zusammenhängend zu sein.

Sei $n \geq 2$. Wir konstruieren einen einfachen, gerichteten Graphen G für n:
Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Wähle $G := (V, E)$ mit $E := \{(v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i < n\}$.
Wir transformieren G in einen ungerichteten Graphen, den wir $\mathrm{u}(G)$ nennen:

$$\mathrm{u}(G) := (V, E') \text{ wobei } E' := \{\{x, y\} : (x, y) \in E\}$$

Wir zeigen, dass $\mathrm{u}(G)$ zusammenhängend ist, d.h. wir zeigen, dass es für alle $v_i, v_j \in V$ mit $v_i \neq v_j$ einen Pfad zwischen v_i und v_j existiert.
Seien also $v_i, v_j \in V$ mit $v_i \neq v_j$. Wir haben also zwei Fälle:

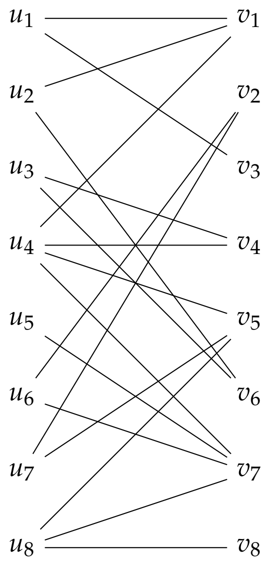
- $i < j$. Dann ist $P := (v_i, v_{i+1} \ldots, v_j)$ ein Pfad in $\mathrm{u}(G)$, da es nach der Definition von E' für alle $1 \leq k \leq n$ eine Kante $e = \{v_k, v_{k+1}\}$ exisitiert. Somit existiert auch zwischen je zwei Knoten mit benachbarten Indizies aus der Menge $\{v_i, \ldots, v_j\}$ eine Kante, folglich ist also P ein Pfad zwischen v_i und v_j $\mathrm{u}(G)$.
- $j < i$. Dann ist $P := (v_j, v_{j+1} \ldots, v_i)$ nach derselben Argumentation ein Pfad zwischen v_j und v_i in $\mathrm{u}(G)$.

Also ist $\mathrm{u}(G)$ zusammenhängend und somit G schwach zusammenhängend. *Anmerkung: Da $v_i \neq v_j$, gilt also insbesondere $i \neq j$ und daher wird so ein Fall bei der Fallunterscheidung nicht betrachtet.*

\Lösung

Aufgabe 4: Disjunkte Pfade, Mengers Theorem

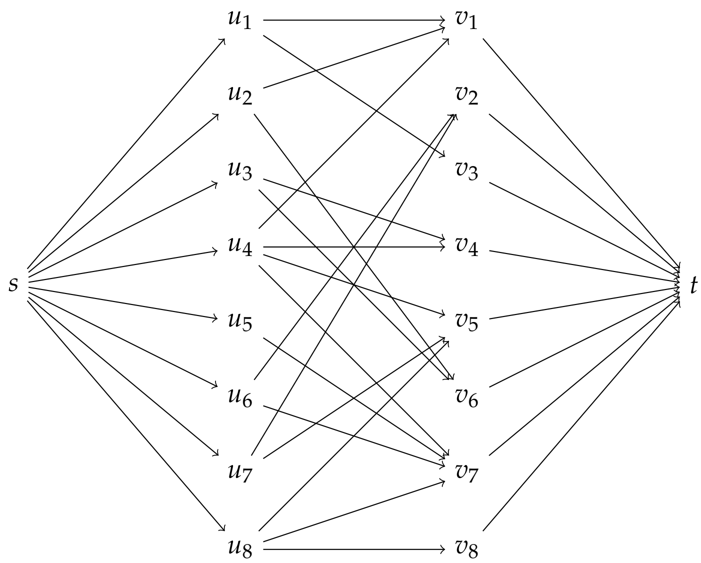
4.a) Gegeben sei der folgende Graph:



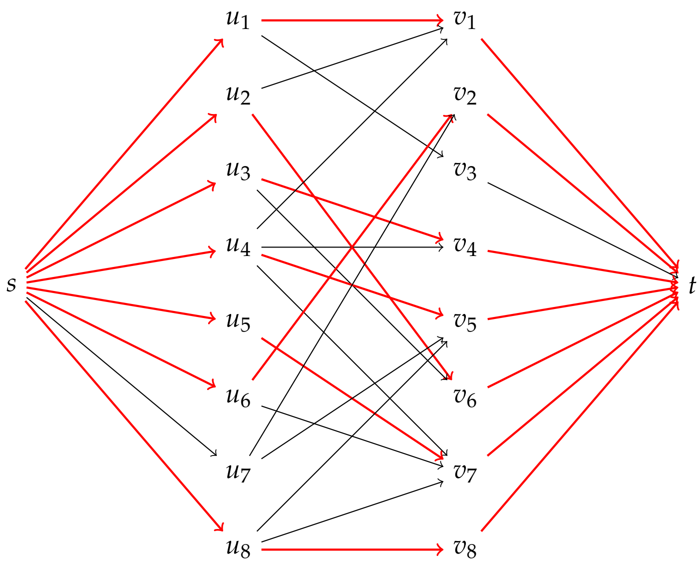
Benutze (knoten)disjunkte Pfade, um ein maximales Matching zu finden (also ein Matching, wobei möglichst viele der Knoten $u_1, \ldots, u_8$ einem der Knoten $v_1, \ldots, v_8$ zugeordnet werden).

Lösung

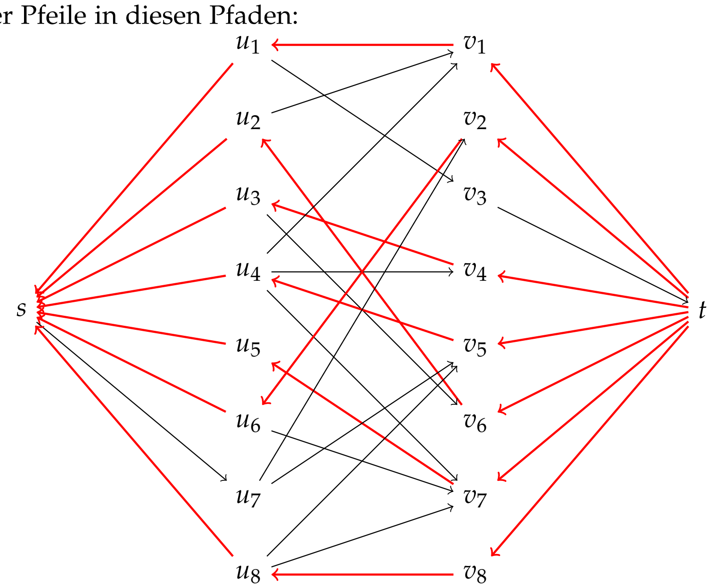
Wir fügen dem Graphen die Knoten s und Knoten t, sowie die Kanten $\{\ s,\ u_i\ \}$ mit $1 \leq i \leq 8$, $\{\ v_j,\ t\ \}$ mit $1 \leq j \leq 8$ hinzu. Danach verwandeln wir den Graphen in einen gerichteten Graphen, wobei die Richtung aller Kanten nach rechts geht (bzw. von s nach t).



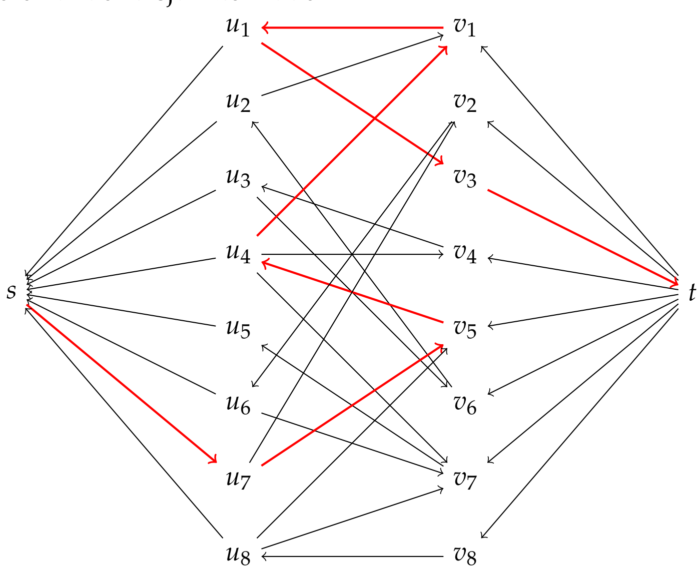
Man wählt möglichst viele knotendisjunkte Pfade von s nach t, indem man bei einem u_i Knoten von oben nach unten die erste Kante wählt, die zu einem v_i Knoten führt, der noch nicht auf einem vorher gewählten Pfad liegt:



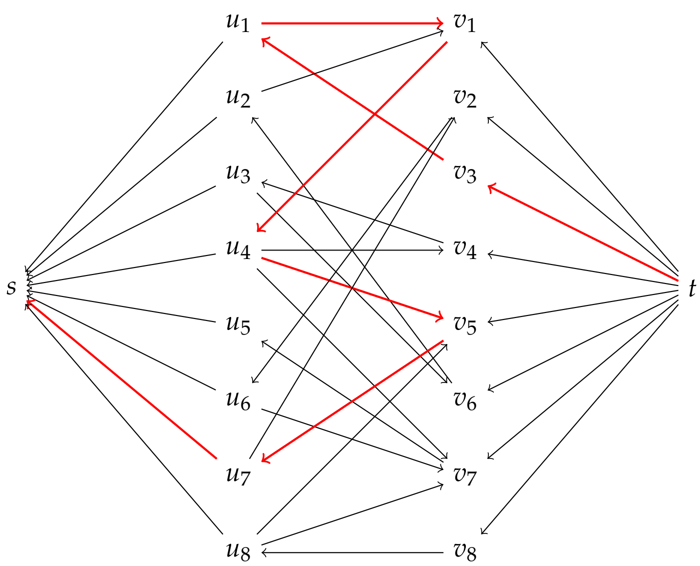
Umkehren aller Pfeile in diesen Pfaden:



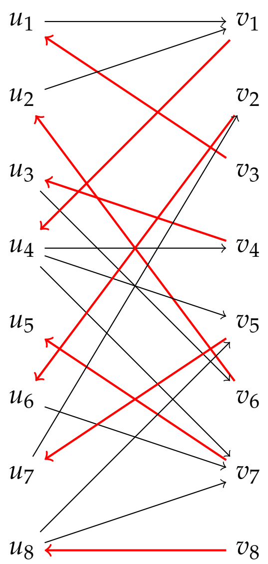
Finde neue untereinander disjunkte Pfade:



Umkehren der Pfeile:



Es gibt keine weitere disjunkte Pdade im Graphen, da es keine von s ausgehenden Kanten mehr gibt. Alle Kanten die von v_i zu u_j für $1 \leq i, j \leq 8$ gehen bilden zusammen das maximale Matching.

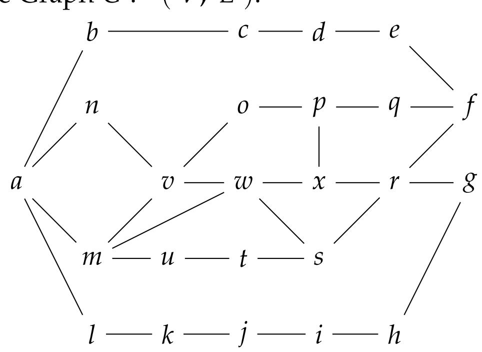


Somit ist der maximale Matching

$$M := \{ \{ u_1, v_3 \}, \{ u_2, v_6 \}, \{ u_3, v_4 \}, \{ u_4, v_1 \}, \{ u_5, v_7 \}, \{ u_6, v_2 \}, \{ u_7, v_5 \}, \{ u_8, v_8 \} \}$$

\Lösung

4.b) Gegeben sei der folgende Graph $G := (V, E)$:



Seien $A := \{ b, m, n \}$ und $B := \{ r, f, g \}$. Wende Mengers Theorem an, um die minimale Anzahl an trennenden Knoten zwischen A und B zu bestimmen.

Lösung

Nach Mengers Theorem ist die minimale Anzahl der trennenden Knoten die maximale

Anzahl der disjunkten Pfade zwischen A und B. In diesem Graphen gibt es zwischen A und B 3 disjunkte Pfade: $P_1 := (\ n,\ v,\ o,\ p,\ q,\ f\ )$, $P_2 := (\ m,\ w,\ x,\ r\ )$, $P_3 := (\ a,\ b,\ l,\ k,\ j,\ i,\ h,\ g\ )$, Also ist die minimale Anzahl an trennenden Knoten 3.
Anmerkung: Wir können aber nicht 3 beliebige Knoten entfernen, sondern haben nur die Möglichkeiten entweder die Knoten b, m, n oder die Knoten r, f, g zu entfernen.

\Lösung