3 Logische Normalformen und Primtermdarstellung

Logische Normalformen

Eine vollständig definierte logische Funktion kann durch einen logischen Ausdruck angegeben werden. Der logische Ausdruck ist aber nicht eindeutig bestimmt, d. h. es gibt mehrere äquivalente Darstellungen für eine Funktion. Für Verfahren oder Algorithmen, die auf eine Funktion angewendet werden sollen, ist es aber meist nötig, von einer Standarddarstellung der Funktion auszugehen. Solche standardisierten Darstellungsformen sind die logischen Normalformen. Die Notwendigkeit einer solchen Vereinheitlichung wird z. B. notwendig, wenn die Äquivalenz von Ausdrücken gezeigt werden soll. Abgesehen vom Vergleich mittels Wertetabellen, müssten die Ausdrücke durch äquivalente Umformungen auf eine gemeinsame Form gebracht werden. Dabei sollte die prinzipielle Gestalt der Ausdrücke nach Umformung bekannt sein, um vergleichen zu können.

Beispiel 30. *Aufzeigen der Äquivalenz zweier Funktionen mittels einer Normalform*

$$\begin{aligned} f_1 &= (a + b) \rightarrow a \cdot c \\ &= \overline{a + b} + a \cdot c \\ &= \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot c \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 &= (\overline{a} + \overline{c}) \rightarrow \overline{a + b} \\ &= (\overline{a} + \overline{c}) \rightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} \\ &= \overline{\overline{a} + \overline{c}} + \overline{a} \cdot \overline{b} \\ &= a \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} \\ &= \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot c \end{aligned}$$

$\text{also}: \; f_1 = f_2$

Definition 11. *Term*
Einen logischen Ausdruck oder einen Teil eines logischen Ausdruckes, der selbst ein logischer Ausdruck ist, nennt man auch Term. Eine Konjunktion $X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n$ *heißt n-stelliger Konjunktionsterm, wenn alle* $X_i, i \in 1, \ldots, n$, *entweder logische Variablen oder negierte logische Variablen sind und jede Variable nur einmal vorkommt. Ein 0-stelliger Konjunktionsterm soll mit der logischen Konstanten 1 identisch sein. Eine Disjunktion* $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ *heißt n-stelliger Disjunktionsterm, wenn jedes* $X_i, i \in 1, \ldots, n$, *entweder logische Variablen oder negierte logische Variablen sind und jede Variable nur einmal vorkommt. Ein 0-stelliger Disjunktionsterm soll mit der Konstanten 0 identisch sein.*

Umformung äquivalenter Ausdrücke

Jeder Ausdruck lässt sich äquivalent in einen booleschen Ausdruck umformen, da $(\cdot, +, \overline{})$ ein vollständiges System ist. Für dieses System stehen eine Menge von Umformungsregeln zur Verfügung, mit denen gerechnet werden kann. Als Ausgangsposition werden bestimmte Formen boolescher Ausdrücke genannt. Dabei unterscheidet man hauptsächlich zwei Typen von Normalformen: die disjunktive Normalform (DNF) und die konjunktive Normalform (KNF).

3.1 Disjunktive Normalform

3.1.1 Allgemeine disjunktive Normalform

Definition 12. *Disjunktive Normalform (DNF)*
Ein logischer Ausdruck der Form $K_1 + K_2 + \cdots + K_k, k \in \mathbb{N}$, *heißt disjunktive Normalform (DNF), wenn alle* $K_i, i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *paarweise verschiedene Konjunktionsterme sind. Gilt* $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = K_1 + K_2 + \cdots + K_k, k, n \in \mathbb{N}$, *so heißt* $K_1 + K_2 + \cdots + K_k$ *eine disjunktive Normalform der Funktion f.*

Beispiel 31. *Disjunktive Normalformen sind:*
$a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot c + \overline{a} \cdot c$
$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_4$
$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z}$

Eine DNF ist für eine gegebene vollständig definierte Funktion i. A. nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel 32. *Umformung in DNF*

$$\begin{aligned}
f_{(a,b,c,d)} &= b \cdot (c \to a \cdot d) \\
&= b \cdot (\overline{c} + a \cdot d) \\
&= b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot d \\
&= b \cdot \overline{c} + \cancel{a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d} + a \cdot b \cdot c \cdot d \\
&= \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c \cdot d \\
&= \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c \cdot d \\
&= \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + a \cdot b \cdot c \cdot d
\end{aligned}$$

Umformung eines logischen Ausdrucks in eine mögliche DNF

1. Umformung des logischen Ausdrucks in einen Booleschen Ausdruck (Eliminierung der Verknüpfungen $\to, \equiv, \oplus, \mathsf{NAND}, \mathsf{NOR}$).

2. Anwendung der De Morganschen Regeln ($\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$) bis die Negation nur noch bei Variablen auftritt.

3. Anwendung des Distributivgesetzes, des Komplementgesetzes, des 0-1-Gesetzes und des Idempotenzgesetzes.

4. Mehrfach auftretende Konjunktionsterme werden nach dem Idempotenzgesetz $(a + a = a)$ zusammengefasst.

Das Komplementgesetz und das 0-1-Gesetz sind nur zwischen Variablen anzuwenden, die schon durch Konjunktionszeichen miteinander verbunden sind. Es werden dabei mehrfach auftretende Variablen innerhalb dieses Terms eliminiert. Nur so erhält man die geforderten Konjunktionsterme. Mit dem Idempotenzgesetz wird erreicht, dass kein Konjunktionsterm mehrfach auftritt. Dieser letzte Schritt erübrigt sich jedoch meist.

Beispiel 33. *Umformung in DNF*

$$\begin{aligned}
f_{(a,b,c,d)} &= a \cdot b \equiv \overline{c \cdot d} \rightarrow (\overline{a \cdot b}) \\
&= (a \cdot b \cdot \overline{c \cdot d} + \overline{a \cdot b} \cdot c \cdot d) \rightarrow (\overline{a} + \overline{b}) \\
&= \overline{(a \cdot b \cdot \overline{c \cdot d} + \overline{a \cdot b} \cdot c \cdot d)} + (\overline{a} + \overline{b}) \\
&= \overline{\left(a \cdot b \cdot \overline{c \cdot d}\right.} \cdot \overline{\left.\overline{a \cdot b} \cdot c \cdot d\right)} + \overline{a} + \overline{b} \\
&= (\overline{a} + \overline{b} + c \cdot d) \cdot (a \cdot b + \overline{c} + \overline{d}) + \overline{a} + \overline{b} \\
&= \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{d} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{d} + a \cdot b \cdot c \cdot d + \overline{a} + \overline{b}
\end{aligned}$$

Sonderfälle

Eine DNF kann auch aus nur einem einzigen Konjunktionsterm bestehen. Besteht der umzuwandelnde logische Ausdruck nur aus der Konstanten 1, entspricht dies der DNF eines formal wahren Ausdrucks. Für formal falsche Ausdrücke gibt es keine DNF.

3.1.2 Kanonische disjunktive Normalform

Problem

Die DNF eines logischen Ausdrucks i. A. nicht eindeutig bestimmt ist, was zu Schwierigkeiten beim Vergleich logischer Funktionen führt. Es gibt aber eine ausgezeichnete oder kanonische disjunktive Normalform, die diese Schwierigkeit umgeht.

Definition 13. *Kanonische disjunktive Normalform (KDNF)*
Erweiterung einer disjunktiven Normalform zu einer vollständig definierten n-stelligen logischen Funktion heißt kanonisch (oder ausgezeichnet) (KDNF), wenn jeder der vorhandenen Konjunktionsterme alle n Variablen enthält und nur einmal auftritt.

Umformung der DNF zu KDNF

Die kanonische disjunktive Normalform (KDNF) ist für jede vollständig definierte logische Funktion eindeutig bestimmt. Sie hat aber die unangenehme Eigenschaft, die „längste“ DNF der jeweiligen Funktion zu sein. Jeder Konjunktionsterm ist n-stellig, falls die Funktion n-stellig ist, enthält also alle Variablen. Die kanonische disjunktive Normalform kann aus jeder beliebigen DNF gewonnen werden. Die Konjunktionsterme, die noch nicht alle Variablen enthalten, werden mit dem Komplementgesetz ($\mathsf{a} + \overline{\mathsf{a}} - 1$) um die nicht vorhandenen Variablen erweitert. Dabei entsteht natürlich noch jeweils ein weiterer Konjunktionsterm. Mehrfach auftretende Konjunktionsterme werden nach dem Idempotenzgesetz ($\mathsf{a} + \mathsf{a} - \mathsf{a}$) zusammengefasst.

Schritte zur Umformung DNF in KDNF

Gegeben sei eine DNF einer n-stelligen Funktion.

1. Jeder Konjunktionsterm, der nicht n-stellig ist, wird konjunktiv mit dem Term ($\mathsf{a}_j + \overline{\mathsf{a}_j}$) verknüpft, wobei a_j eine Variable ist, die in diesem Konjunktionsterm nicht enthalten ist.

2. Auf den so erhaltenen neuen Konjunktionsterm wird das Distributivgesetz ($\mathsf{K} \cdot (\mathsf{a}_j + \overline{\mathsf{a}_j}) - \mathsf{K} \cdot \mathsf{a}_j + \mathsf{K} \cdot \overline{\mathsf{a}_j}$) angewandt.

3. Mehrfach auftretende Terme werden nach den Idempotenzgesetzen zusammengefasst

Wiederholte Anwendung der vorstehenden Schritte liefert die KDNF.

Beispiel 34. *Umformung DNF in KDNF*

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}_{(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})} &- \mathsf{a} + \mathsf{b} \\
&- \mathsf{a} \cdot (\mathsf{b} + \overline{\mathsf{b}}) + (\mathsf{a} + \overline{\mathsf{a}}) \cdot \mathsf{b} \\
&- \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} + \mathsf{a} \cdot \overline{\mathsf{b}} + \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} + \overline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{b} \\
&- \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} + \mathsf{a} \cdot \overline{\mathsf{b}} + \overline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{b} \\
&- \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot (\mathsf{c} + \overline{\mathsf{c}}) + \mathsf{a} \cdot \overline{\mathsf{b}} \cdot (\mathsf{c} + \overline{\mathsf{c}}) + \overline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{b} \cdot (\mathsf{c} + \overline{\mathsf{c}}) \\
&- \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot \overline{\mathsf{c}} + \mathsf{a} \cdot \overline{\mathsf{b}} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \overline{\mathsf{b}} \cdot \overline{\mathsf{c}} + \overline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c} + \overline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{b} \cdot \overline{\mathsf{c}}
\end{aligned}
$$

Aufstellung der KDNF für Funktionen, die durch Wertetabellen gegeben sind

Die Konjunktionsterme einer KDNF werden auch Minterme genannt. Es gibt 2^n Minterme bei n Variablen, nämlich so viele Minterme, wie es Belegungen gibt.

Definition 14. *Ein n-stelliger Konjunktionsterm über n Variablen* $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n$ *heißt n-stelliger Minterm.*

Beispiel 35. *Wertetabellen einiger Minterme*

	d	c	b	a	$a\bar{b}cd$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
2	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
3	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
4	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
5	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*
6	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
7	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*
8	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
9	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
10	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
11	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
12	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
13	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
14	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
15	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*

Mit dieser Kenntnis über Minterme lässt sich nun leicht eine KDNF aus der Wertetabelle einer vollständig definierten Funktion ableiten. Da ein Minterm immer nur für eine Belegung den Wert 1 annimmt, steht jeder Minterm in einer KDNF für genau eine Belegung, bei der die gesamte disjunktive Normalform eine 1 liefert (0-1-Gesetz). Die Anzahl der Minterme gibt dabei an, wie oft der Wahrheitswert 1 im Ergebnisvektor der zugehörigen Funktion steht.

Aufstellung einer kanonischen disjunktiven Normalform aus der Wertetabelle:

Gegeben sei die Wertetabelle einer vollständig definierten logischen Funktion, die $\neq 0$ ist.

1. Zu jeder Belegung, die den Funktionswert 1 hat, wird der Minterm ermittelt, indem die Variablen, die in dieser Belegung 0 sind, als negierte Variablen und die, die 1 sind, als einfache Variablen konjunktiv verknüpft werden.

2. Die Disjunktion dieser Minterme ist die KDNF der gegebenen Funktion.

Die KDNF wird um so länger, je häufiger der Wert 1 im Ergebnisvektor auftritt. Wegen des Kommutativgesetzes ist die Reihenfolge der Minterme in der KDNF gleichgültig. Es ist aber üblich, die Minterme nach aufsteigenden Indizes i aufzuschreiben. Die Reihenfolge der Variablen in den Mintermen ist dabei stets gleich.

Beispiel 36. *KDNF aus Wertetabelle:*

	c	b	a	f(a, b, c)	*Minterm*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	
1	*0*	*0*	*1*	*0*	
2	*0*	*1*	*0*	*1*	$\overline{a}b\overline{c}$
3	*0*	*1*	*1*	*1*	$ab\overline{c}$
4	*1*	*0*	*0*	*0*	
5	*1*	*0*	*1*	*1*	$a\overline{b}c$
6	*1*	*1*	*0*	*0*	
7	*1*	*1*	*1*	*1*	abc

$$f(a, b, c) = \overline{a}b\overline{c} + ab\overline{c} + a\overline{b}c + abc$$

3.2 Konjunktive Normalform

3.2.1 Allgemeine konjunktive Normalform

Definition 15. *Ein logischer Ausdruck der Form*
$D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_k, k \in \mathbb{N}$, *heißt konjunktive Normalform (KNF), wenn alle* $D_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ *paarweise verschiedene Disjunktionsterme sind.*
Gilt $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_k, k, n \in \mathbb{N}$, *so heißt* $D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_k$ *eine konjunktive Normalform der Funktion f.*

Beispiel 37. *Konjunktive Normalformen sind:*

1. $(a + b + \overline{c}) \cdot (a + c) \cdot (a + \overline{b} + c)$
2. $(x_1 + x_2 + \overline{x_3} + \overline{x_4}) \cdot (x_1 + \overline{x_3} + x_4) \cdot (x_2 + x_3 + x_4) \cdot x_1$
3. $(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + y + z) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot$
   $(x + y + \overline{z}) \cdot (x + y + z)$

Auch die KNF ist für eine Funktion i. A. nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel 38.

$$\begin{aligned}
f(a, b, c, d) &= b \cdot (c \rightarrow a \cdot d) \\
&= b \cdot (\overline{c} + a \cdot d) \\
&= b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot d \\
&= (b \cdot \overline{c} + a) \cdot (b \cdot \overline{c} + b) \cdot (b \cdot \overline{c} + d) \\
&= (b + a) \cdot (\overline{c} + a) \cdot b \cdot (b + d) \cdot (\overline{c} + d) \cdot (\overline{c} + b) \\
&= (a + b + c) \cdot (a + b + \overline{c}) \cdot (\overline{c} + a) \cdot b \cdot (b + d) \cdot (\overline{c} + d) \\
&= (a + b + c + d) \cdot (a + b + c + \overline{d}) \cdot (a + b + \overline{c}) \cdot (\overline{c} + a) \cdot b \cdot (b + d) \cdot (\overline{c} + d)
\end{aligned}$$

Umformung eines logischen Ausdrucks in eine mögliche KNF

1. Umformung des logischen Ausdrucks in einen Booleschen Ausdruck (Eliminierung der Verknüpfungen $\rightarrow, \equiv, \oplus, \mathsf{NAND}, \mathsf{NOR}$).
2. Anwendung der De Morganschen Regeln, bis Negation nur noch bei einzelnen Variablen auftritt.
3. Anwendung des Distributivgesetzes, des Komplementgesetzes, des 0-1-Gesetzes und des Idempotenzgesetzes.
4. Mehrfach auftretende Disjunktionsterme werden nach dem Idempotenzgesetz zusammengefasst. Komplementgesetz und 0-1-Gesetz müssen angewandt werden, um innerhalb der einzelnen Disjunktionen zu erreichen, dass jede Variable nur einmal auftritt.

Sonderfälle

Die konjunktive Normalform kann auch aus nur einem Disjunktionsterm bestehen. Andererseits braucht ein Disjunktionsterm nicht mehr als eine Variable zu enthalten. Das bedeutet aber, dass die DNF $\mathsf{f(a,b,c,d)} = \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c} \cdot \overline{\mathsf{d}}$ ebenfalls eine konjunktive Normalform ist, und zwar sogar die "kürzeste". Die Konstante 0 ist eine KNF eines formal falschen Ausdrucks. Für formal wahre Ausdrücke lässt sich keine KNF konstruieren. Die angegebenen Regeln zur Gewinnung der Normalformen führen nicht automatisch zur minimalen Form.

3.2.2 Kanonische konjunktive Normalform

Definition 16. *Eine konjunktive Normalform einer vollständig definierten n-stelligen logischen Funktion heißt kanonisch (oder ausgezeichnet)(KKNF), wenn jeder der auftretenden Disjunktionsterme alle n Variablen enthält und nur einmal auftritt.*

Die Herleitung der KKNF aus einer beliebigen KNF geschieht auch hier durch Erweitern der Disjunktionsterme um nicht vorhandene Variablen. Anschließend werden mehrfach auftretende Disjunktionsterme wieder zusammengefasst.

Schritte zur Umformung KNF in KKNF

Gegeben sei eine KNF einer n-stelligen Funktion.

1. Jeder Disjunktionsterm, der nicht n-stellig ist, wird disjunktiv mit dem Term $(\mathsf{a_j} \cdot \overline{\mathsf{a_j}})$ verknüpft, wobei $\mathsf{a_j}$ eine Variable ist, die in diesem Disjunktionsterm nicht enthalten war.
2. Auf den so erhaltenen neuen Disjunktionsterm wird das Distributivgesetz $\mathsf{D} + (\mathsf{a_j} \cdot \overline{\mathsf{a_j}}) = (\mathsf{D} + \mathsf{a_j}) \cdot (\mathsf{D} + \overline{\mathsf{a_j}})$ angewandt.

3. Mehrfach auftretende Terme werden nach den Idempotenzgesetzen zusammengefasst.

Wiederholte Anwendung der vorstehenden Regeln liefert die KKNF.

Beispiel 39. *Umformung von KNF in KKNF*

$$\begin{aligned}
f(a, b, c) &= a \cdot b \\
&= (a + (b \cdot \overline{b})) \cdot (b + (a \cdot \overline{a})) \\
&= (a + b) \cdot (a + \overline{b}) \cdot (b + a) \cdot (b + \overline{a}) \\
&= (a + b) \cdot (a + \overline{b}) \cdot (\overline{a} + b) \\
&= ((a + b) + (c \cdot \overline{c})) \cdot (a + \overline{b} + (c \cdot \overline{c})) \cdot ((\overline{a} + b) + (c \cdot \overline{c})) \\
&= (a + b + c) \cdot (a + b + \overline{c}) \cdot (a + \overline{b} + c) \cdot (a + b + \overline{c}) \cdot (\overline{a} + \overline{b} + c) \cdot (\overline{a} + b + \overline{c}) \cdot
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Den Mintermen bei den KDNF entsprechen die Maxterme oder Volldisjunktionen bei den KKNF. Die Disjunktionsterme einer KKNF heißen Maxterme und liefern für genau eine Belegung eine 0, sonst immer 1.

Beispiel 40. *Wertetabellen einiger Maxterme*

	d	c	b	a	$a + \overline{b} + c + d$	$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + d$
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
2	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*
3	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
4	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
5	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*
6	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
7	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
8	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
9	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
10	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*
11	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
12	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
13	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*
14	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
15	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Bei n Variablen gibt es 2^n Maxterme (entsprechend der Zahl möglicher Belegungen), wobei jeder Maxterm ein n-stelliger Disjunktionsterm ist.

Definition 17. *Ein n-stelliger Disjunktionsterm über n Variablen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *heißt n-stelliger Maxterm*

Satz 9. *Eine konjunktive Normalform einer vollständig definierten n-stelligen logischen Funktion ist kanonisch, wenn die Disjunktionsterme paarweise verschiedene n-stellige Maxterme sind.*

Gewinnung der KKNF aus einer Wertetabelle

Eine Konjunktion $D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_k$ wird genau dann 0, wenn mindestens ein $D_i = 0$ ist. Ein Maxterm wird für genau eine Belegung 0 und dementsprechend steht jeder Maxterm in einer KKNF für genau eine Belegung, bei der diese Normalform 0 ist. Es treten so viele Maxterme auf, wie im Ergebnisvektor der Wahrheitswert 0 auftritt.

Aufstellung einer kanonischen konjunktiven Normalform aus der Wertetabelle:

Gegeben sei die Wertetabelle einer vollständig definierten logischen Funktion, die nicht identisch 1 ist.

1. Zu jeder Belegung, die den Funktionswert 0 hat, wird der Maxterm ermittelt, indem die Variablen, die in der entsprechenden Belegung 1 sind, als negierte Variablen und die, die 0 sind, als einfache Variablen disjunktiv verknüpft werden.

2. Die Konjunktion dieser Maxterme ist die KKNF der Funktion.

Beispiel 41. *KKNF aus Wertetabelle:*

	c	b	a	f(a, b, c)	*Maxterm*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	$a + b + c$
1	*0*	*0*	*1*	*0*	$\overline{a} + b + c$
2	*0*	*1*	*0*	*1*	
3	*0*	*1*	*1*	*0*	$\overline{a} + \overline{b} + c$
4	*1*	*0*	*0*	*0*	$a + b + \overline{c}$
5	*1*	*0*	*1*	*1*	
6	*1*	*1*	*0*	*1*	
7	*1*	*1*	*1*	*1*	

$f(a, b, c) = (a + b + c) \cdot (\overline{a} + b + c) \cdot (\overline{a} + \overline{b} + c) \cdot (a + b + \overline{c})$

Praktischer Hinweis

Wie bei der KDNF ist es auch hier üblich, die Maxterme nach aufsteigenden Indizes i innerhalb einer KKNF anzugeben. Die Reihenfolge der Variablen in den einzelnen Maxtermen ist stets gleich. Sie ist festgelegt durch die Anordnung in der Wertetabelle oder durch die Angabe des Argumentes der Funktion oder bei logischen Ausdrücken durch die lexikographische Reihenfolge.

3.3 Zusammenhang zwischen den Normalformen

Überführung kanonische disjunktive ⇔ kanonische konjunktive Normalformen

Häufig muss eine DNF in die KNF umgeformt werden und umgekehrt. Diese Umrechnung wird oft recht umfangreich nach den bisher bekannten Regeln. Für die Umformung einer kanonischen Normalform in die andere lassen sich die Kenntnisse über Min- und Maxterme anwenden. Die KKNF besteht aus k Maxtermen M_i.

$i \in I \subset \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}, k = |I| \leqslant 2^n$
Jedem Maxterm entspricht eine „0“ im Ergebnisvektor der zugehörigen Funktion. Die KDNF besteht dementsprechend aus $2^n - k$ Mintermen m_j, denn jedem Minterm entspricht eine 1 im Ergebnisvektor. Dabei treten nur Minterme mit solchen Indizes j auf, die in der KKNF nicht auftreten.
$j \in J \subset \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ und $J \cap I = \varnothing$ und $J \cup I = \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$

Umformung KDNF $\Leftrightarrow$ KKNF

Gegeben sei eine KDNF (KKNF).

1. Die KDNF (KKNF) wird mittels Mintermsymbolen m (Maxtermsymbolen M) dargestellt.
2. Die KKNF (KDNF) erhält man als Konjunktion (Disjunktion) derjenigen Maxterme (Minterme), deren Indizes nicht in der KDNF (KKNF) vorkommen.

Beispiel 42. $f_{KKNF} = (a + b + \overline{c}) \cdot (a + \overline{b} + \overline{c}) \cdot (\overline{a} + b + c) = M_1 \cdot M_3 \cdot M_4$
Es gibt $2^3 = 8$ Minterme und ebensoviele Maxterme ($0 \leqslant i \leqslant 7$). Die in der KKNF nicht auftretenden Indizes ($i = 0, 2, 5, 6, 7$) sind die Indizes der Minterme.
$f_{KDNF} = m_0 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7 = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c$

Bemerkung:

Die angegebenen Regeln zur Gewinnung der Normalform beruhen nur auf der Anwendung der bisher bekannten Umformungsregeln und Sätze. Danach ist eine Normalform eine äquivalente Darstellung einer vollständig definierten logischen Funktion. Es fehlt bisher der Beweis der Eindeutigkeit der kanonischen Normalform, der hier an dieser Stelle nicht aufgeführt wird.

3.4 Normalformen und partiell definierte Funktionen

Partiell definierte Funktionen

Ein logischer Ausdruck stellt eine vollständig definierte Funktion dar. In der Praxis treten jedoch auch partiell definierte Funktionen auf, die nicht für jede Belegung einen Funktionswert haben. Sie sind fast immer durch Wertetabellen gegeben. Die Realisierung als Schaltnetz erfordert jedoch eine Funktion als booleschen Ausdruck.

Vorgehensweise

Ist eine Funktion für eine Belegung nicht definiert, tritt diese Belegung entweder nie auf, oder es ist in diesem Moment gleichgültig, welcher Funktionswert auftritt („don't care“).

Beispiel 43. *Partiell definierte Funktion*
Funktion zum Erkennen einer bestimmten Ziffer des BCD-Codes. Bei einem 4-stelligen Argument gibt es 6 Belegungen, die nicht vorkommen können (die Dualzahlen 10 bis 15)

Werden nun den nicht definierten Belegungen der Funktion beliebige Funktionswerte zugewiesen, so ist dies ohne praktische Relevanz.

Vervollständigung einer Wertetabelle zur Gewinnung einer KDNF oder KKNF

Das Ergebnis der Vervollständigung liefert eine neue, vollständig definierte Funktion, die mit der ursprünglichen Funktion in den definierten Belegungen übereinstimmt. Um möglichst kurze kanonische Normalformen zu erhalten, ergänzt man die Wertetabelle: mit 0, falls eine KDNF gewonnen werden soll, mit 1, falls eine KKNF gewonnen werden soll. Dies gilt aber nur für kanonische Normalformen. Für möglichst kurze Normalformen müssen die fehlenden Werte gezielt ergänzt werden.

Beispiel 44. *Partiell definierte logische Funktion*

	c	b	a	f(a, b, c)	$f_{KDNF}(a, b, c)$	$f_{KKNF}(a, b, c)$
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	-	*0*	*1*
2	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
3	*0*	*1*	*1*	-	*0*	*1*
4	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
5	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
6	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*
7	*1*	*1*	*1*	-	*0*	*1*

$f_{KDNF}(a, b, c) = m_0 + m_6 = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot c$
$f_{KKNF}(a, b, c) = M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 = (a + \overline{b} + c) \cdot (a + b + \overline{c}) \cdot (\overline{a} + b + \overline{c})$

3.5 Karnaugh-Veitch-Diagramm und Normalformen

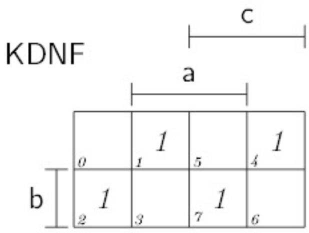
Abbildung boolescher Ausdrücke in Karnaugh-Veitch-Diagramme

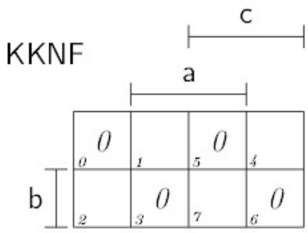
Die Abbildung boolescher Ausdrücke in KV-Diagramme vereinfacht sich beträchtlich, wenn man von kanonischen Normalformen ausgeht. Jedem Feld des Diagramms ist genau ein Minterm bzw. Maxterm zugeordnet. Das dezimale Äquivalent der Belegung, die zu einem Feld des Diagramms gehört, stimmt mit dem Index i des zugehörigen Min- bzw. Maxterms überein. Bei einer KDNF wird für jeden Minterm eine 1 in das entsprechende Feld eingetragen. Bei einer KKNF verfährt man entsprechend, indem man für jeden Maxterm eine 0 einträgt.

Beispiel 45.

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c \\ &= m_1 + m_2 + m_4 + m_7 \\ &= (a + b + c) \cdot (a + \overline{b} + \overline{c}) \cdot (\overline{a} + b + \overline{c}) \cdot (\overline{a} + \overline{b} + c) \\ &= M_0 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6 \end{aligned}$$

Für die Min- bzw. Maxterme ergeben sich folgende Diagramme:

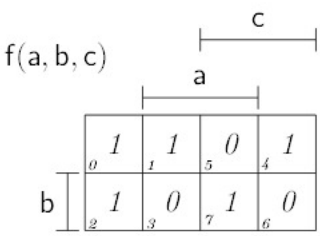




Bestimmung eines logischen Ausdrucks aus dem KV-Diagramm einer vollständig definierten Funktion

Um die KKNF oder KDNF zu gewinnen, benutzt man das eben beschriebene Verfahren in umgekehrter Richtung. KDNF: Jede 1 im KV-Diagramm entspricht einem Minterm der KDNF. KKNF: Jede 0 im KV-Diagramm entspricht einem Maxterm der KKNF.

Beispiel 46. *Bestimmung der KDNF und KKNF aus KV-Diagramm*



Also liest man ab:
KDNF: $f(a, b, c) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_7$
KKNF: $f(a, b, c) = M_3 \cdot M_5 \cdot M_6$

Mit KV-Diagramm lassen sich kürzere nicht kanonische Normalformen ermitteln. Benachbarte Einsen ergeben in der KDNF stets zwei Minterme, die sich zu einem n-1 stelligen Konjunktionsterm zusammenfassen lassen.

3.6 Primtermdarstellung logischer Funktionen

Für technische Realisierungen logischer Funktionen ist es wünschenswert, Darstellungen als möglichst kurze boolesche Ausdrücke zur Verfügung zu haben. Zu deren Gewinnung sollen jedoch zunächst als technische Hilfsmittel spezielle Konjunktionsterme, nämlich die Primterme, eingeführt werden.

3.6.1 Implikanten

Vorbemerkung

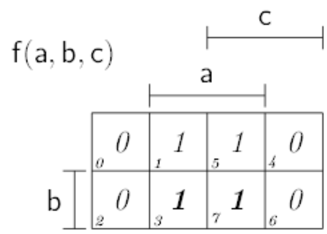
Bekannt sind aus der Logik die Sprechweisen „A impliziert B“ oder „aus A folgt B“, wobei A und B z. B. mathematische Aussagen sind. Eine solche Implikation muss formal

wahr sein, wenn sie in einem Theorem oder Satz auftritt. Sind zwei n-stellige logische Funktionen g und f gegeben und soll beschrieben werden, dass für jede Belegung, für die g den Wert 1 hat, auch f in ihrem Definitionsbereich D den Wert 1 annimmt, so zeigt die Wertetafel der Implikation, dass
$\mathsf{g}(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n) \rightarrow \mathsf{f}(\mathsf{a}_j, \ldots, \mathsf{a}_n) = 1$ für alle $(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n) \in \mathsf{D} \subset \{0, 1\}^n$
gesetzt werden muss, d. h. der Ausdruck $\mathsf{g}(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n) \rightarrow \mathsf{f}(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)$ muss formal wahr sein. In diesem Falle wird als Abkürzung auch einfach $\mathsf{g} \rightarrow \mathsf{f} = 1$ geschrieben.

Definition 18. *Implikant*
Seien f *und* i *n-stellige logische Funktionen,* $\mathsf{i}(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)$ *ein Konjunktionsterm und* $\mathsf{i} \rightarrow \mathsf{f} = 1$*, dann heißt* $\mathsf{i}(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)$ *Implikant von* $\mathsf{f}(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)$ *oder auch kurz von* f.

Bei einer Darstellung im KV-Diagramm würde das bedeuten, dass das 1-Muster der Funktion f das 1-Muster des Implikanten überdeckt.
Man sagt daher auch: f überdeckt i.

Beispiel 47. *f überdeckt i*
$\mathsf{f} = \mathsf{a},\ \mathsf{i} = \mathsf{a} \cdot \mathsf{b}$

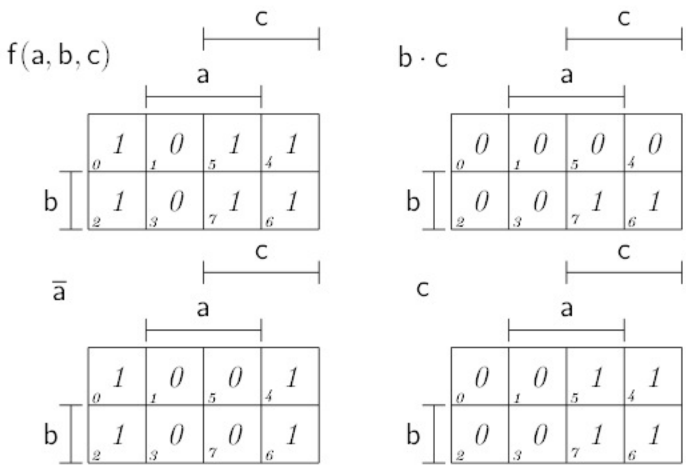


$$\mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \rightarrow \mathsf{a} = \overline{\mathsf{a} \cdot \mathsf{b}} + \mathsf{a} = \overline{\mathsf{a}} + \overline{\mathsf{b}} + \mathsf{a} = 1$$

Beispiel 48. *Implikanten der Funktion f*
Gegeben: $\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}) = \mathsf{m}_0 + \mathsf{m}_1 + \mathsf{m}_2 + \mathsf{m}_3 + \mathsf{m}_5 + \mathsf{m}_7$
und die Terme: m_5, $\mathsf{b} \cdot \mathsf{c}$, $\overline{\mathsf{a}}$, b, c, $\overline{\mathsf{a}} + \mathsf{c}$

	c	b	a	f(a, b, c)	m_5	$b \cdot c$	$\overline{a}$	b	c	$\overline{a} + c$
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*
3	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
4	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*
5	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
6	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
7	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*

m_5, $\mathsf{b} \cdot \mathsf{c}$, $\overline{\mathsf{a}}, \mathsf{c}$ *sind Implikanten von f, b ist kein Implikant von f, da* $\mathsf{b} \rightarrow \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}) = 0$ *für* $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}) = (1, 1, 0)$ *ist,* $\overline{\mathsf{a}} + \mathsf{c}$ *impliziert zwar* $\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$ *für alle Belegungen, ist jedoch kein Konjunktionsterm und daher kein Implikant von f.*
KV-Diagramme für $\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$, $\mathsf{b} \cdot \mathsf{c}$, $\overline{\mathsf{a}}$, c*:*



Die 1-Muster der Implikanten werden vom 1-Muster der zugehörigen Funktion f überdeckt.

Zusammenfassung von Implikanten

Offenbar ist jeder Minterm, der zur KDNF einer Funktion gehört, ein Implikant dieser Funktion. Zwei Minterme, die sich nur in einer Variablen unterscheiden, lassen sich innerhalb der DNF zu einem neuen kürzeren Konjunktionsterm zusammenfassen (Absorptionsgesetz: $K \cdot a + K \cdot \overline{a} = K$). Dieser neu entstandene Term ist wieder Implikant der Funktion. Dies gilt nicht nur für Minterme, sondern allgemein für Implikanten, die sich mit Hilfe der Absorptionsgesetze ($K \cdot a + K \cdot \overline{a} = K$ und $K + K \cdot \overline{a} = K$) zu einem neuen kürzeren Konjunktionsterm zusammenfassen lassen.

Beispiel 49. *Zusammenfassung von Implikanten*
Implikant c im letzten Beispiel kann entstanden sein durch:
$m_1 = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c$
$m_3 = \overline{a} \cdot b \cdot c$
$m_5 = a \cdot \overline{b} \cdot c$
$m_7 = a \cdot b \cdot c$

$m_1 + m_3 = \overline{a} \cdot c$ *und* $m_5 + m_7 = a \cdot c$ *ergeben*
$\overline{a} \cdot c + a \cdot c = c$

oder:

$m_1 + m_5 = \overline{b} \cdot c$ *und* $m_3 + m_7 = b \cdot c$ *ergeben*
$\overline{b} \cdot c + b \cdot c = c$

Die zwei Implikanten, aus denen sich der neue kürzere Implikant bilden lässt, sind auch Implikanten dieses neuen Konjunktionsterms.
Also gilt:
$m_1 \to \overline{a} \cdot c, m_3 \to \overline{a} \cdot c, m_5 \to a \cdot c, m_7 \to a \cdot c, \overline{a} \cdot c \to c, \overline{a} \cdot c \to c, c \to f(a, b, c)$

Satz 10. *Zusammenfassung von Implikanten*
Seien f eine n-stellige logische Funktion und $i_1(a_1, \ldots, a_n), i_2(a_1, \ldots, a_n)$ *Implikanten von* f.

1. *Lassen sich* $i_1(a_1, \dots, a_n)$ *und* $i_2(a_1, \dots, a_n)$ *nach den Absorptionsgesetzen zu einem neuen kürzeren Konjunktionsterm* $i_3(a_1, \dots, a_n)$ *zusammenfassen, so ist* $i_3(a_1, \dots, a_n)$ *wieder Implikant von* f.

2. $i_1(a_1, \dots, a_n)$ *und* $i_2(a_1, \dots, a_n)$ *sind Implikanten von* $i_3(a_1, \dots, a_n)$.

3. *Jeder Konjunktionsterm einer DNF von* f *ist Implikant von* f.

4. *Jede DNF von* f *ist eine Disjunktion von Implikanten von* f.

3.6.2 Primimplikanten

Vorbemerkung

Im Beispiel wird deutlich, dass es in der Menge der Implikanten einer Funktion solche gibt, die sich nicht mehr disjunktiv zu neuen Implikanten verknüpfen lassen. Im Beispiel waren es $\overline{a}$ und c. Gerade solche, nicht weiter zusammenfassbare Implikanten sind für Minimierungsverfahren von Interesse.

Definition 19. *Primimplikant (Primterm)*
Sei $p(a_1, \dots, a_n)$ *Implikant einer n-stelligen logischen Funktion f.* $p(a_1, \dots, a_n)$ *heißt Primimplikant oder Primterm von* f, *wenn es keinen von* $p(a_1, \dots, a_n)$ *verschiedenen Implikanten* $i(a_1, \dots, a_n)$ *mit* $p \rightarrow i = 1$ *gibt.*

Folgerung

Primimplikanten einer vollständig definierten n-steligen logischen Funktion f sind genau die Implikanten von f, die sich mit keinem anderen Implikanten von f zu einem von diesem Primimplikanten verschiedenen Implikanten von f disjunktiv zusammenfassen lassen.

Beispiel 50. *Implikanten und Primimplikanten*
$f(a, b, c) = a \cdot \overline{b} + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c$
Folgende Implikanten von f lassen sich erkennen:

$a \cdot \overline{b}$, $a \cdot b \cdot \overline{c}$, $a \cdot b \cdot c$	*direkt aus* f
$a \cdot b$	*wegen* $a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c = a \cdot b$
a	*wegen* $a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$

Die vollständige Liste der Implikanten von f *lautet jedoch:*
$a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$, $a \cdot \overline{b} \cdot c$, $a \cdot b \cdot \overline{c}$, $a \cdot b \cdot c$, $a \cdot \overline{b}$, $a \cdot \overline{c}$, $a \cdot c$, $a \cdot b$, a
a *ist ein Primimplikant von* f.

Beispiel 51. *Implikanten und Primimplikanten*
$h(a, b, c) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot \overline{c} = m_0 + m_3 + m_6$
Minterme $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}, \overline{a} \cdot b \cdot c, a \cdot b \cdot \overline{c}$ *sind die einzigen Implikanten von* h. *Da sie sich nicht zusammenfassen lassen, handelt es sich um Primimplikanten.*

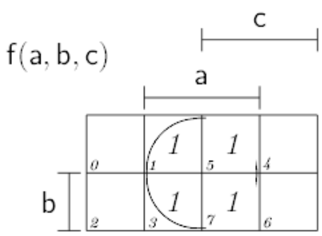
Satz 11. *Primtermdarstellung einer Funktion*
Sei f *eine vollständig definierte n-stellige logische Funktion und* $\mathsf{p}(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n), \mathsf{i} = 1, \ldots, \mathsf{k}$ *seien alle Primimplikanten von* f.
Dann gilt:
$\mathsf{f}(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n) = \mathsf{p}_1(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n) + \cdots + \mathsf{p}_k(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)$.

Offenbar ist die Disjunktion aller Primterme eine spezielle disjunktive Normalform. Diese spezielle DNF, auch Primtermdarstellung der Funktion genannt, lässt sich mit den Absorptionsgesetzen nicht weiter vereinfachen. Diese Primtermdarstellung ist nicht in jedem Falle schon die kürzeste. Es kann Primimplikanten geben, auf die man bei der Darstellung der Funktion verzichten kann.

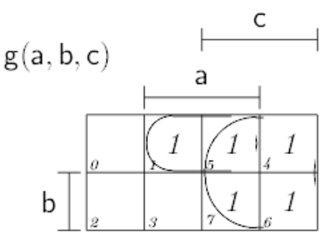
Implikanten und Primimplikanten im KV-Diagramm

Beispiel 52. *Implikanten und Primimplikanten*

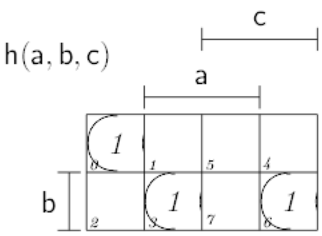
1. $\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}) = \mathsf{a} \cdot \overline{\mathsf{b}} + \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot \overline{\mathsf{c}} + \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c}$



2. $\mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}) = \overline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \overline{\mathsf{b}} \cdot \overline{\mathsf{c}}$



3. $\mathsf{h}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}) = \overline{\mathsf{a}} \cdot \overline{\mathsf{b}} \cdot \overline{\mathsf{c}} + \overline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot \overline{\mathsf{c}}$



Aspekte zu Primimplikanten

Werden im KV-Diagramm 1-, 2-, …, 2^{i}-Gruppen beieinanderliegender Einsen gebildet, so entspricht jede dieser Gruppen einem Implikanten. Die disjunktive Verknüpfung zweier Implikanten zu einem neuen bedeutet dann die Zusammenlegung zweier gleichgroßer Gruppen zu einer nächstgrößeren. Lässt sich eine Gruppe nicht mehr vergrößern, liegt ein Primimplikant vor. Im letzten Beispiel gibt es keine benachbarten Felder, die mit „1“ belegt sind, deshalb sind die drei Minterme auch die einzigen Implikanten und daher Primimplikanten. Die von Implikanten belegten Felder von Einsen sind nicht immer disjunkt, auch die von Primimplikanten nicht, wie Beispiel (2) zeigt. Mit dem KV-Diagramm lassen sich also Primterme ermitteln. Alle Primimplikanten lassen sich aus anderen Implikanten kombinieren oder sind selbst Minterme. (2) zeigt aber, dass die benötigten Implikanten nicht immer von vornherein bekannt sind.

Ermittlung der Primimplikanten einer logischen Funktion

1. Aufstellung der KDNF der Funktion. (Alle in der KDNF auftretenden Minterme sind Implikanten).
2. Alle bisher vorhandenen Implikanten der Funktion werden soweit möglich paarweise disjunktiv zu neuen Implikanten verknüpft.
3. Hat man neue Implikanten erhalten, fährt man mit 2. fort.
4. Implikanten, die sich nicht mehr mit anderen zu neuen verknüpfen lassen, sind dann die Primimplikanten der Funktion.

Nur wenn man von der KDNF ausgeht, erhält man so alle Implikanten.

Beispiel 53. $\mathsf{g(a,b,c)} = \bar{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \bar{\mathsf{b}} \cdot \bar{\mathsf{c}}$

1. $\mathsf{g(a,b,c)} = \bar{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c} + \bar{\mathsf{a}} \cdot \bar{\mathsf{b}} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \bar{\mathsf{b}} \cdot \mathsf{c} + \mathsf{a} \cdot \bar{\mathsf{b}} \cdot \bar{\mathsf{c}}$

2. Implikanten sind:

init	*2nd*	*3rd*
$\cancel{\bar{\mathsf{a}} \cdot \bar{\mathsf{b}} \cdot \mathsf{c}}$	$\cancel{\bar{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{c}}$	c
$\cancel{\bar{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c}}$	$\cancel{\bar{\mathsf{b}} \cdot \mathsf{c}}$	c
$\cancel{\mathsf{a} \cdot \bar{\mathsf{b}} \cdot \mathsf{c}}$	$\cancel{\mathsf{b} \cdot \mathsf{c}}$	
$\cancel{\mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c}}$	$\cancel{\mathsf{a} \cdot \mathsf{c}}$	
$\cancel{\mathsf{a} \cdot \bar{\mathsf{b}} \cdot \bar{\mathsf{c}}}$	$\mathsf{a} \cdot \bar{\mathsf{b}}$	

Es wurden die Implikanten durchgestrichen, die sich mit einem anderen disjunktiv zu einem neuen verknüpfen ließen.

3. Primterme sind die nicht markierten Implikanten $\mathsf{a} \cdot \bar{\mathsf{b}}$ *und* c.

Das beschriebene Verfahren wird sehr umfangreich und schnell unübersichtlich, wenn die zu untersuchende Funktion mehr als drei Variable und folglich eine „lange“ KDNF hat. Rechnergestütztes Verfahren: Quine McCluskey.