FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2014/2015
Stand: 19.12.2014

9. Hausaufgabe – Logik
Abgabe: 8.1.2015 vor der Vorlesung

Hausaufgabe 1

5 Punkte

Sei $\sigma = \{+, \cdot, 0, 1\}$ eine Signatur mit zwei 2-stelligen Funktionssymbolen und zwei Konstantensymbolen. Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0, 1)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation.

Beantworten Sie für $1 \le i \le 5$, ob $\mathcal{N} \models \varphi_i$ gilt oder nicht. Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

Falls eine Formel syntaktisch ungültig ist, geben Sie den Grund an. Wie üblich lassen wir Klammern weg, solange eine eindeutige Lesung gewährleistet ist.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall a \exists b\ (1+1) \cdot a = b \\
\varphi_2 &:= \forall a \forall b \exists a\ (1+1) \cdot a = b \\
\varphi_3 &:= \forall a \exists b \exists c\ (\neg b = 0 \wedge a + b = c) \\
\varphi_4 &:= \forall a \forall b ((\exists c\ a \cdot c = b) \vee (\exists c\ b \cdot c = a)) \\
\varphi_5 &:= 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2

5 Punkte

Sei σ eine Signatur.

(i) Geben Sie eine Menge Φ_1 von prädikatenlogischen Formeln an, sodass $\mathrm{Mod}(\Phi_1)$ die Klasse aller σ-Strukturen mit mindestens 2 Elementen ist.

(ii) Geben Sie eine Menge Φ_2 von prädikatenlogischen Formeln an, sodass $\mathrm{Mod}(\Phi_2)$ die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen ist.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Für eine Formelmenge Φ ist $\mathrm{Mod}(\Phi)$ definiert als die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$.

Hausaufgabe 3

5 Punkte

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sodass $\mathcal{B}$ eine Substruktur von $\mathcal{A}$ ist. Sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formel ohne freie Variablen von der Form

$$\varphi = \exists x_1 \cdots \exists x_n\ \psi,$$

wobei $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ quantorenfrei ist.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\mathcal{B} \models \varphi$ impliziert $\mathcal{A} \models \varphi$.

(ii) $\mathcal{A} \models \varphi$ impliziert $\mathcal{B} \models \varphi$.

Hausaufgabe 4 5 Punkte

Sei $\sigma = \{f\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol. Wir definieren die Formelmenge

$$\begin{aligned}
\varphi &:= \forall x \forall y\ (f(x) = f(y) \to x = y)\\
\psi &:= \forall y \exists x\ f(x) = y\\
\Phi &:= \{\varphi, \psi\} \cup \{\forall x\ \neg f^n(x) = x \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\},
\end{aligned}$$

wobei $f^n(x)$ die n-fach wiederholte Anwendung von f ist. Zum Beispiel ist $f^3(x) = f(f(f(x)))$. Wir schreiben $f^0(x) = x$ für die Identitätsfunktion. Für bijektive Funktionen f schreiben wir auch $f^{-3} = f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(x)))$ und analog für allgemeine negative Exponenten.

(i) (2 Punkte) Geben Sie eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit Universum $\mathbb{Z}$ an, sodass $\mathcal{A} \models \Phi$.

(ii) (3 Punkte) Geben Sie eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit Universum $\mathbb{Z}$ an, sodass $\mathcal{B} \models \Phi$ und $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}$.

(iii) (5 Bonuspunkte) Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen mit Universum $\mathbb{R}$, sodass $\mathcal{A} \models \Phi$ und $\mathcal{B} \models \Phi$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Begründen Sie Ihre Antworten.