HAUSAUFGABE 4 - BLATT 11 & 12

SARAH KÖHLER UND MATTHIAS LOIBL

Aufgabe 1: Rekursive Eigenschaften - Berechnung.

a). Sei $F_X = \langle\, a \,\rangle X \wedge [\, c \,]\, ff$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{F_X}(\mathsf{Proc}) =& \langle\cdot a\cdot\rangle\, \mathsf{Proc} \cap [\cdot c\cdot]\emptyset \\
=& \{p_1, p_2, p_5, p_6, p_7, p_8\} \cap \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_8, p_9\} \\
=& \{p_1, p_2, p_5, p_8\} \\
(\mathcal{O}_{F_X})^2(\{p_1, p_2, p_5, p_8\}) =& \langle\cdot a\cdot\rangle\{p_1, p_2, p_5, p_8\} \cap [\cdot c\cdot]\emptyset \\
=& \{p_2, p_6, p_8\} \cap \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_8, p_9\} \\
=& \{p_2, p_8\} \\
(\mathcal{O}_{F_X})^3(\{p_2, p_8\}) =& \langle\cdot a\cdot\rangle\{p_2, p_8\} \cap [\cdot c\cdot]\emptyset \\
=& \{p_6, p_8\} \cap \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_8, p_9\} \\
=& \{p_8\} \\
(\mathcal{O}_{F_X})^4(\{p_8\}) =& \langle\cdot a\cdot\rangle\{p_8\} \cap [\cdot c\cdot]\emptyset \\
=& \{p_6, p_8\} \cap \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_8, p_9\} \\
=& \{p_8\}
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{O}_{F_X}(\{p_8\}) = \{p_8\}$ ist $\{p_8\}$ ein Fixpunkt.

$Y \overset{\max}{=} (\langle\, b \,\rangle X \vee \langle\, c \,\rangle X) \wedge ([\ \mathsf{Act}\ ]\, ff \vee \langle\ \mathsf{Act}\ \rangle Y)$
Sei $F_Y = (\langle\, b \,\rangle X \vee \langle\, c \,\rangle X) \wedge ([\ \mathsf{Act}\ ]\, ff \vee \langle\ \mathsf{Act}\ \rangle Y)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{F_Y}(\mathsf{Proc}) =& (\langle\cdot b\cdot\rangle\{p_8\} \cup \langle\cdot c\cdot\rangle\{p_8\}) \cap ([\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot]\emptyset \cup \langle\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot\rangle\ \mathsf{Proc}) \\
=& (\emptyset \cup \{p_7\}) \cap (\{p_3, p_9\} \cup \mathsf{Proc} \setminus \{p_3, p_9\}) \\
=& (\emptyset \cup \{p_7\}) \cap \mathsf{Proc} \\
=& \{p_7\} \\
(\mathcal{O}_{F_Y})^2(\{p_7\}) =& (\langle\cdot b\cdot\rangle\{p_8\} \cup \langle\cdot c\cdot\rangle\{p_8\}) \cap ([\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot]\emptyset \cup \langle\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot\rangle\{p_7\}) \\
=& (\emptyset \cup \{p_7\}) \cap (\{p_3, p_9\} \cup \{p_6\}) \\
=& \emptyset
\end{aligned}$$

Da wir den größten Fixpunkt suchen und die Menge ab hier nicht mehr kleiner werden kann, ist ein Fixpunkt erreicht. Es gibt also keinen Prozess, der die gegebenen Formeln erfüllt.

b).

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{F_X}(\emptyset) &= [\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot]\,\mathit{ff} \cup \langle\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot\rangle\emptyset \\
&= \{p_3, p_9\} \cup \emptyset \\
&= \{p_3, p_9\} \\
(\mathcal{O}_{F_X})^2(\{p_3, p_9\}) &= [\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot]\,\mathit{ff} \cup \langle\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot\rangle\{p_3, p_9\} \\
&= \{p_3, p_9\} \cup \langle\cdot a\cdot\rangle\{p_3, p_9\} \cup \langle\cdot b\cdot\rangle\{p_3, p_9\} \cup \langle\cdot c\cdot\rangle\{p_3, p_9\} \\
&= \{p_3, p_9\} \cup \{p_1, p_7\} \cup \{p_4\} \cup \{p_6\} \\
&= \{p_1, p_3, p_4, p_6, p_7, p_9\} \\
(\mathcal{O}_{F_X})^3(\{p_1, p_3, p_4, p_6, p_7, p_9\}) &= [\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot]\,\mathit{ff} \cup \langle\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot\rangle\{p_1, p_3, p_4, p_6, p_7, p_9\} \\
&= \{p_3, p_9\} \cup \{p_1, p_5, p_7\} \cup \{p_2, p_4, p_6\} \cup \{p_6\} \\
&= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_9\} \\
(\mathcal{O}_{F_X})^4(\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_9\}) &= [\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot]\,\mathit{ff} \cup \langle\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot\rangle\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_9\} \\
&= \{p_3, p_9\} \cup \{p_1, p_2, p_5, p_7\} \cup \{p_2, p_4, p_6\} \cup \{p_4, p_6\} \\
&= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_9\}
\end{aligned}$$

Somit ist $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_9\}$ ein Fixpunkt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{F_Y}(\mathsf{Proc}) &= \langle\cdot a\cdot\rangle\,\mathsf{Proc} \cap [\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot]\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_9\} \\
&= \{p_1, p_2, p_5, p_6, p_7, p_8\} \cap \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_7, p_9\} \cap \mathsf{Proc} \cap \mathsf{Proc} \setminus \{p_7\} \\
&= \{p_1, p_2, p_5\} \\
(\mathcal{O}_{F_Y})^2(\mathsf{Proc}) &= \langle\cdot a\cdot\rangle\{p_1, p_2, p_5\} \cap [\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot]\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_9\} \\
&= \{p_2\} \cap \mathsf{Proc} \setminus \{p_6, p_7, p_8\} \\
&= \{p_2\} \\
(\mathcal{O}_{F_Y})^3(\mathsf{Proc}) &= \langle\cdot a\cdot\rangle\{p_2\} \cap [\cdot\,\mathsf{Act}\,\cdot]\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_9\} \\
&= \{p_2\} \cap \mathsf{Proc} \setminus \{p_6, p_7, p_8\} \\
&= \{p_2\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 - Rekursive Eigenschaften.

a). $F = \langle\, anmelden \,\rangle Even(\langle\, pruefen \,\rangle [\ \mathsf{Act}\ ]\ ff)$

Explizit:

$$\begin{aligned} Y &= \langle\, anmelden \,\rangle X \\ X &\overset{\min}{=} \langle\, pruefen \,\rangle [\ \mathsf{Act}\ ]\ ff \vee (\langle\ \mathsf{Act}\ \rangle\ tt \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\ X) \end{aligned}$$

b). $F = Inv(Poss(\langle\, gewinnen \,\rangle\ tt))$

Explizit:

$$\begin{aligned} Y &\overset{\min}{=} \langle\, gewinnen \,\rangle\ tt \vee \langle\ \mathsf{Act}\ \rangle Y \\ X &\overset{\max}{=} Y \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\ X \end{aligned}$$

c). $F = Inv(\langle\, pruefen \,\rangle\ tt) \mathcal{U}^s \langle\, durchfallen \,\rangle [\, pruefen \,]\ ff$

Explizit:

$$\begin{aligned} Y &\overset{\max}{=} \langle\, pruefen \,\rangle\ tt \wedge \langle\ \mathsf{Act}\ \rangle Y \\ X &\overset{\min}{=} \langle\, durchfallen \,\rangle \wedge [\ \mathsf{Act} \setminus \{durchfallen\}\,]\ ff \vee (Y \wedge \langle\ \mathsf{Act}\ \rangle\ tt \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\ X) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 - Charakteristische Formeln.

a).

$$
\begin{aligned}
X_1 &\overset{\max}{=} [\,\mathsf{Act}\,]\, ff\\
X_2 &\overset{\max}{=} \langle\, b \,\rangle X_1 \wedge [\,a\,]\, ff \wedge [\,c\,]\, ff \wedge [\,b\,]\, X_1\\
X_3 &\overset{\max}{=} \langle\, a \,\rangle X_5 \wedge \langle\, b \,\rangle X_7 \wedge \langle\, c \,\rangle X_6 \wedge [\,a\,]\, X_5 \wedge [\,b\,]\, X_7 \wedge [\,c\,]\, X_6\\
X_4 &\overset{\max}{=} \langle\, b \,\rangle X_1 \wedge \langle\, b \,\rangle X_9 \wedge [\,a\,]\, ff \wedge [\,c\,]\, ff \wedge [\,b\,]\, (X_1 \vee X_9)\\
X_5 &\overset{\max}{=} \langle\, a \,\rangle X_2 \wedge \langle\, a \,\rangle X_4 \wedge [\,b\,]\, ff \wedge [\,c\,]\, ff \wedge [\,a\,]\, (X_2 \vee X_4)\\
X_6 &\overset{\max}{=} \langle\, a \,\rangle X_8 \wedge [\,b\,]\, ff \wedge [\,c\,]\, ff \wedge [\,a\,]\, X_8\\
X_7 &\overset{\max}{=} \langle\, a \,\rangle X_8 \wedge [\,b\,]\, ff \wedge [\,c\,]\, ff \wedge [\,a\,]\, X_8 = X_6\\
X_8 &\overset{\max}{=} \langle\, b \,\rangle X_9 \wedge [\,a\,]\, ff \wedge [\,c\,]\, ff \wedge [\,b\,]\, X_9\\
X_9 &\overset{\max}{=} [\,\mathsf{Act}\,]\, ff
\end{aligned}
$$

b). Es existieren die folgenden Äquivalenzklassen:

$$
\begin{aligned}
[\,1\,]_\sim &= \{1, 9\}\\
[\,3\,]_\sim &= \{3\}\\
[\,5\,]_\sim &= \{5, 6, 7\}\\
[\,2\,]_\sim &= \{2, 4, 8\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 - min max mix. Wir berechnen zuerst $[\![\ Y\ ]\!]$:
Sei $F_Y = \langle\, b\,\rangle\, tt \vee ([\ \mathsf{Act}\ ]\, Y \wedge \langle\ \mathsf{Act}\ \rangle\, tt)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{F_Y}(\emptyset) =& \langle\cdot b\cdot\rangle\, \mathsf{Proc} \cup (([\cdot a\cdot]\emptyset \cap [\cdot b\cdot]\emptyset \cap [\cdot c\cdot]\emptyset) \cap (\langle\cdot a\cdot\rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle\cdot b\cdot\rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle\cdot c\cdot\rangle\, \mathsf{Proc}))\\
=& \{p_3, p_6, p_9\} \cup\\
& ((\{p \in \mathsf{Proc}\,|p \overset{a}{\not\rightarrow}\} \cap \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \overset{b}{\not\rightarrow}\} \cap \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \overset{c}{\not\rightarrow}\}) \cap\\
& (\{p \in \mathsf{Proc}\,|p \overset{a}{\rightarrow}\} \cup \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \overset{b}{\rightarrow}\} \cup \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \overset{c}{\rightarrow}\}))\\
=& \{p_3, p_6, p_9\} \cup (\{p \in \mathsf{Proc}\,|p \not\rightarrow\} \cap \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \rightarrow\})\\
=& \{p_3, p_6, p_9\} \cup \emptyset\\
=& \{p_3, p_6, p_9\}\\
(\mathcal{O}_{F_Y})^2(\emptyset) =& \langle\cdot b\cdot\rangle\, \mathsf{Proc} \cup\\
& (([\cdot a\cdot]\{p_3, p_6, p_9\} \cap [\cdot b\cdot]\{p_3, p_6, p_9\} \cap [\cdot c\cdot]\{p_3, p_6, p_9\}) \cap\\
& (\langle\cdot a\cdot\rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle\cdot b\cdot\rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle\cdot c\cdot\rangle\, \mathsf{Proc}))\\
=& \{p_3, p_6, p_9\} \cup\\
& ((\{p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9\} \cap \{p_1, p_2, p_4, p_5, p_7, p_9\} \cap \{p_1, p_3, p_5, p_7, p_8\}\\
& (\{p \in \mathsf{Proc}\,|p \overset{a}{\rightarrow}\} \cup \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \overset{b}{\rightarrow}\} \cup \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \overset{c}{\rightarrow}\}))\\
=& \{p_3, p_6, p_9\} \cup (\{p_5, p_7\} \cap \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \rightarrow\})\\
=& \{p_3, p_6, p_9\} \cup \emptyset\\
=& \{p_3, p_6, p_9\}
\end{aligned}
$$

Da $\mathcal{O}_{F_Y}(\{p_3, p_6, p_9\}) = \{p_3, p_6, p_9\}$ ist hier ein Fixpunkt (der kleinste) erreicht.
Wir berechnen nun $[\![\ X\ ]\!]$ mit Hilfe des berechneten Fixpunktes.
Sei $F_X = \langle\, a\,\rangle Y \vee [\ \mathsf{Act} \setminus \{a\}\,]\, X$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{F_X}(\emptyset) =& \langle \cdot a \cdot \rangle \{p_3, p_6, p_8\} \cup ([\cdot b \cdot]\emptyset \cap [\cdot c \cdot]\emptyset) \\
=& \{p_1\} \cup (\{p_1, p_2, p_4, p_5, p_7, p_9\} \cap \{p_1, p_3, p_5, p_7, p_8\}) \\
=& \{p_1\} \cup \{p_1, p_5, p_7\} \\
=& \{p_1, p_5, p_7\} \\
(\mathcal{O}_{F_X})^2(\emptyset) =& \langle \cdot a \cdot \rangle \{p_3, p_6, p_8\} \cup ([\cdot b \cdot]\{p_1, p_5, p_7\} \cap [\cdot c \cdot]\{p_1, p_5, p_7\}) \\
=& \{p_1\} \cup (\{p_1, p_2, p_4, p_5, p_7, p_8, p_9\} \cap \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_7, p_8, p_9\}) \\
=& \{p_1\} \cup \{p_1, p_2, p_4, p_5, p_7, p_8, p_9\} \\
=& \{p_1, p_2, p_4, p_5, p_7, p_8, p_9\} \\
(\mathcal{O}_{F_X})^3(\emptyset) =& \langle \cdot a \cdot \rangle \{p_3, p_6, p_8\} \cup ([\cdot b \cdot]\{p_1, p_2, p_4, p_5, p_7, p_8, p_9\} \cap [\cdot c \cdot]\{p_1, p_2, p_4, p_5, p_7, p_8, p_9\}) \\
=& \{p_1\} \cup (\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9\} \cap \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9\}) \\
=& \{p_1\} \cup \mathsf{Proc} \\
=& \mathsf{Proc}
\end{aligned}$$

Da die Menge Proc nicht mehr größer werden kann und wir den maximalen Fixpunkt suchen, ist dieser hier erreicht.
Wir berechnen nun $[\![\, Z \,]\!]$ mit Hilfe des berechneten Fixpunktes.
Sei $F_Z = \langle \, c \, \rangle X \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, Z$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{F_Z}(\mathsf{Proc}) =& \langle \cdot c \cdot \rangle \, \mathsf{Proc} \cap ([\cdot a \cdot] \, \mathsf{Proc} \cap [\cdot b \cdot] \, \mathsf{Proc} \cap [\cdot c \cdot] \, \mathsf{Proc}) \\
=& \{p \in \mathsf{Proc} \, | p \xrightarrow{c} \} \cap (\{p \in \mathsf{Proc} \, | p \not\xrightarrow{a} \} \cap \{p \in \mathsf{Proc} \, | p \not\xrightarrow{b} \} \cap \{p \in \mathsf{Proc} \, | p \not\xrightarrow{a} \}) \\
=& \{p \in \mathsf{Proc} \, | p \xrightarrow{c} \} \cap \{p \in \mathsf{Proc} \, | p \not\rightarrow \} \\
=& \emptyset
\end{aligned}$$

Da die Menge nicht mehr kleiner werden kann und wir den minimalen Fixpunkt suchen, ist dieser erreicht.

Die Auswertung des gegebenen Gleichungssystems ergibt also die leere Menge, d.h. kein Prozess erfüllt die Formeln.