

1. Präsenzübung – Logik

Aufgabe 1

Auf der Insel Trufa leben zwei Volksstämme: Die Trus, die immer die Wahrheit sagen, und die Fas, die immer lügen.

Ein Reisender trifft drei Bewohner A , B und C der Insel, die ihm Folgendes mitteilen:

- (i) A sagt: „ B und C sagen genau dann die Wahrheit, wenn C die Wahrheit sagt.“
- (ii) B sagt: „Wenn A und C die Wahrheit sagen, dann ist es nicht der Fall, dass A die Wahrheit sagt, wenn B und C die Wahrheit sagen.“
- (iii) C sagt: „ B lügt genau dann, wenn A oder B die Wahrheit sagen.“

Formalisieren Sie die Aussagen der drei Bewohner in der Aussagenlogik und verwenden Sie Ihre Formalisierung um zu entscheiden, zu welchen der beiden Volksstämme die drei Bewohner gehören.

Aufgabe 2

Auf einer entfernten Insel lebt ein Stamm mit einem sehr strengen Brauch: Sobald ein Bewohner seine eigene Augenfarbe kennt, wird er zur nächsten Mittagsstunde rituellen Selbstmord begehen. Auf der Insel leben 100 Menschen, von denen 30 blaue Augen und 70 braune Augen haben.

Eines Tages kommt ein Reisender mit blauen Augen auf die Insel. Am Abend seiner Abreise macht er vor dem versammelten Stamm die fatale Bemerkung „Welch Zufall, an diesem abgelegenen Ort einen weiteren blauäugigen Menschen zu sehen“. Am selben Abend verlässt er die Insel.

Es gibt nun zwei naheliegende Möglichkeiten dafür, was weiter geschieht.

- (i) Es passiert nichts, denn jeder der Inselbewohner wusste bereits, dass es blauäugige Menschen auf der Insel gibt; die 30 Blauäugigen sehen jeweils 29 Blauäugige und die 70 Braunäugigen sehen jeweils 30 Blauäugige.
- (ii) Nach 30 Tagen bringen sich alle Blauäugigen um. Wir beweisen dafür per Induktion die allgemeinere Aussage „Wenn es n Blauäugige gibt, bringen sich diese nach n Tagen um“.

Wenn es nur einen Blauäugigen gibt, weiß er, dass die Aussage des Reisenden sich nur auf ihn beziehen kann. Er wird sich also am nächsten Tag umbringen.

Wenn es n Blauäugige gibt mit $n > 1$, dann bringen sie sich nach n Tagen um. Denn nach der Induktionshypothese wissen sie, dass, wenn es nur k Blauäugige gäbe mit $k < n$, diese sich bereits nach k Tagen hätten umbringen müssen.

Welche Fortsetzung ist korrekt? Warum ist die andere falsch?

Aufgabe 3

Überlegen Sie sich, wie man mit Hilfe der Aussagenlogik die Addition von zwei 1-stelligen Binärzahlen darstellen kann.

Verallgemeinern Sie Ihren Ansatz auf die Addition von zwei n -stelligen Binärzahlen.