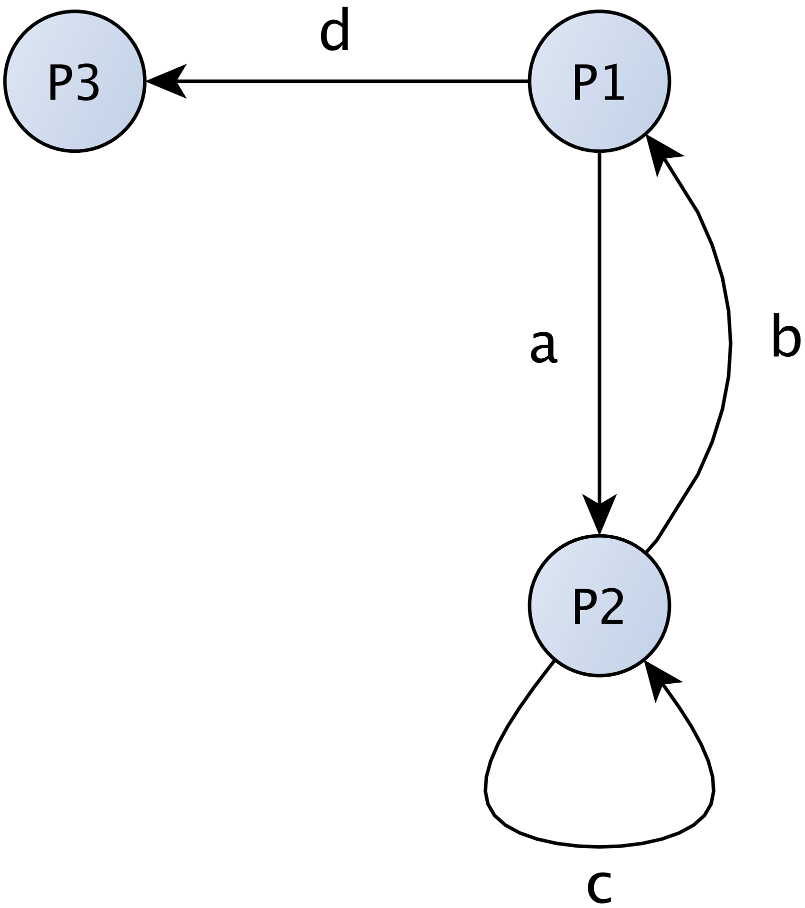
HAUSAUFGABE 3 - BLATT 8, 9 & 10

SARAH KÖHLER UND MATTHIAS LOIBL

Aufgabe 3 - Hennessy-Milner Logik: Modellierung. $(\mathsf{Proc}, \mathsf{Act}, \{\xrightarrow{a} \mid a \in \mathsf{Act}\})$
$\mathsf{Proc} = \{p_1, p_2, p_3\}$
$\mathsf{Act} = \{a, b, c, d\}$
$\xrightarrow{a} = \{(p_1, p_2)\}$
$\xrightarrow{b} = \{(p_2, p_1)\}$
$\xrightarrow{c} = \{(p_2, p_2)\}$
$\xrightarrow{d} = \{(p_1, p_3)\}$

Es gilt: $p_1 \models F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 \wedge F_5$



Aufgabe 4 - Unterscheidende Formeln.

a)
$r_1 \not\sim q_1$
Eine unterscheidende Formel ist F_1:
$F_1 = [\,a\,]\,\langle\,c\,\rangle\,tt$
$r_1 \models F_1$, aber $q_1 \not\models F_1$

b)
$q_3 \not\sim p_5$
Eine unterscheidende Formel ist F_2:
$F_2 = \langle\,b\,\rangle\langle\,a\,\rangle\langle\,a\,\rangle\langle\,a\,\rangle\,tt$
$q_3 \models F_2$, aber $p_5 \not\models F_2$

c)
$r_3 \not\sim q_2$
Eine unterscheidende Formel ist F_3:
$F_3 = \langle\,b\,\rangle\langle\,a\,\rangle\,tt$
$r_3 \models F_3$, aber $q_2 \not\models F_3$

d)
Es existiert keine unterscheidende Formel, da $p_6 \sim p_2$ gilt.

Aufgabe 5 - Unterscheidende Formeln.

a)
Es existiert keine unterscheidende Formel, da der Unterschied zwischen den beiden Prozessen nicht durch HML-Formeln beschrieben werden kann. In A und B ist zu jeder Zeit ein a-Schritt möglich. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ sind die beiden Prozesse also n-Schritt-bisimilar: $A \sim_n B$.
Das Hennessy-Milner-Theorem ist nicht anwendbar, da es voraussetzt, dass beide betrachteten Prozesse bild-endlich sind. A ist aber nicht bild-endlich, da die Menge der durch a erreichbaren Nachfolger von A unendlich ist: $\#(Der(A, a) \notin \mathbb{N}$.

b)
Eine unterscheidende Formel ist:
$F_1 = \langle\, a \,\rangle^{11}\, tt$
Es gilt: $B \models F_1$, aber $C \not\models F_1$.

c)
Eine unterscheidende Formel ist:
$F_2 = \langle\, a \,\rangle [\, a \,]\, ff$
Es gilt: $Y \models F_2$, aber $X \not\models F_2$.

d)
Es existiert keine unterscheidende Formel, da der Unterschied zwischen den beiden Prozessen nicht durch HML-Formeln beschrieben werden kann. In X und Z sind zu jeder Zeit a-, $\overline{a}$- oder τ-Schritte möglich. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ sind die beiden Prozesse also n-Schritt-bisimilar: $X \sim_n Z$.
Das Hennessy-Milner-Theorem ist nicht anwendbar, da es voraussetzt, dass beide betrachteten Prozesse bild-endlich sind. X ist aber nicht bild-endlich, da die Mengen der durch $a, \overline{a}$ und τ erreichbaren Nachfolger von X unendlich sind:
$\#(Der(X, a) \notin \mathbb{N}$.
$\#(Der(X, \overline{a}) \notin \mathbb{N}$.
$\#(Der(X, \tau) \notin \mathbb{N}$.

Aufgabe 7 - Monotonie von O. Zu zeigen: $\mathcal{O}_F$ ist monoton $\forall F \in \mathcal{M}_{\{X\}}$.
Seien $S_1, S_2 \subseteq \mathsf{Proc}$ und es gelte $S_1 \subseteq S_2$.
Um die Monotonie von $\mathcal{O}_F$ für beliebige F zu beweisen, muss also gezeigt werden, dass $\mathcal{O}_F(S_1) \subseteq \mathcal{O}_F(S_2)$ für alle $F \in \mathcal{M}$ gilt.
Beweis per struktureller Induktion über den Aufbau von F:

Induktionsanfang
Induktionsanfang sind die atomaren Formeln tt und ff:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{tt}(S_1) &= \mathsf{Proc} \subseteq \mathsf{Proc} && Def.\mathcal{O} \\
&= \mathcal{O}_{tt}(S_2) && Def.\mathcal{O}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{ff}(S_1) &= \mathsf{Proc} \subseteq \mathsf{Proc} && Def.\mathcal{O} \\
&= \mathcal{O}_{ff}(S_2) && Def.\mathcal{O}
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung
Seien $F, G \in \mathcal{M}$ so, dass $\mathcal{O}_F(S_1) \subseteq \mathcal{O}_F(S_2)$ und $\mathcal{O}_G(S_1) \subseteq \mathcal{O}_G(S_2)$ gelten.

Induktionsbehauptung I
Dann gilt auch: $\mathcal{O}_{F\vee G}(S_1) \subseteq \mathcal{O}_{F\vee G}(S_2)$

Induktionsschritt I

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{F\vee G}(S_1) &= \mathcal{O}_F(S_1) \cup \mathcal{O}_G(S_1) && Def.\mathcal{O} \\
&= \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \in \mathcal{O}_F(S_1) \vee p \in \mathcal{O}_G(S_1)\} && Def.\cup \\
&\subseteq \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \in \mathcal{O}_F(S_2) \vee p \in \mathcal{O}_G(S_2)\} && (*) \\
&= \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \in \mathcal{O}_F(S_1)\} \cup \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \in \mathcal{O}_G(S_1)\} && Def.\cup \\
&= \mathcal{O}_F(S_2) \cup \mathcal{O}_G(S_2) && Def.\mathcal{O} \\
&= \mathcal{O}_{F\vee G}(S_2)
\end{aligned}$$

$(*)$ Aus der I.V. folgt:

$$\begin{aligned}
&p \in \mathcal{O}_G(S_1) \Rightarrow p \in \mathcal{O}_G(S_2) \\
&p \in \mathcal{O}_F(S_1) \Rightarrow p \in \mathcal{O}_F(S_2) \\
&\Rightarrow \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \in \mathcal{O}_F(S_1) \vee p \in \mathcal{O}_G(S_1)\} \subseteq \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \in \mathcal{O}_F(S_1) \vee p \in \mathcal{O}_G(S_1)\}
\end{aligned}$$

Induktionsbehauptung II
Sei $a \in \mathsf{Act}$. Dann gilt auch: $\mathcal{O}_{[a]\,F}(S_1) \subseteq \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_2)$

Induktionsschritt II

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_1) &= [\cdot a \cdot]\mathcal{O}_F(S_1) && Def.\mathcal{O} \\ \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_2) &= [\cdot a \cdot]\mathcal{O}_F(S_2) && Def.\mathcal{O} \end{aligned}$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
I. Alle $p \in \mathsf{Proc}$ mit $p \stackrel{a}{\not\to}$.
Sei $P = \{p \in \mathsf{Proc}\,|p \stackrel{a}{\not\to}\}$.
Nach Definition von $[\cdot a \cdot]$ sind alle Prozesse $p \in P$ in der Menge $\mathcal{O}_{[a]\,F}(S_1) = [\cdot a \cdot]\mathcal{O}_F(S_1)$ enthalten, d.h. $P \subseteq \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_1)$.
Analog gilt ebenso, dass alle $p \in P$ in der Menge $\mathcal{O}_{[a]\,F}(S_2) = [\cdot a \cdot]\mathcal{O}_F(S_2)$ enthalten sind, also $P \subseteq \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_2)$.

II. Alle $q \in \mathsf{Proc}$ mit $q \xrightarrow{a}$.
Für alle Prozesse q, die a-Übergänge haben, gilt nach Definition von $[\cdot a \cdot]$, dass sie dann in $\mathcal{O}_{[a]\,F}(S_1)$ enthalten sind, wenn ein Übergang $q \xrightarrow{a} q'$ mit $q' \in \mathcal{O}_F(S_1)$ existiert. Sei $Q = \{q \in \mathsf{Proc}\,|q \xrightarrow{a} q' \wedge q' \in \mathcal{O}_F(S_1)\}$.
Es gilt also $Q \subseteq \mathcal{O}_F(S_1)$.

Da nach I.V $\mathcal{O}_F(S_1) \subseteq \mathcal{O}_F(S_2)$ gilt, folgt daraus direkt, dass $Q \subseteq \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_2)$, da jeder a-Nachfolger, der in $\mathcal{O}_F(S_2)$ enthalten ist, auch in $\mathcal{O}_F(S_2)$ enthalten sein muss.
Da jeder Prozess aus $\mathcal{O}_{[a]\,F}(S_1)$ entweder in P oder in Q enthalten sein muss, ist $\mathcal{O}_{[a]\,F}(S_1) = P \cup Q$. Wir haben bereits gezeigt, dass $P \subseteq \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_2)$ und $Q \subseteq \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_2)$. Aus der Definition der Vereinigung folgt dann direkt, dass auch $P \cup Q \subseteq \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_2)$. Es gilt also auch $\mathcal{O}_{[a]\,F}(S_1) \subseteq \mathcal{O}_{[a]\,F}(S_2)$.

Schluss
Da wir gezeigt haben, dass die Behauptung für atomare Formeln F gilt und induktiv auch über die Struktur von F, gilt die Behautung für alle Formeln $F \in \mathcal{M}$.

Aufgabe 8 - HML mit Rekursion.

a)
Die gegebene Aussage wird durch folgende Formel formalisiert:
$F_{\{X\}} = \langle\, b \,\rangle \langle\, c \,\rangle\, tt \wedge [\, a \,]\, X$
$X \overset{\max}{=} \langle\, a \,\rangle X \wedge [\, b \,]\, ff$

b)
Die gegebene Aussage wird durch folgende Formel formalisiert:
$F_{\{Y\}} = Y$
$Y \overset{\min}{=} [\ \mathsf{Act}\ ]\, Y \vee (\langle\, a \,\rangle\, tt \wedge [\, b \,]\, ff) \vee \langle\, b \,\rangle \langle\, b \,\rangle\, tt$

Aufgabe 9 - HML mit Rekursion.

a)
Die zugrunde liegende Formel ist $X \stackrel{\min}{=} (\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, c \,\rangle\, tt) \wedge [\, Act \,]\, X$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(\langle a \rangle tt \vee \langle c \rangle tt) \wedge [Act] X}(\emptyset) =& (\langle \cdot a \cdot \rangle \,\mathsf{Proc} \cup \langle \cdot c \cdot \rangle \,\mathsf{Proc}) \cap ([\cdot a \cdot]\emptyset \cap [\cdot b \cdot]\emptyset \cap [\cdot c \cdot]\emptyset) \\
=& (\{p_1, p_2, p_6, p_7, p_8\} \cup \{p_4, p_6, p_7\}) \cap \\
& (\{p_3, p_4, p_5, p_9\} \cap \{p_1, p_3, p_5, p_7, p_8, p_9\} \cap \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_8, p_9\}) \\
=& \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \{p_3, p_5, p_9\} \\
=& \emptyset
\end{aligned}$$

An dieser Stelle haben wir einen Fixpunkt erreicht, da $\mathcal{O}_{(\langle a \rangle tt \vee \langle c \rangle tt) \wedge [Act] X}(\emptyset) = \emptyset$.

b)
Die zugrunde liegende Formel ist $X \stackrel{\max}{=} (\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, c \,\rangle\, tt) \wedge \langle\, Act \,\rangle X$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(\langle a \rangle tt \vee \langle c \rangle tt) \wedge \langle Act \rangle X}(\mathsf{Proc}) =& (\langle \cdot a \cdot \rangle \,\mathsf{Proc} \cup \langle \cdot c \cdot \rangle \,\mathsf{Proc}) \cap (\langle \cdot a \cdot \rangle \,\mathsf{Proc} \cap \langle \cdot b \cdot \rangle \,\mathsf{Proc} \cap \langle \cdot c \cdot \rangle \,\mathsf{Proc}) \\
=& (\{p_1, p_2, p_6, p_7, p_8\} \cup \{p_4, p_6, p_7\}) \cap \\
& (\{p_1, p_2, p_6, p_7, p_8\} \cup \{p_2, p_4, p_6\}) \cup \{p_4, p_6, p_7\}) \cup \\
=& \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \mathsf{Proc} \setminus \{p_3, p_5, p_9\} \\
=& \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{O}_{(\langle a \rangle tt \vee \langle c \rangle tt) \wedge \langle Act \rangle X})^2(\mathsf{Proc}) =& \mathcal{O}_{(\langle a \rangle tt \vee \langle c \rangle tt) \wedge \langle Act \rangle X}(\{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\}) \\
=& (\langle \cdot a \cdot \rangle \,\mathsf{Proc} \cup \langle \cdot c \cdot \rangle \,\mathsf{Proc}) \cap \\
& (\langle \cdot a \cdot \rangle \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cup \\
& \langle \cdot b \cdot \rangle \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cup \\
& \langle \cdot c \cdot \rangle \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\}) \\
=& (\{p_1, p_2, p_6, p_7, p_8\} \cup \{p_4, p_6, p_7\}) \cap \\
& (\{p_6, p_8\} \cup \{p_2, p_6\} \cup \{p_4, p_7\}) \\
=& \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \{p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \\
=& \{p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{O}_{(\langle a \rangle\, tt \vee \langle c \rangle\, tt) \wedge \langle Act \rangle X})^3(\mathsf{Proc}) =& \mathcal{O}_{(\langle a \rangle\, tt \vee \langle c \rangle\, tt) \wedge \langle Act \rangle X}(\{p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\}) \\
=& (\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle \cdot c \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap \\
& (\langle \cdot a \cdot \rangle \{p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \\
& \langle \cdot b \cdot \rangle \{p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \\
& \langle \cdot c \cdot \rangle \{p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\}) \\
=& (\{p_1, p_2, p_6, p_7, p_8\} \cup \{p_4, p_6, p_7\}) \cap \\
& (\{p_6, p_8\} \cup \{p_6\} \cup \{p_4, p_7\}) \\
=& \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \{p_4, p_6, p_7, p_8\} \\
=& \{p_4, p_6, p_7, p_8\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{O}_{(\langle a \rangle\, tt \vee \langle c \rangle\, tt) \wedge \langle Act \rangle X})^4(\mathsf{Proc}) =& \mathcal{O}_{(\langle a \rangle\, tt \vee \langle c \rangle\, tt) \wedge \langle Act \rangle X}(\{p_4, p_6, p_7, p_8\}) \\
=& (\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle \cdot c \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap \\
& (\langle \cdot a \cdot \rangle \{p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \langle \cdot b \cdot \rangle \{p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \langle \cdot c \cdot \rangle \{p_4, p_6, p_7, p_8\}) \\
=& (\{p_1, p_2, p_6, p_7, p_8\} \cup \{p_4, p_6, p_7\}) \cap \\
& (\{p_6, p_8\} \cup \{p_6\} \cup \{p_7\}) \\
=& \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \{p_6, p_7, p_8\} \\
=& \{p_6, p_7, p_8\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{O}_{(\langle a \rangle\, tt \vee \langle c \rangle\, tt) \wedge \langle Act \rangle X})^5(\mathsf{Proc}) =& \mathcal{O}_{(\langle a \rangle\, tt \vee \langle c \rangle\, tt) \wedge \langle Act \rangle X}(\{p_6, p_7, p_8\}) \\
=& (\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle \cdot c \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap \\
& (\langle \cdot a \cdot \rangle \{p_6, p_7, p_8\} \cap \langle \cdot b \cdot \rangle \{p_6, p_7, p_8\} \cap \langle \cdot c \cdot \rangle \{p_6, p_7, p_8\}) \\
=& (\{p_1, p_2, p_6, p_7, p_8\} \cup \{p_4, p_6, p_7\}) \cap \\
& (\{p_6, p_8\} \cup \emptyset \cup \{p_7\}) \\
=& \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7, p_8\} \cap \{p_6, p_7, p_8\} \\
=& \{p_6, p_7, p_8\}
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle haben wir einen Fixpunkt erreicht, da
$\mathcal{O}_{(\langle a \rangle\, tt \vee \langle c \rangle\, tt) \wedge [Act] X}(\{p_6, p_7, p_8\}) = \{p_6, p_7, p_8\}$.