Technische Universität Berlin **Fakultät II – Institut für Mathematik**
LinAlg - Team

Lineare Algebra für Ingenieure

Wiederholungsaufgaben zur Klausurvorbereitung - 2. Blatt

Achtung: Diese Aufgaben lassen keine Rückschlüsse auf die Aufgaben in der Klausur zu!

1. Aufgabe. Die Eigenwerte einer linearen Abbildung $L : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ sind

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4.$$

Zu jedem Eigenwert λ_i $(i = 1, 2, 3)$ sei ein Eigenvektor $\vec{v}_i$ bekannt:

$$\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Ist L diagonalisierbar?

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p_L(z)$ von L.

(c) Ist $\det(L) = 0$?

(d) Ist die Abbildung L invertierbar?

(e) Bestimmen Sie $L(2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3)$.

(f) Ist die Menge $\mathcal{M} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$?

(g) Bestimmen Sie $L_{\mathcal{M}}$.

(h) Bestimmen Sie $L_{\mathcal{B}_{\text{std}}}$, wobei $\mathcal{B}_{\text{std}}$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^3$ ist.

2. Aufgabe. Bestimmen Sie jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, die die gegebene Bedingung erfüllt.

(a) Die NZSF von A enthält eine 2.

(b) Das charakteristische Polynom von A ist $p_A(z) = z^2 - 7z + 12$.

(c) Die erste Spalte von A ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und A ist nicht invertierbar.

(d) A ist eine obere Dreiecksmatrix, die nicht diagonalisierbar ist.

3. Aufgabe. Gegeben ist die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$, für die $\text{Rang}(A) \leq 2$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A für den größten der oben bestimmten Werte von a.

4. Aufgabe. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^2$, und sei $\| \cdot \|$ die assoziierte Norm. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$L_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \mapsto & \|\vec{x}\| \end{array} \qquad L_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \mapsto & \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{x} \right\rangle \end{array}$$

$$L_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 2}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ ax^2 + bx + c & \mapsto & (a+b)x^2 + (c+1)x + b \end{array}$$

Lösungsskizzen erscheinen innerhalb einer Woche nach dem entsprechenden Wiederholungsabend auf der ISIS-Seite.