Methodische und Praktische Grundlagen der Informatik 4

Klausur

19.2.2014

Vorname ....

Nachname ....

Matrikel-Nr.: ....

Allgemeine Hinweise:

- Es stehen Ihnen 75 Minuten zur Bearbeitung der Prüfungsfragen zur Verfügung. Vor Beginn der Bearbeitungszeit gibt es eine Einlesezeit von 15 Minuten.
- Es ist ein auf einer Seiten beschriebenes DIN-A4 Blatt als Hilfsmittel zugelassen. Bitte vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer darauf.
- Schreiben sie ihre Lösungen auf das Aufgabenblatt der jeweiligen Aufgabe. Verwenden sie auch die Rückseiten. Wenn sie zusätzliche, von uns ausgegebene Blätter verwenden, geben sie unbedingt an, zu welcher Aufgabe die Lösung gehört!
- Schreiben sie deutlich! Doppelte, unleserliche oder mehrdeutige Lösungen werden nicht gewertet! Streichen sie gegebenenfalls eine Lösung durch!
- Schreiben sie nur in **blau** oder **schwarz**. Lösungen, die mit Bleistift geschrieben sind, können nicht gewertet werden!
- Erscheint ihnen eine Aufgabe mehrdeutig, wenden sie sich an die Betreuer.
- Geben sie Nebenrechnungen an, um ihren Lösungsweg zu verdeutlichen.
- Ein Prüfungsabschnitt oder eine Prüfung kann ganz oder teilweise als nicht bestanden erklärt werden, wenn sie eine Täuschungshandlung versuchen oder begehen.
- Tragen sie *jetzt* (vor Beginn der Bearbeitungszeit) auf *allen* Blättern ihren Namen und ihre Matrikelnummer ein.

Aufgabe	Punkte	Kürzel
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
Summe:		

Aufgabe 1: Gleitkommazahlen (2 Punkte)

Gegeben ist folgenden Python-Programm:

```
# 2D Rotationmatrix um 30 Grad
R = rotMatrix( 30)

# Vektor mit Zufallselementen
vec = np.random.randn(2)

vec_r = R.dot(vec)
vec_r2 = R.transpose().dot( vec_r)

diff = np.linalg.norm( vec - vec_r2)
print "diff = ", diff
```

a) (1 Punkt) Welches Ergebnis ist zu erwarten, wenn alle Berechnungen exakt ausgeführt werden?

b) (1 Punkt) Welches Ergebnis ist zu erwarten, wenn die Rechnungen mit Gleitkommazahlen durchgeführt werden?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2: Gauß-Elimination (5 Punkte)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) (1 Punkt) Lösen Sie das System mithilfe der Gauss-Elimination. Geben Sie jeden Schritt an.

b) (1 Punkt) Führen Sie die Gauss-Elimination noch einmal unter Verwendung von Spaltenpivoting durch.

c) (1 Punkt) Warum sollte Pivoting bei der Gauss-Elimination verwendet werden?

d) (2 Punkt) Gegeben sei die LR-Zerlegung einer Matrix A:

$$PA = LR \tag{2}$$

Wie kann man mithilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösen. Beschreiben Sie die verwendeten Verfahren kurz, ohne ins Detail zu gehen (zum Beispiel, erläutern Sie ersten Schritte der verwendeten Verfahren und welche Ergebnisse diese liefern).

Aufgabe 3: Singulärwertzerlegung (4 Punkte)

a) (2 Punkte) Wie ist die Singulärwertzerlegung (SVD) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert? Geben Sie insbesondere die Größe der auftretenden Matrizen an und verwenden Sie die üblichen Bezeichnungen.

b) (1 Punkt) Welchen geometrischen Transformationen entsprechen die Faktoren der Singulärwertzerlegung?

c) (1 Punkt) Gegeben sei eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Erläutern Sie wie die inverse Matrix A^{-1} mithilfe der Singulärwertzerlegung bestimmt werden kann.

Aufgabe 4: Lineare Ausgleichsprobleme (3 Punkte)

a) (2 Punkte) Gegeben seien eine Menge von Punkten $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots,N}$. Die Punkte sollen durch eine Gerade $g(x) = ax + b$ approximiert werden, welche den Fehler $\sum_{i=1}^{N}(g(x_i) - y_i)^2$ minimiert. Erläutern Sie, wie sich das Problem als überbestimmtes lineares Gleichungssystems beschreiben lässt. Wie kann diese Gleichungssystem effizient gelöst werden?

b) (1 Punkt) Gegeben sei ein lineares Ausgleichsproblem. Wie kann mittels Singulärwertzerlegung eine Lösung bestimmt werden?

Aufgabe 5: Interpolation (5 Punkte)

a) (1 Punkt) Geben sei eine Menge von N Stützstellen x_i und deren Funktionswerte y_i. Welche zwei Verfahren zur Bestimmung des Interpolationspolynoms $(N-1)$-ten Grades haben wir kennengelernt? Erläutern Sie beide Verfahren kurz.

b) (1 Punkt) Gegeben seien die Punkte $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,3} = \{(-3, 2), (1, 1), (3, 4)\}$. Wie lautet das quadratische Interpolationspolynom, welches diese Punkte interpoliert?

c) (1 Punkt) Konstruieren Sie ein Gleichungssystem, welches die Koeffizienten eines Polynoms dritten Grades bestimmt, dass vier vorgegebene Punkte $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,4}$ interpoliert.

d) (2 Punkt) Welches grundlegende Problem der Polynominterpolation löst die Splineinterpolation? Beschreiben Sie den Ansatz, mit welchem die Splineinterpolation das Problem vermeidet und dennoch eine glatte Interpolation erreicht (es sind keine Formeln notwendig).

Aufgabe 6: Diskrete Fouriertransformation (3 Punkte)

a) (1 Punkt) Warum ist die schnelle Fourier-Transformation von großer Wichtigkeit für die Praktikabilität der Fourier-Transformation. Erläutern sie dies an einem geeigneten Beispiel.

b) (1 Punkt) Geben sie die Elemente der DFT-Matrix D und der Matrix $\bar{D}$, welche zur Berechnung der inversen Fourier-Transformation verwendet wird, explizit an. In welcher Beziehung stehen D und $\bar{D}$ (z.B. was erhält man, wenn man die Matrizen multipliziert)?

c) (1 Punkt) Sei $f = (f_0, \cdots, f_k)$ mit $k = 2^m - 1$ ein diskretes, reell-wertiges Signal. Mit Hilfe der DFT-Matrix wird die Fourier-Transformation $\hat{f}$ von f bestimmt. Welche Eigenschaften hat $\hat{f}$? Zum Beispiel, in welchem Element befindet sich der höchste Frequenzanteil?

Aufgabe 7: Gewöhnliche Differentialgleichungen (3 Punkte)

Wir betrachten eine Federschwingung, wie sie schematisch in Abbildung 1 gegeben ist. Als gewöhliche Differentialgleichung erster Ordnung ist die Federschwingung durch

$$\dot{d} = v \tag{3a}$$
$$\dot{v} = (k/m)\, d \tag{3b}$$

beschrieben, wobei k die Federkonstante ist, welche bestimmt, wie schwer es ist, die Feder zu stauchen oder zu strecken.

a) (2 Punkte) Geben sie für die Federschwingung jeweils einen Schritt mit dem expliziten Euler-Verfahren und dem impliziten Euler-Verfahren an.

b) (1 Punkt) Kann das implizite Euler-Verfahren in der von ihnen gegebenen Form direkt in einem Programm verwendet werden? Warum bzw. warum nicht? Führen sie gegebenenfalls die notwendigen Transformationen durch, welche für eine praktische Implementierung notwendig sind und geben sie erneut einen Schritt für das implizite Euler-Verfahren an.

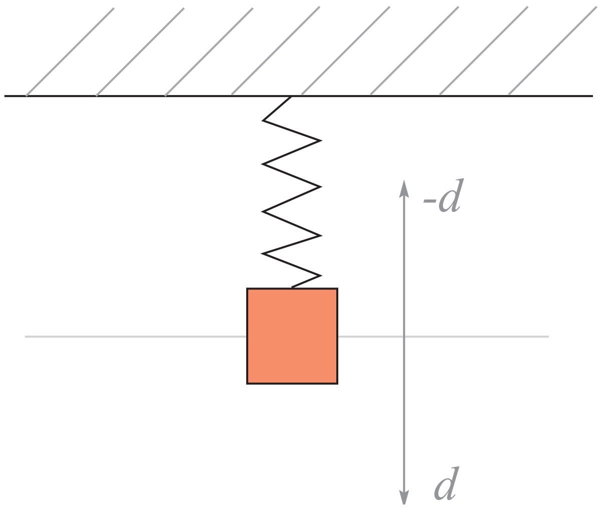

Abbildung 1: Feder in Aufgabe 7.