Grundlagen und algebraische Strukturen (WiSe 13/14)

LaS: Logik und Semantik — *03.02.2014 – 09.02.2014*

Tutorium 13

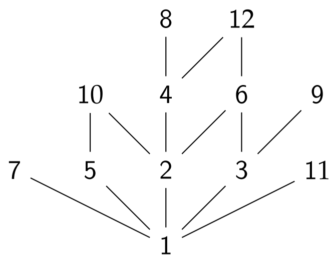
Aufgabe 1: Minima, Maxima, Schranken

Gegeben sei die Halbordnung $\preceq : (\mathbb{N}_+, \mathbb{N}_+)$ mit $\preceq := \{ (a, b) : \exists c \in \mathbb{N}_+ . a \cdot c = b \}$ (d.h. $a \preceq b$ gdw. a ein Teiler von b ist).

1.a) *Gib an:* Alle kleinsten/größten und minimalen/maximalen Elemente, alle unteren/oberen Schranken und Infimum/Supremum der folgenden Mengen, falls diese existieren.
1.a(i) $\{ n \mid n \text{ ist gerade} \}$
1.a(ii) $\mathbb{N}_+$
1.a(iii) $\{ 1, 5 \}$
1.a(iv) $\{ 12, 21, 96 \}$

Lösung

Skizze für die Werte $1 - 12$



Menge	kleinstes / größtes El.	minimale / maximale El.	untere / obere Schranken	Infimum / Supremum
$\{ n : n \text{ ist gerade} \}$	2 —	$\{ 2 \}$ $\emptyset$	$\{ 1, 2 \}$ $\emptyset$	2 —
$\mathbb{N}_+$	1 —	$\{ 1 \}$ $\emptyset$	$\{ 1 \}$ $\emptyset$	1 —
$\{ 1, 5 \}$	1 5	$\{ 1 \}$ $\{ 5 \}$	$\{ 1 \}$ $\{ 5x : x \in \mathbb{N}_+ \}$	1 5
$\{ 12, 21, 96 \}$	— —	$\{ 12, 21 \}$ $\{ 21, 96 \}$	$\{ 1, 3 \}$ $\{ 672x : x \in \mathbb{N} \}$	3 672

Durch Primfaktorzerlegung ergibt sich:

$$12 = 2^2 * 3$$
$$21 = 3 * 7$$
$$96 = 2^5 * 3$$

Obere Schranken sind demnach alle Zahlen, die durch $2^5 * 3 * 7 = 672$ teilbar sind.

\Lösung

1.b) Für welche Teilmengen von $\mathbb{N}_+$ gibt es obere Schranken?

Lösung

Für endliche Mengen.

\Lösung

Aufgabe 2: Verbände

Gegeben sei die Halbordnung $\preceq$ aus Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$.

2.a) *Gib an:* $\inf(\{ a, b \})$.

Lösung

$\inf(\{ a, b \}) := \mathrm{ggT}(a, b)$, d.h. der größte gemeinsame Teiler von a und b.

\Lösung

2.b) *Beweise:*: Deine Angabe für $\inf(\{ a, b \})$ ist tatsächlich das Infimum von a, b.

Hinweis: Seien $c, m, n \in \mathbb{N}_+$. Wenn c der größte gemeinsame Teiler von m und n ist, dann existieren $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $c = u \cdot m + v \cdot n$ $(*)$
Hinweis: Seien $c, m, n \in \mathbb{N}_+$. Wenn c ein Teiler von m und ein Teiler von n ist, dann gilt für alle $p, q \in \mathbb{Z}$, dass c auch $p \cdot m + q \cdot n$ teilt $(**)$

Lösung

Wir zeigen, dass $\mathrm{ggT}(a, b)$ das Infimum von a, b ist, d.h. $\mathrm{ggT}(a, b) \preceq a$, $\inf(\{ a, b \}) \preceq b$ und $\forall x \in \mathbb{N}_+ .\ (x \preceq a \text{ und } x \preceq b) \Rightarrow x \preceq \mathrm{ggT}(a, b)$

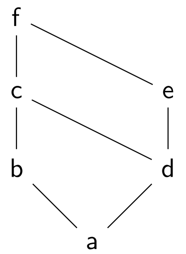
- Da per Definition $\mathrm{ggT}(a, b)$ Teiler von a und b ist, gilt, dass $\mathrm{ggT}(a, b) \preceq a$ und $\mathrm{ggT}(a, b) \preceq b$.
- Sei nun $x \in \mathbb{N}_+$ mit $x \preceq a$ und $x \preceq b$. Wir zeigen, dass auch $x \preceq \mathrm{ggT}(a, b)$, d.h., dass x ein Teiler von $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist.
  Da, $\mathrm{ggT}(a, b)$ der größte gemeinsame Teiler von a und b ist, können wir den Hinweis $(*)$ anwenden. Seien also $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = u \cdot a + v \cdot b$. Weiterhin, da x ein Teiler von a und ein Teiler von b ist, folgt aus Hinweis $(**)$, dass für alle $p, q \in \mathbb{Z}$, x ein Teiler von $p \cdot a + q \cdot b$ ist und damit ist also x auch ein Teiler von $u \cdot a + v \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b)$.

Somit ist $\mathrm{ggT}(a, b)$ das Infimum von a, b.

\Lösung

Aufgabe 3: Hasse-Diagramme und Verbände

3.a) Gegeben sei $A := \{ a, b, c, d, e, f \}$ und der Verband $V := (A, \sqsubseteq)$, der durch sein Hasse-Diagramm bestimmt ist:



Gib explizit an:

3.a(i) $c \sqcup e$

Lösung

f

\Lösung

3.a(ii) $b \sqcap d$

Lösung

a

\Lösung

3.a(iii) $\sup(\{ a, b, e \})$

Lösung

f

\Lösung

3.a(iv) Eine injektive Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, so dass $\forall x, y \in A. f(x \sqcap y) = f(x) \cap f(y)$ und $\forall x, y \in A. f(x \sqcup y) = f(x) \cup f(y)$

Lösung

$$\begin{aligned}
a &\mapsto \emptyset \\
b &\mapsto \{ 1 \} \\
d &\mapsto \{ 2 \} \\
c &\mapsto \{ 1, 2 \} \\
e &\mapsto \{ 2, 3 \} \\
f &\mapsto \{ 1, 2, 3 \}
\end{aligned}$$

\Lösung

3.b) Sei $P \subseteq \mathcal{P}(X)$. P ist eine *Partition* von X, wenn folgendes gilt:

- $\emptyset \notin P$
- $\forall x, y \in P \;.\; x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset$
- $\bigcup_{P_i \in P} P_i = X$

Bezeichnen wir mit $\mathrm{Part}(X)$ die Menge aller Partitionen von X. Wir definieren die Halbordnung
$\sqsubseteq : (\mathrm{Part}(X), \mathrm{Part}(X))$ mit $\sqsubseteq := \{\ (\ M,\ N\ ) : \forall m \in M \;.\; \exists n \in N \;.\; m \subseteq n\ \}$.

3.b(i) Sei $X := \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ \}$.
Gib an: Eine Partition P von X mit $|P| = 3$, so dass $\forall p \in P \;.\; |p| \geq 2$ und $\exists q \in P \;.\; |q| = 4$

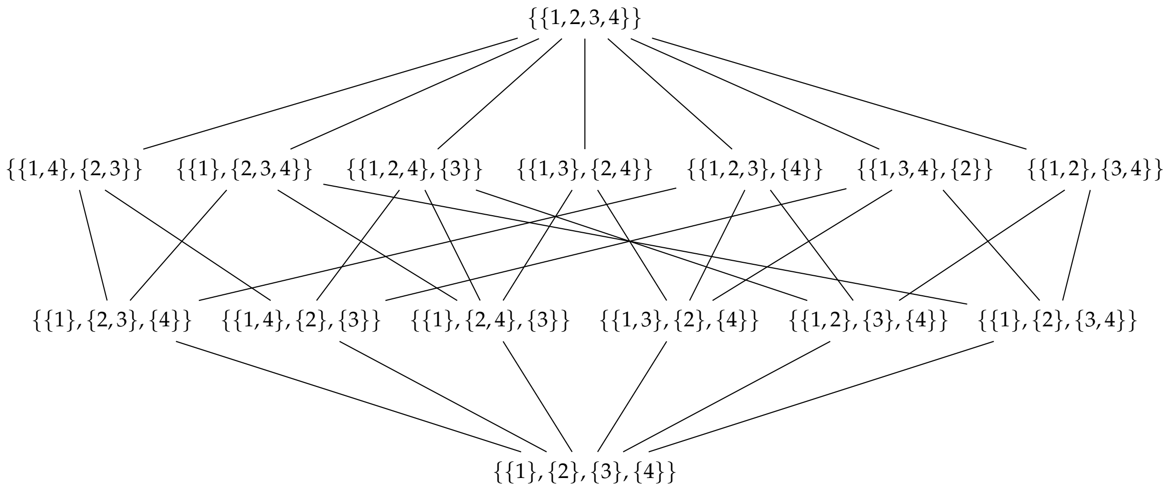
Lösung

Z.B.: $P := \{\ \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \},\ \{\ 5,\ 6\ \},\ \{\ 7,\ 8,\ 9\ \}\ \}$

\Lösung

3.b(ii) Sei $X := \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \}$. Visualisiere $\sqsubseteq$ mittels eines Hasse-Diagramms.

Lösung



\Lösung

3.b(iii) Sei $X := \mathbb{N}$. Gegeben sei eine beliebige Partition P von $\mathbb{N}$. Definiere eine Äquivalenzrelation $R : (\mathbb{N}, \mathbb{N})$ mit $P = \mathbb{N}/R$

Lösung

Wir definieren $R := \{\ (\ a,\ b\ ) : \exists M \in P \;.\; a, b \in M\ \}$

\Lösung