Sarah Köhler 356394
Dora Szücs 358573
Florian Stelzer 355640

1	2	3	4	Σ
4	3	3	3	13

HA 8

8.1.a.

$$Q = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. invariante Verteilung: $\pi \cdot Q = 0$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -2 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$= \left(-\pi_1 + \pi_2, \frac{\pi_1}{2} - 3\pi_2 + \frac{\pi_4}{2}, 2\cdot\pi_2 - 2\pi_3 + \frac{3\pi_4}{2}, \frac{\pi_1}{2} + 2\cdot\pi_3 - 2\cdot\pi_4\right)$$

$-\pi_1 + \pi_2 = 0 \implies \boxed{\pi_1 = \pi_2}$

$\frac{\pi_1}{2} - 3\pi_2 + \frac{\pi_4}{2} = 0 \implies \pi_1 - 6\pi_2 + \pi_4 = 0 \implies \boxed{\pi_4 = 5\pi_1 = 5\pi_2}$

$2\pi_2 - 2\pi_3 + \frac{3\pi_4}{2} = 0 \implies 4\pi_2 - 4\pi_3 + 3\pi_4 = 0 \implies 4\pi_2 + 3\pi_4 = 4\pi_3$

$\implies 4\pi_1 + 15\pi_1 = 4\pi_3 \implies \boxed{\pi_3 = \frac{19 \cdot \pi_1}{4}}$

Normieren

$1 \overset{!}{=} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$

$= \pi_1 + \pi_1 + \frac{19}{4}\pi_1 + 5\pi_1 = 11.75\,\pi_1 = \frac{47}{4}\pi_1$

$\implies \pi_1 = \frac{4}{47} \quad \pi_2 = \frac{4}{47} \quad \pi_3 = \frac{19}{47} \quad \pi_4 = \frac{20}{47}$

Die invariante Verteilung ist also

$\pi = \left(4/47, 4/47, 19/47, 20/47\right)$

4

8.2.a.

z so bestimmen, dass für $S_n \sim Bin(n, p)$

$P(|S_n - np| \le z\sigma) = \frac{1}{2}$

(ohne Stetigkeitskorrektur, da σ unbekannt)

$\frac{1}{2} = P(|S_n - np| \le z\sigma) \overset{8.2.a.}{\approx} 2 \cdot \Phi(z) - 1$ ✓

$\Rightarrow \quad 2\,\Phi - 1 = \frac{1}{2}$

$2\,\Phi(z) = \frac{3}{2}$

$\Phi(z) = \frac{3}{4} = 0.75$ ✓

$\Rightarrow \quad z = 0.67$ ✓

Stetigkeitskorrektur ?

8.2.b. n Würfe mit einer fairen Münze

S: Anzahl Erfolge

$S \sim Bin(n,p)$, n unbekannt, $p = \frac{1}{2}$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n}$$

$|S - \frac{n}{2}| \leq 0.337\sqrt{n}$?

zu zeigen: $P\left(\left| S \leq \frac{n}{2} + 0.337\sqrt{n} \right|\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{S-np}{\sigma}$ ist etwa standardnormalverteilt

$$P\left(\left| S \leq \frac{n}{2} + 0.337\sqrt{n} \right|\right)$$

$$= P\left(\left| S - \frac{n}{2} \right| \leq 0.337\sqrt{n}\right) \qquad \left(n \cdot p = \frac{n}{2}\right)$$

$$= P\left(\left| \frac{S - n/2}{1/2\sqrt{n}} \right| \leq 0.674\right) = \frac{1}{2}$$

In a, wurde gezeigt, dass für $z \approx 0.67$ die Gleichheit mit $\frac{1}{2}$ gilt.

c. n Würfen mit einem fairen Würfel

S: Anzahl Vieren

$S \sim Bin(n,p)$, n unbekannt, $p = \frac{1}{6}$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{6} \cdot \sqrt{n}$$

$n \cdot p = \frac{n}{6}$

$\frac{S-np}{\sigma}$ ist etwa standardnormalverteilt

zu zeigen: $P\left(\left| S \leq \frac{n}{6} + 0.252\sqrt{n} \right|\right) = \frac{1}{2}$

$$P\left(\left| S \leq \frac{n}{6} + 0.252\sqrt{n} \right|\right) = P\left(\left| S - \frac{n}{6} \right| \leq 0.252\sqrt{n}\right)$$

$$= P\left(\left| \frac{S - n/6}{5/6\sqrt{n}} \right| \leq 0.676\right) \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$

In a, wurde gezeigt, dass für $z \approx 0.67$ die Gleichheit mit $\frac{1}{2}$ gilt.

3/4

Aufgabe 3

a) Für $n=10$ ist $\frac{S_n}{n} = 0{,}8$

$\Rightarrow \frac{S_{10}}{10} = 0{,}8 \Rightarrow S_{10} = 8$

$E[S_{10}] = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$

Abweichung:

$|E[S_{10}] - S_{10}| = |5-8| = 3 < 3{,}162 \approx 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$

$= 2 \cdot \sqrt{\frac{10}{2 \cdot 2}} = 2\sigma_{10}$

$\Rightarrow$ Die Abweichung vom Erwartungswert ist also kleiner als $2\sigma_{10}$

Für $n=300$

$S_{300} = 0{,}55 \cdot 300 = 165$

$E[S_{300}] = 300 \cdot \frac{1}{2} = 150$

$|E[S_{300}] - S_{300}| = 15 < 17{,}32 \approx 2 \cdot \sqrt{\frac{150}{2}} = 2\sigma_{300}$

$\Rightarrow$ Abweichung vom Erwartungswert wieder kleiner als $2\sigma_{300}$.

Für $n=600$

$S_{600} = 0{,}54 \cdot 600 = 324$

$E[S_{600}] = 600 \cdot \frac{1}{2} = 300$

$|E[S_{600}] - S_{600}| = 24 < 24{,}495 \approx 2 \cdot \sqrt{\frac{300}{2}} = 2\sigma_{600}$

$\Rightarrow$ Abweichung vom EW ist ebenfalls kleiner als $2\sigma_{600}$

Für $n=2000$

$S_{2000} = 0{,}5065 \cdot 2000 = 1013$

$E[S_{2000}] = 2000 \cdot \frac{1}{2} = 1000$

$|E[S_{2000}] - S_{2000}| = 13 < 44{,}721 \approx 2 \cdot \sqrt{\frac{1000}{2}} = 2\sigma_{2000}$

Für alle $n \in \{10, 300, 600, 2000\}$ ist die Abweichung der Messung vom Erwartungswert kleiner als $2\sigma_n$.

b) $\{|S_n - np| \geq 2\sigma_n\} \approx 1 - \Phi(2) + \Phi(-2)$

$$= 2(1-\Phi(2)) \checkmark$$

$$\left(= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt\right) \right.$$

$$\left. = 2 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \right)$$

$$\cancel{\approx 0{,}97725}$$

$$\approx 2(1 - 0{,}97725)$$

~~Etwa~~

$$\cancel{= 2 \cdot 0{,}03375}$$

$$= \cancel{0{,}0675} = 0{,}0455 \checkmark$$

Für 12 Ereignisse, von denen mind. eines eine größere Abweichung haben soll:

$$12 \cdot \{|S_n - np| \geq 2\sigma_n\} = 12 \cdot \cancel{0{,}0455}\ 0{,}0455$$

$$= 0{,}546$$

Binomial verteilt

Dies gilt, da n für die Berechnung der Normalapproximation keine Rolle spielt.

3/4

8.4. $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig
Bernoulli verteilt zu $p \in (0,1)$

$S_n = X_1 + \ldots + X_n \qquad \sigma_n = \sqrt{p(1-p)} \cdot \sqrt{n}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim Bin(n,p)$

a) z bestimmen, so dass $\mathbb{P}(|S_n - np| \leq z\sigma_n) = u$

i) $\mathbb{P}(|S_n - np| \leq z\sigma_n) \qquad u = 0.95$

$\approx 2 \cdot \Phi(z) - 1$

$\Rightarrow 2\,\Phi(z) - 1 = 0.95$

$\Phi(z) = 0.975$

$\Rightarrow z = 1.96$

ii) $\mathbb{P}(|S_n - np| \leq z\sigma_n) \qquad u = 0.9$

$\approx 2 \cdot \Phi(z) - 1$

$\Rightarrow 2\,\Phi(z) - 1 = 0.9$

$\Phi(z) = 0.95$

$\Rightarrow z = 1.65$

iii) $\mathbb{P}(|S_n - np| \leq z\sigma_n)$

$\approx 2 \cdot \Phi(z) - 1 \qquad u = 0.8$

$\Rightarrow 2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0.8$

$\Phi(z) = 0.9$

$\Rightarrow z = 1.28$

b) zu zeigen: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \leq \varepsilon\right) = u$ ($\varepsilon > 0$ gegeben) erfüllt,

wenn $n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \cdot p(1-p)$

$n = \frac{z^2}{\varepsilon^2} \cdot p(1-p)$

$\varepsilon^2 = \frac{z^2 \cdot p(1-p)}{n}$

$\varepsilon = \frac{z \cdot \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \leq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \leq \frac{z \cdot \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$

$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{n \cdot z}{\sqrt{n}}\right|\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \sqrt{n} \cdot z\right|\right) =$

$= P\left(\left|\frac{S_n - n\cdot p}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}\right| \le z\right) = u$

Da $\frac{S_n - n\cdot p}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} = \frac{S_n - np}{\sigma_n}$ etwa $\approx$ standardnormal-verteilt ist, gilt die Gleichung zu gegebenen $l > 0$.

c) der maximale Wert von $p(1-p)$ bestimmen

$u = 0.95 \quad l = 0.02 \quad z = 1.96$

$p(1-p) = \frac{n \cdot l^2}{z^2} = \frac{n \cdot 0.02^2}{1.96^2} \Rightarrow n = \frac{p(1-p)\cdot 1.96^2}{0.02^2}$

$p(1-p) \le \frac{1}{4}$

≤ 4802 1/2

$u = 0.9 \quad l = 0.02 \quad z = 1.65$

$p(1-p) = \frac{n \cdot l^2}{z^2} = \frac{n \cdot 0.02^2}{1.65^2} \Rightarrow n = \frac{p(1-p)\cdot 1.65^2}{0.02^2}$

≤ 3403 1/2

$u = 0.8 \quad l = 0.02 \quad z = 1.28$

$p(1-p) = \frac{n \cdot l^2}{z^2} = \frac{n \cdot 0.02^2}{1.28^2} \Rightarrow n = \frac{p(1-p)\cdot 1.28^2}{0.02^2}$

≤ 2048 1/2

Das Maximum von $p(1-p)$:

Sei $f(p) = p(1-p) = p - p^2$

$\Rightarrow f'(p) = -2p + 1$

Bestimmen d. Nullstelle:

$-2p + 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

Also wird $p(1-p)$ maximal für $p = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow p(1-p) \le 1/4$

3/4