Rechnerarithmetik: Zahlendarstellungen

TechGI 2 - SoSe 2014

Zahlensysteme

Dual-System:	Basis = 2 = 2^1
	$1101_2 = 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 \quad =1\cdot8 + 1\cdot4 + 1\cdot1 = 13_{10}$
Oktal-System:	Basis = 8 = $2^{\underline{3}}$ 1 Ziffer im Oktal-System ↔ <u>3</u> Ziffern im Dual-System
	$1723_8 = 1\cdot8^3 + 7\cdot8^2 + 2\cdot8^1 + 3\cdot8^0 \quad =1\cdot512 + 7\cdot64 + 2\cdot8 + 3\cdot1 = 979_{10}$
Dezimal-System:	Basis = 10 ≈ $2^{3,3}$
	$354_{10} = 3\cdot10^2 + 5\cdot10^1 + 4\cdot10^0 \quad =3\cdot100 + 5\cdot10 + 4\cdot1 = 354_{10}$
Hexadezimal-System:	Basis = 16 = $2^{\underline{4}}$ 1 Ziffer im Hexadezimal-System ↔ <u>4</u> Ziffern im Dual-System
	$1A7_{10} = 1\cdot16^2 + A\cdot16^1 + 7\cdot16^0 \quad =1\cdot256 + 11\cdot16 + 7\cdot1 = 423_{10}$

Darstellung in verschiedenen Zahlensystemen

Horner-Schema

Dezimal → Dual	$a_0 : 2 = a_1$	$+ R_0$	→Dezimal(a_0) =Dual($R_N R_{N-1} \ldots R_2 R_1 R_0$)
	$a_1 : 2 = a_2$	$+ R_1$	
	$a_2 : 2 = a_3$	$+ R_2$	
	⋮		
	$a_N : 2 = \underline{\underline{0}}$	$+ R_N$	
z.B.: 26_{10} → $???_2$	26 : 2 = 13	+ 0	→ $26_{10} = 11010_2$
	13 : 2 = 6	+ 1	
	6 : 2 = 3	+ 0	
	3 : 2 = 1	+ 1	
	1 : 2 = $\underline{\underline{0}}$	+ 1	

Dezimal → Oktal	$b_0 : 8 = b_1$	$+ R_0$	→Dezimal(b_0) =Oktal($R_N R_{N-1} \ldots R_2 R_1 R_0$)
	$b_1 : 8 = b_2$	$+ R_1$	
	$b_2 : 8 = b_3$	$+ R_2$	
	⋮		
	$b_N : 8 = \underline{\underline{0}}$	$+ R_N$	
z.B.: 373_{10} → $???_8$	370 : 8 = 46	+ 2	→ $373_{10} = 562_8$
	46 : 8 = 5	+ 6	
	5 : 8 = $\underline{\underline{0}}$	+ 5	

Dezimal → Hex	$c_0 : 16 = c_1$	$+ R_0$	→Dezimal(c_0) =Hex($R_N R_{N-1} \ldots R_2 R_1 R_0$)
	$c_1 : 16 = c_2$	$+ R_1$	
	$c_2 : 16 = c_3$	$+ R_2$	
	⋮		
	$c_N : 16 = \underline{\underline{0}}$	$+ R_N$	
z.B.: 167_{10} → $???_{16}$	167 : 16 = 10	+ 7	→ 167_{10} → $A7_{16}$
	10 : 16 = $\underline{\underline{0}}$	+ A	

Dual → Oktal	$a_N\ a_{N-1} \dots a_5a_4a_3\ a_2a_1a_0$ ι.........J ι........Jι........J $o_{-,n,n-1}$ $o_{5,4,3}$ $o_{2,1,0}$	→ Dual($a_Na_{N-1}\dots a_5a_4a_3\ a_2a_1a_0$) =Oktal ($o_{-,n,n-1} \dots o_{5,4,3}o_{2,1,0}$)
z.B.: 1101011	→ 1 101 011 ι...J ι...J ι...J 1 5 3	→ $1101011_2 = 153_8$
Dual → Hex	$b_N\ b_{N-1} \dots b_5b_4\ b_3b_2b_1b_0$ ι.........J ι........J ι...........J $h_{-,n,n-1}$ $h_{7,6,5,4}$ $h_{3,2,1,0}$	→ Dual($b_N\ b_{N-1} \dots b_5b_4b_3b_2b_1b_0$) =Hex ($h_{-,n,n-1}\dots h_{7,6,5,4}h_{3,2,1,0}$)
z.B.: 1101011	→ 110 1011 ι.....J ι.....J 6 B	→ $1101011_2 = 6B_{16}$

Darstellung negativer Zahlen

2k-Interpretation

Das höchstwertigste Bit bestimmt das Vorzeichen
Es handelt sich NUR um eine Interpretation einer Bitfolge

11010011	→ $(-1)\cdot\mathbf{1}\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$ $= \mathbf{-128} + 64 + 16 + 2 = -45_{10}$
01011010	→ $(-1)\cdot\mathbf{0}\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$ $= 64 + 16 + 8 + 2 = 90_{10}$

Wenn alle zur Verfügung gestellten Bit gesetzt (1) sind und die Bitfolge als 2k-Zahl interpretiert wird, dann ist diese Zahl "-1", unabhängig von der Anzahl der zur Verfügung gestellten Bit.

1111	→ $(-1)\cdot\mathbf{1}\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$ $= \mathbf{-2^3} + (2^2 + 2^1 + 2^0) = \mathbf{-2^3} + (2^3 - 1) = -1_{10}$
11	→ $(-1)\cdot\mathbf{1}\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$ $= \mathbf{-2^1} + (2^0) = \mathbf{-2^1} + (2^1 - 1) = -1$
11111111	→ $(-1)\cdot\mathbf{1}\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$ $= \mathbf{-2^7} + (2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) = \mathbf{-2^7} + (2^7 - 1) = -1_{10}$

Umwandlung negativer Dezimalzahlen

1. Möglichkeit

Die negative Zahl $-x_{10}$ soll als 2k-Binärzahl dargestellt werden

1.) Den Betrag der Zahl betrachten
2.) Die entsprechende Binärzahl zum Betrag ermitteln
3.) Biterweiterung durch führende "0"
(siehe Aufgabenstellung, z.B. "[..] 8bit 2k-Binärzahl [..]")
4.) Invertieren
5.) +1 auf dem niederwertigsten Bit

$$-x_{10} \xrightarrow{\text{Betrag}} |-x_{10}| = x_{+,10} \xrightarrow{\text{Umwandlung}} b_2 = 0000b_2$$

Invertieren

$$\begin{array}{r} 1111b_{n,2} \\ + \quad 1_2 \\ \hline -x_2 \end{array}$$

$$-x_{10} = -7_{10} \rightarrow |-7_{10}| = 7_{10} \rightarrow 111_2 \rightarrow 0000\ 0111_2$$

$$\begin{array}{r} 1111\ 1000_2 \\ + \quad 1_2 \\ \hline 1111\ 1001_2 \end{array}$$

2. Möglichkeit

Die negative Zahl $-x_{10}$ soll als 2k-Binärzahl dargestellt werden

$\rightarrow -x_{10} = -1_{10} - y_{10}$, $y_{10} = |-x_{10}| - 1 = \tilde{y}_2$

$-1_{10} = 111 \ldots 11_2$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 111 \ldots 11_2 \\ - \quad \tilde{y}_2 \\ \hline -x_2 \end{array}$$

$-x = -7 \rightarrow y_{10} = |-7_{10}| - 1 = 6 = 110$

$-1_{10} = 1111\ 1111_2$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1111\ 1111_2 \\ - \quad 110_2 \\ \hline 1111\ 1001_2 \end{array}$$