gezählt

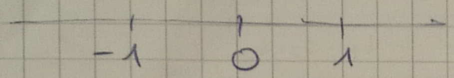
Iwa Stoilowa 325944

Dora Szücs 358573

Sarah Köhler 356894

① Aufgabe

a) $|x+1| - |x-1| = 1$



5/6.

1 Fall : $x < -1$

$$-(x+1) - (-(x-1)) = 1$$
$$-x-1-(-x+1) = 1$$
$$-x-1+x-1 = 1$$
$$-2 \neq 1 \qquad \mathbb{L} = \emptyset$$

2. Fall : $-1 < x < 1$

$$(x+1) - (-(x-1)) = 1$$
$$x+1+x-1 = 1$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

3. Fall : $x > 1$

$$(x+1) - (x-1) = 1$$
$$x+1-x+1 = 1$$
$$2 \neq 1$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

b) $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}$

Für $x>0$ nie erfüllt, da für Brüche gilt, dass sie mit größerem Nenner kleiner werden und $x < x+1$

f

Fallunterschied betrachten

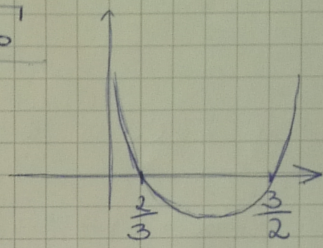
$x \neq 0 \cup x \neq -1$

$\mathbb{L} =]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$

$x<0$
$x+1<0$
$x>0$
$x+1>0$

c) $6x^2 - 13x + 6 < 0$

$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6}$



$x_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{12}$

$x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = \frac{2}{3}$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}\}$

d) $\left| \frac{1}{x-1} \right| < 2$

1. Fall $\frac{1}{x-1} < 2$

$1 < 2x - 2$

$3 < 2x$

$\frac{3}{2} < x$

2. Fall $\frac{1}{-(x-1)} < 2$

$-1 < 2x - 2$

$1 < 2x$

$\frac{1}{2} < x$

$\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} [$

② Aufgabe

a) Für alle natürl. Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

IA: $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{k}{2^k} = 0 = 2 - 2 = 2 - \frac{2}{1} = 2 - \frac{0+2}{2^0}$$

IV: Es gelte die Behauptung für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

IB: Dann gilt auch

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{(n+1)}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\overset{IV}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 + \frac{-2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 + \frac{-2(n+2) + (n+1)}{2^{n+1}}$$

$$= 2 + \frac{-2n + -4 + n + 1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

2.b) Beweis per Induktion

zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N} : 4$ teilt $5^n - 1 \;\; :\Longleftrightarrow A(n)$

I.A. $n = 0 \qquad (5^0 - 1) : 4 = 0 : 4 = 0$

I.V. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $4 \; 5^n - 1$ teilt,
das heißt $\exists a \in \mathbb{N} : 4 \cdot a = 5^n - 1$

I.B. zu zeigen: 4 teilt $5^{n+1} - 1$, d.h.

$$\exists b \in \mathbb{N} : 4 \cdot b = 5^{n+1} - 1$$

I.S.: Teil 1. $\quad 5^{n+1} - 1 - \underbrace{(5^n - 1)}_{\text{Sollte 4 Teilen}} \;\; = 5^{n+1} - 5^n \}$

$= 5 \cdot 5^n - 5^n$

$= 4 \cdot 5^n$

Verstehe ich nicht was dieses mit der Aufgabe zu tun hat.

warum?
Zielrichtige Frage:

Teil 2. $\quad 5^{n+1} - 1 - (5^n - 1) = 4 \cdot 5^n$

$\overset{\text{I.V.}}{\Longrightarrow} \quad 5^{n+1} - 1 - 4 \cdot a = 4 \cdot 5^n$

$5^{n+1} - 1 = 4 \cdot 5^n + 4 \cdot a$

$5^{n+1} - 1 = 4 \cdot (5^n + a)$

$b = (5^n + a) \in \mathbb{N} \quad$ (nach I.V.: $a \in \mathbb{N}$)

Somit existiert ein $b \in \mathbb{N}$, so dass
$4 \cdot b = 5^{n+1} - 1$, d.h. $5^{n+1} - 1$ ist durch
4 teilbar.

3/4

?