

Stochastik für Informatiker Übungsblatt 1

Ausgabe: 17.04. – Abgabe bis 30.04. im jeweiligen Tutorium

Tutoriumsaufgabe 1.1 (Modellierung unterscheidbarer Münzen)

Eine faire Münze werde dreimal nacheinander geworfen.

- (a) Geben Sie einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) für dieses Experiment an.
- (b) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch Teilmengen von Ω :
 - (i) Die erste Münze zeigt Kopf.
 - (ii) Die dritte Münze zeigt Kopf.
 - (iii) Die erste und die dritte Münze zeigen Kopf.
 - (iv) Die erste oder die dritte Münze zeigt Kopf.
 - (v) Mindestens eine Münze zeigt Kopf.
 - (vi) Genau eine Münze zeigt Kopf.

Tutoriumsaufgabe 1.2 (Modellierung unterscheidbarer Würfel)

Eine fairer Würfel werde dreimal nacheinander geworfen.

- (a) Geben Sie einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) für dieses Experiment an.
- (b) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch Teilmengen von Ω :
 - (i) Der erste Würfel zeigt keine 6.
 - (ii) Ein Würfel zeigt keine 6.
 - (iii) Die Summe der Würfelaugen ist kleiner oder gleich 4.

Tutoriumsaufgabe 1.3 (Rechenregeln)

Sei (Ω, \mathbb{P}) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. es gelten

- i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1,$
- ii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ für $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$.

Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen für $A, B \subseteq \Omega$:

- (a) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ falls $B \subseteq A$;
- (b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Tutoriumsaufgabe 1.4

Eine Urne enthält n blaue und n rote Kugeln. Zwei Kugeln werden aus der Urne zufällig und gleichzeitig gewählt.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kugeln mit verschiedener Farbe gezogen werden?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kugeln mit gleicher Farbe gezogen werden?

Hausaufgabe 1.1 (Modellierung unterscheidbarer Würfel)

5 Punkte

Wir betrachten das Experiment, das aus dem Werfen zweier fairer, unterscheidbarer Würfel besteht.

- (a) Geben Sie einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) an.
- (b) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch Teilmengen von Ω und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten:
 - (i) Die Augensumme ist kleiner oder gleich 5.
 - (ii) Die Augenzahlen beider Würfel sind ungerade.
 - (iii) Die Augensumme ist ungerade.
 - (iv) Das Produkt beider Augenzahlen ist gerade.

Hausaufgabe 1.2

3 Punkte

Von den Ereignissen $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$ tritt/treten

- (a) mindestens eines, (b) keines, (c) höchstens eines,
- (d) genau eines, (e) mindestens eines nicht, (f) genau zwei

ein. Stellen Sie die Ereignisse in (a) bis (f) durch die Mengenoperationen Vereinigung, Durchschnitt und Komplement mithilfe von A_1, A_2, A_3 und Ω dar.

Hausaufgabe 1.3 (Inklusions-Exklusions-Formel)

4 Punkte

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) :

- (a) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau eines von den Ereignissen $A, B \subseteq \Omega$ eintritt, ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B).$$

- (b) Für beliebige Ereignisse $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, 3$ gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \left(\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i) \right) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Hausaufgabe 1.4

4 Punkte

In einer Urne befinden sich 100 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 100 beschriftet sind. Wir ziehen daraus zufällig eine Kugel.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Zahl durch zwei oder drei (oder durch beide) teilbar?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Zahl durch zwei oder drei, aber nicht durch beide, teilbar?
- (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Zahl durch zwei, drei oder fünf teilbar?

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:

- Das Übungsblatt wird bis Freitag einer Woche auf Isis veröffentlicht und enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der folgenden Woche besprochen.
- Die Hausaufgaben geben Sie ausgearbeitet *in festen Dreiergruppen in der Woche darauf in Ihrem Tutorium* ab.
- Fällt Ihr Tutorium auf einen Feiertag, dürfen Sie in dieser Woche ein anderes Tutorium besuchen. Ihre Ausarbeitung geben Sie spätestens am Tag vorher in MA 763 ab, ggf. nutzen Sie die Box daneben.