Aufgabe 5

z.z. $\exists \varphi \in AL$. Zu φ existiert keine äquivalente Formel φ', die in 3-KNF ist.

Wähle $\varphi = W \vee X \vee Y \vee Z$ mit $W, X, Y, Z \in AVar$

z.z. $\nexists \varphi' \in AL$, $\varphi' \equiv \varphi$, φ' ist in 3KNF

Beweis per Widerspruch:

Annahme: Es ex. $\varphi' \equiv \varphi$, φ' ist in 3-KNF.

Nach Definition der 3-KNF enthält jede Klausel von φ' maximal 3 Literale.

I) Wir zeigen zunächst, dass φ' sich in in $\varphi'' \equiv \varphi'$ umformen lässt, wobei φ'' ebenfalls in 3-KNF ist und genau drei Literale pro Klausel enthält. Die Vorschrift für die Umformung von φ' in φ'' lautet:

- alle Klauseln, die aus drei Literalen bestehen bleiben erhalten und werden nicht verändert
- alle Klauseln, die aus zwei Literalen bestehen werden in Klauseln aus drei Literalen umgeformt (siehe B))
- alle Klauseln aus einem Literal werden in Klauseln aus zwei Literalen umgeformt (siehe A)) und diese dann wiederum in Klauseln aus drei Literalen (siehe B))

A) Eine Klausel mit einem Literal kann in zwei Klauseln aus zwei Literalen umgeformt werden.

Seien $A, B, C, D \in \{W, \neg W, X, \neg X, Y, \neg Y, Z, \neg Z\}$

BRUNNEN

Beweis per WWT, dass folgende Äquivalenz gilt: $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

A	B	A	$(A \vee B)$	$\wedge$	$(A \vee \neg B)$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

B) Jede Klausel aus zwei Literalen kann in zwei Klauseln aus drei Literalen umgeformt werden. Seien A, B, C, D definiert wie in A).
Beweis per WWT, dass folgende Äquivalenz gilt: $\psi \equiv (\psi \vee B) \wedge (\psi \vee \neg B)$ mit $\psi \in AL$, ψ ist Klausel einer KNF.

ψ	B	ψ	$(\psi \vee B) \wedge (\psi \vee \neg B)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Daraus folgt (oBdA), dass eine Formel der Form $(A \vee D)$ äquivalent zu $(A \vee D \vee B) \wedge (A \vee D \vee \neg B)$ ist.

Damit ist bewiesen, dass $\varphi'' \equiv \varphi'$ existiert, wobei φ'' in 3-KNF ist und genau 3 Literale pro Klausel enthält.

II) Aus der Transitivität der Äquivalenz folgt:
Da $\varphi' \equiv \varphi''$ und $\varphi' \equiv \varphi$ gilt auch $\varphi \equiv \varphi''$.
Da $\varphi \equiv \varphi''$ muss es eine Äquivalenzumformung geben die φ'' in φ überführt.
Nach Definition besteht φ'' aus $n \in \mathbb{N}$ Klauseln, die je drei Literale enthalten.