TheGI 1: Grundlagen und Algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 12. Februar 2013

Schriftliche Leistungskontrolle (EK)

Studentenidentifikation:

Nachname	
Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	☐ Informatik Bachelor, ☐ ____________________
Tutor	☐ Grischa, ☐ Henning, ☐ Kirstin, ☐ Christina, ☐ Paul, ☐ Tim

Aufgabenübersicht:

Aufgabe	Seite	Punkte	Themenbereich
1	2	18	Verbände
2	4	26	Monoide/Ringe
3	6	23	Graphen
4	9	22	Bäume
5	12	11	Induktion

Korrektur:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	18	26	23	22	11	100
Erreicht						
Korrektor						
Einsicht						

Matrikelnummer: ____________________ *Name:* ____________________

Aufgabe 1: Verbände ***(18 Punkte)***

a. Seien $X \triangleq \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$ und

$$\leq \triangleq \mathsf{t}(\mathsf{r}(\{(a,b),(b,f),(f,d),(b,c),(c,d),(a,h),(h,c),(h,e),(e,d),(g,h)\})).$$

i) *(2 Punkte)* (*) *Gib an:* Das Hasse-Diagramm von $\leq$.

ii) *(8 Punkte)* (*) *Gib an:* das kleinste und das größte Element, die minimalen und maximalen Elemente, das Supremum und das Infimum, sowie die oberen und unteren Schranken von $\{ e, c, h \}$ bezogen auf die oben gegebene Ordnung $\leq$.

kleinstes Element: größtes Element:

minimale Elemente: maximale Elemente:

untere Schranken: obere Schranken:

Infimum: Supremum:

b. *(8 Punkte)* (**)
Seien $(X, \sqcap)$ und $(X, \sqcup)$ zwei Halbverbände und gelte

$$\forall a, b \in X \,.\, a \sqcap (a \sqcup b) = a \tag{$\triangle$}$$

$$\forall a, b, c \in X \,.\, a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \tag{$\triangle\triangle$}$$

i) *Beweise:* $\forall a, b \in X \,.\, a \sqcup (a \sqcap b) = a$
ii) *Beweise:* $\forall a, b, c \in X \,.\, (a \sqcup b) \sqcap c = (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c)$

Aufgabe 2: Monoide/Ringe ***(26 Punkte)***

a. *(6 Punkte)* (*)
Gib an: Vervollständige die folgenden Tabellen so, dass $(\{a, b, c\}, \oplus, \otimes, c, a, \text{inv})$ ein kommutativer Ring mit Eins ist:

inv	
a	
b	
c	

	$\oplus$	a	b	c
	a		c	
	b		a	
neutral →	c	a		

	$\otimes$	a	b	c
neutral →	a			c
	b		a	
	c		c	

Sei $\ominus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert als $x \ominus y \triangleq |x - y|$, wobei $|x| \triangleq \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$ den Betrag einer ganzen Zahl definiert.

b. *(5 Punkte)* (**)
Beweise: Beweise, dass für $(\mathbb{N}, \ominus)$ das Kommutativ-Gesetz gilt.
Hinweis: Es darf benutzt werden: $\forall x, y \in \mathbb{N} \,.\, |x - y| = |y - x|$ $(\triangle)$

c. *(5 Punkte)* (**)
Beweise: Beweise, dass 0 neutral bzgl. $(\mathbb{N}, \ominus)$ ist.

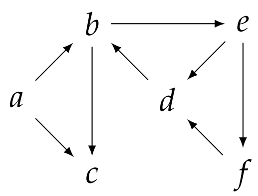
Erinnerung: $\ominus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist definiert als $x \ominus y \triangleq |x - y|$ und $|x| \triangleq \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$.

d. *(5 Punkte)* (**)
Beweise: Es gibt eine Operation $^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass x^{-1} invers zu x bzgl. $(\ \mathbb{N},\ \ominus,\ 0\ )$ ist.

e. *(5 Punkte)* (**)
Widerlege: Widerlege, dass $(\ \mathbb{N},\ \ominus,\ 0,\ ^{-1}\ )$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 3: Graphen ***(23 Punkte)***

Gegeben sei der gerichtete Graph G:



a. *(8 Punkte)* (*)
Gib an: Bestimme alle Quellen, Senken, den längsten einfachen (Kanten-)Pfad und den längsten einfachen Zyklus (als Kantenpfad) in G.

	in G
Quellen	
Senken	
Längster einfacher Kanten-Pfad	
Längster einfacher Zyklus als Kanten-Pfad	

b. *(2 Punkte)* (*)
Gib an: Zeichne den größten Teilgraphen (größte Anzahl von Knoten und Kanten) von G, der stark zusammenhängend ist.

c. *(2 Punkte)* (*)
Gib an: Zeichne einen einfachen, bipartiten, ungerichteten Graphen mit 5 Knoten und 6 Kanten.

d. *(3 Punkte)* (**)
Gib an: Wie viele Knotenpfade, in denen kein Knoten doppelt vorkommt, kann es in einem Graphen mit n Knoten maximal geben? Gib eine Berechnungsvorschrift mit Hilfe von $K_{oW}(\cdot,\cdot)$, $K_{mW}(\cdot,\cdot)$, $V_{oW}(\cdot,\cdot)$ oder $V_{mW}(\cdot,\cdot)$ an. Vereinfachen ist nicht nötig.

e. *(8 Punkte)* (***)
Beweise: Beweise, dass ein einfacher, ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten zusammenhängend ist, wenn er mehr als $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Kanten hat.
Hinweis: Induktion ist hier nicht nötig oder zielführend.

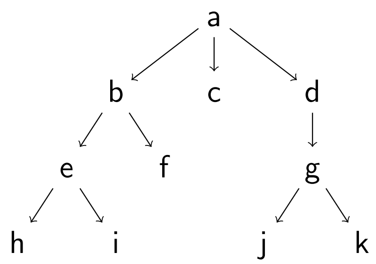
Die Knoten eines nicht zusammenhängenden Graphen lassen sich so in zwei nicht leere Mengen V_1, V_2 partitionieren, dass es keine Kanten zwischen diesen Mengen gibt ($\forall e \in E \,.\, e \subseteq V_1 \vee e \subseteq V_2$).

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \forall k \in [1, (n-1)] \,.\, n^2 + 2k^2 - 2nk - n \leq (n-1)(n-2) \qquad (\triangle)$$

Matrikelnummer: ____________________ *Name:* ____________________

Aufgabe 4: Bäume *(22 Punkte)*

Gegeben sei der Baum *B*:



a. *(6 Punkte)* (*)
Gib an: Die preorder-, inorder- und postorder-Traversierungen für *B*.
Hinweis: Es reicht, das Ergebnis anzugeben.

preorder:

inorder:

postorder:

b. *(6 Punkte)* (*)
Gib explizit an:

i) Alle Geschwisterknoten von f.

ii) Alle Knoten, deren Tiefe größer als die von e ist.

iii) Alle Kinder von Geschwistern von j.

iv) Alle Nachfahren von a, die keine Kinder von a sind.

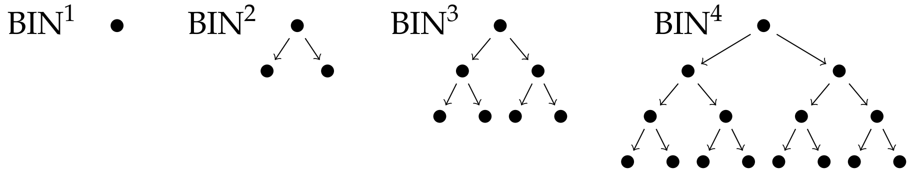
v) Den direkten Unterbaum von *B* mit Wurzel d (in Mengenschreibweise).

c. *(3 Punkte)* (**)
Sei B ein voll m-stelliger Baum mit $k > 1$ Knoten.
Gib explizit an: Wie viele Teilbäume von B gibt es, die keine direkten Unterbäume von B sind.

d. *(7 Punkte)* (***)
Sei $V \triangleq \{\, v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_9,\ v_{10} \,\}$.
Gib explizit an: Eine Formel, die berechnet, wie viele verschiedene voll 3-stellige ungeordnete Bäume es mit der Knotenmenge V gibt.
Begründe **kurz** und **stichpunktartig** den Aufbau der Formel.
Verwende wenn möglich die Prädikate $\mathrm{V_{oW}}(\cdot,\cdot)$, $\mathrm{K_{oW}}(\cdot,\cdot)$, $\mathrm{V_{mW}}(\cdot,\cdot)$ und/oder $\mathrm{K_{mW}}(\cdot,\cdot)$.
Hinweis: Das Ergebnis der Formel muss nicht berechnet werden. Es reicht die Angabe der Formel mit Begründung.

Aufgabe 5: Induktion *(11 Punkte)*

(11 Punkte) (**)
Die Folge der *Binärbäume* $\text{BIN}^1, \text{BIN}^2, \text{BIN}^3, \ldots$ ist definiert als Folge binärer Bäume, so dass in Baum BIN^i alle Blätter die Tiefe $i-1$ haben.



Die Funktion $\text{bin} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ ist definiert durch $\text{bin}(n) \triangleq 2^n$.
Mit $\text{BL}\,(\text{BIN}^n)$ bezeichnen wir die Menge aller Blätter des Binärbaumes BIN^n.
Mit E^n bezeichnen wir die Kantenmenge von BIN^n.

Beweise: $\forall n \in \mathbb{N}^+ \,.\, \#\,(\text{BL}\,(\text{BIN}^n)) = \text{bin}(n-1)$
Hinweis: Die folgenden Lemmata dürfen benutzt werden:

$$E^1 = \emptyset \qquad (\triangle)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \,.\, n \geq 2 \to \#\,(\text{BL}\,(\text{BIN}^n)) = \#\left(\text{BL}\left(\text{BIN}^{n-1}\right)\right) + \#\left(\text{BL}\left(\text{BIN}^{n-1}\right)\right) \qquad (\triangle\triangle)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \,.\, E^n = \emptyset \to \#\,(\text{BL}\,(\text{BIN}^n)) = 1 \qquad (\triangle\triangle\triangle)$$

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :