Methodische und Praktische Grundlagen der Informatik 4

Übungsblatt 10

mpgi4@cg.tu-berlin.de

WiSe 2014/2015

Im folgenden wollen wir *diskrete periodische Signale* als Vektoren des $\mathbb{C}^N$ auffassen. Abweichend von der sonst in der linearen Algebra üblichen Konvention, werden wir die Koeffizienten eines Vektors $z \in \mathbb{C}$ von $0, \dots, N-1$ indizieren und den n-ten Koeffizienten mit $z(n)$ bezeichnen. Analog wird die Indizierung für Matrizen anpasst. Lineare Abbildungen, welche ein Signal in ein anderes Signal überführen werden,. in der Signalverarbeitung auch als *linearere Operatoren* bezeichnet.

1. Translationsinvarianz und Zyklische Matrizen

Eine in der Signalverarbeitung wichtige Eigenschaft von Operatoren ist die Translationsinvarianz (auch bekannt als Verschiebungsinvarianz). Dieser Eigenschaft besagt, dass das Ergebnis eines Operators nicht explizit von der Position (bzw. Zeit) in einem Signal abhängt. Das heißt, wenn ein Signal verschoben wird, so wird das Ergebnis eines translationsinvarianten Operators ebenso verschoben.

Die zyklischen Verschiebung der Elemente des Vektors $z \in \mathbb{C}$ um ein Elemente nach unten,

$$Sz = S \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{N-1} \\ z_0 \\ \vdots \\ z_{N-2} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

heißt *zyklische Translation*. Die zyklische Translation kann mittels der Matrix $S \in \mathbb{C}^{N\times N}$ beschrieben werden, welche den k-ten Einheitsvektor e_k auf den $(k+1) \bmod N$-ten Einheitsvektor abbildet:

$$Se_k = e_{(k+1) \bmod N} \tag{2}$$

Konkret hat die zyklische Translation somit als Matrix folgende Gestalt:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Durch k-faches Anwenden $S^k = \overbrace{S \cdot \ldots \cdot S}^{k-\mathrm{mal}}$ der zyklische Translation erhalten wir die *zyklische Translation um $k \in \mathbb{Z}$*. Negative Potenzen können dabei mittels $S^{-1} = S^{N-1}$ realisiert werden. Für $k \in \mathbb{Z}$ und einen Vektor $z \in \mathbb{C}$ gilt somit:

$$S^k z(m) = z\big((m-k) \bmod N\big) \quad \text{für } m = 0, \dots, N-1 \tag{4}$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ heißt *translationsinvariant*, wenn $SA = AS$. gilt. Wir wollen die Menge der translationsinvarianten Matrizen bestimmen. Sei also A translationsinvariant und bezeichne $\{a_{jk}\}_{0\le j,k\le N-1}$ die Koeffizienten von A. Dann gilt:

$$SAe_n(m) = Ae_n\big((m-1) \bmod N\big) = a_{(m-1) \bmod N, n} \tag{5a}$$

$$ASe_n(m) = Ae_{(n+1) \bmod N}(m) = a_{m,(n+1) \bmod N}\,. \tag{5b}$$

Für die Koeffizienten translationsinvarianter Matrizen folgt somit

$$a_{(m-1) \bmod N, n} = a_{m,(n+1) \bmod N}\,. \tag{6}$$

Quadratische $N \times N$-Matrizen mit dieser Eigenschaft

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{N-1} & \dots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_{N-2} & a_{N-3} & \dots & a_0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

heißen *zyklisch*. Eine Spalte einer zyklischen Matrix ergibt sich aus der vorangegangen Spalte durch zyklisches Verschieben der Elemente nach unten. Analog ergibt sich eine Zeile einer zyklischen Matrix aus der vorangegangenen Zeile durch zyklischen Verschieben der Elemente nach rechts. Wir halten fest:

Satz 1. *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ ist genau dann translationsinvariant, wenn sie zyklisch ist.*

2. Diagonalisierung Zyklischer Matrizen

Sei A eine zyklische Matrix mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$. Die Translation S^k ist für $k = 0, \dots, N_1$ genau dann Eins, wenn die Matrix A den Koeffizienten a_k hat. Jede zyklische Matrix lässt sich somit schreiben als:

$$A = a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2 + \dots + a_{N-1} S^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k S^k = P(S) \tag{8}$$

Dies lässt sich alternativ auch nachrechnen. Für die m-te Zeile und n-te Spalte von $P(S)$ gilt:

$$P(S)e_n(m) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k S^k e_n(m) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \underbrace{e_{(n+k) \bmod N}(m)}_{=\,0 \text{ für } (n+k) \bmod N \neq m} = a_{(m-n) \bmod N} \tag{9}$$

Sei nun $v \in \mathbb{C}^N$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von S. Dann folgt mit (8):

$$Av = \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_j S^k\right) v = \sum_{k=0}^{N-1} a_j S^k v = \sum_{k=0}^{N-1} a_j \lambda^k v = \left(\sum_{j=0}^{N-1} a_k \lambda^k\right) v = P(\lambda) v \tag{10}$$

Eigenvektoren der Translation S sind somit auch Eigenvektoren von A und zwar zum Eigenwert $P(\lambda)$.

Im folgenden wollen wir daher zunächst die Eigenvektoren von S bestimmen. Für das charakteristische Polynom von S ergibt sich mittels des Laplaceschen Entwicklungssatzes für Determinaten:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - S) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda^{N-1}} + (-1)^{N+1}(-1) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}}_{=(-1)^{N-1}} = \lambda^N - 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Die Eigenwerte λ_k von S sind also genau die N-ten Einheitswurzeln:

$$\lambda_k = e^{2\pi i k/N}, \quad k = 0, \dots, N-1\,. \tag{12}$$

Setzen wir $\zeta = e^{2\pi i/N}$, so gilt $\lambda_k = \zeta^k$ und ein normierter Eigenvektor v_k zum Eigenwert λ_k von S ist gegeben durch

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(1, \zeta^k, \zeta^{2k}, \ldots, \zeta^{(N-1)k}\right)^T, \tag{13}$$

wie man durch Nachrechnen leicht verifiziert:

$$Sv_k = \frac{1}{\sqrt{N}} S \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^k \\ \vdots \\ \zeta^{(N-1)k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \zeta^{(N-1)k} \\ 1 \\ \zeta^k \\ \vdots \\ \zeta^{(N-2)k} \end{pmatrix} = \lambda_k v_k \tag{14}$$

Die v_k sind ferner paarweise orthogonal und normiert:

$$\langle v_j, v_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \zeta^{nj} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} \zeta^{nk}} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i n j/N} \overline{e^{2\pi i n k/N}} \tag{15a}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i n j/N} e^{-2\pi i n k/N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i (j-k)/N}\right)^n \tag{15b}$$

Für $j = k$ ergibt sich:

$$\|v_k\|^2 = \langle v_k, v_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^0\right)^n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1 \tag{16}$$

Für $j \neq k$ ist $|j - k| < N$ und daher $z = e^{2\pi i (j-k)/N} \neq 1$. Mittels der Formel für die endliche geometrische Reihe und $z^N = e^{2\pi i (j-k)} = 1$ folgt dann:

$$\langle v_j, v_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1}{N} \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{1}{N} \frac{1 - 1}{1 - z} = 0 \tag{17}$$

Die Eigenwerte λ_k von S sind paarweise verschieden. Somit bilden die Eigenvektoren $v_0, \ldots, v_{N-1}$ eine Basis des $\mathbb{C}^N$, welche sogar eine Orthogonalbasis ist, da die v_k paarweise orthogonal und normiert sind. Weil Eigenvektoren von S auch Eigenvektoren von A sind, heißt dies aber gerade, dass jede zyklische $N \times N$-Matrix bezüglich der Orthogonalbasis $v_0, \ldots, v_{N-1}$ diagonalisierbar ist.

Satz 2. *Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ eine zyklische Matrix. Dann bilden die Vektoren*

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{N-1} \end{pmatrix}, \ldots, \; v_{N-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{N-1} \\ \zeta^{2(N-1)} \\ \vdots \\ \zeta^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \tag{18}$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

3. Diskrete Fouriertransformation

Jeder translationsinvariante lineare Operator ist bezüglich der Orthonormalbasis aus Satz 2 eine Diagonalmatrix. Dieser Basis kommt daher eine besondere Bedeutung zu. Historisch haben sich verschiedene Konventionen hinsichtlich der Normalisierung entwickelt. Im Bereich des wissenschaftlichen Rechnens und der Numerik ist es üblich die *Fourierbasis* folgendermaßen zu definieren:

$$F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i m n/N}, \qquad m, n = 0, \ldots, N-1. \tag{19}$$

Dies entspricht auch der von numpy und MATLAB verwendeten Konvention. Die Fourierbasis ist somit keine Orthonormalbasis. In einigen Formel tritt daher ein Korrekturfaktor $1/N$ auf.

Die *diskrete Fouriertransformation* eines Signales $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als die Transformation, welche das Signal in die Fourierbasis überführt:

$$(\mathcal{F}_N z)(m) = \hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi imn/N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \tag{20}$$

Entsprechend ist die *inverse diskrete Fouriertransformation* eines Signales $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als die Transformation, welche ein Signal von der Fourierbasis in die Standardbasis überführt:

$$(\mathcal{F}_N^{-1} z)(n) = \check{z}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} z(m) e^{2\pi imn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \tag{21}$$

Satz 3. *Seien $z, w \in \mathbb{C}^N$ Signale. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) (Fourier Inversionsformel)

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)\, e^{2\pi imn/N} \tag{22}$$

b) (Parsevalsche Gleichung)

$$\langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{z}(n)\, \overline{\hat{w}(n)} = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle \tag{23}$$

c) (Plancherel Formel)

$$\|z\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{z}|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2 \tag{24}$$

d) (Verschiebung)

$$\widehat{S^k z}(m) = e^{-2\pi mk/N}\, \hat{z}(m) = \omega_N^{mk}\, \hat{z}(m) \tag{25}$$

e) (Spiegelung)

$$w(n) = z(-n \bmod N),\ \hat{w}(m) = \hat{z}(-m \bmod N) \tag{26}$$

f) (Konjugation)

$$\widehat{\overline{z}}(m) = \overline{\hat{z}(-m \bmod N)} \tag{27}$$

Beweis. a) Die Darstellung von z in der Fourierbasis lautet $z = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle\, F_m$. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} z(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle\, F_m(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z(k) \overline{F_m(k)} F_m(n) && \text{(28a)} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z(k) \frac{1}{N} e^{-2\pi imk/N} \frac{1}{N} e^{2\pi imn/N} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi imk/N} && \text{(28b)} \end{aligned}$$

Um b) zu zeigen, entwickeln wir z und w erneut in der Fourierbasis. Unter Verwendung von $\hat{z}(m) = N\langle z, F_m \rangle$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= \left\langle \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle F_m, \sum_{n=0}^{N-1} \langle w, F_n \rangle F_n \right\rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle \left\langle F_m, \sum_{n=0}^{N-1} \langle w, F_n \rangle F_n \right\rangle && \text{(29a)} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\langle w, F_n \rangle} \underbrace{\langle F_m, F_n \rangle}_{=N\delta_{mn}} = N \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle \overline{\langle w, F_m \rangle} && \text{(29b)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) \overline{\hat{w}(m)} = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle && \text{(29c)} \end{aligned}$$

c) Folgt aus b) mittels $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle$ und $\hat{z}(n)\overline{\hat{z}(n)} = |\hat{z}(n)|^2$.

d) Zyklische Verschiebung:

$$\widehat{S^k z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} S^k z(n) e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z\big((n-k) \bmod N\big) e^{-2\pi imn/N} \tag{30a}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi im(n+k)/N} = e^{-2\pi imk/N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi imn/N} = e^{-2\pi mk/N} \hat{z}(m) \tag{30b}$$

e) Spiegelung:

$$\hat{w}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(-n \bmod N) e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{2\pi imn/N} \tag{31a}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i(-m)n/N} = \hat{z}(-m \bmod N) \tag{31b}$$

f) Konjugation:

$$\widehat{\bar{z}}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{z}(n) e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{z(n)} e^{-2\pi imn/N} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{2\pi imn/N}} \tag{32}$$

$$= \overline{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i(-m)n/N}} = \overline{\hat{z}(-m \bmod N)} \qquad \square$$

Da es sich bei der diskreten Fouriertransformation um einen Basiswechsel handelt, lässt sich diese natürlich auch als Matrixmultiplikation ausdrücken. Setzen wir $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$, so ergibt sich:

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \Big(e^{-2\pi i/N}\Big)^{mn} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \omega_N^{mn} \tag{33}$$

Es gilt also $\hat{z} = \Omega_N z$ wobei $\Omega_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$ die sogenannte *DFT-Matrix* bezeichnet:

$$\Omega_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \omega_N^3 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Analog kann die inverse diskrete Fouriertransformation als Matrixtransformation dargestellt werden. Sie ergibt sich als die Inverse von Ω_N. Dabei ist zu beachten, dass Ω_N nur bis auf den Faktor $1/\sqrt{N}$ unitär ist:

$$\Omega_N^{-1} = \frac{1}{N}\Omega_N^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \bar{\omega}_N & \bar{\omega}_N^2 & \bar{\omega}_N^3 & \dots & \bar{\omega}_N^{N-1} \\ 1 & \bar{\omega}_N^2 & \bar{\omega}_N^4 & \bar{\omega}_N^6 & \dots & \bar{\omega}_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \bar{\omega}_N^{N-1} & \bar{\omega}_N^{2(N-1)} & \bar{\omega}_N^{3(N-1)} & \dots & \bar{\omega}_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \tag{35}$$

Die inverse diskrete Fouriertransformation ist dann gegeben durch:

$$\check{z} = \frac{1}{N}\Omega_N^* z \tag{36}$$

Die Aussagen von Satz 3(a)–(b) sind in Matrixform besonderes einfach nachvollziehbar:

$$\check{\hat{z}} = \frac{1}{N}\Omega_N^* \hat{z} = \frac{1}{N}\Omega_N^* \Omega_N z = \frac{1}{N} N I_N z = z \tag{37a}$$

$$\langle \hat{z}, \hat{w} \rangle = \langle \Omega_N z, \Omega_N w \rangle = \left\langle \sqrt{N}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{N}}\,\Omega_N\Big) z, \sqrt{N}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{N}}\,\Omega_N\Big) w \right\rangle \tag{37b}$$

$$= N\Big\langle \tfrac{1}{\sqrt{N}}\,\Omega_N z, \tfrac{1}{\sqrt{N}}\,\Omega_N w \Big\rangle = N\langle z, w\rangle \tag{37c}$$

4. Symmetrien

Ein Signal $z \in C^N$ heißt *gerade*, wenn $z(-n \bmod N) = z(n)$ für alle $n = 0, \dots, N-1$. gilt. Gilt $z(-n \bmod N) = -z(n)$ für alle $n = 0, \dots, N-1$, so heißt ein Signal *ungerade*. Ist $z \in \mathbb{C}^N$ ein beliebiges Signal, so gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$z = z^+ + z^- \tag{38}$$

in einen geraden Anteil und einen ungeraden Anteil:

$$z^+(n) = \frac{z(n) + z(-n \bmod N)}{2} \tag{39}$$

$$z^-(n) = \frac{z(n) - z(-n \bmod N)}{2} \tag{40}$$

Aufgrund der Linearität der Fouriertransformation und Spielungseigenschaft (Satz 3(e)) folgt somit, dass die Fouriertransformierte eines geraden Signals wieder gerade und die eines ungeraden Signals wieder ungerade ist.

Ist $z \in \mathbb{C}^N$ ein reelles Signal, das heißt es gilt $z(n) = \Re(z(n)) \in \mathbb{R}$ für $n = 0, \dots, N-1$, so gilt $z = \bar{z}$. Für die Fouriertransformierten von z und $\bar{z}$ gilt:

$$\hat{z}(m) = \Re(\hat{z})(m) + i\Im(\hat{z}) \tag{41a}$$

$$\hat{\bar{z}}(m) = \overline{\hat{z}(-m \bmod N)} = \Re\big(\hat{z}(-m \bmod N)\big) - i\Im\big(\hat{z}(-m \bmod N)\big) \tag{41b}$$

Für den Real- und Imaginärteil der Fouriertransformierten eines reellen Signals erhalten wir somit:

$$\Re\big(\hat{z}(m)\big) = \Re\big(\hat{z}(-m \bmod N)\big) \tag{42a}$$

$$\Im\big(\hat{z}(m)\big) = -\Im\big(\hat{z}(-m \bmod N)\big) \tag{42b}$$

Die Fouriertransformierte eines reellen Signals hat also einen geraden Realteil und einen ungeraden Imaginärteil. Analog folgt, dass die Fouriertransformierte eines imaginären Signals einen ungeraden Realteil und einen geraden Imaginärteil hat. Dies bedeutet insbesondere, dass für ein gerades reelles Signal der Imaginärteil und für ein ungerades reelles Signal der Realteil verschwindet.

Satz 4. *Zwischen den Eigenschaften eines Signal $z \in \mathbb{C}^N$ und seiner Fouriertransformieren $\hat{z} \in \mathbb{C}^N$ bestehen folgende Zusammenhänge:*

z	$\hat{z}$
gerade	*gerade*
ungerade	*ungerade*
reell	$\Re$ *gerade*, $\Im$ *ungerade*
imaginär	$\Re$ *ungerade*, $\Im$ *gerade*
reell + gerade	*reell + gerade*
reell + ungerade	*imaginär + ungerade*
imaginär + gerade	*imaginär + gerade*
imaginär + ungerade	*reell + ungerade*

5. Faltung

Seien $z, w \in \mathbb{C}^N$ zwei Signale. Dann heißt das Signal $z * w \in \mathbb{C}^N$, welches durch

$$(z * w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z\big((m-n) \bmod N\big) w(n), \quad m = 0, \dots, N-1, \tag{43}$$

definiert ist, die *(zyklische) Faltung* von z und w. Ist $b \in \mathbb{C}^N$ ein Signal, dann bezeichnen wir die Abbildung

$$C_b(z) \colon \begin{cases} \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ z & \mapsto & b * z \end{cases} \tag{44}$$

als die *Faltung mit Integralkern* b.

Satz 5. *Die Faltung $C_b \colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ mit einem Integralkern $b \in \mathbb{C}^N$ ist ein linearer translationsinvarianter Operator. Umgekehrt ist jeder lineare translationsinvariante Operator die Faltung mit einem Integralkern.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Linearität. Seien $z, w \in \mathbb{C}^N$ zwei Signale und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann folgt für $m = 0, \dots, N-1$:

$$C_b(\alpha z + \beta w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} b\big((m-n) \bmod N\big)(\alpha z + \beta w)(n) \tag{45a}$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{N-1} b\big((m-n) \bmod N\big) z(n) + \beta \sum_{n=0}^{N-1} b\big((m-n) \bmod N\big) w(n) \tag{45b}$$

$$= \alpha(b * z)(m) + \beta(b * w)(m) = \alpha C_b(z)(m) + \beta C_b(w)(m) \tag{45c}$$

Betrachten wir nun die Translationsinvarianz:

$$(C_b S^k z)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} b\big((m-n) \bmod N\big)\, S^k z(n) \tag{46a}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} b\big((m-n) \bmod N\big) z\big((n-k) \bmod N\big) \tag{46b}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} b\big((m-k-n) \bmod N\big)\, z(n) \tag{46c}$$

$$= (b * z)(m-k) = C_b z(m-k) = S^k C_b z(m) \tag{46d}$$

Nach Satz 8 reicht es die Umkehrung für zyklische Matrizen zu zeigen. Sei also $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ eine zyklische Matrix mit Koeffizienten $\{a_{mn}\}_{0 \le m,n \le N-1}$ und $b \in \mathbb{C}^N$ die erste Spalte von A. Dann erhalten wir:

$$C_b z(m) = (b * z)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} b\big((m-n) \bmod N\big) z(n) \tag{47a}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} a_{(m-n) \bmod N, 0}\, z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n}\, z(n) = Az(m) \qquad \square$$

Ist A ein translationsinvarianter linearer Operator, dann ist A ein Faltungsoperator C_b mit Integralkern b. Um assoziierten Integralkern zu bestimmten betrachten wir die *Einheitsimpulsfunktion*:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{48}$$

Für diese gilt $z * \delta = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^N$ denn:

$$(z * \delta)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m-n)\delta(n) = z(m) \tag{49}$$

Für den Integralkern b von C_b gilt:

$$b = b * \delta = C_b \delta = A\delta \tag{50}$$

Der Integralkern ist also genau die *Impulsantwort* $A\delta$ von A.

Satz 6 (Faltungssatz)**.** *Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zwei Signale. Dann gilt:*

$$\widehat{z * w} = \hat{z} \cdot \hat{w} \tag{51}$$

Beweis.

$$\widehat{z * w} = \sum_{n=0}^{N-1} (z * w)(n) e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} z\big((n-k) \bmod N\big) w(k) \right] e^{-2\pi imn/N} \tag{52a}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} z\big((n-k) \bmod N\big) e^{-2\pi im(n-k)/N} \right] w(k) e^{-2\pi imk/N} \tag{52b}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi imn/N} \right] w(k) e^{-2\pi imk/N} \tag{52c}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \hat{z}(m) w(k) e^{-2\pi imk/N} = \hat{z}(m)\hat{w}(m)$$

□

6. Beispiele

Impuls (Abbildung 1).

Sinus und Kosinus (Abbildung 2).

Kosinus mit Phasenverschiebung Wir wollen die Fouriertransformierte des Signals

$$z(n) = \cos(2\pi n/N + \varphi) = \frac{e^{2\pi in/N+\varphi} + e^{-2\pi in/N+\varphi}}{2}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ bestimmen (Abbildung 3). Dazu zerlegen wir z zunächst in seinen geraden und ungeraden Anteil:

$$\begin{aligned}
z^+(n) &= \frac{z(n) + z(-n \bmod N)}{2} \\
&= \frac{1}{4}\Big(e^{2\pi in/N+i\varphi} + e^{-2\pi in/N-i\varphi} + e^{-2\pi in/N+i\varphi} + e^{2\pi in/N-i\varphi}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(e^{2\pi in/N} + e^{-2\pi in/N}\Big)\Big(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\Big) = \cos(2\pi n/N)\cos(\varphi) \\
z^-(n) &= \frac{z(n) - z(-n \bmod N)}{2} \\
&= \frac{1}{4}\Big(e^{2\pi in/N+i\varphi} + e^{-2\pi in/N-i\varphi} - e^{-2\pi in/N+i\varphi} - e^{2\pi in/N-i\varphi}\Big) \\
&= \frac{i^2}{(2i)^2}\Big(e^{2\pi in/N} - e^{-2\pi in/N}\Big)\Big(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\Big) = \sin(2\pi n/N)\sin(\varphi)
\end{aligned}$$

Das Signal $z(n) = \cos(2\pi n/N + \varphi)$ hat somit die Darstellung:

$$z(n) = \cos(2\pi n/N)\cos(\varphi) + \sin(2\pi n/N)\sin(\varphi)$$

Für die Fouriertransformierte $\hat{z}$ folgt somit:

$$\hat{z}(m) = \begin{cases} \frac{N}{2}\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big) & m = 1 \\ \frac{N}{2}\big(\cos\varphi - i\sin\varphi\big) & m = N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

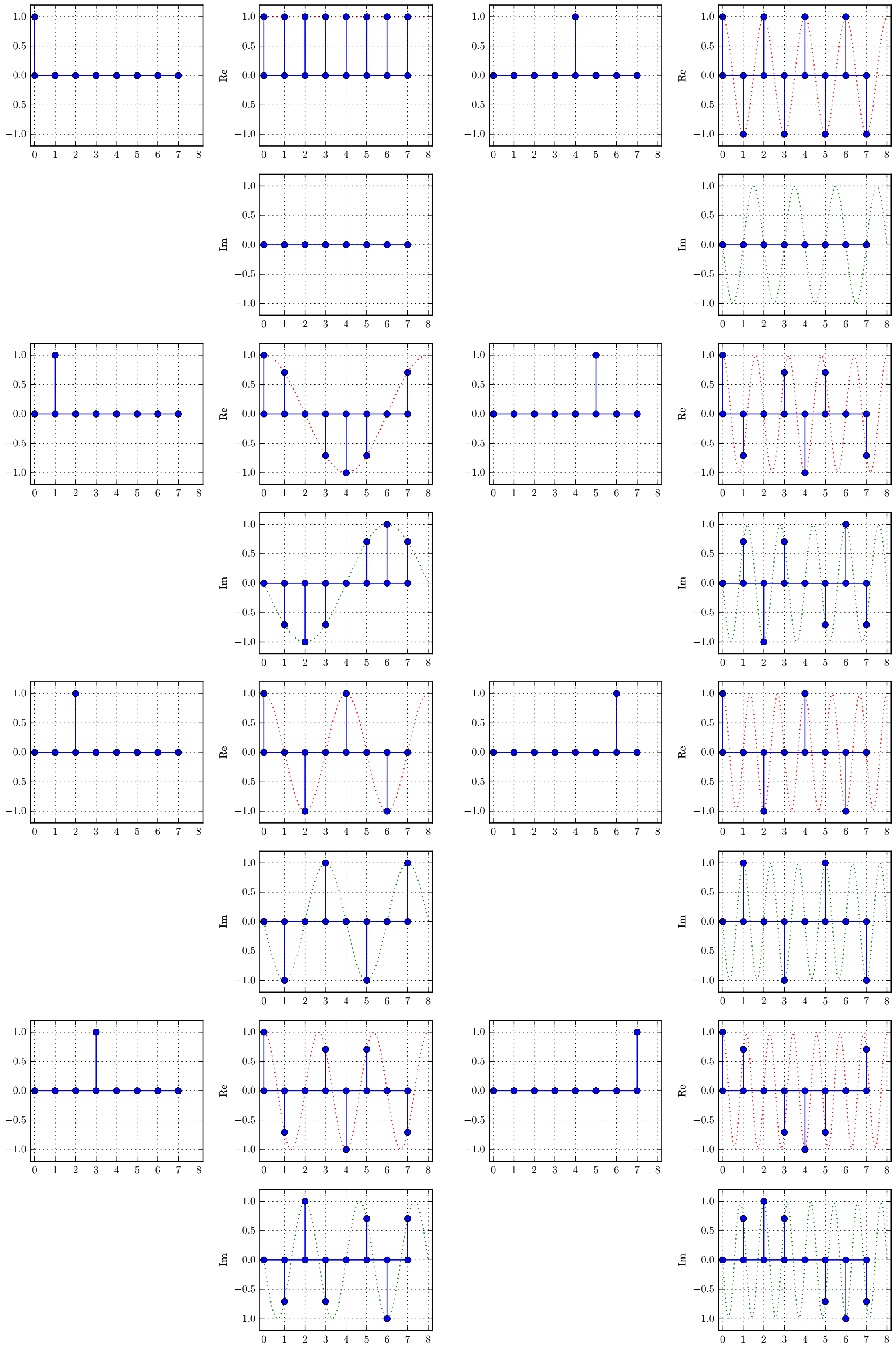

Abbildung 1: *Plots der Impulsfunktionen für $N = 8$ und seiner Fouriertransformierten.*

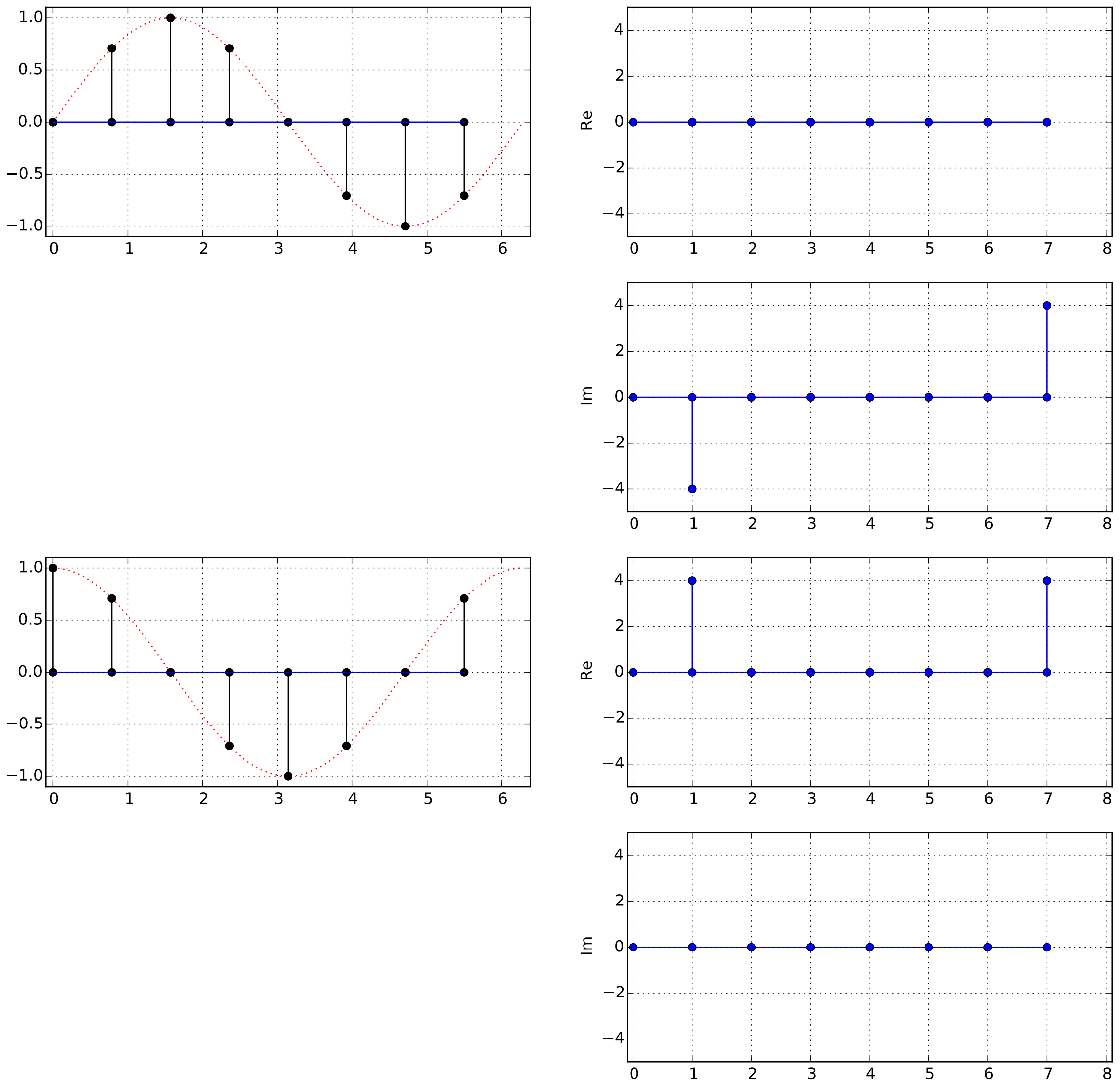

Abbildung 2: *Plot von Sinus und Cosinus für $N = 8$ und seiner Fouriertransformierten.*

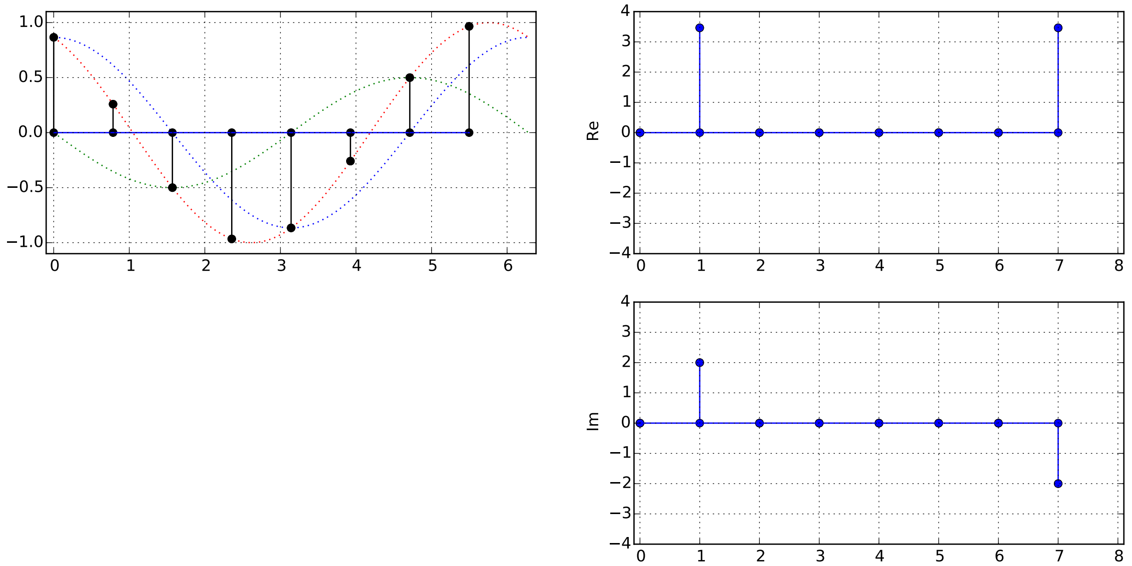

Abbildung 3: *Plot von $z(n) = \cos(2\pi n/N + \varphi)$ für $N = 8$ (rechts) und seiner Fouriertransformierten (links).*