Strukturelle Induktion

Beweismethode für Aussagen über induktiv definierte Objekte
Die vollständige Induktion (Induktion für Aussagen über natürlichen Zahlen) ist ein Spezialfall der strukturellen Induktion.

Beispiel 1

Gegeben sei ein endliches Alphabet A. A^* sei die Menge aller (endlichen) Wörter über A. $rev(w)$ eines Wortes w sei das umgekehrt aufgeschriebene Wort, z.B. $rev(informatik) = kitamrofni$.

Wir geben folgende induktive Definition an:

Definition: [induktiv]

a) $rev(e) = e$ (**e ist das leere Wort, also ein Wort, das keinen Buchstaben hat)**

b) $rev(w \cdot a) = a \cdot rev(w)$ **für** $w \in A^*$ **und** $a \in A$ **($\cdot$ soll die Verknüpfung zweier Wörter bzw. Buchstaben sein)**

Satz: Es gilt $rev(u \cdot v) = rev(v) \cdot rev(u)$ **für beliebige Wörter** $u, v \in A^*$**.**

Beweis durch strukturelle Induktion über die Struktur von v**:**

IA: für $v = e$**:**
$rev(u \cdot e) = rev(u) = e \cdot rev(u) = rev(e) \cdot rev(u)$ **(nach Def.** rev**, Teil 1)**

IV: für ein $v \in A^*$ **gelte:** $rev(u \cdot v) = rev(v) \cdot rev(u)$

IB: für $v \cdot a$ **(mit** $v \in A^*, a \in A$**) behaupten wir:**
$rev(u \cdot (v \cdot a)) = rev(v \cdot a) \cdot rev(u)$ **Induktionsschluss:**
$rev(u \cdot (v \cdot a))$
$= rev((u \cdot v) \cdot a)$ **(Verknüpfung ist assoziativ)**
$= a \cdot rev(u \cdot v)$ **(Definition** rev**, 2. Teil)**
$= a \cdot (rev(v) \cdot rev(u))$ **nach Induktionsvoraussetzung**
$= (a \cdot rev(v)) \cdot rev(u)$ **(Verknüpfung ist assoziativ)** $= rev(v \cdot a) \cdot rev(u)$ **(Definition** rev**, 2. Teil)**

Beispiel 2

Definition 1.1: [induktiv] aus der Vorlesung
Die Menge AL(P) aller (aussagenlogischen) Formeln mit Aussagenvariablen aus der Menge P ist definiert durch:

a) **Alle Aussagenvariablen** $p \in P$ **sind Formeln.** ($P \subseteq \mathbf{AL}(P)$)

b) **t und f sind Formeln.**

c) **Sind** $*$ **ein einstelliger Junktor und** φ **eine Formel, dann ist auch** $*\varphi$ **eine Formel.**

d) **Sind** $*$ **ein zweistelliger Junktor und** φ **und** ψ **Formeln, dann ist auch** $\varphi * \psi$ **eine Formel.**

(1. und 2. Induktionsanfang, 3. und 4. Induktionsschluss)

Beweisen Sie Satz 1.3 aus der Vorlesung durch strukturelle Induktion.

Satz 1.3 (Ersetzbarkeitstheorem):
Für drei Formeln $\varphi, \psi, \eta \in \mathbf{AL}(P)$, wobei $\psi \equiv \eta$ und ψ eine Teilformel von φ ist, gilt:
$\varphi \equiv \varphi'$, wobei φ' entsteht, wenn in φ ein Vorkommen von ψ durch η ersetzt wird.

Beweis:

Induktion über Struktur von Formel φ

IA: φ **atomare Formel, d.h.** $\varphi \in P$**:**
$\Rightarrow \psi = \varphi$, **also auch** $\psi \in P$
Wegen $\psi \equiv \eta$ **und** $\psi \in P$ **ist** $\psi = \eta$.
$\Rightarrow \varphi = \psi = \eta = \varphi'$, **also gilt** $\varphi \equiv \varphi'$.

IV 1: $\varphi_1 \equiv \varphi_1'$, **wobei** φ_1' **aus** φ_1 **durch Ersetzung von** ψ **durch** η **entsteht.**

IV 2: $\varphi_2 \equiv \varphi_2'$, **wobei** φ_2' **aus** φ_2 **durch Ersetzung von** ψ **durch** η **entsteht.**

IBeh.: $\varphi \equiv \varphi'$, **wobei** φ' **aus** φ **durch Ersetzung von** ψ **durch** η **entsteht und**

1. **Fall** $\varphi = \neg\varphi_1$
2. **Fall** $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$, **wobei** $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Induktionsschluss:

1. Fall $\varphi = \neg\varphi_1$**:**
Nach IV 1 ist $\varphi_1 \equiv \varphi_1'$, **wobei** φ_1' **aus** φ_1 **durch Ersetzung von** ψ **durch** η **entsteht.**
Nach semantischer Definition von $\neg$ **folgt:** $\neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_1'$.
Wegen 1. Fall ($\varphi = \neg\varphi_1$) **und** $\varphi' = \neg\varphi_1'$ **folgt** $\varphi = \neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_1' = \varphi'$, **also** $\varphi \equiv \varphi'$

2. Fall $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$, **wobei** $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$**:**
Fall 2.1: ψ **kommt in** φ_1 **vor:**
Nach IV 1 ist $\varphi_1 \equiv \varphi_1'$,**wobei** φ_1' **aus** φ_1 **durch Ersetzung von** ψ **durch** η **entsteht. Mit semantischer Definition von** $*$ **ist dann** $\varphi \equiv (\varphi_1' * \varphi_2) = \varphi'$, **also** $\varphi \equiv \varphi'$

Fall 2.2: ψ **kommt in** φ_2 **vor (analog zu Fall 2.1)**

Weitere Beispiele für Strukturen, die induktiv definiert werden können: Bäume, Listen (werden später in der Informatik behandelt, wichtig)

Mail: `{winter}@informatik.uni-halle.de`
weitere Infos zur Vorlesung unter
`http:http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/THEOlehre/THEOaktuell.html`