Informatik-Propädeutikum

Dozentin: Dr. Claudia Ermel

Betreuer: Sepp Hartung, André Nichterlein, Clemens Hoffmann
Sekretariat: Christlinde Thielcke (TEL 509b)

TU Berlin
Institut für Softwaretechnik und Theoretische Informatik
Prof. Niedermeier
Fachgruppe Algorithmik und Komplexitätstheorie
`http://www.akt.tu-berlin.de`

Wintersemester 2013/2014

Gliederung

7. Fairness
   - Was bedeutet gerechte Verteilung von Ressourcen an Agenten?
   - Aufteilung unteilbarer Ressourcen
     - Scheidungsformel („Adjusted Winner Procedure“)
   - Aufteilung teilbarer Ressourcen
   - Kuchenschneiden (Cake-Cutting-Protokolle)
     - Steinhaus-Protokoll
     - Banach-Knaster-Protokoll („Last Diminisher“)
     - Selfridge-Conway-Protokoll
   - In der Backstube – Weihnachtsrätsel

Gerechtigkeit (?!)

Oft konkurrieren mehrere „Agenten“ (Personen, Spieler, Prozesse, ...) um die gleichen Ressourcen (vgl. z.B. Scheduling-Beispiele).

Wie erreicht man eine faire Ressourcenverteilung?
Was heißt überhaupt fair?
Welche entsprechenden „Verteilungsprotokolle“ sind nützlich?
Wie beugt man Manipulationen und Betrügereien vor?

Dies sind zentrale Fragen in vielen Kontexten, die in der Informatik insbesondere zum Entwurf und der Analyse entsprechender **Protokolle** (z.B. im Internet) führen.

Nachfolgend zwei Aspekte näher beleuchtet:
Gerechte Aufteilung...

- ...unteilbarer Ressourcen ($\rightsquigarrow$ Scheidungsformel, ...) und
- ...teilbarer Ressourcen ($\rightsquigarrow$ Cake Cutting, ...).

Was ist gerecht?

Wikipedia: Der Begriff der Gerechtigkeit bezeichnet einen idealen Zustand des sozialen Miteinanders, in dem es einen angemessenen, unparteilichen und einforderbaren Ausgleich der Interessen und der Verteilung von Gütern und Chancen zwischen den beteiligten Personen oder Gruppen gibt.

„Im Sinne einer gerechten Auslese lautet die Prüfungsaufgabe für Sie alle gleich: Klettern Sie auf den Baum!"

Fairness in der Informatik

In der Informatik spielen Konzepte der Fairness (und sie realisierende Protokolle und Algorithmen) eine gewichtige Rolle in Gebieten wie

- Scheduling (z.B. Rechnerkapazitäten),
- Betriebssysteme,
- verteilte Systeme,
- Computernetze,
- Algorithmische Spieltheorie,
- Computational Social Choice.

Aufteilung unteilbarer Ressourcen

Ausgangslage: Mehrere unteilbare Ressourcen sind zu verteilen.

Unteilbar sind die Ressourcen dabei in zweierlei Hinsicht:

- Keine Ressource kann in kleinere Teilstücke zerlegt werden („indivisible") und
- Keine Ressource kann mehr als einem Agenten zugeordnet werden – verschiedene Agenten können also nicht dieselbe Ressource gemeinsam nutzen („nonshareable").

Beispiel: Gemeinsames Haustier nach Scheidung muss einem Partner zur alleinigen „Nutzung" zugeteilt werden.

Aufteilung einzelner Güter bei Scheidung

Beispiel: Ein Paar trennt sich... Streit um die folgend… Dinge, die gemeinsam angeschafft wurden:

- ein Auto,
- eine kostbar…
- sieben … …stücke.

Wie teilt man die Dinge gerecht auf?



Scheidungsformel („Adjusted Winner Procedure“) I

Brams und Taylor (1996):

- Zunächst verkünden beide Parteien ihre jeweilige subjektive Bewertung der aufzuteilenden Objekte, wobei beide jeweils insgesamt 100 Punkte auf diese Objekte verteilen dürfen.

Anzahl	Objekt	Partei 1	Partei 2
1	Auto	10	9
1	Buddha	13	28
7	Gartenzwerg	77	63
Insgesamt		87	28

- Zuerst geht jedes Objekt an die Partei, der es mehr wert ist.
- Die aktuelle Gewinnerin Partei 1 muss so viele ihrer Objekte an Partei 2 abgeben, bis ein Ausgleich erzielt wird. Betrachte dazu die Verhältnisse der jeweiligen Bewertungen (≥ 1), nach Größe sortiert:

Objekt	Auto	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Buddha
Verhältnis	$10/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$28/13$

Scheidungsformel („Adjusted Winner Procedure“) II

Subjektive Bewertung der aufzuteilenden Objekte:

Anzahl	Objekt	Partei 1	Partei 2
1	Auto	10	9
1	Buddha	13	28
7	Gartenzwerg	77	63
Bekommt		55	55

Verhältnis der Bewertungen der beiden Parteien

Objekt	Auto	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Zwerg	Buddha
Verhältnis	$10/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$11/9$	$28/13$

- Partei 1 gibt der Reihe nach Objekte dieser Liste an Partei 2 bis Ausgleich erreicht wird.
- Auto , Zwerg , Zwerg.
- Beide Parteien haben nun 55 Punkte.

Scheidungsformel („Adjusted Winner Procedure“) III

Eigenschaften Scheidungsformel:
Diese Methode hat eine Reihe von Vorzügen. Zum Beispiel ist die durch sie erzielte Aufteilung

- **pareto-optimal**, d.h. jede Zuweisung der Objekte, die eine der beiden Parteien besser stellt, würde die andere schlechter stellen;
- **gleichverteilt**, d.h. beide Parteien bewerten die ihnen zugeteilten Objekte insgesamt gleich, und
- **neidfrei**, d.h. keine der beiden Parteien würde die ihr zugeteilten Objekte mit denen der anderen tauschen wollen.

Nichttrivialer Beweis!
Problem: Zuweisung der Objekte nicht immer ganz gleichmäßig möglich!

Aufteilung teilbarer Ressourcen

Ausgangslage: Eine teilbare Ressource (z.B. Kuchen) ist zwischen n Personen gerecht aufzuteilen, wobei jede Person potenziell eine andere Bewertungsfunktion hat.
Der Kuchen als Symbol für eine beliebig teilbare Ressource kann als reelles Zahlenintervall $[0, 1]$ repräsentiert werden,

Ziel: Teile Kuchen X durch Schnitte in n Portionen X_i, $1 \leq i \leq n$, sodass die i-te Person Portion X_i erhält.

Nebenbedingungen: Die Vorlieben der Personen werden durch jeweils „privates“ Maß, d.h. eine individuelle Bewertungsfunktion ausgedrückt und fließen mit ein – es geht **nicht** um objektive Gerechtigkeit.

Zwei wünschenswerte **Fairnessbedingungen**:

1. **Proportional:** Jede Person findet, dass sie mindestens $1/n$ des Kuchens bekommen hat.
2. **Neidfrei:** Keine Person findet das Stück einer anderen Person (echt) besser als ihr eigenes.

Teilbare Ressourcen: $[0, 1]$ oder...

Cake Cutting-Protokolle

Problem: Unterschiedliche Präferenzen der einzelnen Personen.
(Bei homogenen Präferenzen (alle gleich) ist das Problem trivial.)

Beispiel Kuchen: Lieber mehr Sahne oder (k)eine Kirsche oder...?

Kann man es trotzdem allen recht machen?

Ein einfaches Protokoll für zwei Personen: **Cut-and-Choose**:
Eine Person schneidet, die andere wählt eines der beiden Stücke.

Dieses Protokoll ist proportional (jede Person findet, dass sie mindestens $1/n$ des Kuchens bekommen hat) und es ist neidfrei.

Bemerkung: Im Falle von nur zwei Personen sind Proportionalität und Neidfreiheit äquivalente Begriffe; ab drei Personen gilt dies nicht mehr, sondern nur noch, dass Neidfreiheit Proportionalität impliziert.

Steinhaus-Protokoll

Das Steinhaus-Protokoll für drei Personen (Anton, Bert, Conrad):

1. Anton schneidet den Kuchen in drei Stücke (die er als gleich einschätzt).
2. Bert „setzt aus“ (falls seiner Meinung nach mind. zwei Stücke $\geq 1/3$ sind) oder markiert zwei Stücke als „schlecht“.
   Falls Bert ausgesetzt hat: Conrad, Bert, Anton wählen je ein Stück (in dieser Reihenfolge). Fertig.
3. Falls Bert nicht ausgesetzt hat: Conrad setzt aus oder markiert.
   Falls Conrad ausgesetzt hat: Bert, Conrad, Anton wählen je ein Stück (in dieser Reihenfolge). Fertig.
4. Falls weder Bert noch Conrad ausgesetzt hat: Anton nimmt ein Stück, das von Bert und Conrad als „schlecht“ markiert wurde.

   Der Rest wird zusammengeworfen, dann Cut-and-Choose. Fertig.

Steinhaus-Protokoll II

Anton schneidet

Bert setzt aus, weil er mind. 2 Teile für fair hält.

Conrad, Bert und Anton greifen in dieser Reihenfolge zu.

- → Conrad ist zufrieden, weil er als Erster wählen darf.
- → Bert ist zufrieden, weil er mind. 2 Stücke für fair hält und mind. noch eins davon übrig ist.
- → Anton ist zufrieden, weil er geschnitten hat und davon ausgeht, dass alle drei Stücke gleich groß sind.

Bert kennzeichnet 2 Teile als schlecht.

S S

Conrad setzt aus, weil er mind. 2 Stücke für fair hält

Bert, Conrad und Anton greifen in dieser Reihenfolge zu.

Conrad kennzeichnet 2 Teile als schlecht.

S S

Anton nimmt ein doppelt gekennz. Stück. Die anderen beiden Stücke werden vereinigt und mit *Cut & Choose* auf Bert und Conrad verteilt.

Steinhaus-Protokoll III

Eigenschaften vom Steinhaus-Protokoll für drei Personen:

- nicht immer zusammenhängende Stücke
- es ist kein aktiver Schiedsrichter nötig
- proportional
- nicht neidfrei

Das heißt, es gibt Fälle, in denen eine Person glaubt, sie habe einen fairen Anteil erhalten, aber eine andere Person sei besser behandelt worden.

Beispiel: Wenn Bert die Stücke als $1/2$, $1/3$ und $1/6$ des gesamten Kuchens einschätzt, könnte in seinen Augen Conrad (der zuerst wählen darf) das $1/2$-große Stück bekommen, während er selbst nur $1/3$ bekommt.

Banach-Knaster-Protokoll

Banach-Knaster Last-Diminisher-Protokoll für n Personen:

1. Person 1 schneidet ein Stück ab (das ihrer Meinung nach $1/n$ entspricht).
2. Dieses Stück wird nun weitergereicht. Jede Person lässt es entweder weitergehen (wenn sie es zu klein findet) oder verkleinert es weiter (so dass es danach ihrer Meinung nach $1/n$ entspricht).
3. Wenn das Stück einmal bei allen Personen war, muss die Person, die als letzte etwas abgeschnitten hat ("last diminisher") es nehmen.
4. Der Rest des Kuchens (zusammen mit den abgeschnittenen Teilen) wird unter den restlichen $n-1$ Personen verteilt wie eben (rekursiv).

   Cut-and-Choose sobald $n = 2$.

Banach-Knaster-Protokoll II: Beispiel für $n = 4$

Anton schneidet faires Stück (¼) ab

Bert findet Antons Stück fair und setzt aus.

Bert findet Antons Stück zu groß und macht es nach seiner Auffassung fair, indem er es verkleinert.

Conrad hat ausgesetzt, weil er Stück für fair hält.

Detlef hält das Stück ebenfalls für fair und setzt aus.

Das Stück geht an denjenigen, der das Stück als letzter beschnitten hat, im Beispiel also an Bert.

Hätten alle Personen nach Anton das Stück nicht beschnitten, wäre es an Anton gegangen.

Banach-Knaster-Protokoll III

Eigenschaften vom Banach-Knaster-Protokoll:

- nicht immer zusammenhängende Stücke $\longrightarrow$ Verbesserung möglich!
- es ist kein aktiver Schiedsrichter nötig
- proportional
- nicht neidfrei

Variante mit aktivem Schiedsrichter: **Dubins-Spanier-Protokoll**

Ein Schiedsrichter bewegt ein Messer langsam von links nach rechts über den Kuchen. Jeder Spieler darf jederzeit „cut!“ rufen. Wer dies macht, bekommt das Stück, das links vom Messer liegt. Wurde ein Stück weggeschnitten, so geht es mit den restlichen $n-1$ Spielern weiter, bis nur einer bleibt (der den Rest bekommt).

$\longrightarrow$ zusammenhängende Stücke!

Selfridge-Conway-Protokoll

für drei Personen (Anton, Bert, Conrad):

1. Anton schneidet den Kuchen in drei Stücke (die seiner Meinung nach gleichwertig sind).
2. Bert „passt“ (falls er denkt, dass die beiden für ihn größten Stücke gleichwertig sind) oder verkleinert ein Stück (so dass danach die beiden für ihn größten Stücke gleichwertig sind).
   Falls Bert gepasst hat: Conrad, Bert, Anton wählen je ein Stück (in dieser Reihenfolge). Fertig.
3. Falls Bert verkleinert hat: Conrad, Bert, Anton wählen je ein Stück (in dieser Reihenfolge), aber Bert muss das verkleinerte nehmen (es sei denn, Conrad hat es schon genommen).
   Das abgeschnittene Stück bleibt erst einmal liegen.
4. Verteile das abgeschnittene Stück: Schneiden muss die Person (Bert oder Conrad), die das *un*gekürzte Stück bekommen hat. Dann wird ausgesucht in der Reihenfolge: Nicht-Schneider, Anton, Schneider. Fertig.

Selfridge-Conway-Protokoll II

Anton schneidet den Kuchen in 3 (faire) Teile

Bert setzt aus, weil er glaubt, dass mind. 2 Stücke gleich groß und nicht kleiner als das 3. seien.

Bert beschneidet das größte Stück so, dass mind. 2 Stücke gleich groß und nicht kleiner als das 3. seien. (Der Rest kommt zur Seite.)

Conrad, Bert und Anton greifen zu.

→ Conrad darf als Erster wählen.

→ Bert nimmt das 2. Stück, was er aber für genauso groß hält.

→ Anton nimmt das übrige Stück und ist zufrieden, da er alle drei Stücke für gleich groß hält.

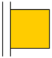
Conrad, Bert und Anton greifen zu.

→ Conrad darf als Erster wählen.

→ Bert muss das von ihm gekürzte Stück nehmen oder das andere, was er aber für genauso groß hält.

→ Anton nimmt das übrige Stück und ist zufrieden, da er sein Stück für eines der größten Stücke hält.

Verteilung des Rests: Die Person, die nicht das beschnittene Stück aus der Vorrunde genommen hat (also entweder Bert oder Conrad), muss schneiden; Nicht-Schneider, Anton, Schneider greifen in dieser Reihenfolge zu.



Selfridge-Conway-Protokoll III

Eigenschaften:

- proportional, aber nur auf 3 Personen anwendbar
- **neidfrei!**:
  - Der Nicht-Schneider wählt zuerst und kann daher nicht neidisch sein.
  - Anton ist wegen seines uneinholbaren Vorsprungs nicht neidisch auf den Nicht-Schneider (der das beschnittene Stück bekommen hatte). Da Anton vor dem Schneider wählen darf, sieht er sich auch diesem gegenüber im Vorteil.
  - Der Schneider kann auch nicht neidisch sein, da er den Rest aufgeteilt hat.
- kein Schiedsrichter nötig
- nicht immer zusammenhängende Stücke

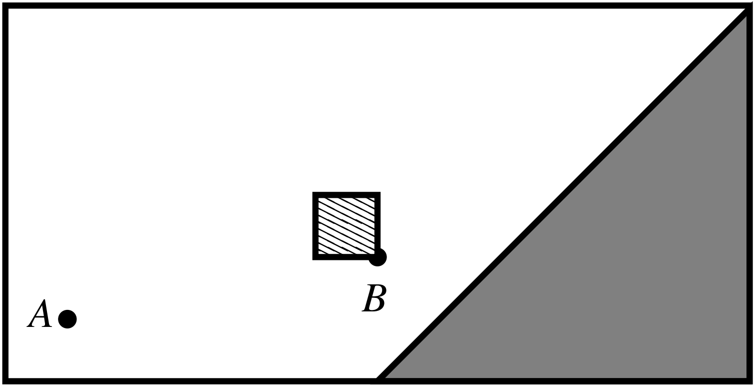
Frohe Weihnachten!

Fast...

In der Backstube – Weihnachtsrätsel

Der Weihnachtsmann betreibt unzählige Backstuben. In der Backstube mit der Nummer 182-B72 werden Lebkuchen mit Schokolade überzogen. Die Backstube ist rechteckig und 24m lang und 12m breit; sie liegt tief unter der Erde und kann nur mit dem Lift erreicht werden. Der quadratische Liftschacht hat Seitenlänge 2m, und seine nordöstliche Ecke liegt genau in der Mitte des Raumes; in der folgenden Skizze sehen wir den Liftschacht als kleines schraffiertes Quadrat im Grundriss der Backstube eingezeichnet. In der südöstlichen Ecke des Raumes befindet sich ein riesiges dreieckiges Becken mit flüssiger Schokoladeglasur; Südseite und Ostseite des Beckens sind jeweils 12m lang. Der Punkt A ist 2m von der Südseite und 2m von der Westseite der Backstube entfernt. Der Punkt B ist 4m von der Südseite und 12m von der Westseite der Backstube entfernt (und fällt daher mit der Südostecke des Liftschachts zusammen). An den Wänden der Backstube befinden sich viele Reihen von Regalen, die mit Lebkuchen gefüllt sind.

In der Backstube – Weihnachtsrätsel



In der Backstube – Weihnachtsrätsel

Der Backwichtel Bastian steht im Punkt A der Backstube und liest sich seinen heutigen Arbeitsplan durch. Bastian hat der Reihe nach folgende Aufgaben zu erledigen:

- Zuerst muss Bastian zur Nordseite gehen und sich irgendeinen der Lebkuchen von irgendeinem der oberen Regale nehmen.
- Bastian muss diesen Lebkuchen zum Becken tragen und in die Glasur tauchen.
- Dann muss Bastian den Lebkuchen wieder zur Nordseite tragen und ihn dort an einer beliebigen Stelle in einem beliebigen der unteren Regale ablegen.
- Danach muss Bastian zur Westseite gehen und irgendeinen der dortigen Lebkuchen nehmen.
- Dieser Lebkuchen soll zur Südseite getragen und dort an einer beliebigen Stelle in einem beliebigen Regal abgelegt werden.
- Schliesslich soll Bastian zum Punkt B gehen und in den Lift einsteigen.

In der Backstube – Weihnachtsrätsel

Bastian erledigt seine Aufgaben und geht dabei den kürzest möglichen Weg von A (über Nordseite, Becken, Nordseite, Westseite, Südseite) nach B. Wir nehmen an, dass Bastian punktförmig ist und dass er auf seinem Weg weder durch den Liftschacht hindurchläuft noch ins Schokoladebecken springt.

Wie lang ist der kürzest mögliche Weg?

1. $59,60$m oder weniger
2. zwischen $59,60$ und $59,70$ Meter
3. zwischen $59,70$ und $59,80$ Meter
4. zwischen $59,80$ und $59,90$ Meter
5. zwischen $59,90$ und $60,00$ Meter
6. zwischen $60,00$ und $60,10$ Meter
7. zwischen $60,10$ und $60,20$ Meter
8. zwischen $60,20$ und $60,30$ Meter
9. zwischen $60,30$ und $60,40$ Meter
10. $60,40$m oder mehr

In der Backstube – Weihnachtsrätsel