Aufgaben zur Vorlesung **SoSe 2015**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Niedermeier/Chen/Froese **16.04.2015**

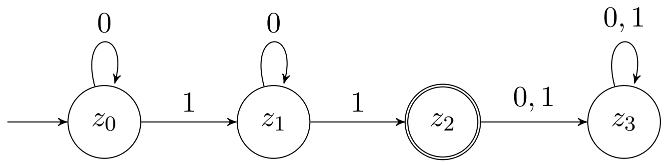
1. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 20.04.2015-24.04.2015)

Die Lösung für die freiwilligen (Haus)aufgaben ist in der Woche vom 27.04.2015-30.04.2015 abzugeben. Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen!

Aufgabe 1. Konstruktion endlicher Automaten

Gegeben sei der DFA $M = (Z, \{0,1\}, \delta, z_0, E)$, mit $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ und $E = \{z_2\}$, und die Überführungsfunktion sei durch die folgende Abbildung gegeben:



1. Geben Sie die vom Automaten akzeptierte Sprache $T(M)$ an (ohne Begründung).
2. Konstruieren Sie einen DFA für die Sprache $(T(M))^*$.
3. Beschreiben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus in Pseudocode, welcher das Wortproblem für die Sprache $T(M)$, (d.h. gegeben ein Wort $x \in \{0,1\}^*$, ist $x \in T(M)$?) löst und erläutern Sie skizzenhaft dessen Funktionsweise.

Aufgabe 2. Kellerautomaten

Beschreiben Sie für jede der folgenden Sprachen jeweils die Funktionsweise eines (nichtdeterministischen) Kellerautomaten, der die Sprache akzeptiert.

1. $L_1 = \{a^i b^j \mid i > j \geq 0 \text{ oder } j > i \geq 0\}$.
2. $L_2 = \{a^i b^{\lfloor i/2 \rfloor} \mid i \geq 1\}$.
3. $L_3 = \{a^i b^j c^k d^l \mid 2(i+j) > k + l \wedge i, j, k, l \geq 1\}$.

Aufgabe 3. Landwirtschaftsrätsel

Ein Bauer möchte einen Silberfuchs, eine Gans und einen Kohlkopf auf dem Markt in der nächsten Stadt verkaufen. Um zum Marktplatz zu gelangen, muss er allerdings einen Fluss überqueren. Am Ufer liegt zwar ein Boot vertäut, das aber den Nachteil aufweist, dass neben der Person, die das Boot rudert, nur noch ein leichterer Gegenstand mitgenommen werden kann, da sonst das Boot untergeht. So ist es dem Bauer nicht möglich, den Fuchs, die Gans und den Kohl auf einmal mitzunehmen, sondern nur jeweils eines davon. Dabei muss er allerdings noch beachten, dass er den Fuchs und die Gans nie alleine auf einer Seite zurücklässt, da sonst der Fuchs die Gans fressen würde. Aus dem gleichen Grund darf er auch die Gans und den Kohlkopf nicht alleine zurücklassen. Da der Bauer daran interessiert ist, alles unversehrt ans andere Ufer zu bringen, muss er einen Weg suchen, wie dies möglich ist.
Setzen Sie dieses Problem in eine Darstellung durch endliche Automaten um, wobei die „Eingaben" die durchgeführten Aktionen sind (Symbol b: Bauer überquert alleine den Fluss; Symbol f: Bauer überquert zusammen mit dem Fuchs den Fluss; Symbol g: Bauer überquert

mit der Gans den Fluss; Symbol k: Bauer überquert mit dem Kohlkopf den Fluss). Lösen Sie daraufhin dieses Problem der Landwirtschaft unter Benutzung des Automaten.

Aufgabe 4. Rekursion (Propädeutikum Klausuraufgabe WS14/15)

Eine Variante der Ackermann-Funktion f sei wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} f(k,1) &= 3, \\ f(1,n) &= n+3 \text{ für } n>1, \\ f(k,n) &= f(k-1, f(k,n-1)) \text{ für } k,n>1. \end{aligned}$$

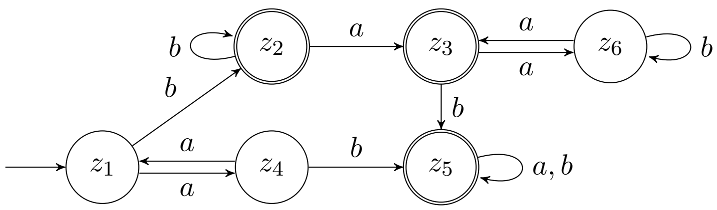
Welcher der beiden Werte ist größer: $f(10,12)$ oder $f(12,10)$?
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für $a,b>2$ folgendes gilt:

$$f(a,b) > a+b \text{ und } f(a,b+1) > f(a,b).$$

Hausaufgaben

Aufgabe 5. Konstruktion endlicher Automaten

Gegeben sei der DFA $M = (Z, \{a,b\}, \delta, z_1, E)$, mit $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ und $E = \{z_2, z_3, z_5\}$, und die Überführungsfunktion sei durch die folgende Abbildung gegeben:



1. Geben Sie die vom Automaten akzeptierte Sprache $T(M)$ an (ohne Begründung).
2. Konstruieren Sie einen DFA für die Sprache $(T(M))^*$.
3. Beschreiben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus in Pseudocode, welcher das Wortproblem für die Sprache $T(M)$ (d.h. gegeben ein Wort $x \in \{0,1\}^*$, ist $x \in T(M)$?) löst und erläutern Sie skizzenhaft dessen Funktionsweise.

Aufgabe 6. Konstruktion von Kellerautomaten

Geben Sie einen Kellerautomaten M an, der die Sprache $L := \{(ab)^n c^m d^\ell \mid n,m,\ell \geq 1 \wedge (n=m \vee n=\ell)\}$ akzeptiert.

Aufgabe 7. Konstruktion von Turingmaschinen

Geben Sie für die Sprache $L := \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ eine Turingmaschine an, die diese erkennt. Als Begründung ist es dabei ausreichend die prinzipielle Arbeitsweise Ihrer Turingmaschine in Worten zu beschreiben.

Aufgabe 8. Kellerautomaten und Turingmaschinen

Wir erweitern einen nichtdeterministischen Kellerautomat (PDA) um einen zweiten Keller. Dazu wird die Übergangsrelation erweitert zu $\delta \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \times Z \times \Gamma^* \times \Gamma^*$. Anschaulich bedeutet $(q, a, A, B, q', C_1 \ldots C_k, D_1 \ldots D_{k'}) \in \delta$: Im Zustand $q \in Z$ und mit obersten Kellerzeichen A bzw. B auf dem linken bzw. rechten Keller kann der Automat beim Lesen des Eingabeteils $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ ($a = \epsilon$ ist ϵ-Transition) in den Zustand q' übergehen und auf dem linken Keller A durch $C_1 \ldots C_k$ ersetzen sowie B durch $D_1 \ldots D_k$ auf dem rechten Keller. Der Automat akzeptiert wenn das Eingabewort gelesen wurde und *beide* Keller leer sind.
Beweisen Sie, dass ein solcher erweiterter PDA mit zwei Kellern eine Turingmaschine simulieren kann.