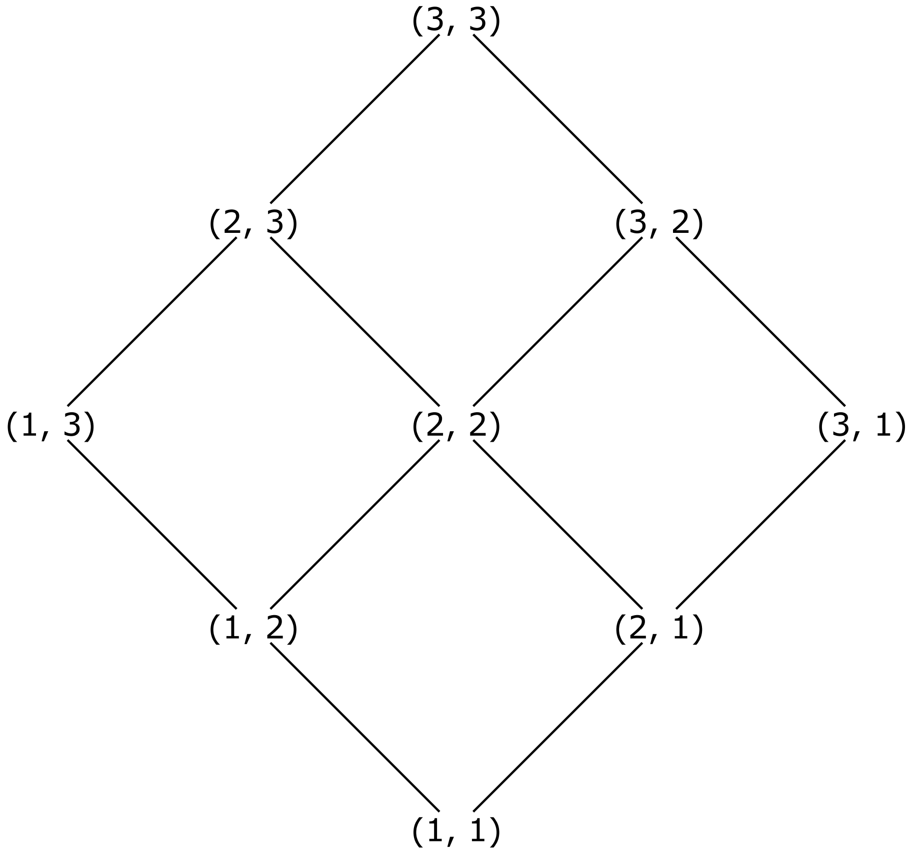
HAUSAUFGABE 2 - BLATT 6 & 7

SARAH KÖHLER UND MATTHIAS LOIBL

Aufgabe 1: Verbände



a).

b). Gegeben zwei Elemente $(x_1, y_1) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ und $(x_2, y_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ kann das Infimum mit folgender Funktion berechnet werden:

$$inf : (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+) \times (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+) \rightarrow \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$$
$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (min(x_1, x_2), min(y_1, y_2))$$

Das Supremum berechnet diese Funktion:

$$sup : (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+) \times (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+) \rightarrow \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$$
$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (max(x_1, x_2), max(y_1, y_2))$$

c). Sei $X \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ und $x \in X$. Dann lässt sich das Infimum mit folgender Funktion berechnen:

$$\begin{aligned} &\sqcap : X \to x \\ &\sqcap(X) = (min(\{x \mid \exists y.(x,y) \in X\}), min(\{y \mid \exists x.(x,y) \in X\}) \end{aligned}$$

Das Supremum berechnet diese Funktion:

$$\begin{aligned} &\bigsqcup : X \to x \\ &\bigsqcup(X) = (max(\{x \mid \exists y.(x,y) \in X\}), max(\{y \mid \exists x.(x,y) \in X\}) \end{aligned}$$

Für unendliche Teilmengen X ist die Funktion undefiniert, da dann max kein größtes Element finden kann.

d).

$$\perp = (0,0)$$

$\top$ existiert nicht, da die Trägermenge $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ das Kreuzprodukt der natürlichen Zahlen ist. Da $\mathbb{N}$ unendlich ist und kein größtes Element besitzt, gibt es auch in $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ kein größtes Element.

e). V ist ein Verband, da die Funktionen aus Aufgabenteil b) für jede zweielementige Teilmenge von V das Infimum und das Supremum berechnen können. Allerdings ist V kein vollständiger Verband, da die Funktion $\bigsqcup$ aus Aufgabenteil c) für unendliche Teilmengen der Trägermenge undefiniert ist. Das heißt es existiert nicht für alle Teilmengen der Trägermenge von V ein Supremum und somit kann V kein vollständiger Verband sein.

f). Zu zeigen: Für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ gilt:
$(x_1, y_1) \leq_2 (x_2, y_2) \Rightarrow f((x_1, y_1)) \leq_2 f((x_2, y_2))$
Seien g und h Funktionen:

$$\begin{aligned} &g : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+ \\ &g(x) = x! \\ &h : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+ \\ &h(y) = 2y^2 + 2y - 1 \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich:

$$f((x,y)) = (h(y), g(x))$$

Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ mit $(x_1, y_1) \leq_2 (x_2, y_2)$. Dann gilt:

$$f((x_1, y_1)) = (h(y_1), g(x_1)) \tag{1}$$

Es gilt außerdem:

$$f((x_2, y_2)) = (h(y_2), g(x_2)) \tag{2}$$

Um die Prämisse zu erfüllen muss gelten:

$$f((x_1, y_1)) \leq_2 f((x_2, y_2))$$

Aus (1) und (2) folgt, das folgendes ebenso gelten muss

$$\Leftrightarrow (h(y_1), g(x_1)) \leq_2 (h(y_2), g(x_2))$$

Aus der Definition von $\leq_2$ folgt, dass dazu gelten muss:

$$\Leftrightarrow h(y_1) \leq h(y_2) \wedge g(x_1) \leq g(x_2)$$

Betrachte beide Voraussetzungen getrennt:
1. Zu zeigen: $h(y_1) \leq h(y_2)$
Das gilt mit $y_1 \leq y_2$ immer, wenn h monoton ist.
Dazu muss gelten: $h(n) \leq h(n+1), n \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} h(n) &= 2n^2 + 2n - 1 \\ &\leq 2n^2 + 6n + 3 = 2n^2 + 4n + 2 + 2n + 2 - 1 && n > 0 \\ &= 2(n+1)^2 + 2(n+1) - 1 = h(n+1) \end{aligned}$$

Also ist h monoton und die erste Voraussetzung gilt.

2. Zu zeigen: $g(x_1) \leq g(x_2)$
Das gilt unter der gegebenen Voraussetzung $x_1 \leq x_2$ immer, wenn g monoton ist.
Dazu muss gelten: $g(n) \leq g(n+1), n \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} g(n) &= n! \\ &\leq (n+1) * n! && n > 0 \\ &= (n+1)! = g(n+1) \end{aligned}$$

Also ist auch g monoton und die zweite Voraussetzung gilt ebenso.

Aus der Gültigkeit beider Voraussetzungen folgt, dass auch f monoton ist.
$\square$

Aufgabe 2: Vollständige Verbände

Gegeben sind (X, R), wobei X eine endliche Menge ist und R eine Relation.
Zu zeigen:
(X, R) ist ein Verband $\Rightarrow$ (X, R) ist ein vollständiger Verband

Da (X, R) ein Verband ist, folgt aus der Definition eines Verbandes:

$$\forall x, y \in X. \exists \bigsqcup(\{x, y\}) \wedge \exists \bigsqcap(\{x, y\})$$

Um die Existenz des Infimums und Supremums für beliebige Teilmengen zu beweisen, benötigen wir zunächst folgende Äquivalenz:
Seien $x, y, z \in X$ beliebig. Dann folgt aus der Definition eines Verbandes, dass (X, R) auch eine partiell geordnete Menge ist. Aus den Eigenschaften einer partiell geordneten Menge lässt sich ableiten, dass die Relation R transitiv ist. Deswegen muss gelten:

$$\begin{aligned} \bigsqcup(\{x, y, z\}) &= \bigsqcup(\{\bigsqcup(\{x, y\}), z\}) && (*) \\ \bigsqcap(\{x, y, z\}) &= \bigsqcap(\{\bigsqcap(\{x, y\}), z\}) && (**) \end{aligned}$$

Sei nun $Y \subseteq X$ beliebig mit $Y = \{y_1, y_2, ...y_k\}$.
Aus der Endlichkeit von X folgt, dass auch Y endlich sein muss.

Für zwei beliebige Elemente y_i und y_j mit $i, j \in [1, k]$ gilt wegen der Definition der Teilmengenbeziehung:

$$\begin{aligned} & y_i, y_j \in Y \\ & \Rightarrow y_i, y_j \in X && Definition\, von\, \subseteq \\ & \Rightarrow \exists z_i = \bigsqcup(\{y_i, y_j\}) \wedge \exists z_s = \bigsqcap(\{y_i, y_j\}) && X\, ist\, Verband \\ & \Rightarrow z_i, z_s \in X && X\, Trägermenge\, von\, (X, R) \end{aligned}$$

Für eine beliebige Teilmenge $Y \subseteq X$ lässt sich damit die Existenz des Supremums beweisen:

$$\begin{aligned} \bigsqcup(Y) &= \bigsqcup(\{y_1, y_2, ..., y_k\}) \\ &= \bigsqcup(\{\bigsqcup(\{y_1, y_2\}), y_3, ..., y_k\}) && wegen\ (*) \end{aligned}$$

Somit lässt sich das Supremum von Y rekursiv bestimmen als:

$$\begin{aligned}\bigsqcup(Y) &= \bigsqcup(\{y_1, y_2, ..., y_k\}) \\ &= \bigsqcup(\{z_l, y_{l+2}, ..., y_k\}) && l < k+1, z_l = \bigsqcup(\{z_{l-1}, y_{l+1}\}), z_l \in X \\ &= \bigsqcup(\{z_{k-2}, y_k\}) && Y \textit{ endlich}\end{aligned}$$

Da dies eine zweielementige Teilmenge von X sein muss, existiert auch ein Supremum. Somit ist auch die Existent eines Supremums der Menge Y bewiesen. Für die Vollständigkeit des Verbandes muss auch das Infimum von Y existieren. Analog zum Supremum gilt:

$$\begin{aligned}\bigsqcap(Y) &= \bigsqcap(\{y_1, y_2, ..., y_k\}) \\ &= \bigsqcap(\{\bigsqcap(\{y_1, y_2\}), y_3, ..., y_k\}) && \textit{wegen } (**)\end{aligned}$$

Somit lässt sich das Supremum von Y rekursiv bestimmen als:

$$\begin{aligned}\bigsqcap(Y) &= \bigsqcap(\{y_1, y_2, ..., y_k\}) \\ &= \bigsqcap(\{z_l, y_{l+2}, ..., y_k\}) && l < k+1, z_l = \bigsqcap(\{z_{l-1}, y_{l+1}\}), z_l \in X \\ &= \bigsqcap(\{z_{k-2}, y_k\}) && Y \textit{ endlich}\end{aligned}$$

Dies ist wiederum eine zweielementige Teilmenge von X, für die laut Definition ein Infimum existieren muss. Damit ist auch die Existent des Infimums von Y bewiesen.

Da also für eine beliebige Teilmenge von X Infimum und Supremum existieren, ist (X, R) ein vollständiger Verband.

$\square$

Aufgabe 3: Bisimulation

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^1(Proc \times Proc) = r(s(\{&(P_1, P_2), (P_1, P_5), (P_1, Q_1), (P_1, Q_2), (P_2, P_5), (P_2, Q_1),\\ &(P_2, Q_2), (P_3, Q_3), (P_4, Q_4), (P_5, Q_2), (P_5, Q_1), (Q_1, Q_2)\}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^2(Proc \times Proc) &= r(s(\{(P_1, P_5), (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3), (P_5, Q_1)\}))\\
\mathcal{F}^3(Proc \times Proc) &= r(s(\{(P_2, Q_2), (P_5, Q_1)\}))\\
\mathcal{F}^4(Proc \times Proc) &= r(s(\{(P_5, Q_1)\}))\\
\mathcal{F}^5(Proc \times Proc) &= r(s(\{(P_5, Q_1)\}))
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}^5$ sind beide ein Fixpunkt.
Somit erhalten wir, dass P_5 und Q_1 das einzige nicht trivial bisimilare Paar ist. Es gilt $P_5 \sim Q_1$

Aufgabe 4: Bisimulation (2)

$\mathcal{F}^1(Proc \times Proc) = r(s(\{(R_1, R_7), (R_2, R_4), (R_2, R_6), (R_3, R_5), (R_4, R_6), (R_8, R_9)\}))$
$\mathcal{F}^2(Proc \times Proc) = r(s(\{(R_2, R_6), (R_3, R_5)\}))$
$\mathcal{F}^3(Proc \times Proc) = r(s(\{(R_2, R_6), (R_3, R_5)\})) = \mathcal{F}^2$

Da $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^3$ sind beide ein Fixpunkt.
Somit erhalten wir, dass R_2 und R_6 sowie R_3 und R_5 die einzigen nicht trivialen bisimilaren Paare sind. Es gilt $R_2 \sim R_6$ und $R_3 \sim R_5$.

Aufgabe 5 - Fixpunktbeweise

a). Gegeben sind der vollständige Verband $(D, \sqsubseteq)$ sowie die monotone Funktion $f : D \to D$. Nach Tarskis Theorem ist z_{min} wie folgt definiert:

$$z_{min} = \bigsqcap\{x \in D \mid f(x) \sqsubseteq x\}$$

Zu zeigen: z_{min} ist der kleinste Fixpunkt.

Sei im Folgenden die Menge F definiert als

$$F = \{x \in D \mid f(x) \sqsubseteq x\}$$

1. z_{min} ist ein Fixpunkt. Dazu ist zuerst zu zeigen, dass z_{min} ein Fixpunkt von f ist, das also folgendes gilt:

$$z_{min} = f(z_{min})$$

Da $\sqsubseteq$ antisymmetrisch ist, muss gezeigt werden, dass die folgenden Aussagen gelten:

$$f(z_{min}) \sqsubseteq z_{min} \qquad (I)$$

$$z_{min} \sqsubseteq f(z_{min}) \qquad (II)$$

Aufgrund der Definition von F können wir auch schreiben:

$$z_{min} = \bigsqcap\{x \in D \mid f(x) \sqsubseteq x\} = \bigsqcap F$$

Für jedes x aus F gilt also, dass $z_{min} \sqsubseteq x$. Zusammen mit der Monotonie von f impliziert dies, dass $f(z_{min}) \sqsubseteq f(x)$ gelten muss. Daraus lässt sich für jedes $x \in F$ folgern:

$$f(z_{max}) \sqsubseteq f(x) \sqsubseteq x$$

Somit ist $f(z_{min})$ eine untere Schranke der Menge F. Nach der Definition ist z_{min} größte untere Schranke von f. Somit muss $f(z_{min}) \sqsubseteq z_{min}$ gelten und wir haben (I) bewiesen.

Da f monoton ist und (I) gilt, wissen wir, dass gelten muss.
Daraus folgt, dass $f(z_{min}) \in F$. Da z_{min} eine untere Schranke von F ist, erhalten wir $z_{min} \sqsubseteq f(z_{min})$.
Aus (I) und (II) erhalten wir

$$z_{min} \sqsubseteq f(z_{min}) \sqsubseteq z_{min} \qquad f \textit{ antisymmetrisch}$$
$$\Rightarrow z_{min} = f(z_{min})$$

Also ist z_{min} ein Fixpunkt von f.

2. z_{min} ist der kleinste Fixpunkt von f. Es bleibt zu zeigen, dass z_{min} der kleinste Fixpunkt der Funktion f ist. Dazu muss gelten:

$$\forall\, d \in D,\ mit\ d = f(d) : z_{min} \sqsubseteq d$$

d ist also ein beliebiger Fixpunkt von f. Es muss also folgendes gelten:

$$\begin{aligned} & f(d) \sqsubseteq d \\ & \Rightarrow d \in F \\ & \Rightarrow \bigsqcap F \sqsubseteq d \\ & \Rightarrow \bigsqcap F = z_{min} \sqsubseteq d \end{aligned}$$

Somit muss z_{min} der kleinste Fixpunkt der Funktion f sein.
$\square$

b). Gegeben sind der vollständige, endliche Verband $(D, \sqsubseteq)$ sowie die monotone Funktion $f : D \rightarrow D$. Nach Theorem 4.2 ist z_{max}, der größte Fixpunkt von f, wie folgt definiert:

$$z_{max} = f^M(\top), M \in \mathbb{N}$$

Zu zeigen: z_{max} ist der größte Fixpunkt.
Dazu muss zunächst gezeigt werden, dass z_{max} nach obiger Definition ein Fixpunkt ist und dann, dass es keinen größeren Fixpunkt gibt.

1. z_{max} ist ein Fixpunkt. Da f laut Definition eine monotone Funktion ist und nichts größer sein kann, als das größte Element, muss gelten:

$$f(\top) \sqsubseteq \top$$

Da f total ist, kann die Funktion auch mehrfach angewendet werden. Aus der Monotonie von f und der Transitivität der Relation $\sqsubseteq$ folgt dann folgender Zusammenhang:

$$f^k(\top) \sqsubseteq f^{k-1}(\top), k \in \mathbb{N}, k > 0$$

Da in den Voraussetzungen D als endlich gegeben ist, muss irgendwann ein Wert k erreicht werden, wo der Zusammenhang konstant ist, wo also gilt:

$$f^k(\top) = f^{k-1}(\top)$$

Es muss also auch einen Wert M geben, wobei für alle $k \leq M$ gilt:

$$f^k(\top) = f^M(\top)$$

Daraus lässt sich ableiten, dass ebenso gelten muss:

$$f^M(\top) = f^{M-1}(\top) = f(f^{M-1}(\top))$$

Daraus lässt sich direkt ablesen, dass $f^M(\top)$, also z_{max} nach der Definition von Theorem 4.2, ein Fixpunkt von f sein muss.

2. z_{max} ist der größte Fixpunkt. Sei $d \in D$ ein beliebiger Fixpunkt von f mit $d \neq f^M(\top)$. Das bedeutet, dass $d = f(d)$ gelten muss. Es gilt außerdem, dass $d \sqsubseteq \top$, da $\top$ das maximale Element in D ist. Mit Hilfe der Monotonie von f kann man folgendes folgern:

$$d = f(d) \sqsubseteq f(\top)$$

Das bleibt auch nach mehrmaliger Anwendung von f gültig, so lange wie f nicht mehr als M mal hintereinander ausgeführt wurde. Nach M Schritten sind nach Definition die Fixpunkte erreicht und wir können keine Aussage mehr über die Relation zu unserem beliebigen Fixpunkt d treffen.

Als letzten gültigen Schritt erhält man also:

$$d \sqsubseteq f^M(\top)$$

Da somit alle anderen Fixpunkte d kleiner sein müssen, können wir schließen, dass $f^M(\top)$ der größte Fixpunkt von f sein muss. Somit ist bewiesen, dass $z_{max} = f^M(\top)$ der größte Fixpunkt von f ist und diese Aussage von Theorem 4.2 gilt.
$\square$