Begleitmaterialien zum Skript

Analysis I für Ingenieure

(Ferus)

Zusammengestellt im Rahmen des durch das TU-Präsidium finanzierten Lehrreformprojekts UNITUS

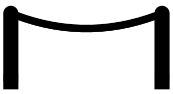
Inhaltsverzeichnis

Projekt UNITUS – Einstieg ins Skript und Beispiele – Ana I für Ingenieure

0 Motivation

Sicher werden Sie später in Ihrem Berufsleben selten die aktuellen Inhalte der Analysis so brauchen, wie sie hier oder in der Vorlesung präsentiert werden. Auch Ihre künftigen Aufgaben werden kaum den Hausaufgaben in diesem Kurs ähneln. Was das Lernen der Mathematik aber stets leistet, ist die Vermittlung einer präzisen Denkweise, der klaren Gliederung von Gedanken und einer Überprüfung von Schlussweisen, die immer und überall von unschätzbarem Nutzen ist.

In diesem Kurs beschäftigen wir uns hauptsächlich mit der Ableitung und der Integration von Funktionen in einer Variablen sowie mit Reihen. Die Ableitung ist vor allem in physikalischen Anwendungen wichtig, denn wenn die Zeit als Variable betrachtet wird, kann die Ableitung einer Funktion in Bezug auf die Zeit als Änderungsrate einer Quantität interpretiert werden. Mit der Ableitung kann auch optimiert werden, beispielsweise bei der Konstruktion eines Tragseilsystems.

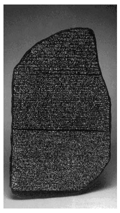


Kettendurchhang
Was ist die kleinste bzw. die größte Spannung in dem Kabel?

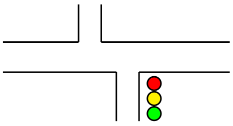
Die Kurve wird durch eine hyperbolische trigonometrische Funktion (siehe Abschnitt 6.4) beschrieben und wird mit der Ableitung (siehe Abschnitte 5.1 und 5.2) optimiert.

Die Integration hat viele Anwendungsbereiche. Der Flächeninhalt eines Gebietes kann mit Integration bestimmt werden. Messungen in einem Labor liefern Informationen, die zu der Änderungsrate einer Funktion führen oder eine Beziehung zwischen der Funktion und Änderungsrate aufzeigen. Durch Integration (Kapitel 8) oder mit Hilfe der Theorie der Differentialgleichungen kann die ursprüngliche Funktion beschrieben werden. Beispielsweise erfüllt der Zerfallsprozess von C-14 eine bestimmte Differentialgleichung, welche die Exponentialfunktion (Kapitel 6) einbezieht. Die Radiokarbonmethode zur Altersbestimmung von z.B. Steinen setzt dann Integration ein.

Datierung von Steinen
Wie alt bin ich?



Noch ein weiteres interessantes Thema in der Analysis I für Ingenieure ist die Fourieranalyse (Kapitel 9). Ihr Anwendungsgebiet beschränkt sich nicht nur auf die Signalverarbeitung.



Sensoren für eine Ampel
Die Ampel für die Nebenstraße soll nur auf grün wechseln, wenn ein Auto dort wartet.

Um diese Hauptthemen zu verstehen, benötigen wir viele Grundlagen. Besonders am Anfang des Semesters wird Ihnen vieles schon vertraut sein. Allerdings ist es wichtig, die Notation festzulegen, sodass wir alle dieselbe Sprache sprechen. Zusätzlich wird einiges von einem anderen Standpunkt betrachtet, der manchmal umständlich und abstrakt erscheint. Diese Sichtweise ermöglicht jedoch ein tieferes Verständnis für die Mathematik und damit einen breiteren Anwendungsbereich der wichtigsten Grundtechniken der Analysis.

Projekt UNITUS – Einstieg ins Skript und Beispiele – Ana I für Ingenieure

1 Vorbereitung

1.1 Mengen

Eine **Menge** ist kurz gesagt ein Zusammenschluss von Objekten, welche die **Elemente** der Menge sind. Um eine Menge mit endlich vielen Elementen zu beschreiben, können alle Elemente explizit aufgezählt werden, so wie im folgenden Beispiel.

Meine Einkaufsliste

Milch	Pizza
Joghurt	Obst
Honig	Bier
Käse	Saft
Brot	Taschentücher

Bezeichne mit A "meine Einkaufsliste" (mit einem Großbuchstaben). Die Elemente, die zu A gehören, sind mit kleinen Buchstaben versehen, wie m für Milch. (Die Hierarchie ist dadurch in der Benennung der Menge und den Objekten widerspiegelt.) Es ist manchmal praktisch, solche Symbole zu benutzen, weil man dadurch weniger zu schreiben hat. Um eine Menge explizit aufzuschreiben, ist es üblich geschweifte Klammern zu benutzen. Meine Einkaufszettel sieht in Symbolen so aus:

$$A := \{m, j, h, k, b_1, p, o, b_2, s, t\}.$$

Der Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen bedeutet, dass A als die Menge, die aus den Elementen m, j, usw. besteht, ***definiert*** ist. Milch steht auf der Liste, also ist m ein Element von A. Diese Situation bezeichnen wir mit $m \in A$ (sprich m ist in A). Bier und Brot, die wir hier mit b_1 bzw. b_2 bezeichnen, stehen auch auf der Liste, also gilt $b_1, b_2 \in A$. Leider steht Eis (e) nicht auf der Liste, in Symbolen: $e \notin A$. Woher kommt nun aber e? Es steht nicht auf meiner Liste, aber es ist im Supermarkt erhältlich. Alle Produkte, die ich im Supermarkt kaufen kann, bilden eine sogenannte **Universalmenge**, die mit U bezeichnet wird. Diese Menge und meine Einkaufsliste sind offensichtlich unterschiedlich. Es gilt $e \in U$ aber $e \notin A$.

Noch eine von A verschiedene Menge ist die Menge aller Getränke auf meiner Einkaufsliste $B := \{m, b_2, s\}$. Die Menge B ist eine sogenannte **Teilmenge** von A, denn jedes Element in B ist auch ein Element in A. Dies wird mathematisch mit $B \subset A$ ausgedrückt. Man sagt, B ist eine Teilmenge von A oder alternativ B ist in A enthalten. Hier ist der Unterschied zu Elementen sichtbar. Man sagt das Element m ist oder liegt in A, aber die Menge B ist in A enthalten.

Andererseits ist A keine Teilmenge von B, weil nicht jedes Element in A ein Element in B ist. Es genügt hier ein Element zu finden, welches in A jedoch nicht in B liegt, wie beispielsweise Pizza, was offensichtlich kein Getränk ist: aus $p \in A$ und $p \notin B$ folgt $A \not\subset B$; d.h. A ist nicht in B enthalten.

Um zu prüfen, ob zwei Mengen gleich sind, muss die eine Menge in der anderen enthalten sein und umgekehrt. Für die Menge

$$C := \{b_1, b_2, h, j, k, m, o, p, s, t\}$$

gilt $C \subset A$ und $A \subset C$, sodass die zwei Mengen A und C gleich sind: $A = C$. Man merkt, die Reihenfolge der Elemente ist unwichtig.

Zusammenfassung der grundlegenden Notation für Mengen

$m \in A$	m ist Element von A, m ist in A, m liegt in A
$e \notin A$	e ist kein Element (ist nicht in, liegt nicht in) A
$B \subset A$; $A \supset B$	B ist Teilmenge von A, B ist in A enthalten; A enthält B
$A \not\subset B$; $B \not\supset A$	A ist keine Teilmenge von B, A ist nicht in B enthalten; B enthält A nicht
$A = C$	A und C sind gleich (d.h. $A \subset C$ und $C \subset A$)

Mathematische Mengen

Bei “meiner Einkaufsliste” auf der vorhergehenden Seite handelt es sich um eine überschauliche Anzahl von Elementen. In der Mathematik ist das meistens anders, denn häufig haben Mengen unendlich viele Elemente. Hier sind die wichtigsten Mengen, die im 2. Kapitel des Skripts besprochen werden.

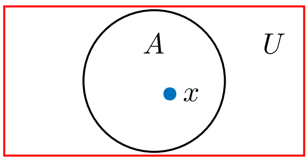
$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} := \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a, b \text{ teilerfremd} \}$	rationale Zahlen ($\mathbb{Q}$ wegen Quotient)
$\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl}\}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	komplexe Zahlen (hier ist $i^2 = -1$)

Die obigen Mengen sind so wichtig, dass es einen zusätzlichen Strich in der Bezeichnung gibt. Die reellen Zahlen werden beispielsweise nicht mit R sondern mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Schauen wir die Definition für $\mathbb{Q}$ an, um die neue Notation zu üben. Ausgesprochen wird dies folgendermaßen: $\mathbb{Q}$ **ist definiert als die Menge aller** $\frac{a}{b}$ **mit der Eigenschaft, dass** a eine ganze Zahl und b eine natürliche Zahl **außer Null** sind, wobei a und b teilerfremd sind. Dies kann mit Hilfe der Mengenoperationen beschrieben werden, die hier eingeführt werden.

Mengenoperationen

Die Universalmenge U wird häufig mit einem Viereck (abstrakt) dargestellt. Eine Menge $A \subset U$ wird durch einen Kreis oder ein Oval in U repräsentiert. Ein Element x in der Menge wird mit einem Punkt im inneren Gebiet des Kreises oder des Ovals repräsentiert. Mit ein wenig Übung helfen uns diese Darstellungen, Mengen zu visualisieren.

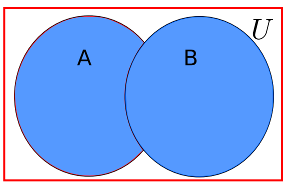


Um aus gegebenen Mengen neue Mengen zu bilden, gibt es unterschiedliche Mengenoperationen. Seien dazu A und B gegebene Teilmengen einer Universalmenge U.

Definition (Vereinigung)

$$A \cup B := \{x \in U \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

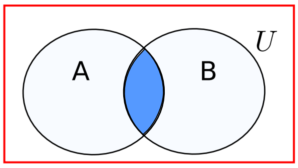
Ein Element x im Universum U liegt in $\boldsymbol{A}$ **vereinigt** $\boldsymbol{B}$, falls x in der Menge A, in der Menge B oder in beiden Mengen A, B liegt.



Definition (Schnitt)

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} := \{x \in U \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

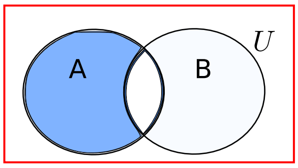
$x \in U$ liegt in ***A* geschnitten *B***, falls x sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten ist.



Definition (Differenz)

$$\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B} := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Die **Differenz aus den Mengen *A* und *B*** besteht aus allen Elementen aus der Menge A, die nicht in B vorkommen.



Beispiel (Mengenoperationen)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und

$$A_n := \{0, n, 2n, 3n, \ldots\}$$

die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch n teilbar sind. Bestimmen Sie

$$\begin{array}{lll} A_3 \cup A_4, & A_3 \cap A_4, & A_3 \setminus A_4, \\ A_3 \cup A_6, & A_3 \cap A_6, & A_6 \setminus A_3. \end{array}$$

Durch Aufzählung sind die Mengen A_3, A_4, A_6 wie folgt:

$$A_3 = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}, \quad A_4 = \{0, 4, 8, 12, \ldots\}, \quad A_6 = \{0, 6, 12, 18, \ldots\}.$$

Statt einer Aufzählung der Elemente, kann sie auch für $n \neq 0$ so dargestellt werden:

$$A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ durch } n \text{ teilbar}\}.$$

Die Vereinigung von A_3 und A_4 ist die Menge aller Elemente in $\mathbb{N}$ die in A_3, A_4 oder beiden Mengen liegen:

$$A_3 \cup A_4 = \{0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, \ldots\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ durch 3 oder 4 teilbar}\}.$$

Der Schnitt von A_3 und A_4 besteht aus den natürlichen Zahlen, die in A_3 und A_4 vorkommen, d.h. alle natürlichen Zahlen die gleichzeitig durch 3 und 4 teilbar sind:

$$A_3 \cap A_4 = \{0, 12, 24, 36, \ldots\} = A_{12}.$$

Die Differenz aus den Mengen A_3 und A_4 besteht aus allen natürlichen Zahlen, die durch 3 jedoch nicht durch 4 teilbar sind:

$$A_3 \setminus A_4 = \{3, 6, 9, 15, 18, 21, 27, \ldots\}$$

Überlegen Sie, warum $A_3 \cup A_6 = A_3, A_3 \cap A_6 = A_6$ und $A_6 \setminus A_3 = \emptyset$ gelten, wobei $\emptyset$ die Menge ist, die keine Elemente enthält, die sogenannte **leere Menge**. (Die leere Menge wird auch mit $\{\ \}$ dargestellt.)

Die Operationen Vereinigung und Durchschnitt können auch für mehrere Mengen $A_i \subset U$ durchgeführt werden, wobei i ein Element einer Indexmenge I (z.B. für $I = \mathbb{N}$) ist.

Definition (Vereinigung und Schnitt von einer Mengenfamilie)

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ für wenigstens ein } i \in I\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in I\}$$

Beispiel (Familien von Mengen)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A_n := \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ durch } n \text{ teilbar}\}$ und I die Indexmenge $I := \{2, 4, 6, \ldots\}$. Bestimmen Sie $\bigcup_{i \in I} A_i$ sowie $\bigcap_{i \in I} A_i$.

Im ersten Fall werden alle Mengen mit einem geraden Index vereinigt. Diese Mengen enthalten nur gerade Zahlen, z.B. ist $A_4 = \{0, 4, 8, 12, ...\}$ die 4er-Reihe. Die Vereinigung enthält dann alle geraden Zahlen:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \cdots = A_2.$$

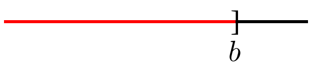
Die Null ist in jeder Menge A_i enthälten, denn i teilt 0 für alle $i \in I$. Dier Zahl $i \in I$ ist ein Element der Menge A_i, aber i ist kein Element der Menge A_{i+2}, weil $i + 2$ die Zahl i nicht teilt. Deshalb gilt

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_2 \cap A_4 \cap A_6 \cap \cdots = \{0\}\,.$$

Bemerkung: $\{0\}$ ist nicht die leere Menge, weil das Element ‘0’ in der Menge enthalten ist. Deshalb soll man das Konzept “Null” nicht mit “nichts” ersetzten.

Intervalle

Intervalle sind wichtige Teilmengen der reellen Zahlen, weil sie häufig in der Beschreibung eines Definitions- oder Wertebereichs, wie im nächsten Abschnitt definiert wird, vorkommen. Zusammenhängende Intervalle haben für $a, b \in \mathbb{R}$ eine der folgenden Formen.

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$		(offenes Intervall)
$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$		(halboffenes Intervall)
$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$		(halboffenes Intervall)
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$		(kompaktes Intervall)
$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$		(offenes Intervall)
$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$		(halboffenes Intervall)
$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$		(offenes Intervall)
$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$		(halboffenes Intervall)

Man kann ein offenes Intervall auch folgendermaß darstellen

wobei die Kugeln symbolisieren, dass der Punkt nicht enthalten ist.

Im folgenden Beispiel kommen die möglichen Werte von α aus einem halboffenen Intervall. Die Menge selbst ist jedoch kompakt:

$$\{\cos\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi[\,\} = [-1, 1].$$

Beschränken wir die möglichen Werte von α, können wir auch ein halboffenes Intervall beschreiben:

$$\{\cos\alpha \mid \alpha \in [0, \pi[\,\} =]-1, 1].$$

In Verbindung mit den Mengenoperationen können andere Bereiche beschrieben werden.

Beispiel (Intervalle und Mengenoperationen)
Bestimmen Sie jeweils den Schnitt $A \cap B$, die Vereinigung $A \cup B$ und die Differenzen $A \backslash B$ und $B \backslash A$ für die Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12\} \text{ und}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}\,.$$

(Versuchen Sie es selber, bevor Sie die untenstehende Lösung anschauen.)

Die Mengen können auch wie folgt geschrieben werden:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 12\}$$

$$B =]-1, 3[\,.$$

D.h. B enthält alle reellen Zahlen zwischen -1 und 3, jedoch ohne die Grenzen.
Der Schnitt von A und B besteht aus allen Elementen, die gleichzeitig in A und B liegen, d.h.

$$A \cap B = \{0, 1, 2\}\,.$$

A vereinigt B ist die Menge aller Elementen, die in A, B, oder beide Mengen vorkommen:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 12\} \cup]-1, 3[\\ &=]-1, 3[\cup \{3, 4, \ldots, 12\} \text{ oder auch }]-1, 3] \cup \{4, 5, \ldots, 12\}\,. \end{aligned}$$

Die Differenz aus A und B

$$A \backslash B = \{3, 4, 5, \ldots, 12\}$$

ist die Menge, die alle Elemente der Menge A enthält, außer denen, die auch in B sind.
Andersrum sind in der Differenz aus B und A

$$B \backslash A =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 3[\text{ oder auch }]-1, 3[\setminus \{0, 1, 2\}$$

alle reelle Zahlen zwischen -1 und 3, bis auf die natürlichen Zahlen 0, 1 und 2, da diese Elemente von A sind und somit abgezogen werden, enthalten.

1. Aufgabe (Lerncheck - Mengenoperationen)

Sei J die Indexmenge $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definiere die Familie von Intervallen $A_j := \left[\frac{(-1)^j}{j}, j\right]$ für $j \in J$. Prüfen Sie nach, dass $\cup_{j \in J} A_j = [-1, \infty[$ und $\cap_{j \in J} A_j = [\frac{1}{2}, 1]$ gilt.

Eine weitere Operation für Mengen A und B, die noch nicht eingeführt wurde, ist die **Produktmenge** oder auch **kartesisches Produkt** genannt

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

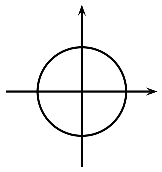
Nehmen wir für A und B die reellen Zahlen, so kann man deren Produktmenge mit der Ebene $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}\}$ darstellen. Jede Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist eine sogenannte Relation. Beispielsweise ist $R_{\text{Kreis}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Relation. Hier ist jedoch der y-Wert nicht durch den x-Wert eindeutig bestimmt; d.h. R_{Kreis} ist keine Funktion. Funktionen und umkehrbare Funktionen sind das Thema des nächsten Abschnitts.

1.2 Funktionen und Abbildungen

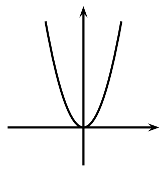
Der Begriff Funktion ist Ihnen sicherlich bekannt. Es ist jedoch wichtig, einige Erweiterungen des Begriffs zu betrachten, um ein tieferes Verständnis von Funktionen zu entwickeln. Auf der einen Seite kann eine Funktion in einer Variable als eine besondere Art von Relation, d.h. eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, aufgefasst werden. Andererseits betrachten wir Abbildungen, die eine Verallgemeinerung des Begriffs Funktion darstellen.

Relationen und Funktionen graphisch betrachtet

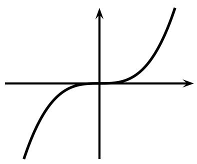
Beginnen wir mit dem Begriff Relation. Eine **Relation** in $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist eine Menge von geordneten Paaren $R := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen eine gegebene Bedingung$\} \subset \mathbb{R}^2$. Wenn man jedes geordnete Paar mit einem Punkt in der Ebene darstellt, bekommt man den Graph der Relation. Hier sind einige Beispiele.



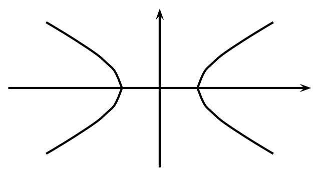
$R_{\text{Kreis}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



$R_{\text{Parabel}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

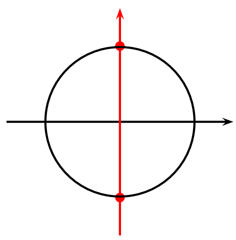


$R_{\text{Kubik}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$

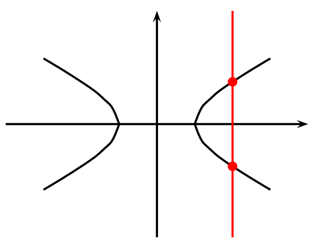


$R_{\text{Hyperbel}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

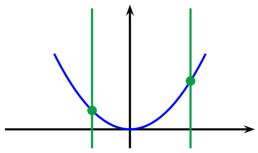
Die Relation R beschreibt eine **Funktion** genau dann, wenn jeder x-Wert (Wert der ersten Komponente), der in der Relation vorkommt, genau einen assoziierten y-Wert (Wert der zweiten Komponente) hat. Ist eine Relation eine Funktion, erkennt man dieses leicht an ihrem Graphen. Hat jede vertikale Gerade $VG_a := \{(a, y) | y \in \mathbb{R}\}$ (Parallele zur y-Achse) für ein festes $a \in \mathbb{R}$, die man betrachten kann, höchstens einen Schnittpunkt mit dem Graphen, so handelt es sich um eine Funktion. Würde sie den Graph in zwei oder mehrere Stellen schneiden, so gäbe es einen x-Wert mit mehr als einem y-Wert. Der Kreis R_{Kreis} stellt beispielsweise keine Funktion dar. Die y-Achse $\boldsymbol{VG_0}$ trifft den Kreis in den Punkten $(0, 1)$ und $(0, -1)$.



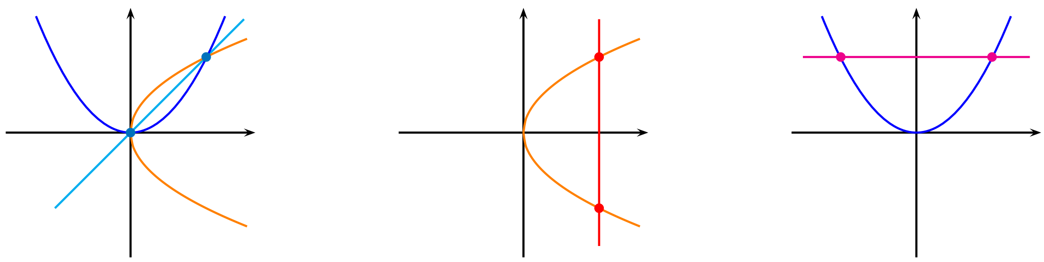
Somit hat die Relation mindestens einen x-Wert mit mehr als einem assoziierten y-Wert. Auch die Relation R_{Hyperbel} ist keine Funktion, denn der Graph besteht den Test mit vertikalen Geraden nicht.



$\boldsymbol{R}_{\text{Parabel}}$, R_{Kubik} sind jedoch Funktionen, was der Test mit vertikalen Geraden andeutet jedoch nicht beweist, weil eine Skizze fehlerhaft sein könnte. Für einen Beweis muss gezeigt werden, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ für die (x, y_1) und (x, y_2) in der Relation liegen, $y_1 = y_2$ gilt.



Wenn die Reihenfolge der x- und y-Werte der Relation $R = \{(x, y)|x, y$ erfüllen etwas$\} \subset \mathbb{R}^2$ für jedes geordnete Paar getauscht wird, bekommen wir eine neue Relation $R_{\text{getauscht}} = \{(y, x)|x, y$ erfüllen etwas $\subset \mathbb{R}^2$, die sogenannte Umkehrrelation. Es stellt sich nun die Frage, ob $R_{\text{getauscht}}$ wiederum eine Funktion ist. Das kann natürlich nur passieren, wenn jedem y-Wert in der Relation genau ein x-Wert zugeordnet wird. Wir untersuchen, ob die Umkehrrelation $(\boldsymbol{R}_{\text{Parabel}})_{\text{getauscht}}$ eine Funktion ist. (Machen Sie die Probe mit $(R_{\text{Kubik}})_{\text{getauscht}}$!) Den Graphen einer Umkehrrelation erhalten wir durch eine Spiegelung des ursprünglichen Graphs an der **Winkelhalbierenden** $y = x$. Man merkt, dass die Punkte (x, x) an der Geraden $y = x$ bei der Umkehrung unverändert bleiben, was auch Sinn macht, weil die Reihenfolge bei solchen geordneten Paaren keine Rolle spielt. Ein Test mit vertikalen Geraden kann auch an diesem Graph durchgeführt werden, um zu entscheiden, ob die so erhaltene Relation eine Funktion ist.



Es ist leicht zu sehen, dass die Relation $(R_{\text{Parabel}})_{\text{getauscht}}$ den Test mit den vertikalen Geraden nicht besteht, also keine Funktion ist. Eigentlich hätten wir dies auch an dem ursprünglichen Graphen sehen können. Hier können wir statt jede vertikale Gerade $VG_a := \{(a, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ zu betrachten, die horizontalen Geraden (Paralellen zu der x-Achse), die wir durch Rückspiegelungen erhalten $(VG_a)_{\text{getauscht}} = \{(y, a) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(x, a) \mid x \in \mathbb{R}\}$, betrachten. Die horizontale Gerade $\{(x, 4) \mid x \in \mathbb{R}\}$ schneidet den Graphen von R_{Parabel} in den Punkten $(2, 4)$ und $(-2, 4)$. Die Umkehrrelation $(R_{\text{Parabel}})_{\text{getauscht}}$ der Funktion R_{Parabel} beinhaltet die geordneten Paare $(4, 2)$ und $(4, -2)$ und ist deshalb keine Funktion. Fazit: ist die Relation R eine Funktion und gleichzeitig $R_{\text{getauscht}}$ eine Funktion, muss der Graph von R einmal den Test mit vertikalen Geraden (weil R eine Funktion sein soll) und einmal den Test mit horizontalen Geraden (weil $R_{\text{getauscht}}$ auch eine Funktion sein soll) bestehen. Bezeichnen wir nun bei einer Funktion die geordneten Paare als $(x, f(x))$ statt (x, y), dann ist $R_{\text{getauscht}} = \{(f(x), x)\}$ nur eine Funktion, wenn der Graph von $R = \{(x, f(x))\}$ den Test mit horizontalen Geraden besteht. Haben x_1 und x_2 denselben y-Wert $f(x_1) = f(x_2)$, müssen x_1 und x_2 gleich sein. Sonst würde die horizontale Gerade mit der Höhe $f(x_1)$ mindestens zweimal den Graphen durchschneiden. Dies ist die Idee der Injektivität, zu der wir später zurückkehren werden.

Notation für Funktionen und Abbildungen

Falls der Graph einer gegebenen Funktion nicht bekannt ist, fehlt uns die visuelle Vorstellung, die oben präsentiert wurde. Deshalb ist es wichtig, solche Ideen auch mit mathematischen Symbolen darstellen zu können. Deshalb entwickeln wir alles nochmal in der Notation von Abbildungen und Funktionen.

Definition (Abbildung/Funktion; Definitionsbereich; Wertebereich; Bild; Urbild)

Seien A und B Mengen. Eine **Abbildung** f von A nach B ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem x in A genau ein Element $y = f(x)$ in B zuordnet. Die Abbildung f heißt nach Konvention **Funktion**, vor allem dann, wenn die Werte Zahlen sind.

Die Menge A ist der **Definitionsbereich**, die Menge B der **Wertebereich** der Abbildung f. Das **Bild** *von* x unter f ist y. Die Menge $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ ist das **Bild von** A unter f. ($f(A)$ ist die Menge alle Werte in B, die unter f „erreicht“ werden. Dies muss nicht unbedingt ganz B sein.) Das **Urbild** der Menge $\{y\}$ mit $y \in B$ unter f ist die Menge aller $x \in A$, für die $f(x) = y$ gilt (Notation: $f^{-1}(\{y\}) := \{x \in A | f(x) = y\}$). Das **Urbild einer Teilmenge** C des Wertebereichs ($C \subset B$) ist die Menge aller Elementen des Definitionsbereichs, deren Bild Element dieser Teilmenge ist (Notation: $f^{-1}(C) := \{x \in A | f(x) \in C\}$).

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Abbildung zu beschreiben, die im Skript zum Kurs vorkommen.

Notation	Sprich
$f : A \to B$	f ist eine Abbildung von A nach B.
$f : A \to B, x \mapsto f(x)$	f ist eine Abbildung von A nach B, die x auf $f(x)$ abbildet.
$f : A \ni x \mapsto f(x) \in B$	f ist eine Abbildung, die ein Element x in A auf ein Element $f(x)$ in B abbildet.
$f : x \mapsto f(x)$	f bildet x auf $f(x)$ ab. (In Hausaufgaben und Klausuren ist es ratsam, diese Schreibweise *nicht* zu benutzen, sondern die Mengen A und B explizit aufzuschreiben.)

Jede Abbildung $f : A \to B$ definiert eine Relation $R_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. (Das x in $f(x)$ heißt **Argument**.) Wiederum stellen wir die Frage, ob $R_{f_{\text{getauscht}}} = \{(f(x), x) \mid x \in A\}$ selbst eine Abbildung ist. Wir haben vorher die Idee von Injektivität für Funktionen aus dem Test mit horizontalen Geraden entwickelt. Besteht eine Funktion diese Tests, so ist die assoziierte Umkehrrelation auch eine Funktion. Wie können wir das Kriterium definieren, falls der Graph nicht vorhanden ist oder f eine allgemeine Abbildung ist?

Definition (Injektivität)

Die Abbildung $f : A \to B$ heißt **injektiv**, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt: Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $x_1 = x_2$. (Die Abbildung f ist injektiv, falls jedes Element $y \in B$ höchstens ein Element im Urbild von y unter f hat.)

R_f ist eine umkehrbare Relation. Falls $f : A \to B$ injektiv ist, ist die Umkehrrelation auch eine Abbildung. Das einzige Problem ist, die zugehörige Abbildung f^{-1} zu beschreiben. Was sind die Definitions- und Wertebereiche von f^{-1}? Dass der Wertebereich von f^{-1} ganz A ist, sollte einigermaßen offensichtlich sein. A ist der Definitionsbereich von f, und jedem $x \in A$ wird genau ein $y \in B$ zugeordnet. D.h., beim Tauschen wird A in den Wertebereich von $R_{f_{\text{getauscht}}}$ umgewandelt. Der Definitionsbereich von f^{-1} ist nicht notwendigerweise ganz B. Es kann passieren, dass einige Elemente in B nicht als zweite Komponente eines geordneten Paars in R_f vorkommen. Die zweiten Komponenten sind durch das Bild von f (nämlich $f(A)$) bestimmt und $f(A) \subset B$. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist eine Abbildung von B nach A nur, wenn es für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ gibt. Dies ist die Idee hinter Surjektivität.

Definition (Surjektivität)

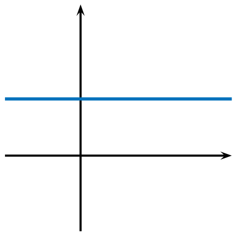
Die Abbildung $f : A \to B$ heißt **surjektiv**, falls gilt $f(A) = B$.
(Die Abbildung f ist surjektiv, falls jedes Element $y \in B$ mindestens ein Element im Urbild von y hat.)

Definition (Bijektivität)

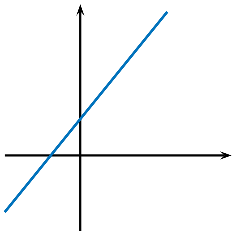
Sei $f : A \to B$ eine Funktion. f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.
(Die Abbildung f ist bijektiv, falls jedes Element in $y \in B$ genau ein Element im Urbild von y hat.)

Beispiel (Injektivität, Surjektivität und Bijektivität)
Betrachte die folgenden Funktionen graphisch. Welche sind injektiv, welche surjektiv, welche bijektiv?

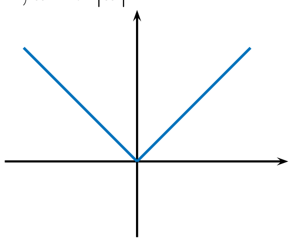
a) *konstante Funktionen* für ein $a \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a$



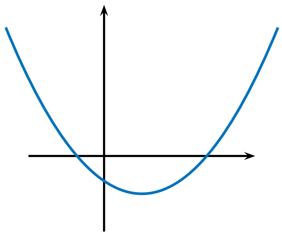
b) *lineare Funktionen* für $m, b \in \mathbb{R}, m \neq 0$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto mx + b$



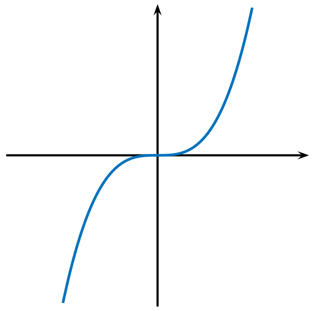
c) *Betragsfunktion*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$



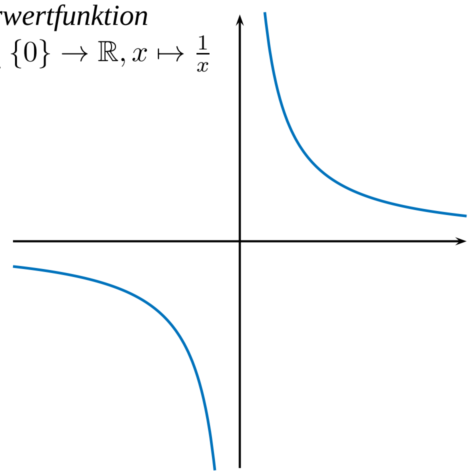
d) *quadratische Funktionen* für $a, b, c \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c$



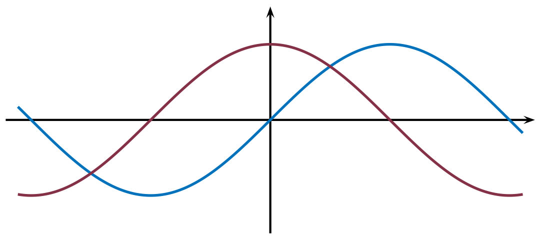
e) *kubische Funktion*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$



f) *Kehrwertfunktion*
$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$



g) *Sinus* und *Cosinus*
$\boldsymbol{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)}$, $\boldsymbol{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)}$



Nur die Funktionen in b), e) und f) sind injektiv, denn genau deren Graphen bestehen den Test mit vertikalen Geraden. Nur die Funktionen in b) und e) sind surjektiv, weil jedes $x \in \mathbb{R}$ ein nicht leeres Urbild hat. In Teil a) ist das Urbild eines Wertes außer a die leere Menge. In Teil c) haben alle Werte kleiner als 0 ein leeres Urbild. Nur b) und e) sind gleichzeiting injektiv und surjektiv also bijektiv.

2. Aufgabe (Lerncheck - surjektiv/nicht injektiv)

Fertigen Sie eine Skizze einer Funktion an, die surjektiv jedoch nicht injektiv ist.
(Hinweis: eine Formel für die Funktion muss nicht angegeben werden.)

Aus einer beliebigen Abbildung $f : A \to B$ können wir eine umkehrbare oder invertierbare Abbildung gewinnen. Dazu wird im ersten Schritt der Wertebereich B einfach auf $f(A)$ eingeschränkt:

$$g : A \to f(A), x \mapsto f(x).$$

Die Abbildung g ist aber nicht notwendigerweise umkehrbar, weil die Injektivität nicht vorausgesetzt wurde. Wir wählen eine Teilmenge C von A, wobei $g(C) = g(A)$ ist und jedes Element $y \in g(C)$ genau ein Element im Urbild von y unter g hat. (Ist f schon injektiv, dann ist C einfach A.) Die Abbildung $h : C \to f(A), x \mapsto f(x)$ heißt die Einschränkung von g auf C und wird mit $h := g|_C$ in Kurzform dargestellt. Nach Konstruktion ist h eine umkehrbare Abbildung mit Umkehrabbildung $h^{-1} : f(A) \to C$.

Beispiel (Umkehrbare Funktion durch Einschränkung der Definitions- und Wertebereiche)
Bestimmen Sie den Wertebereich $B \subset \mathbb{R}$ und einen möglichen Definitionsbereich $A \subset \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f : A := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 8\} \to B := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\}$ mit

$$\begin{array}{lll} f(0) = 2 & f(3) = 5 & f(6) = 2 \\ f(\mathbf{1}) = \mathbf{3} & f(4) = 4 & f(\mathbf{7}) = \mathbf{3} \\ f(2) = 4 & f(\mathbf{5}) = \mathbf{3} & f(8) = 4 \end{array}$$

eine bijektive Funktion ist.

Als Funktion von A nach B ist f nicht invertierbar, weil beispielsweise das Urbild von $1 \in B$ die leere Menge ist. Als Wertebereich für eine surjektive Funktion kommt $f(A) := \{2, 3, 4, 5\}$ in Frage. Wir definieren nach dem Schema $g : A \to f(A), x \mapsto f(x)$, die jedoch keine injektive Funktion ist. Beispielsweise hat 3 mehrere Elemente im Urbild $(g^{-1}(\{\mathbf{3}\}) = \{\mathbf{1, 5, 7}\})$. Es muss ein passender Definitionsbereich gewählt werden. Gesucht ist eine Teilmenge C von $\{0, 1, \ldots, 8\}$, sodass $g(C) = \{2, 3, 4, 5\}$ gilt und sodass jedes Element in $\{2, 3, 4, 5\}$ ein Element im Urbild hat. Durch Betrachtung kommt die Menge $C := \{0, 1, 2, 3\}$ in Frage. (Man hätte auch $\{3, 4, 5, 6\}$ oder $\{3, 6, 7, 8\}$ wählen können.) Die Funktion $h : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 3, 4, 5\}$ mit $h(0) = 2, h(1) = 3, h(2) = 4, h(3) = 5$ ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion lautet $h^{-1} : \{2, 3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ mit $h^{-1}(2) = 0, h^{-1}(3) = 1, h^{-1}(4) = 2, h^{-1}(5) = 3$.

Beispiel (Umgang mit der Notation f^{-1})
Betrachten Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \text{ und } g : [0, \infty[\to [0, \infty[, x \mapsto x^2.$$

Bestimmen Sie

a) $f^{-1}(\{4\})$ und $g^{-1}(\{4\})$,
b) $g^{-1}(4)$,
c) $f^{-1}([1, 9])$ und $g^{-1}([1, 9])$,
d) $g(x)^{-1}, x \neq 0$.

a) Das Argument $\{4\}$ ist eine Teilmenge des Wertebereichs von f und g. Das Urbild von $\{4\}$ unter f ist $\{-2, 2\}$, denn $f(2) = 4$ und $f(-2) = 4$. Folglich ist $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$. Weil g die Einschränkung von f auf $[0, \infty[$ ist, gilt $g^{-1}(\{4\}) = \{2\}$.

b) Das Argument ist ein Element des Wertebereichs. Hier ist der Wert der Umkehrfunktion an der Stelle $x = 4$ (also eine Zahl) gemeint, also $g^{-1}(4) = 2$.
(Weil f gar nicht umkehrbar ist, kann die Frage nach $f^{-1}(4)$ nicht gestellt werden.)

c) Das Argument ist ein Intervall. Hier müssen alle Urbilder der Element im Intervall bestimmt werden. Die Lösung ist eine Menge:

$$f^{-1}([1,9]) = [-3,-1] \cup [1,3] \text{ und } g^{-1}([1,9]) = [1,3].$$

d) In dieser Teilaufgabe kommt die Potenz -1 nach $g(x)$ und bedeutet $(g(x))^{-1}$. Sie wird also an der Stelle $g(x)$ angewendet. Hier ist damit der Kehrwert gemeint:

$$g(x)^{-1} = \frac{1}{x^2}, x \neq 0.$$

2 Natürliche, ganze, rationale, reelle, und komplexe Zahlen

Motivation

Als erstes wollen wir hier kurz die grundlegenden Zahlenräume definieren. Wir beginnen mit den **natürlichen Zahlen**. Unter diesen versteht man die Menge

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\},$$

wobei es Definitionssache ist, ob die Null in den natürlichen Zahlen liegt. Wir wollen sie hier allerdings mit der Null definieren. In den natürlichen Zahlen kann man je zwei Elemente wählen, sie addieren oder multiplizieren und es kommt wieder eine natürliche Zahl heraus. Die Umkehrungen, Subtrahieren und Dividieren, ergeben allerdings im Allgemeinen keine natürliche Zahl.
Insbesondere hat die Gleichung $1x + 1 = 0$ keine Lösung x in den natürlichen Zahlen, obwohl alle auftretenden Zahlen natürliche Zahlen sind. Um die Gleichung zu lösen, müssten wir -1 auf beiden Seiten addieren, aber diese Zahl liegt nicht in $\mathbb{N}$.

Wir führen also die **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ ein. Sie sind wie folgt definiert

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Auch aus dieser Zahlenmenge können wir zwei beliebige Zahlen wählen, sie addieren oder multiplizieren und das Ergebnis wird immer noch in den ganzen Zahlen liegen. Auch das Gegenstück zur Addition, die Subtraktion funktioniert problemlos in dieser Menge. Wollen wir jedoch dividieren, so tritt das gleiche Problem wie in den natürlichen Zahlen auf, wir verlassen damit unter Umständen die gegebene Menge.
Betrachten wir wieder die Gleichung $1x + 1 = 0$, so kann diese in den ganzen Zahlen nun gelöst werden. Jedoch kann die Gleichung $2x = 1$ für $x \in \mathbb{Z}$ wieder nicht gelöst werden, obwohl alle auftretenden Zahlen ganz sind. Um die Gleichung zu lösen, müsste auf beiden Seiten durch 2 geteilt werden. Dies ist aber dasselbe wie Multiplikation mit $\frac{1}{2}$, was kein Element in $\mathbb{Z}$ ist.

Um eine Zahlenmenge zu haben in der wir auch dividieren können, führen wir die **rationalen Zahlen**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ teilerfremd}, b > 0 \right\}$$

ein. $\mathbb{Q}$ ist einfach die Menge der „ausgekürzten" Brüche (oder Quotienten) ganzer Zahlen. Hier haben wir, wenn wir die Null bei der Multiplikation ausschließen, zu beiden Rechenoperationen auch immer wieder die Umkehrung als abgeschlossene Rechenoperation in der Menge.
Es ist nun möglich die Gleichung $2x = 1$ mit einem $x \in \mathbb{Q}$ zu lösen. Es gilt sogar ein wenig allgemeiner, dass jede lineare Gleichung der Form $ax + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ mit einem $x \in \mathbb{Q}$ lösbar ist. (Überlegen Sie sich, warum das so ist.)

In der Regel stellen wir Zahlen in der Dezimaldarstellung dar. Das bedeutet, wir haben zehn verschiedene Ziffern $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ und stellen damit all unsere Zahlen dar. Jede rationale Zahl können wir als endenden oder periodischen Dezimalburch darstellen, beispielsweise

endener Dezimalbruch	$\frac{1}{2}$ $= 0{,}5$		periodischer Dezimalbruch	$\frac{1}{3}$ $= 0{,}33333... = 0{,}\overline{3}$.

Jedoch gibt es auch Zahlen, die sich nicht als periodischer oder endlicher Dezimalbruch schreiben lassen. So gibt es zum Beispiel keinen Bruch x, der die Gleichung $x^2 = 2$ löst (siehe Seite 22); d.h. "$\sqrt{2}$" läßt sich nicht als Bruch darstellen. Ein weiteres, solches Beispiel ist π. Also können $\sqrt{2}$ und π nicht in der Menge der rationalen Zahlen liegen. Hierfür erweitern wir die Menge, wie die ersten beiden Male zu den **reellen Zahlen**, in denen auch nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalbrüche enthalten sind.

Es gibt jedoch immer noch einfache Gleichungen, die nicht in den reellen Zahlen lösbar sind, z.B. $x^2 = -1$. Wir erweitern die Menge $\mathbb{R}$ zu Zahlen der Form $a + b \cdot i$, wobei a und b reelle Zahlen sind und i so definiert ist, dass die Gleichung $i^2 = -1$ gilt. Die Menge alle solcher Zahlen heißt die **komplexen Zahlen**.

2.1 Natürliche Zahlen

Die wichtigsten Themen dieses Abschnitts, die über das Semester immer wieder auftauchen werden, sind

- Summenzeichen
- Produktzeichen, Fakultät und Binomialkoeffizienten
- vollständige Induktion.

2.1.1 Summenzeichen

Definition (Summenzeichen)

Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ ist die **Summe** von $k = m$ bis n von x_k gegeben durch

$$\sum_{k=m}^{n} x_k := x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n.$$

Ist $m > n$, definiert man die entsprechende Summe als 0.
k heißt der Index und läuft durch die natürlichen Zahlen von m bis n. x_k heißt der Summand.

Beispiel (Summenzeichen)

Berechnen Sie die Summen $S_n := \sum_{k=0}^{n} k$ für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Für $n = 0$ läuft die Summe von $k = 0$ bis $n = 0$, also nur für $k = 0$:

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} k = 0.$$

Für $n = 1$ läuft die Summe von 0 bis 1; d.h., zuerst ist $k = 0$ und danach ist $k = 1$. Weil $k = 1$ die obere Grenze für S_1 ist, hört der Prozess auf.

Für $n = 2$, hat k drei Werte $(0, 1, 2)$, usw. Es ist hilfreich, den Index k wie einen Zähler zu betrachten:

$$\begin{aligned}
S_1 = \sum_{k=0}^{1} k = 0 + 1 &= 1,\\
S_2 = \sum_{k=0}^{2} k = 0 + 1 + 2 &= 3,\\
S_3 = \sum_{k=0}^{3} k = 0 + 1 + 2 + 3 &= 6,\\
S_4 = \sum_{k=0}^{4} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 &= 10.
\end{aligned}$$

Man merkt, dass wir die Summe S_4 auch mit Hilfe von anderen Summen darstellen können:

$$S_4 = \sum_{k=0}^{4} k = \sum_{k=0}^{3} k + 4 = S_3 + 4.$$

Bemerkung: Bei $\sum_{k=0}^{3} k + 4$ wird 4 zum Schluss dazu addiert. Dies ist anders als bei $\sum_{k=0}^{3} (k + 4)$. Hier wird 4 zu den vier verschiedenen Werten von k addiert. Achten Sie deshalb immer genau darauf, wie die Klammern stehen!

1. Aufgabe (Lerncheck - Summe)

Prüfen Sie nach, dass $\sum_{k=1}^{5}(k^2 - k) = 40$ gilt.

Manchmal ist es hilfreich, wenn die untere Grenze von dem Index eine bestimmte Zahl ist. Dies kann mit einer sogenannte Indexverschiebung erreicht werden, wie im folgenden Beispiel gezeigt wird.

Beispiel (Indexverschiebung)

Schreiben Sie die Summe

$$\sum_{k=1}^{5}(k^2 - k)$$

so um, dass sie bei $k = 0$ anfängt.

Um mit $k = 0$ anzufangen, muss **1** von der unteren Grenze ($k = 1$) und der oberen Grenze ($k = 5$) **abgezogen** werden. Um dies auszugleichen, **addieren** wir **1** zu k im Summanden und zwar an jeder Stelle, an der k auftritt:

$$\sum_{k=1-\mathbf{1}}^{5-\mathbf{1}} ((k+\mathbf{1})^2 - (k+\mathbf{1})) = \sum_{k=0}^{4}(k^2 + 2k + 1 - k - 1) = \sum_{k=0}^{4}(k^2 + k).$$

Die Summe bleibt nach der Indexverschiebung gleich (siehe Lerncheck):

$$(0^2 + 0) + (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) = 0 + 2 + 6 + 12 + 20 = 40.$$

2.1.2 Produktzeichen, Fakultät, binomische Koeffizienten

Das Produktzeichen funktioniert analog zum Summenzeichen. Der Unterschied ist nur das alles multipliziert statt aufsummiert wird.

Definition (Produktzeichen)

Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ ist das **Produkt** von m bis n von x_k gegeben durch

$$\prod_{k=m}^{n} x_k := x_m \cdot x_{m+1} \cdots x_n.$$

Ist $m > n$, so definiert man das Produkt als 1.

Das Symbol '$\cdot$' zwischen x_m und x_{m+1} in der Definition bedeutet Multiplikation. (Das Symbol $\times$ haben wir im 1. Kapitel schon für den wichtigen Begriff des kartesischen Produkts verwendet.) Wir hätten auch $x_m x_{m+1} \cdots x_n$ schreiben können. Das '$\cdot$' ist aber für die Lesbarkeit gut, weil es klar macht, dass wir die Zahlen nicht einfach nebeneinander stellen (wie in der Dezimaldarstellung einer Zahl) sondern dass diese zusammen multipliziert werden.

Das vielleicht aller wichtigste Beispiel eines Produkts in Verbindung mit dem Produktzeichen ist die Fakultät.

Definition (Fakultät)

Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine natürliche Zahl ungleich Null ist $\boldsymbol{n}$ **Fakultät** (Bezeichnung: $n!$) das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n:

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Ist $n = 0$, so ist $0! := 1$ (dies wird zusätzlich definiert, weil die untere Grenze für k größer als die obere Grenze ist (siehe Definition von Produktzeichen)).

Beispiel (Produkt und Fakultät)

1. Berechnen Sie a) $n!$ und b) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

2. Bestimmen Sie natürliche Zahlen, die zu a) $\frac{7!}{5!}$ bzw. b) $\frac{7!}{4!3!}$ gleich sind.

3. Kürzen Sie die Brüche a) $\frac{2(n+1)!}{2n!}$ bzw. b) $\frac{(2(n+1))!}{(2n)!}$ so weit wie möglich.

1a) $1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

1b) $n = 1: \prod_{k=1}^{1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \qquad n = 2: \prod_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{2}{2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$

$n = 3: \prod_{k=1}^{3} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \qquad n = 4: \prod_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

2a) $\frac{7!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = 6 \cdot 7 = 42.$

An diesem Beispiel sehen wir, warum es sich lohnt mit Fakultäten gut umgehen zu können. Betrachten Sie stattdessen die viel kürzere Lösung:

$$\frac{7!}{5!} = \frac{\cancel{5!} \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{5!}} = 42.$$

Hier haben wir die größte Fakultät aufgeteilt, sodass wir die kleinere Fakultät kürzen können, bevor wir alles ausführlich aufschreiben oder ausmultiplizieren. Besonders ohne Taschenrechner spart diese Strategie Zeit.

2b) $\frac{7!}{4!3!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!(1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35.$ (Beispiel eines Binomialkoeffizienten (siehe Definition auf Seite 19))

3a) $\frac{2(n+1)!}{2n!} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{n!} \cdot (n+1)}{\cancel{2} \cdot \cancel{n!}} = (n+1).$

3b) $\frac{(2(n+1))!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \frac{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)}{\cancel{(2n)!}}.$

Aufgabenteile 3a) und 3b) zeigen wie wichtig es ist, Klammern korrekt zu interpretieren bzw. zu benutzen. In $2(n+1)!$ wird $(n+1)!$ mit 2 multipliziert. In $(2(n+1))!$ wird $(n+1)$ mit 2 multipliziert und dann wird die Fakultät berechnet. Berechnen Sie selbst $2(n+1)!$ und $(2(n+1))!$ mit $n = 3$.

(Im ersten Fall sollen Sie $2(3+1)! = 48$ und im zweiten Fall $(2(3+1))! = 40320$ heraus bekommen.)

Definition (Binomialkoeffizient)
Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$ ist der **Binomialkoeffizient** durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

gegeben. Ist $k > n$, setze $\binom{n}{k} := 0$.

2. Aufgabe (Lerncheck - Binomialkoeffizienten)

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ und für $1 \leq k \leq n$ $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ gilt.

b) Berechnen Sie $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$.

Eine wichtige Summe, die die Binomialkoeffizienten beinhaltet ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n.$$

Für $n = 2$ ist diese Formel wohl bekannt:

$$(x+1)^2 = \binom{2}{0} x^0 + \binom{2}{1} x^1 + \binom{2}{2} x^2 = 1 + 2x + 1x^2 = x^2 + 2x + 1.$$

2.1.3 Vollständige Induktion

Vollständige Induktion ist eine Beweismethode mithilfe derer eine Aussage für (alle) natürlichen Zahlen bewiesen werden kann. Das Prinzip der vollständigen Induktion ist, die Aussage für die erste Zahl zu zeigen (der sogenannte Induktionsanfang) und sie dann im Induktionsschritt für alle weiteren natürlichen Zahlen zu beweisen, in dem man zeigt, dass die Aussage auch für jeden Nachfolger gilt. Vergleichbar ist die Induktion mit dem Domino-Effekt. Wird ein Stein angestoßen, fallen unweigerlich alle Steine, solange es keine großen Lücken zwischen diesen gibt. Verdeutlicht wird dies hier unter Analysis I und dann auf den Themenseiten unter vollständige Induktion. Der Vorteil der vollständigen Induktion ist vor allem der, dass kein komplizierter Ansatz benötigt wird und das Beweisprinzip immer gleich ist.

Die Aussage $A(n)$ soll für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ bewiesen werden. Hierbei ist n_0 häufig die erste Zahl, für die die Aussage gilt, also der erste Dominostein, der angestoßen wird.

Induktionsanfang:	IA	$A(n_0)$ wird direkt nachgerechnet und somit überprüft, ob die Aussage stimmt. n_0 sollte aus der Aufgabenstellung erkennbar sein.
Induktionsschritt:	IV	Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festgelegtes $n \geq n_0$ gelte $A(n)$.
	IB	Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $A(n+1)$.
	IS	Induktionsschluss: $A(n+1)$ beweisen, wobei $A(n)$ benutzt werden sollte.

Beispiel (Vollständige Induktion)
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A(n) : \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2 \, .$$

Es muss also die Aussage bewiesen werden:

$$A(n) \; \forall \, n \; \in \; \mathbb{N}, \; n \; \geq \; n_0 = 0$$

(sprich $A(n)$ gilt **für alle** n Element der natürlichen Zahlen, wobei n größer oder gleich dem Anfangswert $n_0 = 0$ ist). D.h. für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ muss gezeigt werden, dass die folgende Gleichung gültig ist:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2 \, .$$

Induktionsanfang **(IA)**:
Für den Induktionsanfang muss zunächst $A(n_0)$ direkt berechnet werden, wobei hier $n_0 = 0$ ist, der Anfangswert n_0 kann je nach Aufgabentyp verschiedene Werte annehmen. Es ist in der Regel die erste natürliche Zahl, für die die Aussage $A(n)$ gilt.

$$\sum_{k=0}^{n_0=0} (2k+1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1, \qquad \text{siehe Beispiel auf Seite 16}$$
$$(n_0+1)^2 = (0+1)^2 = 1.$$

Somit ist folgendes gezeigt:

$$A(n_0 = 0) : \sum_{k=0}^{n_0=0} (2k+1) = (n_0+1)^2 \, .$$

Induktionsschritt:

- **IV** (Induktionsvoraussetzung)
  Für ein beliebiges aber festes $n \geq n_0$ gelte

  $$A(n) : \sum_{k=0}^{n} (2 \cdot k + 1) = (n+1)^2,$$

  sprich für eine Zahl, die größer oder gleich n_0 ist.

- **IB** (Induktionsbehauptung)
  Ist die Induktionsvoraussetzung gültig, dann gilt auch $A(n+1)$, wobei diese Vermutung erst mit dem Induktionsschluss bewiesen werden sollte. Hierfür wird $\boldsymbol{n+1}$ anstelle von n in $A(n)$ eingesetzt:

  $$A(\boldsymbol{n+1}) : \sum_{k=0}^{\boldsymbol{n+1}} (2 \cdot k + 1) = ((\boldsymbol{n+1}) + 1)^2 = (n+2)^2 \, .$$

  Merke: Die Induktionsvoraussetzung und die Induktionsbehauptung sind formelle Schritte, die immer mit aufgeschrieben werden müssen.

- **IS** (Induktionsschluss)
  Nun muss $A(n+1)$ bewiesen werden, wobei $A(n)$ benutzt wird:

$$A(n+1): \sum_{k=0}^{n+1} (2\cdot k+1) = (n+2)^2 \text{ [ist zu zeigen, siehe IB]}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (2\cdot k+1) &= \sum_{k=0}^{n} (2\cdot k+1) + 2\cdot(n+1)+1 && \text{[Summe aufspalten]}\\
&= (n+1)^2 + 2n+2+1 && \text{[IV benutzen]}\\
&= n^2+2n+1+2n+3\\
&= n^2+4n+4\\
&= (n+2)^2. && \text{[1. binomische Formel]}
\end{aligned}$$

Weil $A(n_0)$ gilt und aus $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ folgt, gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

3. Aufgabe (Lerncheck - vollständige Induktion)

Wenden Sie die Methode der vollständigen Induktion an, um die folgenden Aussagen zu beweisen:

a) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \geq 1$, b) $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$ für alle $n \geq 0$.

2.2 Ganze, rationale und reelle Zahlen

Diese Zahlenmengen wurden in der Motivation eingeführt. In diesem Abschnitt werden Beispiele zum folgenden Themen vorgeführt:

- Dezimalzahlen in Form eines Bruches darstellen,
- Existenz einer reellen Zahl, die keine rationale Zahl ist,
- Ungleichungen lösen.

Beispiel (Umrechnung von Dezimalzahlen in Brüche)
Geben Sie die folgenden Dezimalzahlen in Form eines Bruches an:

a) $0{,}125$, b) $0{,}\overline{45}$, c) $3{,}2\overline{741}$.

a) $x = 0{,}125 = 0{,}125 \cdot \frac{1000}{1000} \overset{*}{=} \frac{125}{1000} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot 8} = \frac{1}{8}$.

$*$ Hier wurde mit $\frac{10^3}{10^3}$ wegen den 3 Stellen nach dem Komma erweitert.

b) Setzen wir $x = 0{,}\overline{45} = 0{,}45\overline{45}$ und multiplizieren den periodischen Dezimalbruch mit einer Potenz von 10 (diesmal 10^2) sodass die Ziffern, die sich periodisch wiederholen, einmal vor dem Komma auftauchen. Wir bekommen die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned}
100x &= 45{,}45\overline{45},\\
x &= 0{,}45\overline{45}.
\end{aligned}$$

Durch abziehen der 2. Gleichung von der 1. Gleichung, erhalten wir die Gleichung $99x = 45$ oder

$$x = \frac{45}{99} = \frac{\cancel{9}\cdot 5}{\cancel{9}\cdot 11} = \frac{5}{11},$$

sodass $0{,}\overline{45} = \frac{5}{11}$ gilt.

c) In diesem Beispiel multiplizieren wir $x = 3{,}2\overline{741} = 3{,}2741\overline{741}$ mit 10000, sodass die Ziffern die sich periodisch wiederholen einmal vor dem Komma auftauchen: $10000x = 32741{,}\overline{741741}$. Um denselben Trick wie im 2. Beispiel anzuwenden, müssen wir $x = 3{,}2\overline{741}$ mit 10 multiplizieren, bevor die 2. Gleichung von der 1. Gleichung abgezogen wird:

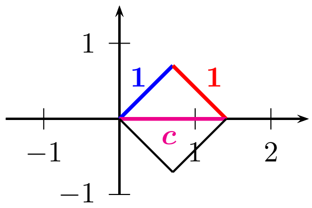
$$\begin{aligned} 10000x &= 32741{,}\overline{741}, \\ 10x &= 32{,}\overline{741}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist $9990x = 32709$. Daraus folgt

$$x = \frac{32709}{9990} = \frac{\cancel{3} \cdot 10903}{\cancel{3} \cdot 3330} = \frac{10903}{3330}.$$

Beispiel ($\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, Satz von Euklid)
Die Zahl $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Um die Behauptung zu beweisen, wird ein Quadrat der Seitenlänge 1 mit der **Diagonalen c** auf der x-Achse in das Koordinatensystem gelegt.



Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$c^2 = \mathbf{1}^2 + \mathbf{1}^2 = 2.$$

Falls c eine rationale Zahl ist, muss es nach der Definition von $\mathbb{Q}$ zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit m und n teilerfremd (d.h. der größte gemeinsame Teiler von m und n ist 1) geben, sodass

$$c^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$$

gilt. Es folgt daraus

$$m^2 = 2n^2,$$

sodass die natürliche Zahl m^2 eine gerade Zahl (nämlich $2n^2$) sein muss. Wäre m ungerade, so wäre dann auch m^2 ungerade. Folglich ist m eine gerade Zahl. D.h. $m = 2r$ für ein $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Damit ist

$$2n^2 = m^2 = (2r)^2 = 4r^2$$

oder

$$n^2 = 2r^2.$$

Weil nun auch n gerade sein muss, sind m, n nicht teilerfremd, denn 2 teilt beide Zahlen. Dies widerspricht die Annahme, dass es eine Zahl $c \in \mathbb{Q}$ (d.h. $c = \frac{m}{n}$ mit dem größten gemeinsamen Teiler 1) gibt, sodass $c^2 = 2$ oder äquivalent $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ungleichungen

Nachdem wir nun die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eingeführt haben, wollen wir noch anmerken, dass es auf all diesen Zahlen immer eine Größenrelation gibt. Nimmt man aus egal welcher Menge zwei verschiedene Elemente x und y, so kann man immer entweder sagen

$$x < y \quad \text{oder} \quad x > y. \tag{1}$$

Das heißt die Mengen sind alle geordnet. Gilt für x und y, dass $x = y$ oder $x < y$ so schreibt man $x \leq y$ und analog für $x = y$ oder $x > y$ dann $x \geq y$. Haben wir solche Ungleichungen, lässt es sich damit ähnlich rechnen wie mit normalen Gleichungen. Es gelten folgende Regeln

$$\begin{aligned}
x < y \text{ und } y < z \quad &\Rightarrow x < z, & (2)\\
x < y \text{ und } a \leq b \quad &\Rightarrow x + a < y + b, & (3)\\
x < y \text{ und } a > 0 \quad &\Rightarrow ax < ay, & (4)\\
x < y \text{ und } a < 0 \quad &\Rightarrow ax > ay & (5)
\end{aligned}$$

für alle $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

Auch von Wichtigkeit ist der Absolutbetrag, der den Abstand von x zu 0 liefert:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Daraus können wir für jede reelle Zahl folgern

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Eine weitere Ungleichung, die für alle reellen Zahlen x und y gilt, ist die sogenannte *Dreiecksungleichung*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Diese kann helfen, um manche Ungleichungen zu zeigen, und ist vorallem für Beweise wichtig.

Beispiel (Anwendung des Betrages)
Ermitteln Sie für die folgende Ungleichung alle reellen Lösungen:

$$x^2 < 2 - |x|.$$

Für Ungleichungen wie diese ist es oft ratsam den Betrag aufzulösen, in dem man die zwei Fälle unterscheidet, dass was innerhalb der Betragsstriche steht negativ oder nicht negativ (d.h. positiv oder Null) sein kann.
Für die erste Ungleichung betrachten wir also die Fälle 1. $x \geq 0$ und 2. $x < 0$.

1. Fall (**$x \geq 0$**). Ist $x \geq 0$ eine Lösung der gegebenen Ungleichung, so ist x auch eine Lösung der Ungleichung

$$x^2 < 2 - x$$

oder eben

$$x^2 + x - 2 < 0.$$

Die linke Seite der Ungleichung kann zerlegt werden: $(x-1)(x+2)$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)(x+2)$. Die Nullstellen von f sind wegen der Schreibweise $f(x) = (x-1)(x+2) = 0$ einfach zu erkennen: $x = 1$ und $x = -2$. (Diese sind genau die Lösungen der Gleichung $(x-1)(x+2) = 0$, weil aus $a \cdot b = 0, a, b \in \mathbb{R}$, folgt $a = 0$ oder $b = 0$.) Nun wissen wir, dass $f(x) = 0$ nur für $x = 1$ auf dem Intervall $[0, \infty[$. Für alle andere x-Werte muss $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$ wegen (1), d.h. $f(x)$ ist für $x \in [0, \infty[\setminus\{1\}$ entweder positiv oder negativ.
Wegen (3) gilt für $1 < x$ und $-1 \leq -1$ $1 - 1 < x - 1$, sodass $x - 1 > 0$ eine positive Zahl ist. Analog gilt für $1 < x$ und $2 \leq 2$ wegen (3) $1 + 2 < x + 2$, d.h. $x + 2$ ist eine positive Zahl. Insgesamt ist für jedes $x \in]1, \infty[$

das Produkt $(x-1)(x+2)$ als Produkt zweier positiver Zahlen eine positive Zahl, d.h. $(x-1)(x+2) > 0$ für $x \in]1, \infty[$. Diese x-Werte erfüllen die Ungleichung $(x-1)(x+2) < 0$ nicht.

Für $x \in [0, 1[$ erfüllt x gleichzeitig die Ungleichungen $0 \leq x$ und $x < 1$. Durch Addition mit -1 bekommen wir $-1 \leq x - 1$ und $x - 1 < 0$, d.h. $-1 \leq x - 1 < 0$, sodass $x - 1$ eine negative Zahl ist. Ganz analog folgt aus $0 \leq x < 1$ die Ungleichung $2 \leq x + 2 < 3$, d.h. $x + 2$ ist eine positive Zahl. Das Produkt einer negativen Zahl mit einer positiven Zahl ergibt eine negative Zahl. Die x-Werte in $\mathbf{[0, 1[}$ erfüllen deshalb die Ungleichung $(x-1)(x+2) < 0$.

2. Fall $(x < 0)$. Angenommen x erfüllt $x^2 < 2 - |x|$ und $x < 0$. Dann ist x auch eine Lösung der Ungleichung

$$x^2 < 2 - (-x),$$

die sich als

$$x^2 - x - 2 < 0$$

schreiben läßt. Die linke Seite kann zerlegt werden: $(x+1)(x-2)$.

Gehen Sie wie im ersten Fall voran, um mit Ungleichungen zu beweisen, dass die negativen x-Werte, die die Ungleichung $(x+1)(x-2) < 0$ erfüllen, genau die x-Werte in $\mathbf{]-1, 0[}$ sind.
Nun müssen wir nur noch die beiden Lösungsmengen vereinigen und erhalten

$$\mathbf{[0, 1[} \;\cup\; \mathbf{]-1, 0[} \;=\;]-1, 1[$$

als Lösungsmenge der Ungleichung.

2.3 Komplexe Zahlen

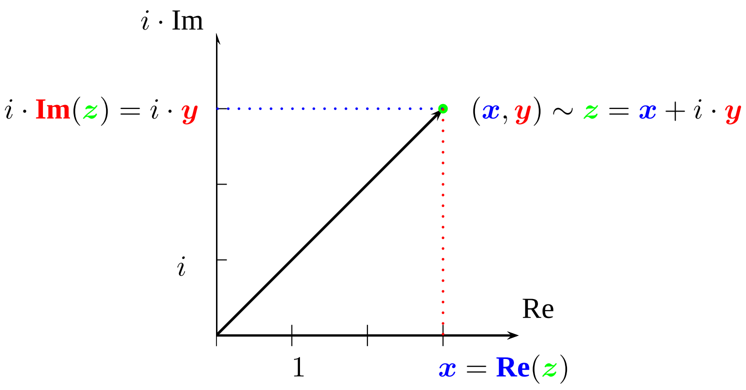
Wie in der Motivation bereits erwähnt, haben wir die komplexen Zahlen eingeführt, um jetzt alle Gleichungen lösen zu können, wie zum Beispiel $x^2 = -1$ mit $x = i$. Komplexe Zahlen eignen sich gut zur Beschreibung von Schwingungen und werden deshalb in der Physik, z.B. in der Wechselstromlehre, benutzt. Das Symbol *i* heißt dort allerdings *j*.
Die Themen die wir hier betrachten wollen, sind:

- Kartesische Darstellung,
- Polarform,
- Umrechnung: Polarkoordinaten, kartesische Koordinaten.

2.3.1 Kartesische Darstellung

Eine komplexe Zahl hat die Form $z = \boldsymbol{x} + i \cdot \boldsymbol{y}$, wobei x und y reelle Zahlen sind. Sie hat einen **Realteil** ($\mathrm{Re}(z) = x$) und einen **Imaginärteil** ($\mathrm{Im}(z) = y$). Beispielsweise ist $\mathrm{Re}(3 - 2i) = 3$ und $\mathrm{Im}(3 - 2i) = -2$. $\mathrm{Im}(z)$ heißt zwar Imaginärteil von z, ist aber selbst reell ($\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$). Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet (in Symbolen: $\mathbb{C} = \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$).

Um eine komplexe Zahl geometrisch darzustellen bedienen wir uns der „Gauß'schen Zahlenebene". Hier benennen wir einfach die Y-Achse in die „Imaginär-Achse" um, wobei die X-Achse reel bleibt. Die komplexe Zahl $z = x + i \cdot y$ wird mit dem Punkt (x, y), der die **kartesischen Koordinaten** von z enthält, identifiziert.



Jede reelle Zahl x kann auch als eine komplexe Zahl betrachtet werden, denn es gilt $x = x + i \cdot 0$. D.h. die reellen Zahlen sind in den komplexen Zahlen enthalten (in Symbolen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Zahlen der Form $z = i \cdot y = 0 + i \cdot y$ heißen **imaginär**.

Definition (Grundlegende Rechenregeln - Summe; Produkt; Konjugierte)

Für $z_1 = x_1 + i \cdot y_1, z_2 = x_2 + i \cdot y_2 \in \mathbb{C}$ sind die **Summe** $z_1 + z_2$ und das **Produkt** $z_1 \cdot z_2$ folgendermaßen definiert:

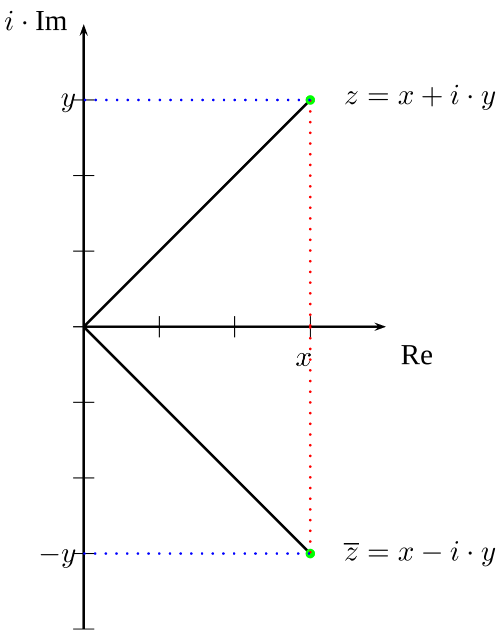
$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + i \cdot y_1)(x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Die zu $z := x + i \cdot y$ **konjugierte** Zahl $\overline{z}$ (sprich: z quer) ist gegeben durch:

$$\overline{z} := x - i \cdot y.$$

In der Mathematik bezeichnet die Konjugierte einer komplexen Zahl die Spiegelung an der reellen Achse.



Beispiel (Rechenregeln für komplexe Zahlen)

Seien $z_1 := 3 + i \cdot 4,\ z_2 := 2 - i \cdot 11,\ z_3 := 4 + i \cdot 7.$ Bestimmen Sie

$$z_1 + z_2 \quad , \quad z_3 - 2z_1 \quad , \quad z_1 \overline{z}_2.$$

$$z_1 + z_2 = (3 + i \cdot 4) + (2 - i \cdot 11) = 5 - i \cdot 7.$$

$$z_3 - 2z_1 = (4 + i \cdot 7) - 2(3 + i \cdot 4) = (4 + i \cdot 7) + (-6 - i \cdot 8) = -2 - i.$$

$$\begin{aligned} z_1\overline{z}_2 = (3+i\cdot 4)\overline{(2-i\cdot 11)} &= (3+i\cdot 4)(2+i\cdot 11) \\ &= (6+i\cdot 33+i\cdot 8+i^2 44) \\ &\overset{i^2=-1}{=} (6+i\cdot 41-44) \\ &= -38+i\cdot 41. \end{aligned}$$

4. Aufgabe (Lerncheck - Rechenregel für komplexe Zahlen)

Seien $z_1 := 3+i\cdot 4,\ z_2 := 2-i\cdot 11,\ z_3 := 4+i\cdot 7.$ Bestimmen Sie

$$z_1+z_3 \quad , \quad 7z_2-2\overline{z}_1 \quad , \quad \overline{\overline{z}}_1\overline{z}_2.$$

Rechenregeln für die Konjugation

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 := x+i\cdot y$ gelten

$$z_1\cdot\overline{z_1} = x^2+y^2, \qquad \overline{\overline{z_1}} = z_1, \qquad \overline{z_1\pm z_2} = \overline{z_1}\pm\overline{z_2},$$

$$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Wir prüfen die erste Regel nach:

$$z_1\cdot\overline{z_1} = (x+i\cdot y)\overline{(x+i\cdot y)} \overset{\downarrow \text{ Konjugation}}{=} (x+y\cdot i)(x-y\cdot i) \overset{\substack{\text{3. binom.}\\ \downarrow \text{ Formel}}}{=} (x^2-y^2\cdot i^2) \overset{\downarrow\, i^2=-1}{=} x^2+y^2. \tag{6}$$

Im Allgemeinen ist $z_1\cdot\overline{z_1}$ also eine reelle Zahl!

5. Aufgabe (Lerncheck - Rechenregeln für die Konjugation)

Prüfen Sie die restlichen Rechenregel für die Konjugation unter Verwendung von $z_1 := x_1+i\cdot y_1$ und $z_2 := x_2+i\cdot y_2$ nach!

Erweitern mit der komplex-konjugierten Form ($\overline{z} = x-i\cdot y$)

Sei $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $z = x+i\cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Es stellt sich die Frage, ob $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+i\cdot y}$ auch eine komplexe Zahl ist; d.h. gibt es reelle Zahlen a, b, sodass $\frac{1}{z} = a+i\cdot b$? Wir haben gerade gesehen (6), dass $z\overline{z}$ die reelle Zahl x^2+y^2 ist. Deshalb erweitern wir einen komplexen Bruch mit der komplex-konjugierten Form des Nenners, damit der Nenner des umgeformten Bruchs reel wird.

Ganz explizit: $\frac{1}{z}$ mit $\frac{\overline{z}}{\overline{z}}$ erweitern (d.h. eine Multipikation mit 1, somit ändert sich die Zahl nicht).

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{x-i\cdot y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}$$

So haben wir die Zahl $\frac{1}{z}$ in die komplexe Schreibweise $a+i\cdot b$ mit reellen Zahlen $a = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $b = \frac{-y}{x^2+y^2}$ transformiert.

6. Aufgabe (Lerncheck - kartesische Form)

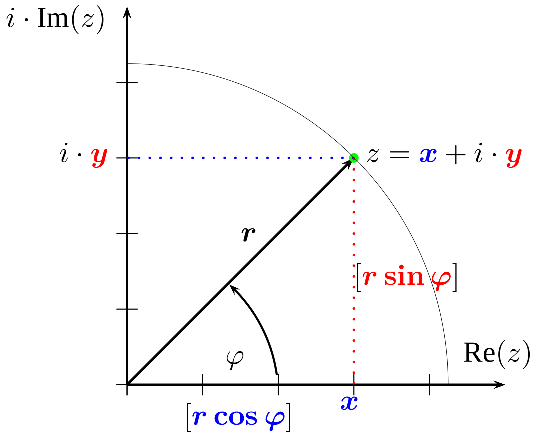
Stellen Sie die Brüche $\frac{1}{3+i\cdot 4}$ und $\frac{3+i\cdot 4}{2-i\cdot 11}$ in der Form $x+i\cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}$ dar.

2.3.2 Komplexe Zahlen und Polarkoordinaten

Eine komplexe Zahl z kann auf verschiedene Weisen dargestellt werden. Es hängt vom Zweck oder von der Fragestellung einer Aufgabe ab, welche Darstellung benutzt werden soll. Wir haben in der Einführung zu komplexen Zahlen die kartesische Form $z = x + i \cdot y$ und die kartesischen Koordinaten (x, y) schon kennengelernt. Man kann z auch durch den Abstand $r \geq 0$ vom Ursprung und den Winkel φ im Bogenmaß (siehe Bild) angeben. Dies ist möglich, weil jeder Punkt in der Ebene auf einem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ liegt, der den Mittelpunkt im Ursprung hat und den Radius r besitzt.

- Für $z = 0$ ist der Abstand vom Ursprung $r = 0$, sodass φ frei gewählt werden kann.
- Für $z \neq 0$ ist der Winkel im Bogenmaß bis auf ein Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. (Häufig ist φ in der Literatur so definiert, dass entweder $\varphi \in]-\pi, \pi]$ oder $\varphi \in]0, 2\pi]$ ist. Im Skript jedoch wird $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ definiert.)

Die folgende Skizze zeigt die Beziehung zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) und den **Polarkoordinaten** (r, φ) für $z = x + i \cdot y$.



Aus der Trigonometrie erhalten wir die Formeln, mit denen wir die kartesischen Koordinaten aus den Polarkoordinaten berechnen können:

$$x = r \cos \varphi,$$
$$y = r \sin \varphi.$$

Diese Gleichungen führen zu einer anderen Schreibweise für $z = x + i \cdot y = r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi$, die sogenannte Polarform von z.

Definition (Polarform)
Die **Polarform** der komplexen Zahl z ist gegeben durch

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

Ist $z \neq 0$, so ist r eindeutig und φ bis auf ein Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. Der Winkel φ heißt **Argument** von z. Für $z = 0$ wird auch $r = 0$ gesetzt und φ frei gewählt:

$$0 = 0(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

Eine andere Notation oder Kurzform für die Polarform (die sogenannte **Exponentialform**) ist:

$$z = r \cdot \exp(i \cdot \varphi) = re^{i \cdot \varphi};$$

(bzw. in der Physik, E-Technik, etc.)

$$z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}.$$

Wie Sie in der Übung sehen werden, ist die Exponentialform für die Multiplikation von komplexen Zahlen oder das Lösen von Gleichungen der Form $z^n = x + i \cdot y$, mit $x, y \in \mathbb{R}$ besonders günstig.

2.3.3 Umrechnung: Polarkoordinaten, kartesische Koordinaten

Sind die Polarkoordinaten (r, φ) gegeben, so ist es simpel diese in kartesische Koordinaten umzurechnen, wie vorher beschrieben: $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Beispiel (Polarkoordinaten in kartesischen Koordinaten)

Bestimmen Sie aus der Polarform von $z = 2(\cos\pi + i \cdot \sin\pi)$ die kartesische Form von z.

Die Polarkoordinaten sind leicht zu erkennen: $r = 2, \qquad \varphi = \pi.$
Es gilt: $x = r\cos\varphi = 2\cos\pi = -2$ und $y = r\sin\varphi = 2\sin\pi = 0$.
Die kartesischen Koordinaten sind $(-2, 0)$, d.h. $z = x + i \cdot y = -2 + i \cdot 0$ ist die kartesische Form von z.

Sind jedoch die kartesischen Koordinaten gegeben, gestaltet sich die Umrechnung etwas komplizierter. Der *Radius* der komplexen Zahl $z = x + i \cdot y$ (d.h. der Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems - siehe Bild auf Seite 27) ist nach dem Satz von Pythagoras berechenbar:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Das ist immer noch sehr simpel. Das Argument φ ist definiert als

$$\varphi := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0, y < 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) & \text{für} \quad x > 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{für} \quad x < 0, \end{cases}$$

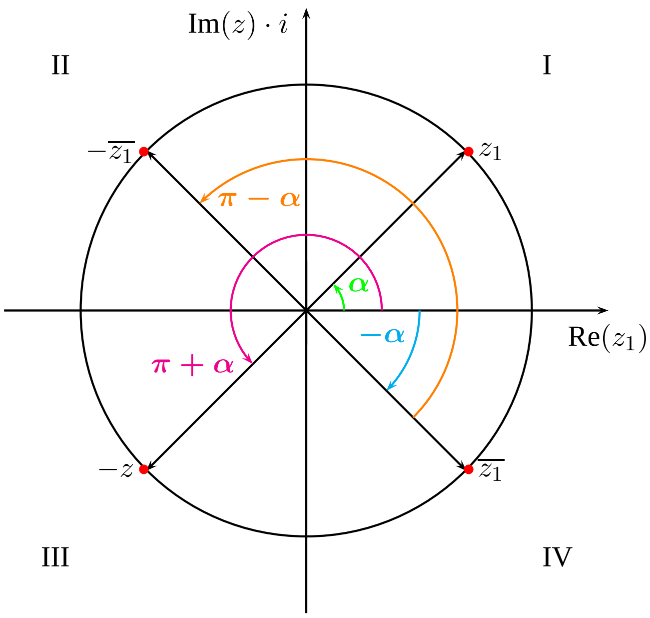
weil für $x \neq 0$ ist $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x}$ und für $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist $\arctan(\tan(\varphi)) = \varphi$. Um zu verstehen, wie φ bestimmt wird, betrachten wir die verschiedenen Fälle. Vergleichen Sie die folgenden Fälle mit dem Bild unten.

$x = 0$: $z = x + i \cdot y$ ist eine imaginäre Zahl, d.h. der Punkt $(0, y)$ liegt auf der Imaginäre-Achse. Weil $r \geq 0$, ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $y > 0$ ist und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $y < 0$. (Im Fall $y = 0$ ist φ frei wählbar.)

Ist $x \neq 0$, setze $\alpha := \arctan(|\frac{y}{x}|)$.

$x > 0$: Der Punkt (x, y) liegt im Quadrant I (siehe Bild) oder Quadrant IV, sodass $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist. Weil dies dem Wertebereich von arctan entspricht, ist $\arctan(\frac{y}{x}) = \varphi$. Es gilt für $y > 0$, dass $\varphi = \alpha$ und für $y < 0$ gilt $\varphi = -\alpha$.

$x < 0$: Der Punkt (x, y) liegt im Quadrant II oder Quadrant III. Um die Winkel der jeweiligen Zahlen in den Quadranten II und III zu bestimmen, müssen wir auf der Seite genau gegenüber $-\alpha$ bzw. α bestimmen und dann $\pi \quad (180°)$ dazu addieren.



Beispiel (kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten)
Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $z = -\sqrt{3} + i$. Stellen Sie z in der Polarform und in der Exponentialform dar.

Wir betrachten den Punkt $(-\sqrt{3}, 1)$ in der Gauß'schen Ebene. Der Abstand von z zu $(0, 0)$ ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{-3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Aus der folgenden Tabelle für $\sin$ und $\cos$ (und $\tan$), die unbedingt auf die Formelsammlung für die Prüfung sollte, lässt sich nun der Winkel φ (ohne Taschenrechner!) bestimmen.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	undefiniert

Die Werte der Tabelle sind jedoch nur für den Quadrant I bestimmt. Es handelt sich in diesem Beispiel aber um einen Punkt im Quadrant II. Mithilfe des Bildes auf der vorigen Seite ist das Problem einfach gelöst: Zuerst bestimmen wir

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|y|}{|x|}\right) = \arctan\left(\frac{|1|}{|-\sqrt{3}|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Weil das Vorzeichen von x mit dem Vorzeichen von y nicht übereinstimmt, wird zunächst $-\frac{\pi}{6}$ betrachtet. Um in den II Quadrant zu kommen, addieren wir π dazu: $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$.

Die Polarkoordinaten von $-\sqrt{3} + i$ sind $(r, \varphi) = (2, \frac{5\pi}{6})$. Die Polarform ist $z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{6}))$. In der Exponentialform ist z gegeben durch $re^{i \cdot \varphi} = 2e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$.

Zur Prüfung der Antwort bedienen wir uns der Rückrechnung in kartesische Koordinaten, um die Ausgangsdarstellung zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
r \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}} &= 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6}) \\
&= 2 \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \cdot 2 \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \\
&= 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{3} + i.
\end{aligned}
$$

7. Aufgabe (Lerncheck - Winkel bestimmen)

Bestimmen Sie den Winkel φ für $z = \pm\sqrt{3} \pm i$.

8. Aufgabe (Lerncheck - Polorkoordinaten in kartesische Form)

Bestimmen Sie die kartesische Form $x + i \cdot y$ von z_k für $k = 1, \ldots, 6$.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{7}}(\cos \pi + i \cdot \sin \pi), & z_4 &= 16(\cos(-\tfrac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(-\tfrac{\pi}{3})), \\
z_2 &= 4(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2})), & z_5 &= \tfrac{124}{365}(\cos(\tfrac{5\pi}{6}) + i \cdot \sin(\tfrac{5\pi}{6})), \\
z_3 &= \tfrac{19}{6}(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\tfrac{\pi}{4})), & z_6 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos(\tfrac{5\pi}{4}) + i \cdot \sin(\tfrac{5\pi}{4})).
\end{aligned}
$$

9. Aufgabe (Lerncheck - Kartesische Form in Polarkoordinaten)

Bestimmen Sie die Polarform $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ bzw. Euler-Form $re^{i \cdot \varphi}$ von z_k für $k = 1, \ldots, 4$.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 7 \cdot \sqrt{3} + i \cdot 7, & z_3 &= -2 - i \cdot 2\sqrt{3}, \\
z_2 &= -\tfrac{1}{5} + i \cdot \tfrac{1}{5}, & z_4 &= 15\sqrt{3} - i \cdot 15\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

2.3.4 Multiplikation von komplexen Zahlen, Gleichungen mit komplexen Lösungen

Der Umgang mit komplexen Zahlen erfordert, dass man auch komplexe Gleichungen lösen kann. Um den Lösungsprozess besser zu verstehen, wird in diesem Abschnitt die Multiplikation von komplexen Zahlen näher betrachtet. Danach werden alle Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

bestimmt. Diese Lösungen werden eingesetzt, um alle Lösungen der Gleichung

$$z^n = w \quad \text{für} \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

auszurechnen. Kompliziertere Gleichungen werden später im Semester behandelt.

Multiplikation von komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen in kartesischer Form

$$z_1 = a_1 + ib_1 \qquad z_2 = a_2 + ib_2$$

miteinander zu multiplizieren ist nicht schwierig

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\
&= a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 + i^2 b_1 b_2 \\
&= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1),
\end{aligned}
$$

jedoch nicht besonders aufschlussreich. Schreiben wir die Zahlen in Polarform

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

und multiplizieren

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)), \end{aligned}$$

scheint es, als ob wir nicht weiter gekommen sind. Unter Benutzung der trigonometrischen Identitäten

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha$$

mit $\alpha = \theta_1$ und $\beta = \theta_2$ erhalten wir den Satz:

Satz (Multiplikation zweier komplexen Zahlen)
Das Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ lautet

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

Bemerkung: Die Radien der zwei Zahlen werden miteinander multipliziert und die Winkel miteinander addiert, wie im folgenden Beispiel mit konkreten Zahlen verdeutlicht wird.

Beispiel (Multiplikation zweier komplexen Zahlen)
Gegeben seien die komplexen Zahlen

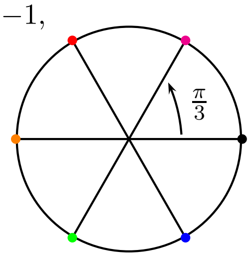
$$u = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad v = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Bestimmen Sie uv sowie $z^2, z^3, \ldots, z^6$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad uv &= \sqrt{2}\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{2\pi+3\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi+3\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Die Potenzen von z lauten

$$\begin{aligned} z &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \\ z^2 &= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \\ z^3 &= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1, \\ z^4 &= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}, \\ z^5 &= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}, \\ z^6 &= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6 = \cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 + i\cdot 0 = 1. \end{aligned}$$



Bemerkungen zum vorangehenden Beispiel:

• Die komplexe Zahl z ist eine sogenannte 6-te Wurzel aus 1, weil gilt $z^6 = 1$. Jede Potenz z^k von z ($k \in \mathbb{N}$) ist auch eine 6-te Wurzel aus 1:
$$(z^k)^6 = (z^6)^k = 1^k = 1.$$

• Für $k = 1, 2, \ldots, 6$ sind die Werte z^k unterschiedlich. Für $k \geq 7$ wiederholen sich die Werte; z.B.
$$\begin{aligned} z^7 &= z^6 z^1 = 1 \cdot z^1 = z, \\ z^{29} &= (z^6)^4 z^5 = 1^4 \cdot z^5 = z^5, \\ z^{30} &= (z^6)^5 = 1^5 = 1. \end{aligned}$$

• Die sechs 6-ten Wurzeln aus 1 sind gleichermassen in der komplexen Ebene am Einheitskreis verteilt.

Die n-ten Wurzeln aus 1

Die n-ten Wurzeln aus 1 zu bestimmen, bedeutet dasselbe wie alle Lösungen der Gleichung
$$z^n = 1 = 1 + i \cdot 0 = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi)$$
mit $z \in \mathbb{C}$ zu bestimmen. Die komplexe Zahl
$$z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$
ist eine Lösung der gegebenen Gleichung, weil gilt
$$z_0^n = \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1.$$
Alle Bemerkungen zu dem vorangehenden Beispiel können zu der allgemeinen Situation angepasst werden. Beispielsweise ist z_0^k ($k \in \mathbb{N}$) auch eine Lösung der Gleichung $z^n = 1$, sodass z_0^k eine n-te Wurzel aus 1 ist. Auf diese Weise erhalten wir n unterschiedliche n-te Wurzeln aus 1:
$$\begin{aligned} z_1 &= z_1^1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \\ z_2 &= z_1^2 = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right), \\ &\vdots \\ z_n &= z_1^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = 1. \end{aligned}$$
Diese sind gleichermassen auf dem komplexen Einheitskreis verteilt.

Dass es keine weiteren n-ten Wurzeln aus 1 gibt, soll auch überlegt werden. Sei dazu $u = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ eine n-te Wurzel aus 1. Dann gilt
$$u^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = 1 = 1(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)).$$
Nun muss $r^n = 1$ mit $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$; d.h. $r = 1$. Wegen der Periodizität der Cosinus- und Sinus-Funktionen ist $n\theta$ ein Vielfaches von 2π; d.h. $\theta = k\frac{2\pi}{n}$ für eine natürliche Zahl k. Diese sind bis auf ein Vielfaches von 2π genau die Lösungen für θ, die wir gefunden haben.

10. Aufgabe (Lerncheck - n-te Wurzel aus 1)

a) Bestimmen Sie die 5-ten Wurzeln aus 1.

b) Warum gibt es keinen Winkel α mit $0 < \alpha < \frac{2\pi}{5}$ für den gilt $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^5 = 1$?

Das Lösen der Gleichung $z^n = w$

Das Lösen von Gleichungen der Form

$$z^n = w,\ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist genau so einfach wie das Lösen der Gleichung $z^n = 1$. Eine Lösung der Gleichung $z^n = w$, wobei $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ für geeignete r und θ ist, lautet

$$z_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right),$$

weil gilt

$$\begin{aligned} z_0^n &= \left(r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)\right)^n \\ &= (r^{\frac{1}{n}})^n\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)^n \\ &= r(\cos\left(n\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(n\frac{\theta}{n}\right) \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta). \end{aligned}$$

Ist v eine n-te Wurzel aus 1, so ist $z_0 v$ auch eine Lösung der gegebenen Gleichung:

$$(z_0 v)^n = z_0^n v^n = w \cdot 1 = w.$$

Die n Lösungen der Gleichung $z^n = w$ sind deshalb

$$z_0, z_0 v, z_0 v^2, \ldots, z_0 v^{n-1}$$

oder

$$z_0, z_0\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right), \ldots, z_0\left(\cos\frac{(n-1)2\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)2\pi}{n}\right).$$

Satz (Lösungen der Gleichung $z^n = w$)
Die n Lösungen der Gleichung $z^n = w$ mit $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sind

$$\begin{aligned} z_0 &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right), \\ z_1 &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 1\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 1\cdot 2\pi}{n}\right)\right), \\ z_2 &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\cdot 2\pi}{n}\right)\right), \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta + (n-1)\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + (n-1)\cdot 2\pi}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

d.h. $z_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k\cdot 2\pi}{n}\right)\right)$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Beispiel (Lösen der Gleichung $z^n = w$)
Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = \frac{\sqrt{3}}{4} - i \cdot \frac{1}{4}$.

Die Polarform der Zahl $w = \frac{\sqrt{3}}{4} - i \cdot \frac{1}{4}$ wird erst bestimmt. Der Betrag von w ist

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Mit Hilfe der Tabelle für besondere Werte von Sinus und Cosinus bekommen wir

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

(Alternativ kann man $\theta = \frac{11\pi}{6}$ statt $-\frac{\pi}{6}$ setzen.)

Wir erhalten die $n = 4$ Lösungen:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\frac{\pi}{6}}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\frac{\pi}{6}}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24}\right)\right), \\
z_1 &= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{2\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{12\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{12\pi}{24}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(\tfrac{11\pi}{24}\right) + i\sin\left(\tfrac{11\pi}{24}\right)\right), \\
z_2 &= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{2\cdot 12\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{2\cdot 12\pi}{24}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{24\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{24\pi}{24}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(\tfrac{23\pi}{24}\right) + i\sin\left(\tfrac{23\pi}{24}\right)\right), \\
z_3 &= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{3\cdot 12\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{3\cdot 12\pi}{24}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{36\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{36\pi}{24}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(\tfrac{35\pi}{24}\right) + i\sin\left(\tfrac{35\pi}{24}\right)\right).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Winkel erhöht sich um $\frac{2\pi}{4} = \frac{12\pi}{24}$ von z_k zu z_{k+1}: $\frac{-\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{35\pi}{24}$. Es ist deshalb nicht notwendig, die Formel jedes mal erneut anzuwenden. Die ersten zwei Lösungen sollen ausführlich dargestellt werden. Die restlichen Lösungen können einfach aufgeschrieben werden. Eine kürzere Lösung, die unnötige Schreiberei in der Klausur spart, ist also:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\frac{\pi}{6}}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\frac{\pi}{6}}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24}\right)\right), \\
z_1 &= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{2\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{24}\underline{\underline{+\tfrac{12\pi}{24}}}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{24}\underline{\underline{+\tfrac{12\pi}{24}}}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(\tfrac{11\pi}{24}\right) + i\sin\left(\tfrac{11\pi}{24}\right)\right), \\
z_2 &= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(\tfrac{23\pi}{24}\right) + i\sin\left(\tfrac{23\pi}{24}\right)\right), \\
z_3 &= \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\left(\cos\left(\tfrac{35\pi}{24}\right) + i\sin\left(\tfrac{35\pi}{24}\right)\right).
\end{aligned}$$

Die unterstrichenen Teile helfen dem Tutor Ihre Schritte nachzuvollziehen.

11. Aufgabe (Lerncheck)

Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichung $z^5 = -4 + 4i$.

2.4 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 2. Kapitel

1. Aufgabe

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(k^2-k) &= (1^2-1)+(2^2-2)+(3^2-3)+(4^2-4)+(5^2-5)\\ &= 0+2+6+12+20\\ &= 40.\end{aligned}$$

2. Aufgabe

a) $\binom{n}{n} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n-n)!} = \frac{1}{1\cdot 0!}$ und 0! ist nach Definition 1. Analog ist $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$.

Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k!)k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

b)

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = \frac{4!}{0!4!}+\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{4!0!}$$

Aus Aufgabenteil a) ist dies

$$\begin{aligned}&= 1+\tfrac{4!}{1!3!}+\tfrac{4!}{2!2!}+\tfrac{4!}{3!1!}+1\\ &= 2+\tfrac{3!\cdot 4}{3!}+\tfrac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 1\cdot 2}+\tfrac{3!\cdot 4}{3!}\\ &= 2+4+6+4 = 16 = 2^4.\end{aligned}$$

3. Aufgabe

a) IA: Für $n_0 = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{n_0+1}$.

IV: Für ein beliebiges aber festgelegtes $n \geq n_0 = 1$ gelte $\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$.

IB: Dann gilt auch ($n+1$ überall für n einsetzen!) $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$.

IS: (Wir fangen mit der linken Seite der Gleichung in IB an und formen um, um IV einzusetzen, und formen weiter um, bis die rechte Seite von der Gleichung in IB erreicht wird.)

$$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{k}{k+1} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\cdot\frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Die Aussage $\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

b) IA: Für $n_0 = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{0}(2k) = 2\cdot 0 = 0 = 0\cdot 1 = n_0(n_0+1)$.

IV: Für ein beliebiges aber festgelegtes $n \geq n_0 = 0$ gelte $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$.

IB: Dann gilt auch $\sum_{k=0}^{n+1} 2k = (n+1)((n+1)+1) = (n+1)(n+2)$.

IS: $\sum_{k=0}^{n+1} 2k = \sum_{k=0}^{n} 2k + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) \overset{(n+1)\text{ ausklammern}}{=} (n+1)(n+2)$

Die Aussage $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 0$.

4. Aufgabe $z_1 + z_3 = 7 + i \cdot 11 \quad , \quad 7z_2 - 2\overline{z_1} = 8 - i \cdot 69 \quad , \quad \overline{\overline{z_1}\,\overline{z_2}} = -38 + i \cdot 41.$

5. Aufgabe *Hinweis:* Falls Sie Probleme bei der Rechnung haben, versuchen Sie es zu erst mit Zahlen. Probieren Sie es danach erneut mit Buchstaben.

6. Aufgabe $\frac{1}{3+i\cdot 4} = \frac{3}{25} + i \cdot \frac{-4}{25}, \qquad \frac{3+i\cdot 4}{2-i\cdot 11} = \frac{-38}{125} + i \cdot \frac{41}{125}.$

7. Aufgabe

$\sqrt{3}+i$	$-\sqrt{3}+i$	$-\sqrt{3}-i$	$\sqrt{3}-i$
I. Quadrant	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant
$\varphi = \frac{\pi}{6}$	$\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$	$\varphi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$	$\varphi = -\frac{\pi}{6}$

8. Aufgabe

$$z_1 = \frac{-1}{\sqrt{7}}, \qquad z_4 = 8 - i \cdot 8\sqrt{3},$$

$$z_2 = i \cdot 4, \qquad z_5 = -\frac{62\sqrt{3}}{365} + i \cdot \frac{62}{365},$$

$$z_3 = \frac{19 \cdot \sqrt{2}}{12} + i \cdot \frac{19 \cdot \sqrt{2}}{12}, \qquad z_6 = -\frac{\sqrt{6}}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

9. Aufgabe

$$z_1 = 14(\cos(\tfrac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\tfrac{\pi}{6})), \qquad z_3 = 4(\cos(\tfrac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\tfrac{4\pi}{3})),$$

$$z_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{5}(\cos(\tfrac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(\tfrac{3\pi}{4})), \qquad z_4 = 15\sqrt{6}(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\tfrac{\pi}{4})).$$

10. Aufgabe a) Die 5-ten Wurzeln aus 1 bekommen wir durch Anwendung der zugehörigen Formel.

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}, \qquad z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5},$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}, \qquad z_5 = \cos\frac{10\pi}{5} + i\sin\frac{10\pi}{5} = 1.$$

$$z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5},$$

b) Nach der Regel für die Multiplikation von komplexen Zahlen gilt $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos(5\alpha) + i\sin(5\alpha)$. Durch Multiplikation der Ungleichung $0 < \alpha < \frac{2\pi}{5}$ mit 5 erhalten wir

$$0 < 5\alpha < 2\pi.$$

Von daher kann $\cos(5\alpha)$ nicht gleich 1 und $\sin(5\alpha)$ nicht gleich 0 sein.

11. Aufgabe Die Polarform der Zahl $w = -4 + 4i$ mit Betrag

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5}$$

ist

$$w = \sqrt{2^5}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

weil es gilt

$$-4 + 4i = \sqrt{2^5}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Nach Anwendung der Formel für die Lösungen von Gleichungen der Form $z^n = w$ erhalten wir alle Lösungen:

$$\begin{aligned}
z_0 &= (\sqrt{2^5})^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{5} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}}{5}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{20} + i\sin\frac{3\pi}{20}\right),\\
z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{8\pi}{\underline{\underline{20}}}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{8\pi}{\underline{\underline{20}}}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{20} + i\sin\frac{11\pi}{20}\right),\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{20} + i\sin\frac{19\pi}{20}\right),\\
z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{27\pi}{20} + i\sin\frac{27\pi}{20}\right),\\
z_4 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{35\pi}{20} + i\sin\frac{35\pi}{20}\right).
\end{aligned}$$

Falls Sie Fragen zu diesem Blatt haben, schreiben Sie uns im Moses-Forum unter Analysis I für Ingenieure.

Projekt UNITUS – Einstieg ins Skript und Beispiele – Ana I für Ingenieure

3 Grenzwerte und Stetigkeit

3.1 Zahlenfolgen und 3.2 Konvergenz und Konvergenzbeweise

Definition (Folge)

Eine **Folge** reeller Zahlen $x_0, x_1, \ldots$ ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Somit wird jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Man schreibt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch (x_n).

Zunächst einige Beispiele für Folgen. Für

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n := 3{,}5 + n \tag{7}$$

lauten die Folgeglieder

$$x_0 = 3{,}5,\ x_1 = 4{,}5,\ x_2 = 5{,}5,\ \ldots.$$

Die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n := (-1)^n \tag{8}$$

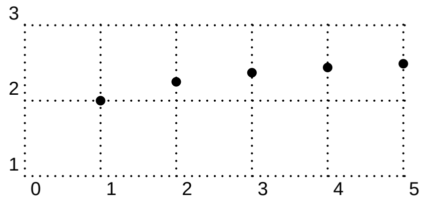
hat die Folgeglieder

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ \ldots.$$

Meist fängt eine Folge bei $n = 0$ an, sie kann aber auch bei $n = 1$ oder jeder beliebigen anderen natürlichen Zahl beginnen, wie im nächsten Beispiel, die *Eulerfolge* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}},\ \ e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Die ersten Werte lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \left(1+\tfrac{1}{1}\right)^1 = 2{,}0000000\\
e_2 &= \left(1+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2{,}2500000\\
e_3 &= \left(1+\tfrac{1}{3}\right)^3 \approx 2{,}3703704\\
e_4 &= \left(1+\tfrac{1}{4}\right)^4 \approx 2{,}4414063\\
e_5 &= \left(1+\tfrac{1}{5}\right)^5 = 2{,}4883200\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die ersten Glieder einer Folge sind jedoch nicht von Interesse, sondern der Wert gegen den sie letzendlich streben, falls sie dies tun. In diesem Fall sagt man, dass die Folge konvergiert oder dass die Folge konvergent ist (dazu später mehr). Die Eulerfolge konvergiert gegen die Zahl $e \approx 2{,}7182818$. Diese hat in vielen biologischen Wachstums- und Zerfallsprozessen eine große Bedeutung.

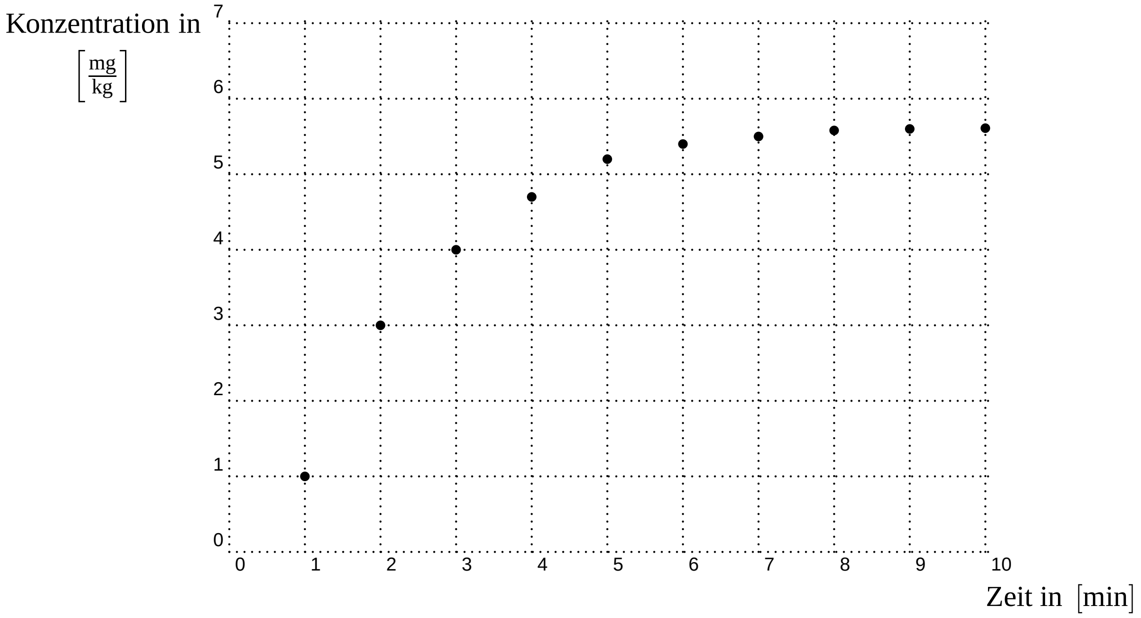


visuelle Darstellung der Eulerfolge mit Punkten $(n, x_n), n \in \{1, 2, \ldots, 5\}$

Jedoch strebt nicht jede Folge gegen einen festen Wert. Eine Folge wie in (8) heisst **divergent**, weil die Folgeglieder nicht gegen eine bestimmte reelle Zahl streben. Im Beispiel (7) wachsen die Folgeglieder kontinuierlich gegen unendlich. Solche Folgen nennt man **bestimmt divergent**.

Zurück zur Konvergenz. Als Ingenieur hat man häufig mit Grenzflächen von Objekten zu tun. An ihnen laufen viele Prozesse und Reaktionen ab. Einen dieser Prozesse kennt man als Sorption. Dieser beschreibt das Phänomen, wie sich Moleküle und andere Teilchen an Oberflächen anlagern. Man hat festgestellt das in vielen

Fällen nur eine endliche Anzahl von Molekülen Platz auf so einer Oberfläche findet. Wenn man also die Anzahl der sorbierten Moleküle über der Zeit aufträgt, so ist die Anzahl konvergent und strebt gegen eine reelle Zahl. Hier ist also entscheidend gegen welchen Wert die Folge konvergiert.



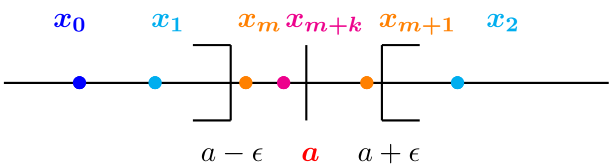
Es ist also zu klären was Konvergenz genau bedeutet, wie man sie beweist und wie man den Grenzwert (also den Wert gegen den eine Folge konvergiert) berechnet, falls dieser existiert.

Definition (Konvergenz; Grenzwert; Divergenz)

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl m_ϵ gibt, sodass $|x_n - \boldsymbol{a}| < \epsilon$ für alle $n \geq m_\epsilon$. Dann schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \boldsymbol{a}.$$

Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist dann der **Grenzwert** oder **Limes** der Folge. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es ein a gibt, gegen das sie *konvergiert*. Ansonsten ist sie **divergent**.



1-dimensionale Abbildung zur Konvergenz mit $m := m_\epsilon$

Die obige Definition der Konvergenz wirkt durchaus sehr kryptisch und kompliziert. Schauen wir sie uns genauer an.

Beispiel (Konvergenzkriterium)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ die Folge, die durch $x_n = \frac{1}{n}$ definiert ist. Diese Folge konvergiert gegen **0**.

a) Bestimmen Sie für $\epsilon_1 = \frac{1}{10}$ und $\epsilon_2 = \frac{1}{200}$ jeweils eine natürliche Zahl $m_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$, sodass $|x_n - \mathbf{0}| < \epsilon_i$ für alle $n \geq m_i, i = 1, 2$.

b) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ **0** ist.

a) Wenden wir nun auf $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ die Definition für Konvergenz an. ϵ_1 und ϵ_2 sind erstmal zulässige Werte, da beide größer 0 sind. Wenn die Folge konvergent ist, müssen ab einem bestimmten Index $m_i, i = 1, 2$, alle Folgeglieder innerhalb der *Toleranzschranke* $]a - \epsilon_i, a + \epsilon_i[$ (siehe die Abbildung zur Konvergenz) liegen. Da wir wissen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ gegen den Wert **0** konvergieren soll, setzen wir ihn für a ein. Damit ergeben sich folgende Ungleichungen:

$$\left|\frac{1}{n} - \mathbf{0}\right| < \epsilon_1 = \frac{1}{10} \quad \text{(eine wahre Aussage für alle } n \geq m_1 \text{ mit } m_1 = 11\text{),}$$

$$\left|\frac{1}{n} - \mathbf{0}\right| < \epsilon_2 = \frac{1}{200} \quad \text{(eine wahre Aussage für alle } n \geq m_2 \text{ mit } m_2 = 201\text{).}$$

b) Für die speziellen Werte ϵ_1 bzw. ϵ_2 aus Teil a) ist die entsprechenden Ungleichung mit den gefundenen Zahlen m_1 bzw. m_2 erfüllt. Konvergenz ist jedoch nur bewiesen, wenn es für jedes $\epsilon > 0$, eine Zahl m_ϵ gibt, für die die Ungleichung $\left|\frac{1}{n} - \mathbf{0}\right| < \epsilon$ für alle $n \geq m_\epsilon$ gilt. Wir merken, dass $m_\epsilon = 2$ für jedes $\epsilon > 1$ gewählt werden kann, denn $|\frac{1}{n} - 0| < 1 < \epsilon$ für alle $n \geq m_\epsilon$. Interessant sind „kleine" Werte von ϵ in der Nähe von Null. Im Allgemeinen gilt

$$\left|\frac{1}{n} - \mathbf{0}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{wegen } n>0} \frac{1}{n} < \epsilon \overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{wegen } n,\epsilon>0} \frac{1}{\epsilon} < n.$$

Da ϵ ein beliebig kleiner Wert nahe 0 ist, jedoch niemals die 0 erreicht, wird $\frac{1}{\epsilon}$ sehr groß, aber niemals $+\infty$. Damit existiert ein $m_\epsilon \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, sodass n mit $n \geq m_\epsilon$ größer ist als $\frac{1}{\epsilon}$ für jedes positive ϵ verschieden von 0. Ganz explizit wählen wir so ein $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $m_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$, d.h. $\frac{1}{m_\epsilon} < \epsilon$. Dann gilt für alle $n > m_\epsilon$

$$\left|\frac{1}{n} - \mathbf{0}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{m_\epsilon} < \epsilon.$$

Somit wurde gezeigt, dass für $\boldsymbol{a = 0}$ das Konvergenzkriterium erfüllt ist. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit $x_n = \frac{1}{n}$ konvergiert also gegen **0**.

Der Knackpunkt ist demzufolge das ϵ niemals 0 wird, sondern nur sehr nahe an 0 herankommt. Diese Beweise sind aber häufig aufwendig und kompliziert. Deshalb werden einige Techniken vorgestellt, mit deren Hilfe man erkennt, ob eine Folge konvergiert. Bevor wir uns aber an die Techniken wenden, schauen wir das Gegenteil von Konvergenz an.

Definition (Divergent; bestimmt divergent; unbestimmt divergent)

Eine Folge heißt **divergent**, falls sie nicht konvergent ist. Man sagt, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **bestimmt divergent gegen** $+\infty$, wenn es zu jedem (noch so großen) $\epsilon > 0$ ein $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$x_n \geq \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq m_\epsilon.$$

Man schreibt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

und nennt $+\infty$ den **uneigentlichen Grenzwert** der Folge, obwohl $+\infty$ keine reelle Zahl ist (deshalb heißt der Grenzwert *uneigentlich*). Eine Folge kann auch bestimmt divergent gegen $-\infty$ sein.

Ist eine divergente Folge nicht bestimmt divergent, nennt man dies **unbestimmt divergent**.

Bemerkung: Einige Standardbeispiele, die in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind, muss man kennen.

Folge	Folgeglieder	Grenzwert für $n \to \infty$	Anmerkungen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ $a_n := \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ konvergiert gegen 0.
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $b_n := 3$	$3, 3, 3, 3, \ldots$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$	$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen 3. Konstante Folgen wie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent.
$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $c_n := n$	$0, 1, 2, 3, \ldots$	$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$	$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent.
$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $d_n := (-1)^n$	$1, -1, 1, -1, \ldots$	$\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ existiert nicht	$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent. Folgen wie $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man wegen des abwechselnden Vorzeichens alternierende Folgen.

Satz (Rechenregeln konvergenter Folgen)
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot a, \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, \text{ falls } b \neq 0 \neq y_n \text{ für alle } n, \tag{12}$$

$$a \leq b, \text{ falls } x_n \leq y_n \text{ für alle } n. \tag{13}$$

Achtung! Diese Rechenregeln können nur bei konvergenten Folgen angewendet werden. Oft wird dabei auf schon bewiesene konvergente Folgen wie etwa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (jedoch nicht $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$) in der obigen Tabelle zurückgegriffen.

Kommen wir nun zu einem ganz konkreten Beispiel um Konvergenz weiter zu verstehen.

Beispiel (Konvergenzkriterium)
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und seien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 7$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n)$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} (-x_n)$.

Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen sind, konvergiert laut Rechenregel (9) für konvergente Folgen die Summe dieser beiden Folgen gegen die Summe ihrer Grenzwerte, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{3} + 7.$$

Weiterhin konvergiert auch die negierte Folge $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Negative ihres Grenzwertes (siehe Regel (11)), denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (-1 \cdot x_n) = -1 \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = -\sqrt{3}.$$

Beispiel (Grenzwertberechnung)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+2}{8n^2+1}, \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+2}{8n^3+1}, \qquad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(3n+2)n^n}.$$

Aus technischen Gründen nehmen wir in dieser Aufgabe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ an.

a) Hier wird die größte Potenz von n im Nenner und im Zähler ausgeklammert und gekürzt:

$$\frac{7n^2+2}{8n^2+1} = \frac{\cancel{n^2}(7+\frac{2}{n^2})}{\cancel{n^2}(8+\frac{1}{n^2})}.$$

Um Rechenregel (12) auf Seite 42 anzuwenden, definieren wir die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit

$$x_n = 7+\frac{2}{n^2} \text{ und } y_n = 8+\frac{1}{n^2}.$$

Wir betrachten zuerst $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und zeigen, dass diese konvergiert. Dazu definieren wir zwei weitere Folgen: die konstante Folge $(7)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, die gegen 7 konvergiert, sowie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$, die gegen 0 konvergiert (siehe die Tabelle auf Seite 42). Aus Rechenregel (10) folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot a_n) = 0 \cdot 0 = 0$, sodass die Folge $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} = (\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ gegen 0 konvergiert. Aus Rechenregel (11) bekommen wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}$ auch gegen 0 konvergiert. Aus Rechenregel (9) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 7 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 7+0 = 7$.
Eine ähnliche Überlegung ergibt den Grenzwert 8 für die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, und daher folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+2}{8n^2+1} = \frac{7}{8}.$$

Dieser Beweis ist sehr ausführlich geschrieben, um die Regeln zu erläutern und zu illustrieren, wie sie angewendet werden sollen.
Nun betrachten wir das Problem von einer anderen Seite, um das Verständnis zu vertiefen. Wir haben einen Quotienten aus zwei Polynomen 2. Grades in der Variable n (siehe Kapitel 4. Polynome). Man überlege sich, welches dieser beiden Polynome schneller wächst. Da beide den gleichen Grad der Potenz haben, unterscheidet sich ihr Wachstum lediglich um ihren Vorfaktor, sodass es logisch ist, dass ihr Quotient gegen eine Zahl aus $\mathbb{R}$ konvergiert.

b) In diesem Beispiel ist der Grad des Polynoms im Nenner (**eins**) größer als der Grad des Polynoms im Zähler. Konvergiert diese Folge? Ja, denn der Quotient aus einem langsam ansteigenden Polynoms durch ein schnell ansteigendes Polynom verhält sich wie $\frac{1}{n^{\mathbf{1}}}$ (Polynom 0. Grades durch ein Polynom **1**. Grades). Damit ist der Grenzwert der zweiten Folge 0. Der Vollständigkeit halber sei hier noch der Rechenweg dargelegt, was auch in den Hausaufgaben erwartet wird. Für $n \neq 0$ gilt

$$\frac{7n^2+2}{8n^3+1} = \frac{\cancel{n^3}(\frac{7}{n}+\frac{2}{n^3})}{\cancel{n^3}(8+\frac{1}{n^3})} = \frac{\frac{7}{n}+\frac{2}{n^3}}{8+\frac{1}{n^3}}.$$

Aus den Rechenregeln folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0$ für die Konstante $c \in \mathbb{R}$ und die Potenz $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Ferner ist $\lim\limits_{n\to\infty} 8 = 8$. Als Summen von konvergenten Folgen sind jeweils Zähler und Nenner konvergent. Als Quotient konvergenten Folgen ist die gegebene Folge konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+2}{8n^3+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0+0}{8+0} = 0.$$

c) Wir zeigen nun den Rechenweg für den dritten Teil. Für $n \neq 0$ gilt

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(3n+2)n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(3n+2)n^n} = \frac{(n+1)}{3n+2}\cdot\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^n = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(3+\frac{2}{n})}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Analog zu Teil a) und Teil b) ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist die Eulerfolge, die wir kurz auf Seite 39 eingeführt haben. Der Grenzwert dieser Folge ist die reelle Zahl e. Als Produkt von zwei konvergenten Folgen gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(3n+2)n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot e.$$

1. Aufgabe (Gedanken zur Konvergenz)

Überlegen Sie weiter: Konvergieren die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a bzw. b, konvergieren dann auch $(x_n \cdot (-y_n))_{n\in\mathbb{N}}$?
Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, konvergiert dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Was meinen Sie?

Eine häufig benutzte Methode zum Beweis von Konvergenz ist das sogenannte Monotoniekriterium.

Satz (Monotoniekriterium)
Jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Dabei wird eine Folge (x_n) **beschränkt** genannt, wenn es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

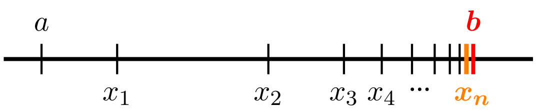
$$a \le x_n \le b \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(x_n) ist **monoton wachsend**, falls

$$x_n \le x_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

oder **monoton fallend**, falls

$$x_n \ge x_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$



Wichtig bei der Anwendung des Satzes ist zu zeigen, dass beide Eigenschaften (Beschränktheit und Monotonie) gelten. Bestimmen Sie eine divergente Folge, die beschränkt jedoch nicht monoton ist, sowie eine divergent Folge, die monoton jedoch nicht beschränkt ist. (Betrachten Sie notfalls die Tabelle auf Seite 42.) Bei Monotonie ist es nur erforderlich, dass diese ab einem bestimmten Index vorhanden ist.

Folgen können auch rekursiv definiert werden, d.h. ein oder mehrere Anfangswerte sind gegeben und eine Vorschrift gibt an, wie die Folgenglieder aus den vorherigen berechnet werden. Das prototypische Beispiel ist die Wurzelfolge

$$x_0 := 1,\; x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Um x_1 zu berechnen, setzen wir $n = 0$. Dann ist $x_{0+1} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}(1+\frac{2}{1}) = 1{,}5$. Als kleine Übung sollten Sie versuchen x_2, x_3 und x_4 zu berechnen (gerundete Werte: 1,4166667 , 1,4142157 bzw. 1,4142136).

Beispiel (Konvergenz und Grenzwert der Wurzelfolge unter Anwendung des Monotoniekriteriums)
Zeigen Sie, dass die Wurzelfolge konvergiert. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Wollen wir das Monotoniekriterium anwenden, müssen wir zeigen, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Man sieht schon bei den ersten drei Folgegliedern 1, 1,5, 1,4166667, dass die Wurzelfolge nicht monoton ist. Die Folge wächst zunächst und fällt dann wieder. Ab x_1 werden die Folgeglieder jedoch nur noch kleiner. Wir ignorieren deshalb x_0 und untersuchen, ob die restliche Folge monoton fallend ist. Wir könnten die

Monotonie so wie im Skript behandeln, in dem wir zuerst eine untere Grenze für die Folge berechnen. Dazu muss einem als erstes auffallen, dass $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$ das arithmetische Mittel von $\boldsymbol{a = x_n}$ und $\boldsymbol{b = \frac{2}{x_n}}$ ist. Nach dem Beispiel „arithmetisches und geometrisches Mittel“ im Abschnitt 2.2 des Ferus-Skripts gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, d.h.

$$x_{n+1} = \frac{\boldsymbol{x_n} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{x_n}}}{2} \geq \sqrt{\boldsymbol{x_n} \cdot \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{x_n}}} = \sqrt{2}.$$

Nun betrachten wir $x_{n+1} - x_n$. Ist die Folge nun monoton fallend (d.h. $x_{n+1} \leq x_n$), so muss $x_{n+1} - x_n \leq 0$ für $n \geq 1$ gelten. Dies ist der Fall, denn

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} - x_n = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} - \frac{2x_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2x_n}(2 - x_n^2)$$

ist das Produkt der positiven Zahl $\frac{1}{2x_n}$ (x_n ist nach der Definition der Wurzelfolge positiv) und der negativen Zahl $2 - x_n^2$ (aus $x_{n+1} \geq \sqrt{2}$ folgt $x_n^2 \geq 2$ für $n \geq 1$). Die Monotonie ist nun für $n \geq 1$ bewiesen.

Es bleibt, die Beschränktheit nachzuweisen. Wir haben schon die untere Schranke $\sqrt{2}$ gefunden ($x_{n+1} \geq \sqrt{2}$). Einer obere Schranke ist in diesem Fall leicht zu finden. Die Folge ist ab x_1 monoton fallend und $x_1 > x_0$. Eine obere Schranke ist deshalb $1{,}5$. Die Folge ist ab $n = 1$ beschränkt und monoton und deshalb konvergent gegen einen Grenzwert A, der berechnet werden soll. Hierfür können die Rechenregeln für konvergente Folgen angewendet werden. Hier muss man wissen, dass die Verschiebung des Index keine Rolle spielt: $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = A$. Aus

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{2}{A}\right)$$

folgt $2A = A + \frac{2}{A}$. Durch Umformung ist $A^2 = 2$. Wegen $0 \leq x_n$ folgt aus der letzten Rechenregel, $0 \leq A$. Von daher ist $A = +\sqrt{2}$.

Der Vorteil bei rekursiven Folgen ist, dass die Schranken nicht mit dem echten Grenzwert übereinstimmen müssen. Sie können anders als in dem obigen Beispiel jeweils weit darüber bzw. darunter liegen. Man muss also das Ergebnis nicht kennen bevor man den Beweis führt. Häufig kann man hier mit der vollständigen Induktion arbeiten. Monotonienachweise können knifflig sein. In dem Beispiel ist der Knackpunkt die Verbindung mit dem arithmetischen Mittel. Hätten wir diesen Trick nicht gesehen, wären wir gescheitert. Wir betrachten deshalb die Aufgabe nochmal.

Die untere Schranke 0 kennen wir schon, weil die Folge positiv ist. Falls bewiesen werden kann, dass die Folge monoton fallend ist, dann muss die Folge auch von oben beschränkt und deshalb konvergent sein. Angenommen, wir haben nicht gesehen, dass das arithmetische Mittel in der Aufgabe steckt. Es wäre dann nicht ohne weiteres möglich zu entscheiden, ob $x_{n+1} - x_n$ positiv, negativ oder beides sein kann. Wir schauen etwas “weiter” in der Folge und betrachten stattdessen $x_{n+2} - x_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_{n+2}} - \boldsymbol{x_{n+1}} &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \frac{2}{x_{n+1}}\right)} - \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) + \frac{2}{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)}\right)} - \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)} \\
&\vdots \\
&= \frac{-(x_n - 2)^2}{4x_n(x_n^2 + 2)}
\end{aligned}$$

Auf dem ersten Blick sieht alles komplizierter aus. Durch Umformung (ausmultiplizieren, auf den gemeinsamen Nenner $4x_n(x_n^2 + 2)$ bringen, und vereinfachen) kommt man auf das “einfache” Ergebnis (nachweisen!). Der Zähler besteht aus dem Produkt einer negativen Zahl (-1) und einer nichtnegativen Zahl ($(x_n - 2)^2 \geq 0$

wegen dem Quadrat). Der Nenner ist größer Null, denn x_n ist positiv. Insgesamt ist $\frac{-(x_n-2)^2}{4x_n(x_n^2+2)}$ kleiner gleich 0, d.h. $x_{n+2} - x_{n+1} \leq 0$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ist deshalb monoton fallend.

Es ist leider nicht immer so, dass der kompliziertere Ausdruck zum Ziel führt. Wie angemerkt, die Monotonie kann knifflig sein.

3.3 Stetigkeit von Funktionen

Da uns die Stetigkeit von Funktionen in Zukunft noch öfter begegnen wird, ist sie dementsprechend ein wichtiges Thema. Thematisch eng verknüpft ist sie mit der Konvergenz von Folgen. Stetigkeit ist beispielsweise wichtig, um Funktionen auf Nullstellen untersuchen zu können. Eine große Klasse von stetigen Funktionen haben eine zusätzliche Eigenschaft, der wir im 5. Kapitel begegnen werden, nämlich Differenzierbarkeit.

Definition (Grenzwert einer Funktion in einem Punkt)

Sei $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Definitionsbereich D mit $D \neq \{x^*\}$ und sei $x^* \in \mathbb{R}$.

Wir sagen, dass f für x gegen x^* den **Grenzwert** y^* hat, wenn für *jede Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten in $D\setminus\{x^*\}$, *die gegen* x^* *konvergiert*, der Limes $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ existiert und gleich y^* ist.

Notation: $\lim\limits_{x\to x^*} f(x) = y^*$

Bemerkungen:

• Um zu zeigen, dass der Grenzwert y^* einer Funktion in x^* existiert, müssen alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die gegen x^* konvergieren in Betracht gezogen werden:

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = x_1, x_2, x_3, \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

Hierbei darf kein Folgenglied gleich x^* sein, denn sie müssen aus $D \setminus \{x^*\}$ kommen, d.h. D ohne x^*. (Dies ist eine technische Bedingung, auf die wir erst im Teil b) des Beispiels auf Seite 50 eingehen werden.)

Wenn für jede solche Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, x_k \neq x^*$ für $k \in \mathbb{N}$, die gegen x^* konvergiert, die assoziierte Folge der Funktionswerte auch konvergiert und zwar immer gegen denselben Grenzwert y^*

$$(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}} = f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots \qquad \lim_{k\to\infty} f(x_k) = y^*,$$

dann hat die Funktion f den Grenzwert y^* in x^*. Ist dies nicht der Fall, so existiert der Grenzwert der Funktion in diesem Punkt nicht.

• Der Grenzwert der Funktion in x^* kann existieren, auch wenn x^* nicht im Definitionsbereich der Funktion liegt.

• Die Definition gilt auch für den Fall, dass entweder x^*, y^* oder beide gegen eine der „Nicht-Zahlen“ $\pm\infty$ *uneigentlich* konvergieren ($=$ bestimmt divergieren). Es muss nur richtig interpretiert werden, was gemeint ist. (Siehe das Beispiel „unstetige Funktionen“ Teil ai) auf Seite 49.)

Am verständlichsten wird diese Definition mithilfe eines Beispiels.

Beispiel (Grenzwerte)

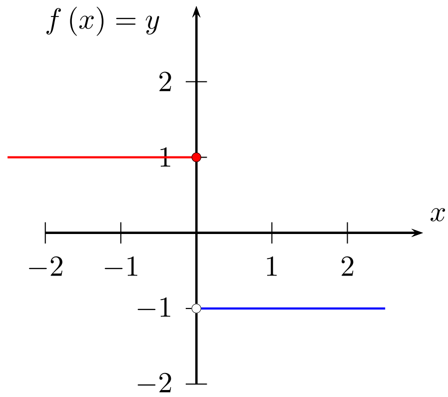
Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Funktion in jedem Punkt $x^* \in \mathbb{R}$, falls dieser existiert:

$$f(x) := \begin{cases} \mathbf{1} & \text{für } \boldsymbol{x \leq 0}, \\ \mathbf{-1} & \text{für } \boldsymbol{x > 0}. \end{cases}$$

Bei Aufgaben mit einer stückweise definierten Funktion, untersuchen wir alle wichtigen offenen Intervalle im Definitionsbereich sowie die Randpunkte dieser Intervalle. (Nachdem Sie das Beispiel durchgearbeitet haben, sollten Sie überlegen, warum wir dies tun.) Es gibt in dieser Aufgabe also drei Fälle zu betrachten: $x^* < 0, x^* > 0$ und $x^* = 0$.

1. Fall ($\boldsymbol{x^* < 0}$). Ist $x^* < 0$, dann muss eine beliebige Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen x^* konvergiert, ab einem bestimmten $m \in \mathbb{N}$ nur negative Folgenglieder haben. Da die beliebige Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \geq m$ gegen x^* konvergiert, welches negativ ist und laut Funktionsvorschrift auf den Wert 1 abgebildet wird, gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = 1$. D.h. der Grenzwert von f in $x^* < 0$ ist $y^* = 1$.

2. Fall ($\boldsymbol{x^* > 0}$). Analog zum 1. Fall muss eine beliebige Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen x^* konvergiert, ab einem bestimmten $M \in \mathbb{N}$ nur positive Folgenglieder haben. Wegen $f(x_k) = \boldsymbol{-1}$ für alle $k \geq M$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = -1$. D.h. der Grenzwert von f in $x^* > 0$ ist $y^* = -1$.



3. Fall ($x^* = 0$). Wegen dem großen Sprung zwischen den Funktionswerten links und rechts von $x^* = 0$ vermuten wir, dass die Funktion keinen Grenzwert in $x^* = 0$ hat. Um dies zu zeigen, reicht es ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

Wir betrachten nun jeweils eine Folge in den Intervallen $x < 0$ und $x > 0$, um die Auswirkung der verschiedenen Teile von f zu untersuchen. Die Folgen $\left(x_k := \frac{-1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $\left(X_k := \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ konvergieren beide gegen $x^* = 0$:

$$\lim_{k\to\infty}(x_k) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{-1}{k}\right) = 0, \qquad \lim_{k\to\infty}(X_k) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right) = 0.$$

Die Folgen der entsprechenden Funktionswerte konvergieren aber gegen unterschiedlichen Werte:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{-1}{k}\right) = \mathbf{1} \qquad \lim_{k\to\infty} f(X_k) = \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}\right) = \mathbf{-1}.$$

Von daher hat f keinen Grenzwert im Punkt $x^* = 0$.

Im 3. Fall des vorangehenden Beispiel haben wir eine Standardtechnik angewendet, in dem wir x^* „von links“ (d.h. alle Folgeglieder $-\frac{1}{k}$ waren kleiner oder links von $x^* = 0$) und dann „von rechts“ (d.h. alle Folgeglieder $\frac{1}{k}$ waren größer oder rechts von $x^* = 0$) angenähert haben. Dies ist die Idee hinter dem Begriff des einseitigen Grenzwertes.

Definition (Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert)
Man sagt y^* ist der **linksseitige Grenzwert** von f in x^* und schreibt

$$\lim_{x\to x^*-} f(x) = y^* \text{ oder } \lim_{x\nearrow x^*} f(x) = y^*,$$

wenn $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = y^*$ für jede Folge (x_k) in $D\setminus\{x^*\}$, die gegen x^* konvergiert und bei der $x_k < x^*$ für alle k gilt.

Der **rechtsseitige Grenzwert** wird analog definiert:

$$\lim_{x\to x^*+} f(x) = \lim_{x\searrow x^*} f(x) = y^*.$$

*Eine Bemerkung zur Notation:*Bei einseitigen Grenzwerten werden die Symbole $-$ und $+$ oder $\nearrow$ und $\searrow$ benutzt. Welche Notation man bevorzugt ist eine reine Geschmackssache.

- $(-/+)$ Diese Schreibweise ist mit der Zahlenstrahl verbunden. An dem Zahlenstrahl werden normalerweise alle Zahlen links vom Orientierungspunkt 0 mit einem Minus und die rechts mit einem Plus assoziiert. Bei einseitigen Grenzwerten ist der Orientierungspunkt von 0 nach x^* verschoben.

- ($\nearrow$ und $\searrow$) Mit dieser Schreibweise liest man vom Pfeilchen ab, ob die x Werte wachsen (von links unten nach rechts oben $\nearrow$) oder fallen (von links oben nach rechts unten $\searrow$). Beispielsweise für einen linksseitigen Grenzwert müssen die Werte von x gegen x^* wachsen, also ist das Pfeilchen $\nearrow$ richtig.

- Mit $x \to x^*$ müssen alle Folgen, die gegen x^* konvergieren, den Wert x^* aber nicht annehmen, betrachtet werden.

Lemma (Einseitige Grenzwerte)

Existieren sowohl der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\nearrow x^*} f(x)$ als auch der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\searrow x^*} f(x)$ und sind diese identisch, existiert auch $\lim_{x\to x^*} f(x)$.
Sind sie verschieden, dann existiert $\lim_{x\to x^*} f(x)$ nicht. Ebenso existiert er nicht wenn einer oder sogar beide einseitigen Grenzwerte nicht existieren.

Beispiel (Einseitige Grenzwerte und Grenzwerte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{x}{|x|}, \quad \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{x}{|x|}, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|},$ b) $\lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{1}{x^2}, \quad \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{1}{x^2}, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}.$

a) Der Betrag von x für $x \neq 0$ ist immer eine positive Zahl. Nähert man sich der 0 von links, so ist der Zähler negativ und somit auch der gesamte Bruch und der Grenzwert. Nähert man sich der 0 von rechts, so befinden sich hier nur positive Zahlenwerte, sodass auch der Grenzwert positiv wird:

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{x}{-x} = \lim_{x\nearrow 0}(-1) = -1 \qquad \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\searrow 0} 1 = +1.$$

Weil der linksseitige Grenzwert ungleich dem rechsseitigen Grenzwert ist, existiert der Grenzwert nicht:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \ \textbf{existiert nicht}.$$

b) Weil der linksseitige Grenzwert und der rechsseitigen Grenzwert bestimmt divergent (alternativ: uneigentlich konvergent) gegen $+\infty$ sind, schreiben wir

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Obwohl der Grenzwert von $\frac{1}{x^2}$ für $x \to 0$ nicht existieren kann, weil die einseitigen Grenzwerte keine reellen Zahlen sind und deshalb nicht eigentlich existieren, schreiben wir trotzdem

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

In diesem Beispiel müssen wir ganz genau aufpassen, die Aussagen richtig zu interpretieren. Keine der Folgen konvergiert gegen eine reelle Zahl. Es ist jedoch bequem, diese Schreibweise einzusetzen um auszusagen, dass die Grenzwerte nicht existieren: $\frac{1}{x^2}$ wächst ohne Grenze für $x \nearrow 0$ und für $x \searrow 0$.

Kommen wir jetzt zu der eigentlichen Definition von Stetigkeit.

Definition (Stetigkeit)
Die Funktion f heißt **stetig** in x^*, wenn $x^* \in D$ ist und es gilt

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*)\,.$$

Die Funktion heißt stetig auf D, wenn sie in allen $x^* \in D$ stetig ist.

Alternative Formulierung: Existieren der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\nearrow x^*} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\searrow x^*} f(x)$ und stimmen diese mit dem Funktionswert in x^* überein, d.h.

$$\lim_{x\nearrow x^*} f(x) = \lim_{x\searrow x^*} f(x) = f(x^*),$$

dann ist die Funktion f in x^* stetig.

Für den Grenzwert einer Funktion im Punkt x^* ist es egal, ob x^* im Definitionsbereich liegt. Bei Stetigkeit ist dies anders. Es gibt drei wesentliche Punkte, die in der Definition stecken.

1) Der Grenzwert von f in x^* muss existieren.
2) Die Funktion muss für x^* definiert sein.
3) Der Grenzwert von f in x^* muss mit dem Funktionswert in x^* übereinstimmen.

Merke: Gelten alle drei Bedingungen für alle $x^* \in D$, heißt die Funktion stetig. Ist mindestens eine der Bedingungen in mindestens ein $x^* \in D$ nicht erfüllt, dann ist die Funktion f (auf D) nicht stetig.

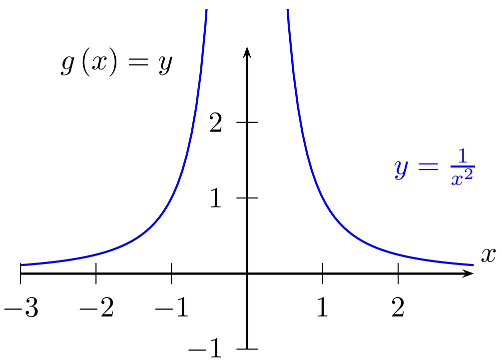
Beispiel (Grenzwerte, nicht stetige Funktionen)
Zeigen Sie anhand der gerade gennanten drei Punkte, dass die folgenden Funktionen in dem gegebenen Wert x^* nicht stetig sind.

a) $x^* = 0$ i) $g(x) := \dfrac{1}{x^2},\ x \neq 0$ ii) $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ -1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

b) $x^* = \frac{1}{2}$ i) $h_1(x) := \dfrac{2x-1}{6x-3},\ x \neq \dfrac{1}{2}$ ii) $h_2(x) := \begin{cases} \frac{2x-1}{6x-3} & \text{für } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Die folgenden typischen Beispiele dieser Aufgabe sollen Stetigkeit von Funktionen verdeutlichen, in dem wir Unstetigkeit betrachten. Um zu zeigen, dass eine Funktion in x^* unstetig ist, reicht es zu zeigen dass eine der Bedingungen nicht erfüllt ist. Wir wollen aber das Thema erklären und Sie gleichzeitig mit Grenzwerten weiter vertraut machen. Deshalb bieten wir hier eine ausführliche Diskussion an, in dem die drei Punkte 1), 2) und 3) behandelt werden.

ai) Gegeben sei die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$. Der Grenzwert von g in $x^* = 0$ ist unendlich ($\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$) und keine reelle Zahl, sodass er gar nicht existiert (1) nicht erfüllt). Die Funktion g ist in $x^* = 0$ sowieso nicht definiert (2) nicht erfüllt), da wir nie durch diese teilen dürfen. Somit ist (3) auch nicht erfüllt; d.h. keine der Bedingungen ist erfüllt. Die Funktion ist deshalb unstetig in $x^* = 0$.



Beispiel einer Funktion, die die Bedingungen 1), 2) und 3) in $x^* = 0$ nicht erfüllt.

Bemerkung: Für jeden anderen Punkt $x^* \neq 0$ ist die Funktion g stetig:

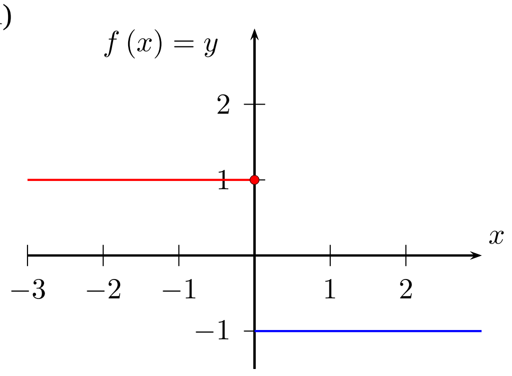
$$\lim_{x \to x^*} g(x) = \frac{1}{(x^*)^2} = g(x^*).$$

Daher ist die Funktion

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig (obwohl sie in Null nicht stetig ist) denn die Null liegt nicht im Definitionsbereich der Funktion. Die Funktion g ist dementsprechend eine stetige Funktion.

aii)



$$f(x) := \begin{cases} \mathbf{1} & \text{für } \boldsymbol{x \leq 0} \\ \mathbf{-1} & \text{für } \boldsymbol{x > 0} \end{cases}$$

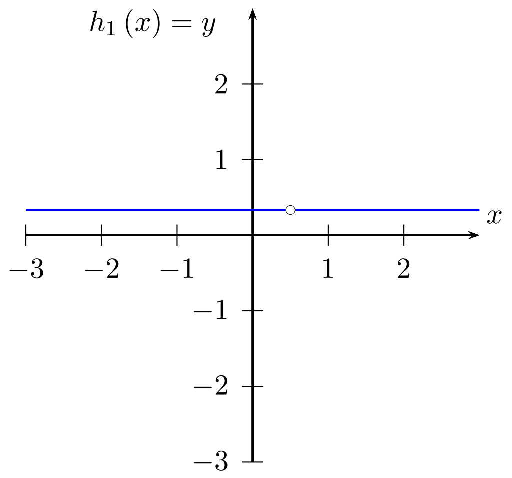
Diese Funktion ist nicht in 0 stetig. Sie ist in 0 definiert ($f(0) = 1$), aber $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht (siehe Seite 46). Damit sind die Bedingungen 1) und 3) nicht erfüllt.

bi) Die Funktion $h_1(x) := \frac{2x-1}{6x-3}, x \neq \frac{1}{2}$ ist in $x^* = \frac{1}{2}$ nicht definiert (dort ist der Nenner 0) jedoch existiert der Grenzwert von h_1 in $x^* = \frac{1}{2}$:

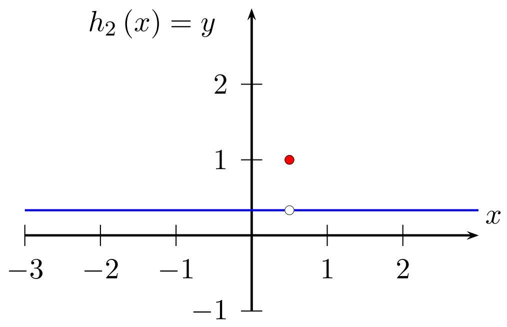
$$\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{6x-3} &= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot \frac{2x-1}{2x-1} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2x-1} \\ &\overset{**}{=} \frac{1}{3} \lim_{x \to \frac{1}{2}} 1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

($**$ Wir konnten in diesem Schritt nur kürzen, weil x den Wert $x^* = \frac{1}{2}$ nicht annimmt. Sonst hätten wir durch Null geteilt, was nicht erlaubt ist. Deshalb ist es immer wichtig, die punktierte Umgebung zu betrachten.)

Es existiert also ein eindeutiger Grenzwert für x^* (1) ist erfüllt), allerdings ist der Funktionswert nicht definiert (2) und damit auch 3) sind nicht erfüllt), da wir wie oben gezeigt durch 0 teilen müssten. Die Funktion ist in $x^* = \frac{1}{2}$ nicht stetig. (Auf ihrem Definitionsbereich ist die Funktion jedoch stetig.)



bii)



$$h_2(x) := \begin{cases} \frac{2x-1}{6x-3} & \text{für } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Die Funktion ist in $x^* = \frac{1}{2}$ definiert ($h_2(\frac{1}{2}) = 1$) und der Grenzwert von h_2 in $x^* = \frac{1}{2}$ existiert, wie für h_1 bereits gezeigt, d.h. Bedingungen 1) und 2) sind erfüllt.

Der Funktionswert in $x^* = \frac{1}{2}$ ($h_2(\frac{1}{2}) = \mathbf{1}$) ist aber nicht gleich dem Grenzwert von h_2 in $x^* = \frac{1}{2}$ ($\lim_{x\to\frac{1}{2}} h_2(x) = \mathbf{\frac{1}{3}}$), sodass die Funktion h_2 in $x^* = \frac{1}{2}$ nicht stetig ist, da die Bedingung 3) nicht erfüllt ist.

Bemerkungen:

- Wäre h_2 in dem obigen Beispiel so definiert, dass $h_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, wäre die Funktion stetig auf ganz $\mathbb{R}$.
- Unstetigkeitsstellen müssen nicht zwangsläufig Sprungstellen sein. Typische Beispiele hierfür sind die Funktionen $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ und $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, die im Skript bzw. in der Vorlesung vorgestellt werden.

Es ist oft leichter zu zeigen, dass eine Funktion in einem Punkt x^* unstetig ist. Um Stetigkeit in einem Punkt zu zeigen, muss jede gegen x^* konvergierende Folge betrachten werden. Dies kann sehr umständlich sein. Es gibt deshalb eine zweite Technik, die ganz wichtig für Stetigkeitsfragen ist. Die Idee ist die Stetigkeit einer Funktion mit Hilfe bestimmter Rechenregeln nachzuweisen. Dafür benötigen wir das Stetigkeitsverhalten von einigen bekannten Funktionen.

Satz (Stetigkeit bestimmter Klassen von reellen Funktionen)

- Konstante Funktionen (d.h. $f(x) = c$) sind stetig.
- Reelle Polynome (d.h. mit reellen Koeffizienten, z.B. $p(x) = \pi x^5 + \sqrt{2}x - 1$) sind stetig.
- Rationale Funktionen (d.h. $f(x) = \frac{\text{reelles Polynom}}{\text{reelles Polynom}}$, z.B. $\frac{x^2+1}{x^2-9}$) sind auf ihrem Definitionsbereich (hier $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$) stetig.
- Die Wurzelfunktionen $[0, +\infty[\ \to [0, \infty[\,, x \mapsto \sqrt[k]{x}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ sind stetig.
- $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind stetige Funktionen.
- Potenzfunktionen der Form a^x für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ sind stetige Funktionen.

Satz (Rechenregeln für stetige Funktionen)

- Ein Vielfaches einer stetigen Funktion ist stetig.
- Summen, Differenzen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig.
- Quotienten stetiger Funktionen sind überall stetig, wo der Nenner $\neq 0$ ist.
- Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig.

Beispiel (Stetigkeit)
Gegeben seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x \leq 5 \\ \alpha x - 4 & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

Für welche Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

• Zunächst ist die Stetigkeit der **Teilfunktionen** zu bestimmen. [1] Hierbei ist folgendes festzustellen:

$x \in]-\infty, 5[$: In diesem Intervall ist $f(x) = 3$ stetig, weil f eine konstante Funktion ist.
$x \in]5, \infty[$: In diesem Intervall ist $f(x) = \alpha x - 4$ ein Polynom, sodass f in diesem Intervall stetig ist.

Somit sind die einzelnen Teilfunktionen stetig, wo sie definiert sind.

• An dem **Übergangspunkt** muss die Gesamtfunktion jedoch noch auf Stetigkeit untersucht werden. Der kritische Punkt ist $x = 5$. Hierfür müssen der linksseite und der rechtsseitige Grenzwert an diesem Punkt verglichen werden. Für eine stetige Funktion müssen sie identisch sein.

Sei also $x^* = 5$.
Als erstes berechnen wir den *linksseitigen Grenzwert* für $x^* = 5$; d.h. für $x < 5$:

$$\lim_{x \nearrow 5} f(x) = \lim_{x \nearrow 5} 3 = \mathbf{3}.$$

Nun wird der *rechtsseite Grenzwert* betrachtet (d.h. wir betrachten $x > 5$):

$$\lim_{x \searrow 5} f(x) = \lim_{x \searrow 5} (\alpha x - 4) = \boldsymbol{5\alpha - 4}.$$

Der links- und rechtsseitiger Grenzwert müssen identisch sein, damit die Funktion im Punkt $x^* = 5$ stetig ist. Daraus folgt die Gleichung

$$\boldsymbol{5\alpha - 4 = 3}$$

oder $\alpha = \frac{7}{5}$.

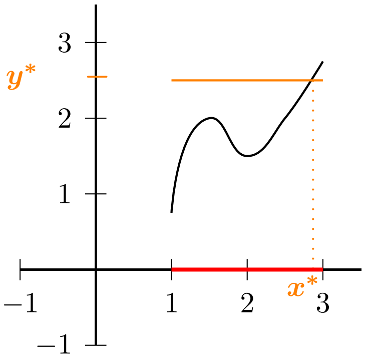
Die Funktion f ist nur für $\alpha = \frac{7}{5}$ stetig auf (ganz) $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x \leq 5, \\ \frac{7}{5}x - 4 & \text{für } x > 5. \end{cases}$

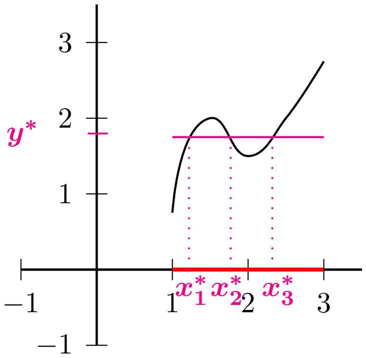
Ein wichtiger Satz ist der *Zwischenwertsatz*, der besonders für die Bestimmung der Existenz von Nullstellen relevant ist.

Satz (Zwischenwertsatz)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig* auf einem *Intervall* $I \subset \mathbb{R}$. Seien $a, b \in I$ und y^* eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.
Dann ist y^* ein Funktionswert von f:
Es gibt (mindestens) ein x^* zwischen a und b mit $f(x^*) = y^*$.

Als Beispiel betrachten wir die unten abgebildete stetige Funktion f auf dem Intervall $[1, 3]$. Der Wert $\boldsymbol{y^* = 2{,}5}$ (siehe Bild links) liegt zwischen den Funktionswerten am Rand des Intervalls $f(1) = 0{,}75$ und $f(3) = 2{,}75$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein x^* zwischen 1 und 3 mit $f(x^*) = 2{,}5$, d.h. $\{\boldsymbol{y^* = 2{,}5}\}$ hat ein nicht leeres Urbild. Wählen wir für y^* stattdessen $\{\boldsymbol{y^* = 1{,}75}\}$ (siehe Bild rechts) bekommen wir mehrere Möglichkeiten für $\boldsymbol{x^*}$. Hauptsache, es gibt mindestens ein Element im Urbild.

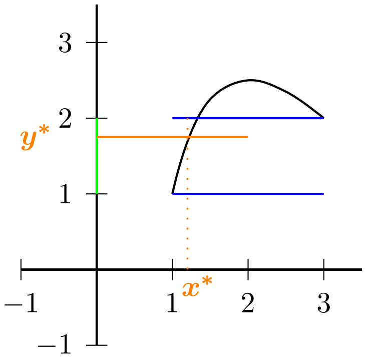
[1] **Ein häufiger Fehler in Klausuren** ist die Untersuchung der Teilfunktionen zu vergessen! Es könnte natürlich sein, dass keine Zahl α existiert, für die die Funktion stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Deshalb müssen wir begründen, warum die Funktion in den verschiedenen Bereichen stetig oder nicht stetig ist.





Der Zwischenwertsatz (ZWS) ist ein Existenzsatz. D.h. der ZWS sagt aus, dass die Funktion jeden Wert y^* zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt, aber nicht an welcher Stellen x^* zwischen a und b liegt. Bei Aufgaben, in denen der ZWS zu Hilfe genommen wird, ist x^* meistens sowieso nicht zu berechnen.

In dem Beispiel rechts wird dargestellt, dass der ZWS nichts über die y Werte außerhalb des Intervalls $]f(a) = 1, f(b) = 2[$ aussagt, nur über die y Werte, die in dem grünen Bereich liegen. Die assoziierten Punkte müssen sich dann in den blauen Streifen befinden.



Beispiel (Zwischenwertsatz / Nullstellen)

Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass das Polynom $p(x) = 5x^5 + 3x + 2$ mindestens eine reelle Nullstelle $x^* \in [-1, 0]$ besitzt.

Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ also auch auf $[-1, 0]$ stetig, sodass der Zwischenwertsatz angewendet werden kann. Weil $p(-1) = -6 < 0$ und $p(0) = 2 > 0$, existiert nach dem Zwischenwertsatz für jedes $y^* \in]-6, 2[$ mindestens ein $x^* \in]-1, 0[$ mit $f(x^*) = y^*$. Insbesondere ist $y^* = 0$ in dem Intervall $]-6, 2[$ enthalten, sodass es ein $x^* \in]-1, 0[$ mit $f(x^*) = 0$ gibt.

2. Aufgabe

a) Sei p ein reelles Polynom mit ungeradem Grad n: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = x^n \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_0 \frac{1}{x^n}\right)$. Zeigen Sie, dass p mindestens eine reelle Nullstelle hat.

b) Sei p ein reelles Polynom mit geradem Grad n. Hat p immer eine reelle Nullstelle?

Ein weiteres Beispiel ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{1}{x}$. Sie ist auf ihrem Definitionsbereich stetig und nimmt zudem positive und negative Werte an. Eine Nullstelle hat sie aber nicht. Nun ist die Frage, ob dies den Zwischenwertsatz widerlegt. Das ist hier aber nicht der Fall, denn die Voraussetzungen für den Zwischenwertsatz sind gar nicht erfüllt. Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist nicht auf dem *Intervall* $[-1, 1]$ stetig, da die Funktion für 0 nicht definiert ist.

3.4 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 3. Kapitel

1. Aufgabe Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot (-y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} (-y_n) = a \cdot (-\lim_{n\to\infty} y_n) = -a \cdot b.$$

Die Folge $(x_n \cdot (-y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Aus der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ folgt nicht, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ konvergent ist. Hierfür muss ein Gegenbeispiel angegeben werden. Definiere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = n$, $n \geq 1$. Es ist bekannt, dass (x_n) gegen 0 konvergiert. Ferner ist $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ konvergent, weil $x_n \cdot y_n = \frac{1}{n} \cdot n = 1$ eine konstante Folge ist. Die Folge (y_n) ist jedoch bestimmt divergent.

2. Aufgabe a) Ist $a_n > 0$, gehen die Werte des Polynoms p für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$. Dass heißt, es werden positive und negative Werte angenommen. Zudem ist das Polynom stetig, somit muss sich nach dem Zwischenwertsatz irgendwo eine Nullstelle x^* (d.h. $f(x^*) = y^* = 0$) befinden.
b) Nein, z.B. hat das Polynom $x^2 + 1$ gar keine reellen Nullstellen.

Projekt UNITUS - Einstieg ins Skript und Beispiele

4 Elementare Funktionen I

Motivation

Die zwei Hauptthemen dieses Kapitels sind Polynome und rationale Funktionen, die grob gesagt Funktionen sind, deren Nenner und Zähler aus Polynomen bestehen. Die Polynome sind Ihnen aus der Schulmathematik bestimmt vertraut. Es ist für künftige Ingenieure wichtig, ein tieferes Verständnis von diesen stetigen Funktionen zu entwickeln, da sie in nützlichen, konkreten Anwendungen eingesetzt werden können (beispielsweise bei Approximierungsverfahren, wie lineare Approximation und deren Verallgemeinerung, die Taylorapproximation, die uns im 5. Kapitel begegnen wird). Ein sicherer Umgang mit Polynomen, besonders die Bestimmung von Nullstellen (auch im komplexen Fall) ist ein Muss.

Besonders wichtig, im Zusammenhang mit rationalen Funktionen, sind zwei Verfahren, die Polynomdivision und die Partialbruchzerlegung. In Analysis I für Ingenieure werden diese vor allem für die Integration von rationalen Funktionen (im 8. Kapitel) benötigt.

Nicht nur werden Addition und Multiplikation von Polynomen sondern auch Polynomdivision im Kurs vorausgesetzt. Kleine Hilfestellungen zum letzten Punkt befinden sich jedoch unter den Links 1 und 2.

4.1 Polynome

Definition (Polynom)

Ein **Polynom** ist eine sogenannte **Linearkombination** der Potenzen von z $(z^0 = 1, z^1, z^2, \ldots)$, d.h. die Summe von endlich vielen Summanden, die Vielfache von $z^k, k \in \mathbb{N}$, sind:

$$f(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,\ \ a_k \in \mathbb{C}.$$

Bemerkungen:

• Nach der üblichen Konvention ist die Variable eines Polynoms mit reellen Koeffizienten und Definitionsbereich $\mathbb{R}$ mit x gekennzeichnet. Um hervorzuheben, dass der Definitionsbereich eines Polynoms $\mathbb{C}$ ist, benutzen wir statt der Variable x normalerweise die Variable z. Es ist manchmal hilfreich bei Polynomen mit reellen Koeffizienten, den Definitionsbereich auf $\mathbb{C}$ zu erweitern (da $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist). Deshalb sollte man eine Aufgabestellung zweimal lesen, um festzustellen, ob die Variable Werte in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ annimmt, egal ob die Variable z oder x heißt.

• Die Reihenfolge der Potenzen von z ist unwichtig. Häufig wird der Summand mit der höchsten Potenz als Erster geschrieben $(a_n z^n + a_{n-1} z^{n+1} + \cdots + a_0)$. Die Reihenfolge in der Definition ist jedoch praktisch in Hinsicht auf die kompakte Form mit dem Summenzeichen:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \cdots + a_n z^n.$$

Ein Beispiel für eine Linearkombination der Potenzen von z ist

$$f(z) := \frac{1}{5} z^2 + 3i,$$

wobei $a_0 = 3i, a_1 = 0$ und $a_2 = \frac{1}{5}$ die Koeffizienten sind.

Um den **Grad** des Polynoms zu bestimmen, suchen wir die höchste Potenz von z, die keinen Koeffizienten von 0 hat. Bespielsweise haben die Polynome $f(z) := 2z^3 + 7z^2$ und $g(z) := 1 - 2z^3$ jeweils den Grad 3. Die Summe $f(z) + g(z) = 0z^3 + 7z^2 + 1$ hat aber den Grad 2, da die höchste Potenz von z mit einem Koeffizient ungleich Null zwei ist. Bei einer konstanten Funktion wie $h(z) := a_0 = a_0 z^0$ für $a_0 \neq 0$ ist der Grad von h Null. Ist jedoch $a_0 = 0$ (d.h. $h(z) = 0$ ist das Nullpolynom), so ist der Grad von h *definiert* als $-\infty$.

Die folgende Linearkombination von Potenzen des Linearfaktors $(x-2)$

$$p(x) := \frac{(x-2)^0}{0!} + \frac{(x-2)^1}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \frac{(x-2)^4}{4!} = \sum_{k=0}^{4} \frac{(x-2)^k}{k!}$$

kann auch als ein Polynom betrachtet werden. Man kann sich vorstellen, dass p ein Polynom vierten Grades wäre, wenn wir alles ausmultiplizieren und vereinfachen würden. Weshalb die Potenzen von $(x-2)$ eine hohe Bedeutung besitzen, wird allerdings erst durch die Kapitel 5.4 und Kapitel 10 verständlich.

Es gibt zwei Darstellungsformen von Polynomen, die für uns wichtig sind: einmal die Linearkombination (wie oben) und einmal in zerlegter Form von Linearfaktoren (durch die letztere Form sind dann die Nullstellen des Polynoms leicht zu erkennen). Dass ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ tatsächlich in Linearfaktoren zerlegbar ist, besagt uns der folgende Satz.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Ist f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Definitionsbereich und mit dem höchsten Koeffizient $a_n \in \mathbb{C}$, so gibt es eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Linearfaktorzerlegung

$$f(z) = a_n \cdot (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

wobei $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen sind.

Wenn der Definitionsbereich eines Polynoms $\mathbb{C}$ ist, hat jedes Polynom vom Grad n (≥ 1) genau n Nullstellen. Diese können auch identisch sein. Bei mehrfachen Nullstellen wird dann ihre Vielfachheit, d.h. wie oft diese auftreten, gezählt. Zum Beispiel für

$$h(z) := 3(z+i)^5(z-7)^4(z-3i) = 3(z-(\boldsymbol{-i}))^{\mathbf{5}}(z-\mathbf{7})^{\mathbf{2}}(z-\boldsymbol{3i})^{\mathbf{1}}$$

sind die Nullstellen $\boldsymbol{-i}$ mit der Vielfachheit **5** (mehrfache Nullstelle), **7** mit der Vielfachheit **2** (mehrfache Nullstelle) und $\boldsymbol{3i}$ mit der Vielfachheit **1** (einfache Nullstelle).

Der Fundamentalsatz der Algebra gilt in $\mathbb{C}$, d.h. wenn Polynome als Funktionen mit komplexem Definitionsbereich betrachtet werden. Der Satz kann *nicht* angewendet werden, wenn der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{Q}$) ist. Als Beispiel nehmen wir $f(x) = x^2 + 1$. Dieses Polynom können wir nicht über $\mathbb{R}$ weiter in Linearfaktoren zerlegen, weil f keine reellen Nullstellen hat. Wenn wir komplexe Werte für x erlauben, d.h. wir erweitern den Definitionsbereich auf $\mathbb{C}$, so ist f zerlegbar mit $f(x) = (x+i)(x-i)$, und hat somit die Nullstellen i und $-i = \bar{i}$. Dieses Phänomen ist für alle Polynome mit reellen Koeffizienten und komplexem Definitionsbereich gültig.

Satz (Komplexe Nullstellen)

Die komplexen Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten und komplexem Definitionsbereich treten in komplex-konjugierten Paaren auf.

Dies vereinfacht die Suche nach Nullstellen von einem Polynom g mit reellen Koeffizienten erheblich. Denn ist eine komplexe (jedoch nicht reelle) Nullstelle von g bekannt, so weiß man auch gleichzeitig die zweite dazugehörige Nullstelle. Wissen wir zum Beispiel, dass $3-2i$ eine Nullstelle von g ist, so ist auch $\overline{3-2i} = 3+2i$ eine Nullstelle von g.

Tipp: Häufig wird von Studenten der Satz über komplex-konjugierten Nullstellen benutzt, ohne zu erwähnen dass die Koeffizienten des gegebenen Polynoms reell sind. Beispielsweise hat das Polynom $h(z) = z + i$ komplexe Koeffizienten und eine einzige Nullstelle, nämlich $-i$. Weil die Koeffizienten nicht reell sind, können wir daraus nicht schließen, dass die Nullstellen von h in komplex-konjugierten Paaren auftreten. Der Satz ist deshalb nicht für allgemeine Polynome mit komplexen Koeffizienten gültig. Ohne eine Bemerkung zu machen, dass die Koeffizienten reell sind, kann der Satz nicht ohne **Punktabzug** angewendet werden.

Wie weiter oben bereits erwähnt, ist es besonders einfach die Nullstellen aus den Linearfaktoren abzulesen. Also stellt sich das Problem, wie zerlegt man ein Polynom? Wir wollen hier als erstes erklären, wie man quadratische Polynome zerlegt. Die einfachste Variante gibt es, wenn die Konstante a_0 Null ist. Dann können wir ein Faktor von dem Variable ausklammern. Das Polynom

$$F(z) = z^2 + z + 0 = z^2 + z = z(z + 1)$$

hat die Nullstellen 0 und -1. Für kompliziertere quadratische Polynome kann die p-q-Formel (auch wenn die Koeffizienten komplex sind) verwendet werden, um die Lösungen zu $z^2 + pz + q = 0$ zu bestimmen:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Alternativ kann auch die abc-Formel (auch Mitternachtsformel genannt) verwendet werden, um die Lösungen zu $az^2 + bz + c = 0$ mit $a \neq 0$ zu bestimmen:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Eine andere häufig verwendete Variante ist das Erraten der ersten Nullstelle. Mithilfe der Polynomdivision werden weitere Nullstellen gefunden. Beim Erraten der ersten Nullstelle bietet es sich meistens an, zunächst kleine Werte wie -1, 1, i, $-i$, 2, etc. auszuprobieren. In konstruierten Aufgaben ist häufig mindestens einer dieser Werte eine Nullstelle.

Beispiel (Nullstellen)

Gegeben sei das Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$P(z) := z^3 - 3z^2 + 4z + 5.$$

Zeigen Sie, dass P mindestens eine reelle Nullstelle hat.

Das Polynom P hat nur reelle Koeffizienten, schränken wir also den Definitionsbereich auf die reellen Zahlen ein, so ist auch der Bildbereich wieder in $\mathbb{R}$. $P|_{\mathbb{R}}$ ist als Polynom eingeschränkt auf $\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Um die Existenz eines Funktionswertes zu zeigen bietet sich damit der Zwischenwertsatz an. Wir müssen also nur eine reelle Zahl $x_1 \in \mathbb{R}$ mit einem Funktionswert $f(x_1) > 0$ und eine reelle Zahl $x_2 \in \mathbb{R}$ mit Funktionswert $f(x_2) < 0$ finden. Die Null wird dann nach dem Zwischenwertsatz von einer Zahl $x^* \in]x_1, x_2[$ angenommen. Es gilt

$$P(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 5 = 5 > 0$$

und

$$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 5 = -1 - 3 - 4 + 5 = -3 < 0.$$

Also besitzt P eine reelle Nullstelle in $]-1, 0[$. (Genau wo die Nullstelle liegt ist bei dieser Aufgabe vollig unwichtig. Hier muss lediglich die Existenz einer reellen Nullstelle gezeigt werden.)

1. Aufgabe (Lerncheck)

Zeigen Sie, dass das Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$P(z) := z^3 - z^2 + z - 1$$

mit der Nullstelle $z_0 = i$ genau eine reelle und zwei komplexe Nullstellen hat.

Beispiel (Nullstellen)

Gegeben sei das Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$P(z) := z^5 - 2z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 5z + 6.$$

a) Berechnen Sie $P(-3)$, $P(0)$ und $P(2)$.

b) Beweisen Sie, dass P mindestens drei reelle Nullstellen hat.

c) Berechnen Sie $P(i)$, $P(1)$ und finden Sie alle Nullstellen von P.

a)

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^5 - 2 \cdot (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^3 + 4 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 6 \\ &= -243 - 162 + 108 + 36 + 15 + 6 \\ &= -240. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0) &= 0^5 - 2 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 \\ &= 0 - 0 + 0 + 0 + 0 + 6 \\ &= 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^5 - 2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 \\ &= 32 - 32 - 32 + 16 - 10 + 6 \\ &= -20. \end{aligned}$$

b) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra können wir festhalten, dass das Polynom fünf komplexe Nullstellen haben muss, da der größte Exponent die 5 ist.
Der Beweis, dass P mindestens drei reelle Nullstellen hat, kann mithilfe des Zwischenwertsatzes geführt werden. Dazu betrachten wir das Polynom P eingeschränkt auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Der Bildbereich ist wieder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, da P nur reelle Koeffizienten hat und so jede reelle Zahl auf eine reelle Zahl abgebildet wird. Als Polynom ist P weiterhin eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$, damit lässt sich der Zwischenwertsatz auf beliebigen Intervallen anwenden.
Betrachten wir die Intervalle $]-3, 0[$ und $]0, 2[$, so wird dort jeder Wert zwischen $f(-3) = -240$ und $f(0) = 6$ bzw. zwischen $f(0) = 6$ und $f(2) = -20$ laut Zwischenwertsatz angenommen. Damit gibt es mindestens ein $z_1 \in]-3, 0[$ und ein $z_2 \in]0, 2[$ mit $f(z_1) = f(z_2) = 0$.
Nun erweitern wir den Definitionsbereich wieder auf $\mathbb{C}$. Da die komplexen Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten immer in komplex-konjugierten Paaren auftreten, ist die Anzahl der komplexen Nullstellen, die nicht reell sind, gerade. Deshalb muss die Anzahl der reellen Nullstellen eine ungerade Zahl sein. Wir haben schon zwei reelle Nullstellen gefunden, also muss die Anzahl der reellen Nullstellen entweder drei oder fünf sein. Deshalb hat P mindestens drei reelle Nullstellen.

c)

$$\begin{aligned} P(i) &= i^5 - 2 \cdot i^4 - 4 \cdot i^3 + 4 \cdot i^2 - 5 \cdot i + 6 \\ &= i - 2 - 4 \cdot (-i) - 4 - 5i + 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^5 - 2 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 \\ &= 1 - 2 - 4 + 4 - 5 + 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

P ist ein Polynom mit reellen Koeffizienten, damit treten alle komplexen Nullstellen in komplex konjugierten Paaren auf. Da i eine komplexe Nullstelle ist, muss also auch $-i$ als komplex konjugierte zu i eine Nullstelle sein. Ferner ist, wie eben berechnet wurde, 1 ebenfalls eine Nullstelle. Daraus folgt

$$P(z) = (z - (-i))(z - i)(z - 1)Q(z) = (z^2 + 1)(z - 1)Q(z) = (z^3 - z^2 + z - 1)Q(z),$$

wobei $Q(z)$ ein quadratisches Polynom ist. Mithilfe der Polynomdivision kann $Q(z)$ ermittelt werden.

$$\begin{array}{l} \left(z^5 - 2z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 5z + 6 \right) : \left(z^3 - z^2 + z - 1 \right) = z^2 - z - 6 \\ \underline{-z^5 + z^4 - z^3 + z^2} \\ \qquad -z^4 - 5z^3 + 5z^2 - 5z \\ \qquad \underline{z^4 - z^3 + z^2 - z} \\ \qquad\qquad -6z^3 + 6z^2 - 6z + 6 \\ \qquad\qquad \underline{6z^3 - 6z^2 + 6z - 6} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Somit enthält das Polynom $Q(z) = z^2 - z - 6 = (z - 3)(z + 2)$ die letzten beiden Nullstellen (-2 und 3) von $P(z)$.[2] Insgesamt liegen für folgende Werte Nullstellen von $P(z)$ vor: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = -2$ und $z_5 = 3$.

4.2 Rationale Funktionen

Bevor wir verschiedene Anwendungen und Hilfsmittel im Umgang mit rationalen Funktionen einführen können, muss zunächst der Begriff geklärt werden:

Definition (Rationale Funktion; Pole)
Eine **rationale Funktion** $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ist der Quotient zweier Polynome $p(z)$ und $q(z)$. Die Nullstellen des Nenners werden auch **Pole** der rationalen Funktion genannt und sind im Definitionsbereich nicht enthalten.

Bei rationalen Funktionen ist es besonders wichtig die Partialbruchzerlegung zu beherschen. Das Ziel einer Partialbruchzerlegung ist, wie bereits erwähnt, eine rationale Funktion umzuformen, sodass diese z.B. leichter zu integrieren ist. Die rationale Funktion wird auf die folgende Form gebracht

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \frac{A_1}{z_1 - z} + \frac{A_2}{z_2 - z} + \cdots + \frac{A_n}{z_n - z},$$

wobei die $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Nullstellen des Nennerpolynoms sind und die A_i komplexe Zahlen.
Um eine rationale Funktion auf diese Form zu bringen müssen gegebenenfalls die folgenden Reduktionen durchgeführt werden:
Für die Polynomdivision muss gelten, dass Grad $p(z) \geq$ Grad $q(z)$ ist. Ist dies nicht der Fall, so kann die Funktion umgeschrieben werden. Dieser Schritt ist die erste Reduktion. Nach der Durchführung kann die rationale Funktion wie folgt geschrieben werden:

$$f(z) = g(z) + \frac{r(z)}{q(z)}.$$

[2] Die Zerlegung erfolgte ganz einfach durch die Satzgruppe von Vieta. Siehe beispielsweise:
`http://de.wikipedia.org/wiki/Satzgruppe_von_Vieta`

Selbstverständlich können die letzten beiden Nullstellen auch mit der p-q-Formel oder der abc-Formel bestimmt werden.

Hierbei sind $g(z)$ und $r(z)$ Polynome und $r(z)$ stellt den Rest dar.

Eine zweite Reduktion ist notwendig, falls der höchste Koeffizient im Nenner ungleich 1 ist. Das folgende Beispiel zeigt diesen Schritt:

$$\frac{z^3+1}{4z^2+1} = \frac{z^3+1}{4(z^2+\frac{1}{4})} = \frac{\frac{1}{4}z^3+\frac{1}{4}}{1z^2+\frac{1}{4}}.$$

Wir unterscheiden hier zwischen der komplexen und der reellen Partialbruchzerlegung. Hierbei ist die komplexe Partialbruchzerlegung im Vergleich zur reellen einfacher, da Polynome mit dem Definitionsbereich $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerlegbar sind, was von Bedeutung ist, um den Nenner zerlegen zu können.

4.2.1 Partialbruchzerlegung im Komplexen

Aufgrund der zwei Reduktionsschritte, die bereits erwähnt wurden, können wir uns auf den Fall einer rationalen Funktion $f(z) = \frac{r(z)}{q(z)}$ einschränken, wobei Grad $r(z) <$ Grad $q(z)$ ist und der höchste Koeffizient von $q(z)$ eins ist. Wir setzen weiter voraus, dass die Nullstellen von $q(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_n)$, d.h. die Pole von f, bekannt sind. Zwei verschiedene Fälle können dann betrachtet werden. **1. Einfache Nullstellen:** Somit sind alle z_j voneinander verschieden. Die Partialbruchzerlegung von f lautet dann:

$$f(z) = \frac{r(z)}{q(z)} = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \cdots + \frac{A_n}{z-z_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{z-z_j},$$

wobei die A_j eindeutig bestimmte komplexe Zahlen sind.

Nun stellt sich jedoch die Frage, wie die einzelnen A_j zu bestimmen sind. Um die A_j ermitteln zu können, streicht man in der rationalen Funktion $f(z) = \frac{r(z)}{q(z)}$ den Faktor $(z-z_j)$ im Nenner und setzt $z = z_j$ in der erhaltenen Funktion ein, man erhält A_j; nähere Erläuterungen hierzu finden sich im Skript. Diese Methode wird als Zuhaltemethode bezeichnet, da der Term $(z-z_j)$ auch einfach mit der Hand verdeckt werden kann.

Beispielsweise lautet der Ansatz für die Funktion $f(z) = \frac{z+i}{(z-2)\cdot(z^2+4)}$ wie folgt:

$$\frac{z+i}{(z-2)\cdot(z^2+4)} = \frac{z+i}{(z-2)\cdot(z+2i)\cdot(z-2i)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2i} + \frac{C}{z-2i}. \tag{14}$$

Um die Koeffizienten A, B, C bestimmen zu können, kann wie bereits erwähnt die Zuhaltemethode verwendet werden. Hierzu wird die erste Nullstelle $z = 2$ in die rationale Funktion $f(z)$ eingesetzt, wobei der Term $(z-2)$ im Nenner zugehalten wird. Somit ergibt sich für A:

$$A = \frac{2+i}{(2+2i)\cdot(2-2i)} = \frac{2+i}{4-4i^2} = \frac{2+i}{8}.$$

Analog werden B und C bestimmt, die Nullstelle wird in die Funktion eingesetzt, wobei der entsprechende Term im Nenner zugedeckt wird:

$$B = \frac{-2i+i}{(-2i-2)\cdot(-2i-2i)} = \frac{-i}{(-2i-2)\cdot(-4i)} = \frac{-i}{8(-1+i)} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{i-1}{16},$$

$$C = \frac{2i+i}{(2i-2)\cdot(2i+2i)} = \frac{3i}{(2i-2)\cdot 4i} = \frac{3i}{8\cdot(-1-i)} \cdot \frac{-1+i}{-1+i} = \frac{-3\cdot(1+i)}{16}.$$

2. Mehrfache Nullstellen: Tritt die Nullstelle z_j k-fach auf, so erhält sie bei der Faktorzerlegung von $q(z)$ den Term $(z-z_j)^k$. In diesem Fall kann die Partialbruchzerlegung neben dem Term $\frac{A_j}{z-z_j}$ auch solche mit höheren Exponenten im Nenner haben:

$$\frac{A_{j1}}{z-z_j} + \frac{A_{j2}}{(z-z_j)^2} + \cdots + \frac{A_{jk}}{(z-z_j)^k}.$$

Analog zu Beispiel (14) kann auch bei mehrfachen Nullstellen die Zuhaltemethode eingesetzt werden. Die Funktion $g(z) = \frac{z+i}{(z-2)^2 \cdot (z^2+4)}$ ähnelt dabei der Funktion $g(z)$, hat jedoch eine doppelte Nullstelle bei $z = 2$. Der Ansatz lautet dann folgendermaßen:

$$\frac{z+i}{(z-2)^2 \cdot (z^2+4)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-2)^2} + \frac{C}{z+2i} + \frac{D}{z-2i}.$$

Wie bei den einfachen Nullstellen können einige der Koeffizienten mit der Zuhaltemethode bestimmt werden. Für die doppelte Nullstelle kann jedoch nur der Koeffizient für den jeweils höchsten Exponenten bestimmt werden, also für $(z-2)^2$:

$$B = \frac{2+i}{(2+2i)\cdot(2-2i)} = \frac{2+i}{4-4i^2} = \frac{2+i}{8}.$$

Analog zu dem Beispiel mit den einfachen Nullstellen, werden die Koeffizienten C und D für $z = -2i$ und $z = 2i$ bestimmt:

$$C = \frac{-2i+i}{(-2i-2)^2 \cdot (-2i-2i)} = \frac{-i}{32},$$

$$D = \frac{2i+i}{(2i-2)^2 \cdot (2i-2)\cdot(2i+2i)} = \frac{3i}{32}.$$

A kann entweder mit dem Koeffizientenvergleich bestimmt werden, siehe hierzu die Beispielaufgabe, oder indem die Gleichung (4.2.1) mit dem Hauptnenner multipliziert wird und ein beliebiger Wert für z, jedoch nicht $z_1 = 2$, eingesetzt wird. Für $z = 0$ ist die Gleichung

$$z + i = A \cdot (z-2) \cdot \left(z^2+4\right) + B \cdot \left(z^2+4\right) + C \cdot (z-2)^2 \cdot (z-2i) + D \cdot (z-2)^2 \cdot (z+2i)$$

äquivalent zu

$$i = -8A + 4B - 8iC + 8iD.$$

Mit B, C, D eingesetzt erhalten wir die Gleichung

$$i = -8A + 4\left(\frac{2+i}{8}\right) - 8i\left(\frac{-i}{32}\right) + 8i\frac{3i}{32},$$

die die einzige Lösung $A = \frac{-i}{16}$ hat. Somit lautet die Partialbruchzerlegung der Funktion $g(z)$ folgendermaßen:

$$\frac{z+i}{(z-2)^2 \cdot (z^2+4)} = \frac{-i}{16\cdot(z-2)} + \frac{2+i}{8\cdot(z-2)^2} + \frac{-i}{32\cdot(z+2i)} + \frac{3i}{32\cdot(z-2i)}.$$

4.2.2 Partialbruchzerlegung im Reellen

Die reelle Partialbruchzerlegung unterscheidet sich nicht großartig von der komplexen. Einzig die Koeffizienten A_j sind reell und nicht komplex. Nichtsdestotrotz können auch komplexe Nullstellen auftreten, allerdings nur in komplex-konjugierten Paaren $a \pm ib$. Diese werden dann zu einem quadratischen Faktor zusammengefasst:

$$(x-(a+ib))\cdot(x-(a-ib)) = (x-a)^2 + b^2.$$

Es folgt dann für den komplexen Term in der Partialbruchzerlegung

$$\frac{A}{x-(a+ib)} + \frac{B}{x-(a-ib)} = \frac{Cx+D}{(x-a)^2+b^2}$$

für passende $A, B \in \mathbb{C}$, $C, D \in \mathbb{R}$, wobei in der reellen Partialbruchzerlegung die reellen quadratischen Koeffizienten C, D bestimmt werden müssen. A und B sind hier irrelevant. Eine reelle Partialbruchzerlegung erfolgt hier durch Multiplikation mit dem Nenner und anschließender Lösung des linearen Gleichungssystems.

4.2.3 Zusammenfassung

Zusammenfassend ist hier noch eine aus dem Skript übernommene Übersicht:

- Polynomdivision anwenden, falls Grad $p(z) \geq$ Grad $q(z)$.
- Höchsten Koeffizient im Nenner, d.h. von q, zu 1 umwandeln.
- Partialbruchzerlegung:
  - ∗ Bestimme die Nullstellen des Nenners.
  - ∗ Richtigen Typ für die Partialbruchzerlegung ansetzen:
    - – Einfacher Pol z_j erfordert ein Term der Form $\dfrac{A_j}{z - z_j}$,
    - – k-facher Pol erfordert k Terme der Form $\dfrac{A_{j1}}{z - z_j} + \dfrac{A_{j2}}{(z - z_j)^2} + \cdots + \dfrac{A_{jk}}{(z - z_j)^k}$,
    - – Bei reellen Koeffizienten und einem einfachen Pol $z = a_j + ib_j$ ist auch $z = a_j - ib_j$ ein Pol. Die beiden komplexen Terme können zu einem reellen zusammengefasst werden:

$$\frac{Cx + D}{(x - a)^2 + b^2}.$$

  - ∗ Koeffizienten durch Zuhaltemethode oder Koeffizientenvergleich bestimmen.

Beispiel (Partialbruchzerlegung)
Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung für folgende reelle rationale Funktion:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x^3}{x^2 - 2x + 1}.$$

Der Grad des Zählers ist größer als oder gleich der des Nenners. Deshalb muss die Funktion zunächst mit Polynomdivision bearbeitet werden:

$$\begin{array}{l}
\left(-2x^3 + 5x^2\right) : \left(x^2 - 2x + 1\right) = -2x + 1 + \dfrac{4x - 1}{x^2 - 2x + 1}. \\
\underline{\quad 2x^3 - 4x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad x^2 + 2x \\
\qquad\quad \underline{-x^2 + 2x - 1} \\
\qquad\qquad\quad 4x - 1
\end{array}$$

Somit hat die Funktion einen Rest von $4x - 1$ und lässt sich wie folgt schreiben:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x^3}{x^2 - 2x + 1} = -2x + 1 + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Für den Bruch kann die Partialbruchzerlegung durchgeführt werden, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.

Der nächste Schritt ist die Nullstellen des Nenners, d.h. die Pole, zu bestimmen. Beim genaueren Hinschauen ist erkennbar, dass es sich bei dem Nenner um eine binomische Formel zweiten Grades handelt. Dementsprechend ist $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Die doppelte Nullstelle lautet somit $x_{1,2} = +1$. Aus der obenstehenden Zusammenfassung ist der nächste Schritt erkennbar, es wird die Partialbruchzerlegung mit doppelter Nullstelle durchgeführt:

$$\frac{4x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\boldsymbol{A}}{x - 1} + \frac{\boldsymbol{B}}{(x - 1)^2}.$$

In diesem Beispiel wollen wir anstatt der Zuhaltemethode zu verwenden A und B mithilfe eines Koeffizientenvergleiches bestimmen. Hierfür muss zunächst ein Hauptnenner gefunden werden und es wird damit erweitert:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x+1} = \frac{A\cdot(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Für den Koeffizientenvergleich müssen nun die Zähler verglichen werden:

$$4x-1 = Ax - A + B.$$

Alle Koeffizienten auf der linken und rechten Seite vor den gleichen Potenz von x können zusammengefasst und gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned} x^1 = x: \quad 4x &= \quad Ax \\ x^0 = 1: \quad -1 &= -A + B. \end{aligned}$$

Somit ist durch Koeffizientenvergleich (von x) $\boldsymbol{A = 4}$ bekannt und kann beim Lösen der zweiten Gleichung verwendet werden. Durch einsetzen von 4 für A in

$$-1 = -\boldsymbol{A} + B$$

erhalten wir $\boldsymbol{B = 3}$. Das Ergebnis der Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x+1} = \frac{\mathbf{4}}{x-1} + \frac{\mathbf{3}}{(x-1)^2}.$$

Es kann natürlich auch die Zuhaltemethode angewendet werden, allerdings ist in diesem Fall der Koeffzientenvergleich ähnlich schnell. Bei einer Partialbruchzerlegung mit paarweise unterschiedlichen Nullstellen des Nenners ist die Zuhaltemethode im Allgemeinen schneller anzuwenden und damit insbesondere für die Klausur gut geeignet.

2. Aufgabe (Lerncheck)
Bestimmen Sie die Partialbruchansätze sowie die Partialbruchzerlegungen für folgende reelle rationale Funktionen:

a) $g(x) = \dfrac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}$,

b) $h(x) = \dfrac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}$.

4.3 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 4. Kapitel

1. Aufgabe

P hat als Polynom mit reellen Koeffizienten zu jeder komplexen Nullstelle auch deren komplexkonjugierte Zahl als Nullstelle. Damit ist $-i$ die zweite komplexe Nullstelle.
Es gilt $P(0) = -1 < 0$ und $P(2) = 5 > 0$, damit nimmt P als stetige Funktion eingeschränkt auf $\mathbb{R}$ eine Nullstelle im Intervall $]0,2[$ an. Damit haben wir die Existenz von drei verschiedenen Nullstellen bewiesen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat die Funktion auch nur drei Nullstellen, sodass keine weiteren mehr hinzukommen könnte.

(Alternativ zum Zwischenwertsatz lässt sich hier auch 1 als explizite Nullstelle angeben, jedoch sollte man sich auch diese komplizierter Methode merken, da sich die Nullstellen nicht bei jeder Funktion so erraten lassen.)

2. Aufgabe

a) Ansatz: $\dfrac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{3}{x+2}$

b) Ansatz: $\dfrac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

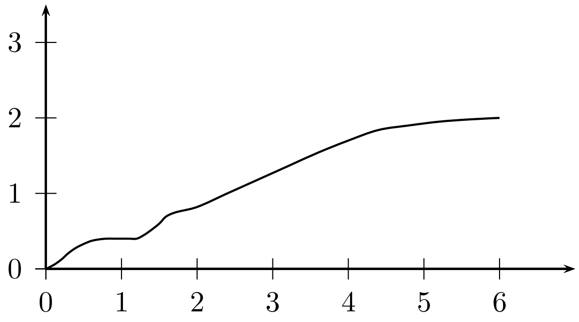
Partialbruchzerlegung: $\dfrac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{3x-2}{x^2+1}$

Projekt UNITUS – Einstieg ins Skript und Beispiele

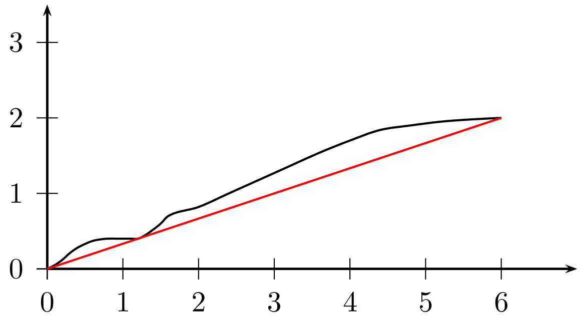
5 Differentiation

Motivation

Ein Student fährt mit seinem Fahrrad von der TU zum Großen Stern, um dort ein paar Freunde zu treffen. Die zurückgelegte Strecke (in Kilometer) nach t Minuten nach der Abfahrt kann mit einer Funktion $s(t)$ (s wegen des englischen Wortes “segment”) beschrieben werden. Beschreiben Sie den Verlauf der Fahrt anhand der folgenden Skizze.



Die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Kilometer nach t Minuten



Die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Kilometer nach t Minuten mit Sekante der Steigung $\frac{1}{3}$

Um abzuschätzen, wie schnell gefahren wurde, wird die Entfernung (2 km) durch die benötigte Zeit (6 Minuten) geteilt. Dies ist die Steigung der **Sekante** durch die Punkte $(0, s(0))$ und $(6\,, s(6))$

$$\frac{s(6)-s(0)}{6-0} = \frac{2-0}{6-0} = \frac{1}{3}.$$

Dies entspricht eine Geschwindigkeit von ungefähr $\frac{1}{3}$ Kilometer pro Minute oder 20 Kilometer pro Stunde. Logischerweise, wurde nicht zu jedem Zeitpunkt der Reise mit 20 Kilometer gefahren. Zwischen $t = 0.8$ und $t = 1.2$ Minuten gab es eine rote Ampel und am Ende wurde gebremst. Deshalb wurde teilweise schneller als 20 Kilometer in der Stunde gefahren. Um die Höchstgeschwindigkeit zu erreichen (dass diese existiert stellt das Extremwertkriterium - Abschnitt 5.2 fest), müsste jedoch mindestens einmal mit 20 Kilometer pro Stunde gefahren worden sein. Dies ist das Prinzip des Mittelwertsatzes (Abschnitt 5.2).

Statt die Gesamtstrecke zu betrachten, können wir die Geschwindigkeit an winzig kleineren Intervallen abschätzen, denn dort ist die Geschwindigkeit annähernd konstant. Die Änderung in der Zeit wird mit Δt (sprich „delta t“) bezeichnet. Analog wird die Änderung der zurückgelegten Strecke in dieser Zeit mit Δs bezeichnet. Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ (v wegen des englischen Wortes „velocity“) zu einem Zeitpunkt t kann als die momentane Änderung der Funktion $s(t)$ zum Zeitpunkt t betrachtet werden. Nach dem Auflösen der bekannten Formel $s = vt$ für v werden die Änderungen der Strecke und in der Zeit in die Formel eingesetzt:

$$v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

(Das Symbol $\approx$ (sprich „ist ungefähr“) wird bei Abschätzungen benutzt.) Sind nun t und t^* die Randpunkte eines winzig kleinen Intervalls, so ist

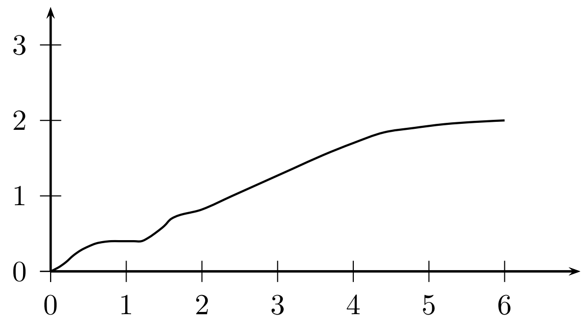
$$v \approx \frac{s(t^*)-s(t)}{t^*-t}.$$

Der Randpunkt t^* kann in Abhängigkeit von t beschrieben werden, nämlich als $t^* = t + \Delta t$, wobei Δt sehr klein ist, oder einfach $t^* - t = \Delta t$. Wir halten t fest und lassen das Zeitintervall gegen 0 laufen (d.h. $t^* \to t$ oder $\Delta t \to 0$), und schauen, ob $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ existiert, was hier ja der Fall sein muss, weil die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt während des Fahrts existiert, auch wenn dies 0 ist. Wir schreiben

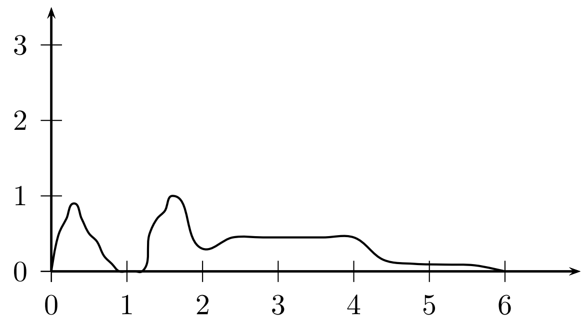
$$v(t^*) = \lim_{t^* \to t} \frac{s(t^*)-s(t)}{t^*-t} =: s'(t^*)$$

und sagen, dass die Geschwindigkeitsfunktion die Ableitung der Funktion s ist, die mit $s'(t)$ bezeichnet wird.

In der folgenden Skizze ist die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt der Fahrt dargestellt. Vergleichen Sie die beiden Skizzen, um Beziehungen zwischen der Funktion s und die Ableitung $s' = v$ zu erkennen. Beispielsweise, wie sieht die ursprüngliche Funktion aus, wenn die Ableitung a) gleich 0 ist, b) > 0 ist, c) eine Konstante ist[3]



Die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Kilometer nach t Minuten



Die Geschwindigkeit $v(t)$ in Kilometer pro Minute nach t Minuten

5.1 Die Ableitung

Es gibt unterschiedliche Notationen, die in den Formulierungen der Definition der Ableitung benutzt werden können. Mit Erfahrung weiß man, bei welchen Aufgaben die eine Notation bequemer als eine andere anzuwenden ist. Zuerst die Definition, die nur leicht unterschiedlich zu der im Ferus Skript ist.[4]

Definition (Differenzierbarkeit; Ableitung)
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, heißt in $x^* \in I$ **differenzierbar**, wenn

$$f'(x^*) := \lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$$

existiert (d.h. der Grenzwert muss definiert sein und darf nicht $\pm\infty$ sein). $f'(x^*)$ heißt dann die **Ableitung** von f in x^*. Man nennt f differenzierbar auf I, wenn es für jedes $x^* \in I$ differenzierbar ist.

Für die Ableitung gibt es verschiedene Schreibweisen. Die geläufigste ist die in der Definition genannte. Man sollte allerdings auch die anderen mindestens schon mal gesehen haben:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Bemerkung: Man sagt beispielsweise df nach dx für $\frac{df}{dx}$.

Was ist die Bedeutung der Ableitung? Wir haben schon eine physikalische Interpretation für eine Funktion, die die zurückgelegte Strecke nach einem gegebenen Zeitraum beschreibt, angedeutet. Wir schauen nun den allgemeinen Fall mit Hilfe von Folgen an, um das mathematische Verständnis zu vertiefen. In der grafischen

[3]a) Der Student bleibt stehen (beispielsweise an einer Ampel) und s bleibt für $t \in]0.8, 1.2[$ konstant.
b) Der Student fährt weiter. Die zurückgelegte Strecke nimmt für $t \in]0, 0.8[\cup]1.2, 6.0[$ zu.
c) Der Student fährt mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Die Funktion s ist linear auf dem Intervall $t \in]2.4, 4.0[$.
[4]Wir schreiben x^* statt x_0, um die Definition an die Notation von Folgen anzupassen.

Darstellung der Funktion f ist die Steigung der Sekante durch die zwei verschiedenen Punkte $(x, f(x))$ und $(x^*, f(x^*))$ gegeben durch

$$m = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}.$$

Wir legen nun $(x^*, f(x^*))$ fest und wählen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x^* mit $x_n \neq x^*$ konvergiert, und die die Punkte

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots$$

definiert. Weil x_k verschieden von x^* für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, ist jeder Punkt $(x_k, f(x_k))$ von $(x^*, f(x^*))$ verschieden, sodass eine Sekante durch diese zwei Punkten mit Steigung

$$m_k := \frac{f(x_k) - f(x^*)}{x_k - x^*}$$

definiert werden kann. Die Frage ist nicht nur, ob die Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, sondern auch ob jede so konstruierte Folge gegen denselben Wert konvergiert. Falls eine einzige Folge von Steigungen divergent ist oder zwei Folgen gefunden werden können, für die die Folgen der Steigungen gegen verschiedenen Grenzwerten konvergieren, dann ist f in x^* nicht differenzierbar.

Das prototypische Beispiel einer nicht differenzierbaren Funktion ist die Betragsfunktion. Wir zeigen dies auf zwei verschiedenen Arten, einmal um die Definition verständlicher zu machen (Teil a) und einmal eine wichtige Technik, die man beherrschen soll, aufzuzeigen (Teil b).

deifferen

Beispiel (Nicht-differenzierbare Funktionen, die stetig sind)

a) Zeigen Sie, dass die stetige Funktion $f(x) = |x|$ in $x^* = 0$ nicht differenzierbar ist, indem Sie

i) zwei Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ definieren, für die die Folge der Steigungen der Sekanten $(m_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $(M_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ unterschiedliche Grenzwerten haben mit

$$m_k := \frac{f(x_k) - f(x^*)}{x_k - x^*} \text{ und } M_k := \frac{f(X_k) - f(x^*)}{X_k - x^*},$$

ii) die einseitigen Grenzwerte betrachten:

$$\lim_{x\nearrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \text{ und } \lim_{x\searrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $h(x) = x^{\frac{2}{3}}$ für $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

ai) Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit $x_k = -\frac{1}{k}$ konvergiert gegen $x^* = 0$. Weil $-\frac{1}{k}$ eine negative Zahl für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist, ist $f(x_k) = |x_k| = -x_k$. Die Folge der Steigungen der Sekanten $(m_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit

$$m_k = \frac{-x_k - x^*}{x_k - x^*} = \frac{-x_k - 0}{x_k - 0} = -1$$

konvergiert gegen -1.

Die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit $X_k := \frac{1}{k}$ konvergiert gegen $x^* = 0$. Diesmal ist jedes Folgeglied X_k eine positive Zahl für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, d.h. $f(X_k) = |X_k| = X_k$. Bei der Folge der Steigungen der Sekanten ist

$$M_k = \frac{X_k - x^*}{X_k - x^*} = \frac{X_k - 0}{X_k - 0} = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass die Folge $(M_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ gegen 1 konvergiert.

Die Folgen $(m_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $(M_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ (m_k bzw. M_k sind die Steigungen der Sekanten durch $(0,0)$ und $(x_k, f(x_k))$ bzw. $(X_k, f(X_k))$) sind beide konvergent, jedoch haben sie nicht denselben Grenzwert. Die Funktion f kann deshalb nicht differenzierbar in $x^* = 0$ sein.

aii) Der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert der Steigungen der Sekanten stimmen nicht überein:

$$\lim_{x\nearrow x^*} \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\searrow x^*} \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} = \lim_{x\searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Die Funktion f ist in $x^* = 0$ nicht differenzierbar.

b) Existiert ein Grenzwert der Steigungen der Sekanten, so müssen der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert als reelle Zahlen existieren (d.h. der Grenwert darf nicht $\pm\infty$ sein) und übereinstimmen. Es gilt jedoch für $h(x) = x^{\frac{2}{3}}$ und $x \neq 0$:

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{x^{\frac{2}{3}}-0}{x^{\frac{3}{3}}-0} = x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Der linkseitigen Grenzwert der Steigungen der Sekanten ist keine reelle Zahl, weil $\lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = -\infty$, d.h. der Grenzwert existiert in $x = 0$ nicht. h kann demnach nicht in $x = 0$ differenzierbar sein.

Bemerkungen:

- In Teil ai) haben wir jeweils *eine* Folge auf jeder Seite von $x^* = 0$ betrachtet. In Teil aii) wurde *jede* Folge links bzw. rechts von $x^* = 0$ betrachtet.
- Wie das Beispiel zeigt, müssen stetige Funktionen **nicht** unbedingt differenzierbar sein.

1. Aufgabe (Lerncheck - rechtseitiger Grenzwert)

Bestimmen Sie

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$

für $h(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an und betrachten Sie die Funktion in $x = 0$. Zeichnen Sie die Sekanten durch $(0,0)$ und die folgenden Punkte:

$$(-\tfrac{1}{2}, h(-\tfrac{1}{2})), (-\tfrac{1}{3}, h(-\tfrac{1}{3})), (-\tfrac{1}{4}, h(-\tfrac{1}{4})), (\tfrac{1}{2}, h(\tfrac{1}{2})), (\tfrac{1}{3}, h(\tfrac{1}{3})), (\tfrac{1}{4}, h(\tfrac{1}{4})),$$

um die Grenzwerte besser zu verstehen.

Beispiel (Konstante Funktionen und lineare Funktionen sind differenzierbar)

Zeigen Sie anhand der Definition der Ableitung, dass reelle Funktionen der Form

$$f(x) = c \quad \text{und} \quad g(x) = mx + b$$

mit $c, m, b \in \mathbb{R}$ in einem beliebigen $x^* \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind.

Sei $x^* \in \mathbb{R}$ beliebig. Um zu entscheiden, ob $f'(x^*) = \lim_{x\to x^*} \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}$ existiert, formen wir die Differenzenquotient um:

$$\frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} = \frac{c-c}{x-x^*} = \frac{0}{x-x^*} = \frac{0\cdot(x-x^*)}{x-x^*} = 0 \cdot \frac{x-x^*}{x-x^*}.$$

Bei der Bestimmung der Ableitung ist $x \neq x^*$, sodass gekürzt werden kann:

$$f'(x^*) = \lim_{x\to x^*} 0 \cdot \frac{\cancel{x-x^*}}{\cancel{x-x^*}} = \lim_{x\to x^*} 0 \cdot 1 = \lim_{x\to x^*} 0 = 0.$$

Die Ableitung von f existiert unabhängig von der Wahl von x^*, d.h. f ist eine differenzierbare Funktion.

Sei $x^* \in \mathbb{R}$ beliebig. Um zu entscheiden, ob $g'(x^*) = \lim_{x \to x^*} \frac{g(x)-g(x^*)}{x-x^*}$ existiert, formen wir wiederum die Differenzenquotient um:

$$\frac{g(x)-g(x^*)}{x-x^*} = \frac{(mx+b)-(mx^*+b)}{x-x^*} = \frac{mx-mx^*}{x-x^*} = \frac{m(x-x^*)}{(x-x^*)}.$$

Die Ableitung

$$g'(x) = \lim_{x \to x^*} \frac{m\cancel{(x-x^*)}}{\cancel{(x-x^*)}} = \lim_{x \to x^*} m = m$$

existiert unabhängig von der Wahl von x^*, d.h. g ist eine differenzierbare Funktion.

Bei der Bestimmung der Ableitung von g haben wir ausgenutzt, dass x ungleich x^* ist. Sonst hätten wir nicht kürzen dürfen. Bei schwierigeren Aufgaben ist es häufig das Ziel, den Faktor $x - x^*$ im Nenner zu kürzen, um die Rechenregeln für konvergierende Folgen anwenden zu können. Die Schreibweise wie im Beispiel kann ungünstig sein, weil wir den Faktor $x - x^*$ erst im Zähler finden müssen. Außerdem, kann es sein, dass wir die Ableitung für alle möglichen x^* (entsprechend für alle x) bestimmen wollen. Daher bietet sich eine Variante der Definition der Ableitung an, die sehr nützlich sein kann.

Lemma (Alternative Schreibweise für die Ableitung in x)
Die Ableitung von $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, falls sie existiert, ist gegeben durch $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Umgekehrt falls $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existiert für alle $x \in I$, so ist $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ die Ableitung von f.

In dieser Schreibweise wird x in der Definition der Ableitung mit $x + h$ ersetzt und x^* von der Definition mit x ersetzt. Weil $h \to 0$ konvergiert, so konvergiert $x + h$ gegen x. Die Sekante durch den Punkten $(x + h, f(x + h))$ und $(x, f(x))$ ist $\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, woraus die Richtigkeit der Formel folgt.

Beispiel (Die Ableitung einer quadratischen Funktion)
Leiten Sie die Formel für die Ableitung einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ für Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ her. Benutzen Sie dabei die Definition der Ableitung und vergleichen Sie mit den Schritten, die Sie mit der alternativen Schreibweise brauchen.

Die Umformung des Differenzenquotients kann (wie im Skript) innerhalb des Ableitungsprozesses in einem Schritt behandelt werden:

mit der Definition	mit $x+h$
$f'(x) = \lim_{x\to x^*} \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}$	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$= \lim_{x\to x^*} \frac{ax^2+bx+c-(a(x^*)^2+bx^*+c)}{x-x^*}$	$= \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{a(x+h)^2}+\boldsymbol{b(x+h)}+\boldsymbol{c}-(ax^2+bx+c)}{h}$
$= \lim_{x\to x^*} \frac{a(x^2-(x^*)^2)+b(x-x^*)+c-c}{x-x^*}$	$= \lim_{h\to 0} \frac{ax^2+2ahx+ah^2+bx+bh+c-ax^2-bx-c}{h}$
$= \lim_{x\to x^*} \frac{a(x+x^*)(x-x^*)+b(x-x^*)}{x-x^*}$	$= \lim_{h\to 0} \frac{2ahx+ah^2+bh}{h}$
$= \lim_{x\to x^*} \frac{\cancel{(x-x^*)}(a(x+x^*)+b)}{\cancel{(x-x^*)}}$	$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2ax+ah+b)}{\cancel{h}}$
$= 2ax+b$	$= 2ax+b$

Mit der Definition muss man immer das Endziel im Auge haben, nämlich $(x-x^*)$ auszuklammern und kürzen. Der Ausdruck im Zähler muss so umgeformt werden, bis ein Faktor $(x - x^*)$ ausgeklammert werden kann (falls überhaupt möglich). Mit der alternativen Schreibweise wird ausmultipliziert. Danach summiert sich einiges zu Null, und h ist häufig leichter auszuklammern.

Ableitungsregeln

Seien f, g differenzierbaren Funktionen und c eine Konstante. Es gelten die folgenden Rechenregeln,

Summenregel	$(f+g)'(x)$	$=$	$f'(x)+g'(x),$
konstante Faktoren	$(cf)'(x)$	$=$	$cf'(x),$
Produktregel	$(fg)'(x)$	$=$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$	$=$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2},$
Kettenregel	$(f\circ g)'(x)$	$=$	$f'(g(x))\cdot g'(x).$

sind*Bemerkung:* Polynome sind differenzierbar. Diese Aussage können Sie mit vollständiger Induktion beweisen, in dem Sie zeigen, dass ein Polynom vom Grad k differenzierbar ist für alle $k \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Benutzen Sie dazu die Summenregel und konstante Faktoren.) Als Folgerung gilt, dass rationale Funktionen (Quotienten von Polynomen) nach der Quotientenregel differenzierbar sind, überall wo sie definiert sind.

Der Vollständigkeit halber geben wir ein paar einfache Beispiele und ein komplizierteres Beispiel mit den Details an, die die Rechenregeln zeigen.

Beispiel (Bestimmung einer Ableitung - Summenregel)

Berechnen Sie die Ableitung von $h:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}; x\mapsto 5x^2-\dfrac{7}{x^3}$.

Um die Rechenregel anwenden zu können, schreiben wir $h(x)$ als $h(x)=5x^2+\dfrac{-7}{x^3}$. Die Grundfunktionen $f,g;\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2$ und $g(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3}$ sind differenzierbar für $x\neq 0$. Die Ableitungen von f und g sind nach der Tabelle $f'(x)=2\cdot x^{2-1}=2x$ und $g'(x)=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}$. Nach der Ableitungsregel „konstante Faktoren“ sind auch $5f$ und $-7g$ differenzierbare Funktionen für $x\neq 0$ mit den Ableitungen $(5f)'(x)=5\cdot f'(x)=5(2x)=10x$ und $(-7g)'(x)=-7\cdot g'(x)=-7(-3x^{-4})=\frac{21}{x^4}$. Nach der Summenregel ist auch $f+g=h$ eine differenzierbare Funktion mit $h'(x)=f'(x)+g'(x)=10x+\frac{21}{x^4}$.

Für die Hausaufgaben und die Klausur genügt es die Differenzierbarkeit der einzelnen Summanden kurz zu begründen und die Regeln auf einmal anzuwenden, in etwa so wie im Folgenden:
Die Funktion h ist die Summe von Vielfachen eines Polynoms und einer rationalen Funktion, sodass die Ableitungsregeln für $x\neq 0$ angewendet werden können:

$$\begin{aligned} h(x) &= 5x^2-7x^{-3},\\ h'(x) &= 5(2x^1)-7(-3x^{-4})=10x+\frac{21}{x^4}. \end{aligned}$$

Beispiel (Bestimmung einer Ableitung - Kettenregel)

Berechnen Sie die Ableitung von $h(x)=(3x+5)^9$.

Man kann die Funktion h auch als Komposition folgender Funktionen schreiben:

$$\boldsymbol{g(x) := (3x+5)} \quad \text{und} \quad f(y) := y^9.$$

Somit ist

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad \text{[man setzt für } y \text{ einfach } g(x) \text{ ein].}$$

Die Funktionen f und g sind Polynomen, also differenzierbar. Die Kettenregel kann angewendet werden, um h abzuleiten:

$$(h(x))' = (f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Zunächst werden die Teilfunktionen differenziert:

$$\begin{aligned} f'(y) &= ((y)^9)' = 9(y)^{9-1} = 9 \cdot y^8, \\ g'(x) &= (3x+5)' = 3. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} (h(x))' =& f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ =& 9(3x+5)^8 \cdot 3 \\ =& 27(3x+5)^8. \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Allgemeinen wird auch gesagt, dass man die innere Ableitung [hier: $g'(x) = (3x+5)' = 3$] mit der äußeren Ableitung [hier: $9(g(x))^8$] multipliziert.

Beispiel (Bestimmung einer Ableitung - Produkt- und Kettenregel)
Berechnen Sie die Ableitung von $k(x) = (x+1)\left(\sqrt{3x^2 - x}\right)^5$.

Die Funktion k kann als Produkt differenzierbare Funktionen mit der Regel $(\sqrt[n]{r})^m = r^{\frac{m}{n}}$ wie folgt umgeschrieben werden:

$$k(x) = (x+1)\left(\sqrt{3x^2 - x}\right)^5 = (x+1) \cdot (3x^2 - x)^{\frac{5}{2}}.$$

Da es sich bei k offensichtlich um ein Produkt von $f(x) := (x+1)$ und $g(x) := (3x^2 - x)^{\frac{5}{2}}$ handelt, wenden wir die Produktregel an:

$$k'(x) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Wir benötigen also f' und g' um k differenzieren zu können. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) = (x+1) &\Rightarrow f'(x) = 1 \\ g(x) = (3x^2 - x)^{\frac{5}{2}} &\Rightarrow g'(x) = \frac{5}{2} \cdot (3x^2 - x)^{\frac{3}{2}} \cdot (6x - 1). \end{aligned}$$

Hierbei sei angemerkt, dass die Kettenregel angewendet wurde, um g abzuleiten.

$$\begin{aligned} k'(x) &= (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= (x+1)' \cdot (3x^2 - x)^{\frac{5}{2}} + (x+1) \cdot \left((3x^2 - x)^{\frac{5}{2}}\right)' \\ &= 1 \cdot (3x^2 - x)^{\frac{5}{2}} + (x+1) \cdot \frac{5}{2}(3x^2 - x)^{\frac{3}{2}}(6x - 1) \\ &= (3x^2 - x)^{\frac{3}{2}} \left((3x^2 - x)^{\frac{2}{2}} + \frac{5}{2}(x+1)(6x-1)\right) \qquad [(3x^2 - x)^{\frac{3}{2}} \text{ausgeklammert}] \\ &= (3x^2 - x)^{\frac{3}{2}} \left(3x^2 - x + 15x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{30}{2}x - \frac{5}{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{3x^2 - x}\right)^3 \left(18x^2 + \frac{23}{2}x - \frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

In der Klausur ist es nicht notwendig, alle Schritte aufzuschreiben. Die Ableitung der Funktion

$$k(x) = \overbrace{(x+1)}^{f} \overbrace{(\sqrt{3x^2-x})^5}^{g}$$

ist einfach

$$k'(x) = \overbrace{1}^{f'} \cdot \overbrace{(3x^2-x)^{\frac{5}{2}}}^{g} + \overbrace{(x+1)}^{f} \cdot \overbrace{\frac{5}{2}(3x^2-x)^{\frac{3}{2}}(6x-1)}^{g'} .$$

Falls man sich für die Nullstellen interessiert oder die Aufgabestellung es erfordert, kann man ausklammern und weiter rechnen. Sonst sind diese weiteren Schritte eher überflüssig.

Ein weiterer wichtiger Satz ist:

Satz (Stetigkeit bei differenzierbaren Funktionen)

Differenzierbare Funktionen sind stetig.

Andersrum ist das nicht immer so, wie wir in dem ersten Beispiel (mit der Betragsfunktion) am Anfang des Abschnitts gesehen haben! Also besitzt nicht jede stetige Funktion eine Ableitung, muss also nicht differenzierbar sein.
Ist gefragt, ob eine Funktion stetig ist, kann es in manchen Fällen leichter sein zu überprüfen, ob sie in jedem Punkt differenzierbar ist.

5.2 Extremwerte, Mittelwertsatz

Satz (Extremwert)
Nimmt eine differenzierbare Funktion ihr Maximum (oder Minimum) in einem inneren Punkt des Intervalls an, so ist ihre Ableitung dort 0.

Sei $f : [a, b] \to R$ eine differenzierbare Funktion mit einem Maximum in dem inneren Punkt x_0 des Intervalls. Liegt x links von x_0, hat die Sekante durch $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ eine Steigung ≥ 0. Liegt x rechts von x_0, hat die Sekante durch $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ eine Steigung ≤ 0. Von daher hat die Tagente durch $(x_0, f(x_0))$ die Steigung 0, d.h. sie ist eine zur x-Achse parallele Gerade.

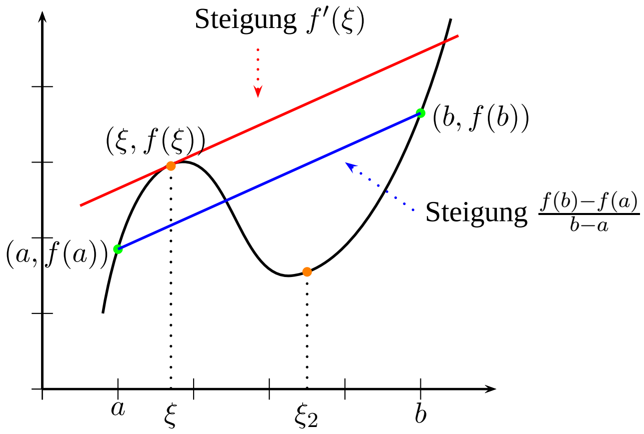
Der Mittelwertsatz, wie auch im Ferus Skript zu finden ist, lautet:

Satz (Mittelwertsatz)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sind $a, b \in I$ beliebig mit $a \neq b$, so gibt es zwischen a und b ein ξ (sprich: ksi) mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Satz sagt aus, dass es einen Wert ξ zwischen a und b gibt, dessen Tangente (die Gerade mit der Steigung von f' an der Stelle ξ)[5] die gleiche Steigung wie die Verbindungsstrecke (die sogenannte Sekante) der Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ hat. Hierfür ist die Differenzierbarkeit von f ein wichtiger Faktor.

[5]Falls Sie vergessen haben, wie die Tangentengleichung $y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ für die Gleichung mit der Steigung $f'(\xi)$ an den Punkt $(\xi, f(\xi))$ herzuleiten ist, können Sie dies mit folgenden Link wiederholen:
`http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/steigung/punktsteigungsform.html`



Es wird daraus allerdings nicht klar, wo sich das ξ genau befindet. Außerdem kann es mehrere x-Werte in dem Intervall geben, deren Tangente diese Steigung hat. Ein weiteres Beispiel im Bild oben wäre ξ_2.

Durch den Mittelwertsatz kann man ungefähr erkennen wie sich die Funktion in einem Intervall verhält. In einigen Fällen reicht es aus, die Existenz einer gewissen Steigung zu beweisen. Beispielsweise bei einer differenzierbaren Funktion, die a und b auf den gleichen Funktionswert abbildet, muss ein Extremum zwischen a und b liegen, wie wir jetzt begründen wollen.
Eine etwas andere Formulierung des Mittelwertsatzes ist der Satz von Rolle. Dieser besagt für eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion f mit $f(a) = f(b)$, dass es einen Wert ξ in dem Intervall $]a, b[$ gibt mit $f'(\xi) = 0$. Damit ist das notwendige Kriterium für ein Extremum in einem Punkt im Intervall erfüllt.
Dieses lässt sich ebenso mit dem Mittelwertsatz zeigen. Für $a \neq b$ und $f(a) = f(b)$ gilt

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0.$$

Da f als differenzierbar vorausgesetzt wurde, ist f ebenso stetig. Für eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ gilt, dass diese dort ihr Minimum und Maximum annimmt. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Minimum und Maximum können sowohl im Inneren des Intervalls als auch in den Randpunkten liegen. Würden sowohl Minimum als auch Maximum in den Randpunkten liegen, so wäre die Funktion konstant, sodass jeder Punkt aus $[a, b]$ sowohl Minimum als auch Maximum ist.
Liegt nur entweder Minimum oder Maximum in einem Randpunkt, so muss das jeweils andere im Inneren des Intervals liegen. Entsprechend, falls beide Randpunkte weder Minimum noch Maximum sind, so liegen beide innerhalb des Intervalls, da wir anfangs gesagt haben, dass beide von der Funktion angenommen werden.
Damit weiß man nun sicher, dass bei einer differenzierbaren Funktion, die a und b auf den gleichen Funktionswert abbildet, ein Extremum zwischen a und b liegen muss.

Beispiel (Lineare Funktion)
Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass die Ableitung der Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = m \cdot x + c \ \text{ mit } \ m, c \in \mathbb{R}$$

an einer Stelle $\xi \in \,]a, b[$ den Wert m annimmt.

f ist ein Polynom ersten Grades und somit auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Daher kann der Mittelwertsatz angewendet werden.

Es gilt für ein $\xi \in \,]a, b[$

$$\begin{aligned} f'(\xi) =& \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{m\cdot b + c - (m\cdot a + c)}{b-a} \\ =& \frac{m\cdot b - m\cdot a + c - c}{b-a} = \frac{m\cdot(b-a)}{b-a} = m. \end{aligned}$$

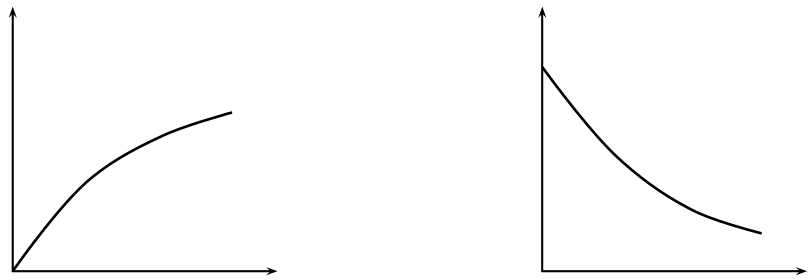
Dieses Ergebnis sollte nicht weiter überraschen. Leitet man die Funktion f ab, so erhält man $f'(x) = m$. In diesem Beispiel gilt also für jeden Wert ξ aus $]a, b[$, dass $f'(\xi) = m$ ist. Das ist natürlich nicht immer so.

Aus dem Mittelwertsatz folgen weitere wichtige Sätze, wie sie auch im Ferus Analysis 1 Skript stehen.

Satz (Monotoniekriterium)
Sei $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall I und $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f *streng monoton steigend*, das heißt

$$a, b \in I \text{ und } a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

Hat man nur $f'(x) \geq 0$, so folgt die schwache Monotonie : $f(a) \leq f(b)$. Entsprechend gilt für $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$, dass f *(streng) mononton fallend* ist.



streng monoton steigend streng monoton fallend

Das Monotoniekriterium kann einem also helfen, zu sehen, ob eine Funktion auf einem Intervall steigend oder fallend ist.
Ist zum Beispiel eine Funktion auf einem Interval *streng* monoton, so ist sie auf dem Intervall auch immer injektiv. (Als Erinnerung heißt eine Funktion f injektiv, falls jedes Element im Wertebereich von f höchstens ein Element im Urbild hat. Dies ist äquivalent zu der Aussage für alle x_1, x_2 im Definitionsbereich: aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.)

Beispiel (Zwischenwertsatz, Monotoniekriterium)
Beweisen Sie, dass

$$f(x) = 2x^3 + x - 5$$

genau eine reelle Nullstelle hat.

Gedanken in Vorbereitung für die Aufgabe: Wichtig ist aus der Formulierung der Aufgabe zu erkennen, dass wir keine reelle Nullstelle explizit finden müssen. Es geht rein um die Existenz einer einzigen reellen Nullstelle. Weil das Wortes „genau“ in der Aufgabenstullung steht, können wir mit Hilfe eines Standardtricks fortfahren. Nämlich, wir versuchen erst die Existenz einer reellen Nullstelle zu beweisen (d.h. es gibt mindestens eine reelle Nullstelle) und dann zeigen wir, dass es höchstens eine reelle Nullstelle geben muss. Dann wissen wir, dass es genau eine reelle Nullstelle gibt.

In dieser Aufgabe haben wir ein Polynom. Polynome sind stetig und differenzierbar. Eine Existenzaussage für Werte einer stetigen Funktion liefert der Zwischenwertsatz. Allerdings haben wir hier kein gegebenes Intervall. Wir wollen aber zeigen, dass es eine Nullstelle gibt. Falls wir einen x_1 finden können mit $f(x_1) < 0$ und ein x_2 mit $f(x_2) > 0$, dann wissen wir, dass es eine Zahl x^* zwischen x_1 und x_2 gibt mit $f(x^*) = 0$. Wir probieren ein paar Zahlen aus und schreiben diesen Teil der Lösung auf:

> Es gilt
> $$f(1) = 2 + 1 - 5 = -2 < 0 \quad \text{und} \quad f(2) = 16 + 2 - 5 = 13 > 0.$$
> f ist ein Polynom und damit eine stetige Funktion. Nach dem Zwischenwertsatz werden auf dem Intervall $[1, 2]$ von f alle Werte zwischen -2 und 13 angenommen. Somit muss es in diesem Intervall mindestens eine reelle Nullstelle geben.

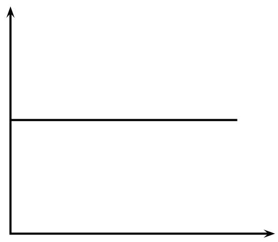
Gedanken zu der Eindeutigkeit der Nullstelle: Wir haben keinen Satz zur Eindeutigkeit, aber wir wissen, dass wenn Monotonie vorhanden ist, kann kein Funktionswert zweimal angenommen werden. Deshalb hoffen wir auf Monotonie, die wir nun ganz einfach mit der Ableitung untersuchen können. Wir schreiben nun den zweiten Teil unserer Lösung auf:

> Weiter gilt
> $$f'(x) = 6x^2 + 1 > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$
> Laut dem Monotoniekriterium ist f damit streng monoton steigend. Daraus folgt, dass die Funktion injektiv ist. Also gilt $f(x) = f(y) = 0$, so muss $x = y$ sein, sodass es höchstens eine reelle Nullstelle geben kann. Da es nun mindestens eine und höchstens eine reelle Nullstelle gibt, existiert genau eine reelle Nullstelle.

Satz (Konstanzkriterium)

Ist die Ableitung von $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I überall Null, so ist f konstant auf I.

Erklären lässt sich das Kriterium dadurch, dass eine Funktion, die weder steigt noch fällt, auf dem gleichen Funktionswert bleibt.



konstant

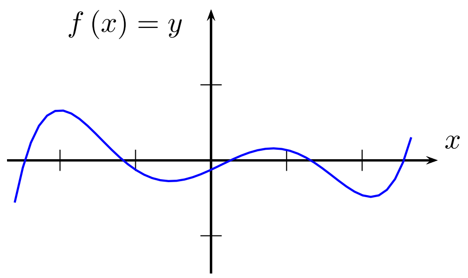
5.3 Motivation: Höhere Ableitungen und Taylorpolynome

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, können wir viele Funktionen ableiten. Auch die Ableitung einer Funktion ergibt wieder eine Funktion, die sich in vielen Fällen wieder differenzieren lässt. Doch wie kann man sich die zweite, dritte oder n-te Ableitung einer Funktion vorstellen? Betrachten wir wieder das gleiche physikalische Beispiel wie in der Motivation zu der Ableitung für die Abschnitte 5.1 und 5.2. Hierfür sei

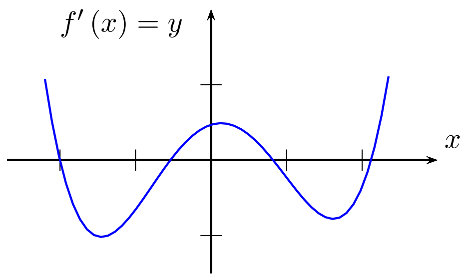
$$s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto s(t)$$

eine Funktion, die uns sagt, wie viel Strecke s nach einer Zeit t zurückgelegt wurde. Wie bereits besprochen ist die erste Ableitung von s die Geschwindigkeit $v := s'$. Sie gibt die Änderungsrate der zurückgelegten Strecke bezüglich der Zeit an $\left(\frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}}\right)$. Die zweite Ableitung ist nun also die Ableitung der ersten Ableitung. Sie wiederum zeigt das Verhältnis der Veränderung der Geschwindigkeit bezüglich der Zeit $\left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Zeit}} = \frac{\frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}^2}\right)$. Es handelt sich hierbei um die Beschleunigung $a = v' = s''$ (a wegen des englischen Wortes „acceleration“).

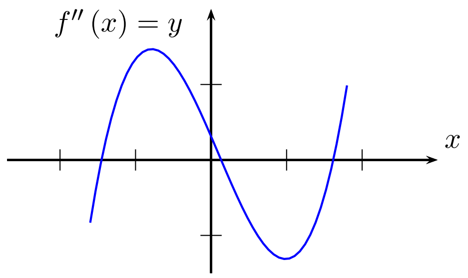
Betrachten wir nun einen ähnlichen Sachverhalt graphisch. Auch hier haben vorallem die erste und zweite Ableitung der Funktion wichtige Bedeutungen.



Links steht der Graph einer Funktion f. Die Bedeutung vom Vorzeichen eines Funktionswertes ist klar. Nimmt die Funktion an der Stelle x einen positiven Wert an (d.h. $f(x) > 0$), so liegt der Punkt $(x, f(x))$ oberhalb der x-Achse. Ist jedoch $f(x) < 0$, so liegt der Punkt $(x, f(x))$ unterhalb der x-Achse. Bei einer Nullstelle liegt $(x, f(x)) = (x, 0)$ auf der x-Achse.



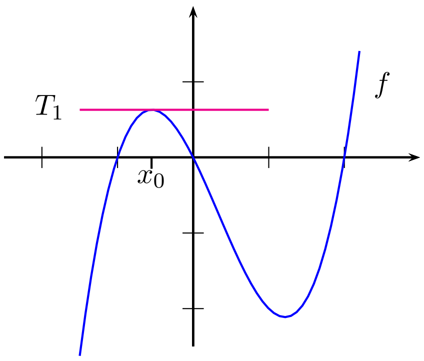
Nimmt die erste Ableitung von f einen positiven Funktionswert an (d.h. $f'(x) > 0$), so ist f an dieser Stelle steigend. Analog ist die Funktion an einer Stelle fallend, wenn die Ableitung dort einen negativen Wert annimmt. In diesem Beispiel sehen wir zudem noch, dass in jeder Nullstelle der Ableitung f' die Funktion f ein lokales Extremum (größten oder kleinsten Punkt in einer Umgebung) besitzt. (Das ist nicht immer so.)
(Um diese Zusammenhänge besser zu sehen, verbinden Sie die zu untersuchenden Stellen mit einer vertikalen Linie mit den Funktionswerten aus dem überstehenden Bild.)

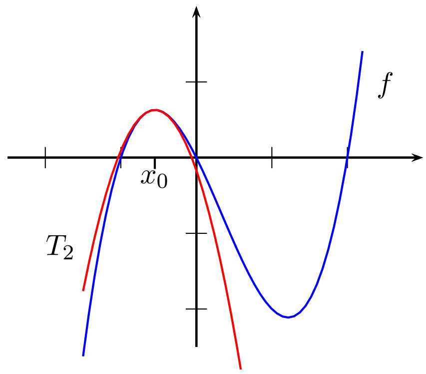


An der zweite Ableitung kann man das Krümmungsverhalten der Funktion ablesen. Ist f'' positiv an einer Stelle, so ist f' an der Stelle steigend und die Funktion f selbst konvex, d.h. nach oben geöffnet ($\cup$). Ist f'' dagegen negativ, so ist f' fallend und f konkav, also nach unten geöffnet ($\cap$). Die Nullstellen von f'' in diesem Beispiel sind sogenannte Wendepunkte, von f, d.h. Punkte an denen sich die Krümmung von konkav auf konvex (oder umgekehrt) ändert.

Eine weitere Anwendung der höheren Ableitungen von einer Funktion ist die Approximation dieser durch ein sogenanntes Taylorpolynom n-ten Grades. Die Idee hierbei ist eine beliebige Funktion lokal möglichst gut durch ein Polynom darzustellen.

Betrachten wir eine **Funktion f** an der Stelle x_0, so sieht man, dass die **Tangente** an dieser Stelle (mit T_1 bezeichnet) in einem kleinen Bereich um x_0 der Funktion sehr nahe kommt (linkes Bild). Da aber f “kurvig” ist, kann die Funktion global nicht sonderlich gut durch die Tangente (eine lineare Funktion oder auch ein Polynom ersten Grades) approximiert werden. Wie wir vorhin allerdings festgestellt haben, gibt uns die zweite Ableitung die Krümmung in einem Punkt an. Das **Taylorpolynom 2. Grades (T_2)** bezieht die erste und zweite Ableitungen der Funktion mitein und nähert sich der Funktion schon besser an, wie man in dem rechten Bild sieht.





Dieses Verfahren (siehe Abschnitt 5.4) lässt sich fortführen indem höhere Ableitungen in x_0 betrachtet werden. So erhält man eine gute Approximation im sogenannten Entwicklungspunkt x_0 durch ein Polynom von beliebigem Grad.

Höhere Ableitungen

Wie in der Motivation erwähnt ist eine **höhere Ableitung** nichts anderes als die Ableitung einer Ableitung. Dabei gilt die rekursive Beschreibung

$$f^{(0)}(x) = f(x) \qquad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad n \geq 1.$$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie man die Ableitung einer Funktion dazu benutzen kann, um deren Extrema zu finden. Dazu betrachten wir als erstes Funktionen, die auf einem Intervall differenzierbar sind. Das notwendige Kriterium für ein Extremum innerhalb eines Intervalls, wie es im Skript Ferus zu finden ist, lautet:

Satz (Notwendiges Kriterium für Extrema)

Nimmt eine *differenzierbare* Funktion ihr Maximum (oder Minimum) in einem *inneren Punkt* des Intervalls an, so ist ihre Ableitung dort Null.

Die Funktion f hat möglicherweise ein Extremum an der Stelle x_0 innerhalb eines Intervalls I, falls die Ableitung an der Stelle x_0 Null ist:

$$f'(x_0) = 0.$$

Ist die Ableitung der differenzierbaren Funktion f innerhalb des gesamten Intervalls I ungleich Null

$$f'(x^*) \neq 0 \text{ für alle } x^* \in I,$$

so bedeutet der Satz, dass kein Extremum in I vorliegen kann.

Um mit Sicherheit sagen zu können, ob es sich bei einem Punkt um ein Minimum oder Maximum handelt, gibt es ein weiteres hinreichendes Kriterium. Ein hinreichendes Kriterium sagt aus, dass an dieser Stelle ein Extremum existiert. Allerdings muss dort auch das notwendige Kriterium erfüllt sein.

Satz (Hinreichendes Kriterium für Extremum)

Sei f eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f'(x_0) = 0$, so

1. ist ein Minimum bei x_0, wenn $f''(x_0) > 0$,
2. ist ein Maximum bei x_0, wenn $f''(x_0) < 0$,
3. können wir keine Aussage treffen, wenn $f''(x_0) = 0$ gilt.

Zum dritten Punkt betrachten Sie die zweimal differenzierbare Funktionen $f_1(x) = 3$ und $f_2(x) = x^3$ definiert auf ganz $\mathbb{R}$. Die ersten zwei Ableitungen der beiden Funktionen

$$f_1'(x) = 0 \text{ und } f_1''(x) = 0, \qquad f_2'(x) = 3x^2 \text{ und } f_2''(x) = 6x,$$

verschwinden im Punkt $x_0 = 0$: $f_i'(0) = 0$ und $f_i''(0) = 0$ für $i = 1, 2$. Die erste Funktion f_1 ist eine konstante Funktion. Sie hat in jedem Punkt ein Extremum, also auch in $x_0 = 0$. Die zweite Funktion f_2 hat kein Extremum in $x_0 = 0$, wie man an dem Graph der Funktion erkennt. Man sieht, dass keine Aussage möglich ist unter der dritten Bedingung.

Ist f an einer Stelle des Definitionsbereichs nicht differenzierbar, kann dort trotzdem ein Extremum liegen. Auch an Randpunkten von Intervallen können Extrema existieren. Diese erkennt man nicht durch die obigen Bedingungen. Hierfür ist es nötig die Funktionswerte zu berechnen und das Verhalten der Funktion im Intervall um den Punkt zu untersuchen, um zu entscheiden, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

Beispiel (Bestimmung von Extrema)
Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f :]1, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 5x^2 + 8x - 4).$$

Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an.

Die Funktion ist als Polynom differenzierbar. Demnach können wir über die erste Ableitung alle möglichen Extremstellen im Inneren des Intervalls bestimmen. Die Ableitung der Funktion ist

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 10x + 8) = x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Diese muss nun mit Null gleichgesetzt werden. Wir erhalten:

$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{8}{3} \overset{!}{=} 0,$$

also

$$x_{1,2} = \frac{10}{6} \pm \sqrt{\frac{100}{36} - \frac{8}{3}} = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{36} - \frac{96}{36}} = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3}.$$

Damit sind bei $x_1 = \frac{4}{3}$ und $x_2 = 2$ mögliche Extrema. Um zu erfahren, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt, bestimmen wir die zweite Ableitung:

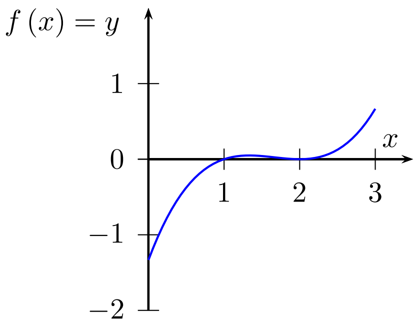
$$f''(x) = 2x - \frac{10}{3}.$$

Es gilt $f''(x_1) = 2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{2}{3}$ und $f''(x_2) = 2 \cdot 2 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$. Also liegt bei x_1 ein lokales Maximum $\left(f(x_1) = \frac{4}{81}\right)$ und bei x_2 ein lokales Minimum $(f(x_2) = 0)$.
Es können allerdings auch bei Randpunkten Extrema liegen. Da wir ein halb offenes Intervall haben, reicht es die angenommene Grenze zu betrachten. Für den rechten Randpunkt gilt

$$f(3) = \frac{1}{3}(3^3 - 5 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 4) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 8 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Der Funktionswert von dem bereits bestimmtem lokalen Maximum ist $f(x_1) = \frac{4}{81}$ welcher kleiner ist als der Funktionswert im Randpunkt. Damit liegt bei $x = 3$ ein globales Maximum mit Funktionswert $f(3) = \frac{2}{3}$.

Eine Skizze der Funktion $f :]1, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$ sieht so aus.



Beispiel (Extrema an Randpunkten)
Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

Die erste Ableitung der Funktion ist
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$
Diese Funktion hat keine Nullstellen, da $-\frac{1}{x^2}$ nie Null sein kann. Die Extrema können sich also nur an den Randpunkten befinden, da bei einem inneren Punkt die Ableitung Null sein müsste. Mit dem rechten Randpunkt eingesetzt, erhält man
$$f(1) = 1.$$
Die Ableitung ist für jeden Wert des Definitionsbereichs negativ. Daher ist die Funktion streng monoton fallend. Das Minimum muss bei dem rechten Randpunkt liegen.
Auf der linken Seite ist eine offene Intervallgrenze. Je kleiner der eingesetzte Wert ist, desto größer ist der Funktionswert an dieser Stelle. Es gibt also keinen größten Funktionswert und damit kein Maximum.
Hier sehen wir, dass eine stetige Funktion in einem Intervall, das nicht kompakt ist, nicht unbedingt ein Maximum bzw. Minimum haben muss.

Satz (Lokale Extremwerte)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und sei x_0 ein innerer Punkt aus I. Für
$$f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^n(x_0) \neq 0$$
sind die folgenden Aussagen gültig.

(1) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extrema (also auch kein globales).

(2) Ist n gerade, so hat f in x_0 ein lokales Extrema. Es liegt ein Maximum vor für $f^n(x_0) < 0$ und ein Minimum für $f^n(x_0) > 0$.

Beispiel (Extrema mit dem Satz über lokale Extrema)
Bestimmen Sie für die folgenden reellen Funktionen f und g die Extrema, falls welche existieren:
$$f(x) = x^4 - 6, \qquad g(x) = x^5.$$

Aus $f(x) = x^4 - 6$ ergibt sich $f'(x) = 4x^3$. Bei $x_0 = 0$ liegt eine Nullstelle der Ableitung vor. Somit ist das notwendige Kriterium für ein Extremum erfüllt. Um zu kontrollieren, ob es sich tatsächlich um ein Extremum handelt, werden weitere Ableitungen der Funktion berechnet, bis eine der Ableitungen keine Nullstelle in $x_0 = 0$ hat.

$$\begin{array}{rcl||rcl} f'(x) & = & 4x^3 & f'(0) & = & 0 \\ f''(x) & = & 12x^2 & f''(0) & = & 0 \\ f^{(3)}(x) & = & 24x & f^{(3)}(0) & = & 0 \\ f^{(4)}(x) & = & 24 & f^{(4)}(0) & = & 24. \end{array}$$

Die zweite Ableitung liefert noch keine Aussage, denn diese ist Null. Erst die vierte Ableitung ist von Null verschieden. Nach dem gerade erwähnten Satz liegt hier also für f ein Extremum vor, denn vier ist eine gerade Zahl. Da $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ gilt, handelt es sich um ein Minimum.

Für $g(x) = x^5$ ist die Ableitung $g'(x) = 5x^4$. Auch diese hat bei $x_0 = 0$ eine Nullstelle. Gehen wir wie in (a) vor und bestimmen die Ableitungen, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcl||rcl} g''(x) & = & 20x^3 & g''(0) & = & 0 \\ g^{(3)}(x) & = & 60x^2 & g^{(3)}(0) & = & 0 \\ g^{(4)}(x) & = & 120x & g^{(4)}(0) & = & 0 \\ g^{(5)}(x) & = & 120 & g^{(5)}(0) & = & 120. \end{array}$$

Bei der fünften Ableitung tritt das erste mal ein von Null verschiedener Wert auf. Nach dem obigen Satz gibt es hier kein Extremum für g, da fünf eine ungerade Zahl ist.

5.3 Taylorpolynom

Wie in der Motivation erklärt, ist die Idee, die hinter dem Taylorpolynom steckt, eine differenzierbare Funktion durch ein Polynom anzunähern. Es wird ein Polynom erstellt, das in einem Punkt (dem sogenannten Entwicklungspunkt) dieselben Ableitungen wie die anzunähernde Funktion besitzt. Dadurch kann sich dieses Polynom gut an die Funktion in der Nähe von dem Entwicklungspunkt anschmiegen.

Definition (Taylorpolynom n-ten Grades und Restglied)

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Das **Taylorpolynom vom Grad** n der Funktion f im Entwicklungspunkt x_0 ist durch

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

gegeben.

Das n-te **Restglied** ist die Differenz zwischen der Funktion und dem Taylorpolynom vom Grad n an der Stelle x: $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Der Satz von Taylor, den wir gleich formulieren, hat zwei wichtige Konsequenzen für eine Funktion f, die m-mal differenzierbar ist:

- Das n-te Taylorpolynom von f (mit $1 \leq n \leq m$) im Entwicklungspunkt x_0 ist als Approximation von f mindestens genau so gut wie das $(n-1)$-te Taylorpolynom von f.

- Um den Fehler zwischen dem tatsächlichen Funktionswert und der Approximation $T_n(x)$ auf dem gegebenen Intervall zu bestimmen, wird eine Abschätzung des Restglieds gesucht. (Manchmal is dies jedoch recht knifflig.) Falls f sogar $(n+1)$-mal differenzierbar ist, bekommen wir durch den Satz eine explizite Form, die dabei helfen kann, den gesuchten Fehler abzuschätzen.

Satz (Satz von Taylor)

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Dann gilt für ein $x_0 \in I$, das als Entwicklungspunkt dient,

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x).$$

Für das n-te Restglied gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Das Restglied wird für großes n sehr klein. Ist f sogar $(n+1)$-mal differenzierbar, so lässt sich das Restglied schreiben als

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

wobei ξ zwischen x und x_0 liegt.

Diese Darstellung des Restglieds $R_n(x)$ nennt sich das Lagrange Restglied. Es sieht nahezu so aus wie das $(n+1)$-te Glied des Taylorpolynoms, man verwendet jedoch die $(n+1)$-Ableitung an der Stelle ξ statt x_0. In manchen Aufgaben wird nach einer Abschätzung des Fehlers gefragt. Damit ist die Abweichung des Taylorpolynoms zur Funktion f gemeint. Hierfür kann man zum einen das Lagrange Restglied berechnen oder man berechnet $|f - T_n|$ und bestimmt in dem gegeben Intervall den maximalen Wert dieses Fehlers.

Das Taylorpolynom gibt einem die Möglichkeit eine Annäherung an Funktionswerte zu finden. Das kann von großem Nutzen sein, wenn man Funktionen, die nicht im Taschenrechner sind, näherungsweise bestimmen will oder man, wie zum Beispiel in einer Klausur, keinen Taschenrechner zur Hand hat.

Beispiel (Lineare Approximation)

a) Zeigen Sie, dass das Taylorpolynom vom Grad 1 im Entwicklungspunkt x_0 der mindestens einmal differenzierbaren Funktion f mit der Formel für lineare Approximation übereinstimmt.

b) Finden Sie durch ein Taylorpolynom vom Grad 1 eine Annäherung an $\sqrt{89}$.

a) Die lineare Approximation aus Abschnitt 5.1 im Skript ergibt

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ &= f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0)^1 \\ &= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 \\ &= T_1(x). \end{aligned}$$

b) Für diesen Teil der Aufgabe kann man die Funktion $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ durch das Taylorpolynom vom Grad approximieren. Wenn wir $f(89) = \sqrt{89}$ näherungsweise bestimmen wollen, wird als erstes ein Entwicklungspunkt für das Taylorpolynom benötigt. Hierbei bietet sich $x_0 = 81$ an, da wir von dieser Zahl sehr einfach die Wurzel bestimmen können und sie nah an 89 liegt.
Wir bestimmen das Taylorpolynom vom Grad 1. Dafür wird zunächst die erste Ableitung zu f berechnet:

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

Damit ist das Taylorpolynom vom Grad 1 im Entwicklungspunkt $x_0 = 81$

$$T_{1,81}(x) = \frac{f(81)}{0!} \cdot (x-81)^0 + \frac{f'(81)}{1!} \cdot (x-81) = \sqrt{81} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{81}} \cdot (x-81) = 9 + \frac{1}{18} \cdot (x-81).$$

Setzt man nun 89 ein, erhält man

$$T_{1,81}(89) = 9 + \frac{1}{18} \cdot (89 - 81) = 9 + \frac{8}{18} = 9 + \frac{4}{9} = 9{,}\overline{4}$$

als lineare Approximation.

2. Aufgabe (Lerncheck)
Bestimmen Sie eine weitere lineare Approximation zu $\sqrt{89}$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 100$ und vergleichen Sie Ihre Approximation und die Approximation aus dem vorangehenden Beispiel mit einem Wert aus dem Taschenrechner.

Beispiel (Berechnung Taylorpolynom; Fehlerabschätzung; Ableitungen)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 3 von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die ersten drei Ableitungen von f und dem berechnetem Taylorpolynom am Entwicklungspunkt den gleichen Wert besitzen.

c) Schätzen Sie den Fehler im Interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ ab.

a) Als erstes berechnen wir das Taylorpolynom vom Grad 3 von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Hierfür werden die erste, zweite und dritte Ableitung von f benötigt. Diese lauten

$$\begin{array}{rclcrcrclcr} f^{(0)}(x) &=& f(x) &=& \sin x, & & f^{(1)}(x) &=& f'(x) &=& \cos x, \\ f^{(2)}(x) &=& f''(x) &=& -\sin x, & & f^{(3)}(x) &=& f'''(x) &=& -\cos x. \end{array}$$

Damit lässt sich das gesuchte Taylorpolynom im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bestimmen:

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 \\ &= \frac{\sin 0}{1} + \frac{\cos 0}{1}x + \frac{-\sin 0}{2}x^2 + \frac{-\cos 0}{6}x^3 \\ &= \frac{0}{1} + \frac{1}{1}x + \frac{-0}{2}x^2 + \frac{-1}{6}x^3 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

b) Die ersten drei Ableitungen von f an der Stelle $x_0 = 0$ sind wie folgt:

$$\begin{array}{rclclcrclcl} f(0) &=& \sin 0 &=& 0, & & f'(0) &=& \cos 0 &=& 1, \\ f''(0) &=& -\sin 0 &=& 0, & & f'''(0) &=& -\cos 0 &=& -1. \end{array}$$

Nun berechnen wir die ersten drei Ableitungen von T_3:

$$\begin{array}{rclcrcl} T_3(x) &=& x - \frac{1}{6}x^3, & & T_3'(x) &=& 1 - 3 \cdot \frac{1}{6}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2, \\ T_3''(x) &=& 0 - 2 \cdot \frac{1}{2}x = -x, & & T_3'''(x) &=& -1. \end{array}$$

Für $x = 0$ gilt:

$$\begin{array}{rclcrcl} T_3(0) &=& 0 - \frac{1}{6} \cdot 0^3. = 0, & & T_3'(0) &=& 1 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 1, \\ T_3''(0) &=& -0 = 0, & & T_3'''(0) &=& -1. \end{array}$$

Man sieht also, dass die ersten drei Ableitung von f und T_3 am Punkt 0 übereinstimmen.

c) Wir wollen hier zwei verschiedene Möglichkeiten vorstellen, um den Fehler abzuschätzen.

Methode 1

Als erstes wollen wir die Methode für die Abschätzung des Restglieds darstellen. Unter Beachtung, dass $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ gilt, folgt $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Wir bestimmen also das Restglied aus Teil a), dabei wird die vierte Ableitung von f verwendet, was möglich ist, denn f ist unendlich oft differenzierbar. Diese lautet $f^{(4)}(x) = \sin(x)$. Das Restglied lautet daher

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (x-0)^4 = \frac{\sin\xi}{24} \cdot x^4$$

für ein $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Um den Fehler abzuschätzen bestimmen wir den betragsmäßig maximalen Wert, den das Restglied im Intervall annehmen kann. Dieser ist dann auf jeden Fall größer oder gleich dem Fehler im Intervall.

Es werden ξ und x im gegebenen Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ so gewählt, dass $\dfrac{\sin\xi}{24} \cdot x^4$ maximal ist.

In diesem Beispiel nutzen wir, dass x^4 bei $x = \frac{\pi}{2}$ maximal ist, denn dort nimmt $|x^4| = x^4$ als monoton steigende Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall den größten Wert $\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$ an, d.h. $|x^4| \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^4$.

Weil $|\sin(\xi)| = \sin(\xi)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton steigend und damit am rechten Randpunkt maximal ist, ist $|\sin(\xi)| \le 1$. Also gilt

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\sin\xi}{24} \cdot x^4\right| = \left|\frac{\sin\xi}{24}\right| \cdot |x^4| \le \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{\pi^4}{2^4} = \frac{1}{24} \cdot \frac{\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{384} \approx \frac{1}{4}.$$

Methode 2

In den meisten Fällen nutzt man die Abschätzung durch das Restglied, die gerade gezeigt wurde. Existiert jedoch zum Beispiel die $(n+1)$-te Ableitung nicht, so kann die Fehlerabschätzung nur auf die folgende Weise geschehen.

Dieses Mal ist der Ansatz $|f - T_3|$, um die Differenz der Funktion zu dem Taylorpolynom, maximal im Intervall abzuschätzen:

$$|f(x) - T_3(x)| = \left|\sin x - x - \frac{1}{6}x^3\right| \qquad x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Wir suchen deshalb die Extrema von $f - T_3$. Weil $f - T_3$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall ist, wissen wir, dass ein Maximum und ein Minimum existieren. Wir wählen, nachdem wir diese gefunden haben, einfach den betragsmässig größten Funktionswert aus.

Wir leiten also $f - T_3$ ab

$$(f(x) - T_3(x))' = \cos x - 1 - \frac{1}{2}x^2$$

und merken, dass $\cos x - 1 - \frac{1}{2}x^2 \le 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $|\cos x| \le 1$ und $-1 - \frac{1}{2}x^2 \le -1$. Also ist die Funktion monoton fallend. Der betragsmäßig größte Wert muss also am Randpunkt sein.

Überprüft man die Funktion in beiden Randpunkten 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erkennt man der maximale Wert liegt bei $\frac{\pi}{2}$:

$$\left|\sin\frac{0}{2} - 0 - \frac{1}{6}(0)^3\right| = 0, \qquad \left|\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right| = \left|1 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{8}\right| < \frac{5}{4}.$$

Der Fehler ist also nicht größer als $\frac{5}{4}$.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 5. Kapitel

1. Aufgabe

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\searrow 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}-0}{x-0}=\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=+\infty$$

In $x=0$ hat der Graph von h eine Spitze. So sehen wir graphisch, dass die Funktion dort nicht differenzierbar ist.

2. Aufgabe Das Taylorpolynom vom Grad 1 im Entwicklungspunkt $x_0=100$ lautet:

$$T_{1,100}(x)=f(100)+f'(100)\cdot(x-100)=\sqrt{100}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{100}}\cdot(x-100)=10+\frac{1}{20}\cdot(x-100).$$

89 einsetzen ergibt

$$T_{1,100}(89)=10+\frac{1}{20}\cdot(89-100)=10-\frac{11}{20}=9{,}45.$$

Berechnet man $\sqrt{89}$ mit einem Taschenrechner ergibt dies $\sqrt{89}\approx 9{,}434$. Wir sehen also, dass sich auf diese Weise relativ einfach schon gute Annäherungen erreichen lassen.

Falls Sie Fragen zu diesem Blatt haben, schreiben Sie uns im Moses-Forum unter Analysis I für Ingenieure.

Projekt UNITUS – Einstieg ins Skript und Beispiele

6 Elementare Funktionen II

6.1 Motivation und trigonometrische Funktionen I

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sowie die Potenzfunktionen und deren Umkehrfunktionen sind die Hauptthemen dieses Kapitels. Diese Funktionen sind den meisten Studenten bereits aus der Schule bekannt. Aufgrund ihrer Bedeutung in der Universität in Anwendungen (u.a. in der Physik), werden $\sin$, $\cos$ und $\tan$ hier etwas vertiefter vorgestellt. Eine der bedeutendsten Eigenschaften der gegebenen trigonometrischen Funktionen und Potenzfunktionen ist, dass sie einfache Differentialgleichungen (DGL) erfüllen. Eine DGL ist (sehr grob formuliert) eine Gleichung, die einen Zusammenhang zwischen einer Funktion und den Ableitungen dieser Funktion ausdrückt. (Eine Herleitung der Funktionen $\sin$ und $\cos$ mithilfe von Differentialgleichungen befindet sich im Skript. Unsere Darstellung des Kapitels ist etwas anders, um die Verbindungen hervorzuheben.)

Die Funktionen $f_1(x) = \sin x$ und $f_2(x) = \cos x$ erfüllen die DGL $f(x) + f''(x) = 0$, weil

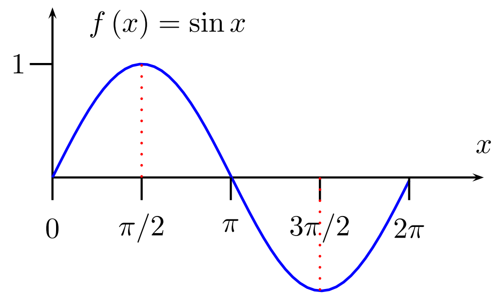
$$\begin{array}{rclrclrcl} f_1(x) & = & \sin x, & f_1'(x) & = & \cos x, & f_2''(x) & = & -\sin x \\ f_2(x) & = & \cos x, & f_2'(x) & = & -\sin x, & f_2''(x) & = & -\cos x. \end{array}$$

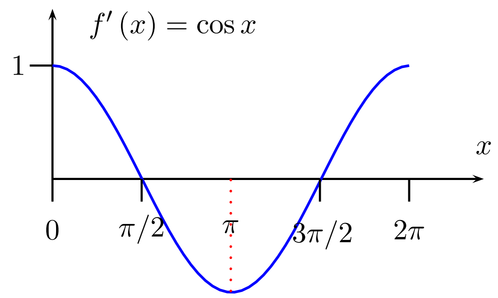
Auch jede Linearkombination $f_{a,b}(x) = a\sin x + b\cos x$ für $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllt die DGL, weil mit

$$f_{a,b}(x) = a\sin x + b\cos x, \quad f_{a,b}'(x) = a\cos x - b\sin x, \quad f_{a,b}''(x) = -a\sin x - b\cos x$$

gilt $f_{a,b}(x) + f_{a,b}''(x) = a\sin x + b\cos x - a\sin x - b\cos x = 0$.

Spezifizieren wir Werte für $y(0)$ und $y'(0)$, löst nur eine Funktion die DGL mit diesen **Anfangsbedingungen**.
Interessanterweise ist $f_2(x)$ die Ableitung von $f_1(x)$, wie die untenstehenden Bilder illustrieren.





Ist die Ableitung f_1' auf einem Intervall positiv, so ist die Funktion f_1 dort steigend. Ist sie negativ, so ist f_1 fallend. Schließlich ist, in den Punkten, in denen der $\cos$ Null wird, ein Extremum in $\sin$ festzustellen.

Weiterhin ist es wichtig zu wissen, wie die Sinus- und Cosinusfunktionen mit dem Einheitskreis zusammenhängen. Dafür sind folgende Eigenschaften von Interesse:

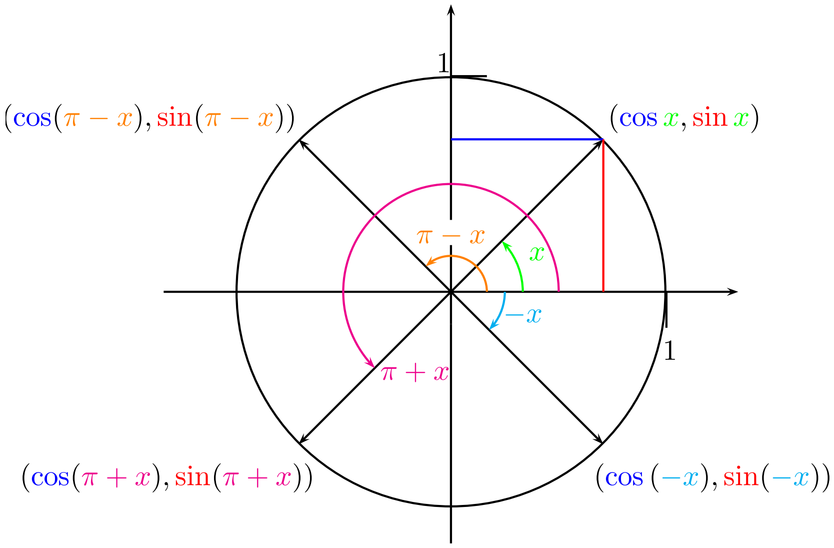
Satz (Eigenschaften des Sinus und des Cosinus)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten die Gleichungen

$$\begin{array}{llllll} \sin x = \sin(x+2\pi) & \sin x = \sin(\pi - x) & \sin(x+\pi/2) = & \cos x & \boldsymbol{\sin(-x) =} & \boldsymbol{-\sin x} \\ \cos x = \cos(x+2\pi) & -\cos x = \cos(\pi - x) & \cos(x+\pi/2) = & -\sin x & \boldsymbol{\cos(-x) =} & \boldsymbol{\cos x}. \end{array}$$

sin ist eine **ungerade Funktion** und **cos** ist eine **gerade Funktion**.

Um die Identitäten zu veranschaulichen, nehmen wir an, dass der Winkel x im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ liegt und betrachten wir eine Skizze des Einheitskreises.



Beispiel (Lösen einer trigonometrischen Gleichung)

Bestimmen Sie alle Lösungen für die Gleichung $\cos(2\alpha) = \sin(3\alpha)$.

Hier gibt es mehr als die offensichtliche Lösung $2\alpha + \frac{\pi}{2} = 3\alpha$. Da nach allen Lösungen gefragt wurde und $\sin\beta = \sin(\beta + 2n\pi)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $\sin\beta = \sin(\pi - \beta)$ gilt, kommen weitere Lösungen dazu. Es gilt $\alpha \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Gleichung

$$\cos(2\alpha) = \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(3\alpha),$$

genau dann wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung von einer der Gleichungen

$$3\alpha = 2\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ oder } 3\alpha = \pi - \left(2\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

ist. Durch Umformung bekommen wir alle Lösungen $\alpha \in \mathbb{R}$ zu der Gleichung $\cos(2\alpha) = \sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = \sin(3\alpha)$, nämlich

$$\alpha = \frac{\pi + 4n\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\pi - 4n\pi}{10} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Somit sind alle möglichen Lösungen bestimmt.

Eine Potenzfunktion $g_a(x) = a^x$ für positiv reelles a erfüllt die DGL

$$g'(x) = kg(x)$$

für eine geeignete Konstante $k \in \mathbb{R}$. Der Fall $k = 1$ ist besonders nützlich in physikalischen Anwendungen und hat als Lösung $g_e(x) = e^x$: $g_e'(x) = \frac{de^x}{dx} = e^x = 1 \cdot g_e(x)$. Jedes Vielfaches von $g_e(x)$ ist auch eine Lösung der DGL $g'(x) = g(x)$, denn $\frac{d(ce^x)}{dx} = (ce^x)$. Mit dem Anfangswert $g_e(0) = 1$ ist wiederum die Lösung eindeutig bestimmbar.

Verbindung durch die Eulerrelation

Indem wir die Exponentialfunktion zu einer komplexen Funktion erweitern, erhalten wir eine Verbindung zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus.

Definition (Eulerrelation)

Für $y \in \mathbb{R}$ definiere

$$\exp(iy) := \boldsymbol{e^{iy} := \cos y + i \sin y}.$$

Dann gilt für eine komplexe Zahl $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x + iy) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Hilfreich für Umformungen sind zudem die folgenden Formeln.

Satz (Folgerung aus der Eulerrelation)

Für $x \in \mathbb{R}$ können Cosinus und Sinus so umgeschrieben werden:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Wir beweisen die erste Folgerung aus der Eulerrelation, indem wir mit der komplizierteren Seite der Gleichung anfangen:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= \frac{(\cos x + i \sin x) + (\boldsymbol{\cos(-x)} + i(\boldsymbol{\sin(-x)}))}{2} && \text{Definition von } \boldsymbol{e^{iy}} \text{ mit } y = x \text{ bzw. } y = -x \\
&= \frac{\cos x + i \sin x + \boldsymbol{\cos x} + i(\boldsymbol{-\sin x})}{2} && \textbf{Cosinus} \text{ ist eine } \textbf{gerade} \text{ Funktion, } \textbf{Sinus} \text{ ist eine } \textbf{ungerade} \text{ Funktion.} \\
&= \frac{2 \cos x}{2} \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

1. Aufgabe (Lerncheck - Eulerrelation und Sinus)

Zeigen Sie, dass die zweite Folgerung aus der Eulerrelation richtig ist.

6.2 Trigonometrische Funktionen II

Als nützliche Identität erweist sich der trigonometrische Pythagoras.

Satz (Trigonometrischer Pythagoras)

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \qquad \text{(Trigonometrischer Pythagoras)}$$

Der Beweis erfolgt durch Anwendung der Eulerrelationen:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 &= \frac{e^{2ix}+2e^0+e^{-2ix}}{4} + \frac{e^{2ix}-2e^0+e^{-2ix}}{4i^2} \\ &= \frac{e^{2ix}+2e^0+e^{-2ix}-(e^{2ix}-2e^0+e^{-2ix})}{4} \\ &\vdots \\ &= 1.\end{aligned}$$

Hilfreich für manche Berechnungen sind die folgenden Additionstheoreme und Doppelwinkelgleichungen.

Satz (Additionstheoreme und Doppelwinkelgleichungen für Sinus und Cosinus)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y,\end{aligned}$$

und aus denen folgen die Doppelwinkelgleichungen (setze $y = x$ in die Additionstheoreme ein):

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \cos x \sin x + \cos x \sin x = 2\cos x \sin x, \\ \cos(2x) &= \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.\end{aligned}$$

Bemerkung: Für die Klausur ist es hilfreich, diese Identitäten auf den Notizzettel zu schreiben. Auswendig gelernt werden müssen sie bis auf den trigonometrischen Pythagoras nicht unbedingt. Nützlich sind sie vor allem beim Integrieren.

Die Additionstheoreme, die im Abschnitt 6.1 im Skript mithilfe von Differentialgleichungen bewiesen wurden, lassen sich auch mit der komplexen Exponentialfunktion beweisen. Beispielsweise beweisen wir das Sinusadditionstheorem $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} && \text{Formeln für Sinus und Cosinus} \\ &= \frac{1}{4i}\left[(e^{ix}-e^{-ix})(e^{iy}+e^{-iy}) + (e^{ix}+e^{-ix})(e^{iy}-e^{-iy})\right] && \text{Ausklammern} \\ &= \frac{1}{4i}\big(e^{ix+iy} + e^{ix-iy} - e^{-ix+iy} - e^{-ix-iy} \\ &\qquad +e^{ix+iy} - e^{ix-iy} + e^{-ix+iy} - e^{-ix-iy}\big) && \text{Distributivgesetz} \\ &= \frac{1}{4i}\left(2e^{i(x+y)} - 2e^{-i(x+y)}\right) \\ &= \frac{2}{4i}\left(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}\right) \\ &= \sin(x+y).\end{aligned}$$

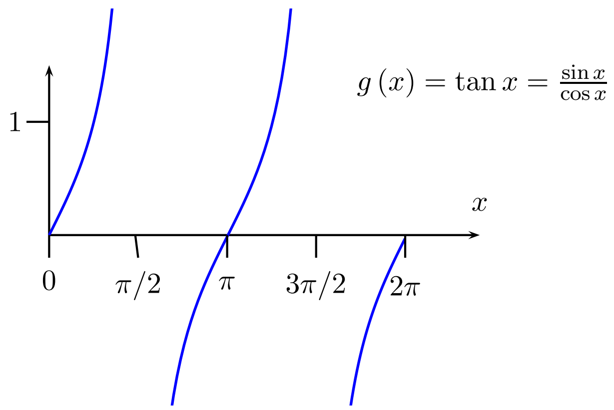
2. Aufgabe (Lerncheck - Cosinusadditionstheorem)

Beweisen Sie die Aussage:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Der Quotient der Sinus- und Cosinusfunktion ist ebenfalls eine nützliche Funktion in manchen Aufgaben.

Definition (Tangensfunktion)
Die Funktion $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ mit $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ heißt die **Tangensfunktion**.



Wie für die Sinus- und Cosinusfunktion gibt es für die Tangensfunktion ein Additionstheorem, welches Sie mithilfe der (komplexen) Exponentialfunktion beweisen können.

Satz (Additionstheorem und Doppelwinkelgleichung für den Tangens)
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\tan x \tan y \neq 1$ gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Hieraus folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\tan^2 x \neq 1$ die Doppelwinkelgleichung (setze $y = x$ in das Additionstheorem ein) :

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Des Weiteren ist es besonders wichtig, auf welche Werte die Funktionen abbilden. Hierfür reicht es die Werte in der untenstehenden Tabelle, vor allem für die Klausur, zu wissen. Zu beachten ist, dass in der Universität der Winkel meistens in Bogenmaß angegeben wird.

x	0 $(0°)$	$\pi/6$ $(30°)$	$\pi/4$ $(45°)$	$\pi/3$ $(60°)$	$\pi/2$ $(90°)$
$\sin x$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\cos x$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Als Eselsbrücke kann man sich für die Winkel in der Tabelle merken, dass der Wert in der Wurzel sich bei Sinus immer um eins erhöht und bei Cosinus um eins sinkt.

Ebenfalls bedeutend sind die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen.

Satz (Ableitungen der trigonometrischen Funktionen)

$$\sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x \qquad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Überlegen Sie sich anhand von Skizzen (wie in der Motivation), warum $(\cos x)' = -\sin x$ plausibel ist.

Wir zeigen zudem, dass $\tan' x$ aus der Ableitung der Sinus- und Cosinusfunktion für x im Definitionsbereich von der Tangensfunktion (d.h. $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}}$) folgt.

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} && \text{Quotientenregel} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \tan^2 x
\end{aligned}$$

Alternativ ist $\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ aufgrund des trigonometrischen Pythagoras.

Oft sind für Funktionen auch ihre Umkehrfunktionen wichtig. Keine der betrachteten Funktionen ist injektiv, da Sinus und Cosinus 2π-periodisch und Tangens π-periodisch sind. Beschränkt man entsprechend den Wertebereich und Definitionsbereich, erhält man jeweils eine bijektive Funktion.

Definition (Die Arcusfunktionen)

Die Funktion $\arcsin$ (sprich: **Arcussinus**) ist gegeben durch

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2], x \mapsto \alpha \text{ mit } \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ und } \sin\alpha = x.$$

Analog werden **Arcuscosinus** und **Arcustangens** definiert:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], x \mapsto \beta \text{ mit } \beta \in [0,\pi] \text{ und } \cos\beta = x,$$

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[\,, x \mapsto \gamma \text{ mit } \gamma \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ und } \tan\gamma = x.$$

Satz (Die Ableitungen der Arcusfunktionen)

Die Ableitungen der Arcusfunktionen sind:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Hierbei spielt die Ableitung des Arcustangens eine besondere Rolle bei der Integration von rationalen Funktionen, wie wir im 8. Kapitel sehen werden. Die Ableitung folgt aus dem Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion der differenzierbaren Funktion $\tan$ (siehe Abschnitt 5.1 im Skript). Falls die Umkehrfunktion $\arctan$ differenzierbar ist, dann ist

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{(1+\tan^2)(\arctan x)} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Weil der Nenner für alle x ungleich Null ist, ist $\arctan$ auf seinem Definitionsbereich differenzierbar.

Die Beweise zur Richtigkeit der Ableitungen von $\arcsin$ und $\arccos$ sind sehr ähnlich. Wir leiten die Formel für die Ableitung von $\arcsin$ her. Machen Sie die Probe mit der Formel für die Ableitung von $\arccos$.

Die Ableitung der Umkehrfunktion der differenzierbaren Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, falls diese existiert, lautet nach dem Satz der Umkehrfunktion

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

für $x \neq \pm 1$ (d.h. wo der Nenner 0 ist). Ferner ist $\arcsin x = \alpha$ für $\sin \alpha = x$. Somit ist $\arcsin' x = \frac{1}{\cos \alpha}$. Aus dem trigonometrischen Pythagoras und die Tatsache, dass $\cos \alpha > 0$ für $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, folgt

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2},$$

sodass

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Beispiel (Periodizität; Ableitung von Tangens)

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Periode, die Umkehrfunktion und die Ableitung der Umkehrfunktion von

$$f : x \mapsto \tan(3x - 1).$$

Betrachtet man die Funktion $g : x \mapsto \tan x$, so ist diese nicht definiert für $x = \frac{\pi}{2}$. Da der Tangens zusätzlich π-periodisch ist, ist f nicht definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$3x - 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Durch Umformung ist f nicht definiert für

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi + 1}{3} = \frac{\pi + 2k\pi + 2}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Für jeden anderen Wert ist f definiert. Somit ist der maximale Definitionsbereich

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \frac{\pi + 2k\pi + 2}{6},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Wie bereits erwähnt, ist der Tangens π-periodisch. Also gilt für alle x im Definitionsbereich und $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(3x - 1) = \tan(3x - 1 + k\pi) = \tan\left(3\left(x + \frac{k\pi}{3}\right) - 1\right).$$

Hier sieht man, dass $f(x)$ und $f(x + \frac{k\pi}{3})$ für $k \in \mathbb{Z}$ gleich sind. Also ist die Funktion $\frac{\pi}{3}$-periodisch.
Die Umkehrfunktion vom Tangens ist der Arcustangens. Die Umkehrfunktion der Funktion $f : x \mapsto \tan(3x - 1)$ berechnet man so: Ist $y = \tan(3x - 1)$, so ist nach Anwendung des Arcustangens

$$\begin{aligned} \arctan y &= \arctan(\tan(3x - 1)) \\ &= 3x - 1, \end{aligned}$$

d.h.

$$x = \frac{1}{3}(\arctan y + 1),$$

oder

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\arctan y + \frac{1}{3}.$$

Nun müssen wir nur noch die Ableitung bestimmen. Hier wissen wir, dass $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ gilt. Demnach ist die Ableitung von $f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{d\left(\frac{1}{3}\arctan y + \frac{1}{3}\right)}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 + y^2}\right) = \frac{1}{3(1 + y^2)}.$$

Beispiel (Fallender Stein)
Ein Bergsteiger sieht auf der anderen Seite einer $250\mathrm{m}$ breiten tiefen Schlucht zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Stein fallen. Als er den Stein fallen sieht, bemerkt er, dass seine Augen ihm erst langsam, dann schnell und schließlich wieder langsam folgen. α ist der Winkel seiner Sichtlinie zwischen der Absturzstelle des Steines und der Stelle an der sich der Stein nach t Sekunden befindet. Die Distanz des Steins vom Ausgangspunkt nach t Sekunden beträgt $5t^2$m.
Mit welchem Winkel würde sich der Stein für das Auge am schnellsten bewegen, d.h. wenn $\frac{d\alpha}{dt}$ maximal ist?

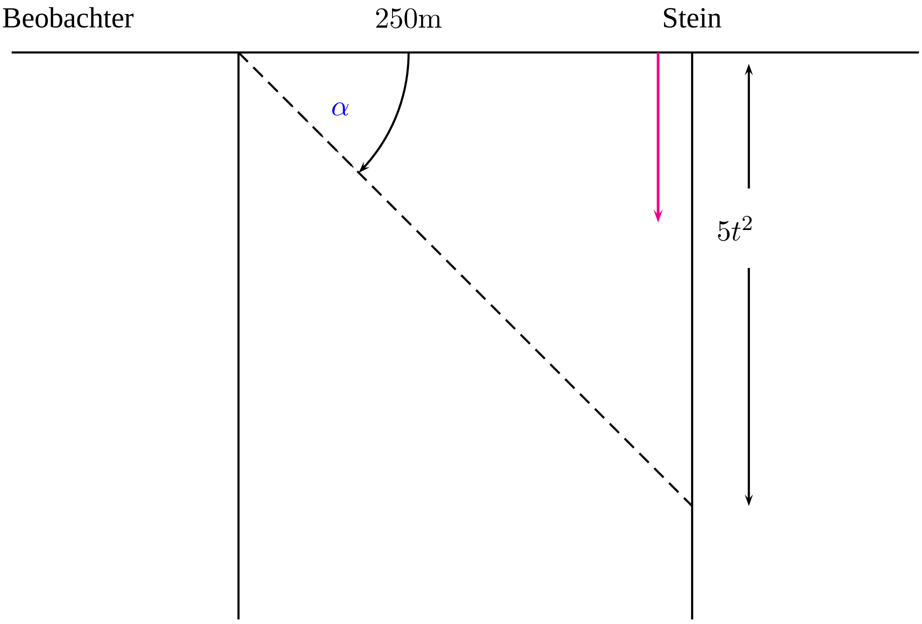


Abbildung 1: Fallender Stein

Aus der Aufgabenstellung[6] ist bekannt, dass der Stein in den ersten t Sekunden $5t^2\mathrm{m}$ zurücklegt. Aus der Abbildung 6.2 ist erkennbar, dass der Winkel über den Tangens beschreibbar ist:

$$\alpha = \alpha(t) = \arctan\left(\frac{5t^2}{250}\right) = \arctan\left(\frac{t^2}{50}\right).$$

Somit ergibt die Ableitung des Winkels nach der Zeit folgende Funktion:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \arctan'\left(\frac{t^2}{50}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{t^2}{50}\right)^2} \cdot \frac{2t}{50} = \frac{2t}{\frac{2500}{50} + \frac{t^4}{50}} = \frac{100t}{2500+t^4}.$$

Die Ableitung des Winkels kann im Intervall maximal sein, wenn die Ableitung hiervon wiederum Null wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \frac{100 \cdot \left(2500+t^4\right) - 100t \cdot 4t^3}{(2500+t^4)^2} \qquad [\text{Quotientenregel}] \\ &= \frac{100 \cdot \left(2500-3t^4\right)}{(2500+t^4)^2}. \end{aligned}$$

[6]weitgehend übernommen aus C.H. Edwards and D.E. Penney (1986). *Calculus and Analytic Geometry*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., Seiten 426-427

Die 2. Ableitung wird Null, wenn der Term $2500-3t^4$ Null wird. Es werden nur positive Werte für t betrachtet, sodass $t = \sqrt[4]{\frac{2500}{3}}$ (also nach circa $5{,}37\mathrm{s}$) die einzige Nullstelle der 2. Ableitung ist, die in Frage kommt. Weil $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ größer Null ist für $0 < t < \sqrt[4]{\frac{2500}{3}}$ (d.h. $\frac{d\alpha}{dt}$ ist streng monoton steigend dort) und kleiner Null für $t > \sqrt[4]{\frac{2500}{3}}$ (d.h. $\frac{d\alpha}{dt}$ ist streng monoton fallend dort), ist $\frac{d\alpha}{dt}$ in $t = \sqrt[4]{\frac{2500}{3}}$ maximal. Dementsprechend ist der Stein bis zu diesem Zeitpunkt $5t^2\mathrm{m} = 5 \cdot \frac{50}{\sqrt{3}}\mathrm{m} \approx 144{,}34\mathrm{m}$ gefallen. Des Weiteren kann nun der Winkel, für den sich der Stein für das menschliche Auge am schnellsten bewegt, bestimmt werden:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\cancel{50}} \cdot \frac{\cancel{50}}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Hiermit bewegt sich der Stein für den Bergsteiger am schnellsten, wenn dessen Blickwinkel bei $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (d.h. $30°$) liegt. Die Geschwindigkeit des Steins liegt in diesem Moment bei $\frac{d(5t^2)}{dt}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10t\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 53{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und die Beschleunigung bei $\frac{d(10t)}{dt}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

6.3 Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

Die Exponentialfunktion ist eine Funktion, die ihre eigene Ableitung ist. Sie wird häufig angewendet um Wachstums- und Zerfallsprozesse zu beschreiben. Zum Beispiel ist sie sehr gut geeignet, um Bakterienwachstum oder radioaktiven Zerfall darzustellen.

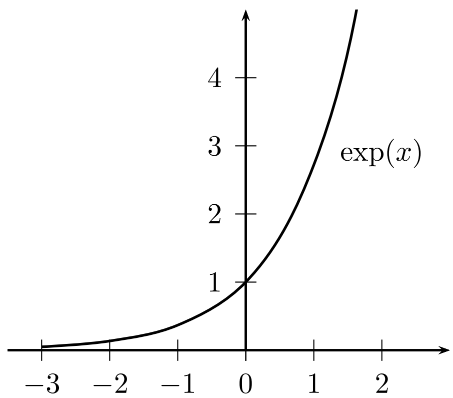
Definition (Exponentialfunktion; eulersche Zahl)
Die **Exponentialfunktion** ist eindeutig über die Differentialgleichung

$$f(x) = f'(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } \boldsymbol{f(0) = 1}$$

bestimmt. Sie wird geschrieben als

$$f(x) = \exp(x) \quad \text{oder} \quad f(x) = e^x,$$

wobei $e = \exp(1) \approx 2{,}71828$ die **eulersche Zahl** ist.



Die Exponentialfunktion hat wichtige Eigenschaften, die wir in beiden Schreibweisen formulieren.

Satz (Rechenregeln für die Exponentialfunktion)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Regeln.

$$\boldsymbol{\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)} \qquad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$\exp(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \qquad e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

Beispiel (Exponentialfunktion)

Zeigen Sie, dass $\exp(x)\cdot\exp(-x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aus dem Satz und der Definition folgt:

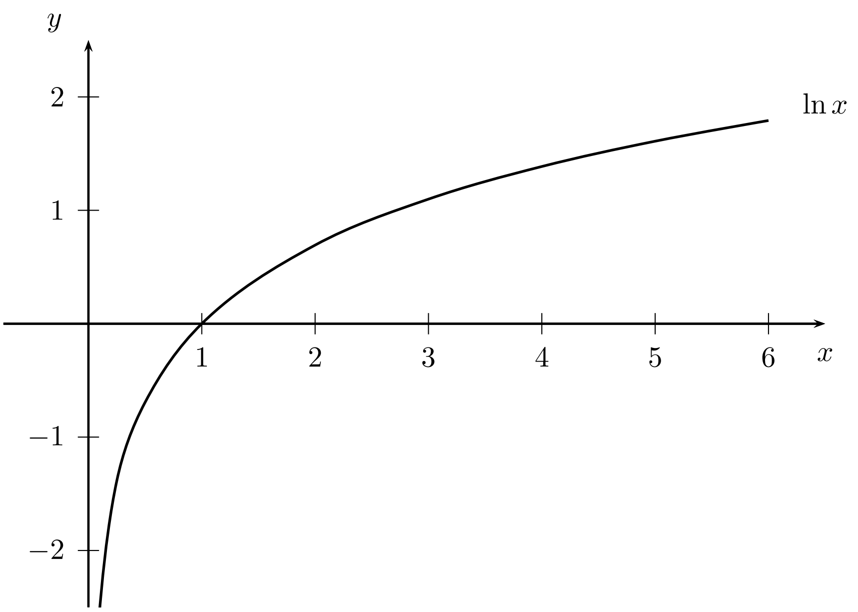
$$\boldsymbol{\exp(x)\cdot\exp(-x) = \exp(x+(-x))} = \boldsymbol{\exp(0) = 1}.$$

Als Potenzfunktion bildet die Exponentialfunktion in das Intervall $]0,\infty[$ ab ($f : \mathbb{R} \to]0,\infty[\,, x \mapsto \exp(x)$) und ist dabei streng monoton steigend, weil $f'(x) = f(x) > 0$ gilt. Insofern ist die Exponentialfunktion injektiv, sodass sich eine Umkehrfunktion definieren lässt.

Definition (Natürlicher Logarithmus)
Die Umkehrfunktion von der Exponentialfunktion

$$\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x = \log_e x$$

wird der **natürliche Logarithmus** genannt und ist der Logarithmus zur Basis e.



Da der natürliche Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt

$$\exp(\ln x) = x \text{ für alle } x > 0 \qquad \text{und} \qquad \ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dies kann für manche Rechnungen praktisch sein.

Satz (Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus)
Für alle $x, y > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ gelten

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \qquad \ln(x^r) = r\ln(x),$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Aus dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion (Abschnitt 5.1 des Skripts) folgt $\ln' x = \dfrac{1}{\exp(\ln(x))}$.
Weil die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus inverse Funktionen sind, gilt

$$\exp(\ln(x)) = x.$$

Der natürliche Logarithmus ist also differenzierbar auf seinem Definitionsbereich $]0, \infty[$ mit

$$\ln' x = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Beispiel (Anwendung Exponentialfunktion)
Ein Organismus dessen Masse $m(t)$ (in Gramm) dem Wachstumsgesetz

$$m(t) = Ce^{kt}$$

folgt, hat zum Zeitpunkt 1 Stunde die Masse $m(1) = 1$ Gramm und zum Zeitpunkt 5 Stunden die Masse $m(5) = 1{,}3$ Gramm.
Berechnen Sie die Konstanten C und k und geben Sie die Gleichung für das Wachstum an.

Setzen wir in $m(t) = C \cdot e^{kt}$ die beiden gegebenen Werte ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= m(1) = Ce^{k} \qquad \text{und} \\ 1{,}3 &= m(5) = Ce^{5k}. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung bekommt man

$$C = \frac{1}{e^k} = e^{-k}, \tag{15}$$

während aus der zweiten Gleichung ähnlich folgt

$$C = \frac{1{,}3}{e^{5k}} = 1{,}3 \cdot e^{-5k}. \tag{16}$$

Gleichsetzen ($C = C$) liefert wegen (16) und (15)

$$1{,}3 \cdot e^{-5k} = e^{-k}.$$

Weil $e^{-5k} > 0$ gilt, kann die Gleichung durch diesen Faktor geteilt werden, ohne die Lösungsmenge zu ändern:

$$1{,}3 = \frac{e^{-k}}{e^{-5k}} = e^{-k} \cdot e^{5k} = e^{-k+5k} = e^{4k}.$$

Nun wird die Umkehrfunktion von der Exponentialfunktion, der natürliche Logarithmus (ln), auf beide Seiten der Gleichung angewendet:

$$\ln(1{,}3) = \ln(e^{4k}) = 4k.$$

Somit ist $k = \dfrac{\ln(1{,}3)}{4}$ die einzige Lösung. Durch (15) kann damit direkt C berechnet werden

$$C = e^{-k} = e^{-\frac{\ln(1,3)}{4}} = (e^{\ln(1,3)})^{-1/4} = 1{,}3^{-1/4},$$

woraus das Ergebnis folgt:

$$m(t) = 1{,}3^{-1/4} \cdot e^{\frac{\ln(1,3)}{4} \cdot t}.$$

6.4 Allgemeine Potenzfunktionen

Liest man a^n, wobei n eine natürliche Zahl und $a > 0$ eine reelle Zahl ist, kann man sich dieses leicht als das n-fache Produkt von a vorstellen. Ist n jedoch keine natürliche Zahl geht diese Vorstellung verloren. Aus diesem Grund wird hier noch einmal die Potenz für beliebige Exponenten definiert.

Definition (Allgemeine Potenzen)

Sei a eine reelle Zahl mit $a > 0$. Für $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$a^x := \exp(x \ln a).$$

Mithilfe der Regeln für die Exponentialfunktion ergeben sich die folgenden Rechenregeln.

Satz (Rechenregeln für allgemeine Potenzen)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \qquad a^0 = 1.$$

Die Ableitung der Potenzfunktion

$$f_a(x) = a^x = \exp(\ln a^x) = \exp(x \ln a)$$

ist mit der Kettenregel einfach zu bestimmen:

$$f_a'(x) = \frac{da^x}{dx} = \exp(x \ln a) \cdot \frac{d(x \ln a)}{dx} = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Satz (Injektivität der allgemeinen Potenzfunktion)

Ist $a \neq 1$, so ist $f_a(x) = a^x$ eine injektive Funktion.

Weil Injektivität aus strenger Monotonie folgt, betrachten wir die Ableitung der Funktion f_a. Weil $f_a'(x) = a^x \ln a$ und $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $f_a' > 0$ (bzw. < 0), falls die Konstante $\ln a > 0$, d.h. $a > 1$ (bzw. < 0, d.h. $0 < a < 1$) ist.

Bemerkung: Die Potenzfunktion $f_1(x) = 1^x = 1$ ist eine konstante Funktion mit Ableitung $1^x \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$, weshalb $a = 1$ im Satz ausgeschlossen ist.

Lemma (Verbindung einer Potenzfunktion und der Wurzelfunktion)

Sei a eine reelle Zahl mit $a > 0$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Diese Gleichung folgt durch zweimalige Anwendung der Definition der Potenzfunktion:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(n \cdot \mathbf{ln}\left(\mathbf{exp}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \mathbf{ln}\, \boldsymbol{a}\right)\right)\right) = \exp\left(n \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \mathbf{ln}\, \boldsymbol{a}\right) = \exp(\ln a) = a.$$

Aus der Injektivität der Potenzfunktion folgt die Behauptung.

Beispiel (Potenzrechnung)

Lösen Sie die Gleichungen

a) $2^x - 0{,}125 = 0$, b) $25^{3-2x} = 5^{2x}$.

a) Die rationale Zahl $0{,}125$ kann als $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ dargestellt werden. Damit ist die gegebene Gleichung äquivalent zu der Gleichung

$$2^x = 2^{-3}.$$

Wegen der Injektivität der Funktion $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[\,, x \mapsto 2^x$ folgt aus $f(x) = f(-3)$ das Resultat $x = -3$.

b) Wiederum wollen wir die Injektivität einer Potenzfunktion ausnutzen. Schreiben wir die gegebene Gleichung als

$$25^{3-2x} = 5^{2x} = (5^2)^x = 25^x.$$

Für die injektive Funktion $g : \mathbb{R} \to]0, \infty[\,, x \mapsto 25^x$ gilt also $g(3-2x) = g(x)$, d.h. $3 - 2x = x$. Durch Umformung erhalten wir $x = 1$.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 6. Kapitel

1. Aufgabe (Herleitung der Identität $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$)

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2i}$$

Definition von e^{iy} mit $y = x$ bzw. $y = -x$

$$= \frac{\cos x + i\sin x - (\cos x - i\sin x)}{2i}$$

Cosinus ist eine gerade, Sinus eine ungerade Funktion

$$= \frac{2i\sin x}{2i}$$

$$= \sin x$$

2. Aufgabe (Herleitung des Additionstheorems für Cosinus $\cos x \cos y + \sin x \sin y$)

$$= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

Formeln für Sinus und Cosinus

$$= \frac{1}{4}[(e^{ix}+e^{-ix})(e^{iy}+e^{-iy}) - \frac{1}{i^2}(e^{ix}-e^{-ix})(e^{iy}-e^{-iy})]$$

Ausklammern

$$= \frac{1}{4}(e^{ix+iy} + e^{ix-iy} + e^{-ix+iy} + e^{-ix-iy} + e^{ix+iy} - e^{ix-iy} - e^{-ix+iy} + e^{-ix-iy})$$

Distributivgesetz und $i^2 = -1$

$$= \frac{1}{4}(2e^{i(x+y)} + 2e^{-i(x+y)})$$

$$= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2}$$

$$= \cos(x+y)$$

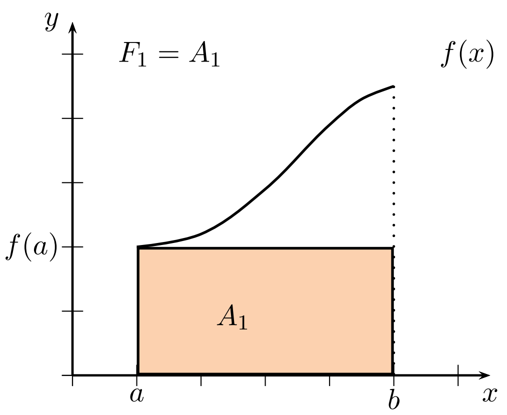
Projekt UNITUS – Einstieg ins Skript und Beispiele

8 Integration

Motivation

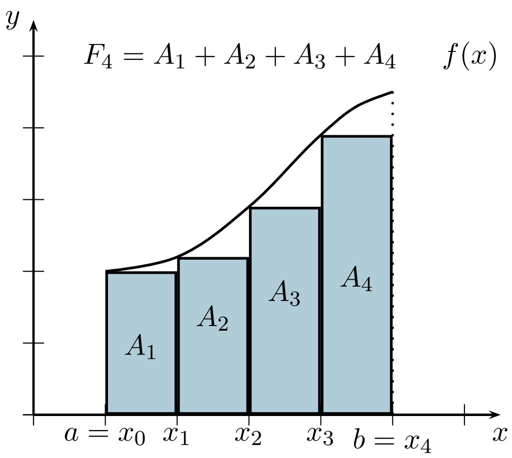
Als erste Vorstellung was ein Integral ist, ist es günstig den Flächeninhalt einer positiven reellen Funktion zwischen der x-Achse zu betrachen. Nun wollen wir uns überlegen, wie man diesen über einen Grenzwertprozess berechnen kann.

Wir betrachten dazu die positive, stetige Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$. Dieses lässt sich mit keinem bis jetzt bekannten Mittel exakt berechnen. Eine Näherung hierfür wäre, den Flächeninhalt des Rechtecks mit der Breite $b - a$ und der Höhe $f(a)$ zu berechnen.



Wie wir auf dem Bild sehen, ist dies im Allgemeinen kein guter Wert für den gesuchen Flächeninhalt. Um diesen zu verbessern, teilen wir das Intervall $[a, b]$ in die n gleich großen Teilintervalle $[a = x_0, x_1]$,$[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n = b]$ der Länge $\frac{b-a}{n}$.

Der Flächeninhalt der neuen Rechtecke unter der Kurve kann wieder einfach bestimmt werden, indem man deren Höhe $f(x_j)$ mit der Breite $\frac{b-a}{n}$ multipliziert. Addieren wir die Flächeninhalte zusammen, erhalten wir F_n, was eine Annäherung an den tatsächlichen Flächeninhalt ist.



Die Skizzen zeigen den Flächeninhalt für $n = 1$ bzw. $n = 4$. Will man die Flächeninhalt beliebig gut annähern, so wählt man n sehr groß.

8.1 Das bestimmte Integral

In der Motivation haben wir bereits erklärt, wie man sich die Berechnung von einem Integral über einem gegebenen Intervall $[a, b]$ mithilfe eines Grenzwertprozesses vorstellen kann. Daraus wollen wir nun noch eine Definition für ein Integral machen, das über einem Intervall bestimmt wird.

Konvergiert $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$, bekommen wir das Integral von f über $[a, b]$. Dieser Grenzwert existiert für stetige oder monotone Funktionen.

Satz bzw. Definition (Bestimmtes Integral)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige oder monotone Funktion und $n \in \mathbb{N}$, so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$. Das **(bestimmte) Integral** von f über $[a, b]$ ist definiert als dieser Grenzwert:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} F_n,$$

wobei die F_n definiert sind als

$$F_n = \sum_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f(x_{j-1}) \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})$$

mit $x_{j-1} = a + (j-1) \cdot \frac{b-a}{n}, \quad j = 1, \ldots, n.$

Um den Umgang mit Integralen zu erleichtern, gibt es einige Rechenregeln, die man wissen sollte. (Wie man sie anwendet, wird in Abschnitt 8.3 gezeigt.)

Satz bzw. Definition (Bestimmtes Integral)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige oder monotone Funktion und $n \in \mathbb{N}$, so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$. Das **(bestimmte) Integral** von f über $[a, b]$ ist definiert als dieser Grenzwert:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} F_n,$$

wobei die F_n definiert sind als

$$F_n = \sum_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f(x_{j-1}) \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})$$

mit $x_{j-1} = a + (j-1) \cdot \frac{b-a}{n}, \quad j = 1, \ldots, n.$

Definition (Stückweise stetige, stückweise monotone, und integrierbare Funktionen)

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **stückweise stetig** bzw. **stückweise monoton**, wenn das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle so zerlegt werden kann, dass die Funktion eingeschränkt auf jeden Teilintervall stetig bzw. monoton ist. Ist eine Funktion stückweise stetig bzw. stückweise monotone, so nennen wir die Funktion **integrierbarer**.

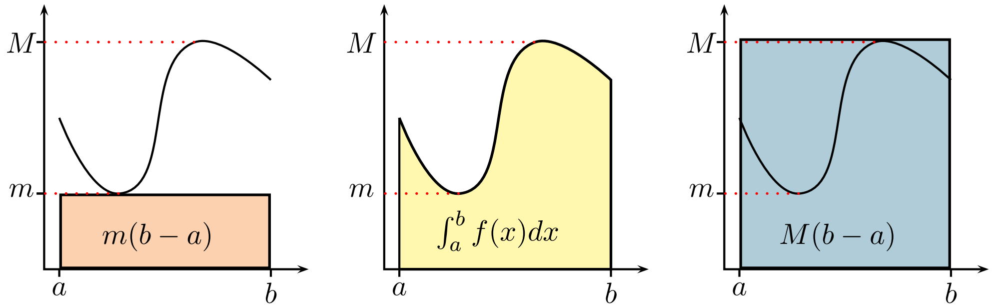
Eine weitere wichtige Eigenschaft von Integralen wird durch den Integralabschätzungssatz gegeben. Dieser lautet:

Satz (Integralabschätzung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, m das Minimum und M das Maximum der Funktion, dann gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Auch diesen Satz kann man sich anhand des folgenden Beispiels einer Funktion f mit positiven Werten auf dem Intervall $[a, b]$ vorstellen, indem man das Integral wieder als Flächeninhalt zwischen der Funktion und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ betrachtet. $m(b-a)$ ist der Flächeninhalt des Rechtecke mit der Breite $(b-a)$ und der Höhe m (Bild unten links). Dieses ist auf jeden Fall kleiner oder gleich als das Integral (Bild unten in der Mitte). $M(b-a)$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit der Breite $(b-a)$ und der Höhe M (Bild unten rechts). Hier ist das Flächeninhalt größer oder gleich als das Integral von a bis b.



Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

Beweis: Da f stetig auf einem kompakten Intervall ist, hat f ein Minimum (nennen wir diesen Wert m) und ein Maximum (nennen wir diesen Wert M) auf $[a, b]$. Durch die Integralabschätzung gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$$

d.h.

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Weil f nach Voraussetzung stetig ist, nimmt f nach dem Zwischenwertsatz alle Werte zwischen m und M an. Es gibt also ein ξ zwischen a und b mit $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

Bemerkung: Durch Umformung bekommen wir ebenfalls die Form $f(\xi)(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Anschaulich bedeutet dieser Satz, ist f eine stetige Funktion mit positiven Werten, so existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass der Flächeninhalt des Rechtecks der Länge $(b-a)$ und Höhe $f(\xi)$ genau dem Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse von a bis b entspricht.

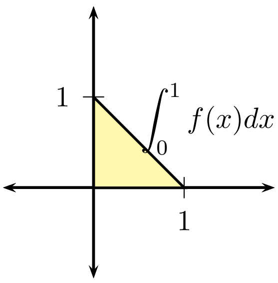
Beispiel (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Finden Sie ein ξ, sodass für die Funktion $f(x) = -x + 1$ auf dem Intervall $[0, 1]$ Folgendes gilt:

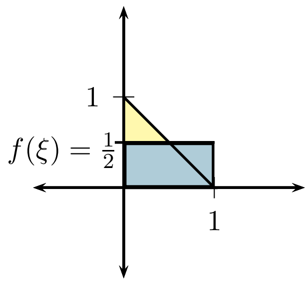
$$f(\xi)(1-0) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Der Wert von $\int_0^1 f(x)dx$ (Bild unten links) ist der Flächeninhalt des rechtwinklingen Dreiecks mit Grundseite 1 und Höhe 1.
Ein Rechteck mit Grundseite 1 und Höhe $\frac{1}{2}$ hat genauso einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ (Bild unten rechts).
Die Funktion f nimmt den Wert $\frac{1}{2}$ bei $x = \frac{1}{2}$ an $\left(f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\right)$. Also ist

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)(1-0) = \int_0^1 f(x)dx$$

und somit $\xi = \frac{1}{2}$.





Bemerkung: Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ist ein Existenzsatz. Der Wert ξ ist meistens nicht so einfach zu berechnen wie in diesem Beispiel. In den meisten konkreten Aufgaben ist jedoch kein genauer Wert abgefragt.

8.2 Das unbestimmte Integral

Mit diesem Kapitel wollen wir einen Weg der Integration einer großen Funktionenklasse darstellen. Der beschriebene Weg der Berechnung von Integralen über einen Grenzwertprozess ist nicht sonderlich handlich und wird in der Praxis selten verwendet.

Wie wir am Mittelwertsatz der Integralrechnung gesehen haben, besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen der Ableitung und dem Integral. Um diesen Zusammenhang weiter betrachten zu können, brauchen wir zunächst die wichtige Definition einer Stammfunktion.

Definition (Stammfunktion)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und gilt $F' = f$, so nennt man F eine **Stammfunktion** von f.

Nicht jede Funktion besitzt eine Stammfunktion. Hat eine Funktion jedoch eine Stammfunktion, so besitzt sie damit gleich unendlich viele Stammfunktionen. Gilt nämlich $F'(x) = f(x)$, so gilt ebenfalls für $G(x) = F(x) + C$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist,

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) + \frac{d}{dx}C = f(x) + 0 = f(x).$$

Wie nun eine Stammfunktion mit dem Integral zusammenhängt, sagt uns der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der aus dem Ferus Skript übernommen ist:

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall I und $[a,b] \subset I$. Dann gilt:

(i) Die durch
$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b]$$
definierte Funktion, also das unbestimmte Integral von f, ist eine Stammfunktion von f, d.h.
$$F'(x) = f(x).$$

(ii) Umgekehrt gilt für jede Stammfunktion G von f auf I, dass
$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C = \int_a^x f(t)dt + G(a), \ C \text{ eine (reelle) Konstante}.$$

(iii) Insbesondere ist für $I = [a,b]$ dann also
$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) =: G(x)|_a^b.$$

Damit haben wir nun also einen Weg erhalten, um für jede Funktion die eine Stammfunktion G hat, das bestimmte Integral ganz einfach ausrechnen zu können:
$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

Wie der Punkt (ii) aussagt, kann man auch mit diesem Satz eine Stammfunktion immer durch die Darstellung
$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C = \int_a^x f(t)dt + G(a)$$
aufschreiben. Diese Form ist am Anfang etwas verwirrend jedoch sieht man schnell durch eine Umformung, dass sie stimmt:
$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C = G(x) - G(a) + C.$$

Gilt also $C = G(a)$, so ist die Gleichung erfüllt.

Damit ist das einzige Problem für eine Funktion, die eine Stammfunktion hat, diese auch zu finden und anzugeben.

8.3 Integrationsregeln

Durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wurde gezeigt, dass nur eine Stammfunktion gefunden werden muss, um eine Funktion zu integrieren, denn alle Stammfunktionen einer Funktion unterscheiden sich lediglich um eine Konstante. Eine Stammfunktion zu finden ist leider nicht so einfach, wie eine Funktion zu differenzieren. Es gibt allerdings einige Regeln mit denen viele Funktionen integriert werden können. Dafür existieren einige grundlegende Funktionen, deren Stammfunktionen gelernt werden sollen.

Satz (Stammfunktionen einiger grundlegender Funktionen)
Es gilt für $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante:

$$\int x^n dx = \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1, \qquad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Wegen den ersten zwei Rechenregeln aus Abschnitt 8.1

- Das Integral einer Summe von Funktionen ist die Summe der Integralen der einzelnen Funktionen:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

- Das Integral eines Vielfaches einer Funktion ist das Vielfache des Integrals der Funktion:

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x)dx, \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

können wir jede Linearkombination der grundlegenden Funktionen integrieren. Ein Polynom ist beispielsweise eine Linearkombination von Potenzen einer Variablen der Form x^m mit $m \in \mathbb{N}$, also einfach zu integrieren. Die allgemeine Stammfunktion des Polynoms

$$f(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0, \ \ n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

ist also

$$F(x) = a_n \cdot \frac{1}{\boldsymbol{n+1}} \cdot x^{\boldsymbol{n+1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + a_0 \cdot \frac{1}{1} \cdot x^1 + C,$$

wobei C eine beliebige reelle Zahl ist, die sogenannte Integrationskonstante. Als Probe kann man die Funktion F wieder ableiten und erhält hierbei wieder die ursprüngliche Funktion f:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{a_n}{\boldsymbol{n+1}} \cdot x^{\boldsymbol{n+1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + a_0 \cdot x^1 + C\right) \\ &= (\cancel{n+1}) \cdot \frac{a_n}{\cancel{n+1}} \cdot x^n + \cdots + \cancel{2} \cdot a_1 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot x^1 + 1 \cdot a_0 \cdot x^0 + 0 \\ &= a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = f(x). \end{aligned}$$

So einfach wie ein Polynom zu integrieren ist, lässt sich leider nicht jede Funktion integrieren. Bevor wir aus der Produkt- und Kettenregel für die Differentiation zwei Methoden (partielle Integration und Substitution) für die Integration vorstellen werden, folgen jedoch noch einige einfachere Beispiele.

Beispiel (Integration)
Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx,$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^3 |x| \, dx.$

(a)
$$\begin{aligned}
\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx &= \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\
&= \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx - \int_1^4 2x^{-\frac{1}{2}}\, dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_1^4 - \left[4x^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_1^4 \\
&= \left(\frac{2}{3}\cdot 8 - 8\right) - \left(\frac{2}{3} - 4\right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(b) Die Betragsfunktion f ist so definiert: $f(x) = -x$ für $x < 0$ und $f(x) = x$ für $x \leq 0$. Deshalb wird das Integral in zwei Teile aufgespaltet.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^3 |x|\, dx &= \int_{-1}^0 -x\, dx + \int_0^3 x\, dx \\
&= \frac{-x^2}{2}\Bigg|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(nachprüfen!)} \\
&= 5
\end{aligned}$$

1. Aufgabe (Lerncheck - Integration)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{a)} \int_1^9 \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{b)} \int_{-1}^2 |x^2 - x|\, dx$$

Tipp zu b): Beachten Sie, dass $x^2 - x$ auf den Intervallen $[-1, 0[$ und $]1, 2]$ positiv und auf dem Intervall $]0, 1[$ negativ ist.

Satz (Partielle Integration)

Für differenzierbare Funktionen $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit stetigen Ableitungen u', v' gilt

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx = (u(x)\cdot v(x))|_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$$

oder eben auch

$$\int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx.$$

Diese Regel folgt aus der Produktregel $((u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x))$ und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$(u(x)v(x))|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\, dx + \int_a^b u(x)v'(x)\, dx.$$

Partielle Integration kann sinnvoll sein, wenn die zu integrierende Funktion in ein Produkt von Funktionen aufgeteilt werden kann. Herbei sollte u leicht integrierbar sein. Ferner sollte die Ableitung von v so sein, dass das Integral $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ „einfacher“ zu lösen ist. Am einfachsten erkennbar ist dies an einem Beispiel.

Beispiel (Integration durch partielle Integration)

Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{a)} \int x \sin x \, dx, \qquad \text{b)} \int e^x \cdot \sin x \, dx.$$

a) Wählen wir

$$\boldsymbol{v(x) = x} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u'(x) = \sin x},$$

so muss v abgeleitet und u' integriert werden:

$$\boldsymbol{v'(x) = 1} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u(x) = -\cos x}.$$

Bemerkung: An dieser Stelle haben wir nur **eine** Stammfunktion für $u'(x)$ bestimmt. Die Integrationskonstante kann zum Schluss eingefügt werden.

Die Funktionen u und v sind differenzierbare Funktionen mit stetigen Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}$, sodass die Voraussetzungen für partielle Integration erfüllt sind. Jetzt müssen die Terme nur noch in die Formel für die partielle Integration eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sin x} dx &= \boldsymbol{-\cos x} \cdot \boldsymbol{x} - \int (\boldsymbol{-\cos x}) \cdot \boldsymbol{1} dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) Wählen wir

$$\boldsymbol{v(x) = \sin x} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u'(x) = e^x},$$

so ergeben sich die Terme

$$\boldsymbol{v'(x) = \cos x} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u(x) = e^x}.$$

Die Formel für die partielle Integration ergibt:

$$\int \boldsymbol{e^x} \cdot \boldsymbol{\sin x} \, dx = \boldsymbol{e^x} \cdot \boldsymbol{\sin x} - \int \boldsymbol{e^x} \cdot \boldsymbol{\cos x} \, dx.$$

Nun muss die partielle Integration ein weiteres Mal angewendet werden. Wir wählen

$$\boldsymbol{v(x) = \cos x} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u'(x) = e^x}.$$

So muss v abgeleitet und u' integriert werden:

$$\boldsymbol{v'(x) = -\sin x} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u(x) = e^x}.$$

Wieder müssen die Terme in die Formel für die partielle Integration eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}e^x \cdot \sin x - \int \boldsymbol{e^x} \cdot \boldsymbol{\cos x} dx &= e^x \cdot \sin x - \boldsymbol{e^x} \cdot \boldsymbol{\cos x} + \int \boldsymbol{e^x} \cdot (\boldsymbol{-\sin x}) dx \\ &= e^x \cdot \sin x - \boldsymbol{e^x} \cdot \boldsymbol{\cos x} - \int \boldsymbol{e^x} \cdot \boldsymbol{\sin x} dx.\end{aligned}$$

Auf den ersten Blick kann diese Gleichung so wirken, als hätte man nichts erreicht. Das Integral, das wir herausbekommen haben, ist wieder das gleiche wie in der Ausgangsgleichung. Wir wissen, dass

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x\, dx + C.$$

Nun kann jedoch $\int e^x \cdot \sin x\, dx$ auf die linke Seite der Gleichung geholt werden

$$2\int e^x \cdot \sin x\, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + C,$$

sodass das gesuchte Integral letzlich die Form

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = \frac{1}{2}(e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + C)$$

hat.

Es kann schwer sein, zu erkennen wie man eine Funktion integriert. Man braucht etwas Übung, um zu wissen, wie man u' und v zu wählen hat. Manchmal müssen einfach mehrere Varianten probiert werden, um auf das richtige Ergebnis zu kommen.

2. Aufgabe (Lerncheck **-** partielle Integration)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mithilfe der partiellen Integration.

a) $\displaystyle\int_1^e x \ln x\, dx$ b) $\displaystyle\int xe^x dx$ c) $\displaystyle\int \cos\theta\, e^\theta d\theta$

d) $\displaystyle\int_e^{e^2} t(\ln t)^2 dt$ e) $\displaystyle\int_1^e \ln x\, dx$

Die nächste Methode, die wir nun betrachten, wird aus der Kettenregel hergeleitet (siehe das Skript für Details). Die Ableitung der Funktion $f \circ g$, falls diese existiert, ist

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Satz (Substitution)

Für eine stetige Funktion f und eine differenzierbare Funktion t mit stetiger Ableitung gilt

$$\int_\alpha^\beta f(t(x))\, t'(x)dx = \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} f(t)dt$$

oder, falls $t : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bijektiv ist, auch

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{t^{-1}(a)}^{t^{-1}(b)} f(t(x))\, t'(x)dx.$$

Es ist ratsam Substitution zu verwenden, wenn man die Funktion in das Produkt zweier Teilfunktionen der Form $f(x) = g(u(x)) \cdot u'(x)$ aufteilen kann. (Siehe das folgende Beispiel.) Eine weitere Anwendungssituation ist, wenn durch Substitution eines bestimmten Teils eine Funktion erhalten wird, die leicht integriert werden kann. Zum Beispiel bei $e^{\sqrt{x}}$ ist es ratsam das $\sqrt{x}$ durch t zu substituieren, da e^t leichter zu integrieren ist. Eine Reihe von Beispiele zeigt, wie die Methode angewendet werden soll.

Beispiel (Integration mit Substitution)
Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} 7x\sin(x^2)e^{\cos(x^2)}\,dx.$$

Betrachten wir nun die Formel für die Substitution:

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f(t(x))}\,\boldsymbol{t'(x)}\,dx = \int_{\boldsymbol{t(\alpha)}}^{\boldsymbol{t(\beta)}} \boldsymbol{f}(t)\,dt. \tag{17}$$

Wir versuchen, $7x\sin(x^2)e^{\cos(x^2)}$ auf diese Form zu bringen. Hier wird $\cos(x^2)$ durch $t(x)$ substituiert. Warum? Durch Anwendung der Kettenregel ist $t'(x) = \frac{d}{dx}(\cos(x^2)) = -2x\cdot\sin(x^2)$. Von daher ist t eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung, die bis auf ein Vielfaches schon in der Funktion steht, die wir integrieren wollen. Wir setzen also $\boldsymbol{t(x) = \cos(x^2)}$ und $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{e}^t$, wobei f eine stetige Funktion ist. Dann ist $\boldsymbol{f(t(x))} = \boldsymbol{e^{\cos(x^2)}}$ die eine Teilfunktion. Um die Regel anzuwenden, wird also noch $t'(x) = -2x\cdot\sin(x^2)$ benötigt. Dieser Term steht schon fast in der übrigen Teilfunktion $7x\sin(x^2)$. Es muss lediglich statt der 7 eine -2 da stehen. Daher wird die zu integrierende Funktion mit $1 = \frac{-2}{-2}$ multipliziert und der zusätzliche Teil der Konstante vor das Integralzeichen gezogen, wie die Rechenregel für das Integral es erlauben (siehe beispielsweise Abschnitt 8.1 im Skript):

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} 7x\sin(x^2)e^{\cos(x^2)}\,dx\\
=&\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{-2}{-2}\cdot 7x\sin(x^2)e^{\cos(x^2)}\,dx\\
=&\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{7}{-2}\cdot -2x\cdot\sin(x^2)\cdot e^{\cos(x^2)}\,dx\\
=&\frac{7}{-2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \boldsymbol{-2x\cdot\sin(x^2)}\cdot\boldsymbol{e^{\cos(x^2)}}\,dx\\
=&\frac{-7}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \boldsymbol{t'(x)}\cdot\boldsymbol{e^{t(x)}}\,dx.
\end{aligned}$$

Nun lässt sich die Substitutionsregel direkt anwenden:

$$\begin{aligned}
&\frac{-7}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \boldsymbol{t'(x)}\cdot\boldsymbol{e^{t(x)}}\,dx\\
\overset{(1)}{=}&\frac{-7}{2}\int_{\boldsymbol{t(0)}}^{\boldsymbol{t(\sqrt{\frac{\pi}{3}})}} \boldsymbol{e}^t\,dt = \frac{-7}{2}\int_{\cos(0^2)}^{\cos(\sqrt{\frac{\pi}{3}}^2)} e^t\,dt = \frac{-7}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} e^t\,dt\\
\overset{(2)}{=}&\frac{7}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 e^t\,dt = \frac{7}{2}\left(e^t\Big|_{1/2}^1\right) = \frac{7}{2}(e-e^{1/2}).
\end{aligned}$$

An der Stelle (1) wird die Substitutionsregel angewendet, wie sie oben steht. Hierbei wird einfach, wie mit den Farben gezeigt, jeder Teil durch den entsprechenden Teil substituiert. Wie auch bei der Substitutionsregel zu sehen ist, verändert sich die Integrationsvariable von x zu t.
An der Stelle (2) wird die Rechenregel $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ angewendet.

Alternative Lösung:
Wie im Skript angemerkt ist, ist es üblich (und oft kürzer), Aufgaben wie folgt zu lösen.

Setze $\boldsymbol{t = \cos(x^2)}$. Dann ist nach Anwendung der Kettenregel

$$\frac{dt}{dx} = -\sin(x^2)\cdot(2x) \quad \text{oder einfach} \quad dt = -2x\sin(x^2)dx.$$

Um rechts den Faktor 7 (wie in der Aufgabenstellung) zu erhalten, wird mit einem geeigneten Vielfachen multipliziert:

$$-\frac{7}{2}dt = 7x\sin(x^2)dx.$$

Nun können die verschiedenen Teile eingesetzt werden:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} 7x \cdot \sin(x^2) \cdot e^{\cos(x^2)}\, dx = -\frac{7}{2}\int_{\cos(0^2)}^{\cos(\sqrt{\frac{\pi}{3}}^2)} e^t\, dt.$$

Die Aufgabe kann wie zuvor gelöst werden.

Wichtig bei dieser Methode ist es, nur mit Konstanten zu multiplizieren oder zu teilen. Es wäre falsch die Gleichung $dt = -2x\sin(x^2)dx$ nach dx aufzulösen, um das Ergebnis in das Integral für dx einzusetzen, weil dann durch $-2x\sin(x^2)$ geteilt werden muss. Es gibt jedoch Werte x, für die $x\sin(x^2)$ Null ist. Eine einfache Faustregel, die man beachten sollte, um solche Probleme zu vermeiden: links t, rechts x. Nie sollen beide Variablen auf der selben Seite stehen.

Haben wir ein Integral der Form

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}dx$$

mit einer stetigen Funktion $g'(x)$ und $g(x) \neq 0$ für $x \in [a,b]$, so kann dieses mit der Substitutionsregel gut vereinfacht werden. Wir setzen $t = g(x)$, sodass t eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung ist. Wir erhalten also $dt = g'(x)dx$. Damit gilt dann

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \int_a^b \frac{1}{g(x)} g'(x)\, dx.$$

Die Funktion $f(t) = \frac{1}{t}$ ist auf $[g(a), g(b)]$ (oder $[g(b), g(a)]$ falls $a, b < 0$) wie gefordert stetig, weil $g(x)$ nach Voraussetzung ungleich Null ist. Der Substitutionssatz darf also angewendet werden:

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{t}\, dt = (\ln|t|)|_{g(a)}^{g(b)} = \ln(|g(b)|) - \ln(|g(a)|).$$

Daher hat eine Funktion dieser Form mit den obigen Voraussetzungen immer das Integral

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln(|g(b)|) - \ln(|g(a)|),$$

was für einige Aufgaben eine Hilfe sein kann.

Beispiel (Integration durch Substitution)

Bestimmen Sie das Integral der Funktion

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx.$$

Wir betrachten das Polynom $g(x) = x^3 + 3x + 1$ im Nenner, das auf dem Intervall $[1, 2]$ nur positive Werte annimmt. Da Polynome stetig und differenzierbar sind und deren Ableitungen auch (stetige) Polynome sind, sind die Voraussetzungen erfüllt. Die Ableitung von g lautet $g'(x) = 3x^2+3 = 3(x^2+1)$, d.h. $x^2+1 = \frac{g'(x)}{3}$. Somit kann man das Integral auch ausdrücken als

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx = \int_1^2 \frac{g'(x)}{3}\frac{1}{g(x)}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{g'(x)}{g(x)}dx.$$

Mit der gerade erklärten Substitutionsregel kann das Integral wie folgt berechnet werden:

$$\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \frac{1}{3}\left((\ln|x|)|_{g(1)}^{g(2)}\right) = \frac{1}{3}((\ln|x|)|_5^{15}) = \frac{1}{3}(\ln(15)-\ln(5)) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{15}{5}\right) = \frac{1}{3}\ln(3).$$

Beispiel (Integration durch Substitution und partielle Integration)

Berechnen Sie das Integral $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$.

Diese Gleichung würde sich leicht integrieren lassen, wenn keine Wurzel im Exponenten von e wäre. Aus diesem Grund wählen wir als Ansatz die Wurzel zu substituieren, wieder mit der Formel

$$\int_\alpha^\beta f(t(x))\,t'(x)\,dx = \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} f(t)\,dt \tag{18}$$

Wir wählen wie bereits erwähnt $t(x) = \sqrt{x}$. Jetzt fehlt allerdings noch die Ableitung von t. Diese lautet $t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. In den Intervallgrenzen kann diese niemals Null sein, also erweitern wir das Integral mit $1 = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^4 e^{t(x)}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx\\ &= \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{t(x)}\cdot 2\sqrt{x}\,dx\\ &= \int_1^4 t'(x)\cdot e^{t(x)}\cdot 2t(x)\,dx\end{aligned}$$

Wieder lässt sich nun Gleichung (18) direkt anwenden. Eingesetzt folgt somit

$$\begin{aligned}\int_1^4 \boldsymbol{t'(x)}\cdot \boldsymbol{e^{t(x)}}\cdot \boldsymbol{2t(x)}\,dx &= \int_{\boldsymbol{t(1)}}^{\boldsymbol{t(4)}} \boldsymbol{2t}\cdot\boldsymbol{e^t}\,dt\\ &= \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} 2t\cdot e^t\,dt\\ &= 2\int_1^2 t\cdot e^t\,dt.\end{aligned}$$

Dieses Integral kann nun mit der partiellen Integration gelöst werden, indem

$$v(t) = t \text{ und } \quad u'(t) = e^t$$

gewählt werden. Damit müssen noch

$$v'(t) = 1 \text{ und } \quad u(t) = e^t.$$

berechnet werden und in die Gleichung für die partielle Integration eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}2\int_1^2 t\cdot e^t dt =& 2\left((t\cdot e^t)\,|_1^2 - \int_1^2 e^t\cdot 1dt\right)\\ =& 2\left((2e^2-e^1)-(e^t)|_1^2\right)\\ =& 2\left(2e^2-e-(e^2-e^1)\right)\\ =& 2e^2.\end{aligned}$$

Wie wir sehen kann auch eine Anwendung beider Wege zum Ziel führen. Die Substitution führt zu einem uns bekannten Produktterm, den wir mit partieller Integration lösen können.

3. Aufgabe (Lerncheck - Substitution)

Wenden Sie die Methode der Substitution an, um die folgenden Integrale zu berechnen.

$$\text{a)} \int (5x-2)^3 dx \quad \text{b)} \int_0^1 x^2\sqrt{3+2x^3}\,dx \quad \text{c)} \int_0^2 \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+7}}\,dx$$

$$\text{d)} \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t+2}}}{\sqrt{t+2}}\,dt \quad \text{e)} \int (1+\sin\theta)^4\cos\theta\,d\theta \quad \text{f)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\tan\theta}}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$\text{g)} \int \frac{d\theta}{1+4\theta^2} \quad \text{h)} \int \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\,d\theta \quad \text{i)} \int \frac{\sin\theta\,\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\,d\theta$$

8.4 Integration komplexer und rationaler Funktionen

8.4.1 Integration komplexer Funktionen

Die Integration einer komplexwertigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ nach einer reellen Variablen ist prinzipiell recht einfach. Die Funktion f wird in einen Real- und Imaginärteil aufgeteilt $f = u + iv$, wobei u und v reellwertige Funktionen sind. Diese beiden Teile werden wie gewohnt integriert.

Beispiel (Integration komplexwertiger Funktionen)

Integrieren Sie die Funktionen

$$\text{a) } f(x) = x + 5 + \frac{1}{2}i \cdot x^3 - \frac{7}{3}i \quad \text{und} \quad \text{b) } g(x) = e^{2ix} + 5i$$

nach $x \in \mathbb{R}$.

a) Die Funktion

$$f(x) = x + 5 + \frac{1}{2}i \cdot x^3 - \frac{7}{3}i$$

wird in die beiden Teile

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

aufgeteilt, wobei $u(x) = x + 5$ und $v(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}$. Die einzelnen Funktionen können wie gewöhnlich integriert werden:

$$\int u(x)dx = \int (x+5)dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int v(x)dx = \int (\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3})dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{3}x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Das Integral der Funktion f ist deshalb

$$\int ((x+5) + i(\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}))dx = \int (x+5)dx + i\int (\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3})dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x + C_1 + i(\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{3}x + C_2)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Die Konstanten können auch als $C := C_1 + iC_2$ zusammengefasst werden:

$$\int ((x+5) + i(\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}))dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x + i(\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{3}x) + C, C \in \mathbb{C}.$$

b) Damit die Funktion nach einer reellen Variable integriert werden kann, teilen wir sie in einen reellen und imaginären Teil mithilfe der Eulerschen Relation ($e^{it} = \cos t + i\sin t$) auf:

$$f(x) = e^{2ix} + 5i = \cos(2x) + i\sin(2x) + 5i = u(x) + iv(x),$$

wobei $u(x) = \cos(2x)$ und $v(x) = \sin(2x) + 5$. Diese beiden Funktionen lassen sich leicht integrieren. So gilt

$$\int u(x)dx = \int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C_1$$

und

$$\int v(x)dx = \int (\sin(2x) + 5)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + 5x + C_2,$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Für die beiden Funktionen zusammen gilt für das Integral von f:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx &= \frac{1}{2}\sin(2x) + C_1 + i\left(-\frac{1}{2}\cos(2x) + 5x + C_2\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) + i\left(-\frac{1}{2}\cos(2x) + 5x\right) + C\end{aligned}$$

mit $C := C_1 + iC_2 \in \mathbb{C}$.

Nicht alle Sätze der Analysis, die für reelle Funktionen gelten, sind für komplexe Funktionen gültig, weil die Anordnung der Zahlen in den komplexen Zahlen verloren geht. Man kann nicht mehr für jede Zahl sagen, ob sie größer oder kleiner ist als eine andere. Da die komplexen Zahlen nicht geordnet sind, können keine Monotonieaussagen über die Funktion mehr getroffen werden. Auch der Zwischenwertsatz und der Mittelwertsatz der Integralrechnung funktioniert hier nicht mehr, da diese Sätze auf dem Vergleich von Zahlen beruhen.

8.4.2 Integration rationaler Funktionen

Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind. Wir wollen hier nur Funktionen betrachten, bei denen der Grad des Zählers größer ist als der des Nenners. Ist dies nicht der Fall, lässt sich der Bruch durch Polynomdivision immer in die gewünschte Form bringen.

Eine rationale Funktion zu integrieren ist mit den bekannten Formeln nur in günstigen Fällen möglich. Dabei sind die folgenden Formeln von Nutzen:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

Beispiel (Integration einer rationalen Funktion)

Bestimmen Sie $\int \frac{3x+1}{x^2+1}dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2+1} &= \int \left(\frac{3x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \int \frac{3x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx && \text{Substitution mit } t = x^2+1\\ & && dt = 2xdx, \text{ d.h. } \frac{3}{2}dt = 3xdx\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}dt + \arctan x\\ &= \frac{3}{2}\ln|t| + \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}\\ &= \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R} && x^2+1 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\\ &= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

4. Aufgabe (Lerncheck - rationale Funktion)

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+4}\,dx$.

Bei Aufgaben mit zerlegbaren Nenner ist meistens sinnvoll, den Bruch mittels Partialbruchzerlegung in kleinere Brüche zu zerteilen, die einfacher zu integrieren sind. (Wie genau die Partialbruchzerlegung funktioniert, ist im Kapitel 4.2 über rationale Funktionen erklärt.) In den reellen Zahlen zerfällt jedes Polynom in Faktoren vom Grad höchstens zwei. Das heißt, das Polynom des Nenners von jedem Partialbruch hat höchstens den Grad zwei.

Beispiel (Integration durch Partialbruchzerlegung)

Bestimmen Sie

$$\text{(a)} \int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}dx \qquad \text{(b)} \int \frac{6x-2}{x^3+6x^2+11x+6}dx.$$

(a) Da der Nennergrad von $\dfrac{x^3+x+1}{x^4+x^2}$ höher als dessen Zählergrad ist, lässt sich der Bruch direkt mittels Partialbruchzerlegung integrieren. Dafür wird der Nenner zunächst faktorisiert. Es gilt $x^4+x^2=x^2(x^2+1)$. Damit machen wir den Ansatz

$$\frac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Um nun A, B, C und D zu bestimmen, werden die drei Brüche auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und addiert. So erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} &= \frac{Ax(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} + \frac{B(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} + \frac{(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{1x^3+0x^2+1x+1}{x^2(x^2+1)}.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$A+C=1, \qquad B+D=0, \qquad A=1, \quad \text{und } B=1$$

also $A=B=1$ sowie $C=0$ und $D=-1$. Damit ist

$$\frac{x^3+x+1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Dieser Ausdruck kann leicht integriert werden. Wir erhalten

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{x} - \arctan x + C.$$

(b) Auch in dieser Aufgabe ist wieder der Nennergrad höher als der des Zählers, also kann direkt mit Partialbruchzerlegung begonnen werden. Als erstes werden hierfür jedoch die Nullstellen des Nenners benötigt. Für ein Polynom dritten Grades kann man diese am leichtesten finden, in dem man eine Nullstelle rät und die anderen mittels der p-q- oder abc-Formel bestimmt. Für Aufgaben, die in der Uni gestellt werden, sind die Nullstellen in der Regel sehr naheliegend. Kleine positive und negative Zahlen wie 1, -1 oder vielleicht noch 2 oder -2 sollten ausprobiert werden. Wird in das Polynom $x^3+6x^2+11x+6$ im Nenner die -1 eingesetzt, so erhalten wir

$$(-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 + 11\cdot(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = 0.$$

Damit ist klar, dass -1 eine Nullstelle ist, das heißt $(x+1)$ ist ein Faktor des Polynoms. Mittels Polynomdivision kann dieser Faktor aus dem Polynom ausgeklammert werden.

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ x^3 + 6x^2 + 11x + 6\big) : \big(x+1\big) = x^2 + 5x + 6 \\
\underline{-x^3 \ \ -x^2} \\
\qquad\quad 5x^2 + 11x \\
\qquad \underline{-5x^2 \ \ -5x} \\
\qquad\qquad\quad 6x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{-6x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

So sieht man, dass $x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x^2+5x+6)$ ist. Wobei x^2+5x+6 laut p-q-Formel die Nullstellen -2 und -3 hat. Daher gilt $x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x+2)(x+3)$. Nun kann mit der Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{6x-2}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

begonnen werden. Wir verwenden hier die Zuhaltemethode, obwohl ebenso Koeffizientenvergleich angewendet werden könnte. Dabei wird der Term mit der eingesetzten Nullstelle “zugehalten”. Es gilt

$$\begin{aligned}
A &= \frac{6x-2}{(x+2)(x+3)} \overset{x=-1}{=} \frac{-6-2}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{-8}{1\cdot 2} = -4 \\
B &= \frac{6x-2}{(x+1)(x+3)} \overset{x=-2}{=} \frac{-12-2}{(-2+1)(-2+3)} = \frac{-14}{-1\cdot 1} = 14 \\
C &= \frac{6x-2}{(x+1)(x+2)} \overset{x=-3}{=} \frac{-18-2}{(-3+1)(-3+2)} = \frac{-20}{-2\cdot(-1)} = -10.
\end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x-2}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx &= -4\int \frac{1}{x+1}\,dx + 14\int \frac{1}{x+2}\,dx - 10\int \frac{1}{x+3}\,dx \\
&= -4\ln|x+1| + 14\ln|x+2| - 10\ln|x+3| + C, \quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe (Lerncheck - Integration mithilfe der Partialbruchzerlegung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe der Partialbruchzerlegung.

$$\text{a)} \int \frac{3x+1}{x^2-4}\,dx \quad \text{b)} \int \frac{2x^2-4x+8}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)}\,dx$$

6. Aufgabe (Aufgabensammlung - Integrale)

Um routine Integrationsaufgaben in der Klausur schnell und sicher lösen zu können, empfiehlt sich mindestens ein Teil dieser Aufgaben zu bearbeiten.

Berechnen Sie mit der Methoden aus 8.3 [partielle Integration (pI), Substitution (Sub)] und 8.4 [Partialbruchzerlegung (PBZ)] die folgenden Integrale. Verwenden Sie dazu keine Integrationstabelle!

a) $\int \frac{x-2}{x^2-4x}\,dx$	b) $\int t^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{t^{\frac{2}{3}}-1}\,dt$	c) $\int x^2\cdot\cos x\,dx$
d) $\int \frac{x^2}{x^2-9}\,dx$	e) $\int \frac{1-x}{x^2+4}\,dx$	f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\alpha}{\ln(\cos\alpha)}\,d\alpha$
g) $\int \frac{t}{e^t}\,dt$	h) $\int_0^3 \frac{x}{x^2+4}\,dx$	i) $\int 5x\cdot\left(x^2+1\right)^{10}\,dx$
j) $\int_2^3 \frac{x^3-1}{x^4-2x^3+x^2}\,dx$	k) $\int \frac{6x^2+2}{x^3+x}\,dx$	l) $\int \frac{x^2}{e^x}\,dx$
m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot\cos t\cdot e^{\cos^2 t}\,dt$	n) $\int \cos(3\theta)\cdot\sin(3\theta)\,d\theta$	o) $\int \tan\theta\,d\theta$
p) $\int \arctan(\sqrt{x})\,dx$	q) $\int \sin(\ln t)\,dt$	r) $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2x}\,dx$
s) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$	t) $\int \sin^2\theta\,d\theta$	u) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$
v) $\int \frac{(\ln t)^{10}}{t}\,dt$	w) $\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta\cdot(1+\tan\theta)}$	

8.5 Uneigentliche Integrale

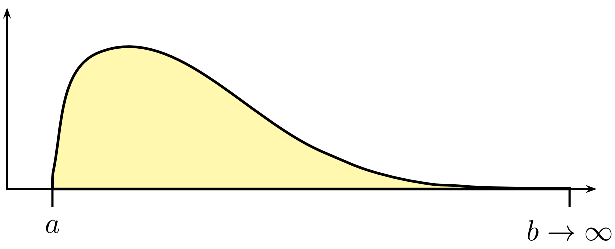
Bis jetzt hatten wir als Grenzen für ein bestimmtes Integral immer reelle Zahlen. Jedoch mag es in manchen Fällen Sinn machen, auch ∞ als Grenze zuzulassen. Ein solches Integral wird uneigentliches Integral genannt.

Definition (Uneigentliches Integral)

Sei $f : [a,\infty[\to\mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedes Intervall $[a,b]$ integrierbar ist. Dann ist das **uneigentliche Integral**

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Dieses Integral muss nicht zwingenderweise existieren. Mit existieren ist hier gemeint, dass eine endliche reelle Zahl als Ergebnis herauskommt.



Wie man sich leicht vorstellen kann, wird ein uneigentliches Integral nur existieren wenn $\lim_{b\to\infty} f(b) = 0$ gilt. Wie man an dem Bild sieht, kann nur dann ein endlicher Flächeninhalte zwischen der Funktion und der x-Achse entstehen. Die Bedingung $\lim_{b\to\infty} f(b) = 0$ allein reicht allerdings nicht aus. Man kann nur sicher sagen, dass das uneigentliche Integral nicht existiert, wenn sie nicht erfüllt ist. Es ist also eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung. Um diesen Punkt zu illustrieren, betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel (uneigentliche Integrale)

Bestimmen Sie, ob die folgenden Integralen existieren:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}dx \text{ und } \int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx.$$

Die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist für alle $b \in \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[2, b]$ integrierbar und daher ist

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \ln|x| \ \Big|_2^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 2) = \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b}{2}\right) = \infty.$$

Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x}dx$ existiert nicht, obwohl $\displaystyle\lim_{b\to\infty} f(b) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} = 0$.

Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$ existiert jedoch. Die Funktion $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ist für alle $b \in \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[2, b]$ integrierbar und daher ist

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\ \Bigg|_2^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Man sieht, existiert $\displaystyle\lim_{b\to\infty} F(b)$ (d.h. auch $\displaystyle\lim_{b\to\infty} F(b) \neq \pm\infty$), so existiert das uneigentliche Integral.

7. Aufgabe (Lerncheck - uneigentliches Integral)

Bestimmen Sie, ob das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x dx$ existiert.

Eine weitere Art eines uneigentlichen Integrals ist, Wenn f in a oder b nicht definiert ist, ist $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ eine weitere Art eines uneigentlichen Integrals. Wieder kann man sich an diesen annähern und sehen, ob die Stammfunktion für diesen Wert definiert ist. Bei dem Beispiel $\displaystyle\int_0^e \frac{1}{x}dx$ ist die Funktion bei der linken Grenze $x = 0$ nicht definiert. Wir setzen also wieder

$$\int_0^e \frac{1}{x}dx = \lim_{a\searrow 0} \int_a^e \frac{1}{x}\, dx = \lim_{a\searrow 0} \ln|x| \ \Big|_a^e = \lim_{a\searrow 0}(\ln|e| - \ln|a|) = \lim_{a\searrow 0}(1 - \ln|a|).$$

Doch $\displaystyle\lim_{a\searrow 0} \ln(a) = -\infty$. Daher existiert in diesem Fall das uneigentliche Integral nicht.

Liegt eine undefinierte Stelle innerhalb der Intervallgrenzen, so spalten wir das Intervall in zwei Summanden auf und berechnen diese getrennt. Betrachten wir das Beispiel $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ vom Anfang mit anderen Intervallgrenzen, so fällt auf, dass die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist. Wir teilen also das Integral auf in die Summanden

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \nearrow 0} \int_{-1}^{a} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{b \searrow 0} \int_{b}^{1} \frac{1}{x^2} dx$$

und gehen wie oben erklärt voran. Das uneigentliche Integral kann nur existieren, wenn die beiden Summanden auch existieren, was in diesem Beispiel nicht der Fall ist, denn

$$\lim_{a \nearrow 0} \int_{-1}^{a} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \nearrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{a} = \lim_{a \nearrow 0} \left(-\frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{-1} \right) \right) = \infty.$$

Führen sowohl die linke als auch die rechte Integralgrenze zu einem uneigentlichen Integral, so wählen wir einen beliebigen Punkt zwischen den beiden Grenzen und teilen das Integral wie folgt auf

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a}^{c} f(x) dx + \int_{c}^{b} f(x) dx$$

mit $c \in \,]a, b[$. Die beiden Summanden werden wieder, wie bereits erklärt, berechnet.

Beispiel (Berechnung uneigentlicher Integrale)
Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Existenz. Berechnen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals.

(a) $\int_{0}^{\infty} x\,dx$

(b) $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$

(c) $\int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$

(a) Bei der ersten Gleichung müssen wir "∞" bei der Rechnung ersetzen. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} x\,dx &= \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} x\,dx = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{0}^{b} \\ &= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} 0^2 = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} b^2 = \infty. \end{aligned}$$

Der Grenzwert ergibt ∞ und ist damit keine reelle Zahl. Das Integral existiert also nicht. In diesem Beispiel kann man sich auch bildlich leicht vorstellen, dass kein endlicher Flächeninhalt herauskommen kann, weil $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x = \infty \neq 0$. Damit wird der Flächeninhalt unter der Funktion für b gegen ∞ auch unendlich größ.

(b) Bei dieser Aufgabe vergleichen wir $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ mit $\frac{1}{x}$ für $x \geq 2$. Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|x|} \overset{x \geq 0}{=} \frac{1}{x}.$$

Das Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x}$ divergiert gegen unendlich, wie wir auch schon in der Erklärung zu diesem Thema gesehen haben. Da nun $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ größer als $\frac{1}{x}$ ist und beide größer Null sind, muss das betrachtete Integral auch gegen unendlich divergieren:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \geq \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x} dx > 0.$$

(c) In dieser Aufgabe ist die zu integrierende Funktion für Null nicht definiert. Also ersetzen wir diese:

$$\int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \lim_{b \nearrow 0} \int_{-4}^{b} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

Aus Symmetriegründen können wir dieses weiter umformen und erhalten

$$\lim_{b \nearrow 0} \int_{-4}^{b} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \lim_{b \searrow 0} \int_{b}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

Da nun alle Werte im Intervall, über das integriert wird, positiv sind, können wir die Betragsstriche weglassen.

$$\begin{aligned} \lim_{b \searrow 0} \int_{b}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx &= \lim_{b \searrow 0} \int_{b}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \searrow 0} 2\sqrt{x} \ \Big|_{b}^{4} \\ &= \lim_{b \searrow 0} \left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{b}\right) = 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

Das Integral existiert also und hat den Wert 4.

(d) In diesem Beispiel müssen wir sowohl die linke als auch die rechte Grenze ersetzen. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx &= \int_{-\infty}^{0} \sin x \, dx + \int_{0}^{\infty} \sin x \, dx \\ &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \sin x \, dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \sin x \, dx \\ &= \lim_{a \to -\infty} \left(- \cos x \big|_{a}^{0} \right) + \lim_{b \to \infty} \left(- \cos x \big|_{0}^{b} \right) \\ &= \lim_{a \to -\infty} (- \cos 0 + \cos a) + \lim_{b \to \infty} (- \cos b + \cos 0) \\ &= \lim_{a \to -\infty} (-1 + \cos a) + \lim_{b \to \infty} (- \cos b - (-1)) \end{aligned}$$

Weder $\lim\limits_{a \to -\infty} (-1 + \cos a)$ noch $\lim\limits_{b \to \infty} (- \cos b + 1)$ konvergiert. Da bei einem Integral beide diese Werte existieren müssen, kann dieses Integral nicht existieren.

Achtung: Es ist nicht richtig $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \sin x dx$ zu schreiben. Man weiß nichts darüber wie die eine Seite gegen ∞ und die andere gegen $-\infty$ läuft und kann so nicht davon ausgehen, dass sie gleich schnell sind.

8. Aufgabe (Lerncheck - uneigentliche Integrale berechnen)

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren. Falls ja, berechnen Sie das Integral.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ e) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

g) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+9}$ i) $\displaystyle\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$

Lösungen, Lösungsskizzen bzw. Ergebnisse zu den Aufgaben im 8. Kapitel

1. Aufgabe (Lerncheck - Integration)

a) Auf dem Intervall $[1,9]$ ist $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ definiert ($x \neq 0$). Von daher ist das Integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^9 \left(x^2-1\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx &= \int_1^9 x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^9 \\
&= \frac{2}{5}\cdot 9^{\frac{5}{2}} - 2\cdot 9^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{5} - 2\right) \\
&\vdots \\
&= \frac{464}{5}.
\end{aligned}$$

b) Wie in der Aufgabestellung hingewiesen wurde, lösen wir den Betrag auf:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^2 |x^2-x|\,dx &= \int_{-1}^2 |x\,(x-1)\,|\,dx \\
&= \int_{-1}^0 x\,(x-1)\;dx + \int_0^1 -x\,(x-1)\;dx + \int_1^2 x\,(x-1)\;dx \\
&= \int_{-1}^0 \left(x^2-x\right)\;dx + \int_0^1 -\left(x^2-x\right)\;dx + \int_1^2 \left(x^2-x\right)\;dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^0 - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^2 \\
&\vdots \\
&= \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

2. Aufgabe (Lerncheck - partielle Integration: $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$)

a) Mit $v(x) = \ln x$ und $u'(x) = x$ sind $v'(x) = \frac{1}{x}$ und $u(x) = \frac{x^2}{2}$. Die Funktionen u und v sind differenzierbar mit stetiger Ableitungen u' und v' auf dem Intervall $[1,e]$, sodass partielle Integration angewendet werden kann:

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\ln x\,dx &= \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx \\
&= \left(\frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1}{2}\ln(1)\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx \\
&= \left(\frac{e^2}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0\right) - \frac{x^2}{4}\Bigg|_1^e \\
&= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}(e^2+1).
\end{aligned}$$

b) Mit $v(x) = x$ und $u'(x) = e^x$ sind $v'(x) = 1$ und $u(x) = e^x$. Die Funktionen u und v sind differenzierbar mit stetiger Ableitungen u' und v' auf ganz $\mathbb{R}$, sodass partielle Integration angewendet werden kann. Wir bekommen

$$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int e^x dx = x\, e^x - e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) In dieser Aufgabe ist θ die Integrationsvariable. Wir wählen $v(\theta) = \cos\theta$ und $u'(\theta) = e^\theta$, sodass $v'(\theta) = -\sin\theta$ und $u(\theta) = e^\theta$. Die Funktionen u und v sind bekannterweise differenzierbar mit stetigen Ableitungen u' und v' auf ganz $\mathbb{R}$. Partielle Integration liefert

$$\int \cos\theta\, e^\theta d\theta = \cos\theta\, e^\theta - \int e^\theta(-\sin\theta) d\theta + C = \cos\theta\, e^\theta + \int e^\theta \sin\theta d\theta + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Im Folgenden bezeichnet C die generische Konstante. Wir wenden dieselbe Methode mit $v(\theta) = \sin\theta$ und $u'(\theta) = e^\theta$ an. Hierbei sind $v'(\theta) = \cos\theta$ und $u(\theta) = e^\theta$, sodass

$$\int \cos\theta\, e^\theta d\theta = \cos\theta\, e^\theta + \sin\theta\, e^\theta - \int \cos\theta\, e^\theta d\theta + C.$$

Addieren wir $\int \cos\theta\, e^\theta d\theta$ auf beiden Seiten, bekommen wir

$$2\int \cos\theta\, e^\theta d\theta = \cos\theta\, e^\theta + \sin\theta\, e^\theta + C.$$

Die allgemeine Stammfunktion ist also

$$\int \cos\theta\, e^\theta d\theta = \frac{1}{2}\left(\cos\theta\, e^\theta + \sin\theta\, e^\theta + C\right).$$

d) Mit $v(t) = (\ln t)^2$ und $u'(t) = t$ sind $v'(t) = 2(\ln t) \cdot \frac{1}{t}$ und $u(t) = \frac{t^2}{2}$. Die Funktionen u und v sind differenzierbar mit stetigen Ableitungen auf dem Intervall $[e, e^2]$. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^2} t(\ln t)^2 dt &= \frac{t^2}{2}(\ln t)^2\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{t^2}{2} \cdot \frac{2(\ln t)}{t} dt \\
&= \left(\frac{e^4}{2}(\ln(e^2))^2 - \frac{e^2}{2}(\ln e)^2\right) - \int_e^{e^2} t \ln t\, dt \qquad \text{partielle Integration mit } v(t) = \ln t, u'(t) = t \\
&= \left(\frac{e^4}{2} \cdot 2^2 - \frac{e^2}{2}(1^2)\right) - \left(\frac{t^2}{2}\ln t\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t} dt\right) \\
&= 2e^4 - \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^4}{2}\ln(e^2) - \frac{e^2}{2}\ln e\right) + \int_e^{e^2} \frac{t}{2} dt \\
&= 2e^4 - \frac{e^2}{2} - e^4 + \frac{e^2}{2} + \frac{t^2}{4}\Big|_e^{e^2} \\
&= e^4 + \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}(5e^4 - e^2).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Statt die partielle Integration durchzuführen, hätte man das Teilergebnis aus Aufgabe 2a) einsetzen konnten.

e) Wählt man $v(x) = \ln x$ und $u'(x) = 1$, so sind $v'(x) = \frac{1}{x}$ und $u(x) = x$. Wiederum sind die Funktionen u und v differenzierbar mit stetigen Ableitungen u' und v' auf dem gegebenen Intervall. Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x\,dx &= x\ln x|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx \\ &= e\cdot 1 - 1\cdot 0 - \int_1^e 1dx \\ &= e - x|_1^e \\ &= e - (e-1) = 1.\end{aligned}$$

3. Aufgabe (Lerncheck - Substitution)

a) Wähle $t(x) = 5x - 2$. Wir prüfen die Voraussetzungen für eine Substitution:

$$\begin{array}{rcll} t(x) &=& 5x-2 & \text{Polynome sind differenzierbar auf ganz } \mathbb{R}, \\ t'(x) &=& 5 & \text{Konstante Funktionen sind stetig auf ganz } \mathbb{R}, \\ f(t) &=& t^3 & \text{Polynome sind differenzierbar auf ganz } \mathbb{R}. \end{array}$$

Die Voraussetzungen für Substitution sind erfüllt. Nun wenden wir die Substitutionsmethode an:

$$\begin{aligned}\int (5x-2)^3 dx &= \int f(t(x))dx \qquad [\text{mit } \tfrac{5}{5} \text{ erweitern, denn } t'(x) = 5 \text{ fehlt}] \\ &= \frac{1}{5}\int f(t(x))\cdot 5dx \\ &= \frac{1}{5}\int f(t(x))\cdot t'(x)dx \\ &= \frac{1}{5}\int f(t)dt \\ &= \frac{1}{5}\int t^3 dt \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{t^4}{4} + C, \quad C\in\mathbb{R} \\ &= \frac{t^4}{20} + C, \quad C\in\mathbb{R} \\ &= \frac{(5x-2)^4}{20} + C, \quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{rcll} t(x) &=& 3+2x^3 & \text{Polynome sind differenzierbar auf ganz } \mathbb{R} \\ t'(x) &=& 6x^2 & \text{Polynome sind stetig auf ganz } \mathbb{R} \\ f(t) &=& \sqrt{t} & \text{ist stetig auf }]0,\infty[\end{array}$$

Somit sind auch hier die Voraussetzungen für die Substitution erfüllt. Substitution liefert:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sqrt{3+2x^3}\,dx &= \int_0^1 f(t(x))\cdot\frac{1}{6}t'(x)\,dx \qquad \text{mit } \frac{1}{6}t'(x) = x^2 \\ &= \frac{1}{6}\int_{t(0)}^{t(1)} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{6}\int_3^5 t^{\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_3^5 \\ &= \frac{1}{9}(5^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{array}{rcll} t(x) & = & 5x^2+7 & \text{Polynome sind differenzierbar auf ganz } \mathbb{R} \\ t'(x) & = & 10x & \text{Polynome sind stetig auf ganz } \mathbb{R} \\ f(t) & = & \frac{1}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} = t^{-\frac{1}{3}} & \text{ist stetig auf } [t(0),t(2)] = [7,27] \not\ni 0 \end{array}$$

Auch hier sind alle Voraussetzungen für die Substitution für $t \neq 0$ erfüllt:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{5x^2+7}} &= \frac{2}{5}\int_0^2 f(t(x))t'(x)\,dx \qquad \text{mit } 4x = 4\cdot\frac{t'(x)}{10} = \frac{2}{5}t'(x) \\ &= \frac{2}{5}\int_{t(0)}^{t(2)} f(t)\,dt \\ &= \frac{2}{5}\int_7^{27} t^{-\frac{1}{3}}\,dt \\ &= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}\Big| \\ &= \frac{3}{5}\left(27^{\frac{2}{3}} - 7^{\frac{2}{3}}\right) \\ &= \frac{3}{5}\left(9-\sqrt[3]{49}\right). \end{aligned}$$

Für die nachfolgenden Aufgabenteile gibt es nur die Lösung (Ihre Lösung könnte eine andere Form nehmen) und eine mögliche Substitution.

Teil	Endergebnis	mögliche Substitution
d)	$2\left(e^{\sqrt{6}} - e^{\sqrt{3}}\right)$	$u = \sqrt{t+2}$
e)	$\frac{1}{5}(1+\sin\theta)^5 + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$u = 1+\sin\theta$
f)	$1 - \frac{1}{e}$	$u = -\tan\theta$
g)	$\frac{1}{2}\arctan(2\theta) + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$u = 2\theta$
h)	$\arctan(\sin\theta) + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$u = \sin\theta$
i)	$\frac{1}{2}\ln\lvert 1+\sin^2\theta\rvert + C \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2\theta) + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$u = 1+\sin^2\theta$

* Bei Teil i) haben wir benutzt, dass $1+\sin^2\theta \geq 1$.

4. Aufgabe (Integration einer rationalen Funktion)

Substitution kann angewendet werden, denn
$$\begin{array}{rcll} u(x) & = & \frac{x}{2} & \text{Polynome sind differenzierbar auf ganz } \mathbb{R}, \\ u'(x) & = & \frac{1}{2} & \text{Konstante Funktionen sind stetig auf ganz } \mathbb{R}: \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{x^2+4}\,dx &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\int \frac{3x+1}{1+(\frac{x}{2})^2}\,dx} \qquad \textbf{mit } \boldsymbol{u = \frac{x}{2},\ du = \frac{1}{2}dx}, \textbf{ d.h. } \boldsymbol{2du = dx} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{6u+1}{1+u^2}\cdot 2du \\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{6u}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2}\right)du. \end{aligned}$$

Die Funktion $t(u) = 1 + u^2$ ist als Polynom in u stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$, sodass eine zweite Substitution mit $\boldsymbol{t = 1 + u^2, dt = 2u\,du, 3\,dt = 6u\,du}$ möglich ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\left(\frac{6u}{1+u^2}+\frac{1}{1+u^2}\right)du &= \frac{1}{2}\int\frac{3}{t}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}du\\ &= \frac{3}{2}\ln|t|+\frac{1}{2}\arctan u + C, \quad C\in\mathbb{R}\\ &= \frac{3}{2}\ln\left|1+\frac{x^2}{4}\right|+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C, \quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Weil $1+\frac{x^2}{4} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt $\int \frac{3x+1}{x^2+4} = \frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

5. Aufgabe (Lerncheck - Integration mithilfe der Partialbruchzerlegung)

a)

$$\begin{aligned}\int\frac{3x+1}{x^2-4}dx &= \int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}\right)dx\\ &\overset{\text{PBZ}}{=} \int\left(\frac{\frac{-5}{-4}}{x+2}+\frac{\frac{7}{4}}{x-2}\right)dx\\ &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{5}{x+2}+\frac{7}{x-2}\right)dx\\ &= \frac{1}{4}\left(5\ln|x+2|+7|x-2|\right)+C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2-4x+8}{(x-1)^2(x^2+1)}dx &= \int\left(\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx\\ &= \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}\end{aligned}$$

Der Zähler ist

$$\begin{aligned}&Ax^3-Ax^2+Ax-A+Bx^2+B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D\\ =&(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x+(-A+B+D)\\ \overset{!}{=}&2x^2-4x+8.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}A+C&=0\\ -A+B-2C+D&=2\\ A+C-2D&=-4\\ -A+B+D&=8.\end{aligned}$$

Es ergeben sich die Koeffizienten $A=-3,\ B=3,\ C=3$ und $D=2$ (nachprüfen!). Nun kann das Integral gelöst werden:

$$-3\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{3x+2}{x^2+1}dx = -3\ln|x-1|+3\frac{-1}{x-1}+\int\frac{3x}{x^2+1}dx+2\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Das Integral $\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx$ kann nun mithilfe einer Substitution gelöst werden. Wir setzen $u(x) = x^2+1$, eine stetig differenzierbare Funktion auf ganz $\mathbb{R}$. Mit $u = x^2+1,\ du = 2x\,dx$ und $\frac{3}{2}\,du = 3x\,dx$ folgt

$$\int \frac{2x^2-4x+8}{(x-1)^2\,(x^2+1)}\,dx = -3\ln|x-1| - 3\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + 2\arctan x + C.$$

6. Aufgabe (Aufgabensammlung - Integrale)

Die folgende Tabelle enthält für jede Teilaufgabe eine Lösung und einen Hinweis. Details für ausgewählte Teilaufgaben befinden sich im Anschluss der Tabelle.

Integral	Lösung	Hinweis
a) $\int \frac{x-2}{x^2-4x}\,dx$	$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x| + C$	Sub
b) $\int t^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{t^{\frac{2}{3}}-1}\,dt$	$= (t^{\frac{2}{3}}-1)^{\frac{3}{2}} + C$	Sub
c) $\int x^2 \cdot \cos x\,dx$	$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$	pI
d) $\int \frac{x^2}{x^2-9}\,dx$	$= x - \frac{3}{2}\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + C$	$\frac{x^2}{x^2-9} = \frac{x^2-9+9}{x^2-9} = \frac{x^2-9}{x^2-9} + \frac{9}{x^2-9}$
		$= 1 + \frac{9}{x^2-9}$ PBZ
e) $\int \frac{1-x}{x^2+4}\,dx$	$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$	Sub (Details auf Seite 125)
f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\alpha}{\ln(\cos\alpha)}\,d\alpha$	$= -\ln|\ln(\cos\alpha)|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$	
	$= -\ln|\ln(\frac{1}{2})| + \ln|\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})|$	Sub
g) $\int \frac{t}{e^t}\,dt$	$= -te^{-t} - e^{-t} + C$	pI
h) $\int_0^3 \frac{x}{x^2+4}\,dx$	$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4|\,\Big|_0^3 = \ln\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$	Sub
i) $\int 5x \cdot \left(x^2+1\right)^{10}\,dx$	$= \frac{5}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{11}}{11} + C$	Sub
j) $\int_2^3 \frac{x^3-1}{x^4-2x^3+x^2}\,dx$	$= -2\ln|x| + \frac{1}{x}$	PBZ mit dem Ansatz
	$+ 3\ln|x-1| + C$	$\frac{x^3-1}{x^4-2x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$*

* Teil j) der Aufgabe geht leichter, wenn man merkt, dass für $x \neq 1$

$$\frac{x^3-1}{x^4-2x^3+x^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2(x-1)^2} = \frac{x^2+x+1}{x^2(x-1)}.$$

Selbstverständlich ist das Ergebnis gleich.

Integral	Lösung	Hinweise
k) $\int \frac{6x^2+2}{x^3+x}\,dx$	$= 2\ln\lvert x^3+x\rvert + C$	Sub
l) $\int \frac{x^2}{e^x}\,dx$	$-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$	pI (2 Mal)
m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t \cdot e^{\cos^2 t}\,dt$	$= \frac{1}{2}(e-1)$	Sub
n) $\int \cos(3\theta)\cdot\sin(3\theta)\,d\theta$	$= -\frac{1}{6}\cos^2(3\theta) + C$ alternativ: $\frac{1}{6}\sin^2(3\theta) + C$**	Sub
o) $\int \tan\theta\,d\theta$	$= -\ln\lvert\cos\theta\rvert + C$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, Sub
p) $\int \arctan(\sqrt{x})\,dx$	$= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}$ $+ \arctan\sqrt{x} + C$	Sub, pI (Details auf Seite 126)
q) $\int \sin(\ln t)\,dt$	$\frac{1}{2}(t\sin(\ln t) - t\cos(\ln t) + C)$	pI (2 Mal)
r) $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2x}\,dx$	$= \frac{1}{2}e^{x^2+2x} + C$	Sub
s) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$	$= 4 - 2\sqrt{e}$	pI (Details auf Seite 126)
t) $\int \sin^2\theta\,d\theta$	$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta) + C$	$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$, Sub
u) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$	$= 2\sqrt{x} - 2\ln\lvert\sqrt{x}+1\rvert + C$	Sub
v) $\int \frac{(\ln t)^{10}}{t}\,dt$	$= \frac{(\ln t)^{11}}{11} + C$	Sub
w) $\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta\cdot(1+\tan\theta)}$	$= \ln\lvert 1+\tan\theta\rvert + C$	Sub

** Die zwei Lösungen für Aufgabenteil n) unterscheiden sich durch eine Konstante:

$$\frac{1}{6}\sin^2(3\theta) - (-\frac{1}{6}\cos^2(3\theta)) = \frac{1}{6}(\sin^2(3\theta) + \cos^2(3\theta)) = \frac{1}{6}(1).$$

ausgewählte Details

e)

$$\int \frac{1-x}{x^2+4}dx = \int \left(\frac{1}{x^2+4} + \frac{-x}{x^2+4}\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} + \int \frac{-x}{x^2+4}dx$$

Das Integral links lässt sich mit der Substitution $u(x) = \frac{x}{2}$, eine stetig differenzierbare Funktion, lösen. Hierbei ist $du = \frac{1}{2}dx$ oder äquivalent dazu $2du = dx$:

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan u + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Das Integral rechts $\left(\int \frac{-x}{x^2+4}dx\right)$ lässt sich mit der Substitution $t(x) = x^2 + 4$, auch eine stetig differenzierbare Funktion, lösen. Hierbei ist $dt = 2xdx$ oder äquivalent dazu $-\frac{1}{2}dt = -xdx$:

$$\int \frac{-x}{x^2+4}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C_2 = -\frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit $C = C_1 + C_2$ ist

$$\int \frac{1-x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C.$$

p) Das gegebene Integral lässt sich mit der für $x > 0$ stetig differenzierbaren Funktion $t(x) = \sqrt{x}$ durch Substitution umformen. Mit $t^2 = x$ und $2tdt = dx$ gilt

$$\int \arctan(\sqrt{x})dx = \int 2t\arctan t\,dt.$$

Dieses Integral kann mit partieller Integration gelöst werden. Setze $v(t) = \arctan t$ (d.h. $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$) und $u'(t) = 2t$ (d.h. $u(t) = t^2$). Nach der Formel gilt

$$\begin{aligned}
\int 2t\arctan t\,dt &= t^2\arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2}dt \\
&= t^2\arctan t - \left(\int \frac{1+t^2}{1+t^2} + \int \frac{-1}{1+t^2}\right)dt \\
&= t^2\arctan t - \left(\int dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt\right) \\
&= t^2\arctan t - t + \arctan t + C.
\end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt

$$\int \arctan(\sqrt{x})dx = x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C.$$

s) Wähle für die partielle Integration $u(x) = \ln x$ und $v'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$. Um die Formel anzuwenden, bestimmen wir u' und v:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \ln x & v'(x) &= x^{-\frac{1}{2}} \\
u'(x) &= \tfrac{1}{x} & v(x) &= 2x^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Die Formel ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &\overset{\text{pI}}{=} 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x}dx \\
&= 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - 2\int_1^e x^{-\frac{1}{2}}dx \\
&= \left(2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right)\Big|_1^e \\
&= 2\sqrt{e}(\overbrace{\ln(e)}^{1}) - 4\sqrt{e} - (2\overbrace{\ln 1}^{0} - 4) \\
&= 4 - 2\sqrt{e}.
\end{aligned}$$

u) Die Substitution $u = x^{\frac{1}{3}}$ (d.h. $u^3 = x$ und $3u^2du = dx$) führt zu

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3u^2}{u^3+u}du = 3\int \frac{u}{u^2+1}du.$$

Das Integral kann mit der Substitution $t = u^2 + 1$ weiter umgeschrieben und gelöst werden:

$$3 \int \frac{u}{u^2+1} du = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2} \ln|t| + C.$$

Rücksubstitution ergibt

$$\frac{3}{2} \ln|t| + C = \frac{3}{2} \ln|u^2+1| + C = \frac{3}{2} \ln(u^2+1) + C = \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}}+1) + C.$$

7. Aufgabe (Lerncheck - Uneigentliches Integral)

Das gegebene uneigentliche Integral existiert:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \to -\infty} e^x|_a^0 = \lim_{a \to -\infty} (e^0 - e^a) = 1 - \lim_{a \to -\infty} e^a = 1 - 0 = 1.$$

8. Aufgabe (Lerncheck - Uneigentliche Integrale berechnen)

Für diese Aufgaben wird jeweils nur angegeben, ob das jeweilige Integral konvergent oder divergent ist. Bei Konvergenz wird der Wert des Integrals auch angegeben. Die Details sollen Sie selber ausarbeiten.

a) Divergent

b) Konvergent $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 1$

c) Divergent

d) Konvergent $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$

e) Divergent

f) Konvergent $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ $\quad \left(Hinweis: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \right)$

g) Divergent

h) Divergent

i) Konvergent $\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{-9}{2}$

Falls Sie Fragen zu diesem Blatt haben, schreiben Sie uns im Moses-Forum unter Analysis I für Ingenieure.

9 Fourieranalysis

Motivation

Die sogenannten Fourierreihen, die im Abschnitt 10.3 des Skripts eingeführt werden, können als Lösungen von partiellen Differentialgleichungen auftauchen. Solche Gleichungen sind für die Beschreibung von physikalischen Naturerscheinungen nützlich, beispielsweise bei der Analyse von mechanischen oder elektrischen Systemen mit äußerer Kraft (Wärmeleitung, Schwingungen). Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die Grundlagen für die Fourierreihen zu legen. Wir beschränken uns hier auf den reellen Fall. Die Themen, die behandelt werden sind die Folgenden.

- Periodizität, T-periodische Funktionen
- trigonometrische Polynome
- Fourierapproximation, Fourierpolynome, Fourierkoeffizienten
- periodische Fortsetzung

Manche Beispiele scheinen kompliziert zu sein. Am besten rechnet man dabei selber die Schritte, die angedeutet werden und vergleicht die eigenen Ergebnisse mit unseren. Dadurch werden unsere Schritte für Sie übersichtlicher. Die Integrationstechniken partielle Integration und Substitution sind dafür unerlässlich.

9.1 Reelle Fourieranalysis

9.1.1 Periodizität

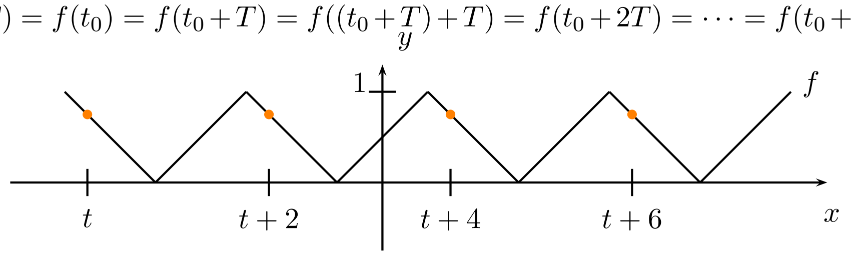
Definition (T-periodisch)

Sei $T > 0$ eine reelle Zahl. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ***T*-periodisch**, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t) = f(t+T).$$

Wissen wir für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, wie der Graph einer T-periodischen Funktion f auf dem Intervall $[t_0, t_0+T[$ aussieht, so wissen wir auch, wie der Graph von f auf $[t_0+T, t_0+2T[$, $[t_0+2T, t_0+3T[$, usw. aussieht. Die Funktion wiederholt sich ständig:

$$f(t_0-T) = f(t_0) = f(t_0+T) = f((t_0+T)+T) = f(t_0+2T) = \cdots = f(t_0+kT) = \cdots \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$



So kann man die Funktion durch die Festsetzung auf einem Intervalle der Länge T beschreiben. Die anderen Funktionswerte folgen aus der Periodizität.

Als Beispiel betrachten wir das obige Bild. Es enthält eine 2-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ folgenderweise definiert ist:

$$g(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2} & \text{für} \quad -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ -t + \frac{3}{2} & \text{für} \quad \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Diese Funktion setzen wir nun im folgenden Sinn fort.

Definition (Periodische Fortsetzung)

Sei $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion und definiere $T = b - a$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine T-periodische Fortsetzung von g, falls $f(t) = g(t)$ für alle $t \in [a, b[$ und f T-periodisch ist.

Bemerkungen:

- Die Funktion g wird zu einer reellen Funktion f erweitert, d.h. f ist für alle reellen Zahlen definiert.
- Oft wird die Funktion und ihre T-periodische Fortsetzung mit demselben Buchstabe bezeichnet.

Einige periodische Funktionen sind uns wohl bekannt, beispielsweise Sinus und Cosinus. Diese sind 2π-periodisch, weil $\cos(t+2\pi)=\cos(t)$ und $\sin(t+2\pi)=\sin(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$, wie im Abschnitt 6.1 des Skripts (Trigonometrische Funktionen I) bewiesen wurde. Dies ist die kleinste Periode (warum?) aber nicht die einzige, wie der erste Teil des nächsten Beispiels anhand der Sinus Funktion zeigt.

Beispiele (Periodische Funktionen)

Zeigen Sie, dass für alle $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

a) $\sin$ eine $2\pi k$-periodische Funktion ist,

b) $f(t)=\sin\left(k(\frac{2\pi}{T})t\right)$ eine T-periodische Funktion ist.

a) Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.
Induktionsanfang (IA): Für $k=1$ ist die Aussage wahr, weil die Sinus Funktion $2\pi k=2\pi$-periodisch ist.

Induktionsvoraussetzung (IV): Angenommen, die Aussage "$\sin$ ist $2\pi k$-periodisch" ist wahr für ein beliebiges (aber festes) $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, d.h. $\sin(t)=\sin(t+2\pi k)$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

Induktionsbehauptung u. Induktionsschluss: Es ist zu zeigen, dass die Aussage für $k+1$ gültig ist: $\sin$ ist $2\pi(k+1)$-periodisch, d.h. $\sin(t)=\sin(t+2\pi(k+1))$ für alle $t\in\mathbb{R}$. Fangen wir mit der rechten Seite der Gleichung an und formen um, um die Induktionsvoraussetzung einzubeziehen. Sei dazu $t\in\mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\sin(t+2\pi(k+1)) &= \sin(t+\boldsymbol{2\pi k}+\boldsymbol{2\pi}) && \text{Distributivgesetz}\\ &= \sin(t+\boldsymbol{2\pi k}) && \sin \text{ ist nach IA } \boldsymbol{2\pi}\textbf{-periodisch}\\ &= \sin(t) && \sin \text{ ist nach IV } \boldsymbol{2\pi k}\textbf{-periodisch}.\end{aligned}$$

Damit ist die Sinusfunktion $2\pi k$-periodisch für alle $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

b) Sei $t\in\mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned}f(t+T)=\sin\left(k(\tfrac{2\pi}{T})(t+T)\right) &= \sin\left(k(\tfrac{2\pi}{T})t+k(\tfrac{2\pi}{T})T\right)\\ &= \sin\left(k(\tfrac{2\pi}{T})t+\boldsymbol{2\pi k}\right)\\ &\overset{\text{Teil a)}}{=} \sin\left(k(\tfrac{2\pi}{T})t\right)=f(t).\end{aligned}$$

1. Aufgabe (Lerncheck)

Zeigen Sie, dass $\cos(k\omega t)$ eine T-periodische Funktion ist, wobei $T>0$ und $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Bemerkung: ω ist der griechische Buchstabe „omega".

2. Aufgabe

a) Seien f und g reelle Funktionen mit Periode T. Zeigen Sie, dass jede Linearkombination

$$G(t)=af(t)+bg(t),\quad a,b\in\mathbb{R}$$

auch T-periodisch ist.

b) Seien f_k und g_k ($k\in\mathbb{N}$) periodische reelle Funktionen mit Periode $T>0$ und $a_k,b_k\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$G_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(a_kf_k(t)+b_kg_k(t))$$

auch eine T-periodische Funktion ist.

9.1.2 Trigonometrische Polynome

Für ein gegebenes $T > 0$ folgt aus dem Beispiel und den Aufgaben zu periodischen Funktionen, dass die Funktion F_n mit $F_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$ eine T-periodische Funktion ist, wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Weil F_n eine Linearkombination von cos und sin mit Vielfachen der Winkel ωt $(0, \omega t, 2\omega t, \ldots, n\omega t)$ ist („analog" zu Polynomen vom Grad n, die Linearkombinationen von Potenzen von x sind $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$), heißen Funktionen dieser Form **trigonometrische** Polynome vom Grad n. Die Definition, die wir benutzen wollen, sieht leicht anders aus. Die Koeffizienten a_0 und b_0 sind wegen der sogenannten Orthogonalitätsrelationen, die im Skript erläutert sind, etwas anders als die restlichen Koeffizienten zu behandeln.

Definition (Trigonometrische Polynome)

Eine Funktion der Gestalt

$$\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

heißt **trigonometrisches Polynom** vom Grad n.

Bemerkungen:

- Man sagt auch trigonometrisches Polynom von der Ordnung n statt vom Grad n.
- Der Koeffizient b_0 taucht nicht in der Definition auf, denn für $k = 0$ ist $\sin(0\omega t) = 0$.
- ϕ ist der griechische Buchstabe „phi".

Beispiel (Trigonometrische Polynom)

Bestimmen Sie die Periode sowie die Koeffizienten a_k, b_k für das trigonometrische Polynom

$$\phi_{\mathbf{2}}(t) = \frac{\pi}{5} + 3\cos(2t) - 6\sin(2t) - 7\cos(4t) + 9\sin(4t).$$

Passen wir $\phi_{\mathbf{2}}(t)$ an die Definition an, wobei $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{2}}(t) &= \tfrac{a_0}{2} && +a_{\mathbf{1}}\cos(\mathbf{1}\cdot\omega t) && +b_{\mathbf{1}}\sin(\mathbf{1}\cdot\omega t) && +a_{\mathbf{2}}\cos(\mathbf{2}\cdot\omega t) && +b_{\mathbf{2}}\sin(\mathbf{2}\cdot\omega t)\\ &= \tfrac{\pi}{5} && +3\cos(\mathbf{1}\cdot\mathbf{2}t) && -6\sin(\mathbf{1}\cdot\mathbf{2}t) && -7\cos(\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}t) && +9\sin(\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}t).\end{aligned}$$

Von daher ist $\omega t = 2t$ oder $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{2}$. Andererseits ist $\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{\boldsymbol{T}}$, so dass $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\pi}$ sein muss. Wir bekommen die Koeffizienten $a_0 = \frac{2\pi}{5}, a_1 = 3, a_2 = -7$ und $b_0 = 0, b_1 = -6, b_2 = 9$.

9.1.3 Reelle Fourierapproximation

Mit der Taylorapproximation im Entwicklungspunkt x_0 wird die k-te Ableitung einer gegebenen (oft genug differenzierbaren) Funktion f verwendet, um die Koeffizienten von $(x - x_0)^k$ des Taylorpolynoms $T_n(x)$ zu bestimmen. Mit dieser Methode stimmen die Werte $f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ überein. Die Approximation ist lokal; d.h. in der Nähe von x_0 sehen f und T_n "ähnlich" aus. Ist T_n ein Polynom, welches nicht konstant ist, ist $\lim_{x\to\pm\infty} T_n(x) = \pm\infty$. Ist f beispielsweise eine beschränkte T-periodische Funktion ist die Frage, ob es sinnvoll ist, f mit einer T-periodischen Funktion zu approximieren.

Bei einer T-periodischen Funktion wiederholt sich die Funktion nach einem Intervall der Länge T, wie in der Definition einer T-periodischen Funktion erklärt wurde. Ist die Funktion integrierbar, so ist der Flächeninhalt über $[0, T]$ derselbe wie über $[T, 2T]$ oder sogar über jedem Intervall der Länge T, wie etwa $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. (Überdenken Sie diese Aussage anhand der Sinus und Cosinus Funktionen.) Es sollte von daher nicht überraschend sein, dass die Koeffizienten einer Approximation mit trigonometrischen Polynomen irgendwie mit dem bestimmten Integral zusammenhängen. Die Herleitung der Formeln ist nicht schwierig, aber zu lang für eine kompakte Einführung in der Theorie. Wer sich für die Details interessiert, dem ist das Skript herzlich empfohlen.

Definition und Formeln (Fourierpolynom; Fourierkoeffizienten)

Eine integrierbare T-periodische reelle Funktion f (d.h. $f(t) = f(t+T)$) führt zu dem zu f zugehörigen trigonometrischen Polynom

$$\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

mit

(1) $\omega := \dfrac{2\pi}{T}$ (2) $b_0 = 0$

(3) $a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt, \ k \in \mathbb{N}$ (4) $b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt, \ k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Das Polynom $\phi_n(t)$ heißt das n-te Fourierpolynom oder auch das Fourierpolynom n-ter Ordnung. Die a_k und b_k heißen Fourierkoeffizienten.

Bemerkungen:

• Die Formel (4) gilt auch für $k = 0$, d.h. (2) $b_0 = 0$:

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(0\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\overbrace{\sin(0)}^{0}dt = \frac{2}{T}\int_0^T 0dt = \frac{2}{T}C\Big|_0^T = \frac{2}{T}C - \frac{2}{T}C = 0$$

Hierbei ist $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Die Formel (2) haben wir extra aufgeschrieben, um $b_0 = 0$ zu betonen.

• Die Grenzen des Integrals sind unwichtig, solange die Differenz zwischen dem oberen und unteren Grenze T beträgt. Dies ist eine Folgerung der Periodizität. Wir können deshalb auch über das Intervall $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ statt $[0, T]$ integrieren, falls dies günstiger ist, wie im nächsten Abschnitt.

Beispiel (Fourierpolynom und Integralberechnung - typische Theorie-Aufgabe)

Das Fourierpolynom 5-ter Ordnung der T-periodischen Funktion f sei gegeben durch

$$\phi_5(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(\boldsymbol{kt})\right) + 2\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(\boldsymbol{kt})\right).$$

a) Ist f eine 4π-periodische Funktion?

b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(3t)dt$.

c) Bestimmen Sie $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{3}}^{\frac{2T}{3}} f(t)\cos t\, dt$.

a) Wegen der Definition eines Fourierpolynoms setzen wir $k\omega t = \boldsymbol{kt}$, d.h. $\omega = 1$. Von daher ist $1 = \omega = \frac{2\pi}{T}$ und es folgt $\boldsymbol{T = 2\pi}$. Von daher ist f eine 2π- also auch $2T = 4\pi$-periodische Funktion.

b) Für diese Teilaufgabe benutzen wir die Formel für b_3 (Formel (4) auf Seite 132), weil es sich um einen Koeffizienten vor $\sin(kt)$, $k = 3$ handelt.

Aus der Definition eines Fourierpolynoms folgt $\boldsymbol{b_3} = \boldsymbol{\frac{2}{T}}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(3t)dt$, wobei b_3 der Koeffizient vor $\sin(3t)$ in $\phi_5(t)$ ist (also $b_3 = 2\frac{(-1)^{3+1}}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$). Diese Gleichung lösen wir für $\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(3t)dt$:

$$\int_0^T f(t)\sin(3t)dt = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}} = \frac{2}{3}\frac{\boldsymbol{2\pi}}{2} = \frac{2}{3}\pi.$$

c) Aus Teilaufgabe a) folgt $\frac{1}{\pi} = \frac{2}{T}$. Das Integral wird über das Interval $[-\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}]$ der Länge $T = 2\pi$ betrachtet. Weil f und $\cos(t)$ beide T-periodisch sind, so ist auch das Produkt $f \cos(t)$ T-periodisch. Von daher macht es keinen Unterschied, ob $f \cos(t)$ über $[-\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}]$ oder $[0, T]$ integriert wird (wie bereits vor der Definition eines Fourierpolynoms erklärt wurde):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-T/3}^{2T/3} f(t)\cos t\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/3}^{2T/3} f(t)\cos t\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\cos t\,dt.$$

Die rechte Seite ist Formel (3) für $\omega = k = 1$ auf Seite 132. Dies entspricht $a_1 = 4\left(\frac{(-1)^1}{1^2}\right) = -4$, d.h.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-T/3}^{2T/3} f(t)\cos t\,dt = -4.$$

Beispiel (Bestimmung von Fourierpolynomen)

Gegeben sei die 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{für} \quad 1 \le t < 2 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die zu f zugehörigen Fourierpolynome $\phi_0(t), \phi_1(t), \ldots, \phi_5(t)$.

Weil $T = 2$ ist, ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Die Fourierkoeffizienten a_k sind nach der Definition

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt \\ &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(k\pi t)dt \\ &= \int_0^1 1\cdot\cos(k\pi t)dt + \int_1^2 (-1)\cdot\cos(k\pi t)dt. \end{aligned}$$

Bei der Integration von $\cos(k\pi t)$ muss durch $k\pi$ geteilt werden. Für $k = 0$ ist das jedoch nicht möglich. Deshalb behandeln wir die a_k's weiter für die Fälle $k = 0$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\underline{k = 0}$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 1\cdot\cos(0\pi t)dt + \int_1^2 (-1)\cdot\cos(0\pi t)dt \qquad [\cos 0 = 1] \\ &= \int_0^1 1dt + \int_1^2 (-1)dt \\ &= x|_0^1 + (-x)|_1^2 = 1 - 0 + (-2) - (-1) = 0 \end{aligned}$$

$\underline{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 \cos(k\pi t)dt + \int_1^2 (-\cos(k\pi t))dt \\ &= \left.\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right|_0^1 + \left.\frac{-\sin(k\pi t)}{k\pi}\right|_1^2 \\ &= \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} - \frac{\sin(0)}{k\pi} - \left(\frac{\sin(2k\pi)}{k\pi} - \frac{\sin(k\pi)}{k\pi}\right) \qquad [\sin(k\pi) = 0] \text{ für } k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Allgemeinen gilt: ist die Funktion f ungerade, dann ist die Funktion $f \cdot \cos$ auch ungerade, weil $\cos$ ja eine gerade Funktion ist. Genau wie in diesem Beispiel werden die $a_k's$ ($k \in \mathbb{N}$) alle Null sein (vergl. (Abschnitt 9.1.4)).

Wir wissen, dass $b_0 = 0$. Es bleibt, b_k für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zu bestimmen:

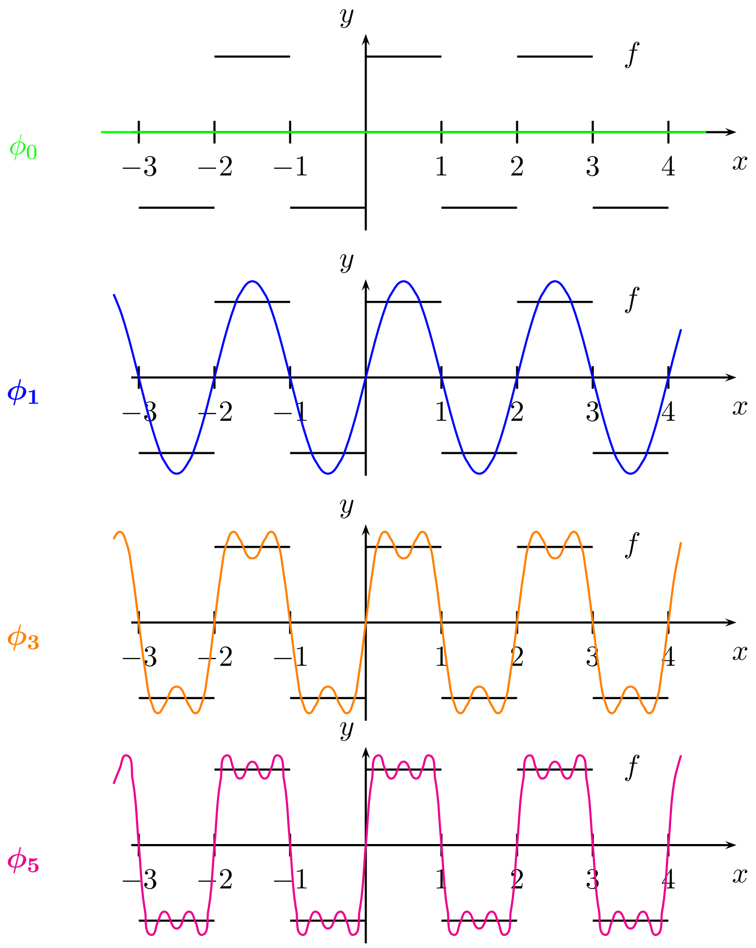
$$\begin{aligned}
b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt &= \int_0^2 f(t)\sin(k\pi t)dt \\
&= \int_0^1 \sin(k\pi t)dt + \int_1^2 (-1)\sin(k\pi t)dt \\
&= \frac{-\cos(k\pi t)}{k\pi}\bigg|_0^1 + \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\bigg|_1^2 \\
&= \frac{-\cos(k\pi)}{k\pi} - \frac{-\cos(0)}{k\pi} + \frac{\cos(2k\pi)}{k\pi} - \frac{\cos(k\pi)}{k\pi} \qquad [\cos(2k\pi) = 1] \\
&= \frac{-2\cos(k\pi)}{k\pi} + \frac{2}{k\pi}.
\end{aligned}$$

Ist k gerade, so ist $\cos(k\pi)$ gleich 1 und die Fourierkoeffizient b_k ist 0. Für k ungerade ist $\cos(k\pi)$ gleich -1, d.h. $b_k = \frac{4}{k\pi}$. Die Fourierpolynome $\phi_0(t), \ldots, \phi_5(t)$ von f sind nun ganz explizit:

$$\phi_0(t) = 0 \qquad \phi_1(t) = \frac{4}{\pi}\sin(\pi t)$$

$$\phi_2(t) = \frac{4}{\pi}\sin(\pi t) \qquad \phi_3(t) = \frac{4}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi t)$$

$$\phi_4(t) = \frac{4}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi t) \qquad \phi_5(t) = \frac{4}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\pi t).$$



Wir sehen, dass die Form von ϕ_1 der Funktion f viel mehr ähnelt als ϕ_0. Die Funktionen ϕ_3 und ϕ_5 sind noch bessere Approximierungen von der Funktion f.

9.1.4 Vereinfachung bei geraden bzw. ungeraden Funktionen

Bei geraden und ungeraden Funktionen ist es vorteilhaft, über $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ zu integrieren, um die Berechnung der Fourierkoeffizienten a_k, b_k zu vereinfachen. Wegen der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals (Flächeninhalt) gelten die folgenden Aussagen.

- Ist g eine **gerade** Funktion (d.h. $g(t) = g(-t)$), so ist die Funktion achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse. Von daher gilt
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)dt = 2\int_0^{\frac{T}{2}} g(t)dt.$$
Das prototypische Beispiel einer geraden Funktion ist die 2π-periodische Funktion $\cos(t)$.

- Ist u eine **ungerade** Funktion (d.h. $u(t) = -u(-t)$), so ist u punktsymmetrisch und damit
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)dt = 0.$$
Das prototypische Beispiel einer ungeraden Funktion ist die 2π-periodische Funktion $\sin(t)$.

Bei der Bestimmung der Fourierkoeffizienten a_k und b_k von f (reell, T-periodisch, integrierbar), wird f mit $\cos$ oder mit $\sin$ multipliziert. Falls f selbst gerade oder ungerade ist, kann viel unnötige Arbeit gespart werden, wie die folgenden Überlegungen aufzeigen.

Das Produkt von zwei geraden Funktionen g_1, g_2 bzw. zwei ungeraden Funktionen u_1, u_2 ist eine gerade Funktion:
$$(g_1g_2)(-t) = g_1(-t)g_2(-t) = g_1(t)g_2(t) = (g_1g_2)(t),$$
$$(u_1u_2)(-t) = u_1(-t)u_2(-t) = (-u_1(t))(-u_2(t)) = (u_1u_2)(t).$$
Das Produkt von einer geraden Funktion g mit einer ungeraden Funktion u ergibt eine ungerade Funktion:
$$(gu)(-t) = g(-t)u(-t) = (g(t))(-u(t)) = -(gu)(t).$$

Diese Beobachtung wollen wir in einen für uns wichtigen Rahmen der Fourierpolynomen zusammenfassen.

Lemma (Vereinfachung bei geraden und ungeraden Funktionen)

- Ist f **gerade**, dann ist (f **cos**) gerade und (f **sin**) ungerade. Die Fourierkoeffizienten des n-ten Fourierpolynoms sind gegeben durch
$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt, \qquad b_k = 0$$
für $k = 0, 1, \ldots, n$.

- Ist f **ungerade**, dann ist (f **cos**) ungerade und (f **sin**) gerade. Die Fourierkoeffizienten des n-ten Fourierpolynoms sind gegeben durch
$$a_k = 0, \qquad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt$$
für $k = 0, 1, \ldots, n$.

Beispiel (Fourierpolynom einer geraden Funktion)
Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, das n-te Fourierpolynom zu der 2π-periodischen Funktion mit

$$\boldsymbol{f(t) = t\cos(t)},\ -\pi \leq t < \pi,$$

d.h. die 2π-periodische Fortsetzung von f.

Wir betrachten die Faktoren der Funktion f. Weil $u(t) = t$ eine ungerade Funktion ist und $g(t) = \cos(t)$ eine gerade Funktion ist, ist $f(t) = u(t)g(t)$ eine ungerade Funktion, sodass $\boldsymbol{a_k = 0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die Länge der Periode ist $\boldsymbol{T = 2\pi}$. Daraus folgt $\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T} = 1}$.

Zuerst berechnen wir b_1, denn b_0 kennen wir schon ($b_0 = 0$). Hierfür verwenden wir die Formel in dem vorangehenden Lemma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b_1} &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \boldsymbol{t\cos(t)}\,\boldsymbol{\sin(\omega t)}dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(t)\sin(t)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\overbrace{\left[t\cdot\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin^2(t)}{2}dt}^{v\cdot u-\int v'u}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[0-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin(2t)\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \cdots\text{(nachrechnen!)} = -\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\omega}$ einsetzen

partielle Integration mit
$u' = \cos(t)\sin(t)$, $v = t$,
$u = \frac{\sin^2(t)}{2}$, $v' = 1$
[u wurde mit Substitution ($x = \sin(t)$) bestimmt.]

Integrationsformel
$$\int \sin^2(t)dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + C$$

Um die $b_k's, 2 \leq k \leq n$, zu bestimmen, gehen wir wie bei b_1 vor. Hier benötigen wir die Integrationsformel für die partielle Integration.

Lemma (Integrationsformel)
Für $r, s \in \mathbb{N}\setminus 0\ r^2 \neq s^2$ gilt

$$\int \cos(rx)\sin(sx)dx = -\frac{\cos((s-r)x)}{2(s-r)} - \frac{\cos((s+r)x)}{2(s+r)} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Für $k \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} t\cos(t)\sin(k\omega t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(t)\sin(kt)dt \\
&\overset{*}{=} \frac{2}{\pi}\left(\left[-t\left(\frac{\cos((k-1)t)}{2(k-1)} - \frac{\cos((k+1)t)}{2(k+1)}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left[-\frac{\cos((k-1)t)}{2(k-1)} - \frac{\cos((k+1)t)}{2(k+1)}\right]dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos((k-1)\pi)}{2(k-1)} - \frac{\pi\cos((k+1)\pi)}{2(k+1)} + \left[\frac{\sin((k-1)t)}{2(k-1)^2} + \frac{\sin((k+1)t)}{2(k+1)^2}\right]_0^{\pi}\right) \\
&\cdots \text{ (nachrechnen!)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos((k-1)\pi)}{2(k-1)} - \frac{\pi\cos((k+1)\pi)}{2(k+1)} + 0\right)$$

$\cdots$ (nachrechnen!)

$$= \frac{(-1)^k 2k}{k^2-1}.$$

$*$ Gleichung (19) mit $r = 1, s = k$. Weiter wird hier partielle Integration angewandt.

Das n-te Fourierpolynom ist von daher $\phi_n(t) = -\frac{1}{2}\sin(t) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k 2k}{k^2-1}\sin(kt)$.

3. Aufgabe (Fourierpolynom)

Bestimmen Sie das n-te Fourierpolynom $\phi_n(t)$ der π-periodischen Funktion f mit

a) $f(t) = \sin t, t \in [0, \pi[$,

b) $f(t) = \cos t, t \in [0, \pi[$.

Hinweis: Nutzen Sie die Integrationsformel auf Seite 136.

9.2 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 9. Kapitel

1. Aufgabe

Folgen Sie den Schritten wie im ersten Beispiel und in der ersten Aufgabe.

2. Aufgabe

a) Sei $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G(t+T) &= a\boldsymbol{f(t+T)} + b\boldsymbol{g(t+T)} \\ &= a\boldsymbol{f(t)} + b\boldsymbol{g(t)} \\ &= G(t), \end{aligned}$$

weil f und g jeweils T-periodisch sind.

b) Sei $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G_n(t+T) &= \sum_{k=0}^{n}(a_k f_k(t+T) + b_k g_k(t+T)) \\ &\overset{\text{Teil a)}}{=} \sum_{k=0}^{n}(a_k f_k(t) + b_k g_k(t)) \\ &= G_n(t), \end{aligned}$$

also ist G_n eine T-periodische Funktion.

3. Aufgabe

a) Die Funktion f ist gerade ($b_k = 0$, für alle k) mit Periode $T = \pi$ und $\omega = 2$. (Dies ist anders als bei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin t$, weil f nur π- und nicht 2π-periodisch ist. Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an, um sich dies klar zu machen.)

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin t dt = \frac{4}{\pi} \quad \left(\text{d.h. } \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}\right)$$

Für $k = 1, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(2kt) dt \\
&= \frac{4}{\pi} \left[-\frac{\cos((1-2k)t)}{2(1-2k)} - \frac{\cos((1+2k)t)}{2(1+2k)} \right]_0^{\pi/2} \quad \text{[Integrationsformel (19) auf Seite 136]} \\
&\vdots \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k} \right) \right) \\
&\vdots \\
&= \frac{4}{\pi(1-4k^2)}.
\end{aligned}
$$

Das n-te Fourierpolynom ist durch $\phi_n(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2kt)}{1-4k^2}$ gegeben.

b) Die Funktion ist ungerade ($a_k = 0$, für alle k) mit $T = \pi, \omega = 2$.

Für $k = 1, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \sin(2kt) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos((2k-1)t)}{2(2k-1)} - \frac{\cos((2k+1)t)}{2(2k+1)} \right]_0^{\pi} \quad \text{[Integrationsformel (19) auf Seite 136]} \\
&\vdots \\
&= \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}.
\end{aligned}
$$

Das gesuchte Fourierpolynom ist $\phi_n(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{k \sin(2kt)}{4k^2-1}$.

Falls Sie Fragen zu diesem Blatt haben, schreiben Sie uns im Moses-Forum unter Analysis I für Ingenieure.

10 Unendliche Reihen

Motivation

Es gibt zwei relevante Gründe, warum ein sicherer Umgang mit unendlichen Reihen vorteilhaft ist.

(a) Unendliche Reihen bieten eine weitere nützliche Integrationsmethode für einige Funktionen an, die nicht mit den uns bisher bekannten Methoden gelöst werden können. Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{(x^2)}$ weder mit Partialbruchzerlegung, Substitution noch partieller Integration zu knacken.

(b) Manche Differentialgleichungen, die in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften vorkommen, haben unendliche Reihen als Lösungen. Die Airy-Gleichung $y'' - ty = 0$ modelliert beispielsweise die Lichtbeugung. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind Linearkombinationen der Funktionen

$$y_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)(3k))}, \quad y_2(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k+1}}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots((3k)(3k+1))}.$$

Es ist nicht unser Ziel, zu erklären, wie man diese Lösungen findet und die tiefere Bedeutung dieser Lösungen, denn das ist ein Thema in einem Kurs über Differentialgleichungen. Hier genügt es uns zu verstehen, was eine unendliche Summe ist. Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergieren die Lösungen? Wie können wir die Lösungen prüfen?

Um Konvergenz für unendliche Reihen zu verstehen, ist es wichtig zu wissen, was eine Folge ist. Wiederholen Sie ggf. das Thema (z.B. mit dem Projekt UNITUS-Blatt „Zahlenfolgen, Konvergenz und Konvergenzbeweise“ zum Abschnitt 3.1 des Skripts auf der ISIS-Seite).

Dieses Kapitel enthält:

- Grundlagen von Reihen mit reellen Summanden,
- Beschreibung von häufig angewendeten Konvergenzkriterien mit Beispielen für die Grundtechniken,
- Zusammenfassung und Strategien,
- Funktionenreihen, Potenzreihen,
- Aufgaben zum Üben mit vollständigen Lösungen.

Hier werden die Inhalte vom Abschnitt 10.1 und Abschnitt 10.2 des Skripts zunächst zusammengefasst. Danach wird Abschnitt 10.3 behandelt.

10.1 Reihen mit konstanten Gliedern und

10.2 Konvergenzkriterien

Definition (Reihe; Partialsumme)

Aus einer reellen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kann eine **unendliche Reihe** als eine unendliche Summe der Folgenglieder $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ definiert werden. Die unendliche Reihe bezeichnen wir mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$

Aus der unendlichen Reihe kann wiederum eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert werden, in dem man

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

setzt, die sogenannten **Partialsumme**.

Definition (Konvergenz einer Reihe)

Konvergenz für eine unendliche Reihe bedeutet, dass die Folge der Partialsummen gegen einen bestimmten Wert $c \in \mathbb{R}$ konvergiert. Falls $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = c$ gilt, setzen wir $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = c$.

Beispiel (Partialsummen; divergente Reihe)

Bestimmen Sie die Partialsummen $s_0, \ldots, s_5$ der unendlichen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k$. Konvergiert die Reihe?

Nach der Definition sind die Partialsummen s_k für $k = 0, \ldots, 5$:

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, & s_3 &= 0+1+2+3 = 6, \\ s_1 &= 0+1 = 1, & s_4 &= 0+1+2+3+4 = 10, \\ s_2 &= 0+1+2 = 3, & s_5 &= 0+1+2+3+4+5 = 15. \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen $0, 1, 3, 6, 10, 15\ldots$ ist bestimmt divergent, denn der Abstand zwischen s_k und s_{k-1} ist $s_k - s_{k-1} = k$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = \infty$, also ist die gegebene Reihe nicht konvergent, d.h. die Reihe ist divergent.

Beispiel (Partialsummen; divergente Reihe)

Bestimmen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ konvergiert.

In manchen Beispielen lohnt es sich auch die Summanden einmal hinzuschreiben. So ist in diesem Beispiel zu sehen, dass sich die Summanden gegenseitig aufheben. Für ein gerades $n_1 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} s_{n_1} = \sum_{k=0}^{n_1}(-1)^k =& (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{n_1-2} + (-1)^{n_1-1} + (-1)^{n_1} \\ =& (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots + (1 + (-1)) + 1 \\ =& 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Für ein ungerades $n_2 \in \mathbb{N}$ gilt jedoch

$$\begin{aligned} s_{n_2} = \sum_{k=0}^{n_2}(-1)^k =& (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{n_2-1} + (-1)^{n_2} \\ =& (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots + (1 + (-1)) \\ =& 0 + 0 + \cdots + 0 = 0. \end{aligned}$$

Daran sieht man, dass die Reihe nicht konvergent ist, da die Folge der Partialsummen $(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ divergent ist.

Die zwei oben stehenden Beispiele haben etwas gemeinsam. Die Folge der Summanden der Reihe ist jeweils keine Nullfolge (eine Folge die gegen Null konvergiert). Im Allgemeinen ist dies eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe, wie das nächste Lemma besagt.

Lemma (Summanden der Reihe bilden eine Nullfolge)

Eine notwendige Eigenschaft, die für jede konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ gilt, ist dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein muss.

Ist (a_k) keine Nullfolge, so kann die Reihe nicht konvergent sein. Die Divergenz der zwei eben gesehenen Beispiele, die wir ausführlich präsentiert haben, um die Begriffe von Reihen und Partialsummen zu verdeutlichen, wären in einer Prüfungssituation mit dem Lemma einfach und schnell begründet:

$$(k)_{k\in\mathbb{N}} = 0, 1, 2, \ldots \text{ ist keine Nullfolge, also ist } \sum_{k=0}^{\infty} k \text{ divergent.}$$

$$((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}} = 1, -1, 1, -1, \ldots \text{ ist keine Nullfolge, also ist } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent.}$$

In vielen Anwendungen und Aufgaben ist es wichtig zu bestimmen, ob eine Reihe konvergiert oder nicht. Wenn die Folge der Summanden (a_k) keine Nullfolge ist, wissen wir, dass die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht konvergieren kann. Ist (a_k) jedoch eine Nullfolge, müssen wir immer noch die Reihe auf Konvergenz untersuchen, da die Nullfolge nur ein notwendiges aber kein hinreichendes Kriterium darstellt. Zum Beispiel divergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

während die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

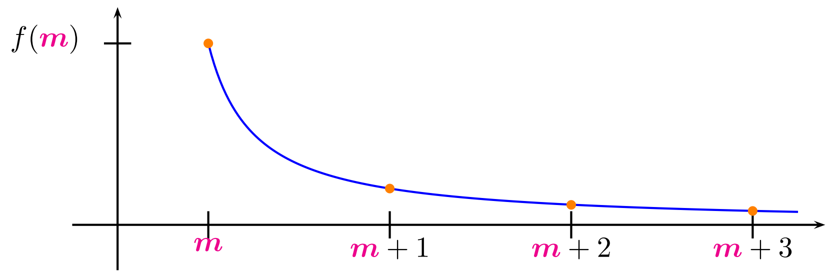
konvergiert, obwohl $(\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ und $(\frac{1}{k^2})_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ beide monoton fallende Nullfolgen sind. [7] Die Beweise hierfür basieren auf dem folgende Kriterium, das auch im Skript zu finden ist.

Lemma (Reihen-Integral-Kriterium)

Sei $f : [m, \infty[\,, m \in \mathbb{N}$ eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [m, \infty[$. Dann existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_m^{\infty} f(x)dx$ genau dann, wenn $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ konvergiert.

„Genau dann, wenn" heißt hier: Entweder konvergieren beide (das uneigentliche Integral und die unendliche Reihe) gegen einer Zahl oder beide divergieren.

Die Werte der Funktion f müssen für ganzzahlige x-Werte größer gleich m mit den Reihenglieder übereinstimmen, wie im folgenden Bild zu sehen ist.



$f(x)$ für $x \geq m$ und $f(k)$ für $k \geq m$

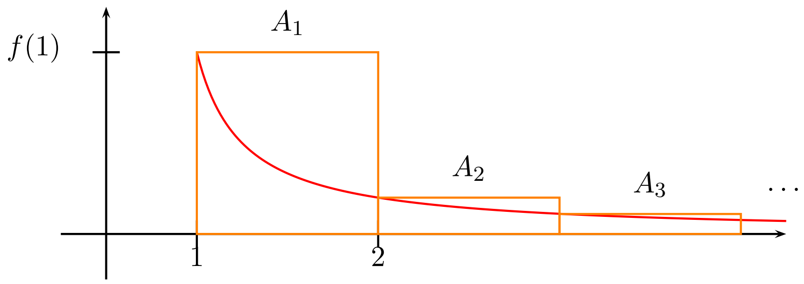
Das Kriterium lässt sich (heuristisch) so erklären. Wir fangen mit dem Fall eines divergenten uneigentlichen Integrales an, wobei der Flächeninhalt zwischen der Kurve f (monoton fallende, nichtnegative Funktion) und der x-Achse auf $]m, \infty[$ unendlich ist. (Der Einfachheit halber setzen wir $m = 1$.)

[7]D.h. nur weil die Folge der Summanden (a_k) eine Nullfolge ist, muss die Folge der partiellen Summen (s_k) nicht notwendigerweise konvergieren. Deshalb stellt das Lemma eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung dar.

Nun betrachten wir die grafische Darstellung der unendlichen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \cdot 1.$$

Für jede Zahl $k \geq 1$ setze $A_k = f(k) \cdot 1$, der Flächeninhalt des **Rechtecks** mit Länge $f(k)$ (der Funktionswert am linken Randpunkt des Intervalls) und Breite 1.



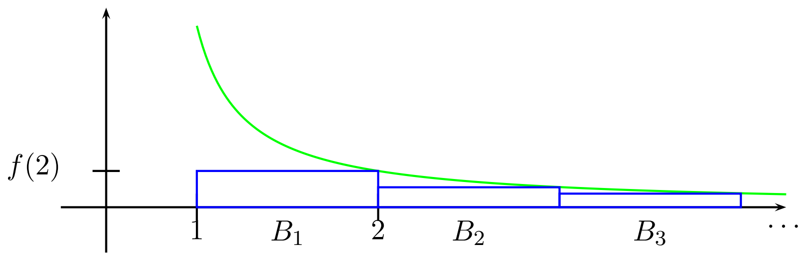
Das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ divergiert nach Voraussetzung gegen unendlich.

Der Flächeninhalt von jedem Rechteck A_i ist größer als der Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse auf dem Intervall $[i, i+1]$. Nach Voraussetzung ist der Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse auf dem Intervall $[1, \infty[$ unendlich. Die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ kann deshalb nicht endlich sein. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ muss also divergieren.

Andersrum nehmen wir an, dass der Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse auf dem Intervall $[1, \infty[$ endlich ist, d.h. $\int_1^{\infty} f(x)dx = F$, wobei F eine reelle Zahl ist. Diesmal wird die unendliche Reihe so dargestellt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \cdot 1.$$

Die Länge eines Rechtecks wird von dem Funktionswert am rechten Randpunkt des Intervalls bestimmt. Setze $B_i = f(i+1) \cdot 1$ für $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.



Das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergiert nach Voraussetzung gegen $F \in \mathbb{R}$.

Offensichtlich gilt die Ungleichung

$$0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} B_k \leq F,$$

womit $\sum_{k=2}^{\infty} B_k$ eine reelle Zahl ist. Weil $f(1)$ auch eine reelle Zahl ist, ist die ursprüngliche Reihe

$$f(1) + \sum_{k=2}^{\infty} B_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

auch eine reelle Zahl, also konvergent.

Beispiel (harmonische Reihe; Reihen-Integral-Kriterium)

Zeigen Sie, dass die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ divergent ist.

Wir setzen $m = 1$ und wählen eine Funktion f aus, sodass $f(k) = a_k = \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq m$. Die Funktion

$$f : [1, \infty[\,, x \mapsto \frac{1}{x}$$

erfüllt diese Bedingung. Ferner gilt $f(x) > 0$ für $x \geq 1$. Die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ist durch

$$f'(x) = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

gegeben und dies ist negativ für $x \geq 1$, wodurch wir erkennen können, dass f monoton fallend ist. Das Reihen-Integral-Kriterium kann also angewendet werden. Wir untersuchen nun die Existenz des uneigentlichen Integrals:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{b \to \infty} [\ln |x|]_1^b \\ &= \lim_{b \to \infty} (\ln(b) - \ln(1)) \\ &= \lim_{b \to \infty} \ln(b) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert nicht, also konvergiert die harmonische Reihe nicht.

Beispiel (Konvergenz und das Reihen-Integral-Kriterium)

Zeigen Sie, dass die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ konvergent ist.

Wir setzen $m = 1$ und wählen eine Funktion f aus, sodass $f(k) = a_k = \frac{1}{k^2}$ für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq m$. Die Funktion

$$f : [1, \infty[\,, x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

erfüllt diese Bedingung. Ferner gilt $f(x) > 0$ für $x \geq 1$. Die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ ist durch

$$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

gegeben und diese ist negativ für $x \geq 1$, wodurch wir erkennen können, dass f monoton fallend ist. Das Reihen-Integral-Kriterium kann also angewendet werden. Wir untersuchen nun die Existenz des uneigentlichen Integrals:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b \\ &= \lim_{b \to \infty} (-\frac{1}{b} - (-1)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral konvergiert, also konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Beispiel (Variante der harmonischen Reihe; Indexverschiebungsmethode)

Bestimmen Sie, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2}$ konvergiert.

Diese Reihe ähnelt auf den ersten Blick sehr der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, von der wir wissen, dass sie divergiert [siehe oben]. Es wäre möglich, das Reihen-Integral-Kriterium wiederum anzuwenden (dies können Sie natürlich als eine kleine Übung tun). Hier möchten wir Sie aber mit einer anderen Technik vertraut machen. Schreibt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ durch Indexverschiebung um zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ändert dies nichts an den Konvergenzeigenschaften.

Nehmen wir nun an die Reihe der a_k konvergiert mit dem Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}$. Dann würde die harmonische Reihe gegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} + A$$

konvergieren. Allerdings wissen wir, dass die harmonische Reihe divergiert. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. Damit muss diese Reihe divergieren, wie die harmonische Reihe.

Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k.$$

Da $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge ist, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ entweder $a_k \leq a_{k+1} \leq 0$ oder $0 \leq a_{k+1} \leq a_k$. Die Folgeglieder sind dementsprechend monoton steigend bzw. fallend.
Mit alternierend ist das wechselnde Vorzeichen gemeint. Hat jedes Folgenglied ein anderes Vorzeichen als sein direkter Vorgänger, so ist die Reihe alternierend.
Dieses Kriterium kann angewendet werden, wenn in den Summanden ein $(-1)^k$ vorkommt und man leicht zeigen kann, dass $|a_k|$ eine monotone Nullfolge ist.

Beispiel (Alternierende harmonische Reihe; Leibniz-Kriterium)

Zeigen Sie, dass die **alternierende harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert.

Die Folge der Summanden $(a_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} = (\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ist eine Nullfolge, denn $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Sie ist monoton fallend, weil für alle $k \geq 1$ gilt $k < k+1$, d.h. $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ oder $a_{k+1} < a_k$. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe.

Wir haben vorher die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 1$$

betrachtet. Obwohl die Reihe alternierend ist, kann man hier nicht das Leibniz-Kriterium anwenden, da die Folge $a_k = 1$ keine Nullfolge ist.

Nimmt die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Form q^k an für ein festes $q \in \mathbb{R}$, kann nicht nur die Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ untersucht werden, sondern auch der Grenzwert der Summe berechnet werden.

Lemma (Geometrische Reihe)

Sei $q \in \mathbb{R}$. Die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| \geq 1$.

Wir haben schon gesehen, dass $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ divergent ist, weil $((-1)^k)$ keine Nullfolge ist. Diese Reihe ist auch eine geometrische Reihe mit $q = -1$, sodass sie auch als geometrische Reihe betrachtet, divergent ist.

Beispiel (Geometrische Reihe)

Bestimmen Sie die Summe der unendlichen Reihe $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k$.

In diesem Beispiel ist die Reihe eine geometrische Reihe mit $q = \frac{3}{5}$. Weil $|q| < 1$, konvergiert die Reihe. Diese fängt aber bei $k = 2$ und nicht bei Null (wie im Lemma) an. Aus dem Lemma mit $\frac{3}{5}$ eingesetzt für q folgt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Wir formen so um, dass wir die Reihe im Beispiel bekommen

$$\frac{5}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k = \left(\frac{3}{5}\right)^0 + \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k = 1 + \frac{3}{5} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{8}{5} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k.$$

Von daher ist

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{5}{2} - \frac{8}{5} = \frac{25-16}{10} = \frac{9}{10}.$$

Ein weiteres Kriterium, das bei Konvergenzuntersuchungen sehr nützlich sein kann, ist das Quotientenkriterium. Der Beweis hierzu ist im Skript zu finden. Das Quotientenkriterium ist für den nächsten Abschnitt (Potenzreihen) unverzichtbar und es wird deshalb empfohlen, dass Sie so schnell wie möglich lernen, wie dieses Kriterium angewendet wird.

Satz (Quotientenkriterium)

Für die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimme man

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

- Ist der Grenzwert < 1, so ist die Reihe konvergent.
- Ist der Grenzwert > 1, so ist die Reihe divergent.
- Ist der Grenzwert $= 1$ oder existiert er nicht, so gibt das Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz dieser Reihe.

Das Quotientenkriterium lässt sich in den meisten Fällen leicht handhaben, jedoch hilft es einem nicht immer weiter. Man braucht ein bisschen Übung um zu erkennen, ob das Quotientenkriterium funktionieren könnte. Taucht jedoch in den Folgengliedern $k!$ oder das k im Exponenten auf, so ist es oft ratsam dieses Kriterium auszuprobieren.

Beispiel (Quotientenkriterium)

a) Bestimmen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert.

b) Bestimmen Sie, ob $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

a) Für die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ gilt also ($a_k = \frac{1}{k!}$)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1/(k+1)!}{1/k!}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)\cdot k!} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = 0.$$

Der Grenzwert ist kleiner als 1. Somit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

b) Ist $x = 0$, so konvergiert die Reihe und die Summe ist 0. Angenommen $x \neq 0$. Da in den Folgengliedern der Summe ein $(2k)!$ auftaucht, versuchen wir hier das Quotientenkriterium zu verwenden. Hierzu betrachtet man

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}}{(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k}\right|\cdot\left|\frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}\cdot\frac{(2k)!}{x^{2k}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} 1\cdot\left|\frac{\cancel{x^{2k}}\cdot x^2}{\cancel{x^{2k}}}\cdot\frac{(2k)!}{(2k+2)!}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^2\cdot\cancel{(2k)}\cdot\cancel{(2k-1)}\cdot\dots\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot\cancel{(2k)}\cdot\cancel{(2k-1)}\cdot\dots\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2k+1)\cdot(2k+2)}\right|.
\end{aligned}$$

Für ein beliebiges aber festes $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ konvergiert der Bruch für $k \to \infty$ gegen 0. Damit ist der Grenzwert kleiner als 1 und die Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ nach dem Quotientenkriterium.

Bemerkungen:

• Dieser Rechenweg ist hier nur für das leichtere Verständnis der Aufgabe aufgeschrieben. Der Schritt von der 1. zur 2. Zeile ist ein wichtiger Standardtrick, den man sich merken sollte. Noch schneller geht es so:

$$\lim_{k\to\infty}\left|a_{k+1}\cdot\frac{1}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left||a_{k+1}|\cdot\frac{1}{|a_k|}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}\cdot\frac{(2k)!}{x^{2k}}\right|$$

Die Faktoren $(-1)^k$ und $(-1)^{k+1}$ in a_k und a_{k+1} sind wegen dem Betrag immer 1. Ferner ist $\frac{1}{a_k}$ einfach der Kehrwert von a_k. So haben wir schon eine Menge Schreibarbeit gespart.

Wenn man sich gut mit Fakultäten auskennt und auch ohne alle Schritte in den letzten drei Zeilen auskommt, braucht man sie selbst natürlich nicht alle aufzuschreiben. Vorallem zur Klausur ist es ratsam einige Schritte wegzulassen, um Zeit zu sparen. Eigentlich kann man direkt von der 2. auf der 5. Zeile kommen. Hier muss man allerdings vorsichtig sein, weil viele Flüchtigkeitsfehler entstehen können.

• Die Reihe stellt die Potenzreihenentwicklung von $\cos x$ zum Entwicklungspunkt 0 da. Hieran sieht man also, dass die Potenzreihe vom $\cos(x)$ für jeden Wert konvergent ist.

Noch ein weiteres Kriterium, das häufig eingesetzt werden kann, ist das sogenannte Majorantenkriterium.

Satz (Majorantenkriterium $=$ Vergleichskriterium)

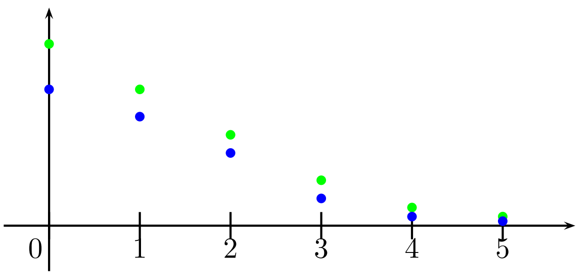
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei konvergent, und es gelte

$$|a_k| \leq b_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

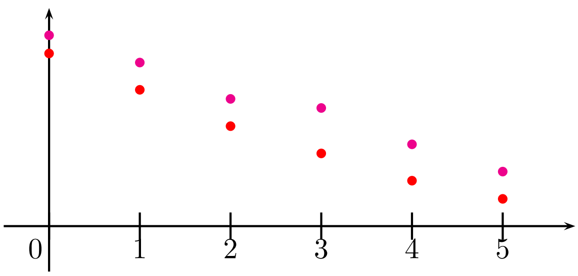
Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

(Es reicht auch aus, wenn ab einem $k_0 \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq k_0$.)

Muss man für eine Reihe überprüfen, ob sie konvergiert, so reicht es nach dem *Majorantenkriterium* eine konvergente Reihe zu finden, deren Folgenglieder b_k alle größer sind als die $|a_k|$.



Andersrum funktioniert dieses Kriterium genauso. Findet man eine divergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, deren Summanden $b_k \geq 0$ alle kleiner sind als die $|a_k|$, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent. Dieses Kriterium nennt man das *Minorantenkriterium*.



Beispiel (Majorantenkriterium)

Bestimmen Sie jeweils, ob die Reihen konvergieren:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \text{ für } n \geq 2, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^4 + 2k^2 + 1}}.$$

a) Der Fall $n = 2$ wurde schon behandelt (siehe Seite 143). Für die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \qquad n > 2$$

gilt $0 < a_k := \frac{1}{k^n} \leq \frac{1}{k^2} := b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Also konvergieren die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, $n > 2$ nach dem Majorantenkriterium.

b) Wähle $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k^4 + 2k^2 + 1}}$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Formt man die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ um, erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^4 + 2k^2 + 1}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(k^2 + 1)^2}} && \text{[binomische Formel]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $b_k := \frac{1}{k^2}$ konvergiert [siehe oben]. Da sich die beiden Reihen ähneln, vergleichen wir sie wieder. Dazu betrachten wir

$$0 < a_k = \frac{1}{k^2 + 1} \leq \frac{1}{k^2} = b_k.$$

Wir haben eine konvergente Reihe $\sum b_k$ gefunden, deren Folgenglieder alle größer oder gleich den (positiven) Folgengliedern der Reihe $\sum a_k$ sind. So wissen wir, dass die Reihe nach dem Majorantenkriterium konvergiert.

Bemerkung: Für unendliche Reihen mit komplexen Summanden kann Konvergenz wie im reellen Fall definiert werden. Alle Kriterien bis auf das Leibniz-Kriterium gelten auch im Komplexen.

Definition (Absolute Konvergenz)

Konvergiert die Reihe $\sum |a_k|$, so heißt die Reihe $\sum a_k$ **absolut konvergent**.

Bemerkungen:

• Nach dem Majorantenkriterium (oder Vergleichskriterium) ist eine absolut konvergierende Reihe $\sum a_k$ auch konvergent im gewöhnlichen Sinn.

• Nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent. Das prototypische Beispiel hierfür ist die alternierende harmonische Reihe. Diese ist konvergent, jedoch nicht absolut konvergent, denn die harmonische Reihe divergiert.

• Der Betrag von a_k heißt auf englisch „the absolute value of a_k“. „Absolut“ bedeutet also betragsmäßig.

Zusammenfassung wichtiger Reihen

Konvergente Reihen	Divergente Reihen
geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k,\ \lvert q\rvert < 1$	geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k,\ \lvert q\rvert \geq 1$
alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$	harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$
Riemannsche Zetafunktion $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^s},\ s > 1$	Riemannsche Zetafunktion $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^s},\ s \leq 1$

Checkliste zur Bestimmung von Konvergenz/Divergenz von unendlichen Reihen

Bisher wurden in diesem Blatt einige Kriterien präsentiert, die zur Untersuchung der Konvergenz einer Reihe nützlich sein können. Ohne ausreichende Erfahrung, ist es meistens nicht sofort klar, welche Kriterien für die gegebene Aufgabe am geeignetsten sind. Hier ist eine Liste, die Ihnen helfen könnte, die gewünschte Erfahrung (hoffentlich) vor der Klausur zu sammeln. Bitte vergessen Sie nicht die Aufgaben auszuprobieren, nachdem Sie die Schritte eingehend studiert haben. Die Liste allein ersetzt die Erfahrung nicht!

1. Schritt Ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine bekannte Reihe oder ein Vielfaches oder eine Variante davon? (Siehe Tabelle oben.) Oft kann man bei ähnlichen Reihen das Majoranten- oder Minorantenkriterium benutzen (siehe 5. Schritt).

2. Schritt Ist (a_k) eine Nullfolge? (Falls dies nicht offensichtlich ist, ist Schritt 3 manchmal nützlicher.)

- Nein $\rightarrow$ die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist divergent.
- Ja. Ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ alternierend und $|a_k|$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist die Reihe konvergent (Leibniz).
- Ja, aber nicht alternierend $\rightarrow$ Suchen Sie weiter.

3. Schritt (Quotientenkriterium - Warnung: dieses Kriterium ist nicht hilfreich, wenn a_k wie eine rationale Funktion in der Variabel k aussieht.) Existiert $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$?

- Ja und $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$. Dann ist die Reihe konvergent.
- Ja und $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$. Dann ist die Reihe divergent.
- Nein oder $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$. Dann hilft dieses Kriterium nicht weiter. Gehen Sie zum 4. Schritt.

4. Schritt (Reihen-Integral) Ersetzen Sie k mit x und nennen Sie das Ergebnis $f(x)$. Ist f oder $|f|$ keine monoton fallende Funktion oder zu kompliziert zu integrieren, gehen Sie zum 5. Schritt. Existiert $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ oder $\int_{n_0}^{\infty} |f(x)|dx$?

- Ja $\rightarrow$ die Reihe ist konvergent.
- Nein $\rightarrow$ die Reihe ist divergent.

5. Schritt (Majoranten-, Minorantenkriterium) Seien $k, n_0 \in \mathbb{N}$. Suchen Sie eine bekannte Reihe $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} b_k$, für die $|a_k| \leq b_k, k \geq n_0$ oder aber $a_k \geq |b_k|, k \geq n_0$.

- $|a_k| \leq b_k, k \geq n_0$ und $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} b_k$ konvergent $\rightarrow$ $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist konvergent.
- $a_k \geq |b_k|, k \geq n_0$ und $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |b_k|$ divergent $\rightarrow$ $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Falls keine dieser Schritte helfen, muss die Folge der Partialsummen untersucht werden.

Satz (Rechenregeln für konvergente unendliche Reihen)
Konvergieren die unendlichen Reihen $\sum a_k$ gegen A und $\sum b_k$ gegen B, so konvergiert die Reihe $\sum (a_k + b_k)$ gegen $A + B$:

$$\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k = A + B.$$

Für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und die konvergente Reihe $\sum a_k = A$ gilt

$$\sum (c a_k) = c \sum a_k = cA.$$

Die Multiplikation unendlicher Reihen ist komplizierter, weil man jedes Glied der einen Reihe mit jedem Glied der anderen Reihe malnehmen. Auch wenn zwei unendlichen Reihen konvergieren, muss das Produkt der Reihen nicht konvergieren. Falls das Produkt doch konvergiert, können die einzelne Termen mit der Produktformel von Cauchy ermittelt werden:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad \text{wobei } c_k := a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0.$$

1. Aufgabe (unendliche Reihen)

Bestimmen Sie jeweils, ob die gegebene Reihe konvergent oder divergent ist.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{5})^{1-n}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (3^{-k} - 4^{-2k})$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4k+1}}$ d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k - \sqrt{k}}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n$ f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^3+1}$ g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+5}$ h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{n!}$

i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+k}$ j) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ k) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(4k)!}{(3k)!}$ l) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{7k+1}$

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n}$ n) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{n^3 + 5^n}$ o) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4k!}{(3k)!}$ p) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{7k+1}$

10.3 Funktionenreihen

Bisher wurden unendlichen Reihen mit *konstanten* Gliedern betrachtet. Der Begriff kann erweitert werden, in dem eine *Variable* in den Gliedern zugelassen wird. Die Summanden sind von daher Funktionen dieser Variable und daher der Name Funktionenreihe. In diesem Abschnitt werden wir uns auf eine spezielle Klasse von Funktionenreihen konzentrieren, die sogenannten Potenzreihen.

Definition (Potenzreihe)

Eine **(komplexe) Potenzreihe** ist eine unendliche Reihe der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit $a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Eine **(reelle) Potenzreihe** ist eine unendliche Reihe der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit $a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$.

Eine Potenzreihe ist eine Art „Polynom unendlichen Grades“. Setzen wir einen Wert in die Variable ein, so erhalten wir eine unendliche Reihe mit konstanten Gliedern. Die Frage nach derer Konvergenz können wie im 10.1 und 10.2 untersucht werden. Offensichtlich konvergiert die Reihe für den Wert $z = z_0$ (bzw. $x = x_0$):

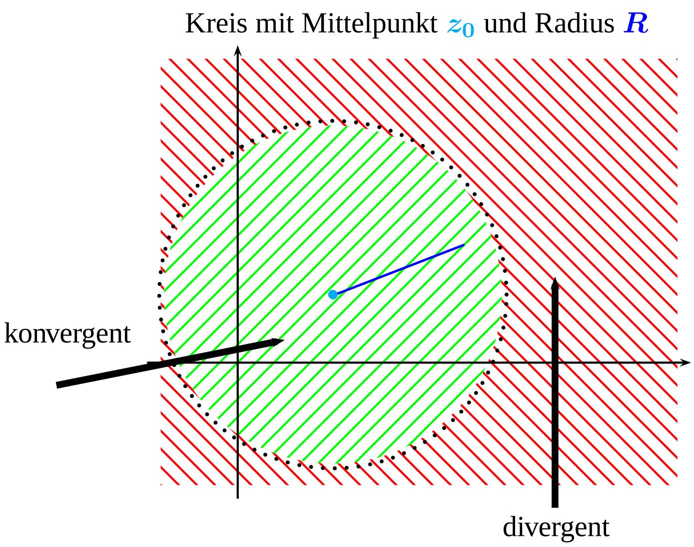
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 \overbrace{(z_0-z_0)^0}^{=1} + a_1 \overbrace{(z_0-z_0)^1}^{=0} + a_2 \overbrace{(z_0-z_0)^2}^{=0} + \cdots = a_0.$$

Glücklicherweise müssen wir nicht für jeden einzelnen Variablenwert eine Untersuchung durchführen. Durch Anwendung des Quotientenkriteriums im Komplexen (der reelle Fall wird analog behandelt) können wir für die meisten Werte eine Entscheidung schnell treffen. Im Folgenden wird angenommen, dass $z \neq z_0$ und der Limes $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert und gleich einer von Null verschiedenen Zahl ρ (sprich: rho) ist.

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}\cancel{(z-z_0)^k}(z-z_0)}{a_k\cancel{(z-z_0)^k}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |z-z_0| = \rho \cdot |z-z_0|$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für alle z, die $\rho \cdot |z-z_0| < 1$ erfüllen, d.h. für alle z, die $|z-z_0| < \frac{1}{\rho}$ erfüllen. Ferner divergiert die Reihe für alle z, die die Ungleichung $|z-z_0| > \frac{1}{\rho}$ erfüllen. Ist $|z-z_0| = \frac{1}{\rho}$, so ist keine Aussage mit dem Kriterium möglich.

Zusammengefasst können wir sagen, dass falls ρ existiert, **konvergiert** die Reihe, wenn Punkte innerhalb des offenen Kreises (d.h. ohne Rand) mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius $\boldsymbol{R} := \frac{1}{\rho}$ beziehungsweise **divergiert** wenn Punkte außerhalb des (abgeschlossenen) Kreises in die Potenzreihe eingesetzt werden. Aus diesem Grund heißt R der **Konvergenzradius** der Reihe. Über das Konvergenzverhalten der Reihe für einen Punkt am Kreisrand gibt es mit dem Quotientenkriterium keine Aussage. Randpunkte müssen einzeln behandelt werden.



Der folgende Satz erweitert die Aussagen über die Konvergenz von Potenzreihen, in dem auch die Fälle $\rho = 0$ und ρ konvergiert gegen unendlich behandelt werden.

Satz (Konvergenz von Potenzreihen)

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe und z eine komplexe Variable.

1. Fall. $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ ist (absolut) konvergent für $|z-z_0| < R$.

b) Die Reihe ist divergent für $|z-z_0| > R$.

c) Man kann keine Aussage treffen und muss dieses noch einmal gesondert überprüfen, wenn $|z-z_0| = R$.

2. Fall. Ist $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 0$, so konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ nur für $z = z_0$. Ist $z \neq z_0$, so divergiert die Reihe.

3. Fall. Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \infty$, setzen wir den Konvergenzradius $R = \infty$. Die Potenzreihe konvergiert für jeden Punkt in $\mathbb{C}$.

Bemerkungen:

• Der Satz gilt analog für reelle Potenzreihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.

• Für komplexe Potenzreihen spricht man von einem Konvergenzkreis, denn die Menge der komplexen Zahlen, die die Ungleichung $|z-z_0| < R$ für $R \in \mathbb{R}$ erfüllen, entspricht einem Kreis.

Beispiel (Konvergenzradius im Komplexen)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius, für den die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2+i}\right)^k \cdot (z-(1+2i))^k$$

konvergiert. Entscheiden Sie, ob die Reihe für $z = 2+4i$ konvergiert.

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \left(\frac{i}{2+i}\right)^k \cdot \left(\frac{2+i}{i}\right)^{k+1} \right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{2+i}{i}\right| = \left|\frac{2+i}{i}\right| = \frac{|2+1\cdot i|}{|0+1\cdot i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{0^2+1^2}} = \sqrt{5}.$$

Der Konvergenzradius ist $R = \sqrt{5}$. Die Reihe konvergiert (mindestens) für alle z mit

$$|z-z_0| = |z-(1+2i)| < \sqrt{5}.$$

Für $z = 2+4i$ gilt

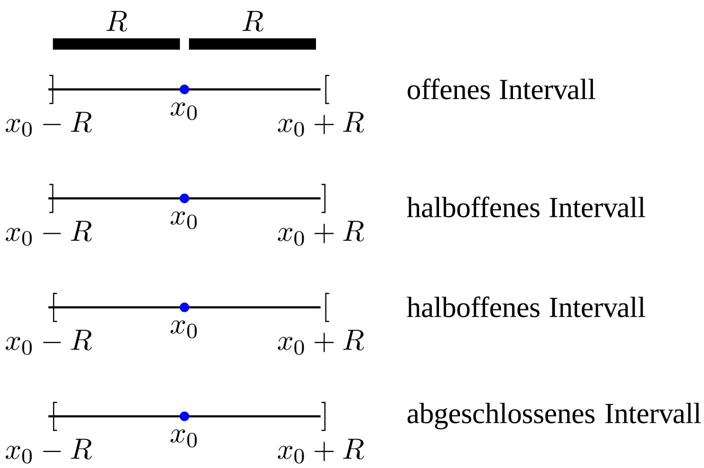
$$|2+4i-(1+2i)| = |1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}.$$

Da der Abstand zwischen $z = 2+4i$ und $z_0 = 1+2i$ genau $\sqrt{5}$ ist, wissen wir noch nicht, ob die Reihe konvergiert. Setzen wir $z = 2 + 4i$ ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2+i}\right)^k \cdot (2+4i-(1+2i))^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2+i}\right)^k \cdot (1+2i)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i\cdot(1+2i)}{2+i}\right)^k && \text{[Potenzgesetz]} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i+2i^2}{2+i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2+i}{2+i}\right)^k && [i^2=-1] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-2+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^k && \text{[erweitern, um in Form } a+bi \text{ zu bringen]} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-4+4i-i^2}{4-i^2}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)^k .
\end{aligned}
$$

Die Folge $a_k = \left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)^k$ ist keine Nullfolge, da $\left|-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right| = 1$ ist. Damit kann die Reihe nicht konvergieren, denn das notwendige Kriterium, dass die Folgenglieder eine Nullfolge bilden, ist nicht erfüllt.

Im reellen Fall macht es Sinn über ein *Konvergenzintervall* von einer Potenzreihe zu sprechen. Setzt man einen Wert des Konvergenzintervalls in der zugehörigen Potenzreihe ein, so konvergiert die so erhaltene Reihe. Falls R eine von Null verschiedene Zahl ist, hat das Konvergenzintervall den Mittelpunkt x_0 und den „Radius“ R. Dies ist sozusagen ein ein-dimensionaler „Kreis“. Das Intervall muss mindestens die Menge $]x_0 - R, x_0 + R[$ enthalten. Dies ergibt vier Möglichkeiten, die rechts abgebildet sind. **Wie im komplexen Fall, müssen die Randpunkte einzeln untersucht werden.**



Satz (Konvergenzintervall im reellen Fall)

Ist der Radius R einer reellen Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$

- eine reelle Zahl ungleich Null (d.h. $R \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$), so liegt das Konvergenzintervall I im Bereich

$$]x_0 - R, x_0 + R[\subseteq I \subseteq [x_0 - R, x_0 + R],$$

- gleich Null, so ist das Konvergenzintervall nur ein Punkt $I = \{x_0\}$,
- unendlich, so ist $I = \mathbb{R}$.

Beispiel (Konvergenzbereich im Reellen)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (5-x)^k.$$

Zunächst muss hier die Reihe in Form einer Potenzreihe gebracht und der Konvergenzradius R bestimmt werden.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (5-x)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (-1)^k (x-5)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (x-5)^k$$

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| a_k \cdot \frac{1}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k} \cdot \frac{k+1}{1} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}(1+\frac{1}{k})}{\cancel{k}} = 1$$

Der Konvergenzradius ist $R = 1$. Die Reihe konvergiert für alle x mit $|x-5| < 1$, d.h. das Konvergenzintervall I enthält $]5-1, 5+1[\, = \,]4, 6[$. Nun müssen nur noch die Randpunkte $x = 4$ und $x = 6$ überprüft werden. Dafür werden beide Werte einmal in die ursprüngliche Reihe eingesetzt. Dabei erhält man

$$x = 4: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (5-4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$x = 6: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (5-6)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k)^2}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Die Reihe konvergiert für $x = 4$, denn diese ist die alternierende harmonische Reihe. Für $x = 6$ ist die Reihe die harmonische Reihe, von der wir wissen, dass sie divergiert. Das Konvergenzintervall der Reihe ist deshalb $I = [4, 6[$.

Bemerkung: Es ist wichtig die Aufgabenstellung genau zu lesen um zu wissen, was bei so einer Aufgaben zu berechnen ist. Wird nur nach dem *Konvergenzradius* gefragt, so reicht es diesen zu berechnen. Wird allerdings nach dem *Konvergenzintervall* bzw. *Konvergenzbereich* (im Reellen) gefragt, so muss jedes $x \in \mathbb{R}$, für das die Reihe konvergiert, angegeben werden. Dafür müssen die *Randpunkte* überprüft werden.

Motivation zu Taylorreihen

Ganz analog zum n-ten Taylorpolynom einer Funktion im Entwicklungspunkt x_0 kann für unendlich-oft differenzierbare Funktionen die Taylorreihe im Entwicklungspunkt x_0 definiert werden.

Definition (Taylorreihen)

Ist f eine unendlich-oft differenzierbare Funktion und x_0 im Definitionsbereich von f, so ist die **Taylorreihe** zu f im Entwicklungspunkt x_0 durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

gegeben.

Beispiel (Bestimmen einer Taylorreihe)

Bestimmen Sie die Taylorreihe zu der Funktion $f(x) = \ln(x-1)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall.

Wir wollen die Potenzreihe mit Hilfe des Taylorpolynoms aufschreiben und müssen hierfür zuerst alle Ableitungen der Funktion bestimmen. Hierfür schreiben wir zunächst die ersten paar Ableitungen auf,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1} \\ f''(x) &= -1(x-1)^{-2} \\ f^{(3)}(x) &= 1 \cdot 2(x-1)^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= -1 \cdot 2 \cdot 3(x-1)^{-4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

bis ein Muster identifiziert werden kann. (Deshalb multiplizieren wir die Koeffizienten nicht miteinander.) Nach genauem Hinsehen, liegt die Vermutung nahe, dass die n-te Ableitung der Funktion für $n \geq 1$ die Form

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!(x-1)^{-n}$$

hat. Diese Vermutung muss allerdings noch per Induktion bewiesen werden.

Induktionsanfang: Die Induktion beginnt bei $n = 1$, da die Formel ab der ersten Ableitung gilt:

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = (-1)^{1-1} \cdot (1-1)!(x-1)^{-1} = (x-1)^{-1}.$$

Die Aussage ist wahr, weil die Formel liefert die berechnete erste Ableitung von f.

Induktionsvoraussetung (IV): Die Gleichung $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!(x-1)^{-n}$ gilt für ein beliebiges aber festes $n \geq 1$.

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &\overset{IV}{=} ((-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (x-1)^{-n})' \\ &= \boldsymbol{-n} \cdot \boldsymbol{(-1)^{n-1}} \cdot \boldsymbol{(n-1)!} \cdot (x-1)^{-n-1} \\ &= \boldsymbol{(-1)^{n}} \cdot \boldsymbol{n!} \cdot (x-1)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) die Form $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (x-1)^{-n}$ hat, d.h.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(x-1)^n}.$$

Nun kann die Taylorreihe mit $x_0 = \mathbf{2}$ angegeben werden, wobei die Koeffizienten wie beim Taylorpolynom berechnet werden. Es gilt also $a_k = \frac{f^{(k)}(\mathbf{2})}{k!}$ für $k \geq 0$. [Achtung! Die Formel für $f^{(k)}(x)$ ist nur für $k \geq 1$ gültig. Für $k = 0$ wenden wir einfach die ursprüngliche Funktion an.]

$$\begin{aligned} T_\infty(x) &= \frac{f(\mathbf{2})}{0!}(x-\mathbf{2})^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\mathbf{2})}{k!}(x-\mathbf{2})^k \\ &= \ln(2-1) \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(2-1)^k}}{k!}(x-\mathbf{2})^k \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-\mathbf{2})^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{(-1)^{k-1}\frac{1}{k}}(x-\mathbf{2})^k. \end{aligned}$$

Von dieser Reihe kann nun der Konvergenzradius R bestimmt werden. Wir merken, dass das Vorzeichen aufgrund des Betrages keine Rolle dabei spielt. Der Konvergenzradius der Funktion ist

$$\boldsymbol{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \boldsymbol{a_k} \cdot \frac{1}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k} \cdot \frac{k+1}{1} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}(1+\frac{1}{k})}{\cancel{k}\cdot 1} = \mathbf{1},$$

d.h. das Konvergenzintervall I enthält

$$]\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{R}[\; = \;]\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{2} + \mathbf{1}[\; = \;]\mathbf{1}, \mathbf{3}[\, .$$

Dies ergibt Sinn, denn die Funktion $f(x) = \ln(x-1)$ ist nur für $x > \mathbf{1}$ bestimmt. Damit kann die Potenzreihe nur für $x > 1$ gegen die Funktion konvergieren. Weil f für $x = \mathbf{1}$ undefiniert ist, vermuten wir, dass die Reihe für diesen Wert divergent ist. Setzen wir $x = 1$ in die Taylorreihe ein, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(1-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)+k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\overbrace{2k-1}^{\text{ungerade}}}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k}.$$

Die Reihe ist aufgrund der Divergenz der harmonischen Reihe wie erwartet divergent. Wir schließen den Randpunkt $x = \mathbf{1}$ im Konvergenzintervall nicht ein. Nur weil die Reihe für einen Randpunkt des Intervalls divergiert, können wir nicht einfach über das Verhalten im anderen Randpunkt schließen. Betrachten wir nämlich den anderen Randpunkt $x = \mathbf{3}$, ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(3-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)\cdot(-1)^k}{k}.$$

Die Reihe konvergiert, da sie bis auf dem Vorfaktor -1 die alternierende harmonische Reihe ist, sodass der Randpunkt $x = \mathbf{3}$ zum Konvergenzintervall gehört. Daher ist das Konvergenzinterval der Reihe $I = \,]\mathbf{1}, \mathbf{3}]$.

Die wichtigste Beispiele für reelle Funktionen, die sich durch Potenzreihen exakt darstellen lassen (d.h. $R = \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$), sind die Sinus-, Cosinus- und Exponentialfunktionen. Wir behandeln die Sinusfunktion als Beispiel und überlassen die anderen für Sie als Lerncheck.

Beispiel (Taylorreihe; Konvergenzintervall; Sinusfunktion)

Bestimmen Sie die Taylorreihe zu der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ sowie das zugehörige Konvergenzintervall.

Um die Taylorreihe zu bestimmen, müssen die Taylorkoeffizienten bestimmt werden, sodass alle höheren Ableitungen berechnet werden müssen. D.h. wir leiten ab, bis ein Muster entsteht:

$$\begin{array}{rcrrcr}
f^{(0)}(x) & = & \sin x, & f^{(0)}(0) & = & 0, \\
f^{(1)}(x) & = & \cos x, & f^{(1)}(0) & = & 1, \\
f^{(2)}(x) & = & -\sin x, & f^{(2)}(0) & = & 0, \\
f^{(3)}(x) & = & -\cos x, & f^{(3)}(0) & = & -1, \\
f^{(4)}(x) & = & \sin x, & f^{(4)}(0) & = & 0.
\end{array}$$

Ab die 4. Ableitungen wiederholen sich die Ableitungen immer wieder, und die Taylorkoeffizienten können explizit dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
f^{(4n+0)}(x) &= \sin x, & f^{(4n+0)}(0) &= 0, & \frac{f^{(4n+0)}(0)}{(4n+0)!} &= 0,\\
f^{(4n+1)}(x) &= \cos x, & f^{(4n+1)}(0) &= 1, & \frac{f^{(4n+1)}(0)}{(4n+1)!} &= \frac{1}{(4n+1)!},\\
f^{(4n+2)}(x) &= -\sin x, & f^{(4n+2)}(0) &= 0, & \frac{f^{(4n+2)}(0)}{(4n+2)!} &= 0,\\
f^{(4n+3)}(x) &= -\cos x, & f^{(4n+3)}(0) &= -1, & \frac{f^{(4n+3)}(0)}{(4n+3)!} &= \frac{-1}{(4n+3)!}.
\end{aligned}$$

Die Taylorreihe hat die Gestalt

$$T_{\sin}(x) = \frac{1}{1!}x^1 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{-1}{7!}x^7 + \cdots .$$

Die ist eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-0)^k$, die nur ungerade Potenzen enthält; d.h. $a_k = 0$ für k gerade. Die Potenzreihe können wir deshalb so schreiben:

$$T_{\sin}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Die Quotienten aufeinanderfolgender Koeffizienten sind abwechselnd null oder nicht definiert. Das heißt aber nicht, dass die Reihe keinen Konvergenzradius hat. Das Quotientenkriterium wenden wir einfach für $x \neq x_0 = 0$ an (für $x = 0$ konvergiert die Reihe sowieso).

$$\lim_{k\to\infty}\left|b_{k+1}\cdot x^{2(k+1)+1}\cdot\frac{1}{b_k x^{2k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|b_{k+1}\cdot x^{2k+3}\cdot\frac{1}{b_k\cdot x^{2k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|b_{k+1}\cdot\frac{1}{b_k}\cdot x^2\right|$$

mit $b_k = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|b_{k+1}\cdot\frac{1}{b_k}\cdot x^2\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{(-1)^k}x^2\right|\\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+1)!}{(2k+3)!}\cdot x^2\right|\\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{(2k+1)!}}{(2k+3)(2k+2)\cancel{(2k+1)!}}\cdot x^2\right|\\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(2k+3)(2k+2)}\cdot x^2\right| = 0 < 1.
\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Taylorreihe $T_{\sin}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $R = \infty$. Damit ist die Taylorreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergent, denn

$$|x - 0| = |x| < \infty$$

gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe (Lerncheck - Taylorreihe; Konvergenzbereich)

Prüfen Sie nach, dass die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ zu der Cosinusfunktion

$$T_{\cos}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

ist und dass die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ zu der Exponentialfunktion

$$T_{\exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

ist. Zeigen Sie, dass der Konvergenzbereich der Reihen jeweils $\mathbb{R}$ ist.

Als letztes Beispiel betrachten wir eine Reihe, für die ein Koeffizient vor dem x auftritt.

Beispiel (Unendliche Reihe mit Koeffizient vor dem x und Konvergenzradius 0)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k} \cdot (3x-5)^k$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

Wir schreiben zunächst die Reihe in Form einer Potenzreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k} \cdot (3x-5)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k} \cdot 3^k \left(x - \frac{5}{3}\right)^k .$$

Der Konvergenzradius ist

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k! \cdot 3^k}{2^k} \cdot \frac{2^{k+1}}{(k+1)! \cdot 3^{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{3(k+1)} = 0.$$

Weil $R = 0$ gilt, besteht das Konvergenzintervall aus einem einzigen Punkt ($I = \{x_0\}$). Der Entwicklungspunkt ist die reelle Zahl x_0, die die Gleichung $3x_0 - 5 = 0$ erfüllt, d.h. $x_0 = \frac{5}{3}$. Das Konvergenzintervall ist also $I = \{x_0\} = \{\frac{5}{3}\}$.

Aufgabe 3 (Konvergenz von Potenzreihen)

Bestimmen Sie jeweils den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der gegebenen unendlichen Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 x^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} \cdot x^k$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (x-3)^k}{k^2}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k! \cdot (x-2)^k$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{(k-1)!}$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (7x+4)^k$ h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{k^4}$

Potenzreihen differenzieren und integrieren

Reelle Potenzreihen können innerhalb ihres Konvergenzkreises auch differenziert und integriert werden. Dies geschieht gliedweise (d.h. jeder Summand wird einzeln differenziert/integriert).

Satz (Differentiation und Integration von Potenzreihen)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Die Reihe definiert auf dem Intervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ eine Funktion f, die sowohl abgeleitet, als auch integriert werden kann.

$$f: \,]x_0 - R, x_0 + R[\, \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k,$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1}(x-x_0)^k$$

$$\int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \cdot (x-x_0)^{k+1} + C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} \cdot (x-x_0)^k + C$$

Bemerkung. Man merkt in dem mittleren Teil der Formel für die Ableitung, dass der Index bei $k=1$ statt bei $k=0$ anfängt. Dies folgt aus der Tatsache daraus, dass die Ableitung der Konstante $a_0(x-x_0)^0 = a_0 \cdot 1$ einfach Null ist. Die rechte Seite der Formel entsteht durch eine Indexverschiebung.

Beispiel (Ableiten einer Potenzreihe)

Bestimmen Sie die Ableitung der Potenzreihe

$$T_{\sin}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1},$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert.

Dass diese Reihe eine Potenzreihe ist, haben wir in dem Beispiel auf Seite 156 gesehen. Wenn wir die Reihe Term für Term aufschreiben, können wir einfach ableiten:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}\right)' &= \left(\tfrac{1}{1!} \cdot x^1 + \tfrac{-1}{3!} \cdot x^3 + \tfrac{1}{5!} \cdot x^5 + \tfrac{-1}{7!} \cdot x^7 + \cdots\right)' \\
&= \tfrac{1 \cdot 1}{1!} \cdot x^0 + \tfrac{-1 \cdot 3}{3!} \cdot x^2 + \tfrac{1 \cdot 5}{5!} \cdot x^4 + \tfrac{-1 \cdot 7}{7!} \cdot x^6 + \cdots \\
&= \tfrac{1}{1!} \cdot x^0 + \tfrac{-1}{2!} \cdot x^2 + \tfrac{1}{4!} \cdot x^4 + \tfrac{-1}{6!} \cdot x^6.
\end{aligned}$$

Schreiben wir die Ableitung von $T_{\sin}(x)$ als eine unendliche Reihe, bekommen wir

$$T_{\sin}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = T_{\cos}(x).$$

Alternativ können wir die Aufgabe mit der Ableitungsformel lösen. Hier ist Vorsicht geboten, weil die gegebene Reihe nicht ganz genau wie in der Definition einer Potenzreihe aussieht. Die geraden Potenzen von x haben Koeffizient null. Bei der Ableitung stellt dies also kein Problem. Im ersten Summanden ist die Potenz von x anstatt wie gewohnt 0, nun 1. Deshalb fängt der Index in der Ableitung bei 1 und nicht bei 0 an, wie in der Formel:

$$\begin{aligned}
T'_{\sin}(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}\right)' &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{(2k+1)} \cdot (-1)^k}{\cancel{(2k+1)} \cdot (2k)!} \cdot x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = T_{\cos}(x).
\end{aligned}$$

Beispiel (Potenzreihe als Lösung einer DGL)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$y_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))}$$

eine Lösung der Airy-Gleichung $y'' = ty$ ist. Heirbei ist y eine reelle Funktion der reellen Variable t.

Die zweite Ableitung der Funktion y_1 lautet

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= \frac{d^2}{dt^2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k)t^{3k-1}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-1)(3k)t^{3k-2}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))}. \end{aligned}$$

Um den Faktoren $(3k-1)(3k)$ zu kürzen, muss der Fall $k=1$ extra behandelt werden, denn beim Einsetzen von $k=1$ in $(3k-1)(3k)$ erhalten wir $2\cdot 3$:

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-1)(3k)t^{3k-2}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))} \\ &= \frac{\cancel{(2\cdot 3)}\, t^{3-2}}{\cancel{(2\cdot 3)}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cancel{(3k-1)(3k)}\, t^{3k-2}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-4)\cdot(3k-3))\cancel{((3k-1)\cdot(3k))}} \\ &= t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{3k-2}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-4)\cdot(3k-3))}. \end{aligned}$$

Nun verschieben wir den Index und formen um, bis y_1'' die Gestalt ty_1 annimmt:

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{3k-2}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-4)\cdot(3k-3))} \\ &= t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3(k+1)-2}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3(k+1)-4)\cdot(3(k+1)-3))} \\ &= t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k+1}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))} \\ &= t\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))}\right) \\ &= ty_1(t). \end{aligned}$$

Beispiel (Integration mit Potenzfunktionen)

Bestimmen Sie das reelle Integral $\displaystyle\int e^{(x^2)}dx$.

Die Aufgabe kann weder durch partielle Integration noch durch Substitution explizit gelöst werden (versuchen Sie es!). Die Exponentialfunktion läßt sich durch eine Potenzreihe exakt darstellen: $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$. Von daher muss für jedes $x^2 \in \mathbb{R}$

$$e^{(x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Wiederum haben wir eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^{2k}$, wobei die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von x null sind. Von daher können wir diese Reihe wie im Satz integrieren. Bei der Integration der Summanden mit einer ungeraden Potenz von x ($0 \cdot x^{2j+1}, j \geq 0$), bekommt man eine Konstante, die im Formel schon vorhanden ist. Nun müssen die Summanden mit einer geraden Potenz von x integriert werden:

$$\int e^{(x^2)} dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{x^{2k}}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot k!} + C.$$

Diese Integrationsformel gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, weil der Konvergenzradius von e^x und damit auch von $e^{(x^2)}$ ganz $\mathbb{R}$ ist.

10.4 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 10. Kapitel

1. Aufgabe.

a) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{5})^{1-n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} = \sum\limits_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{N}$ ist eine *geometrische Reihe mit* $q = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$, also **konvergent**.

b) Die unendliche Reihe schreiben wir leicht anders: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(3^{-k} - 4^{-2k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{4^2}\right)^k\right)$ und merken, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} := A$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4^2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15} := B$ *konvergente geometrische Reihen mit* $q_1 = \frac{1}{3} < 1$ und $q_2 = \frac{1}{16} < 1$ sind. Die Rechenregeln für unendliche Reihen (siehe Seite 150) können angewendet werden, d.h.:

$$A - B = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k + (-1) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} -4^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(3^{-k} - 4^{-2k}\right),$$

sodass die betrachtete Reihe **konvergent** ist.

c) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4k+1}}$ ist ähnlich zu der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, die divergent ist (Riemman Zetafunktion mit $s = \frac{1}{2}$). Das Minorantenkriterium ist jedoch nicht in dieser Form anwendbar, weil $\frac{1}{\sqrt{4k+1}}$ kleiner ist als $\frac{1}{\sqrt{k}}$ für $k > 1$. Wir merken, dass $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4x+1}} = (4x+1)^{-\frac{1}{2}}$ monoton fallend für $x \geq 1$ ist, denn $f'(x) = -\frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{3}{2}} < 0$ für $x \geq 1$. Von daher versuchen wir die Frage mit dem *Reihen-Integral-Kriterium* zu beantworten. Wir betrachten deshalb das Konvergenzverhalten des uneigentlichen Integrals $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4x+1}} dx$. Hierbei verwenden wir die Substitution $t = 4x + 1$, sodass $dt = 4dx$ ist:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4x+1}} dx = \int_5^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{b \to \infty} \int_5^b \frac{1}{4} t^{-\frac{1}{2}} dt = \lim_{b \to \infty} \frac{2}{4} t^{\frac{1}{2}} \Big|_5^b = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{2}(\sqrt{b} - \sqrt{5})\right) = \infty.$$

Weil das Integral divergent ist, ist auch die Reihe **divergent**.

d) Die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-\sqrt{k}}$ ist ähnlich zu der harmonische Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$, die divergent ist. Das *Minorantenkriterium* kann angewendet werden, denn $k-\sqrt{k} < k$ für alle $k \geq 2$ bedeutet $\frac{1}{k-\sqrt{k}} > \frac{1}{k} > 0$ für alle $k \geq 2$. Von daher ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-\sqrt{k}}$ **divergent**.

e) Weil der Index n als Potenz in $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^n$ auftaucht, versuchen wir es mit dem *Quotientenkriterium*:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^n\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|3 \cdot \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right|.
\end{aligned}$$

Es handelt sich um ein Produkt zweier konvergenten Folgen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n+1}\right) = 0 \quad \text{und} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1};$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}\right| = 0 \cdot e^{-1} = 0 < 1$. Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n$ **konvergent**.

f) Weil $0 \leq \cos^2 k \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $0 \leq \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^3+1} \leq \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3+1}$. Die Reihe rechts erinnert uns an die konvergente *Riemannsche Zetafunktion* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ mit $s = 3$. Es gilt $0 \leq \frac{\cos^2 k}{k^3+1} \leq \frac{1}{k^3+1} < \frac{1}{k^3}$ für $k \geq 2$, d.h. $0 \leq \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^3+1} \leq \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3+1} < \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$. Die gegebene Reihe **konvergiert** nach dem *Majorantenkriterium*.

g) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+5}$ sieht der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ähnlich. Diese ist die harmonische Reihe, die divergent ist. Wir erwarten deshalb, dass die Reihe in dieser Aufgabe auch divergent ist. Das Minorantenkriterium ist jedoch mit der harmonischen Reihe nicht anwendbar, denn $\frac{k^2}{k^3+5} < \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k}$ und nicht andersrum. Die Funktion

$$f : [1,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{x^3+5}$$

ist jedoch mit einer Substitution leicht zu integrieren, sodass das Reihen-Integral-Kriterium sich als Möglichkeit bietet. Zuerst muss geprüft werden, ob die Funktion ab einem Wert tatsächlich monoton fallend ist. Das Vorzeichen der Ableitung

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^3+5}\right)' = \frac{2x(x^3+5) - x^2(3x^2)}{(x^3+5)^2}$$

an einer Stelle x hängt nur von Zähler ab, denn der Nenner als Quadrat einer reellen Zahl größer 1 immer positiv ist. Der Zähler ist $2x^4+10x-3x^4 = -x^4+10x = -x(x^3-10)$, sodass f für $x > \sqrt[3]{10}$ monoton fallend ist.

Mit der Substitution $u = x^3 + 5$, d.h. $du = 3x^2 dx$, hat das uneigentliche Integral die Form

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{x^2}{x^3+5} dx &= \int_6^\infty \frac{1}{3} \cdot \frac{du}{u} \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3} \int_6^b \frac{du}{u} \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \ln |u| \Big|_6^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{3}(\ln |b| - \ln 6) \right) = \infty.
\end{aligned}$$

Weil das uneigentliche Integral nicht existiert, ist die gegebene Reihe nach dem *Reihen-Integral-Kriterium* **divergent**.

h) Der Index n kommt in der Potenz (und in der Fakultät) vor. Das Quotientenkriterium ist einen Versuch wert:

$$\lim_{n\to\infty} \left| a_{k+1} \cdot \frac{1}{a_k} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-1)^n e^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{n+1}}{e^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e}{(n+1)} \right| = 0 < 1.$$

Nach dem *Quotientenkriterium* ist die Reihe **konvergent**.

i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+k}$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ ähnlich. Die letztere ist eine konvergente Riemannsche Zetafunktion mit $s = \frac{3}{2} > 1$. Ferner gilt

$$0 < \frac{\sqrt{k}}{k^2+k} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}},$$

sodass die gegebene Reihe nach dem *Majorantenkriterium* **konvergent** ist.

j) Das Konvergenzverhalten der Reihen $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ untersuchen wir mit dem Reihen-Integral-Kriterium. Dazu setzen wir $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, sodass $f(k) = \frac{1}{k \ln k}$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dass f eine monoton fallende Funktion ist, kann mithilfe der Ableitung bewiesen werden. Die Ableitung

$$f'(x) = ((x \ln x)^{-1})' = -(x \ln x)^{-2}(x \ln x)' = (-1)\frac{1}{(x \ln x)^2} \left(\ln x + \frac{x}{x} \right)$$

ist negativ auf $[2, \infty[$ $\left(\frac{1}{(x \ln x)^2} \geq 0 \text{ wegen des Quadrats}, \ \ln x + 1 \geq \ln 2 + 1 > 0 \right)$. Das *Reihen-Integral-Kriterium* kann angewendet werden. Mit der Substitution $u = \ln x$, d.h. $du = \frac{dx}{x}$, gilt

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx &= \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u} \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u} \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln |u| \Big|_{\ln 2}^b \\
&= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 2) = \infty.
\end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ ist **divergent**.

k) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(4k)!}{(3k)!}$ ist **divergent**, weil aus

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}(4k)!}{(3k)!} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(4k)!}{(3k)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(4k)(4k-1)\cdots(3k+1)\cancel{(3k)!}}{\cancel{(3k)!}} = \infty$$

folgt, dass $\left(\frac{(-1)^{k+1}(4k)!}{(3k)!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. (Im Allgemeinen gilt: die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, genau dann wenn die Folge $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

l) Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{7k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+2} \cdot \frac{1}{7k+1}$ ist alternierend. Ferner bildet die Folge $\left(\frac{1}{7k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ eine monoton fallende Nullfolge, denn $a_{k+1} = \frac{1}{7(k+1)+1} = \frac{1}{7k+8} < \frac{1}{7k+1} = a_k$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{7k+1} = 0$. Die Reihe ist nach dem *Leibniz-Kriterium* **konvergent**.

m) Die Reihe ist ähnlich zu der *harmonischen Reihe*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}(-1)^1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cdot \frac{1}{n}.$$

Falls diese Reihe zu einem Grenzwert $A \in \mathbb{R}$ konvergieren würde, dann würde nach den Rechenregeln für unendliche Reihen die harmonische Reihe gegen $-A$ konvergieren müssen. Die harmonische Reihe ist jedoch divergent. Die Annahme, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n}$ konvergiert ist also falsch, also ist sie **divergent**.

n) Das Quotientenkriterium hilft auf den ersten Blick nicht, weil der Bruch zu kompliziert ist. Nach Erfahrung erwarten wir jedoch, dass die Reihe **konvergent** ist, weil der dominierende Teil für sehr große n hier 5^n ist, und dies ist im Nenner. Wir wenden deshalb die Majorantenkriterien an, um bei der Abschätzung eine einfachere Form zu erhalten:

$$0 < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{n^3 + 5^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{n^3}{5^n} \right).$$

Wir schauen, ob wir die Rechenregeln für unendliche Reihen (siehe Seite 150) anwenden können. Die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ mit $q = \frac{2}{5} < 1$ ist konvergent. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$ untersuchen wir mit dem Quotientenkriterium. Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^3}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^3} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1} \right)^3 \cdot \frac{1}{5} \right| = 1 \cdot \frac{1}{5}$$

ist kleiner als 1, sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$ nach dem *Quotientenkriterium* konvergiert. Nach den Rechenregeln für unendliche Reihen ist die *Summe von zwei konvergenten Reihen konvergent*; d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{n^3}{5^n} \right)$ ist konvergent. Nach dem *Majorantenkriterium* ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{n^3 + 5^n}$ also **konvergent**.

o) Wegen der Fakultät in den Summanden der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4k!}{(3k)!}$ versuchen wir das Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{4}(k+1)!}{(3(k+1))!}\cdot\frac{(3k)!}{\cancel{4}k!}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(3k)!}{(3k+3)!}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|(k+1)\cdot\frac{(3k)!}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)(3k)!}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|(k+1)\cdot\frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\cancel{(k+1)}\cdot\frac{1}{3\cancel{(k+1)}(3k+2)(3k+1)}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{3(3k+2)(3k+1)}\right| = 0 < 1.
\end{aligned}$$

Nach dem *Quotientenkriterium* ist die Reihe **konvergent**.

p) Wir wollen zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{7k+1}$ **divergent** ist, weil $\left(\frac{(-1)^{k+1}k}{7k+1}\right)_{k\geq 1}$ keine *Nullfolge* ist.
Um dies zu zeigen, merken wir, dass die Folge (a_k) eine Nullfolge ist, genau dann wenn die Folge $(|a_k|)$ eine Nullfolge ist. In der Aufgabe ist

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}k}{7k+1}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{7k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{7+\frac{1}{k}} = \frac{1}{7} \neq 0;$$

d.h. $\left(\frac{(-1)^{k+1}k}{7k+1}\right)_{k\geq 1}$ ist keine Nullfolge. Die gegebene Reihe ist divergent.

2. Aufgabe (Lerncheck, Taylorreihe)

Cosinus:

Wir leiten die Taylorreihe zur Cosinusfunktion im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ her: $T_{\cos}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k}$.

Die ersten Ableitung von $f(x) = \cos x$ und ihre Werte im Punkt $x_0 = 0$ sind

$$\begin{array}{lcl lcl}
f^{(0)}(x) & = & \cos(x) & f^{(0)}(0) & = & 1 \\
f^{(1)}(x) & = & -\sin(x) & f^{(1)}(0) & = & 0 \\
f^{(2)}(x) & = & -\cos(x) & f^{(2)}(0) & = & -1 \\
f^{(3)}(x) & = & \sin(x) & f^{(3)}(0) & = & 0 \\
f^{(4)}(x) & = & \cos(x) & f^{(4)}(0) & = & 1
\end{array}$$

Ab der 4. Ableitung, wiederholen sich die Ableitungen. Von daher ist

$$\begin{aligned}
T_{\sin}(x) &= \frac{1}{0!}x^0 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.
\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist wie folgt.

$$\begin{aligned}
R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\frac{(2(k+1))!}{(-1)^{k+1}}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+2)!}{(2k)!}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(2k)!}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}|(2k+2)(2k+1)| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Der Konvergenzbereich ist deshalb ganz $\mathbb{R}$.

Exponentialfunktion:
Die Ableitung von $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x$, sodass die k-te Ableitung wiederum die Exponentialfunktion ist: $f^{(k)}(x) = e^x$. Von daher ist $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Der k-te Taylorkoeffizient ist deshalb $\frac{1}{k!}$ und es folgt

$$T_{\exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

Konvergenzbereich für die Exponentialfunktion:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| a_k \cdot \frac{1}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{1} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\cancel{k!}}{\cancel{k!}} = \infty.$$

Damit ist die Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

3. Aufgabe (Konvergenz von Potenzreihen)

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-\mathbf{0})^k}{k}$ hat den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x_0 = 0}$. Der Konvergenzradius ist

$$\boldsymbol{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k} \cdot \frac{k+1}{1} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}} \cdot \frac{1+\frac{1}{k}}{1} \right| = \mathbf{1}.$$

Das Konvergenzintervall enthält $]\mathbf{0}-\mathbf{1}, \mathbf{0}+\mathbf{1}[=]-1,1[$. Es bleibt die Randpunkte -1 und 1 zu untersuchen.

$$x = -1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{konvergent - alternierende harmonische Reihe}$$
$$x = 1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)^k}{k} \quad \text{divergent - harmonische Reihe}$$

Das Konvergenzintervall ist $[-1, 1[$.

b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 (x-\mathbf{0})^k$ hat den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x_0 = 0}$. Der Konvergenzradius ist

$$\boldsymbol{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^2}{(k+1)^2} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \left(\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \right)^2 \right| = \mathbf{1}.$$

Das Konvergenzintervall enthält $]\mathbf{0}-\mathbf{1}, \mathbf{0}+\mathbf{1}[=]-1,1[$. Es bleibt die Randpunkte -1 und 1 zu untersuchen.

$$x = -1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \quad \text{divergent - keine Nullfolge}$$
$$x = 1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 (1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 \quad \text{divergent - keine Nullfolge}$$

Das Konvergenzintervall ist $]-1, 1[$.

c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} \cdot x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}(x - \mathbf{0})^k$ hat den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x_0 = 0}$. Der Konvergenzradius ist

$$\boldsymbol{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^2+1} \cdot \frac{(k+1)^2+1}{(-1)^{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)^2+1}{k^2+1} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}} \cdot \frac{(1+\frac{1}{k})^2 + \frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^2}} \right| = \mathbf{1}.$$

Das Konvergenzintervall enthält $]\mathbf{0} - \mathbf{1}, \mathbf{0} + \mathbf{1}[=]-1, 1[$. Es bleibt die Randpunkte -1 und 1 zu untersuchen.
Für $x = -1$:

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}(-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent, weil sie die Zetafunktion mit $s = 2$ ist. Von daher konvergiert die gegebene Potenzreihe nach dem Majorantenkriterium für $x = -1$.

Für $x = 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}(1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}.$$

Die Reihe ist alternierend. Ferner ist die Folge $(a_k) = \left(\frac{1}{k^2+1}\right)$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe für $x = 1$.

Das Konvergenzintervall der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} \cdot x^k$ ist $[-1, 1]$.

d) Der Entwicklungspunkt der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(x - \mathbf{3})^k}{k^2}$ ist $\boldsymbol{x_0 = 3}$.

Der Konvergenzradius ist

$$\boldsymbol{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2^k}{k^2} \cdot \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} \overbrace{\left| \left(\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}} \cdot \frac{1+\frac{1}{k}}{1} \right)^2 \right|}^{=1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

Das Konvergenzintervall enthält $]\mathbf{3} - \boldsymbol{\frac{1}{2}}, \mathbf{3} + \boldsymbol{\frac{1}{2}}[=]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}[$.

Setzt man $x = \frac{5}{2}$ in die Reihe ein, bekommt man die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(\frac{5}{2} - \mathbf{3})^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(-\frac{1}{2})^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2},$$

die alternierend ist. Ferner ist die Folge $\left(\frac{1}{k^2}\right)$ eine monoton gegen Null konvergierende Folge. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe; d.h. $x = \frac{5}{2}$ liegt im Konvergenzintervall.
Setzt man $x = \frac{7}{2}$ in die Reihe ein, bekommt man die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(\frac{7}{2} - \mathbf{3})^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(\frac{1}{2})^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

die die Riemannsche Zetafunktion mit $s = 2$ und deshalb konvergent ist, sodass $x = \frac{7}{2}$ auch im Konvergenzintervall liegt.

Insgesamt ist $I = [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.

e) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k! \cdot (x - \mathbf{2})^k$ hat den Entwicklungspunkt $x_0 = \mathbf{2}$.

Der Konvergenzradius ist

$$\boldsymbol{R} = \lim_{k\to\infty} \left| k! \frac{1}{(k+1)!} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \left(\frac{1}{k+1} \right) \right| = \mathbf{0}.$$

Das Konvergenzintervall besteht aus dem einzigen Punkt $x_0 = \mathbf{2}$: $I = \{2\}$.

f) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x-\mathbf{5})^k}{(k-1)!}$ hat den Entwicklungspunkt $x_0 = \mathbf{5}$.

Der Konvergenzradius ist unendlich

$$\boldsymbol{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{k!}{1} \right| = \lim_{k\to\infty} |k| = \boldsymbol{\infty},$$

sodass keine Randpunkte untersucht müssen werden. Das Konvergenzintervall ist $I = \mathbb{R}$.

g) Die Reihe muss umgeschrieben werden, um den Entwicklungspunkt $x_0 = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}$ zu ermitteln:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (7x+4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 7^k \cdot (x + \frac{4}{7})^k = \sum_{k=1}^{\infty} 7^k \cdot (x - (-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}))^k$$

Der Konvergenzradius ist

$$\boldsymbol{R} = \lim_{k\to\infty} \left| 7^k \cdot \frac{1}{7^{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{7} \right| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$$

Das Konvergenzintervall enthält $]-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}, -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}[=] - \frac{5}{7}, -\frac{3}{7}[$. Wir setzen die Randpunkte einzeln in die Reihe ein:

$x = -\frac{5}{7}$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (7(-\frac{5}{7}) + 4)^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ kann nicht konvergieren, weil $((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}\setminus 0}$ keine Nullfolge ist. Die Reihe divergiert für $x = -\frac{5}{7}$.

$x = -\frac{3}{7}$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (7(-\frac{3}{7}) + 4)^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (1)^k$ ist auch divergent, weil $(1)_{k\in\mathbb{N}\setminus 0}$ keine Nullfolge ist.

Das Konvergenzintervall ist $I =] - \frac{5}{7}, -\frac{3}{7}[$.

h) Der Entwicklungspunkt der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{k^4} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (x - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}})^4}{k^4}$ ist $x_0 = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$.

Der Konvergenzradius ist

$$\boldsymbol{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2^k}{k^4} \cdot \frac{(k+1)^4}{2^{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2^k}{2^{k+1}} \cdot \left(\frac{k+1}{k} \right)^4 \right| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

Das Konvergenzintervall enthält

$$]\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[=]1, 2[\,.$$

Die Randpunkte müssen nur noch geprüft werden.

$$x = 1: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-3)^k}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4}$$

Diese Reihe konvergiert nach Leibniz [alternierend, die Folge $(\frac{1}{k^4}{}_{k \in \mathbb{N} \setminus 0})$ ist eine monoton gegen Null konvergierende Nullfolge], d.h. $1 \in I$.

$$x = 2: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4-3)^k}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)^k}{k^4}$$

Diese Reihe ist die Riemannsche Zetafunktion mit $s = 4$, also eine konvergente Reihe. Somit ist auch $2 \in I$.

Das Konvergenzintervall ist $I = [1, 2]$.

Falls Sie Fragen zu diesem Blatt haben, schreiben Sie uns beim UNITUS-Projekt im Moses-Forum unter Analysis I für Ingenieure.

Schlagwortverzeichnis