

1. Hausaufgabe – Logik

Abgabe: 30.10.2013 in der Vorlesung

Hausaufgabe 1

5 Punkte

Stephan hat zum Kindergeburtstag eingeladen und folgende Rückmeldungen erhalten:

- (i) Wenn Roman kommt, bringt er Christoph und Sebastian mit.
- (ii) Es kommt mindestens einer der Freunde Christoph und Viktor.
- (iii) Wenn Sebastian kommt, kommt Henning nicht.
- (iv) Viktor kommt nicht.
- (v) Wenn Roman nicht kommt, kommt auch Christoph nicht.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, wer zum Kindergeburtstag kommt und wer nicht.

Hausaufgabe 2

5 Punkte

(3 Punkte) Zeigen Sie, dass das exklusive ODER assoziativ ist, das heißt, dass $(X \oplus Y) \oplus Z \equiv X \oplus (Y \oplus Z)$ gilt.

(2 Punkte) Sei NAND gegeben durch die folgende Wahrheitstabelle.

X	Y	$X \text{ NAND } Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Zeigen Sie, dass NAND nicht assoziativ ist.

Hausaufgabe 3

5 Punkte

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

- (i) $\neg(X \rightarrow (Y \rightarrow X))$.
- (ii) $(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow Y$.
- (iii) $(\neg X \rightarrow (X \wedge Y)) \rightarrow (Y \rightarrow X)$.
- (iv) $(X \vee Y) \rightarrow (X \wedge Y)$.
- (v) $(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$.

Hausaufgabe 4

5 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe nur Formeln der Aussagenlogik, die aus Variablen und den Operatoren \neg , \wedge und \vee aufgebaut sind.

Für eine Formel φ definieren wir die maximale (minimale) Tiefe $\text{max-depth}(\varphi)$ ($\text{min-depth}(\varphi)$) durch

- $\text{max-depth}(X) = \text{min-depth}(X) = 0$ für $X \in \text{AVar}$,
- $\text{max-depth}(\varphi) = 1 + \text{max-depth}(\psi)$ für $\varphi = \neg\psi$,
- $\text{min-depth}(\varphi) = 1 + \text{min-depth}(\psi)$ für $\varphi = \neg\psi$,
- $\text{max-depth}(\varphi) = 1 + \max\{\text{max-depth}(\psi), \text{max-depth}(\chi)\}$ für $\varphi = \psi * \chi$ mit $*$ $\in \{\wedge, \vee\}$,
- $\text{min-depth}(\varphi) = 1 + \min\{\text{min-depth}(\psi), \text{min-depth}(\chi)\}$ für $\varphi = \psi * \chi$ mit $*$ $\in \{\wedge, \vee\}$.

Zeigen Sie mit struktureller Induktion, dass jede Formel φ äquivalent ist zu einer Formel ψ mit $\text{max-depth}(\psi) = \text{min-depth}(\psi)$.