Begleitmaterialien zum Skript

# Lineare Algebra für Ingenieure

(Mehrmann-Rambau-Seiler)

Zusammengestellt aus den Vorlesungsmaterialien und Beispielen von K. Roegner
mit Unterstützung vom UNITUS-Projekt

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Dieses Begleitmaterial zum Skript „Lineare Algebra für Ingenieure“ von Seiler-Mehrmann-Rambau bietet Ihnen vielfältige Unterstützungsmöglichkeiten bei Ihren Lernprozessen über das ganze Semester. Es entstand aus meinen langjährigen Erfahrungen als Dozentin, Assistentin und Tutorin in diesem Kurs und berücksichtigt viele Anregungen und Rückmeldungen seitens der Ingenieurstudierenden, in denen spezifische Probleme in ihren Lernprozessen deutlich wurden. In der nachfolgenden Tabelle finden Sie eine Auswahl dieser typischen Probleme sowie konkrete Maßnahmen in diesem Begleitmaterial, die zur Vermeidung dieser Schwierigkeiten beitragen sollen:

| Problembereiche | Maßnahmen |
|---|---|
| Schwierigkeiten beim richtigen Erfassen und Verstehen von mathematischen Definitionen und Sätzen | klare Farbschemata, die Verbindungen aufzeigen, sowie ausführliche Zusatzerklärungen |
| Fehlen von ausführlichen Beispielen mit allen relevanten Zwischenschritten | Prototypische Beispiele mit ausführlichen und vollständigen Zwischenschritten |
| Mangel an Übungsmöglichkeiten für das Erlernen und Nachvollziehen der mathematischen Grundlagen | Verweise auf passende Online-Trainingsmöglichkeiten in der MUMIE sowie zwei Typen von Übungsaufgaben zur Selbstkontrolle der eigenen Lernfortschritte (Lernchecks und tiefergehende Aufgaben) |
| Tendenz zur Bevorzugung gleicher Lösungsschemata | Sofern sinnvoll Vorstellung alternativer Lösungswege und Motivation zur eigenen Entscheidungsfindung, welche Art von Lösungsweg für spezifische Fragestellungen am geeignetsten ist |
| Mangelnde Identifikation von mathematischen Zusammenhängen aufgrund fehlender Wiederholungen von Konzepten | Bezüge zu Themen aus früheren Kapiteln werden nach Möglichkeit in einem neuen Kontext wiederhergestellt. |
| Zu selektive Wahrnehmung des angebotenen Informationsmaterials, insbesondere durch zu frühzeitige Nutzung der angebotenen Lösungsbeispiele ohne vorhergehende Reflektion der Aufgabenstellung und des erforderlichen Vorwissens | Trennung der Aufgabenstellungen und der zugehörigen Musterlösungen zur Unterstützung der Eigenverantwortlichkeit in diesem wichtigen Bereich |

*Tipps*:

- Wenn Sie nicht alles unmittelbar verstehen, so ist dies als eher normaler Umstand anzusehen. Einige Themenbereiche (z.B. Teilräume, lineare Abbildungen, darstellende Matrizen) sind häufig schwer beim ersten Kennenlernen direkt komplett zu verstehen. Durch gelegentliche Wiederholungen und alternative Präsentationen wird jedoch nach einiger Zeit ein besseres Verständnis davon gewonnen.

- Führen Sie alle Übungen in diesem Begleitmaterial ohne Nutzung eines Taschenrechners durch, da dieser später in der Klausur auch nicht erlaubt ist und Sie so frühzeitig zu einer besseren Einschätzung Ihrer Fähigkeiten gelangen.

- Nutzen Sie bei der Wiederholung von Themen am besten auch den Index zum Begleitmaterial.

- Falls Sie zuweilen an der Sinnhaftigkeit eines Lernangebotes zweifeln, nutzen Sie bitte auch die in der MUMIE angebotenen Anwendungen zur Zusatzmotivation. Allerdings benötigen manche Anwendungen vielfältige interdisziplinäre Grundlagen.

## 1.1 Aufbau des Begleitmaterials

Im Folgenden sehen Sie die Struktur des hier bereitgestellten Begleitmaterials:

- Definitionen
- Sätze
- Algorithmen

Erklärungen / Bemerkungen

Beispiele

- Grundtechniken
- teils rechen-orientiert, teils theoretisch-orientiert
- Tipps

Übungen

- Lernchecks, um die Grundtechniken aus den Beispielen zu üben
- Vertiefende Aufgaben

Verweise auf passende Online-Trainingsmodule in der MUMIE - `http://www.mumie.tu-berlin.de/math`

Fragen in Klammern = Stoff zum Nachdenken

Lösungen zu allen Übungen

## 1.2 Arbeitsorganisation

Der Kurs Lineare Algebra für Ingenieure wird mit 6 Leistungspunkten (ca. 180 Stunden) versehen. Dies entspricht ungefähr 10 Stunden × 14 Wochen sowie 40 Stunden für die Vorbereitung auf die Klausur.

| Aktivität | Aufwandsabschätzung in Stunden |
|---|---|
| Prelearning (in der MUMIE) | 0,25 |
| Vorlesung | 2,00 |
| (Online-)Skript und Begleitmaterial (inklusiv Lernchecks und Online-Training) | 2,00 |
| Tutorium | 2,00 |
| Weitere Aufgaben im Begleitmaterial oder Online-Training | 1,00 |
| Hausaufgaben (MUMIE und schriftlich) | 2,75 |
| Gesamt | 10 Stunden pro Woche |

Die angegebenen Zeiten sind natürlich nur als Orientierungshilfe gedacht. Wer nicht in die Vorlesung oder das Tutorium geht, wird bestimmt mehr als 2,75 Stunden brauchen, um die Hausaufgaben zu erledigen. Wer nur gezielt Informationen in dem Begleitmaterial sucht, ist vielleicht am Anfang des Semesters schneller, hat aber wichtige Techniken für spätere Fragestellungen im Semester noch nicht entwickelt.

**Danksagung**:

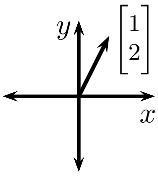
Ich möchte mich an dieser Stelle besonders bei allen Kollegen und Kolleginnen bedanken, die mich bei der Erstellung dieses Begleitmaterials durch ihre Anmerkungen und Anregungen unterstützt haben (vor allem Ruedi Seiler, Elisabeth Ludwig, Dagmar Timmreck und Michael Heimann), sowie den Mitarbeitern und Mitarbeiterinnen des UNITUS-Projekts für die Mithilfe bei der Vereinheitlichung des Layouts und der Endkorrektur des Manuskripts.
Ferner möchte ich auch allen Studierenden der ingenieurwissenschaftlichen Fachrichtungen danken, die durch konstruktive Kritik und viele Vorschläge die Inhalte und Ausformulierung dieser Begleitmaterialien mitbeeinflusst haben. Ich freue mich auch künftig auf die Anregungungen seitens der Studierenden.
Zuletzt möchte ich Ihnen allen viel Erfolg bei der linearen Algebra wünschen,

Dr. Katherine Roegner, e-mail: roegner@math.tu-berlin.de

## 2 Die Vektorräume $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{K}^n$

Ein Vektor $\vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (sprich: $v$ **definiert als der Vektor $v_1$, $v_2$ in** $\mathbb{R}$ zwei) kann man sich als einen Pfeil vorstellen, der im Nullpunkt $(0,0)$ (oder den Nullvektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) anfängt und auf den Punkt $(v_1, v_2)$ in der Zahlenebene zeigt. (Deshalb werden Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$ bei uns mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.)

Im Bild ist der Vektor $\vec{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dargestellt, wobei $\mathbb{R}^2$ die gewöhnliche Zahlenebene ist. (Notation: „:=“ heißt „ist definiert als“oder „wird definiert durch“, „$\in$“ heißt „Element von“ oder einfach „in“.)



Solch ein Pfeilmodell lässt sich auch auf den $\mathbb{R}^1$ (der Zahlenstrahl) oder den $\mathbb{R}^3$ (dreidimensionaler Raum) übertragen. Für $n \geq 4$ können wir uns $\mathbb{R}^n$ nicht mehr vorstellen. Es macht aber Sinn und ist besonders nützlich, Strukturen in $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ zu $\mathbb{R}^n$ zu erweitern oder zu abstrahieren.

Wir betrachten sogenannte Vektorräume über dem Körper

- $\mathbb{R}$ (die Menge der **reellen Zahlen**) oder
- $\mathbb{C}$ (die Menge der **komplexen Zahlen** $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, d.h. die Menge aller Zahlen der Form $a + b\boldsymbol{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ (hierbei ist $i^2 = -1$)

von der Form $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Wenn wir nicht zwischen den Körpern unterscheiden möchten, bezeichnen wir den Körper mit dem Platzhalter $\mathbb{K}$ (d.h. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Die Elemente (oder **Vektoren**) in $\mathbb{K}^n$ sind sogenannte $n$-Tupeln und werden als **Spaltenvektoren** geschrieben:

$$\vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, v_i \in \mathbb{K} \text{ für } \boldsymbol{i = 1, 2, \cdots, n}.$$

Die $v_i$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots, n}$, heißen **Einträge** oder **Komponenten** des Vektors.

*Achtung!* Mal wird $\boldsymbol{i}$ als **komplexe Zahl** betrachtet, mal wird $i$ als ein **allgemeiner Index** für beispielsweise die Einträge eines Vektors benutzt. Der Kontext entscheidet die Bedeutung. Der Buchstabe $i$ wird aber nicht für beide Bedeutungen innerhalb einer Aufgabe benutzt. Diesen Regeln sollen Sie bei Ihrer schriftlichen Arbeit auch beachten.

### 2.1 Vektorraumoperationen

**Definition** (Vektoraddition; Multiplikation mit Skalaren)

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Die zwei Operationen, **Vektoraddition** und **Multiplikation mit Skalaren** $\alpha$, sind komponentenweise definiert:

**Vektoraddition** $$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v_n} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{v_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{v_n} \end{bmatrix},$$

**Multiplikation mit Skalaren** $$\alpha \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v_n} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha\boldsymbol{v_1} \\ \alpha\boldsymbol{v_2} \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{v_n} \end{bmatrix}.$$

*Bemerkungen*:

- Häufig sagt man Addition statt Vektoraddition.
- Die Zahl $\alpha$ heißt Skalar, weil die geometrische Wirkung (beispielsweise in $\mathbb{R}^2$) der Multiplikation eines Vektors $\vec{v}$ mit einem Skalar $\alpha$ eine Skalierung des Vektors $\vec{v}$ ist. Das heißt $\vec{v}$ und $\alpha\vec{v}$ liegen auf derselben Gerade durch den Ursprung oder, in der Sprache der linearen Algebra, durch den **Nullvektor** $\vec{0} := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

(Erstellen Sie eine Skizze von den Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, um dies zu veranschaulichen.)

**Beispiele** (Vektorraumoperationen in $\mathbb{R}^2$)

Seien $\vec{u} := \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \vec{v} := \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{w} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\vec{0} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die folgenden Vektoren:

a) $\vec{u} + \vec{v}$, b) $\vec{u} - 2\vec{v}$, c) $\vec{w} + \vec{0}$, d) $\vec{w} - \vec{w}$, e) $3\vec{u} - 7\vec{w}$.

a) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$

b) $\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{u} + (-2)\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \cdot 4 \\ \mathbf{-2} \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{-8} \\ \mathbf{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{-8} \\ \mathbf{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

c) $\vec{w} + \vec{0} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{w}$

d) $\vec{w} - \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$

e) $3\vec{u} - 7\vec{w} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 28 \end{bmatrix}$

**Beispiel** (Vektorraumoperationen in $\mathbb{C}^2$)

Berechnen Sie für $\vec{u} := \begin{bmatrix} 1 + 5i \\ 2 - 3i \end{bmatrix}, \vec{v} := \begin{bmatrix} 9 \\ 7 - 8i \end{bmatrix}, \alpha = 3 + 2i$ die folgenden Vektoren:

a) $\vec{u} + \vec{v}$, b) $\vec{u} - \vec{v}$, c) $\alpha\vec{v}$.

a) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{1 + 5}\boldsymbol{i} \\ \mathbf{2 - 3}\boldsymbol{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{7 - 8}\boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{10 + 5}\boldsymbol{i} \\ \mathbf{9 - 11}\boldsymbol{i} \end{bmatrix}$

b) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{1 + 5}\boldsymbol{i} \\ \mathbf{2 - 3}\boldsymbol{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{-9} \\ \mathbf{-7 + 8}\boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-8 + 5}\boldsymbol{i} \\ \mathbf{-5 + 5}\boldsymbol{i} \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{\alpha\vec{v}} = \mathbf{(3 + 2}\boldsymbol{i}\mathbf{)} \begin{bmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{7 - 8}\boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{(3 + 2}\boldsymbol{i}\mathbf{)9} \\ \mathbf{(3 + 2}\boldsymbol{i}\mathbf{)(7 - 8}\boldsymbol{i}\mathbf{)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{27 + 18}\boldsymbol{i} \\ \mathbf{21 - 24}\boldsymbol{i} \mathbf{+ 14}\boldsymbol{i}\mathbf{- 16}\boldsymbol{i}^{\mathbf{2}} \end{bmatrix} \overset{(\boldsymbol{i}^{\mathbf{2}} \mathbf{= -1})}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{27 + 18}\boldsymbol{i} \\ \mathbf{37 - 10}\boldsymbol{i} \end{bmatrix}$

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Zeigen Sie, dass $3i \begin{bmatrix} 2i \\ 1 + i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 + 7i \end{bmatrix}$.

Training in der MUMIE: „Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$“, „Vektorraumoperationen im $\mathbb{C}^n$“

## 2.2 Vektorraumeigenschaften

**Definition** (Vektorraumeigenschaften für $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$)

Für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gelten:

| | | |
|---|---|---|
| Addition | $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ | Assoziativgesetz |
| | $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ | Hierbei ist $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ der Nullvektor. |
| | $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ | |
| | $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ | Kommutativgesetz |
| Multiplikation mit Skalaren | $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$ | Assoziativgesetz |
| | $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ | Distributivgesetz |
| | $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ | Distributivgesetz |
| | $1\vec{v} = \vec{v}$ | |

*Bemerkung*: Mit Vektoren kann fast wie mit Zahlen gerechnet werden. Eine wichtige Ausnahme: Vektoren können nicht invertiert werden, d.h. durch Vektoren darf auch nicht geteilt werden.

## 2.3 Linearkombinationen

**Definition** (Linearkombination)

Eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{K}^n$ ist von der Gestalt

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k$$

für Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

Eine Linearkombination von gegebenen Vektoren ist eine Summe von Vielfachen von diesen Vektoren.

**Beispiel** (Linearkombination)

Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ eine Linearkombination von $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist.

Wir müssen den Vektor als eine Summe von Vielfachen von $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ darstellen.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 1\alpha_1 \\ 2\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\alpha_2 \\ 1\alpha_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} & \text{Multiplikation mit Skalaren} \\
\begin{bmatrix} 1\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 1\alpha_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} & \text{Vektoraddition} \\
1\alpha_1 + 3\alpha_2 &= -3 & \text{Komponentenvergleich - erste Komponente} \\
2\alpha_1 + 1\alpha_2 &= 4 & \text{Komponentenvergleich - zweite Komponente}
\end{aligned}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem (Antwort: $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -2$). Die Antwort kann einfach geprüft werden:

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

*Bemerkung*: Im 4. Kapitel lernen wir, wie geeignete Skalare für größere Systeme berechnet werden können.

**2. Aufgabe** (Lerncheck)

a) Bestimmen Sie Skalare $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist.

b) Ist es möglich, den Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ darzustellen?

Training in der MUMIE: „Linearkombination im $\mathbb{R}^2$“, „Linearkombination im $\mathbb{R}^n$“

## 2.4 Die lineare Hülle

**Definition** (lineare Hülle, Spann)

Die **lineare Hülle** oder der **Spann** von einer Menge gegebener Vektoren $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{K}^n$ ist definiert durch

$$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} := \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}.$$

*Bemerkungen:*

- Die lineare Hülle (alternativ Spann) von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ ist die Menge aller möglichen Linearkombinationen der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ mit Skalaren $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.
- Die Skalare $\alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$, werden auch *Koeffizienten* oder *Parameter* genannt.
- Die mathematische Schreibweise „span“ wird nur mit einem „n“ geschrieben, da dies aus der englischen Sprache kommt.

**Beispiel** (Spann oder lineare Hülle)

Beschreiben Sie die Mengen $M_1 := \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ und $M_2 := \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Weil $M_1$ die Menge aller möglichen Linearkombinationen der einzelnen Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist, gilt:

$$M_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

Von daher kann $M_1$ als die Gerade $y = x$ in der Ebene betrachtet werden.

Für $M_2$ bemerken wir, dass $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, d.h. $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Daraus folgt, dass $M_2$ ebenfalls als die Gerade $y = x$ in der Ebene betrachtet werden kann.

**3. Aufgabe** (Lerncheck)

Beschreiben Sie die Menge $M_3 := \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ in $\mathbb{R}^3$.

**4. Aufgabe**

Welche der Vektoren $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind in $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ enthalten?

## 2.5 Teilräume (Unterräume)

**Definition** (Teilraum)

Sei $T$ eine Teilmenge des $\mathbb{K}^n$ (Notation: $T \subseteq \mathbb{K}^n$). $T$ ist ein **Teilraum** des $\mathbb{K}^n$, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $T$ ist eine *nicht leere* Menge (d.h. $T \neq \emptyset$),

(2) $T$ ist *abgeschlossen bzgl. der Addition* (d.h. für alle $\vec{u}, \vec{v} \in T$ gilt $\vec{u} + \vec{v} \in T$),

(3) $T$ ist *abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit Skalaren* (d.h. für alle $\vec{v} \in T, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\alpha\vec{v} \in T$).

*Bemerkungen*:

- Das Symbol für Teilmenge $\subseteq$ wird oft als „ist enthalten in“ oder einfach „in“ gelesen.
- Es gibt **kein** Symbol für „ist Teilraum“.
- Ist $T$ ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$, so ist $T$ auch ein Vektorraum. D.h. falls die nicht leere Menge $T$ abgeschlossen bzgl. der Addition und Multiplikation mit Skalaren ist, dann erfüllt $T$ alle anderen Vektorraumeigenschaften.
- Ist $T$ ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$, so sind für die Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in T$ und die Skalaren $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ wegen (3) $\alpha\vec{u}$ und $\beta\vec{v}$ in $T$. Wegen (2) liegt deren Summe $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ auch in $T$. Diese Überlegung zeigt, dass ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen bzgl. Linearkombinationen ist.
- $\mathbb{K}^n$ ist ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$.
- $\vec{0}$ ist ein Element von jedem Teilraum des $\mathbb{K}^n$:

  Sei $T$ ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$. Nach der Definition ist $T$ nicht leer. Es existiert also ein Element $\vec{t} \in T$. Jeder Körper enthält das Element 0 und $T$ ist nach Definition abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit Skalaren, sodass $0\vec{t} = \vec{0} \in T$.

  Dies bedeutet für eine Menge $M \subseteq \mathbb{K}^n$, aus $\vec{0} \notin M$ folgt $M$ ist kein Teilraum des $\mathbb{K}^n$.

**Beispiel** (Teilräume)

Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des $\mathbb{R}^2$?

$$M_1 := \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\} \qquad\qquad M_4 := \left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{x_1}\\\boldsymbol{x_2}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x_1}^2\right\}$$

Behauptung: $M_1 := \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

Beweis: Wir zeigen, dass die drei Bedingungen erfüllt sind ($M_1$ ist (1) nicht leer, (2) abgeschlossen bzgl. der Addition und (3) abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit Skalaren).

(1) $M_1$ ist nicht leer, weil nach Definition der linearen Hülle gilt: $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \in M_1$.

(2) Seien $\vec{u}, \vec{v} \in M_1$. Dann sind $\vec{u} = \alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ und $\vec{v} = \alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ für passende Skalare $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Die Summe

$$\vec{u} + \vec{v} = \alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha_2\\\alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_1+\alpha_2\end{bmatrix} = (\alpha_1+\alpha_2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \in M_1$$

liegt in $M_1$ und $M_1$ ist damit abgeschlossen bzgl. der Addition.

(3) Seien $\vec{u} \in M_1$, d.h. $\vec{u} = \alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ für ein $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, und $\beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\beta\vec{u} = (\beta \cdot \alpha_1)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \in M_1$. $M_1$ ist abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit Skalaren.

Weil die drei Bedingungen eines Teilraums erfüllt sind, ist $M_1$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

Behauptung: Die Menge $M_4 := \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x_1}^2 \right\}$ ist *kein* Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

Beweis: Der Vektor $\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ liegt in $M_4$, weil $\mathbf{1} = \mathbf{1}^2$ gilt. Da $2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ aber $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \notin M_4$ (ein Vektor in $M_4$ mit erster Komponente 2 müsste $2^2 = 4$ als zweite Komponente haben), ist für $M_4$ die Multiplikation mit Skalaren nicht abgeschlossen, sodass $M_4$ kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

*Bemerkungen:*

- Ist eine Menge ein **Teilraum** eines Vektorraums (wie bei $M_1$), dann muss man die Teilraumbedingungen für alle Elemente des Vektorraums und Skalare überprüfen, also „**mit Buchstaben rechnen**“.
- Ist eine Menge **kein Teilraum** eines Vektorraums (wie bei $M_4$), genügt es ein konkretes Beispiel zu finden, in dem eine Teilraumbedingung verletzt wird. Man nennt solch ein Beispiel ein **Gegenbeispiel**.

**5. Aufgabe** (Lerncheck)

Gehen Sie wie in dem obigen Beispiel vor, um zu zeigen, dass $M_5 := \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

**6. Aufgabe**

a) Ist $V := \{\vec{0}\}$ ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$ ? b) Ist $M_6 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x+7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$?

Training in der MUMIE: „Teilraumbeweise“

## 2.6 Erzeugendensystem

**Definition** (Erzeugendensystem)

Sei $M$ eine Teilmenge von dem Teilraum $T$ des $\mathbb{K}^n$. $M$ ist ein **Erzeugendensystem** von $T$, falls jedes Element in $T$ durch mindestens eine Linearkombination der Elemente in $M$ erzeugt werden kann, d.h. falls span $M = T$ gilt.

**Beispiel** (Erzeugendensystem)

Sei $T := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 0 \right\}$. Welche der folgenden Teilmengen von $T$ sind Erzeugendensysteme von $T$?

$$N_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad N_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$N_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von $T$, denn $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y-x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$N_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ist *kein* Erzeugendensystem von $T$: Der Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in T$ kann nicht durch die Vektoren in $N_2$ erzeugt werden, denn die **ersten beiden Komponenten** jeder Linearkombination müssen **gleich** sein:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1 + 2\alpha_2} \\ \boldsymbol{\alpha_1 + 2\alpha_2} \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für alle } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

**7. Aufgabe** (Lerncheck)

Sei $T := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| z = 0 \right\}$. Ist $N_3 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq T$ ein Erzeugendensystem von $T$?

## 2.7 Lineare (Un)Abhängigkeit

Der dritte Vektor in $N_3$ aus der vorangehenden Aufgabe liefert keine weitere Elemente von $T$ durch Linearkombinationen mit den Elementen aus $N_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, denn $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ liegt schon in der Ebene, die durch $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ aufgespannt wird:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Durch Umformung bekommen wir

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sodass auch die folgende Gleichung gilt:

$$\beta \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 5\beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für alle } \beta \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichung

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

hat also mehrere (eigentlich unendlich viele) Lösungen, u.a. *die triviale Lösung* (d.h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$).

Wir sehen, dass es mehrere Lösungen zu der Gleichung (1) gibt, wenn ein Erzeugendensystem „zu groß“ ist. Dies kann nicht passieren, wenn ein Erzeugendensystem „klein genug“ ist. Um ein Erzeugendensystem $M$ zu beschreiben, in dem der Nullvektor nur durch die triviale Linearkombination der Vektoren in $M$ (d.h. mit allen Koeffizienten gleich 0), führen wir den Begriff „lineare Unabhängigkeit“ ein.

**Definition** (lineare Unabhängigkeit; lineare Abhängigkeit)

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{K}^n$ sind **linear unabhängig**, falls die Gleichung

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

*nur* die triviale Lösung $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ hat. Falls die Gleichung mehr als eine Lösung hat, heißen die Vektoren **linear abhängig**.

Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sind linear abhängig, da die Gleichung (1) mehr als eine Lösung hat, wie in der Motivation gezeigt wurde.

Die Vektoren $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ sind aber linear unabhängig, weil die Gleichung

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{2}$$

nur die triviale Lösung hat: Aus (2) folgt $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_1+\alpha_2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ und somit die eindeutige Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Dies bedeutet, dass für einen beliebigen Vektor $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung $\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ höchstens eine Lösung hat. (Überlegen Sie sich, warum dies so ist.)

Training in der MUMIE: „Lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{R}^2$“

## 2.8 Basis

Nun sind wir bereit, ein „kleinstes“ Erzeugendensystem zu beschreiben.

**Definition** (Basis)

Sei $T \neq \{\vec{0}\}$ ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$. Eine **Basis von** $T$ ist eine Menge $\mathcal{B} \subseteq T$ mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem,
(2) Die Vektoren in $\mathcal{B}$ sind linear unabhängig.

Für den Vektorraum $V = \{\vec{0}\}$ wird die Basis $\mathcal{B}_{\text{Null}} := \emptyset$ definiert.

*Bemerkungen:*

• Ist $M$ ein Erzeugendensystem von $T$, dann hat jeder Vektor in $T$ mindestens eine Darstellung als Linearkombination der Vektoren in $M$. Ist $M$ linear unabhängig, dann hat jeder Vektor in $T$ höchstens eine Darstellung als Linearkombination der Vektoren in $M$. Ist $M$ eine Basis, dann hat jeder Vektor in $T$ gleichzeitig mindestens eine und höchstens eine Darstellung (also genau eine Darstellung) als Linearkombination der Vektoren in $M$. Diese eindeutige Darstellung von jedem Vektor eines Vektorraums bzgl. einer Basis $M$ ist wichtig für fast jedes Kapitel!

• Ist $T$ ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$ und $T \neq \{\vec{0}\}$, dann gibt es mehrere Basen von $T$. Die eindeutige Darstellung in dem obigen Punkt bezieht sich auf eine festgelegte Basis.

• Basen werden oft mit $\mathcal{B}$ bezeichnet.

• Es gibt ein Unterschied zwischen dem trivialen Vektorraum $\{\vec{0}\}$ und der leeren Menge $\emptyset$, die auch als $\{\,\}$ bezeichnet werden kann. Die leere Menge besitzt kein Element. Der triviale Vektorraum enthält den Nullvektor, den wir als „Punkt“ betrachten können, und das ist nicht „nichts“.

**Beispiel** (Basen)

Welche der folgenden Mengen sind Basen von $T := \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 0 \right\}$?

$$N_1 := \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}, \quad N_3 := \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} \right\}$$

Wir haben schon bewiesen, dass $N_1 := \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von $T$ ist, weil $N_1$ ein Erzeugendensystem von linear unabhängigen Vektoren ist.

$N_3 := \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} \right\}$ ist *keine* Basis von $T$, weil die Vektoren in $N_3$ nicht linear unabhängig sind (siehe Seite 11).

**8. Aufgabe**

Ist die Menge $N_4 := \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von $T := \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 0 \right\}$ ?

**9. Aufgabe**

Jedes Element des Vektorraums $V$ lässt sich eindeutig als eine Linearkombination aus Vektoren in einer gegebenen Basis darstellen. Bestimmen Sie die Darstellung von $\begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} \in T := \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 0 \right\}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$ von $T$ bzw. bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} \right\}$ von $T$.

**Definition** (Dimension)

Jede Basis $\mathcal{B}$ eines Vektorraums $V$ enthält die gleiche Anzahl $|\mathcal{B}|$ von Vektoren. Die **Dimension** von $V$ ist gegeben durch $\dim V = |\mathcal{B}|$.

**Beispiel** (Dimension)

Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Vektorräume:

a) $T := \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 0 \right\}$ b) span $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} \right\}$ c) $\mathbb{R}^2$

Durch Vorarbeit können wir die Dimension einige Vektorräume einfach bestimmen.

a) $\dim T = 2$, denn $N_2$ genau zwei Elementen enthält (Notation: $|N_2| = 2$).

b) $\dim \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} \right\} = 2$

c) $\mathcal{B}_{\text{Std}} := \left\{ \vec{e}_1 := \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\}$ ist die **Standardbasis** von $\mathbb{R}^2$, also ist $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

**Definition** (Standardbasis des $\mathbb{K}^n$)

Die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{K}^n, n \geq 1$, ist $\mathcal{B}_{\text{Std}} := \left\{ \vec{e}_1 := \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \ldots, \vec{e}_n := \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$.

**10. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Vektorräume:

a) $\mathbb{R}^3$ b) span $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$ c) $\{\vec{0}\}$

Training in der MUMIE: „Erzeugendensystem und Dimension eines Teilraums des $\mathbb{R}^3$“

## 2.9 Lösungen bzw. Lösungssskizzen zu den Aufgaben im 2. Kapitel

**1. Aufgabe** In $\mathbb{C}^2$ ist $3i\begin{bmatrix}2i\\1+i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\4i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\boldsymbol{i^2}\\3i+3\boldsymbol{i^2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\4i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\-3+3i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\4i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-3+7i\end{bmatrix}$, weil aus $i=\sqrt{-1}$ folgt $\boldsymbol{i^2=-1}$.

**2. Aufgabe** a) $\alpha_1=2,\alpha_2=-3$; b) Nein, die 1. und 3. Komponenten müssen gleich sein. (Warum?)

**3. Aufgabe** Wir zeigen, dass die Menge $M_3=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\;\middle|\;\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}$ als die $xy$-Ebene in $\mathbb{R}^3$ betrachtet werden kann. Jeder Punkt (bzw. der zugehörige Vektor) in der $xy$-Ebene kann als eine Linearkombination der Vektoren $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\0\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha_1}\\\boldsymbol{\alpha_1+\alpha_2}\\0\end{bmatrix}.$$

Ein Komponentenvergleich ergibt $\boldsymbol{\alpha_1=a}$ und $\boldsymbol{\alpha_1+\alpha_2=b}\Rightarrow\alpha_2=b-a$.

**4. Aufgabe** Gegeben sind drei Vektoren $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in\mathbb{R}^3$. Es ist zu entscheiden, welche der drei Vektoren in

$$\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}\right\}=\left\{\alpha_1\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}\;\middle|\;\alpha_i\in\mathbb{R},i=1,2,3\right\}$$

liegen. Wir versuchen jeweils den Vektor $\vec{v}_i\ (i=1,2,3)$ als eine Linearkombination der Vektoren $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ darzustellen.

- $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ schreiben, weil mit $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$ gilt:

$$1\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1+0\\1+1+0\\0+1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}.$$

(Überlegen Sie sich, ob es andere mögliche Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gibt.) Daher gilt:

$$\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} \in \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

- $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \in \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, weil $0\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

- $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}3\\7\\0\end{bmatrix}$ lässt sich **nicht** als Linearkombination der Vektoren $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ schreiben, denn:

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_2+\alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\\0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Komponentenvergleich}} \left[\begin{array}{ccccc}\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 3\\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 7\\ \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0\end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc}\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 3\\ & & 0 & = & 4\\ \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0\end{array}\right].$$

Die 2. Gleichung enthält einen Widerspruch. Also hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung! Daher ist $\begin{bmatrix}3\\7\\0\end{bmatrix}$ nicht in span$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ enthalten. $\left(\text{Notation: } \begin{bmatrix}3\\7\\0\end{bmatrix} \notin \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$

Nur $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind in der linearen Hülle von $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ enthalten.

**5. Aufgabe** $M_5 := \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}\right\}$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$, falls die drei Teilraumbedingungen erfüllt sind:

1) $M_5$ ist nicht leer,
2) $M_5$ ist abgeschlossen bzgl. der Addition (für alle $\vec{u}, \vec{v} \in M_5$ gilt $\vec{u} + \vec{v} \in M_5$),
3) $M_5$ ist abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit Skalaren (für alle $\vec{v} \in M_5, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha\vec{v} \in M_5$).

1) Es gilt nach Definition von Spann : $\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix} \in M_5.$

2) Seien $\vec{u}, \vec{v} \in M_5$. Dann ist $\vec{u} = \boldsymbol{\alpha_1}\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha_2}\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}$ und $\vec{v} = \boldsymbol{\beta_1}\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + \boldsymbol{\beta_2}\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}$ für Skalaren $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ und damit ist

$$\vec{u} + \vec{v} = \boldsymbol{\alpha_1}\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha_2}\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix} + \boldsymbol{\beta_1}\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + \boldsymbol{\beta_2}\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix} = \boldsymbol{(\alpha_1 + \beta_1)}\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + \boldsymbol{(\alpha_2 + \beta_2)}\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix} \in M_5.$$

3) Seien $\vec{v} \in M_5$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\vec{v} = \beta_1\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + \beta_2\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}$ mit $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Also ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\vec{v} = \alpha\left(\beta_1\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + \beta_2\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}\right) = (\alpha\beta_1)\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + (\alpha\beta_2)\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}$$

auch in $M_5$. Von daher ist $\alpha\vec{v} \in M_5$.

Weil die drei Teilraumkriterien erfüllt sind, ist $M_5$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

**6. Aufgabe** a) Wir zeigen, dass $V := \{\vec{0}\}$ ist ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$.

(1) $\vec{0} \in V \Rightarrow V$ ist nicht leer.
(2) für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ ist $\vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$ und $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in V$,
(3) für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $\vec{v} \in V$ ist $\alpha\vec{v} = \alpha\vec{0} = \vec{0} \in V$.
Die Teilraumbedingungen sind erfüllt, sodass $V$ ein Teilraum des $\mathbb{K}^n$ ist.

b) Der Nullvektor ist nicht in $M_6$, weil $x$ und $x + 7$ nicht gleichzeitig Null sein können. Im Bezug auf die letzte Bemerkung nach der Definition eines Teilraums ist $M_6$ kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

*Bemerkung:* $\vec{0} \notin M_6$ heißt nicht, dass $M_6$ leer ist $\left(\text{z.B. } \begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix} \in M_6\right)$.

**7. Aufgabe** $N_3 := \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von $T$, weil $N_1 \subseteq N_3 \subseteq T$ und $N_1$ schon ein Erzeugendensystem von $T$ ist.

**8. Aufgabe** $N_4$ ist eine Basis von $T$:

$N_4$ ist in $T$ enthalten, weil die 3. Komponenten der Vektoren in $N_4$ Null sind. Die *zwei* Vektoren in $N_4$ sind kein Vielfaches voneinander, also sind sie linear unabhängig. (Warum? Achtung! Das Argument geht nur für zwei Vektoren!) Ferner ist $N_4$ ein Erzeugendensystem, weil jeder Vektor in $T$ sich als eine Linearkombination der Vektoren $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix}$ schreiben läßt: $\left(\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}\right) = \left(-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}y\right) \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right) \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix}$ .

**9. Aufgabe** Bzgl. $\mathcal{B}_1$ ist

$$\begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} .$$

Bzgl. $\mathcal{B}_2$ ist

$$\begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix} .$$

Die eindeutigen Koeffizienten bzgl. einer gegebenen Basis heißen *Koordinaten*, die in den kommenden Wochen immer wichtiger werden.

**10. Aufgabe** a) $\mathcal{B}_{\text{Std}} := \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ ist die **Standardbasis** von $\mathbb{R}^3$, also ist $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

b) $\dim \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} \right\} = 1$, denn $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$ sind linear abhängig.

c) Weil die Anzahl der Vektoren in der Basis $\{\}$ des Vektorraums $\{\vec{0}\}$ Null ist, gilt $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

# 3 Matrizen

## 3.1 Definition und Beispiele von Matrizen

**Definition** (Matrix)
Eine **Matrix** ist eine Anordnung von Zahlen in $m$ Zeilen und $n$ Spalten. Die „Größe“ der Matrix heißt **Format** und gibt die Anzahl von Zeilen und Spalten ($m \times n$, gesprochen $m$ Kreuz $n$).

$$m \;=\; \begin{array}{c}\text{Anzahl}\\ \text{der}\\ \text{Zeilen}\end{array} \;\begin{array}{c}\nearrow\\ \rightarrow\\ \searrow\end{array}\; \begin{array}{c} n = \text{Anzahl der Spalten}\\ \swarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \searrow\\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \end{array} =: A$$

$$a_{i,j} = \text{Eintrag in der } i\text{-te Zeile und } j\text{-te Spalte der Matrix } A$$

Notation: $A := (a_{i,j}) := (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$

*Achtung!* $[a_{i,j}]$ bezeichnet die $1 \times 1$ Matrix mit einzigem Eintrag $a_{i,j}$

Notation: $\mathbb{K}^{m,n}$ bezeichnet die Menge aller Matrizen vom Format $m \times n$ mit Einträge in $\mathbb{K}$.

*Bemerkung:* Vektoren können als Matrizen mit einer Spalte betrachtet werden.

**Beispiel** (Matrizen)
Gegeben seien die Matrizen

$$A = (a_{i,j}) := \begin{bmatrix} 4 & \mathbf{5} & 6\\ \mathbf{7} & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad B = (b_{k,l}) := \begin{bmatrix} i & \mathbf{-6}\\ \mathbf{2+3i} & 4\\ 0 & -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,2},$$

$C = (c_{m,1}) := \begin{bmatrix} 19\\ -7\\ \mathbf{8} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1} = \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $b_{1,2}$, $b_{2,1}$, $c_{3,1}$.

Die erste Zahl im Index bezeichnet die Zeile, die Zweite die Spalte. Um beispielsweise $a_{1,2}$ zu bestimmen, lesen wir den Eintrag in der **1**. Zeile und **2**. Spalte von $A$ ab:

$$a_{1,2} = \mathbf{5}, \quad a_{2,1} = \mathbf{7}, \quad b_{1,2} = \mathbf{-6}, \quad b_{2,1} = \mathbf{2+3i}, \quad c_{3,1} = \mathbf{8}.$$

### 3.1.1 Grundlegende Matrixtypen

**Definition** (quadratische Matrix)
Eine **quadratische** Matrix ist vom Format $n \times n$.

Eine quadratische Matrix hat die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten, z.B. sind

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

quadratische Matrizen.

**Definition** (besondere quadratische Matrizen)

•$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist eine **obere Dreiecksmatrizen**, falls $a_{i,j} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$.

•$D = (d_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist eine **Diagonalmatrix**, falls $d_{i,j} = 0$ für $1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j$.

•$I_n = (e_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist eine **Einheitsmatrix**, falls $e_{i,j} = 0$ für $1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j$ und $e_{i,i} = 1$ für $1 \leq i \leq n$.

**Beispiele**

obere Dreiecksmatrizen $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1,1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{bmatrix}$ $(*\ \text{ beliebig})$

Diagonalmatrizen $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{n,n} \end{bmatrix} =: \operatorname{diag}\{d_{1,1}, \dots, d_{n,n}\}$

Einheitsmatrizen $I_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_n := \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

*Bemerkungen:*

- Die Diagonale einer Matrix läuft von oben links nach unten rechts. Die Komponenten haben die Form $a_{i,i}$.
- Bei einer oberen Dreiecksmatrix müssen alle Einträge unterhalb der Diagonalen Null sein. Die Einträge auf und oberhalb der Diagonalen sind beliebig.
- Bei einer Diagonalmatrix müssen alle Einträge unterhalb und oberhalb der Diagonalen Null sein. Die Einträge auf der Diagonalen sind beliebig.
- Eine Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. (Die Notation $I_n$ kommt von einer anderen Bezeichnung der Einheitsmatrix, nämlich die **Identitätsmatrix** vom Format $n \times n$.) Man merkt, dass die $i$-te Spalte der Einheitsmatrix einfach der $i$-te Standardbasisvektor $\vec{e}_i$ des $\mathbb{R}^n$ ist.

### 3.1.2 Transponierte und adjungierte Matrix, weitere Matrixtypen

**Definition** (transponierte Matrix; symmetrisch; antisymmetrisch)

Sei $A := (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Die zu $A$ **transponierte Matrix** ist gegeben durch $A^T := (b_{i,j})$, wobei $b_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}} := a_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}}$, $1 \leq i,j \leq n$; d.h. $A^T \in \mathbb{K}^{n,m}$.

Die Matrix $A$ ist **symmetrisch**, falls $A^T = A$.

Die Matrix $A$ ist **antisymmetrisch**, falls $A^T = -A$.

Um $A$ zu transponieren, wird die $i$-te Zeile von $A$ als die $i$-te Spalte von $A^T$ geschrieben.

**Beispiele** (Transponieren; symmetrisch; antisymmetrisch)

$A := \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3} \quad A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$

$B := \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ Die Matrix $B$ ist **symmetrisch**, weil $B = B^T$.

$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{-1} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ Die Matrix $C$ ist **antisymmetrisch**, weil $C = -C^T$.

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Gegeben seien die Matrizen $C := \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i & 3 \\ 4i & 5 & 6-i \end{bmatrix}$ und $D := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie $C^T$ und $D^T$. Welche der Matrizen ist symmetrisch?

**2. Aufgabe**

Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.
a) Ist die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ symmetrisch, so ist $A$ quadratisch.
b) Ist die Matrix $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ quadratisch, so ist $B$ auch symmetrisch.
c) Ist die Matrix $D \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine Diagonalmatrix, so ist $D$ auch symmetrisch.

Training in der MUMIE: „Transponierte einer Matrix“

**Definition** (adjungierte Matrix; selbst-adjungierte Matrix)
Hat eine komplexe Zahl die Form $z := a + bi$, so ist die **Konjugierte** zu $z$

$$\overline{z} := \overline{a + bi} = a - bi.$$

Sei $A := (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{n,n}$. Die zu $A$ **adjungierte Matrix** (Notation: $A^*$) ist gegeben durch $A^* := (b_{j,k})$, wobei $b_{j,k} := \overline{a_{k,j}}$, $1 \leq j, k \leq n$.

Die Matrix $A$ heißt **selbst-adjungiert**, falls $A = A^*$.

*Bemerkungen:*

- Die zu $A$ adjungierte Matrix $A^*$ wird durch transponieren und konjugieren (egal in welcher Reihenfolge) bestimmt.
- Ist $A$ eine reelle Matrix, so ist die adjungierte Matrix $A^*$ genau die transponierte Matrix $A^T$. (Warum?)

**Beispiele** (adjungieren)

$$C := \begin{bmatrix} \mathbf{1+i} & \mathbf{1-2i} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4i} & \mathbf{5} & \mathbf{6-i} \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1+i} & \mathbf{4i} \\ \mathbf{1-2i} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6-i} \end{bmatrix}, \quad C^* = \begin{bmatrix} \mathbf{1-i} & \mathbf{-4i} \\ \mathbf{1+2i} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6+i} \end{bmatrix}$$

$F := \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $F^T = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $F^* = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ $F$ ist **selbst-adjungiert**, weil $F = F^*$ gilt.

Training in der MUMIE: „Adjungierte einer Matrix“, „Matrixtypen“

### 3.2 Matrizen als Vektorraum

Wie bei $\mathbb{K}^n$ wollen wir die Menge $\mathbb{K}^{m,n}$ als Vektorraum betrachten, auch wenn eine Matrix als Pfeil schwer vorzustellen ist. Wir erinnern uns aber daran, dass ein Vektor als eine Matrix mit einer Spalte betrachtet werden kann. Dies hilft uns zu entscheiden, wie wir bei $\mathbb{K}^{m,n}$ die Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar definieren müssen, um $\mathbb{K}^{m,n}$ eine Vektorraumstruktur zu geben.

**Definition** (Vektorraumoperationen für Matrizen)

Mit der folgenden **Addition** und **Multiplikation mit einem Skalar** erfüllt die Menge $\mathbb{K}^{m,n}$ die Vektorraumeigenschaften:

- Die Summe von zwei Matrizen $A := (a_{i,j}), B := (b_{i,j}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ vom selben Format ist gegeben durch

$$A + B := (a_{i,j} + b_{i,j}).$$

- Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ ist

$$\alpha A := (\alpha a_{i,j}).$$

Genau wie die Vektoraddition ist die Addition von Matrizen komponentenweise definiert. Bei der Multiplikation mit einem Skalar wird jeder Eintrag mit dem Skalar multipliziert, genau wie bei den Vektoren. (Vergleichen Sie die Definitionen im 2. Kapitel.)

**Beispiele** (Vektorraumoperationen für Matrizen)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

$$i \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 3+i \\ 1-i & 3 & 3-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i+i^2 & 2i & 3i+i^2 \\ i-i^2 & 3i & 3i-2i^2 \end{bmatrix} \overset{(i^2=-1)}{=} \begin{bmatrix} -1+i & 2i & -1+3i \\ 1+i & 3i & 2+3i \end{bmatrix}$$

Training in der MUMIE: „Linearkombination von Matrizen“

## 3.3 Matrixmultiplikation

Bisher haben wir nur Matrizen mit einem Skalar multipliziert. Es ist jedoch möglich zwei Matrizen miteinander unter bestimmten Bedingungen zu multiplizieren. Die Definition wirkt vielleicht am Anfang etwas komisch. Diese Definition ist aber sehr sinnvoll, wie wir im 6. Kapitel sehen werden, weil es mit der Komposition von sogenannten linearen Abbildungen, die wir gleich einführen (siehe Abschnitt 3.5) werden, übereinstimmt.

**Definition** (Matrixmultiplikation)

Seien $A := (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{m,n}, B := (b_{j,k}) \in \mathbb{K}^{n,p}$. Das Produkt der Matrizen $A$ und $B$ ist gegeben durch

$AB = (c_{i,k}) \in \mathbb{K}^{m,p}$, wobei $c_{i,k} := \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}$.

Beispielsweise ist $c_{1,2} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + \cdots + a_{1,n}b_{n,2}$.

*Bemerkungen:*

- Das Produkt von zwei Matrizen $AB$ ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von $A$ gleich der Anzahl von Zeilen in $B$ ist:
Eine Matrix vom Format $m \times n$ mal einer Matrix vom Format $n \times p$ ergibt eine Matrix vom Format $m \times p$
- Um den $i,k$-ten Eintrage zu bestimmen, wird die $i$-te Zeile mit der $k$-ten Spalte „multipliziert“. (Vgl. Beispiel unten.)

**Beispiel** (Matrixmultiplikation)

Bestimmen Sie für

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ 10 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

die Produkte $AB$ und $BA$.

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{11} \\ \mathbf{10} & \mathbf{9} \\ \mathbf{8} & \mathbf{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \cdot \mathbf{12} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{8} & \mathbf{1} \cdot \mathbf{11} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{9} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{7} \\ \mathbf{2} \cdot \mathbf{12} + \mathbf{4} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{6} \cdot \mathbf{8} & \mathbf{2} \cdot \mathbf{11} + \mathbf{4} \cdot \mathbf{9} + \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 + 30 + 40 & 11 + 27 + 35 \\ 24 + 40 + 48 & 22 + 36 + 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82 & 73 \\ 112 & 100 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{11} \\ \mathbf{10} & \mathbf{9} \\ \mathbf{8} & \mathbf{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{12} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{11} \cdot \mathbf{2} & \mathbf{12} \cdot \mathbf{3} + \mathbf{11} \cdot \mathbf{4} & \mathbf{12} \cdot \mathbf{5} + \mathbf{11} \cdot \mathbf{6} \\ \mathbf{10} \cdot \mathbf{1} + \ \mathbf{9} \cdot \mathbf{2} & \mathbf{10} \cdot \mathbf{3} + \ \mathbf{9} \cdot \mathbf{4} & \mathbf{10} \cdot \mathbf{5} + \ \mathbf{9} \cdot \mathbf{6} \\ \mathbf{8} \cdot \mathbf{1} + \ \mathbf{7} \cdot \mathbf{2} & \mathbf{8} \cdot \mathbf{3} + \ \mathbf{7} \cdot \mathbf{4} & \mathbf{8} \cdot \mathbf{5} + \ \mathbf{7} \cdot \mathbf{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 80 & 126 \\ 28 & 66 & 104 \\ 22 & 52 & 82 \end{bmatrix}$$

Wie das Beispiel zeigt, ist die Matrixmultiplikation im Gegensatz zu den reellen Zahlen nicht kommutativ, d.h. $AB$ muss nicht unbedingt $BA$ sein.

Weitere Unterschiede zu den reellen Zahlen sollen Sie anhand der folgenden Aufgabe untersuchen. Beispielsweise ist das Produkt zweier reeller Zahlen Null, so muss eine der Zahlen Null sein ($a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$). Diese Eigenschaft ist für Matrizen *nicht* vorhanden.

**3. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie für

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

jeweils das Produkt $AB, BA, AC, CA$, falls dieses definiert ist.

**4. Aufgabe**

Zeigen Sie, dass für eine beliebige Matrix $D \in \mathbb{K}^{3,3}$ gilt $DI_3 = I_3D = D$.

Training in der MUMIE: „Training der Matrixmultiplikation“

Bei quadratischen Matrizen verhält sich $I_n$ wie die 1 bei den reellen Zahlen: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Falls $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ nicht quadratisch ist, kann $I_n$ nicht auf beiden Seiten multipliziert werden. Ganz konkret betrachten wir eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ (wie in dem vorangehenden Beispiel). $AI_3 = A$ aber $I_3A$ ist gar nicht definiert. (Warum nicht?) Natürlich hätten wir $A$ links mit $I_2$ multiplizieren können: $I_2A = A$. Aber $I_2$ und $I_3$ sind verschiedene Matrizen. Wir können also eine „Eins“ für $A$ nicht *eindeutig* definieren.

Genau so problematisch ist es zu invertieren. In den reellen Zahlen sind alle $a$ ungleich Null invertierbar und $a^{-1} = \frac{1}{a}$ und $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$. Weil die „Eins“ für nichtquadratische Matrizen nicht eindeutig definiert ist, beschränken wir uns auf quadratische Matrizen, um den Begriff Invertierbarkeit zu definieren. (Die Erweiterung des Begriffs zu Linksinverse und Rechtsinverse für nicht-quadratische Matrizen ist möglich jedoch außerhalb des Rahmens dieses Kurses.)

**Definition / Lemma** (inverse Matrix)

(Definition) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$.
$B$ heißt die zu $A$ **inverse Matrix** (alternativ **Inverse** von $A$), falls gilt $AB = I_n$. (Notation: $A^{-1} := B$)

(Lemma) Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ **invertierbar** mit Inverse $A^{-1}$, dann gilt $A^{-1}A = I_n$, d.h. $A$ ist die zu $A^{-1}$ inverse Matrix ($(A^{-1})^{-1} = A$).

*Bemerkung:* Nicht alle quadratische Matrizen haben eine inverse Matrix.

**Beispiel** (inverse Matrix)

Zeigen Sie, dass die inverse Matrix zu $A := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ ist.

Wir müssen lediglich die Gleichung $AA^{-1} = I_2$ prüfen:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-5) + 2 \cdot 8 & 3 \cdot 2 + 2(-3) \\ 8(-5) + 5 \cdot 8 & 8 \cdot 2 + 5(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Prüfen Sie als Übung, dass die Gleichung $A^{-1}A = I_2$ erfüllt ist. Wie man die Inverse berechnet wird im 4. Kapitel behandelt.

Die folgende Matrizen sind besonders nützlich, weil sie schnell zu invertieren sind. Wie man solche Matrizen findet wird erst im 8. Kapitel erklärt.

**Definition** (orthogonale Matrizen; unitäre Matrizen)

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$. $Q$ heißt **orthogonale Matrix**, falls

$$QQ^T = I_n = Q^TQ,$$

d.h. $Q^{-1} = Q^T$.

Sei $U \in \mathbb{C}^{n,n}$. $U$ heißt **unitäre Matrix**, falls

$$UU^* = I_n = U^*U,$$

d.h. $U^{-1} = U^*$.

**5. Aufgabe** (Lerncheck)

Prüfen Sie, dass die Matrizen $Q_1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}, Q_2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ orthogonal sind.

**Beispiel** (unitäre Matrix)

Überprüfen Sie, ob $U = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ eine unitäre Matrix ist.

Wir bestimmen zuerst die adjungierte Matrix:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, U^T = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, U^* = \overline{U^T} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Weil $U$ die Definition zur unitären Matrix erfüllt:

$$UU^* = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + i \cdot (-i) & 0 \cdot i + i \cdot 0 \\ -i \cdot 0 + 0 \cdot (-i) & -i \cdot i + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist $U$ eine unitäre Matrix.

### 3.4 Lineare Abbildungen und Matrixabbildungen

Abbildungen sind wie Funktionen. Steckt man einen Wert hinein, kommt genau ein Wert heraus. Der Unterschied zwischen Abbildungen und Funktionen liegt im Wesentlichen darin, dass Abbildungen Vektoren (statt Zahlen) als Argument nehmen. Der Definitionsbereich heißt bei Abbildungen **Urbildraum** und der Wertebereich **Bildraum**.

**Definition** (Matrixabbildung)

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Die zu $A$ zugehörige **Matrixabbildung** ist gegeben durch

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m; \vec{v} \mapsto A\vec{v}.$$

*Bemerkungen:*

- Die Abbildung liest man so: $A$ ist die Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$, die $\vec{v}$ auf $A\vec{v}$ abbildet.
- In der linearen Algebra wird erwartet, dass Urbildraum und Bildraum *immer* explizit angegeben werden.
- Warum ist die Matrixabbildung $A$ eine Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$, obwohl $A \in \mathbb{K}^{m,n}$? Per Abbildungsvorschrift ist $A(\vec{v}) = A\vec{v}$, d.h. die Matrixmultiplikation muss definiert sein. Da $A$ vom Format $m \times n$ ist, muss $\vec{v}$ vom Format $n \times 1$ sein. Das Produkt ist deshalb vom Format $m \times 1$. So haben wir argumentiert, dass $A$ einen Vektor in $\mathbb{K}^n$ (Urbildraum) nimmt und diesen auf einen Vektor in $\mathbb{K}^m$ (Bildraum) abbildet.

**Beispiel** (Matrixabbildung)

Sei $A$ die Matrixabbildung, die durch die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ definiert wird. Bestimmen Sie die Bilder der Standardbasisvektoren $\vec{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, das Bild eines allgemeinen Vektors $\vec{v} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ sowie $A(x\vec{e}_1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Die zugehörige Matrixabbildung ist gegeben durch $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \vec{v} \mapsto A\vec{v}$.
Die Bilder der Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^3$ sind

$$A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{4} & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}, \quad A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}, \quad A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & \mathbf{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}.$$

(Im Allgemeinen gilt $A\vec{e}_i$ ist die $i$-te Spalte von $A$.)

Das Bild eines allgemeinen Vektors ist:

$$A(\vec{v}) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

(Das Bild eines allgemeinen Vektors ist eine Linearkombination der Spalten von $A$.)

Wir bemerken, dass $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und schreiben die Gleichung (3) leicht anders:

$$A\left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= xA\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) + yA\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) + zA\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right). \tag{4}$$

Nun betrachten wir $\{x\vec{e_1} \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{\vec{e_1}\}$, die Gerade durch den Nullpunkt und $\vec{e_1}$. Das Bild $A(x\vec{e_1}) = x\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ (siehe Gleichung (3)) ist die Gerade durch den Nullpunkt und $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$. Es kann geprüft werden, dass $A$ jede beliebige Gerade durch den Nullvektor auf einer Geraden durch den Nullvektor abbildet. Ausgehend von der Gleichung (4) charakterisieren wir allgemeine Abbildungen, die Geraden auf Geraden abbilden, wie die Matrixabbildung $A$. Hierbei versteht man den Nullvektor als 0-dimensionale Gerade. Weil das lateinische Wort für Gerade „linea“ ist, heißen solche Abbildungen lineare Abbildungen.

**Definition** (lineare Abbildungen)

Sei $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine Abbildung. $L$ heißt **linear**, falls für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{K}^n,\ \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\text{(1) } L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$$
$$\text{(2) } L(\alpha\vec{v}) = \alpha L(\vec{v})$$

*Bemerkung:*
Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ bildet den Nullvektor immer auf den Nullvektor ab, denn für $\vec{v} \in V$ gilt $L(\vec{0}) = L(0 \cdot \vec{v}) = 0 \cdot L(\vec{v}) = \vec{0}$.

**Beispiel** (lineare Abbildung)

Sei $L$ die Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$, die den Vektor $\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ auf den Vektor $\begin{bmatrix}v_1+v_2\\v_2+v_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ abbildet.
Zeigen Sie, dass $L$ eine lineare Abbildung ist.

Bevor die Aufgabe gelöst wird, betrachten wir einige Notationen, die es für die Abbildung gibt.

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}v_1+v_2\\v_2+v_3\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cccc} L: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix}v_1+v_2\\v_2+v_3\end{bmatrix}\end{array}$$

Diese zwei Schreibweisen liest man so: „$L$ ist die Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$, die den Vektor $v_1, v_2, v_3$ auf den Vektor $v_1 + v_2, v_2 + v_3$ abbildet.“

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; L\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}v_1+v_2\\v_2+v_3\end{bmatrix}$$

Hier liest man dies leicht anders: „$L$ ist die Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ mit $L$ von $v_1, v_2, v_3$ gleich der Vektor $v_1 + v_2, v_2 + v_3$.“

Zurück zum Beispiel.

Behauptung: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}v_1+v_2\\v_2+v_3\end{bmatrix}$ ist eine lineare Abbildung.

Um die Behauptung zu beweisen, müssen die zwei Bedingungen in der Definition einer linearen Abbildung nachgeprüft werden:

$$\text{(1) } L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v}) \qquad \text{(2) } L(\alpha\vec{v}) = \alpha L(\vec{v}) \qquad \text{für alle } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zu (1). Seien $\vec{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. (Wir evaluieren beide Seiten der Gleichung und wenden die Vorschriften an.)

$$\begin{aligned}
L(\vec{u}+\vec{v}) &= L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= L\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}\right) && \text{Vektoraddition in } \mathbb{R}^3 \\
&= \begin{bmatrix} (u_1+v_1)+(u_2+v_2) \\ (u_2+v_2)+(u_3+v_3) \end{bmatrix} && \text{Abbildungsvorschrift} \\
&= \begin{bmatrix} (u_1+u_2)+(v_1+v_2) \\ (u_2+u_3)+(v_2+v_3) \end{bmatrix} && u_i \text{ und } v_i \text{ zusammen gruppieren (Addition in } \mathbb{R} \text{ ist kommutativ)} \\
L(\vec{u})+L(\vec{v}) &= L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} u_1+u_2 \\ u_2+u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1+v_2 \\ v_2+v_3 \end{bmatrix} && \text{Abbildungsvorschrift} \\
&= \begin{bmatrix} (u_1+u_2)+(v_1+v_2) \\ (u_2+u_3)+(v_2+v_3) \end{bmatrix} && \text{Vektoraddition in } \mathbb{R}^2 \\
&= L(\vec{u}+\vec{v})
\end{aligned}$$

Zur (2). Seien $\vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (Wir evaluieren wiederum beide Seiten der Gleichung.)

$$\begin{aligned}
L(\alpha\vec{v}) &= L\left(\alpha\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}\right) && \text{Multiplikation mit Skalaren in } \mathbb{R}^3 \\
&= \begin{bmatrix} \alpha v_1 + \alpha v_2 \\ \alpha v_2 + \alpha v_3 \end{bmatrix} && \text{Abbildungsvorschrift} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha(v_1+v_2) \\ \alpha(v_2+v_3) \end{bmatrix} && \text{Ausklammern} \\
\alpha L(\vec{v}) &= \alpha L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha\begin{bmatrix} v_1+v_2 \\ v_2+v_3 \end{bmatrix} && \text{Abbildungsvorschrift} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha(v_1+v_2) \\ \alpha(v_2+v_3) \end{bmatrix} && \text{Skalarmultiplikation in } \mathbb{R}^2 \\
&= L(\alpha(\vec{v}))
\end{aligned}$$

Weil die zwei Bedingungen erfüllt sind, ist $L$ linear.

*Bermerkungen:*

• Die Begründungen für jeden Schritt müssen nicht gegeben werden. Es ist jedoch zu empfehlen, dies zu machen, bis ein sicherer Umgang mit dieser Beweismethode entstanden ist.

• Mit etwas Übung können im Fall einer linearen Abbildung die Bedingungen nachgewiesen werden, indem man mit der linken Seiten anfängt und die Vorschriften anwendet, bis die rechte Seite erreicht wird.

**Beispiel** (nicht-lineare Abbildung)

Zeigen Sie, dass $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_3 \end{bmatrix}$ keine lineare Abbildung ist.

Zu zeigen: eine der Bedingungen in der Definition einer linearen Abbildung ist nicht erfüllt (am besten mit einem Gegenbeispiel, weil dann kann die Bedingung nicht für alle (beliebigen) Vektoren gelten).

Nehmen wir als $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ den Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und als Skalar $\alpha = 2$. Nun berechnen wir $N(\alpha\vec{v})$ sowie $\alpha N(\vec{v})$. Ist $N$ linear, müssten die beiden Ergebnisse übereinstimmen.

$$N(\alpha\vec{v}) = N\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = N\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 \\ 4 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\alpha N(\vec{v}) = 2N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Weil $N(\alpha\vec{v}) \neq \alpha N(\vec{v})$ für $\alpha = 2$ und $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, ist $N$ nicht linear.

**6. Aufgabe** (Lerncheck)

Überprüfen Sie, ob der folgenden Abbildungen linear sind:

$$L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \vec{x} \mapsto \vec{0} \qquad L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Definition** (Kern und Bild einer linearen Abbildung)

Sei $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine lineare Abbildung.

$$\textbf{Kern}(L) := \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n \,|\, L(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^n \qquad \textbf{Bild}(L) := \{L(\vec{v}) \,|\, \vec{v} \in \mathbb{K}^n\} \subseteq \mathbb{K}^m$$

*Bemerkungen:*

• Der Kern einer linearen Abbildung $L : V \to W$ ist die Menge aller Vektoren im Urbildraum ($V$), die auf dem Nullvektor abgebildet werden.

• Das Bild einer linearen Abbildung $L : V \to W$ ist die Menge aller Vektoren im Bildraum ($W$), die ein Urbild haben. Das Bild von $L$ muss nicht unbedingt gleich dem Bildraum sein. (Beispielsweise ist das Bild von $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ geometrisch betrachtet die $xy$-Ebene im Bildraum $\mathbb{R}^3$.)

**Beispiel** (Kern und Bild)

Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 + v_3 \end{bmatrix}$.

Nach Definition des Kerns einer linearen Abbildung gilt:

$$\operatorname{Kern}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Laut Vorschrift von $L$ ist dann

$$L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 + v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Somit muss gelten (Komponentenvergleich):

$$\begin{array}{ccccc} v_1 & + & v_2 & = & 0 \\ v_2 & + & v_3 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \boldsymbol{v_1} & = -\boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} & = -\boldsymbol{v_2}. \end{array}$$

Ein Element $\begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix} \in \operatorname{Kern}(L)$ hat deshalb die Form $\begin{bmatrix} -\boldsymbol{v_2} \\ v_2 \\ -\boldsymbol{v_2} \end{bmatrix}$ oder (mit dem frei wählbaren Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$) $\begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, also

$$\operatorname{Kern}(L) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Weil $L\left(\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, spannt $\operatorname{Bild}(L)$ den gesamten Bildraum $\mathbb{R}^2$ auf:

$$\operatorname{Bild}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

**7. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $L_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \vec{x} \mapsto \vec{0}$.

**8. Aufgabe**

Sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\operatorname{Kern}(L)$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

b) $\operatorname{Bild}(L)$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^m$.

Training in der MUMIE: „Kern Bild Matrixabbildungen“, „Lineare Abbildungen, Bilder linear unabhängiger Vektoren, Kern Bild“

**Satz** (lineare Abbildungen; Matrixabbildungen)

(1) Matrixabbildungen sind immer linear.

(2) Jede lineare Abbildung $\boldsymbol{L} : \mathbb{K}^{\boldsymbol{n}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\boldsymbol{m}}$ kann als eine Matrix $A$ aufgefasst werden. Die Spalten von $A$ sind die Bilder der Standardbasisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

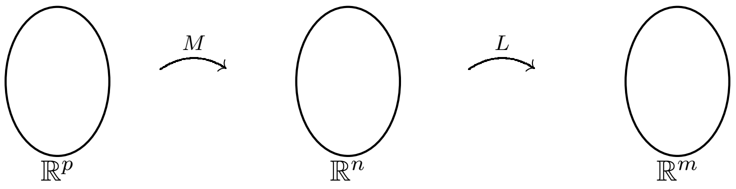
(3) Sind $\boldsymbol{L} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und $\boldsymbol{M} : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ lineare Abbildungen mit **zugehörigen Matrizen** $A$ bzw. $\boldsymbol{B}$, so ist die **Komposition** (**Hintereinanderausführung / Verknüpfung**)

$$\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{M} : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^m$$

eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix $A\boldsymbol{B}$.

*Bemerkungen:*

- (Zu (2)) Ist $A$ die zu der linearen Abbildung $L$ zugehörige Matrix, so ist das Bild der Matrixabbildung $A\vec{e}_i$ die $i$-te Spalte von $A$. D.h. die Bilder der Standardbasisvektoren in $\mathbb{K}^n$ bzgl. der Matrixabbildung $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m; \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ und die lineare Abbildung $L$ stimmen überein. Wegen der Linearität kann bewiesen werden, dass $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ ist. Ferner gilt Bild$(A)$ = span{Spalten von $A$}.
- (Zu (3)) Bei der Komposition von Matrizen wird von rechts nach links geschrieben. In dem Satz wird $M$ auf einem Vektor in $\mathbb{K}^p$ angewendet und in $\mathbb{K}^n$ abgebildet. Das Ergebnis kann in $L$ eingesetz werden und wird in $\mathbb{K}^m$ abgebildet.



$$\vec{v} \xmapsto{M} M(\vec{v}) \xmapsto{L} L(M(\vec{v}))$$

**Beispiel** (zugehörige Matrix; Komposition linearer Abbildungen)
Seien

$$L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{v_1} - 3\boldsymbol{v_2} \\ 5\boldsymbol{v_2} - 6\boldsymbol{v_1} \\ 4\boldsymbol{v_1} + 7\boldsymbol{v_2} \end{bmatrix} \qquad L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_2 + v_3 \end{bmatrix}$$

lineare Abbildungen.

a) Bestimmen Sie die zu $L_1$ und $L_2$ zugehörigen Matrizen $A_1$ und $A_2$.

b) Bestimmen Sie die Komposition $L_3 := L_1 \circ L_2$.

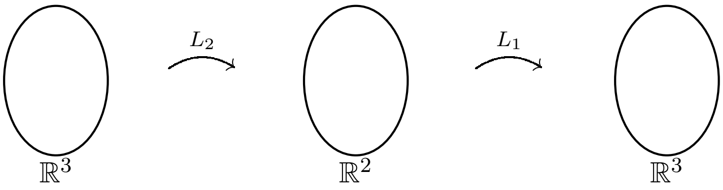
c) Bestimmen Sie die zu $L_3$ zugehörige Matrix sowie das Produkt $A_1 A_2$.

a) Wir berechnen die Bilder der Standardbasisvektoren in dem entsprechenden Urbildraum.

$$A_1 := \left[ L_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad L_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right] = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_2 := \left[ L_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad L_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad L_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $L_3 = L_1 \circ L_2$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$. Im oberen Teil des Diagramms wird gezeigt, wie die Mengen verknüpft sind. Im unteren Teil können wir die Wirkung auf den ersten Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^3$ verfolgen.



$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \xmapsto{L_2} \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \xmapsto{L_1} \begin{bmatrix}-2\\6\\-4\end{bmatrix}$$

Um das Bild eines allgemeinen Vektors in $\mathbb{R}^3$ zu bestimmen, betrachten wir die Hintereinanderausführung:

$$\begin{aligned}
L_3\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right) = L_1\left(L_2\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right)\right) &= L_1\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{-v_1}\\\boldsymbol{v_2+v_3}\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}2(\boldsymbol{-v_1})-3(\boldsymbol{v_2+v_3})\\5(\boldsymbol{v_2+v_3})-6(\boldsymbol{-v_1})\\4(\boldsymbol{-v_1})+7(\boldsymbol{v_2+v_3})\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-2v_1-3v_2-3v_3\\6v_1+5v_2+5v_3\\-4v_1+7v_2+7v_3\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Die Spalten der zu $L_3$ zugehörigen Matrix sind die Bilder der Standardbasisvektoren:

$$[L_3(\vec{e}_1)\ L_3(\vec{e}_2)\ L_3(\vec{e}_3)] = \begin{bmatrix}-2&-3&-3\\6&5&5\\-4&7&7\end{bmatrix}$$

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix}2&-3\\-6&5\\4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2&-3&-3\\6&5&5\\-4&7&7\end{bmatrix}.$$

$L_3 = L_1 \circ L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist deshalb auch die Abbildung mit zugehöriger Matrix $A_1A_2$.

**9. Aufgabe** (Lerncheck)

Benutzen Sie für die folgende Aufgabe die Abbildungen $L_1, L_2$ aus dem vorangehenden Beispiel (zugehörige Matrix; Komposition linearer Abbildungen) auf Seite 29.

a) Bestimmen Sie die Komposition $L_4 := L_2 \circ L_1$.

b) Bestimmen Sie die zu $L_4$ zugehörige Matrix sowie das Produkt $A_2A_1$.

c) Seien $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wie im letzten Beispiel. Sei $L_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ eine weitere lineare Abbildung, welche der folgenden Kompositionen sind definiert?

$$L_1 \circ L_5,\ L_5 \circ L_1,\ L_2 \circ L_5,\ L_5 \circ L_2$$

Training in der MUMIE: „Matrixabbildung“, „Lineare Abbildungen und Standardbasisvektoren“, „Von Linearen Abbildungen zu Matrizen“

## 3.5 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 3. Kapitel

**1. Aufgabe** $C^T := \begin{bmatrix} 1+i & 4i \\ 1-2i & 5 \\ 3 & 6-i \end{bmatrix} \neq C \Rightarrow C$ nicht symmetrisch, $D^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = D \Rightarrow D$ symmetrisch

**2. Aufgabe** a) Die Aussage ist richtig. Ist $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $A = A^T$, so muss die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten sein, weil beim Transponieren die Zeilen als Spalten geschrieben werden.

b) Die Aussage ist falsch. Die Aussage besagt, wenn eine Matrix quadratisch ist, können wir daraus schließen, dass sie symmetrisch ist. (Es gibt Matrizen, die gleichzeitig quadratisch und symmetrisch sind. Die Frage ist, ob alle quadratischen Matrizen symmetrisch sind. Bei einer falschen Aussage reicht es deshalb, ein einziges Gegenbeispiel zu finden.) Als Gegenbeispiel betrachten wir $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. $B$ ist vom Format $2 \times 2$ also quadratisch. $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \neq B \Rightarrow B$ ist nicht symmetrisch. Es existiert eine quadratische Matrix, die nicht symmetrisch ist. Somit ist die Aussage falsch.

c) Die Aussage ist richtig. (Es genügt nicht, ein Beispiel zu geben. Es muss gezeigt werden, dass alle Diagonalmatrizen symmetrisch sind.) Sei $D := (d_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine Diagonalmatrix und $D^T := (c_{i,j})$ die zu $D$ transponierte Matrix mit $c_{i,j} = d_{j,i}$. Für $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ ist $d_{i,j} = 0 = d_{j,i} = c_{i,j}$. Mit $i = j$ ist $d_{i,i} = c_{i,i}$. Daraus folgt $d_{i,j} = c_{i,j}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Weil $D = D^T$, ist $D$ symmetrisch.

**3. Aufgabe** $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $AC$ ist nicht definiert (die Anzahl der Spalten von $A$ ist zwei und dies ist nicht gleich 3, der Anzahl von Zeilen von $C$), $CA = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**4. Aufgabe** Setze $D := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Dann ist

$$DI_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 \\ d \cdot 1 + e \cdot 0 + f \cdot 0 & d \cdot 0 + e \cdot 1 + f \cdot 0 & d \cdot 0 + e \cdot 0 + f \cdot 1 \\ g \cdot 1 + h \cdot 0 + i \cdot 0 & g \cdot 0 + h \cdot 1 + i \cdot 0 & g \cdot 0 + h \cdot 0 + i \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = D$$

Eine ähnliche Berechnung ergibt $I_3 D = D$. (Können Sie ein theoretisches Argument nun geben?)

**5. Aufgabe**

$$Q_1 Q_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{3}{5}} & \mathbf{\frac{4}{5}} \\ -\mathbf{\frac{4}{5}} & \mathbf{\frac{3}{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{3}{5}} & -\mathbf{\frac{4}{5}} \\ \mathbf{\frac{4}{5}} & \mathbf{\frac{3}{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{3}{5}} \cdot \mathbf{\frac{3}{5}} + \mathbf{\frac{4}{5}} \cdot (\mathbf{\frac{4}{5}}) & \mathbf{\frac{3}{5}} \cdot (-\mathbf{\frac{4}{5}}) + \mathbf{\frac{4}{5}} \cdot \mathbf{\frac{3}{5}} \\ -\mathbf{\frac{4}{5}} \cdot \mathbf{\frac{3}{5}} + \mathbf{\frac{3}{5}} \cdot (\mathbf{\frac{4}{5}}) & -\mathbf{\frac{4}{5}} \cdot (-\mathbf{\frac{4}{5}}) + \mathbf{\frac{3}{5}} \cdot \mathbf{\frac{3}{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Aus $Q_1 Q_1^T = I_2$ folgt $Q_1^T Q_1 = I_2$ (siehe das Lemma auf Seite 23).

$$Q_2 Q_2^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

**6. Aufgabe** Die Linearität der Abbildungen $L_1, L_2$ wird untersucht, d.h. es wird geprüft, ob für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ gilt

(1) $L_i(\vec{u}+\vec{v}) = L_i(\vec{u}) + L_i(\vec{v})$,
(2) $L_i(\alpha\vec{v}) = \alpha L_i(\vec{v})$.

Behauptung: Die Abbildung $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \vec{v} \mapsto \vec{0}$ ist linear.
Beweis: Wir überprüfen die zwei Bedingungen.
Zu (1). Seien $\vec{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
L_1(\vec{u}+\vec{v}) &= L_1\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= L_1\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}\right) && \text{Vektoraddition} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Abbildungsvorschrift}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1(\vec{u}) + L_1(\vec{v}) &= L_1\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + L_1\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Abbildungsvorschrift} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Vektoraddition} \\
&= L_1(\vec{u}+\vec{v})
\end{aligned}$$

Zu (2). Seien $\vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
L_1(\alpha\vec{v}) &= L_1\left(\alpha\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= L_1\left(\begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}\right) && \text{Skalarmultiplikation} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Abbildungsvorschrift}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha L_1(\vec{v}) &= \alpha L_1\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \alpha\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Abbildungsvorschrift} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Skalarmultiplikation} \\
&= L_1(\alpha\vec{v})
\end{aligned}$$

Weil die zwei Bedingungen in der Definition einer linearen Abbildung erfüllt sind, ist $L_1$ linear.

Behauptung: $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist keine lineare Abbildung.

Beweis: Wir zeigen mit $\vec{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\alpha = 2$, dass die 2. Bedingung in der Definition einer linearen Abbildung nicht erfüllt ist.

$$L_2(\alpha\vec{v}) = L_2\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = L_2\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha L_2(\vec{v}) = 2L_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Weil $L_2(\alpha\vec{v}) \neq \alpha L_2(\vec{v})$ für $\alpha = 2$ und $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, ist $L_2$ nicht linear.

*Bemerkung:* Es ist nicht immer leicht, ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

**7. Aufgabe** Kern$(L_1) = \mathbb{R}^3$ und Bild$(L_1) = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, weil jeder Vektor in $\mathbb{R}^3$ auf den Nullvektor abgebildet wird.

**8. Aufgabe** **a)** Gegeben ist eine lineare Abbildung $L$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Zu zeigen: Kern$(L)$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

Kern$(L) := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, L(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$, falls gilt:

1) Kern$(L) \neq \emptyset$,

2) für alle $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in$ Kern$(L)$ gilt $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in$ Kern$(L)$,

3) für alle $\vec{v} \in$ Kern$(L), \alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha\vec{v} \in$ Kern$(L)$.

Zu 1) Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $L(\vec{0}) = L(0\vec{v}) \overset{\text{Linearität}}{=} 0 \cdot L(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in$ Kern$(L) \Rightarrow$ Kern$(L) \neq \emptyset$

*Bemerkung:* Die Rechnung hier zeigt: Bei jeder linearen Abbildung wird der Nullvektor auf den Nullvektor abgebildet.

Zu 2) Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in$ Kern$(L)$. Daraus folgt $\boldsymbol{L(\vec{v}_1) = \vec{0}}$, $\boldsymbol{L(\vec{v}_2) = \vec{0}}$. Zu zeigen: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in$ Kern$(L)$, d.h. $L(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{0}$.

$$L(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \overset{\text{Linearität}}{=} \boldsymbol{L(\vec{v}_1)} + \boldsymbol{L(\vec{v}_2)} = \boldsymbol{\vec{0}} + \boldsymbol{\vec{0}} = \vec{0}.$$

Zu 3) Seien $\vec{v} \in$ Kern$(L)$ (d.h. $\boldsymbol{L(\vec{v}) = \vec{0}}$) und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$L(\boldsymbol{\alpha}\vec{v}) \overset{\text{Linearität}}{=} \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{L(\vec{v})} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\vec{0}} = \vec{0}$$

Von daher ist $\alpha\vec{v}$ auch in Kern$(L)$ enthalten.

Die drei Teilraumbedingungen sind erfüllt, sodass Kern$(L)$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

**b)** Für die lineare Abbildung $L$ soll gezeigt werden, dass Bild$(L) := \{L(\vec{v}) \,|\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^m$ ist. Die drei Teilraumkriterien (wie in Teil a) werden geprüft.

Zu 1) $L(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in \text{Bild}(L) \Rightarrow \text{Bild}(L) \neq \emptyset$

Zu 2) Seien $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Bild}(L)$, d.h. es existieren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $L(\vec{v}_1) = \vec{w}_1, L(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$.
Zu zeigen: $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \text{Bild}(L)$.

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = L(\vec{v}_1) + L(\vec{v}_2) \overset{\text{Linearität}}{=} L(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

und weil $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum ist, ist $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ auch in $\mathbb{R}^n$, sodass $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ in $\text{Bild}(L)$ liegt.

Zu 3) Seien $\vec{w} \in \text{Bild}(L)$ (d.h. es existiert $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $L(\vec{v}) = \vec{w}$) und $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\alpha\vec{w} = \alpha L(\vec{v}) \overset{\text{Linearität}}{=} L(\alpha\vec{v})$$

mit $\alpha\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, sodass $\alpha\vec{w} \in \text{Bild}(L)$ gilt.

Die drei Teilraumkriterien sind erfüllt und damit ist $\text{Bild}(L)$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^m$.

**9. Aufgabe** Die Abbildungen $L_1$ und $L_2$ sind auf Seite 29 definiert.

a) Die Komposition ist gegeben durch

$$L_4 = L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + 12x_2 \end{bmatrix}.$$

b) Die zu $L_4$ zugehörige Matrix lautet $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$.
Das gesuchte Produkt ist

$$C := A_2 A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}.$$

c) Der Bildraum von $L_5$ ($\mathbb{R}^4$) ist weder im Urbildraum von $L_1$ ($\mathbb{R}^2$) noch im Urbildraum von $L_2$ ($\mathbb{R}^3$), sodass $L_1 \circ L_5$ und $L_2 \circ L_5$ nicht definiert sind.

Der Bildraum von $L_1$ ($\mathbb{R}^3$) ist nicht im Urbildraum von $L_5$ ($\mathbb{R}^2$) enthalten, sodass $L_5 \circ L_1$ nicht definiert ist.

Der Bildraum von $L_2$ ($\mathbb{R}^2$) ist im Urbildraum von $L_5$ ($\mathbb{R}^2$) enthalten und damit ist $L_5 \circ L_2$ definiert.

# 4 Der Gaußalgorithmus

Ein Verfahren um **lineare Gleichungssysteme** systematisch zu lösen, ist der so genannte Gaußalgorithmus.

## 4.1 Lineare Gleichungssysteme (LGS) und Matrizen

**Definition** (Lineares Gleichungssystem; (erweiterte) Koeffizientenmatrix; (In)homogenität)

Ein System der Form
$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$
heißt **lineares Gleichungssystem** (Abkürzung: LGS) mit *m* Gleichungen in den *n Unbekannten* (oder *Variablen*) $x_1, \ldots, x_n$.

Die Matrix **Koeffizientenmatrix** (Abkürzung: KM) ist definiert als $A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$.

Die Matrix $[A|\vec{b}] := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$ heißt die **erweiterte Koeffizientenmatrix** (Abkürzung: EKM).

Das LGS heißt **homogen** falls $\vec{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \vec{0}$, sonst **inhomogen**. Der Vektor $\vec{b}$ ist die **Homogenität** falls $\vec{b} = \vec{0}$, sonst der **Inhomogenität**.

**Beispiel** (LGS mit 3 Variablen (oder Unbekannten))

Stellen Sie die Koeffizientenmatrix sowie die erweiterte Koeffizientenmatrix zu dem gegebenen linearen Gleichungssystem auf und identifizieren Sie die Inhomogenität.
$$\begin{array}{ccccccc} x_3 & - & \frac{1}{2}x_2 & & & = & -\frac{3}{2} \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die Einträge in der $i$-ten Spalte von $A$ korrespondieren zu den Koeffizienten der Variable $x_i$. Wir formen das System $\begin{array}{ccccccc} 0x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & = & -\frac{3}{2} \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$ um und betrachten es als $A\vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$:

$$\boxed{\text{Koeffizientenmatrix}} \rightarrow A := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}. \leftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Inhomogenität} \\ \text{(oder rechte Seite)}\end{array}}$$

(Multiplizieren Sie $A$ mit dem Vektor $\vec{x}$. Was bekommen Sie?) Die EKM ist

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]. \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{erweiterte} \\ \text{Koeffizienten-} \\ \text{matrix}\end{array}}$$

## 4.2 Die drei elementaren Zeilenoperationen

Um alle Lösungen eines LGS (die **Lösungsmenge**) zu finden, werden die Gleichungen nach bestimmten Regeln umgeformt, die die Lösungsmenge nicht ändern:

1. die Reihenfolge der Gleichungen darf geändert werden,
2. eine Gleichung darf mit einer von Null verschiedenen Zahl multipliziert werden,
3. eine Gleichung darf mit der Summe dieser Gleichung und einem Vielfachen einer anderen Gleichung ersetzt werden.

Mit der Matrixschreibweise kann ein LGS vorteilhaft gelöst werden, weil die Variablen nur zum Schluss eine Rolle spielen. Die Anordnung in der Matrix behält die Information über die Variablen, sodass diese nicht jedes Mal explizit aufgeschrieben werden müssen. Die obigen Regeln können für die Umformung von Matrizen so modifiziert werden.

**Definition** (elementare Zeilenoperationen)

- Das Tauschen von Zeilen
- Die Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null
- Das Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

*Bemerkung:* Die elementaren Zeilenoperationen haben keine Auswirkung auf die Lösungsmenge!

Als Beispiel wenden wir die drei elementaren Zeilenoperationen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix aus dem vorangehenden Beispiel an.

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{0} & \mathbf{-\frac{1}{2}} & \mathbf{1} & \mathbf{-\frac{3}{2}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \quad \overset{\text{(2 Zeilen tauschen)}}{\xrightarrow{\mathbf{I}\leftrightarrow\mathbf{II}}} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-\frac{1}{2}} & \mathbf{1} & \mathbf{-\frac{3}{2}} \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{\text{(Mult. einer Zeile mit} \\ \text{einer Zahl } (\neq 0))}}{\xrightarrow{\mathbf{2\cdot II}}} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{\text{(Vielfaches einer Zeile mit} \\ \text{einer anderen Zeile addieren)}}}{\xrightarrow{\mathrm{III}+\mathbf{(-3)\cdot I}}} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ 0 & -5 & 10 & -15 \end{array}\right]$$

### 4.3 (Normierte) Zeilenstufenform - (N)ZSF

**Definition** (Kopf einer Zeile; Zeilenstufenform (ZSF); normierte Zeilenstufenform (NZSF))

Der **Kopf** einer Zeile ist der erste Eintrag (von links nach rechts) in der Zeile, der ungleich Null ist.

**Bedingungen für eine Zeilenstufenform (ZSF):**

1. Je tiefer die Zeile, je weiter rechts der Kopf.
2. Es gibt keine Köpfe, die tiefer als eine Nullzeile liegen.

**Bedingungen für die normierte Zeilenstufenform (NZSF):**

1. ZSF
2. Jeder **Kopf** ist eine **1**.
3. Alle **Einträge über die Köpfe** sind 0.

*Bemerkungen:*

- Eine Nullzeile hat keinen Kopf.
- Die NZSF ist eindeutig, die ZSF i.A. nicht.

Der **Gaußalgorithmus** ist ein Verfahren, das angewendet wird, um eine Matrix *systematisch* in (N)ZSF zu bringen. Dieses Verfahren ist in den Beispielen in diesem Kapitel illustriert. Versuchen Sie durch die Beispiele den Algorithmus zu beschreiben. Lesen Sie nach, wie der Algorithmus formuliert wird, beispielsweise in der MUMIE (dort kann man auch reichlich trainieren).

**Beispiel** (ZSF; NZSF)

Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix (EKM) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 10 & -15 \end{array}\right]$ in NZSF.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -2 & 5 \\ 0 & \mathbf{-1} & 2 & -3 \\ 0 & \mathbf{-5} & 10 & -15 \end{array}\right]$$

Die EKM ist **nicht** in ZSF. Der **Kopf** in der 3. Zeile (**−5**) liegt nicht rechts von dem **Kopf** in der 2. Zeile (**−1**).

$\downarrow$ III −5 II

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -2 & 5 \\ 0 & \mathbf{-1} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Matrix ist in ZSF aber **nicht** in NZSF. Der **Kopf** in 2. Zeile ist **−1** und nicht 1. Ferner ist der Eintrag **1** über dem Kopf in der 2. Zeile ist $\neq$ 0)

$\downarrow$ $(-1)\cdot$ II

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -2 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Matrix ist immer noch **nicht** in NZSF. Der Eintrag **1** über dem Kopf in der 2. Zeile ist $\neq$ 0

$\downarrow$ I− II

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

**NZSF** erreicht!

**Definition** (Kopfvariable, Nichtkopfvariable)

Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein LGS in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Stelle die Matrix in eine ZSF $\tilde{A}$. Enthält die $i$-te Spalte in $\tilde{A}$ einen Kopf, so heißt $x_i$ eine **Kopfvariable** (Abkürzung: KV). Sonst heißt $x_i$ eine Nichtkopfvariable (Abkürzung: NKV).

In dem vorangehenden Beispiel sind $x_1$ und $x_2$ Kopvariablen und $x_3$ eine Nichtkopfvariable.

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Matrizen in **ZSF** bzw. **NZSF** vorliegen und bringen Sie diese ggf. auf NZSF.

$$\text{a)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{b)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 22 \end{bmatrix}$$

## 4.4 Rang und Anzahl der Lösungen

**Definition** (Rang einer Matrix)

**Rang** $A$ = maximale Anzahl von linear unabhängigen Zeilen von $A$

= maximale Anzahl von linear unabhängigen Spalten von $A$

= Anzahl der **Köpfe** in der (N)ZSF von $A$

**Beispiel** (Rang einer Matrix)

Bestimmen Sie den Rang von $A$ bzw. von $[A|\vec{b}]$ für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ und } [A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

$$\text{Rang } A = \text{Rang} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & \mathbf{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{2}$$

$$\text{Rang}[A|\vec{b}] = \text{Rang} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] = \text{Rang} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathbf{2}$$

Der Rang kann benutzt werden, um zu bestimmen, ob das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ keine, eine oder unendlich viele Lösungen hat.

**Satz** (Anzahl der Lösungen)

1. Rang $[A|\vec{b}]$ = Rang $A$ ⇒ das LGS hat mindestens eine Lösung

1a) Rang $A <$ # der Spalten in $A$ ⇒ das LGS hat unendlich viele Lösungen
(siehe das obige Beispiel)

1b) Rang $A =$ # der Spalten in $A$ ⇒ das LGS hat eine eindeutige Lösung

2. Rang$[A|\vec{b}] \neq$ Rang $A$ ⇒ das LGS hat keine Lösung

**Beispiel** (Lösungsmenge)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des reellen LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Matrix $A := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ und den Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{NZSF - siehe Beispiel (ZSF, NZSF)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] =: [\tilde{A}|\tilde{\vec{b}}]$$

Rang $A =$ Rang $[A|\vec{b}] = 2$ heißt, dass das LGS mindestens eine Lösung hat.
Rang $[A|\vec{b}] =$ Rang $A = 2 < 3 =$ Anzahl der Spalten in $A$; d.h. die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ enthält unendlich viele Elemente.

**Kopfvariablen** von $A$ (Spalten in $\tilde{A}$ mit einem Kopf: $x_1, x_2$) durch **Nichtkopfvariable** von $A$ (Spalten in $\tilde{A}$ ohne einen Kopf: $x_3$) ausdrücken:

$$x_1 = 2, x_2 = 3 + 2x_3 \longrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 + 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} + \mathbf{0}x_3 \\ \mathbf{3} + \mathbf{2}x_3 \\ \mathbf{0} + \mathbf{1}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{x_3} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Wähle den Parameter $s \in \mathbb{R}$ (wegen eines *reellen* LGS) für $x_3$:

$$\mathcal{L} := \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \underbrace{\boldsymbol{s} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mid \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}}_{} \right\}. \quad \textbf{Parametrisierung}$$

**spezielle Lösung** ↑ ↑ **Lösungen des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$**

Die Lösungsmenge in diesem Beispiel muss reell sein, weil die Aufgabenstellung das LGS als reelles System identifiziert, d.h. in der parametrisierten Form ist $s \in \mathbb{R}$.

Die Lösungsmenge kann auch wie folgt beschrieben werden:
$\mathcal{L} = \left\{ \vec{x}_P + \vec{x}_H \,|\, \vec{x}_P \text{ **ist eine spezielle Lösung des LGS** } A\vec{x} = \vec{b},\ \vec{x}_H \in \textbf{Kern}(A) \right\}$.

Statt spezielle Lösung sagt man auch partikuläre Lösung (deshalb $\vec{x}_P$). Die Vektoren im Kern$(A)$ sind die Lösungen des homogenen System $A\vec{x} = \vec{0}$ (deshalb $\vec{x}_H$).

Wir prüfen jetzt die Plausibilität der Lösungen nach. Aus der Linearität folgt

$$\begin{aligned} A\left(\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{s} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}\right) &= A\left(\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) + A\left(\boldsymbol{s} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}\right) \\ &= A\left(\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) + \boldsymbol{s}A\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**2. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des reellen linearen Gleichungssystems (LGS) $A\vec{x} = \vec{b}$ für die gegebene Matrix $A$ und den gegebenen Vektor $\vec{b}$.

$$\text{a)}\quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \vec{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},\ \vec{b} := \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ \vec{b} := \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**Algorithmus** (Basis des Kerns)

Gegeben: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$
Gesucht: Eine Basis des Kerns von $A$.

1. Bringe $A$ in NZSF ($\tilde{A}$). (Alternativ: Bringe $[A|\vec{0}]$ in NZSF ($[\tilde{A}|\vec{0}]$).)

2. Kopfvariablen von $\tilde{A}$ durch Nichtkopfvariablen von $\tilde{A}$ ausdrücken.

3. Sei $k$ die Anzahl der Nichtkopfvariablen. Ist $k = 0$, so ist $\{\,\}$ eine Basis des Kerns von $A$. Abbrechen.

4. ($k \neq 0$) Für $i = 1, \ldots, k$ setze die $i$-te Nichtkopfvariable zu 1 und alle andere Nichtkopfvariablen zu Null in die Gleichungen aus dem 2. Schritt ein. Dies ergibt den $i$-ten Basisvektor in einer Basis des Kerns von $A$.

**Beispiel** (Algorithmus - Basis des Kerns bzw. Kern einer Matrix)

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3,5}$. Bestimmen Sie alle Lösungen des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$.

Die Lösungsmenge des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$ ist einfach der Kern der Matrix $A$:

$$\text{Kern}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^5 | A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Wir wenden den Algorithmus „Basis des Kerns“ an, um eine Basis $\mathcal{B}$ des Kerns zu erhalten. Die Menge aller Linearkombinationen der Basisvektoren (oder span($\mathcal{B}$)) ist die gesuchte Menge.

1. $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-\text{I},\,\text{III}-2\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{\text{ZSF}}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{\text{ZSF}} \xrightarrow{\text{I}-4\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{\text{NZSF}}$$

2. KV: $x_1$, $x_3$ NKV: $x_2, x_4, x_5$
$x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, x_3 + x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_4 - x_5, x_3 = -x_5$

3. $k = 3$

4. $$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - 3x_4 - x_5 \\ x_2 \\ -x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Setze nacheinander
$\boldsymbol{x_2 := 1, x_4 := 0, x_5 := 0}$
$\boldsymbol{x_2 := 0, x_4 := 1, x_5 := 0}$
$\boldsymbol{x_2 := 0, x_4 := 0, x_5 := 1}$

$$\text{Eine Basis von Kern}(A)\text{ ist: }\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}\right\}.$$

$$\text{Kern}(A)=\left\{r\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-3\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\,\middle|\,r,s,t\in\mathbb{K}\right\}=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

*Bemerkungen:*

- Die Anzahl der Nichtkopfvariablen entspricht der Dimension des Kerns von $A$.
- Die elementaren Zeilenoperationen haben keine Auswirkung auf die Homogenität. Deshalb kann man einfach $A$ statt $[A|\vec{0}]$ auf NZSF bringen.

**Algorithmus** (Basis des Bildes)

1. Stelle die Matrix $A$ in ZSF oder NZSF ($\tilde{A}$).
2. Identifiziere die Kopfvariablen von $\tilde{A}$.
3. Ist $x_i$ eine Kopfvariable, setze die $i$-te Spalte von $A$ als den $i$-ten Basisvektor für das Bild von $A$.

**Beispiel** (Algorithmus - Basis des Bildes einer Matrix)

Bestimmen Sie eine Basis des Bildes der Matrix $A := \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&6&7\\1&2&3&7&8\end{bmatrix}\in\mathbb{K}^{3,5}$.

1\. $A := \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&6&7\\1&2&3&7&8\end{bmatrix}\to\overset{*}{\cdots}\to\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&3&0&1\\0&0&0&\mathbf{1}&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}_{\text{NZSF}}$

$*$ In den schriftlichen Hausaufgaben und in Klausuren sollen Sie Ihre Schritte zeigen. Im Begleitmaterial sollen Sie die Ergebnisse selber nachprüfen, wenn Sie $\to\cdots\to$ sehen.

2\. KV: $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_4}$

3\. Eine Basis des Bildes von $A$ (**1**. und **4**. Spalte von $A$): $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\6\\7\end{bmatrix}\right\}$

*Bemerkung:* Die 2. und 3. Spalte von $A$ sind jeweils ein Vielfaches der 1. Spalte (also linear abhängig zur 1. Spalte), sodass $x_2$ und $x_3$ Nichtkopfvariablen sind. Die 4. Spalte ist jedoch linear unabhängig zur ersten Spalte (warum?) und entsprechend ist $x_4$ eine Kopfvariable. Die 5. Spalte ist eine Linearkombination der 1. und 4. Spalten, also ist $x_5$ eine Nichkopfvariable. Der Algorithmus identifiziert die 1. und 4. Spalten von $A$ als linear unabhängig durch die Köpfe einer *Zeilenstufenform* von $A$.

**WICHTIG !**

Die Spaltenvektoren bilden ein Erzeugendensystem des Bildes von $A$.

dim(Bild($A$)) = Rang $A$ = Anzahl der Kopfvariablen $\tilde{A}$

$n$ = Anzahl der Spalten von $A$
= Anzahl der Kopfvariablen + Anzahl der Nichtkopfvariablen abgelesen von $\tilde{A}$
= $\dim(\text{Bild}(A)) + \dim(\text{Kern}(A))$

**3. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes von $A := \begin{bmatrix}3&0&5&15\\0&0&7&21\\0&1&2&7\end{bmatrix}\in\mathbb{K}^{3,4}$.

**Algorithmus** (Invertieren)

Um eine (quadratische) Matrix zu invertieren, benutzen wir den Ansatz

$$[A|I] \overset{\text{NZSF}}{\to} [I|A^{-1}].$$

Entsteht bei der Umformung von $A$ eine Nullzeile, so ist $A$ nicht invertierbar.

Um zu erklären, warum der Algorithmus funktioniert, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $A$ eine invertierbare Matrix in $\mathbb{R}^{2,2}$ ist. Weil $AA^{-1} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nach Definition der inversen Matrix gelten muss, wird eine Matrix $A^{-1} = [\vec{c}_1\ \vec{c}_2]$ mit $A\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1$ und $A\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{e}_2$ gesucht. D.h. wir müssen die linearen Gleichungssysteme $[A|\vec{e}_1]$ und $[A|\vec{e}_2]$ lösen. Bei der Anwendung des Gaußalgorithmus auf die einzelnen Systemen entstehen jedoch dieselbe Zeilenoperationen. Wir sparen Zeit dadurch, dass wir diese Operationen nur einmal und zwar auf $[A|\vec{e}_1\ \vec{e}_2] = [A|I]$ anwenden.

*Bemerkung:* Dieses Prinzip kann auch auf allgemeine lineare Gleichungssystemen mit derselben Koeffizientenmatrix erweitert werden.

**Beispiel** (Inverse Matrizen)

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die inverse Matrix $A^{-1}$.

Die inverse Matrix zu $A$ wird mit dem Gaußalgorithmus berechnet:

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\text{I}-\text{II}}{\to} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\text{II}-2\text{I}}{\to} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] = [I_2|A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Antwort prüfen: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$

**Beispiel** (eine nicht invertierbare Matrix)

Überprüfen Sie, ob $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ invertierbar ist.

$$[B|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\text{II}-2\text{I}}{\to} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Der **Zeilenstufenform von $B$** enthält eine **Nullzeile**. Die Zeilen von $B$ sind linear abhängig, sodass die NZSF von $B$ nicht $I_2$ ist. Deshalb ist $B$ **nicht invertierbar**.

**4. Aufgabe** (Lerncheck)

Invertieren Sie die Matrix $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

**5. Aufgabe** (Lerncheck)

Ist die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar?

**Algorithmus** (Koordinaten eines Vektors bzgl. einer gegebenen Basis)

Gegeben ist eine Basis $\mathcal{B} := \left\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\right\}$ des $\mathbb{K}^n$, $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$.

1. Setze $B := \left[\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_n\right]$.

2. $[B|\vec{v}] \overset{\text{NZSF}}{\longrightarrow} [I_n|\vec{\alpha}]$

3. Die Koordinaten sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n \quad (\vec{v} = \alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n)$.

**Beispiel** (Algorithmus - Koordinaten eines Vektors bzgl. einer gegebenen Basis)

Sei

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils die Darstellung des Vektors $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ bzw. $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ 14 \end{bmatrix}$ als eine Linearkombination der Basisvektoren in $\mathcal{B}$. Geben Sie jeweils den Koordinatenvektor $(\vec{v}_i)_{\mathcal{B}}$ an.

Gesucht sind Skalare $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3} \in \mathbb{R}$ mit

$$\boldsymbol{\alpha_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha_3} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = v_i, \quad i = 1, 2.$$

Dies führt durch Komponentenvergleich zu den folgenden linearen Gleichungssystemen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1\alpha_1 & + & 1\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 4 & \text{bzw.} & 9 \\ 0\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 0\alpha_3 & = & 8 & \text{bzw.} & -2 \\ 1\alpha_1 & + & 0\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = & 0 & \text{bzw.} & 14. \end{array}$$

EKM $[B|\vec{v}_1 \, \vec{v}_2]$ aufstellen (siehe Bemerkung auf Seite 43) und in NZSF bringen und für $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lösen:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 14 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right],$$

$$\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Die Koordinatenvektoren von $\vec{v}_1$ bzw. $\vec{v}_2$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ sind: $(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ bzw. $(\vec{v}_2)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

*Bemerkungen:*

- Der Koordinatenvektor $(\vec{v}_i)_{\mathcal{B}}$, $i = 1, 2$, ist eine Lösung des LGS $B\vec{\alpha} = \vec{v}_i$ für $\vec{\alpha} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$.
- Die Schreibweise $(\vec{v}_i)_{\mathcal{B}}$ für $\vec{\alpha}$ betont die Beziehung zwischen des Vektors $\vec{v}$, der Basis und der Lösung.

- Die Matrix $B$ ist invertierbar, weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist. Die Gleichung $B\vec{\alpha} = \vec{v}_i$ hat die Lösungsmenge

$$B^{-1}B\vec{\alpha} = B^{-1}\vec{v}_i,$$

d.h. $I\vec{\alpha} = \vec{\alpha} = B^{-1}\vec{v}_i$.

Zeigen Sie, dass die inverse Matrix zu $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ die Matrix $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ist. Berechnen Sie die Produkte $B^{-1}\vec{v}_i$, $i = 1, 2$.

**6. Aufgabe** (Lerncheck)

Sei $\mathcal{B}$ definiert durch $\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie jeweils den Koordinatenvektor $(\vec{v}_i)_{\mathcal{B}}$ des Vektors $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ bzw. $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

## 4.5 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben

### 1. Aufgabe

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ist in ZSF aber nicht in NZSF (nicht alle Köpfe sind 1, es gibt nicht Null Einträge über den Köpfen in der 2. und 3. Zeile).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{\text{ZSF}} \xrightarrow{\frac{1}{4}\text{III}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{ZSF}} \xrightarrow{\text{II}-2\text{III}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{ZSF}} \xrightarrow{\text{I}+\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{NZSF}}$$

*Bemerkung:* Eine Matrix kann in verschiedenen ZSF umgeformt werden. Eine gegebene Matrix hat jedoch genau eine NZSF.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ist nicht in ZSF (der Kopf in der 2. Zeile ist rechts von dem Kopf in der 3. Zeile).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{\text{ZSF}} \xrightarrow{\frac{1}{3}\text{II},\, \frac{1}{2}\text{III}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{NZSF}}$$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 22 \end{bmatrix}$ ist nicht in ZSF (unter einem Kopf dürfen nur Nullen stehen).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III}-4\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III}+3\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{NZSF}}$$

*Bemerkung:* Die Einträge in der 4. Spalte dürfen ungleich Null sein, weil es keinen Kopf in dieser Spalte gibt.

**2. Aufgabe**

1. $A := \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}, \ \vec{b} := \begin{bmatrix}1\\1\\6\end{bmatrix}$

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&0&1&1\\1&0&1&6\end{array}\right] \overset{\text{III}-\text{I}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&5\end{array}\right] \overset{\text{III}-\text{II}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&0&1&1\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&4\end{array}\right]$$

Die **(N)ZSF von $A$** enthält eine **Nullzeile**, sodass $\mathcal{L} = \emptyset$ gilt.
(Das LGS hat **keine Lösung**, weil Rang $A$ (= Anzahl der Köpfe in der ZSF von $A$) $= 2 < 3 =$ Rang $[A|\vec{b}]$.)

2. $A := \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&3&0\end{bmatrix}, \ \vec{b} := \begin{bmatrix}-5\\4\\-12\end{bmatrix}$

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-5\\0&0&2&4\\0&3&0&-12\end{array}\right] \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-5\\0&3&0&-12\\0&0&2&4\end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}\text{II}, \frac{1}{2}\text{III}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{c|c}\overbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}^{\textbf{Einheitsmatrix}}&\begin{matrix}\mathbf{-5}\\\mathbf{-4}\\\mathbf{2}\end{matrix}\end{array}\right]$$

$$\mathcal{L} = \left\{\begin{bmatrix}\mathbf{-5}\\\mathbf{-4}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}\right\}$$

(Das LGS hat **genau eine Lösung**, weil Rang $A = 3 =$ Rang $[A|\vec{b}]$ = Anzahl von Spalten in $A$.)

3. $A := \begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}, \ \vec{b} := \begin{bmatrix}6\\0\\3\end{bmatrix}$

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{array}\right] \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&6\\0&0&0&3&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}\text{II}}{\rightarrow} \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} \boldsymbol{x_1}&\boldsymbol{x_2}&\boldsymbol{x_3}&\boldsymbol{x_4}\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&0&\mathbf{2}&0&\mathbf{6}\\0&0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\0&0&0&0&0\end{array}\right]_{\text{NSZF}}\end{array}$$

Kopfvariablen: $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_4}$; Nichtkopfvariablen (Parameter): $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$

Löse nach den Kopfvariablen auf: $\boldsymbol{x_1} = \mathbf{6 - 2}\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4} = \mathbf{1}$.

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \middle| \ x_1 = 6 - 2x_3, \ x_4 = 1, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3} \in \mathbb{R} \right\}$$

*Alternativ:*
Ein Vektor $\vec{x}$ in der Lösungsmenge hat die Form

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6-2x_3\\x_2\\x_3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6+0x_2-2x_3\\0+1x_2+0x_3\\0+0x_2+1x_3\\1+0x_2+0x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\0\\0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Wir wählen Parameter $s, t \in \mathbb{R}$ (einen für jede Nichtkopfvariable) und geben die Lösungsmenge an:

$$\mathcal{L} = \left\{ \overset{\substack{\text{spezielle Lösung}\\ \downarrow}}{\begin{bmatrix}6\\0\\0\\1\end{bmatrix}} + \overbrace{s\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}}^{\in\text{Kern}(A)} \ \middle| \ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Das LGS hat unendlich viele Lösungen: Rang $A = 2 =$ Rang $[A|\vec{b}] <$ Anzahl von Spalten in $A$.)
Um die Antwort nachzuprüfen, multiplizieren Sie die Koeffizientenmatrix $A$ mit einem Element aus $\mathcal{L}$. Was sollte herauskommen? Was passiert, wenn Sie $A$ mit einem Element in Kern$(A)$ multiplizieren?

### 3. Aufgabe

**Basis des Bildes von $A$**
Beim Vertauschen der 2. und 3. Zeilen ensteht eine ZSF von $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \overset{\text{II}\to\text{III}}{\to} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{bmatrix}_{\text{ZSF}} =: \tilde{A}.$$

Die Kopfvariablen sind $x_1$, $x_2$ und $x_3$.
Eine Basis des Bildes von $A$ besteht aus die 1., 2. und 3. Spalte von $A$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

*Bemerkung:* Die Anzahl der Kopfvariablen entspricht der Dimension des Bildes von $A$.

**Basis des Kerns von $A$**

Berechne die NSZF von $A$ (Details unten):

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{\text{NZSF}} =: \tilde{A}$$

Wir bekommen drei Gleichungen in den drei KV $x_1, x_2, x_3$ und einer NKV $x_4$:

$$x_1 = 0,\ x_2 + x_4 = 0 \text{ und } x_3 + 3x_4 = 0.$$

Ein Element im Kern$(A)$ hat also die Form:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_4 \\ -3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen $x_4 = 1$ für den ersten (und einzigen) Basisvektor des Kerns von $A$, weil es keine weiteren Kopfvariablen gibt. Eine Basis des Kerns von $A$ ist deshalb

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

---

Unser Rechenweg für die NZSF:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\to} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{7}\text{III}}{\to} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{II}-2\text{III}} \begin{bmatrix}3&0&5&15\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{I}-5\text{III}} \begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\text{I}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{bmatrix}_{\text{NZSF}}$$

### 4. Aufgabe

Die invertierbare Matrix $B := \begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\3&2&0\end{bmatrix}$ wird so invertiert: $[B|I_3] \overset{\text{NZSF}}{\longrightarrow} [I_3|B^{-1}]$.

$$[B|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\3&2&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-2\text{I},\text{III}-3\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&2&-3&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2\text{II}-\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right] \xrightarrow[\text{II}+\text{III}]{\text{I}-\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\mathbf{2}&\mathbf{-2}&\mathbf{1}\\0&1&0&\mathbf{-3}&\mathbf{3}&\mathbf{-1}\\0&0&1&\mathbf{-1}&\mathbf{2}&\mathbf{-1}\end{array}\right]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-2}&\mathbf{1}\\\mathbf{-3}&\mathbf{3}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{2}&\mathbf{-1}\end{bmatrix}$$

Antwort prüfen: $BB^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\3&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&1\\-3&3&-1\\-1&2&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = I_3$

### 5. Aufgabe

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\2&2&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-2\text{I},\ \text{III}-2\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&2&-2&-2&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \left[\underbrace{\begin{array}{ccc}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}}_{\tilde{A}}\right|\left.\begin{array}{ccc}1&0&0\\-2&1&0\\2&-2&1\end{array}\right]$$

Weil $\tilde{A}$ eine Nullzeile enthält, alternativ $\tilde{A} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \neq I_3$, sind die Zeilen bzw. Spalten von $A$ linear abhängig. $A$ ist nicht invertierbar.

### 6. Aufgabe

a) Um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, muss gezeigt werden, dass $\mathcal{B}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist. Weil jede Basis von $\mathbb{R}^3$ genau drei linear unabhängige Vektoren enthält und $\mathcal{B}$ genau drei Vektoren enthält, bleibt zu zeigen, dass es sich um eine Menge von linear unabhängigen Vektoren handelt (alternativ, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem ist). Der Rang von $B := \begin{bmatrix}\mathbf{-2}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\\\mathbf{-4}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{-6}&\mathbf{-1}&\mathbf{4}\end{bmatrix}$ ist drei, sodass die Zeilen von $B$ linear unabhängig sind. Weil $B$ quadratisch ist und es gilt Zeilenrang gleich Spaltenrang, sind auch die drei Spaltenvektoren von $B$ linear unabhängig.

Wir bringen zunächst $B$ in ZSF, um den Rang zu bestimmen:

$$\begin{bmatrix}-2&0&2\\-4&1&1\\-6&-1&4\end{bmatrix} \overset{\text{II}-2\text{I},\, \text{III}-3\text{I}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}-2&0&2\\0&1&-3\\0&-1&-2\end{bmatrix} \overset{\text{II}+\text{III}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}-2&0&2\\0&1&-3\\0&0&-5\end{bmatrix}_{\text{ZSF}}.$$

Der Rang von $B$ ist drei (eine ZSF von $B$ enthält drei Köpfe: $-2$, $1$, $-5$). Damit ist $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Ist $\vec{v}_i = \boldsymbol{\alpha_1}\vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{\alpha_2}\vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{\alpha_3}\vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{3}}$, so ist der Koordinatenvektor von $\vec{v}_i$

$$(\vec{v}_i)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha_1}\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}.$$

Gesucht sind Skalare $\boldsymbol{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\boldsymbol{\alpha_1}\begin{bmatrix}\mathbf{-2}\\ \mathbf{-4}\\ \mathbf{-6}\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix} = \vec{v}_i, \quad i = 1, 2.$$

Dies führt durch Komponentenvergleich zu den folgenden linearen Gleichungssystemen:

$$\begin{array}{rcrcrcrlr}
\mathbf{-2}\boldsymbol{\alpha_1} & + & 0\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 1 & \text{bzw.} & -2\\
\mathbf{-4}\boldsymbol{\alpha_1} & + & 1\alpha_2 & + & 1\alpha_3 & = & 2 & \text{bzw.} & 1\\
\mathbf{-6}\boldsymbol{\alpha_1} & + & (-1)\alpha_2 & + & 4\alpha_3 & = & 3 & \text{bzw.} & 4.
\end{array}$$

EKM aufstellen und in NZSF bringen:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr}\mathbf{-2}&0&2&1&-2\\ \mathbf{-4}&1&1&2&1\\ \mathbf{-6}&-1&4&3&4\end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rr}1&0&0&-\frac{1}{2}&-2\\0&1&0&0&-4\\0&0&1&0&-3\end{array}\right].$$

Somit sind die gesuchten Koordinatenvektoren $(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$, $(\vec{v}_2)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-2\\-4\\-3\end{bmatrix}$.

1. Probe: $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2\\-4\\-6\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \vec{v}_1$

(Stimmt! Das hätte man auch sehen können.)

2. Probe: $\quad -2\begin{bmatrix}-2\\-4\\-6\end{bmatrix} -4\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} -3\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix} = \vec{v}_2$

# 5 Allgemeine Vektorräume

In diesem Kapitel erweitern wir die Definition eines Vektorraums zu anderen Mengen von Objekten. Im 2. Kapitel wurde $\mathbb{K}^n$ eingeführt. Im 3. Kapitel wurde gezeigt, wie die Addition und Multiplikation mit Skalaren für Matrizen in $\mathbb{K}^{m,n}$ definiert werden kann, um $\mathbb{K}^{m,n}$ eine Vektorraumstruktur zu geben. Dies kann auch mit den Polynomen $\mathbb{K}[x] := \{\text{Polynome in der Variable } x \text{ mit Koeffizienten aus } \mathbb{K}\}$ gemacht werden. Hierbei verstehen wir ein Polynom $p$ als eine Linearkombination von Potenzen von $x$:

$$p(x) := p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0, \quad p_n, \ldots, p_1, p_0 \in \mathbb{K}.$$

Um die Summe $p + q$ von den Polynomen $p$ und $q$ der Form

$$p(x) := p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0, \quad q(x) := q_n x^n + \cdots + q_1 x + q_0 \in \mathbb{K}[x]$$

zu bilden, werden die Koeffizienten zur selben Potenz von $x$ addiert:

$$\begin{aligned} p+q: \quad (p+q)(x) &:= p(x) + q(x) = (p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0) + (q_n x^n + \cdots + q_1 x + q_0) \\ &:= (p_n + q_n)x^n + \cdots + (p_1 + q_1)x + (p_0 + q_0). \end{aligned}$$

Um ein Polynom mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{K}$ zu multiplizieren, wird jeder Koeffizient mit $\alpha$ multipliziert:

$$\alpha p: \quad (\alpha p)(x) := \alpha(p(x)) = \alpha(p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0) := (\alpha p_n)x^n + \cdots + (\alpha p_1)x + (\alpha p_0).$$

Die Koeffizienten von Polynomen verhalten sich unter diesen Operationen ähnlich zu den Komponenten von Vektoren in $\mathbb{K}^n$. Allerdings gibt es keine endliche Basis des $\mathbb{K}[x]$.

Die Notation für Polynome ist manchmal verwirrend. Mal heißt das Polynom $p$, dann kommt plötzlich $p(x)$. Wann benutzt man $p$, wann $p(x)$? Die Bezeichnung $p$ bedeutet einfach ein Element des Vektorraums $\mathbb{K}[x]$ mit dem Namen $p$. Sobald der Vektor an einer Stelle "$x$" evaluiert wird, ist $p(x)$ zu verwenden. Der Unterschied scheint vielleicht etwas künstlich zu sein, aber in manchen Gebieten der Mathematik ist diese Unterscheidung wichtig. Bei falscher Anwendung der Notation $p$ und $p(x)$ gibt es in diesem Kurs jedoch *keinen* Punktabzug.

## 5.1 Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$

**Definition** (Vektorraum über $\mathbb{K}$)

Das Quadrupel $\{V, \mathbb{K}, \text{Plus}, \text{Mal}\}$ heißt *Vektorraum* über $\mathbb{K}$, falls:

- $V$ ist eine Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper
  (normalerweise ist $\mathbb{K}$ als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ definiert).
- Plus $(+)$ ist eine Abbildung von $V \times V \to V$.
  (**abgeschlossen bzgl. Plus**)
- Mal $(\,\cdot\,)$ ist eine Abbildung von $\mathbb{K} \times V \to V$.
  (**abgeschlossen bzgl. Mal**)
- Es gibt in $V$ ein spezielles Element $\vec{0}$, der **Nullvektor**, das für jedes Element $\vec{v} \in V$ die Gleichung $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ erfüllt.
  (**Existenz der additiven Identität**)
- Zu jedem Element $\vec{v} \in V$ gibt es ein Element $-\vec{v} \in V$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
  (**Existenz der additiven Inverse**)
- Für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{array}{rcll} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &=& \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) & \text{Assoziativität von +} \\ \vec{u} + \vec{v} &=& \vec{v} + \vec{u} & \text{Kommutativität von +} \\ \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) &=& (\alpha\beta) \cdot \vec{v} & \text{Assoziativität von } \cdot \\ \alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &=& \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v} & \text{1. Distributivgesetz} \\ (\alpha + \beta) \cdot \vec{v} &=& \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v} & \text{2. Distributivgesetz} \\ 1 \cdot \vec{v} &=& \vec{v} & \text{multiplikative Identität} \end{array}$$

Um ein Vektorraum zu definieren brauchen wir eine Menge $V$, einen Körper $\mathbb{K}$, und zwei Operationen, die vorschreiben, wie addiert und multipliziert wird. Diese vier Objekte beschreiben den Vektorraum. Um unnötige komplizierte Wortfügungen zu meiden, wird aber häufig vom Vektorraum $V$ statt vom Vektorraum $(V, \mathbb{K}, \text{Plus}, \text{Mal})$ die Rede sein.

Die Operationen in der Definition sehen vielleicht etwas fremd aus. „Plus“ soll eine Abbildung von $V \times V \to V$ sein. D.h., wir nehmen zwei Vektoren aus $V$, „addieren“ sie und bekommen einen Vektor als Antwort. „Mal“ macht aus einer Zahl aus $\mathbb{K}$ und einen Vektor aus $V$ einen Vektor in $V$. Wir bezeichnen Plus wie gewöhnlich mit „$+$“ und Mal mit „$\cdot$“ oder einfach durch die Nebeneinanderstellung eines Skalars und ein Polynom.

Die Begriffe Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension können genau so wie im 2. Kapitel auf allgemeine Vektorräume erweitert werden. In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Vektorräume für diesen Kurs aufgelistet.

**Satz** (Wichtige Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

| Bezeichnung | eine Basis | Dimension |
|---|---|---|
| $\mathbb{K}^n$ (siehe 2. Kapitel) | $\left\{ \vec{e}_1 := \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \cdots, \vec{e}_n := \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ | dim $\mathbb{K}^n = n$ |
| $\mathbb{K}[x] :=$ {Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$} | $\{1 = x^0, x = x^1, x^2, x^3, \dots\}$ | dim $\mathbb{K}[x]$ ist unendlich |
| $\mathbb{K}_{\leq n}[x] :=$ {Polynome vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$} | $\{1 = x^0, x = x^1, \dots, x^n\}$ | dim $\mathbb{K}_{\leq n}[x] = n + 1$ |
| $\mathbb{K}^{m,n} :=$ {$m \times n$ Matrizen mit Einträge aus $\mathbb{K}$}<br>(siehe 3. Kapitel) | $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$<br>$E_{ij}$ hat ein „1“ in der Position $(i, j)$ und sonst „0“ | dim $\mathbb{K}^{m,n} = mn$ |

## 5.2 Teilräume

**Definition** (Teilräume)

Eine Teilmenge $T$ eines Vektorraums $V$ über den Körper $\mathbb{K}$ (Notation: $T \subseteq V$) heißt **Teilraum**, falls gelten

(1) $T$ ist nicht leer ($T \neq \emptyset$),
(2) $T$ ist bzgl. Plus abgeschlossen (für alle $\vec{u}, \vec{v} \in T$ gilt $\vec{u} + \vec{v} \in T$),
(3) $T$ ist bzgl. Mal abgeschlossen (für alle $\vec{v} \in T, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\alpha\vec{v} \in T$).

*Bemerkungen:*

- $\{\vec{0}\}$ und $V$ sind *immer* Teilräume von $V$.
- Es gibt kein Symbol für „ist Teilraum von“.
- Eine Menge $T$, die die Definition eines Teilraums erfüllt, erbt alle anderen Vektorraumeigenschaften von dem „größeren“ Vektorraum $V$, d.h. ein Teilraum ist auch ein Vektorraum.

*Warum wurde im letzten Abschnitt $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$ in die Tabelle eingefügt?*

Am Anfang des Kapitels, haben wir behauptet, dass die Menge aller Polynomen mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathbb{K}$ ausgestattet mit der gewöhnlichen Addition und der gewöhnlichen Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum ist. (Der interessierte Leser kann alle Vektorraumeigenschaften prüfen.) Dieser Vektorraum ist unendlich dimensional. Wir beschäftigen uns in diesem Kurs hauptsächlich mit endlich dimensionalen Vektorräume. Wir suchen deshalb ein endlich dimensionalen Teilraum des $\mathbb{K}[x]$.

Betrachten wir die Menge $M_n, n \geq 1$ eine natürliche Zahl, der Polynomen vom Grad $n$ bzgl. der gewöhnlichen Addition und Multiplikation mit Skalaren. $M_n$ ist *kein* Vektorraum mit der gegebenen Addition. Beispielsweise ist die Summe der zwei Polynomen $p(x) := \boldsymbol{2x^n + 1}$ und $q(x) = \boldsymbol{-2x^n}$ nicht in $M_n$, weil

$$(p+q)(x) = \boldsymbol{2x^n + 1 - 2x^n} = 1$$

ein konstantes Polynom vom Grad kleiner als 1 ist, sodass $p + q \notin M_n$.

Offensichtlich kann der Grad der Summe von zwei Polynomen in $M_n$ kleiner als $n$ aber niemals größer als $n$ sein. Deshalb betrachten wir $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$, die Menge aller Polynomen in $\mathbb{K}[x]$ vom Grad kleiner gleich $n$. Das Nullpolynom $p_{\text{Null}}$ ist in $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$, sodass $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$ nicht leer ist. Die Summe von zwei beliebigen Polynomen in $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$ ist wiederum ein Polynom vom Grad kleiner gleich $n$. Multiplikation mit einem Skalar ändert den Grad des Polynoms nicht, sodass $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$ bzgl. Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen ist. Deshalb ist $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$ ein Teilraum des $\mathbb{K}[x]$.

**Beispiel** (Teilraum mit Polynomen)

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$P := \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \,|\, p(0) = 0\}$$

ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ist.

Wir prüfen die drei Teilraumbedingungen:

(1) ($P$ ist nicht leer) Das Nullpolynom (d.h. $p_{\text{Null}}(x) = 0x^2 + 0x + 0$) hat die Eigenschaft $p_{\text{Null}}(0) = 0$, sodass $p_{\text{Null}} \in P$ gilt.

(2) ($P$ ist abgeschlossen bzgl. Addition) Seien $p, q \in P$; d.h. $p(0) = 0 = q(0)$. Für $p(x) := p_2x^2 + p_1x + p_0$ und $q(x) := q_2x^2 + q_1x + q_0$ müssen deshalb gelten

$$p(0) = p_2(0^2) + p_1(0) + p_0 = p_0 = 0 \qquad q(0) = q_2(0^2) + q_1(0) + q_0 = q_0 = 0.$$

Von daher ist die Form von $p$ bzw. $q$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} p(x) & = & p_2x^2 & + & p_1x \\ q(x) & = & q_2x^2 & + & q_1x. \end{array}$$

Nun prüfen wir, ob $p + q$ in $P$ liegt:

$$(p+q)(x) = (p_2+q_2)x^2 + (p_1+q_1)x$$

$$(p+q)(0) = (p_2+q_2)0^2 + (p_1+q_1)0 = 0 \quad \Rightarrow p + q \in P.$$

(3) ($P$ ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit Skalaren) Seien $p \in P$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(\alpha p)(x) = \alpha p_2x^2 + \alpha p_1x$$

$$(\alpha p)(0) = \alpha p_2(0^2) + \alpha p_1(0) = 0 \Rightarrow \alpha p \in P.$$

Weil die drei Teilraumkriterien erfüllt sind, ist $P$ ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

**Beispiel** (Teilraum mit Matrizen)

Zeigen Sie, dass $D := \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \,\middle|\, a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

Wir prüfen die drei Teilraumbedingungen:

(1) ($D$ nicht leer) Die Nullmatrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ hat in der Positionen $(1,2)$ und $(2,1)$ einen Eintrag Null und ist damit in $D$.

(2) ($D$ abgeschlossen bzgl. Addition) Seien $A, B \in D$; d.h. $a_{12} = a_{21} = 0$ und $b_{12} = b_{21} = 0$. Dann gilt

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & 0 + 0 \\ 0 + 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}.$$

Da $A + B$ in der Positionen $(1, 2)$ und $(2, 1)$ einen Null Eintrag hat, ist $A + B \in D$.

(3) ($D$ abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit Skalaren) Seien $A \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Aus

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot 0 \\ \alpha \cdot 0 & \alpha \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & 0 \\ 0 & \alpha \cdot a_{22} \end{bmatrix}$$

folgt, dass $\alpha A$ in der Positionen $(1, 2)$ und $(2, 1)$ einen Null Eintrag hat, d.h. $\alpha A \in D$.

Weil die drei Teilraumkriterien erfüllt sind, ist $D$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

Die nächsten zwei Beispiele sollen dazu dienen, die Notwendigkeit alle Kriterien eines Teilraums zu zeigen: Nur weil eine nicht-leere Menge bzgl. der Addition abgeschlossen ist, heißt es nicht, dass die Menge auch bzgl. Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen ist und andersrum.

**Beispiel** (abgeschlossen bzgl. Addition, nicht abgeschlossen bzgl. Multiplikation)

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Z}^2 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

*kein* Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

$\mathbb{Z}^2$ ist nicht leer: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, weil 0 eine ganze Zahl ist. Ferner ist $\mathbb{Z}^2$ abgeschlossen bzgl. Addition (die Summe von zwei ganzen Zahlen ist wieder eine ganze Zahl). Die Menge ist bzgl. Multiplikation mit Skalaren (aus dem Körper $\mathbb{R}$) jedoch nicht abgeschlossen. Beispielsweise ist

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2, \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ aber } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \notin \mathbb{Z}^2,$$

weil $\frac{1}{2}$ keine ganze Zahl ist. Damit ist $\mathbb{Z}^2$ kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie, ob

$$\mathbb{Q}^2 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist, wobei $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ die rationalen Zahlen bezeichnet.

**Beispiel** (abgeschlossen bzgl. Multiplikation, nicht abgeschlossen bzgl. Addition)

Seien

$$X := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \,|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2 \qquad Y := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \,|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

(geometrisch betrachtet ist $X$ die $x$-Achse und $Y$ die $y$-Achse). Definiere die Vereinigung der Mengen $X, Y$ durch

$$M := X \cup Y = \left\{ \vec{m} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \vec{m} \in X \text{ oder } \vec{m} \in Y \right\}.$$

Ist $M$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$?

Offensichtlich ist $M$ als Vereinigung zweier nicht-leerer Mengen auch nicht leer. Ist $\vec{m} \in M$, so ist $\vec{m}$ in $X$ oder $Y$. Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\alpha\vec{m} \in X = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\} \text{ oder } \alpha\vec{m} \in Y = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

und damit in $X \cup Y = M$, sodass $M$ bzgl. Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen ist.

Die Summe der Vektoren $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \in M$ ist jedoch nicht ein Element in $M$, weil $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ weder auf der $x$-Achse, noch auf der $y$-Achse liegt. $M$ ist bzgl. der Addition nicht abgeschlossen und damit kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

### 2. Aufgabe

Bestimmen Sie, welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bzw. $\mathbb{R}^{2,2}$ Teilräume des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bzw. $\mathbb{R}^{2,2}$ sind.

a) $M_1 := \{p_2x^2 + p_1x + p_0 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \,|\, \sum_{i=0}^{2} p_i = 0\}$

b) $M_2 := \{p_2x^2 + p_1x + p_0 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \,|\, p_2p_1p_0 = 0\}$

c) $M_3 := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, A \text{ ist orthogonal}\}$

d) $M_4 := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, AB = BA \text{ für ein festes } B \in \mathbb{R}^{2,3}\}$

e) $M_5 := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, AC = CA \text{ für ein festes } C \in \mathbb{R}^{2,2}\}$

**Definition** (lineare Hülle (Spann); Erzeugendensystem; lineare (Un)Abhängigkeit; Basis; Dimension)

Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalaren aus dem Körper $\mathbb{K}$ und seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$.

Die **lineare Hülle** oder **Spann** der Menge $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ ist die Menge aller möglichen Linearkombinationen der Vektoren mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$:

$$\text{span}\,\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$$
$$:= \{\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k \;|\; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}\,.$$

Die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sind **linear unabhängig**, wenn das LGS

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

**nur** die triviale Lösung hat (d.h. $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ ist die einzige Lösung). Sonst sind die Vektoren **linear abhängig**.

Die Menge $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ heißt **Erzeugendensystem** des Vektorraums $V$, falls gilt:

$$\text{span}\,\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = V.$$

Ist die Menge $\mathcal{B} := \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, so ist $\mathcal{B}$ eine **Basis** von $V$. Die **Dimension** von $V$ ist die Anzahl der Elemente in einer Basis.

*Bemerkung:* Wir sagen, dass eine Menge linear (un)abhängig ist, wenn die Vektoren in der Menge linear (un)abhängig sind.

Training in der MUMIE: „Linearkombination von Matrizen“, „Basis im Vektorraum der Matrizen“, „Erzeugendensystem bzw. Basis im Vektorraum der Polynome“

**Beispiel** (Spann; Erzeugendensystem; lineare Unabhängigkeit; Basis)

Die Menge $P := \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;|\; p(0) = 0\}$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Überprüfen Sie, ob $M := \{\boldsymbol{x^2}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x(x+1)}\} \subseteq P$ eine Basis von $P$ ist.

Wir prüfen zuerst, ob $M$ ein Erzeugendensystem ist:

Es wurde schon gezeigt (siehe Seite 53), dass $p \in P$ von der Form $p(x) = p_2x^2 + p_1x$ ist. Das Polynom $p$ kann als eine Linearkombination der Vektoren in $M$ geschrieben werden:

$$p(x) = p_2x^2 + p_1x = p_2 \cdot \boldsymbol{x^2} + p_1 \cdot \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{x(x+1)},$$

sodass $M$ ein Erzeugendensystem von $P$ ist ($P = \operatorname{span} M$).

Andererseits gilt auch:

$$p(x) = p_2x^2 + p_1x = 0 \cdot \boldsymbol{x^2} + (p_1 - p_2) \cdot \boldsymbol{x} + p_2 \cdot \boldsymbol{x(x+1)}.$$

Die Darstellung ist nicht eindeutig: für $p_2 \neq 0$ gilt:

$$(p_2 - 0) \cdot \boldsymbol{x^2} + (p_1 - (p_1 - p_2)) \cdot \boldsymbol{x} + (0 - p_2) \cdot \boldsymbol{x(x+1)}$$
$$= p_2x^2 + p_2x - p_2x^2 - p_2x = p_{\text{Null}}.$$

sodass das Nullpolynom sich als eine nichttriviale Linearkombination der Polynomen in $M$ darstellen läßt (d.h. $\alpha_1x^2 + \alpha_2x + \alpha_3x(x+1) = 0$ hat eine von $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ verschiedene Lösung). Daraus folgt, dass die Vektoren in $M$ linear abhängig sind, sodass $M$ keine Basis von $P$ ist.

**3. Aufgabe**

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{x^2, x(x+1)\}$ eine Basis von $P := \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(0) = 0\}$ ist. Welche Dimension hat $P$?

## 5.3 Koordinatenabbildungen

Das eigentliche Thema ist Koordinatenvektoren. Es bietet sich die Möglichkeit schon im Voraus die natürliche Erweiterung des Themas (Koordinatenabbildungen) mitzubehandeln.

**Definition** (Koordinatenvektor; Koordinatenabbildung)

Der Vektorraum $V$ der Dimension $n$ über den Körper $\mathbb{K}$ und eine Basis $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{n}}\}$ von $V$ seien gegeben. Ferner sei

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n}\vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{n}}$$

die eindeutige Darstellung des Vektors $\vec{v}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Der **Koordinatenvektor** von $\vec{v}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ ist gegeben durch

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_n} \end{bmatrix}.$$

Die **Koordinatenabbildung** von $V$ bzgl. $\mathcal{B}$ ist die Abbildung

$$K_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n; \vec{v} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_n} \end{bmatrix},$$

die jeden Vektor in $V$ auf sein Koordinatenvektor bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

Was ist der Unterschied zwischen Koordinatenvektoren und Koordinatenabbildungen? Ein Koordinatenvektor ist ein Element im Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Zu einer Koordinatenabbildung gehören Urbild- und Bildraum sowie eine Abbildungsvorschrift zwischen diesen Vektorräumen.

**Beispiel** (Koordinatenabbildung mit Polynomen)

Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung von

$$P := \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(0) = 0\}$$

bzgl. der Basis $\mathcal{B} := \{x^2, x(x+1)\}$.

Ein allgemeines Element von $P$ hat die Form $ax^2 + bx$. Weil $\dim P = 2$ ist, hat die Koordinatenabbildung die Form

$$\begin{array}{cccc} K_{\mathcal{B}}: & P & \to & \mathbb{R}^2 \\ & ax^2 + bx & \mapsto & \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \end{array}$$

wobei $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x(x+1) = ax^2 + bx$; d.h.

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x = (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + \alpha_2 x = ax^2 + bx.$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{cccccc} x^2 & : & \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & a \\ x & : & & & \alpha_2 & = & b \\ & & & \Rightarrow & \alpha_1 & = & a - b. \end{array}$$

Von daher ist die Koordinatenabbildung von $P$ bzgl. $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{cccc} K_{\mathcal{B}}: & P & \to & \mathbb{R}^2 \\ & ax^2 + bx & \mapsto & \begin{bmatrix} a - b \\ b \end{bmatrix}. \end{array} \tag{5}$$

*Bemerkung:* $K_{\mathcal{B}}(ax^2 + bx) = \begin{bmatrix} a - b \\ b \end{bmatrix}$ ist ein Vektor und keine Abbildung! Wird die Koordinatenabbildung abgefragt, ist eine Antwort in der Form von (5) erwartet.

**4. Aufgabe** (Basen und Koordinatenabbildung mit Matrizen)

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^{3,2}$ ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung von $V := \mathbb{R}^{3,2}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

**5. Aufgabe** (Basen und Koordinatenabbildung mit Polynomen)

Gegeben seien die folgenden Basen des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:

$$\mathcal{B}_1 := \{1, x+1, x^2+x+1\}, \ \mathcal{B}_2 := \{x+1, 2, x^2+x+1\}.$$

a) Bestimmen Sie jeweils die Koordinatenvektoren von

$$x^2, \ x+5, \ 3x+3$$

bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ und bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$.

b) Bestimmen Sie jeweils die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ bzw. $\mathcal{B}_2$.

c) Setzen Sie die Polynomen in $\mathcal{B}_i$ in $K_{\mathcal{B}_i}$ ein, $i = 1, 2$. Was merkt man?

Training in der MUMIE: „Koordinatenvektoren in verschiedenen Vektorräumen“

## 5.4 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 5. Kapitel

**1. Aufgabe** Wähle beispielsweise den Vektor $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^2$ und den Skalar $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Weil $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ist $\sqrt{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \notin \mathbb{Q}^2$, sodass $\mathbb{Q}^2$ bzgl. Multiplikation mit Skalaren nicht abgeschlossen ist.

**2. Aufgabe** Für jede Menge $M_i$ müssen alle Teilraumkriterien

(1) $M_i \neq \emptyset$,
(2) $M_i$ ist abgeschlossen bzgl. Addition,
(3) $M_i$ ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit Skalaren,

nachgewiesen werden (im Fall eines Teilraums des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bzw. $\mathbb{R}^{2,2}$) oder es soll durch ein Gegenbeispiel gezeigt werden, dass mindestens eine Bedingung nicht erfüllt ist (also kein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bzw. $\mathbb{R}^{2,2}$).

a) Wir prüfen, ob die drei Teilraumkriterien für $M_1$ erfüllt sind.

(1) Das Nullpolynom $p_{\text{Null}}(x) = 0x^2 + 0x + 0$ ist in $M_1$ enthalten, weil die Summe der Koeffizienten Null ergibt $(0 + 0 + 0 = 0)$; d.h. $M_1$ ist nicht leer.

(2) Seien $p_2x^2 + p_1x + p_0, q_2x^2 + q_1x + q_0 \in M_1$; d.h. die Bedingungen $p_0 + p_1 + p_2 = 0$ und $q_0 + q_1 + q_2 = 0$ gelten. Die Summe

$$(p_2x^2 + p_1x + p_0) + (q_2x^2 + q_1x + q_0) = (p_2 + q_2)x^2 + (p_1 + q_1)x + (p_0 + q_0)$$

liegt in $M_1$, weil die Summe der Koeffizienten dieses Polynoms auch Null ergibt:

$$(p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2) = (p_0 + p_1 + p_2) + (q_0 + q_1 + q_2) = 0 + 0 = 0.$$

Daraus folgt $M_1$ ist abgeschlossen bzgl. Addition.

(3) Seien $p_2x^2 + p_1x + p_0 \in M_1$ (d.h. $p_0 + p_1 + p_2 = 0$) und $\alpha \in \mathbb{R}$. $M_1$ ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit Skalaren, falls $\alpha(p_2x^2 + p_1x + p_0) = (\alpha p_2)x^2 + (\alpha p_1)x + (\alpha p_0)$ in $M_1$ liegt. Dies ist der Fall, weil $\alpha p_0 + \alpha p_1 + \alpha p_2 = \alpha(p_0 + p_1 + p_2) = \alpha \cdot 0 = 0$ gilt. Daraus folgt $M_1$ ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit Skalaren.

Die Teilraumkriterien sind erfüllt. $M_1$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

b) $M_2$ ist kein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, weil $M_2$ nicht bzgl. der Addition abgeschlossen ist:

$$3x^2 + 0x + 4,\ 5x^2 + 7x + 0 \in M_2\ (3 \cdot 0 \cdot 4 = 0, 5 \cdot 7 \cdot 0 = 0),$$

$$(3x^2 + 0x + 4) + (5x^2 + 7x + 0) = 8x^2 + 7x + 4 \notin M_2\ (8 \cdot 7 \cdot 4 \neq 0).$$

c) Die Menge $M_3$ besteht aus Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ für die gilt $AA^T = I_2$. $M_3$ ist nicht leer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow I_2 \in M_2.$$

Die Menge $M_3$ ist jedoch nicht abgeschlossen bzgl. Skalarmultiplikation: Wir wählen $I_2 \in M_3, 0 \in \mathbb{R}$ und betrachten $0 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Von daher ist $M_3$ kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

d) Es gibt keine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, für die die Matrixmultiplikation $BA$ definiert ist, weil die Anzahl der Spalten in $B$ nicht gleich der Anzahl der Zeilen in $A$ entspricht, d.h. $M_4$ ist leer. Also ist $M_4$ kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

e) $M_5$ ist anders als $M_4$, weil hier die Multiplikation von $A$ mit $C \in \mathbb{R}^{2,2}$ von rechts (d.h. $AC$) und von links (d.h. $CA$) definiert ist.
Wir prüfen, ob die drei Teilraumkriterien für $M_5$ gelten:
(1) Weil

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ist $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_5$, also ist $M_5$ nicht leer.

(2) Seien $A_1, A_2 \in M_5$. Nach der Vorschrift der Menge $M_5$ bedeutet dies, dass

$$\boldsymbol{A_1 C = C A_1} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A_2 C = C A_2}. \qquad (*)$$

Wir prüfen, ob $A_1 + A_2 \in M_5$ gilt:

$$\boldsymbol{(A_1 + A_2) C} = A_1 C + A_2 C \overset{\text{wegen } (*)}{=} C A_1 + C A_2 = \boldsymbol{C (A_1 + A_2)}.$$

Damit ist $A_1 + A_2 \in M_5$.
(3) Seien $A \in M_5$ (d.h. $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$), $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir prüfen, ob $\alpha A \in M_5$ gilt:

$$\boldsymbol{(\alpha A) C} = \alpha (AC) = \alpha (CA) = \boldsymbol{C (\alpha A)}.$$

Die Teilraumkriterien sind erfüllt $\Rightarrow$ $M_5$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

**3. Aufgabe** $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem des Vektorraums $P$, weil jedes Polynom in $P$ die Form $ax^2 + bx$ hat, und $ax^2 + bx$ kann als Linearkombination der Polynomen in $\mathcal{B}$ dargestellt werden:

$$(a - b)x^2 + b(x(x+1)) = ax^2 - bx^2 + bx^2 + bx = ax^2 + bx.$$

Die zwei Polynome sind linear unabhängig:

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x(x+1) = 0$$

oder

$$(\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + \alpha_2 x = 0x^2 + 0x.$$

Koeffizientenvergleich für $x^2$ ergibt $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Koeffizientenvergleich für $x$ ergibt $\alpha_2 = 0$, sodass auch $\alpha_1 = 0$.

Die Dimension von $P$ ist 2, weil eine Basis (nämlich $\mathcal{B}$) von $P$ zwei Elemente hat.

**4. Aufgabe**

**a)** Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist. Dies ist der Fall, wenn jeder beliebige Vektor $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$ als eine Linearkombination der Vektoren in $\mathcal{B}$ *eindeutig* dargestellt werden kann, d.h., falls das folgende LGS *genau* eine Lösung hat:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_6 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.$$

Komponentenvergleich ergibt das folgende LGS:

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{1} & +\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{2} & +\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{3} & +\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{4} & +\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{5} & & = & a \\
\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{1} & & & & & & = & b \\
 & \mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{2} & & & & & = & c \\
 & & \mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{3} & & & & = & d \\
 & & & \mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{4} & & & = & e \\
 & & & & \mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{5} & +\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{6} & = & f.
\end{array}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ mit dem Gaußalgorithmus auf NZSF bringen:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & a \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & d \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & f
\end{array}\right] . \to \ldots \text{(Gauß)} \ldots \to \left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{b} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{c} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{d} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{e} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{a-b-c-d-e} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{-a+b+c+d+e+f}.
\end{array}\right]$$

Weil Rang $A$ = Rang $[A|\vec{b}]$ $=$ Anzahl der Spalten in $A$ gilt, hat das LGS genau eine Lösung. Von daher ist $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{3,2}$.

**b)** Der Koordinatenvektor $\vec{v}_{\mathcal{B}}$ von $\vec{v} \in \mathbb{R}^{3,2}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ enthält die Koeffizienten, die benutzt werden müssen, um die Basisvektoren linear zu kombinieren, sodass das Ergebnis $\vec{v}$ ist. Aus der NZSF in Teil a) können wir ablesen:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{c} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{d} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{e} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$+(\boldsymbol{a-b-c-d-e}) \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + (\boldsymbol{-a+b+c+d+e+f}) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}^{3,2}$ bzgl. $\mathcal{B}$ bildet einen Vektor in $\mathbb{R}^{3,2}$ auf den zugehörigen Koordinatenvektor bzgl. der gegebenen Basis ab:

$$\begin{array}{cccc}
K_{\mathcal{B}}: & \mathbb{R}^{3,2} & \to & \mathbb{R}^6 \\
 & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{a-b-c-d-e} \\ \boldsymbol{-a+b+c+d+e+f} \end{bmatrix}.
\end{array}$$

**5. Aufgabe** **a)** Der Koordinatenvektor $\vec{v}_{\mathcal{B}_i} := \begin{bmatrix} \alpha_{i,1} \\ \alpha_{i,2} \\ \alpha_{i,3} \end{bmatrix}$ von $\vec{v} \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_i := \{\vec{b}_{i,1}, \vec{b}_{i,2}, \vec{b}_{i,3}\}, i =$ $1, 2,$ enthält die Koeffizienten, die benutzt werden müssen, um die Basisvektoren linear zu kombinieren, sodass das Ergebnis $\vec{v}$ ist:

$$\alpha_{i,1}\vec{b}_{i,1} + \alpha_{i,2}\vec{b}_{i,2} + \alpha_{i,3}\vec{b}_{i,3} = \vec{v}.$$

Hier die Ergebnisse:

| | |
|---|---|
| $x^2_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}$, weil<br>$x^2 = 0(1) + (\mathbf{-1})(x+1) + \mathbf{1}(\boldsymbol{x^2+x+1})$ | $x^2_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}$, weil<br>$x^2 = (\mathbf{-1})(x+1) + \mathbf{0}(\mathbf{2}) + \mathbf{1}(\boldsymbol{x^2+x+1})$ |
| $(x+5)_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}4\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$, weil<br>$x+5 = 4(1) + \mathbf{1}(\boldsymbol{x+1}) + \mathbf{0}(\boldsymbol{x^2+x+1})$, weil | $(x+5)_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$, weil<br>$x+5 = \mathbf{1}(x+1) + \mathbf{2}(\mathbf{2}) + \mathbf{0}(\boldsymbol{x^2+x+1})$ |
| $(3x+3)_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$, weil<br>$3x+3 = 0(1) + \mathbf{3}(\boldsymbol{x+1}) + \mathbf{0}(\boldsymbol{x^2+x+1})$ | $(3x+3)_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$, weil<br>$3x+3 = \mathbf{3}(x+1) + \mathbf{0}(\mathbf{1}) + \mathbf{0}(\boldsymbol{x^2+x+1})$ |

**b)** Die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bzgl. $\mathcal{B}_i, i = 1, 2$, bildet einen Vektor in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (also ein Polynom 2. Grades) auf dem zugehörigen Koordinatenvektor bzgl. der Basis $\mathcal{B}_i$ ab. Wir berechnen hier nur $K_{\mathcal{B}_1}$.

Für ein allgemeines Polynom $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ werden Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ gesucht mit:

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(x+1) + \alpha_3(x^2+x+1) = ax^2 + bx + c$$

oder

$$\alpha_3(x^2) + (\alpha_2 + \alpha_3)(x) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(1) = ax^2 + bx + c.$$

Koeffizientenvergleich ergibt das LGS
$$\begin{array}{lccccccc} x^0 = 1: & \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & c \\ x^1: & & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & b \\ x^2: & & & & & \alpha_3 & = & a. \end{array}$$

EKM aufstellen und in NZSF bringen:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] \overset{\text{I}-\text{II},\text{II}-\text{III}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c-b \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right].$$

Die gesuchte Koordinatenabbildung ist $K_{\mathcal{B}_1} : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3; ax^2 + bx + c \mapsto \begin{bmatrix} c-b \\ b-a \\ a \end{bmatrix}$.

(Setzen Sie $x^2$, $x+5$ und $3x+3$ in $K_{\mathcal{B}_1}$ ein. Was merkt man? Beispielsweise ist $K_{\mathcal{B}_1}(x^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ der Koordinatenvektor von $x^2$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.)

Eine ähnliche Berechnung ergibt
$$K_{\mathcal{B}_2} : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3; \quad ax^2 + bx + c \mapsto \begin{bmatrix} b-a \\ (c-b)/2 \\ a \end{bmatrix}.$$

**c)** Man bekommt jeweils die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Beispielsweise ist

$$x^2 + x + 1 = 0 \cdot 1 + 0(x+1) + 1(x^2+x+1),$$

sodass $K_{\mathcal{B}_1}(x^2+x+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sein soll. Steckt man $x^2+x+1$ in $K_{\mathcal{B}_1}$ hinein, kommt $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tatsächlich heraus. (Falls nicht, hat man falsch gerechnet!)

# 6 Lineare Abbildungen

## 6.1 Definition und Beispiele

**Definition** (lineare Abbildung, Homomorphismen)
Seien $V, W$ Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$. Dann heißt eine Abbildung $L : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ **linear**, wenn folgende Regeln gelten:

$$\text{für alle } \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \alpha \in \mathbb{K}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & L(\vec{u} + \vec{v}) & = & L(\vec{u}) + L(\vec{v}) \\ (2) & L(\alpha \cdot \vec{v}) & = & \alpha \cdot L(\vec{v}). \end{array}$$

Lineare Abbildungen werden auch **Homomorphismen** genannt.

*Tipp:* $L(\vec{\mathbf{0}}_V) = \vec{\mathbf{0}}_W$ (Setze $\alpha := 0$ in (2).)

Für eine lineare Abbildung $L : V \to W$ ist es egal, ob die Vektorraumoperationen in $V$ durchgeführt werden und das Ergebnis abgebildet wird oder, ob erst abgebildet wird und danach die Vektorraumoperationen in $W$ durchgeführt werden. Die Ergebnisse stimmen überein.

**Beispiel** (lineare Abbildung)

Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist:

$$\begin{array}{rccc} L : & \mathbb{R}_{\le 2}[x] & \to & \mathbb{R}^{2,2} \\ & ax^2 + bx + c & \mapsto & \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \end{array}.$$

Die Abbildung $L$ ist linear, falls für alle

$$p(x) := p_2x^2 + p_1x + p_0, \quad q(x) := q_2x^2 + q_1x + q_0 \in \mathbb{R}_{\le 2}[x], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

die zwei Bedingungen $\left\{ \begin{array}{lrcl} 1) & L(p+q) & = & L(p) + L(q) \\ 2) & L(\alpha \cdot p) & = & \alpha \cdot L(p) \end{array} \right\}$ gelten.

1) $L(p+q) = L((p_2x^2 + p_1x + p_0) + (q_2x^2 + q_1x + q_0))$

$$= L((\underbrace{p_2 + q_2}_{a})x^2 + (\underbrace{p_1 + q_1}_{b})x + (\underbrace{p_0 + q_0}_{c}))$$

$$= \begin{bmatrix} p_2 + q_2 & p_1 + q_1 \\ p_0 + q_0 & p_2 + q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 & p_1 \\ p_0 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_2 & q_1 \\ q_0 & q_2 \end{bmatrix}$$

$$= L(p_2x^2 + p_1x + p_0) + L(q_2x^2 + q_1x + q_0) = L(p) + L(q) \quad \checkmark$$

2) $$L(\alpha \cdot p) = L(\alpha(p_2x^2 + p_1x + p_0)) = L((\underbrace{\alpha p_2}_{a})x^2 + (\underbrace{\alpha p_1}_{b})x + (\underbrace{\alpha p_0}_{c}))$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha p_2 & \alpha p_1 \\ \alpha p_0 & \alpha p_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} p_2 & p_1 \\ p_0 & p_2 \end{bmatrix} = \alpha \cdot L(p_2x^2 + p_1x + p_0) = \alpha \cdot L(p) \quad \checkmark$$

Die Bedingungen sind erfüllt. Die Abbildung ist linear.

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$L_1 : \mathbb{R}^{2,3} \to \mathbb{R}^{3,2}; A \mapsto A^T \qquad L_2 : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]; ax^2 + bx + c \mapsto cx^2 + x + a$$

$$L_3 : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{2,2}; ax^2 + bx + c \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ a & bc \end{bmatrix}$$

## 6.2 Der Vektorraum der linearen Abbildungen

**Satz**
Seien $V, W$ Vektorräume über $\mathbb{K}$. Die Menge aller linearen Abbildungen (oder Homomorphismen) von $V$ nach $W$

$$\text{Hom}(V, W) := \{\text{alle linearen Abbildungen von } V \text{ nach } W\}$$

ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Hierbei sind Addition und Multiplikation mit Skalaren für $L, M \in \text{Hom}(V, W)$ so definiert:

$$\text{für alle } \vec{v} \in V, \alpha \in \mathbb{K} \text{ gilt } \begin{cases} L + M : & V & \to & W; & \vec{v} & \mapsto & L(\vec{v}) + M(\vec{v}) \\ \alpha L : & V & \to & W; & \vec{v} & \mapsto & \alpha L(\vec{v}). \end{cases}$$

**Beispiel** (Linearkombination von linearen Abbildungen)
Seien $L, M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ die linearen Abbildungen, die durch

$$\boldsymbol{L}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{ax - b}, \quad \boldsymbol{M}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{-ax + 2a}$$

gegeben sind. Bestimmen Sie $3L - 5M$.

$3L - 5M$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} (3L - 5M)\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) &= 3\boldsymbol{L}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right) - 5\boldsymbol{M}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right) \\ &= 3(\boldsymbol{ax - b}) - 5(-ax + 2a) \\ &= 8ax + (-10a - 3b). \end{aligned}$$

**Beispiel**
Bestimmen Sie (falls möglich) die Summe der folgenden linearen Abbildungen

$$\begin{array}{rccl} L : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \\ & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & ax - b \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} N : & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ & ax + b & \mapsto & 3bx - a. \end{array}$$

Die gesuchte Summe ist *nicht* definiert (die **Urbildräume** sind unterschiedlich).

## 6.3 Die Komposition linearer Abbildungen

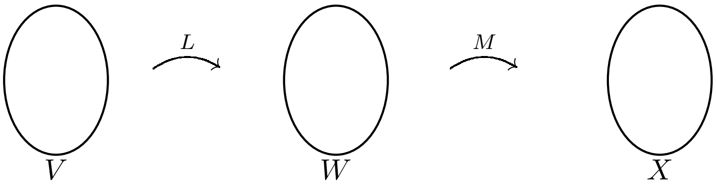
**Definition** (Komposition)

Gegeben seien die Vektorräume $V, W, X$ über $\mathbb{K}$ und die linearen Abbildungen

$$\boldsymbol{L} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W},\ \boldsymbol{M} : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{X}.$$

Die **Komposition** (oder **Hintereinanderausführung** oder **Produkt**) $\boldsymbol{M} \circ \boldsymbol{L} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{X}$ ist gegeben durch

$$(M \circ L)(\vec{v}) \to M(L(\vec{v})).$$



$$\vec{v} \quad \xmapsto{L} \quad L(\vec{v}) \quad \xmapsto{M} \quad M(L(\vec{v}))$$

**Beispiel** (Komposition linearer Abbildungen)

Für die Vektorräume $V := \mathbb{R}^2, W := \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ seien die linearen Abbildungen $L : V \to W,\ M : W \to V$ durch

$$L\left(\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right]\right) = ax - b,\ M(ax + b) = \left[\begin{array}{c} 3a \\ a - 2b \end{array}\right]$$

gegeben. Bestimmen Sie die Kompositionen $M \circ L$ bzw. $L \circ M$.

- Die Komposition $M \circ L$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, wobei

$$(M \circ L)\left(\left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array}\right]\right) = M\left(L\left(\left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array}\right]\right)\right) = M(cx - d).$$

Wir setzen $c$ für $a$ und $-d$ für $b$ in die Abbildung $M$ ein und bekommen

$$(M \circ L)\left(\left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c} 3c \\ c + 2d \end{array}\right].$$

- Die Komposition $L \circ M$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ nach $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, wobei

$$(L \circ M)(cx + d) = L\left(M\left(cx + d\right)\right) = L\left(\left[\begin{array}{c} 3c \\ c - 2d \end{array}\right]\right).$$

Wir setzen $3c$ für $a$ und $c - 2d$ für $b$ in die Abbildung $L$ ein und bekommen

$$L\left(\left[\begin{array}{c} 3c \\ c - 2d \end{array}\right]\right) = 3cx - (c - 2d).$$

**Definition** (Invertierbarkeit linearer Abbildungen)

Seien $V, W$ Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung.

$L$ ist **invertierbar**, falls es eine Abbildung $M : W \to V$ gibt mit $(M \circ L)(\vec{v}) = \vec{v}$ für alle Vektoren $\vec{v} \in V$.

*Bemerkungen:*

Sei $\boldsymbol{L} : V \to W$ invertierbar mit der Inversen $\boldsymbol{M}$.

- $M \circ L = I_V$, die Identitätsabbildung (für alle $\vec{v} \in V$ gilt $I_V(\vec{v}) = \vec{v}$).
- Notation: $L^{-1} := \boldsymbol{M}$
- Ist $\dim(V)$ endlich, so ist auch $L \circ \boldsymbol{M} = I_W$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \vec{v} \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{L}"] & \bullet \vec{w} \arrow[l, bend left, "\boldsymbol{M}"]
\end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{N}$ ist nicht die inverse Abbildung von $\boldsymbol{L}$, weil $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{L}(\vec{v})) = \vec{u} \neq \vec{v}$.

$$\begin{tikzcd}
\vec{u}\bullet & \bullet \vec{v} \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{L}"] & \bullet \vec{w} \arrow[ll, bend left, "\boldsymbol{N}"]
\end{tikzcd}$$

**Beispiel** (inverse Abbildungen)

Sind die Abbildungen

$$L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]; ax + b \mapsto (2a - 3b)x + (7b - 5a) \text{ und}$$
$$M : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]; \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b} \mapsto -(7\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})x - (5\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$$

inverse Abbildungen?

$L$ und $M$ sind inverse Abbildungen, weil $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ endlich dimensional ist und $M \circ L = I_{\mathbb{R}_{\leq 1}[x]}$:

$$(M \circ L)(\boldsymbol{cx + d}) = M(L(cx + d))$$
$$= M(\underbrace{(\boldsymbol{2c - 3d})x + (\boldsymbol{7d - 5c})}_{L(cx+d)})$$
$$= -(7\underbrace{(\boldsymbol{2c - 3d})}_{\boldsymbol{a}} + 3\underbrace{(\boldsymbol{7d - 5c})}_{\boldsymbol{b}})x - (5\underbrace{(\boldsymbol{2c - 3d})}_{\boldsymbol{a}} + 2\underbrace{(\boldsymbol{7d - 5c})}_{\boldsymbol{b}})$$
$$= -(14c - 21d + 21d - 15c)x - (10c - 15d + 14d - 10c)$$
$$= \boldsymbol{cx + d}.$$

## 6.4 Kern, Bild, Lösungsraum linearer Gleichungen

**Satz** (Bild eines Teilraums ist ein Teilraum)

Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ erhält die Struktur von einem Vektorraum, d.h. ist $U$ ein Teilraum von $V$, so ist $L(U)$ (das Bild von $U$) ein Teilraum von $W$.

Beweis: Sei $U$ ein Teilraum von $V$. Zu zeigen ist, dass die Menge $L(U)$ nicht leer und abgeschlossen bzgl. der Addition und Multiplikation mit Skalaren ist.

1. Aus $\vec{0}_V \in U$ und $L$ eine lineare Abbildung folgt $L(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \in L(U)$, also ist $L(U) \neq \emptyset$.
2. Seien $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in L(U)$, d.h. es existieren $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ mit $L(\vec{u}_1) = \vec{w}_1, L(\vec{u}_2) = \vec{w}_2$. Zu zeigen ist, $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in L(U)$.

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = L(\vec{u}_1) + L(\vec{u}_2) \overset{\text{Linearität}}{=} L(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$$

Weil $U$ ein Teilraum von $V$ ist, ist $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in U$, sodass gilt

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = L(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \in L(U). \quad \checkmark$$

3. Sei $\vec{w} \in L(U), \alpha \in \mathbb{K}$, d.h. es existiert ein $\vec{u} \in U$ mit $L(\vec{u}) = \vec{w}$. Zu zeigen ist, $\alpha\vec{w} \in L(U)$.

$$\alpha\vec{w} = \alpha L(\vec{u}) \overset{\text{Linearität}}{=} L(\alpha\vec{u})$$

Weil $U$ ein Teilraum von $V$ ist, ist $\alpha\vec{u} \in U$, sodass $\alpha\vec{w} = L(\alpha\vec{u}) \in L(U)$ ist. $\checkmark$

$L(U)$ ist ein Teilraum von $W$.

D.h. wir können Sätze der linearen Algebra auf das Bild eines Teilraums anwenden, weil dies selbst ein Vektorraum ist.

**Definition** (Injektivität)

Sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. $L$ heißt **injektiv**, falls für alle $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, aus $L(\vec{v}_1) = L(\vec{v}_2)$ folgt $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.
Die Aussage „$L$ ist **injektiv**“ ist äquivalent zu den folgenden Aussagen:

$$„\mathbf{Kern}(L) = \{\vec{0}\}“ \text{ und}$$

$$„\dim(\mathbf{Kern}(L)) = 0“$$

Wir zeigen die erste Äquivalenz:

$(\Rightarrow)$ : Angenommen die lineare Abbildung $L$ ist injektiv. Seien $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2 := \vec{0}$ im Kern von $L$. Aus der Definition von Kern folgt $L(\vec{v}_1) = \vec{0} = L(\vec{0})$. Aus der Definition von Injektivität folgt $\vec{v}_1 = \vec{0}$. Somit gilt $\text{Kern}(L) = \{\vec{0}\}$.

$(\Leftarrow)$ : Angenommen $\text{Kern}(L) = \{\vec{0}\}$. Existieren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ mit

$$L(\vec{v}_1) = L(\vec{v}_2),$$

so ist durch Umformung

$$L(\vec{v}_1) - L(\vec{v}_2) = \vec{0}.$$

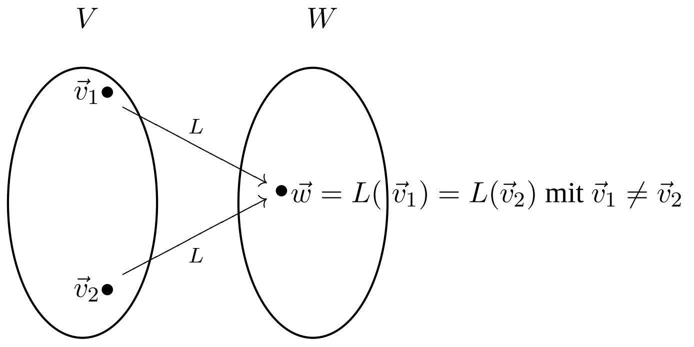
Wegen der Linearität ist dann

$$L(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0},$$

d.h. $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \text{Kern}(L)$. Nach der Voraussetzung besteht $\text{Kern}(L)$ nur aus dem Nullvektor, sodass $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}$ oder äquivalent $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Die Definition der Injektivität ist erfüllt.

*Bemerkung:* Eine andere Formulierung der Definition lautet, $L$ ist injektiv, falls jedes Element im Bild von $L$ höchstens ein Urbild hat.

Die lineare Abbildung $L$ in der Grafik ist *nicht injektiv*, weil $\vec{w}$ zwei Urbilder $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ hat.



**Definition** (Surjektivität)

Sei $L : V \to \boldsymbol{W}$ eine lineare Abbildung. $L$ heißt **surjektiv**, falls

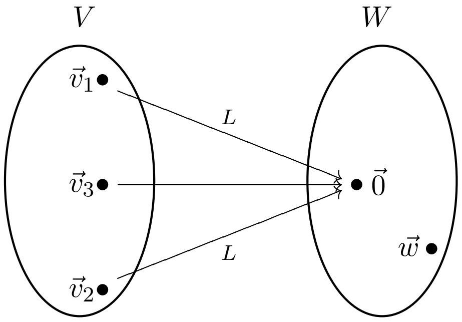
$$\{L(\vec{v}) \,|\, \vec{v} \in V\} = \boldsymbol{W}.$$

Ist $V$ endlich dimensional, dann ist $L$ genau dann **surjektiv**, wenn

$$\textbf{Bild}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{W}, \text{ d.h. } \dim(\textbf{Bild}(\boldsymbol{L})) = \dim(\boldsymbol{W}).$$

*Bemerkungen:*

- Eine andere Formulierung der Definition: $L$ ist surjektiv, falls jedes Element im Bildraum $W$ mindestens ein Urbild hat.
- Gerade diese Definition demonstriert, dass es potentiell einen Unterschied zwischen Bildraum und Bild einer Abbildung gibt. Betrachte dazu die Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \vec{v} \mapsto \vec{0}$. Der Bildraum ist $\mathbb{R}^2$, aber das Bild von $L$ ist $\{\vec{0}\}$. Diese Abbildung ist definitiv nicht surjektiv.



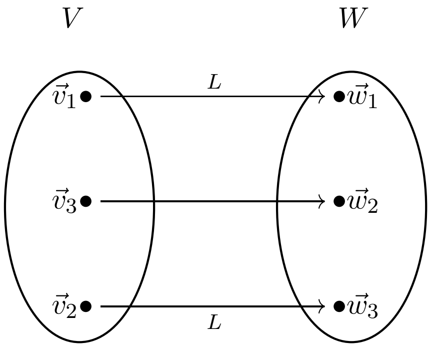
$L$ ist nicht surjektiv, weil $\vec{w}$ kein Urbild hat.

**Definition** (Bijektivität)

Sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. $L$ heißt **bijektiv**, falls $L$ **injektiv und surjektiv** ist.

*Bemerkungen:*

- Eine andere Formulierung der Definition: $L$ ist bijektiv, falls jeder Vektor in $W$ genau ein Urbild hat.
- Eine Abbildung $L : V \to V$ ist genau dann bijektiv, wenn $L$ invertierbar ist.



**Beispiel** (Injektivität; Surjektivität; Bijektivität)

Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv sind.

$L_1 : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ ax + b \mapsto bx + a$

$L_2 : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ ax + b \mapsto bx + b$

$L_3 : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x];\ ax + b \mapsto ax^2 + (a + b)x + b$

$L_4 : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ ax^2 + bx + c \mapsto cx + (a + b)$

• $L_1$ ist **injektiv**, denn aus

$$L_1(ax+b) = bx + a = 0 = 0x + 0 (d.h. a = b = 0)$$

$$\text{folgt Kern}(L_1) = \{\vec{0}\}.$$

$L_1$ ist **surjektiv**, weil das Urbild von $ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ das Polynom $bx + a$ ist.
$L_1$ ist **bijektiv**, weil $L_1$ injektiv und surjektiv ist.

• $L_2$ ist **weder injektiv**

$$(\text{aus } L(2x) = L(2x+0) = 0x + 0 \text{ folgt } 2x \in \text{Kern}(L_2),\ \text{d.h. Kern}(L_2) \neq \{\vec{0}\})$$

**noch surjektiv** (beispielsweise hat $3x + 1$ kein Urbild, denn $3x + 1 \neq b(x+1)$ für alle $b \in \mathbb{R}$).
$L_2$ ist **nicht bijektiv**, weil $L_2$ nicht injektiv und surjektiv ist.

• $L_3$ ist **injektiv**: Aus $ax + b \in \text{Kern}(L_3)$ folgt

$$L_3(ax+b) = ax^2 + (a+b)x + b = 0x^2 + 0x + 0.$$

Durch Koeffizientenvergleich von $x^2$ und $x^0$ erhalten wir $a = 0$ bzw. $b = 0$, d.h. Kern$(L_3) = \{\vec{0}\}$.

$L_3$ ist jedoch **nicht surjektiv**. Beispielsweise hat $x^2 + 1$ kein Urbild:
$L_3(ax+b) = ax^2 + (a+b)x + b = x^2 + 1$ führt zu dem LGS $a = 1,\ a + b = 0,\ b = 1$ (keine Lösung).

$L_3$ ist **nicht bijektiv**, weil $L_3$ nicht gleichzeitig injektiv und surjektiv ist.

• $L_4$ ist **nicht injektiv**, weil aus $L_4(x^2 - x) = \vec{0}$ folgt $x^2 - x \in \text{Kern}(L_4)$, d.h. Kern$(L_4) \neq \{\vec{0}\}$.

$L_4$ ist **surjektiv**. Ein Element $ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ hat das Urbild $bx + a$ ($L_4(bx + a) = ax + b$).

$L_4$ ist **nicht bijektiv**, weil $L_4$ nicht gleichzeitig injektiv und surjektiv ist.

**Satz** (Dimensionssatz)

Seien $V, W$ Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Es gilt:

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(L)) + \dim(\text{Bild}(L)).$$

In dem obigen Beispiel ist $L_4$ eine lineare Abbildung von einem 3-dimensionalen Raum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ in einen 2-dimensionalen Raum $W := \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, sodass dim(Bild$(L_4)$) höchstens 2 sein kann. So muss dann dim(Kern$(L_4)$) mindestens 1 sein, sodass $L_4$ **nicht injektiv** sein kann. (Dies gilt nach dem Dimensionssatz für **jede** lineare Abbildung von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ nach $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.)

In dem vorhandenen Beispiel ist dim(Bild$(L_4)$) mindestens zwei, weil es die linear unabhängigen Bilder $L(1) = x$ und $L(x^2) = 1$ gibt. Die Dimension von Bild$(L_4)$ ist gleichzeitig höchstens zwei und mindestens zwei, also genau zwei. Nach dem Dimensionssatz ist dim(Kern$(L_4)) = 1$.

**2. Aufgabe**

Unter welchen Bedingungen kann eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^{3,2} \to \mathbb{R}^{2,4}$ injektiv / surjektiv / bijektiv sein?

**Satz** (Lösungsmenge eines abstrakten LGS)

Seien $V, W$ Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$, $L : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\vec{b} \in W$.

Die Lösungsmenge des LGS $L(\vec{x}) = \vec{b}$ ist

$$\mathcal{L} := \{\vec{x} \in V \mid L(\vec{x}) = \vec{b}\} = \{\vec{x}_P + \vec{x}_H \mid \vec{x}_H \in \text{Kern}(L)\}.$$

↑ spezielle (oder partikuläre) Lösung

Im Satz ist $\vec{x}_P$ irgendeine Lösung des LGS, d.h. $L(\vec{x}_P) = \vec{b}$, und $\vec{x}_H$ ist eine Lösung des homogenen Gleichungssystems, d.h. $L(\vec{x}_H) = \vec{0}$. Nun ist $L(\vec{x}_P + \vec{x}_H) \overset{\text{Linearität}}{=} L(\vec{x}_P) + L(\vec{x}_H) = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$, sodass $\vec{x}_P + \vec{x}_H$ auch eine Lösung des LGS ist.

**Beispiel**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $L_4(q) = 5x + 3$ wobei

$$L_4 : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ \ ax^2 + bx + c \mapsto cx + (a + b).$$

Weil $\dim(\text{Kern}(L_4)) = 1$ (siehe den Text nach dem Dimensionssatz auf der vorherigen Seite) und $x^2 - x \in \text{Kern}(L_4)$, ist $\{x^2 - x\}$ eine Basis für Kern $(L_4)$. Ferner ist

$$q_P = 3x^2 + 5$$

eine spezielle Lösung der Gleichung

$$L_4(q) = 5x + 3.$$

Die Lösungsmenge ist deshalb

$$\mathcal{L} = \left\{3x^2 + 5 + s(x^2 - x) \mid s \in \mathbb{R}\right\}.$$

**3. Aufgabe**

Eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch:

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie :

(a) $L\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}\right)$,

(b) die Lösungsmenge des LGS $L(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix}$,

(c) eine Basis von $\text{Kern}(L)$,

(d) eine Basis von $\text{Bild}(L)$,

(e) ob $L$ injektiv / surjektiv / bijektiv ist.

## 6.5 Lösungen bzw. Lösungsssskizzen zu den Aufgaben

**1. Aufgabe** $L_i : V_i \to W_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ist eine lineare Abbildung, falls für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V_i$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$L_i(\vec{u} + \vec{v}) = L_i(\vec{u}) + L_i(\vec{v}), \quad (+ \text{ Addition in } V_i \quad + \text{ Addition in } W_i),$$
$$L_i(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot L_i(\vec{v}), \quad (\cdot \text{ Skalarmultiplikation in } V_i \quad \cdot \text{ Skalarmultiplikation in } W_i).$$

Ist $L$ eine lineare Abbildung, so ist mit $\alpha = 0$: $L(0 \cdot \vec{0}) = 0L(\vec{0}) = \vec{0}$. D.h., falls $L_i(\vec{0}) \neq \vec{0}$, ist $L_i$ keine lineare Abbildung.

- $L_1(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $L_1$ könnte linear sein. Wir prüfen die zwei Bedingungen für eine lineare Abbildung. Für alle $A := [a_{i,j}]$, $B := [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{2,3}$, und $\alpha \in \mathbb{R}$:

1.
$$\boldsymbol{L_1(A+B)} = L_1([a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}] + [b_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}]) = L_1([a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}} + b_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}])$$
$$= [a_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}} + b_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}}] = [a_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}}] + [b_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}}] = A^T + B^T = \boldsymbol{L_1(A)+L_1(B)},$$

2.
$$\boldsymbol{L_1(\alpha \cdot A)} = L_1(\alpha \cdot [a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}]) = L_1([\alpha \cdot a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}])$$
$$= [\alpha \cdot a_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}}] = \alpha \cdot [a_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}}] = \alpha \cdot A^T = \boldsymbol{\alpha \cdot L_1(A)}.$$

Die Bedingungen sind erfüllt, sodass $L_1$ eine lineare Abbildung ist.

- $L_2$ ist keine lineare Abbildung, weil $L_2(0x^2 + 0x + 0) = 0x^2 + \mathbf{1}x + 0 \neq 0x^2 + 0x + 0$.

- $L_3(0x + 0) = 0$. $L_3$ könnte linear sein. Für $x, 1 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ist einerseits

$$L_3(x) + L_3(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

andererseits ist

$$L_3(x + 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \neq L_3(x) + L_3(1).$$

Von daher ist $L_3$ keine lineare Abbildung.

*Alternativ (falls man kein Gegenbeispiel findet):* Wir prüfen die erste Bedingung für eine linearen Abbildung. Seien dazu $ax^2 + bx + c$, $dx^2 + ex + f \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

1. Einerseits ist

$$L_3((ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)) = L_3((a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f))$$
$$= \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ a+d & (b+e)(c+f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ a+d & \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bf} + \boldsymbol{ec} + \boldsymbol{ef} \end{bmatrix},$$

andererseits ist

$$L_3(ax^2 + bx + c) + L_3(dx^2 + ex + f) = \begin{bmatrix} a & b \\ a & bc \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ d & ef \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ a+d & \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ef} \end{bmatrix}$$

$L_3((ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)) \neq L_3(ax^2 + bx + c) + L_3(dx^2 + ex + f)$ für $\boldsymbol{bf} + \boldsymbol{ec} \neq 0$ (wähle beispielsweise $b = f = 1, c = e = 0$). Daher ist $L_3$ keine lineare Abbildung.

**2. Aufgabe** Nach dem Dimensionssatz gilt

$$\dim(\mathbb{R}^{3,2}) = 6 = \dim(\text{Kern}(L)) + \dim(\text{Bild}(L)).$$

Damit ist $\dim(\text{Bild}(L)) \leq 6 < 8 = \dim(\mathbb{R}^{2,4})$, sodass $L$ nicht surjektiv sein kann. Insofern kann $L$ auch nicht bijektiv sein, weil $L$ nicht gleichzeitig injektiv **und** surjektiv ist.

$L$ ist injektiv, falls $\dim(\text{Kern}(L)) = 0$ (d.h. $\dim(\text{Bild}(L)) = 6$) gilt.

**3. Aufgabe** (a) $L\left(\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{17} \end{bmatrix}\right) = L\left(\mathbf{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\mathbf{-2})\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{17}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} L\left(3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + L\left(-2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + L\left(2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + L\left(17\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} 3\mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) - 2\mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) + 2\mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) + 17\mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{-7} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} + 17\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 25 \end{bmatrix}$$

(b) Gesucht sind alle Matrizen $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $L\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix} &= L\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\right) \\
&= L\left(x_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= x_1 L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 L\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + x_4 L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= x_1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Komponentenvergleich führt zu folgendem LGS:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 1x_3 & + & 0x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 1x_3 & + & 0x_4 & = & 16. \end{array}\right.$$

EKM auf NZSF bringen:

$$\xrightarrow{\text{EKM}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 1 & 0 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow{2\text{II}-3\text{I}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -29 & -1 & 0 & 29 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{I}, -\frac{1}{29}\text{II}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{29} & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{I}-\frac{5}{2}\text{II}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \frac{12}{29} & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{29} & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Wir erhalten also die Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & \frac{12}{29}x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & \frac{1}{29}x_3 & = & -1. \end{array}$$

Kopfvariablen: $x_1, x_2$
Nichtkopfvariablen: $x_3, x_4$ (frei wählbare Parameter: $s$ für $x_3$, $t$ für $x_4$).

Gleichungen für die Kopfvariablen:

$$x_1 = 3 - \frac{12}{29}s \qquad x_2 = -1 - \frac{1}{29}s$$

Die gesuchte Lösungsmenge ist daher

$$\mathcal{L} = \left\{\begin{bmatrix} 3 - \frac{12}{29}s & -1 - \frac{1}{29}s \\ s & t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

(c) Eine andere Schreibweise (spezielle Lösung + Kern$(L)$)

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{12}{29} & -\frac{1}{29} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

lässt uns den Kern von $L$ einfach ablesen:

$$\text{Kern}(L) = \left\{ s \begin{bmatrix} -\frac{12}{29} & -\frac{1}{29} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit können wir eine Basis von Kern$(L)$ auch ablesen:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{12}{29} & -\frac{1}{29} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) Bild$(L)$ besteht aus allen Linearkombinationen der Bildvektoren:

$$\text{Bild}(L) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$$

da

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \tfrac{12}{29} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{29} \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir argumentieren, dass die Vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ linear unabhängig sind.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ führt zu des LGS } \begin{array}{rcrcl} 2\alpha_1 & + & 5\alpha_2 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & - & 7\alpha_2 & = & 0. \end{array}$$

Das EKM wird auf ZSF gebracht:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \overset{\text{I}-\frac{2}{3}\text{II}}{\to} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{29}{3} \end{bmatrix}.$$

Der Rang von der EKM ist 2 (2 Köpfe in ZSF, d.h. 2 linear unabhängige Zeilen bzw. Spalten). Die Menge $\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$ ist also eine Basis des Bildes von $L$.

(e) $L$ ist nicht injektiv, weil Kern$(L) \neq \{\vec{0}\}$ (beispielsweise ist $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in$ Kern$(L)$ ).

$L$ ist surjektiv, weil dim(Bild$(L)) = 2 =$ dim$(\mathbb{R}^2) =$ Dimension des Bildraums ist.

$L$ ist nicht bijektiv, weil $L$ nicht gleichzeitig injektiv und surjektiv ist.

# 7 Koordinatenabbildungen und darstellende Matrizen

Wir erinnern uns an den Unterschied zwischen einem Erzeugendensystem und einer Basis. Jede Basis ist ein Erzeugendensystem, aber nicht jedes Erzeugendensystem ist eine Basis. Die Menge $M := \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\}$ ist ein **Erzeugendensystem** des $\mathbb{R}^2$, weil $M$ offensichtlich eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist und jeder Vektor $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sich als Linearkombination der drei Vektoren darstellen läßt:

$$a \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad + \quad b \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad + \quad 0 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \qquad (1)$$

oder auch

$$(a-b) \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad + \quad 0 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad + \quad b \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Die *Skalare* oder *Koeffizienten* vor den Vektoren in diesem Erzeugendensystem können offensichtlich für $b \neq 0$ **nicht eindeutig** definiert werden!

Die Vektoren sind linear **abhängig**, weil aus $(1) - (2)$ folgt $b \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + b \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - b \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, d.h. die Gleichung

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

hat auch nichttriviale Lösungen.

Bei einer **Basis**, d.h. ein linear **unabhängiges** Erzeugendensystem, kann das nicht passieren. Für einen gegebenen endlich-dimensionalen Vektorraum $V \neq \{\vec{0}\}$ mit einer gegebenen Basis $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ von $V$ hat jeder Vektor in $V$ mindestens eine Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren, weil $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem ist. Allerdings ist $\mathcal{B}$ auch linear unabhängig, sodass es höchstens eine solche Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren in $\mathcal{B}$ gibt. Gäbe es nämlich zwei Darstellungen eines Vektors $\vec{v} \in V$

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{b}_n = \vec{v}, \qquad (3)$$

$$\beta_1 \vec{b}_1 + \cdots + \beta_n \vec{b}_n = \vec{v}, \qquad (4)$$

bekommen wir durch (3) $-$ (4) die Gleichung

$$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{b}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{b}_n = \vec{0}.$$

Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren bedeutet, dass $\alpha_i - \beta_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Jeder Vektor $\vec{v} \in V$ hat deshalb genau eine Darstellung als Linearkombination der gegebenen Basisvektoren. Die Koeffizienten dieser eindeutigen Linearkombination definieren den Koordinatenvektor zu $\vec{v}$. Wird der Koordinatenvektor $\vec{v}$ als ein allgemeines Element in $V$ berechnet (vgl. 4. Kapitel), so kann die Koordinatenabbildung von $V$ bzgl. $\mathcal{B}$ bestimmt werden (vgl. 5. Kapitel).

Vielleicht fragen Sie sich, wen das alles interessiert. Sicherlich hat man bemerkt, dass die Komposition von Abbildungen von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sehr einfach ist, wenn mit der zugehörigen Matrizen berechnet wird. Hier ist nur eine Matrixmultiplikation durchzuführen, statt eine Abbildung in eine andere einzusetzen. Je mehr Nullen in der Matrix desto einfacher. Besonders einfach lässt sich mit Diagonalmatrizen multiplizieren. Ferner sind bei endlich-dimensionalen Vektorräumen Koordinaten und Koordinatenabbildungen besonders sinnvoll. So kann eine Identifizierung mit $\mathbb{K}^n$ gemacht werden und der Umgang mit Vektoren ist meistens einfacher.

## 7.1 Koordinatenvektoren und Koordinatenabbildungen

**Definition** (Koordinatenvektor; Koordinatenabbildung)

Der Vektorraum $V$ der Dimension $n$ über dem Körper $\mathbb{K}$ mit einer Basis $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \ldots, \boldsymbol{\vec{b}_n}\}$ von $V$ sei gegeben. Ferner sei $\boldsymbol{\vec{v}} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n \vec{b}_n}$ die eindeutige Linearkombination der Basisvektoren in $\mathcal{B}$, die $\boldsymbol{\vec{v}} \in V$ ergibt.

Der **Koordinatenvektor** von $\vec{v}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ ist gegeben durch $\boldsymbol{\vec{v}_\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_n} \end{bmatrix}$.

Die **Koordinatenabbildung** von $V$ bzgl. $\mathcal{B}$ ist die Abbildung $K_\mathcal{B} : V \to \mathbb{K}^n; \boldsymbol{\vec{v}} \mapsto \boldsymbol{\vec{v}_\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, die jeden Vektor in $V$ auf den zugehörigen Koordinatenvektor bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

*Bemerkungen:*

- Ändert sich die Basis, so ändern sich auch normalerweise die Koordinaten eines Vektors.
- Die Reihenfolge der Basisvektoren muss beachtet werden, auch wenn dies bei Mengen nicht üblich ist. Wir verstehen eine Basis als eine geordnete Menge.
- Koordinatenabbildungen sind linear.

**Beispiel** (Koordinatenabbildung)

Gegeben sei die Basis

$$\mathcal{B}_1 := \{3x + 7, \boldsymbol{2x + 5}\}$$

des Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$. Prüfen Sie Ihr Ergebnis.

Die Koordinatenabbildung des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ bildet ein allgemeines Polynom $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \boldsymbol{p(x)} := \boldsymbol{ax + b}$ auf den zugehörigen Koordinatenvektor bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1 := \{3x + 7, \boldsymbol{2x + 5}\}$, d.h.

$$\begin{array}{rccc} K_{\mathcal{B}_1} : & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \boldsymbol{ax + b} & \mapsto & \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \boldsymbol{\alpha_2} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{für} \qquad \alpha_1(3x + 7) + \boldsymbol{\alpha_2(2x + 5)} = \boldsymbol{ax + b}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt das folgende lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{rrcrcl} x^1 : & 3\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & = & a \\ x^0 = 1 : & 7\alpha_1 & + & 5\alpha_2 & = & b. \end{array}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS wird mit dem Gaußalgorithmus in die normierte Zeilenstufenform gebracht:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & a \\ 7 & 5 & b \end{array}\right] \overset{\text{II}-2\text{I}}{\to} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & -2a + b \end{array}\right]$$

Wir erzeugen eine 1 in der erste Spalte, ohne zu teilen. (Dies ist nicht immer möglich.)

$$\overset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\to} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2a + b \\ 3 & 2 & a \end{array}\right]$$

$$\overset{\text{II}-3\text{I}}{\to} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2a + b \\ 0 & -1 & 7a - 3b \end{array}\right] \overset{\text{I+II},-\text{II}}{\to} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boldsymbol{5a - 2b} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{-7a + 3b} \end{array}\right].$$

Die Koordinatenabbildung ist also

$$\begin{array}{rccc} K_{\mathcal{B}_1} : & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \boldsymbol{ax + b} & \mapsto & \begin{bmatrix} \boldsymbol{5a - 2b} \\ \boldsymbol{-7a + 3b} \end{bmatrix}. \end{array} \tag{6}$$

Die Koordinatenabbildung kann geprüft werden, indem man die Basispolynome in $K_{\mathcal{B}_1}$ einsetzt. Dabei müssen sich die Standardbasisvektoren ergeben, da

$$\mathbf{3x+7} = \mathbf{1}(3x+7) + \mathbf{0}(\mathbf{2x+5}) \qquad \mathbf{2x+5} = \mathbf{0}(3x+7) + \mathbf{1}(\mathbf{2x+5}).$$

Wir rechnen nach:

$$K_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{3x+7}) = \begin{bmatrix} 5(3)-2(7) \\ -7(3)+3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad K_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{2x+5}) = \begin{bmatrix} 5(2)-2(5) \\ -7(2)+3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Wegen der Linearität von $K_{\mathcal{B}_1}$, kann nun gezeigt werden, dass wir $K_{\mathcal{B}_1}$ richtig bestimmt haben. Sei $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ der Koordinatenvektor des Polynoms $ax+b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$, d.h. $ax+b = \alpha_1(3x+7)+\alpha_2(2x+5)$. Wir prüfen, ob $K_{\mathcal{B}_1}$ tatsächlich $ax+b$ auf seinen Koordinatenvektor bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ abbildet:

$$K_{\mathcal{B}_1}(ax+b) = K_{\mathcal{B}_1}(\alpha_1(3x+7)+\alpha_2(2x+5)) = \alpha_1 K_{\mathcal{B}_1}(3x+7)+\alpha_2 K_{\mathcal{B}_1}(2x+5) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Dieses Argument kann verallgemeinert werden. Stimmt die berechnete Koordinatenabbildung in den gegebenen Basisvektoren mit der Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ überein, so ist die berechnete Koordinatenabbildung richtig.

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Gegeben sei die Basis $\mathcal{B}_2 := \{x+2, x+3\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$. Prüfen Sie Ihre Antwort.

*Bemerkung:* Koordinatenabbildungen sind nicht nur linear, sie sind auch invertierbar. Sie sind sogar sehr leicht zu invertieren.

**Beispiel** (Inverse einer Koordinatenabbildung)

Sei wie in dem obigen Beispiel $\mathcal{B}_1 := \{3x+7, \mathbf{2x+5}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Bestimmen Sie $K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$.

$K_{\mathcal{B}_1}$ ist die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ nach $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\mathcal{B}_1$. Daraus folgt $K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$:

$$K_{\mathcal{B}_1}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]; \quad \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mapsto fx+g.$$

Was ist aber $fx+g$? Dies ist das (eindeutige!) Polynom in $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit Koordinatenvektor $\begin{bmatrix} c \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$ bzgl. der gegebenen Basis (sonst würde $K_{\mathcal{B}_1}$ das Polynom $fx+g$ nicht auf $\begin{bmatrix} c \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$ abbilden). Wir rechnen die passende Linearkombination der Basispolynomen nach: $fx+g = c(3x+7)+\mathbf{d}(\mathbf{2x+5}) = (3c+2d)x+(7c+5d)$. Die Inverse der Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}_1}$ lautet:

$$K_{\mathcal{B}_1}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]; \quad \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mapsto (3c+2d)x+(7c+5d).$$

**2. Aufgabe** (Lerncheck)

Sei wie in der obigen Aufgabe $\mathcal{B}_2 := \{x+2, x+3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Bestimmen Sie $K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$.

Training in der MUMIE: „Koordinatenabbildungen“, „Inverse Koordinatenabbildungen“, „Koordinaten von Polynomen“

## 7.2 Die Transformationsmatrix beim Basiswechsel

In diesem Abschnitt betrachten wir einen $n$-dimensionalen Vektorraum $V$ über dem Körper $\mathbb{K}$ mit zwei Basen $\mathcal{B}_1$ , $\mathcal{B}_2$. Wie kommt man von dem Koordinatenvektor eines gegebenen Vektors $\vec{v} \in V$ bzgl. $\mathcal{B}_1$ ($\vec{v}_{\mathcal{B}_1}$) auf den Koordinatenvektor von $\vec{v}$ bzgl. $\mathcal{B}_2$ ($\vec{v}_{\mathcal{B}_2}$)? Dies können wir mit einer Matrixabbildung machen, weil eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^n$ gesucht ist. Solche Abbildungen können als eine Matrixabbildung $S$ (die sogenannte Transformationsmatrix beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$) betrachtet werden.

**Definition** (Transformationsmatrix beim Basiswechsel)

Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Transformationsmatrix $S \in \mathbb{K}^{n,n}$ beim Basiswechsel von der Basis $\mathcal{B}_1$ nach der Basis $\mathcal{B}_2$ von $V$ ist die zu $K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ gehörige Matrix. Wir schreien $S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$.

Um diese Situation zu veranschaulichen benutzen wir ein *kommutatives Diagramm*.

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}_2}"'] \arrow[dr, "K_{\mathcal{B}_1}"] & \\
\mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^n \arrow[ll, "S"]
\end{tikzcd}$$

Das Diagramm heißt kommutativ, weil es egal ist, ob wir direkt $\vec{v} \in V$ auf die Kopie von $\mathbb{K}^n$ auf der linken Seite mit $K_{\mathcal{B}_2}$ abbilden oder zuerst $K_{\mathcal{B}_1}$ und danach $S$ anwenden, es kommt das Gleiche heraus:

$$K_{\mathcal{B}_2}(\vec{v}) = S(K_{\mathcal{B}_1}(\vec{v})) \text{ für alle } \vec{v} \in V, \quad \text{d.h. } K_{\mathcal{B}_2} = S \circ K_{\mathcal{B}_1}.$$

(Wie im Abschnitt 3.4 erklärt wurde, schreibt man bei der Komposition von Abbildungen immer von rechts nach links, d.h. die erste angewendete Abbildung steht rechts.)

Das Diagramm kann wie eine Straßenkarte gelesen werden. Die Pfeile zeigen, in welche „Richtungen“ die „Straßen“ $K_{\mathcal{B}_1}, K_{\mathcal{B}_2}$ (zwischen $V$ und eine Kopie des $\mathbb{K}^n$), sowie $S$ (zwischen den zwei Kopien des $\mathbb{K}^n$), laufen. Weil jede dieser Abbildungen invertierbar ist, ist es möglich in der Gegenrichtung zu „fahren“. Die „Straßen“ in die Gegenrichtungen heißen $K_{\mathcal{B}_1}^{-1}, K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$ und $S^{-1}$. Beispielsweise können wir vom Diagramm die Formel $S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ ablesen. So kann $S$ leicht nachgerechnet werden, falls $K_{\mathcal{B}_2}$ bekannt ist ($K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ ist leicht zu bestimmen).

*Bemerkungen:*

- Transformationsmatrizen werden auch Übergangsmatrizen genannt, da sie ein Übergang von einer Basis in eine andere darstellen.
- Man kann $S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ auch mit $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ bezeichnen.

**Beispiel** (Transformationsmatrix beim Basiswechsel)

Gegeben seien die Basen $\mathcal{B}_1 := \{3x+7, 2x+5\}, \mathcal{B}_2 := \{x+2, x+3\}$, des Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $S$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

Die Formel $S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ soll nachgerechnet werden. Wir haben schon $K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ (siehe das Beispiel auf Seite 76) bestimmt, und die Abbildung $K_{\mathcal{B}_2}$ haben Sie als Übung (siehe Seite 77) bestimmt:

$$K_{\mathcal{B}_1}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mapsto (3c+2d)x + (7c+5d) \quad \text{und} \quad K_{\mathcal{B}_2} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2;\ \mathbf{a}x + \mathbf{b} \mapsto \begin{bmatrix} 3\mathbf{a} - \mathbf{b} \\ -2\mathbf{a} + \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen nun $S$:

$$S\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = (K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1})\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}_2}\left(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}_2}((\mathbf{3c+2d})x + (\mathbf{7c+5d})),$$

wobei

$$K_{\mathcal{B}_2}((\mathbf{3c+2d})x + (\mathbf{7c+5d})) = \begin{bmatrix} 3(\mathbf{3c+2d}) - (\mathbf{7c+5d}) \\ -2(\mathbf{3c+2d}) + (\mathbf{7c+5d}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c + 1d \\ 1c + 1d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Dies definiert die Matrixabbildung $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$. Die Transformationsmatrix $S$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ ist also

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Alternativ:*

Wir konstruieren die Spalten der Matrix $S$. Die $i$-te Spalte von $S$ ist $S\vec{e}_i$, wobei $\vec{e}_i$ der $i$-te Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^2$ ist. Wir wissen, dass $K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e}_i)$ der $i$-te Basisvektor in $\mathcal{B}_1$ ist. Nun setzen wir einfach den $i$-ten Basisvektor von $\mathcal{B}_1$ in $K_{\mathcal{B}_2}$ ein. Für $i = 1, 2$ erhalten wir die Spalten

$$K_{\mathcal{B}_2}(3x+7) = \begin{bmatrix} 3(3)-7 \\ -2(3)+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ und } K_{\mathcal{B}_2}(2x+5) = \begin{bmatrix} 3(2)-5 \\ -2(2)+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ und somit } S = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Schematisch sieht dies für die erste Spalte so aus:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{3x+7} \arrow[dddll, mapsto] & & \\
 & & \boldsymbol{V} \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}_2}"'] \arrow[dr, "K_{\mathcal{B}_1}"] & & \\
 & \mathbb{K}^{n} & & \mathbb{K}^{n} \arrow[ll, "S"] & \\
\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} & & & & \vec{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \arrow[llll, mapsto] \arrow[uuull, mapsto]
\end{tikzcd}$$

**3. Aufgabe** (Lerncheck)

Gegeben seien die Basen $\mathcal{B}_1 := \{3x+7, 2x+5\}, \mathcal{B}_2 := \{x+2, x+3\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ mit den Methoden aus dem letzten Beispiel. Wie lautet das Produkt $TS$? Warum?

Training in der MUMIE: „Koordinatentransformation bei Basiswechsel“

## 7.3 Darstellende Matrizen

Seien $V, W$ endlich-dimensionale Vektorräume. Lineare Abbildungen in $\text{Hom}(V, W)$ können nach einer Koordinatenabbildung bzgl. Basen von $V$ und $W$ durch Matrizen dargestellt werden. In diesem Kurs beschränken wir uns auf dem Fall einer linearen Abbildung $L \in \text{Hom}(V, V)$, d.h. Urbildraum und Bildraum sind identisch.

**Definition** (darstellende Matrix)

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ mit einer Basis $\mathcal{B}$. Die **darstellende Matrix** $L_{\mathcal{B}}$ von $L$ bzgl. $\mathcal{B}$ ist die zu der Matrixabbildung $L_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n; \vec{v} \mapsto (K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1})(\vec{v})$ zugehörige Matrix. Wir schreiben $L_{\mathcal{B}} = K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Mithilfe des folgenden Schemas kann die Formel $L_{\mathcal{B}} = K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}$ in der Definition einfach abgelesen werden.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "L_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $L_{\mathcal{B}}$ bildet $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^n$ ab und kann so als eine Matrixabbildung betrachtet werden. Diese Matrix können wir wie vorher konstruieren, indem wir die $i$-te Spalte nach und nach bestimmen. (*Achtung!* $K_{\mathcal{B}}$ ist invertierbar, $L$ und $L_{\mathcal{B}}$ nicht unbedingt.) Sei $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine gegebene Basis des Vektorraums $V$. Ein weiteres Diagramm, dass die Wirkung der Abbildungen zeigt, hilft uns dabei einen Algorithmus zu entwickeln.

$$\begin{tikzcd}
\vec{b}_i \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & L(\vec{b}_i) \arrow[ddd, mapsto] \\
& V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] & \\
& \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{K}^n & \\
\vec{e}_i \arrow[rrr, mapsto] & & & K_{\mathcal{B}}(L(\vec{b}_i))
\end{tikzcd}$$

**Algorithmus** (darstellende Matrix)

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ mit einer Basis $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$. Die **darstellende Matrix** von $L$ bzgl. $\mathcal{B}$ wird für $i = 1, \ldots, n$ folgendermaßen berechnet.

1. Urbild des $i$-ten Standardbasisvektor bzgl. $K_{\mathcal{B}}$ bestimmen: $K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_i) = \vec{b}_i$.
2. Bild des $i$-ten Basisvektors bestimmen: $L(\vec{b}_i)$.
3. Koordinatenvektor von $L(\vec{b}_i)$ bestimmen: $K_{\mathcal{B}}(L(\vec{b}_i))$.
4. Ergebnis aus (3) als die $i$-te Spalte von $L_{\mathcal{B}}$ eintragen.

*Bemerkungen:*

• Beim ersten Schritt ist das Urbild des $i$-ten Standardbasisvektor bzgl. $K_{\mathcal{B}}$ immer $\vec{b}_i$. Deshalb kann eigentlich mit dem zweiten Schritt angefangen werden.

• Die Koordinatenabbildung muss nicht unbedingt explizit bestimmt werden, außer natürlich, wenn die Aufgabenstellung dies verlangt. Manchmal „sieht“ man die gesuchten Koordinatenvektoren im 3. Schritt. Es reicht dann, die Gleichung aufzuschreiben.

• Das Format von $L_{\mathcal{B}}$ ist $n \times n$, wobei $n$ die Dimension von $V$ ist.

**Beispiel** (darstellende Matrix)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit der Basis $\mathcal{B}_1 := \{3x+7, 2x+5\}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1}$ der linearen Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ ax + b \mapsto (13a - 5b)x + (30a - 12b)$$

bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$.

Mit $K_{\mathcal{B}_1}(ax+b) = \begin{bmatrix} 5a - 2b \\ -7a + 3b \end{bmatrix}$ (siehe Gleichung (6) auf Seite 76) ergibt der Algorithmus:

$\underline{i = 1}$ $L(3x+7) = (39 - 35)x + (90 - 84) = 4x + 6,\ K_{\mathcal{B}_1}(4x+6) = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix},$

$\underline{i = 2}$ $L(2x+5) = (26 - 25)x + (60 - 60) = x,\ K_{\mathcal{B}_1}(x) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix},$

$$L_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}.$$

**4. Aufgabe** (Lerncheck)
Gegebenen seien der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und die Basis $\mathcal{B}_2 := \{x+2, x+3\}$ des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_2}$ der linearen Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ ax+b \mapsto (13a-5b)x + (30a-12b)$$

bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$.

Was ist die Verbindung zwischen $L_{\mathcal{B}_1}$ und $L_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$? Dies können wir mit einem erweiterten kommutativen Diagramm darstellen.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \arrow[rr, "L"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[ddl, "K_{\mathcal{B}_2}"'] & & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}_1}"'] \arrow[ddr, "K_{\mathcal{B}_2}"] & \\
 & \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "L_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[dl, "S"] & & \mathbb{R}^2 \arrow[dr, "S"'] & \\
\mathbb{R}^2 \arrow[rrrr, "L_{\mathcal{B}_2}"'] & & & & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Um $L_{\mathcal{B}_2}$ aus $L_{\mathcal{B}_1}$ zu berechnen, „fahren“ wir die „Straße“ $S \circ L_{\mathcal{B}_1} \circ S^{-1}$ entlang (zuerst $S^{-1}$, dann $L_{\mathcal{B}_1}$, anschliessend $S$). Dies ist dasgleiche, als wenn wir direkt $L_{\mathcal{B}_2}$ „entlangfahren“ würden, weil wir am gleichen Ort anfangen und am gleichen Ziel landen.

**Beispiel** (darstellende Matrix)
Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, sowie die Basen $\mathcal{B}_1 := \{3x+7, 2x+5\}$ und $\mathcal{B}_2 := \{x+2, x+3\}$. Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ ist gegeben durch $L_{\mathcal{B}_1} := \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_2}$ der linearen Abbildung $L$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$.

Weil $S, L_{\mathcal{B}_1}, S^{-1}$ Matrixabbildungen sind, kann die Komposition $S \circ L_{\mathcal{B}_1} \circ S^{-1}$ als Matrixmultiplikation bestimmt werden:

$$L_{\mathcal{B}_2} = SL_{\mathcal{B}_1}S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Das Ziel der folgenden Aufgaben ist zu zeigen, dass es eine Vielfalt an Aufgabestellungen gibt, für die das Diagramm nützlich sein kann. In den Hausaufgaben oder in Klausuren sind die gesuchten Matrizen oder Abbildungen meistens unbekannt, deshalb üben wir hier in einer bekannten Situation. Aus den gegebenen Informationen sollen Sie die gesuchten Objekte berechnen.

**5. Aufgabe** (Lerncheck)
Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, sowie die Basen $\mathcal{B}_1 := \{3x+7, 2x+5\}$ und $\mathcal{B}_2 := \{x+2, x+3\}$. Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$ ist gegeben durch $L_{\mathcal{B}_2} := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1}$ der linearen Abbildung $L$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$.

**6. Aufgabe**
Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, sowie die Basis $\mathcal{B}_2 := \{x+2, x+3\}$. Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$ ist gegeben durch $L_{\mathcal{B}_2} := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie aus diesen Informationen die lineare Abbildung $L$.

Training in der MUMIE: „Darstellende Matrix“

## 7.4 Wiederholung mit Matrizen

In diesem Abschnitt wiederholen wir alle in diesem Kapitel eingeführten Begriffe mit dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2,2}$, d.h. den Matrizen vom Format $2 \times 2$. Bevor Sie weiterlesen, beantworten Sie die folgenden Fragen. Nachdem Sie sich durch den Abschnitt gearbeitet haben, überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

- Welche Dimension hat der Raum $V = \mathbb{R}^{2,2}$?
- Die Koordinatenabbildung von $V$ bzgl. einer gegebenen Basis ist eine Abbildung von welchem Raum in welchen Raum (d.h. Urbildraum und Bildraum bestimmen)?
- Welches Format hat die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : V \to V$ bzgl. einer Basis von $V$?

**Beispiel** (Koordinatenvektoren von Matrizen)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^{2,2}$ mit der Basis $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \right\}$.

Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$.

1. Linearkombination: $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha_3} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha_4} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$

   oder $\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 - \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. Komponentenvergleich ergibt LGS: $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 1 \\ & & \alpha_2 & & & & & = & 2 \\ & & & & \alpha_3 & & & = & 3 \\ & & & & \alpha_3 & - & \alpha_4 & = & 4. \end{array} \right.$

3. EKM auf NZSF bringen:
   (In HA und Klausur
   Schritte hinschreiben!) $\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right].$

   Der Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ bzgl. $\mathcal{B}_1$ ist $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$ $(\in \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^{\dim \mathbb{R}^{2,2}})$.

(4.) Lösung prüfen: $\mathbf{-3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{3} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$. ✓

**Beispiel** (Koordinatenabbildungen mit Matrizen)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^{2,2}$ mit der Basis $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$. Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung des $\mathbb{R}^{2,2}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$.

1. Linearkombination: $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

2. LGS: $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & a \\ & & \alpha_2 & & & & & = & b \\ & & & & \alpha_3 & & & = & c \\ & & & & \alpha_3 & - & \alpha_4 & = & d \end{array} \right.$

3. EKM → NZSF: (In HA und Klausur Schritte hinschreiben!)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a-b-2c+d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c-d \end{array}\right]$$

Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ bzgl. $\mathcal{B}_1$: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} a-b-2c+d \\ b \\ c \\ c-d \end{bmatrix}$

Die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}^{2,2}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{cccc} K_{\mathcal{B}_1}: & \mathbb{R}^{2,2} & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} a-b-2c+d \\ b \\ c \\ c-d \end{bmatrix}. \end{array}$$

**7. Aufgabe** (Lerncheck)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^{2,2}$ mit der Basis $\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$. Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung des $\mathbb{R}^{2,2}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$.

**Beispiel** (Inverse der Koordinatenabbildung)

Bestimmen Sie $K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$, die Inverse der Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}_1}$ des $\mathbb{R}^{2,2}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$K_{\mathcal{B}_1}^{-1}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2,2}; \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mapsto a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c+d & b \\ c & c-d \end{bmatrix}$$

(Siehe Seite 77 für eine Erklärung.)

**8. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie $K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$, die Inverse der Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}_2}$ des $\mathbb{R}^{2,2}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.

**Beispiel** (Transformationsmatrix)

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $S$ beim Basiswechsel von der Basis $\mathcal{B}_1$ des $\mathbb{R}^{2,2}$ nach der Basis $\mathcal{B}_2$ des $\mathbb{R}^{2,2}$ mit

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ B_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ C_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Wir berechnen die Spalten von $S$ wie in der alternativen Lösungsmethode auf Seite 79. Bezeichne die $i$-te Spalte von $S$ mit $S_i$. $S_i$ enthält den Koordinatenvektor von $B_i$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$. (Das geht so, weil z. B. die

1. Spalte von $S$ ist $S\vec{e}_1 = (K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1})(\vec{e}_1) = K_{\mathcal{B}_2}(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e}_1)) = K_{\mathcal{B}_2}(B_1))$.
Sie haben $K_{\mathcal{B}_2}$ (hoffentlich) schon in der 8. Aufgabe bestimmt:

$$K_{\mathcal{B}_2} : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^4;\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ -a+b \\ -2a+c+d \\ a-d \end{bmatrix}.$$

Also ist die erste Spalte von $S$

$$S_1 = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Die restlichen Spalten erhalten wir, indem wir die anderen Basismatrizen in $K_{\mathcal{B}_2}$ einsetzen:

$$S_2 = K_{\mathcal{B}_2}(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix},\ S_3 = K_{\mathcal{B}_2}(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},\ S_4 = K_{\mathcal{B}_2}(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix ist also $S = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}.$

Hier können Sie den Algorithmus üben.

**9. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T$ beim Basiswechsel von der Basis $\mathcal{B}_2$ des $\mathbb{R}^{2,2}$ nach der Basis $\mathcal{B}_1$ des $\mathbb{R}^{2,2}$ mit

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ B_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ C_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(Welche anderen Möglichkeiten gibt es, um die Aufgabe zu lösen? Beispielsweise kann $K_{\mathcal{B}_1} \circ K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$ explizit berechnet oder die Inverse von $S$ bestimmt werden.)

**Beispiel** (Transformationsmatrix)

Gegeben sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2};\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2b & 2b \\ -11a+2b+3c+8d & 2b \end{bmatrix}.$
Bestimmen Sie jeweils die darstellende Matrix von $L$ bzgl. $\mathcal{B}_1$ bzw. $\mathcal{B}_2$ mit

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ B_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ C_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Wir folgen dem Algorithmus zur Berechnung der darstellenden Matrix von $L$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$.

1) Bilder der Basisvektoren berechnen:

$$\begin{aligned}
L(B_1) &= L\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ -11 & 0\end{bmatrix}, \quad & L(B_2) &= L\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 2\\ -9 & 2\end{bmatrix},\\
L(B_3) &= L\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad & L(B_4) &= L\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ -19 & 0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

2) Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren bzgl. $\mathcal{B}_1$ mithilfe der Koordinatenabbildung

$$K_{\mathcal{B}_1} : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^4; \quad \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a-b-2c+d\\ b\\ c\\ c-d\end{bmatrix}$$

ermitteln:

$$K_{\mathcal{B}_1}(L(B_1)) = \begin{bmatrix}22\\ 0\\ -11\\ -11\end{bmatrix}, \quad K_{\mathcal{B}_1}(L(B_2)) = \begin{bmatrix}20\\ 2\\ -9\\ -11\end{bmatrix}, \quad K_{\mathcal{B}_1}(L(B_3)) = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \quad K_{\mathcal{B}_1}(L(B_4)) = \begin{bmatrix}38\\ 0\\ -19\\ -19\end{bmatrix}.$$

3) Darstellende Matrix aufstellen:

$$L_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 22 & 20 & 0 & 38\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -11 & -9 & 0 & -19\\ -11 & -11 & 0 & -19\end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie mit dem gleichen Algorithmus $L_{\mathcal{B}_2}$. Vergleichen Sie Ihre Antwort mit der Antwort unten (hier wird $L_{\mathcal{B}_2}$ mit Hilfe der Transformationsmatrix $S$ berechnet).
Die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Abbildungen sehen wir im Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^{2,2} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}_2}"'] & \mathbb{R}^{2,2} \arrow[d, "K_{\mathcal{B}_1}"'] \arrow[dr, "K_{\mathcal{B}_2}"] & \\
 & \mathbb{R}^4 \arrow[r, "L_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[dl, "S"] & \mathbb{R}^4 \arrow[dr, "S"'] & \\
\mathbb{R}^4 \arrow[rrr, "L_{\mathcal{B}_2}"'] & & & \mathbb{R}^4
\end{tikzcd}$$

Zeichnen Sie die beiden Wege im Diagramm ein, die zu der folgenden Formel führen:

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}_2} = S\,L_{\mathcal{B}_1}\,S^{-1} &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -2 & -2 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}22 & 20 & 0 & 38\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -11 & -9 & 0 & -19\\ -11 & -11 & 0 & -19\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-1 & -1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -2 & -2 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-2 & -2 & -6 & 10\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 3 & -5\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 7.5 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 7. Kapitel

### 1. Aufgabe

Die Koordinatenabbildung des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$ bildet ein allgemeines Polynom $p \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x], p(x) = ax + b$ auf seinem Koordinatenvektor bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2 := \{x + 2, x + 3\}$, d.h.

$$\begin{array}{rccc} K_{\mathcal{B}_2}: & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & ax+b & \mapsto & \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{für } \alpha_1(x+2) + \alpha_2(x+3) = ax + b.$$

Koeffizientenvergleich ergibt das folgende lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{rcccccc} x^1: & \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & a \\ x^0 = 1: & 2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & = & b \end{array}.$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS mit dem Gaußalgorithmus in die normierte Zeilenstufenform bringen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & b \end{array}\right] \overset{\text{II}-2\text{I}}{\to} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2a+b \end{array}\right] \overset{\text{I}-\text{II}}{\to} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3a-b \\ 0 & 1 & -2a+b \end{array}\right].$$

Die gesucht Koordinatenabbildung ist $K_{\mathcal{B}_2} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2;\ ax + b \mapsto \begin{bmatrix} 3a-b \\ -2a+b \end{bmatrix}$.

Einsetzen der Basispolynome ergibt die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^2$, sodass die Antwort stimmt.

*Achtung!* Die Koordinatenabbildung ist im Allgemeinen keine Matrix. Wie das Beispiel zeigt, macht das keinen Sinn. Eine Matrix kann nicht mit einem Polynom multipliziert werden.

**2. Aufgabe** $K_{\mathcal{B}_2}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mapsto c(x + 2) + d(x + 3) = (c + d)x + (2c + 3d)$

**3. Aufgabe** Nach Anwendung der Methode bekommt man $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. $TS$ ist die Einheitsmatrix, weil $T$ die zu $S$ inverse Matrix ist.

**4. Aufgabe** In dieser Aufgabe muss $K_{\mathcal{B}_2}$ nicht explizit angegeben werden, weil die Koordinatenvektoren der Bilder einfach zu bestimmen sind:

$\underline{i = 1}$ $L(x + 2) = 3x + 6 = 3(x + 2) + 0(x + 3),\ K_{\mathcal{B}_2}(3x + 6) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\underline{i = 2}$ $L(x + 3) = -2x - 6 = 0(x + 2) - 2(x + 3),\ K_{\mathcal{B}_2}(-2x - 6) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$L_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

**5. Aufgabe** Schauen Sie im Diagramm nach, wie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1} := \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$ nur mit $L_{\mathcal{B}_2}, S, S^{-1}$ berechnet werden kann.

**6. Aufgabe** Hinweise: Bestimmen Sie zuerst $L(ax + b)$. Betrachten Sie dazu das erweiterte kommutative Diagramm (siehe Seite 81) und überlegen Sie sich, an welchem Ort Sie anfangen und wo Sie hingehen möchten. Nun suchen Sie eine zu der gegebenen Informationen passende Route aus, um die Abbildung explizit zu berechnen.
Natürlich soll Ihre Antwort $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ ax + b \mapsto (13a - 5b)x + (30a - 12b)$ sein.

**7. Aufgabe** Folgen Sie den Schritten im Beispiel „Koordinatenabbildung mit Matrizen“ im Abschnitt 7.4:

$$\begin{array}{cccc} K_{\mathcal{B}_2}: & \mathbb{R}^{2,2} & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} a \\ -a+b \\ -2a+c+d \\ a-d \end{bmatrix}. \end{array}$$

**8. Aufgabe** $K_{\mathcal{B}_2}^{-1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2,2};\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mapsto a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+c+d & a-d \end{bmatrix}$

**9. Aufgabe** Folgen Sie den Schritte, im Beispiel „Transformationsmatrix mit Matrizen“ im Abschnitt 7.4:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

# 8 Euklidische und unitäre Vektorräume

In diesem Kapitel betrachten wir Vektorräume, in denen wir Länge und Winkel messen können. Als erstes wird eine Normabbildung definiert, mit der die Länge eines Vektors bestimmt werden kann. Will man auch Winkel messen können, wird ein Skalarprodukt benötigt.

Wir haben im 3. Kapitel den Begriff orthogonale Matrix eingeführt. In diesem Kapitel lernen wir, wie man solche Matrizen konstruieren kann. Hierbei spielt das Gram-Schmidt-Verfahren eine wichtige Rolle.

## 8.1 Norm

**Definition** (Norm)

Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}; \vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$$

heißt **Norm** falls die folgenden Eigenschaften für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gelten:

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$ mit $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$,
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$,
3. $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \, \|\vec{v}\|$.

*Bemerkungen:*

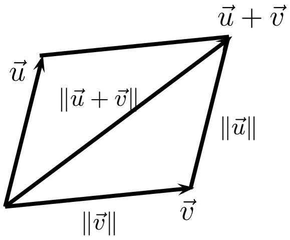
• Auch wenn $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist, bildet eine Normabbildung einen Vektor auf eine nicht-negative *reelle* Zahl ab.

• Bei der 1. Eigenschaft muss man sich vergewissern, dass die „Länge" eines Vektors nicht negativ sein darf. Nur der Nullvektor darf die Länge Null haben.

• Die 2. Eigenschaft ist die Dreiecksungleichung (siehe Bild).

• In der 3. Eigenschaft ist $|\alpha|$ der Betrag von $\alpha$. Ist $\alpha := a + bi \in \mathbb{C}$, so ist

$$|\alpha| := \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Hier sind drei Beispiele für eine reelle Norm.

**Beispiel** (Norm-Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$)

1. $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, **Standardnorm** $\|\vec{x}\,\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
2. $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, **Maximumsnorm** $\|\vec{x}\,\|_{\text{max}} = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$
3. $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, L^1$**-Norm** $\|\vec{x}\,\|_{L^1} := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

a) Bestimmen Sie die Norm des Vektors $\begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ bzgl.

1. der Standardnorm, 2. der Maximumsnorm, 3. der $L^1$-Norm.

b) Erstellen Sie eine Skizze der Einheitsscheibe (einschließlich des Randes) in $\mathbb{R}^2$ bzgl. 1. der Standardnorm, 2. der Maximumsnorm, 3. der $L^1$-Norm. (Die Einheitsscheibe einschließlich des Randes ist gegeben durch $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$ - die Menge aller Vektoren mit Norm kleiner gleich eins).

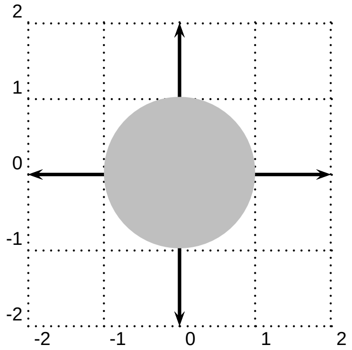
a)

1. $\left\| \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$ 2. $\left\| \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_{\text{max}} = \max\{|-4|, |-7|, |4|\} = 7$

$$3. \left\| \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_{L^1} = |-4| + |-7| + |4| = 15$$

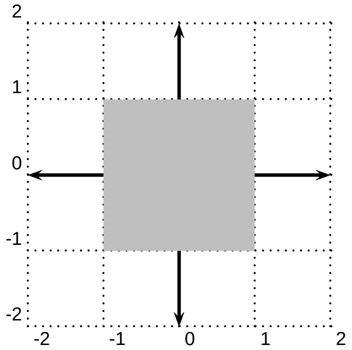
b) Die Norm (oder Länge) eines Vektors $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ist die Distanz zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt $(x, y)$. Die Vektoren mit Norm 1 bilden den Rand der Einheitsscheibe. Die Vektoren, die näher am Nullpunkt sind, bilden den Innenbereich.

1. Die Standardnorm entspricht unserer gewöhnlichen Vorstellung einer Länge. In $\mathbb{R}^2$ mit der Standardnorm bilden die Vektoren oder Punkte $(x, y)$ mit Norm 1 einen Kreis mit dem Radius 1, weil aus $\sqrt{1} = \sqrt{x^2 + y^2}$ folgt $x^2 + y^2 = 1$ und dies ist die Formel eines Kreises mit dem Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$.

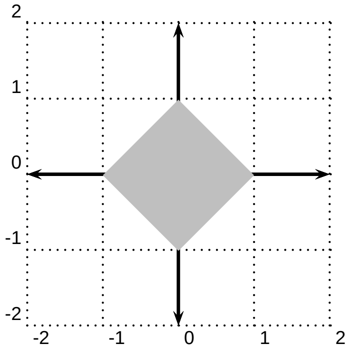


1. Einheitsscheibe einschließlich des Randes in der **Standardnorm**

2. Bzgl. der Maximumsnorm ist ein Vektor in $\mathbb{R}^2$ in der Einheitsscheibe, falls der Betrag beide Komponenten kleiner gleich 1 ist. Die Vektoren mit mindestens einer Komponente $1$ oder $-1$ bilden den Rand.



2. Einheitsscheibe einschließlich des Randes in der **Maximumsnorm**



3. Einheitsscheibe einschließlich des Randes in der $L^1$**-Norm**

3. Um den Rand der Einheitsscheibe bzgl. der $L^1$-Norm zu bestimmen, betrachten wir den ersten Quadranten. Weil $|x| + |y| = x + y = 1$ erfüllt sein muss, ist $y = 1 - x$. Dies ergibt die Strecke von $(0, 1)$ bis $(1, 0)$. Ähnliche Überlegungen in den anderen Quadranten führen zu dem Diagramm oben rechts.

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie die Norm von $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ bzgl. der a) Standardnorm b) Maximumsnorm c) $L^1$-Norm.

**Beispiel** (Normen in $\mathbb{C}^{2,2}$)

Bestimmen Sie die Norm von $\begin{bmatrix} 4-3i & 8+6i \\ 2 & -7i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$ bzgl. der gegebenen Norm.

a) $V := \mathbb{C}^{2,2}$, $A := (a_{ik}) \in \mathbb{C}^{2,2}$: $\quad ||A||_1 := \sum_{i,k} |a_{ik}|$

b) $V := \mathbb{C}^{2,2}$, $A := (a_{ik}) \in \mathbb{C}^{2,2}$: $\quad ||A||_\infty := \max|a_{ik}|$

a)

$$\left|\left|\begin{bmatrix} 4-3i & 8+6i \\ 2 & -7i \end{bmatrix}\right|\right|_1 = |4-3i| + |8+6i| + |2| + |-7i|$$

$$= \sqrt{4^2+3^2} + \sqrt{8^2+6^2} + 2 + \sqrt{7^2} = \sqrt{25} + \sqrt{100} + 2 + 7 = 24$$

b)

$$\left|\left|\begin{bmatrix} 4-3i & 8+6i \\ 2 & -7i \end{bmatrix}\right|\right|_\infty = \max\{|4-3i|, |8+6i|, |2|, |-7i|\}$$

$$= \max\{5, 10, 2, 7\} = 10$$

**2. Aufgabe**

Sei $V$ ein nichttrivialer, reeller Vektorraum und $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^+$ eine Norm auf $V$. Überprüfen Sie, ob $||\cdot||$ eine lineare Abbildung ist.

## 8.2 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist der Schlüssel zum Messen von Winkeln zwischen zwei Vektoren.

**Definition** (euklidisches Skalarprodukt)

Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Abbildung $\langle\cdot\,,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **euklidisches Skalarprodukt**, falls die folgenden Eigenschaften für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

(1). $\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$,

(2). $\langle \alpha\vec{u}, \vec{v}\rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$,

(3). $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \geq 0$ mit $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (positiv definit),

(4). $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$ (symmetrisch).

Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt heißt **euklidischer Vektorraum**.

**Beispiel** (Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$)

Für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist das **Standardskalarprodukt** definiert durch

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix} \right\rangle$.

$$\left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \right\rangle = (-3)(-5) + (4)(-6) = -9$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{12}{25} + \frac{-12}{25} = 0 \qquad \left\langle \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

*Bemerkung:* Es gibt sehr unterschiedliche Skalarprodukte, die auf $\mathbb{R}^n$ definiert werden können. Beispielsweise ist für $k > 0$ die Abbildung $\langle\ ,\ \rangle_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto ku_1v_1 + ku_2v_2 + \cdots + ku_nv_n$ ein Skalarprodukt.

Training in der MUMIE: „Berechnung des Standardskalarproduktes“

**Beispiel** (Ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$)
Gegeben sei das Skalarprodukt

$$\langle p,q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad p,q\in\mathbb{R}_{\leq n}[x].$$

Bestimmen Sie $\langle 3x^2, 2-4x\rangle$ und $\langle 3x^2, 3x^2\rangle$.

$$\langle 3x^2, 2-4x\rangle = \int_0^1 3x^2(2-4x)dx = \int_0^1 (6x^2-12x^3)dx = [2x^3-3x^4]_0^1 = 2-3=-1$$

$$\langle 3x^2, 3x^2\rangle = \int_0^1 9x^4 dx = \left[\frac{9}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{9}{5}$$

**3. Aufgabe** (Lerncheck)
Gegeben sei das Skalarprodukt in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$\langle p_2x^2+p_1x+p_0, q_2x^2+q_1x+q_0\rangle := p_2q_2+3p_1q_1+p_0q_0.$$

Bestimmen Sie $\langle 4x^2+2x+1, -5x+6\rangle$.

**4. Aufgabe**
Sei $\langle\ ,\ \rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ ein euklidisches Skalarprodukt. Für $\vec{v}_0\in V$ (beliebig aber fest) definiere

$$L_{\vec{v}_0}: V\to\mathbb{R},\quad \vec{v}\mapsto\langle\vec{v},\vec{v}_0\rangle. \tag{7}$$

Ist $L_{\vec{v}_0}$ eine lineare Abbildung?

Training in der MUMIE: „Skalarprodukt im Vektorraum der Polynome“, “Abstand von zwei Polynomen“

**Definition** (unitäres Skalarprodukt)

Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ heißt unitäres Skalarprodukt, falls die folgenden Eigenschaften für alle $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$, $\alpha\in\mathbb{C}$ gelten:

(1). $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle\vec{u},\vec{w}\rangle+\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$,
(2). $\langle\alpha\vec{u},\vec{v}\rangle = \alpha\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$,
(3). $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle\geq 0$ mit $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$ (positiv definit),
(4). $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \overline{\langle\vec{v},\vec{u}\rangle}$.

Ein Vektorraum $V$ über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt heißt **unitärer Vektorraum**.

## 8.3 Verbindung zwischen Norm und Skalarprodukt

**Definition** (assoziierte Norm)

Egal ob $V$ ein euklidischer oder ein unitärer Vektorraum ist, kann durch das Skalarprodukt eine Norm definiert werden (die **assoziierte Norm**):

$$||\vec{v}|| := \sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}.$$

*Bemerkungen:*

- Falls ein Skalarprodukt in einer Aufgabe explizit definiert ist, wird dadurch die assoziierte Norm als Norm implizit definiert.

- Die Standardnorm ist die assoziierte Norm des Standardskalarprodukts.

Training in der MUMIE: „Standardnorm im $\mathbb{R}^2$“, „Assoziierte Norm im Vektorraum der Polynome“, „Assoziierte Norm“

**Definition** (Winkel)

Der Winkel (im Bogenmaß) zwischen den Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ wird mit $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ bezeichnet und durch die folgende Formel definiert:

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) := \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

*Bemerkungen:*

- Es kann durch geometrische Überlegungen gezeigt werden, dass die Formel in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$ bzgl. des entsprechenden Standardskalarprodukts gilt.

- Zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ stehen senkrecht zueinander, wenn der Winkel zwischen den Vektoren 90° (oder im Bogenmaß $\frac{\pi}{2}$) beträgt, sodass $\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Weil nicht nur mit dem Standardskalarprodukt gemessen wird, heißen Vektoren, für die das Skalarprodukt $0$ ist, **orthogonal**.

**5. Aufgabe**

Bestimmen Sie, ob die Menge $M_{\vec{v}_0} := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \langle \vec{v}, \vec{v}_0 \rangle = 0\}$ für einen festgelegten Vektor $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

*Bemerkung:* Die Menge $M_{\vec{v}_0}$ besteht aus allen Vektoren in $\mathbb{R}^2$, die zu dem Vektor $\vec{v}_0$ orthogonal sind. Dies ist der Kern der linearen Abbildung $L_{\vec{v}_0}$ (siehe Abbildung (7) auf Seite 92).

## 8.4 Orthonormalbasis, Gram-Schmidt-Verfahren

**Definition** (Orthonormalbasis)

Sei $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von einem Vektorraum $V$ über $\mathbb{K}$. $\mathcal{B}$ ist eine **Orthonormal**basis (Abkürzung ONB), wenn gilt:

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} \mathbf{0} & \text{für} \quad i \neq j \\ \mathbf{1} & \text{für} \quad i = j \end{cases}.$$

*Bemerkungen:*

- Für $i \neq j$ ist $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0$, sodass $\vec{b}_i, \vec{b}_j$ orthogonal sind. Ferner ist jeder Vektor **normiert** (von der Länge 1), weil $\sqrt{\langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle} = \sqrt{1} = 1$.

- Das Symbol $\delta_{i,j}$ heißt das Kronecker-Delta.

**Beispiel** (Orthonormalbasis - ONB)

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\}$ eine ONB bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist.

Wir argumentieren zunächst, dass $\mathcal{B}$ tatsächlich eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist, denn dies in der Aufgabenstellung nicht gegeben wurde.
Jede Basis des $\mathbb{R}^2$ besteht aus 2 linear unabhängigen Vektoren. $\mathcal{B}$ hat genau 2 Elemente und diese sind linear unabhängig (bei zwei Vektoren ist es ausreichend zu bemerken, dass der erste Vektor kein Vielfaches des

zweiten Vektors ist, was hier der Fall ist). Von daher ist $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Wir prüfen, ob die Vektoren $\boldsymbol{\vec{b}_1, \vec{b}_2}$ **orthogonal** sind:

$$\langle \boldsymbol{\vec{b}_1}, \boldsymbol{\vec{b}_2} \rangle = \langle \vec{b}_2, \vec{b}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{12}{25} - \frac{12}{25} \boldsymbol{= 0} .$$

Wir prüfen, ob die Vektoren $\boldsymbol{\vec{b}_1, \vec{b}_2}$ **normiert (Länge 1)** sind:

$$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\|\vec{b}_1\| = \sqrt{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} = 1},$$

$$\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\|\vec{b}_2\| = \sqrt{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle} = 1}.$$

$\mathcal{B}$ erfüllt die Definition einer ONB.

Die nächsten Beispiele zeigen zwei Anwendungen von ONBs. Die erste Anwendung ist die Verbindung zwischen ONBs und orthogonalen Matrizen. Dahinter steckt die Verbindung zwischen Standardskalarprodukt und Matrixmultiplikation:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^T \vec{v}.$$

Wir berechnen das Standardskalarprodukt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ und dann die Matrixmultiplikation $\vec{u}^T \vec{v}$ für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, um dies verständlich zu machen:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

$$\vec{u}^T \vec{y} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

**Beispiel** (ONB, orthogonale Matrizen)

Betrachten Sie die ONB $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Zeigen Sie, dass die Matrix $A := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ orthogonal ist.

Eine Matrix $A$ heißt orthogonal, wenn $AA^T = I = A^T A$. $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ ist eine ONB, heißt $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = \vec{b}_1^T \vec{b}_2 = \delta_{i,j}$. Weil die Spalten von $A$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bilden und in $A^T$ die Spalten als Zeilenvektoren in der entsprechenden Reihenfolge stehen, ist $A^T A = I_2$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Weil $A^T = A^{-1}$, gilt auch $AA^T = I_2$.

*Bemerkung:* Ist $\mathcal{B} := \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n\}$ eine ONB des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt, so ist die Matrix $Q$, deren Spalten aus den Basisvektoren bestehen, eine orthogonale Matrix ($QQ^T = I_n$). Die Matrizen $Q$ und $Q^T$ heißen **orthogonale Matrizen** (*nicht* orthonormierte Matrizen).

Als zweite Anwendung betrachten wir Koordinatenvektoren bzgl. einer ONB, weil Koordinaten bzgl. einer ONB besonders einfach zu berechnen sind.

Sei dazu $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine ONB des euklidischen Vektorraums $V$. Ein Vektor $\vec{v} \in V$ kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren

$$\vec{v} = \boldsymbol{\alpha_1} \vec{b}_1 + \boldsymbol{\alpha_2 \vec{b}_2} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n \vec{b}_n}$$

dargestellt werden. Das Skalarprodukt von $\vec{v}$ mit dem ersten Basisvektor $\vec{b}_1$ ergibt die erste Koordinate $\alpha_1$:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}, \vec{b}_1\rangle &= \langle \alpha_1\vec{b}_1 + \boldsymbol{\alpha_2}\boldsymbol{\vec{b}_2} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n}\boldsymbol{\vec{b}_n}, \vec{b}_1\rangle && \\
&= \langle (\alpha_1\vec{b}_1) + (\boldsymbol{\alpha_2}\boldsymbol{\vec{b}_2} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n}\boldsymbol{\vec{b}_n}), \vec{b}_1\rangle && \text{Gruppieren} \\
&= \langle \alpha_1\vec{b}_1, \vec{b}_1\rangle + \langle \boldsymbol{\alpha_2}\boldsymbol{\vec{b}_2} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n}\boldsymbol{\vec{b}_n}, \vec{b}_1\rangle && \text{Eigenschaft (1) des Skalarprodukts} \\
&\vdots && \text{anwenden (siehe Seite 91) bis es keine Summen innerhalb } \langle\ ,\ \rangle \text{ gibt.} \\
&= \langle \alpha_1\vec{b}_1, \vec{b}_1\rangle + \langle \boldsymbol{\alpha_2}\boldsymbol{\vec{b}_2}, \vec{b}_1\rangle + \cdots + \langle \boldsymbol{\alpha_n}\boldsymbol{\vec{b}_n}, \vec{b}_1\rangle && \\
&= \alpha_1\underbrace{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1\rangle}_{=1} + \boldsymbol{\alpha_2}\underbrace{\langle \vec{b}_1, \boldsymbol{\vec{b}_2}\rangle}_{=0} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n}\underbrace{\langle \vec{b}_1, \boldsymbol{\vec{b}_n}\rangle}_{=0} && \text{Eigenschaft (2) des Skalarprodukts anwenden.} \\
& && \text{Eigenschaften einer ONB} \\
&= \alpha_1
\end{aligned}$$

Ganz analog gilt $\langle \vec{v}, \vec{b}_i\rangle = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$.

**Beispiel** (ONB und Koordinaten)

Sei $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\}$ eine ONB des $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ bzgl. $\mathcal{B}$.

$$\alpha_1 = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{-22}{5}, \quad \alpha_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{29}{5} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{-22}{5} \\ \frac{29}{5} \end{bmatrix}$$

Wegen der Verbindung zwischen Standardskalarprodukt und Matrixmultiplikation hätten wir den Koordinatenvektor auch so berechnen können:

$$B^T \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-22}{5} \\ \frac{29}{5} \end{bmatrix} .B$$

**6. Aufgabe** (Lerncheck und Wiederholung)

Gegeben ist die folgende Orthonormalbasis (ONB) des $\mathbb{R}^4$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt:

$$\mathcal{B} := \left\{ \boldsymbol{\vec{q}_1} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\vec{q}_2} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\vec{q}_3} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\vec{q}_4} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}.$$

Ferner sei $Q$ die Matrix $Q := [\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3\ \vec{q}_4]$.

a) Geben Sie die Matrix $Q$ an und bestimmen Sie $Q^{-1}$.

b) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}^4$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

c) Bestimmen Sie $K_{\mathcal{B}}^{-1}\left( \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$.

**Algorithmus** (Gram-Schmidt-Verfahren – ONB)

Gegeben sei eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eines *euklidischen* Vektorraums $V$.Gesucht ist eine ONB $\{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n\}$.

1. Normiere den Vektor $\vec{b}_1$ : $\quad \vec{q}_1 := \dfrac{\vec{b}_1}{||\vec{b}_1||}$.

2. Berechne das Lot von $\vec{b}_2$ auf der Gerade durch $\vec{q}_1$ und $\vec{0}$ : $\quad \vec{l}_2 := \vec{b}_2 - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle \cdot \vec{q}_1$.

3. Normiere $\vec{l}_2$ : $\quad \vec{q}_2 := \dfrac{\vec{l}_2}{||\vec{l}_2||}$.

Die folgenden beiden Schritte sind rekursiv für $k = 3, \dots, n$ zu wiederholen.

4. Das Lot von $\vec{b}_k$ auf die von den Vektoren $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_{k-1}$ aufgespannte Ebene berechnen:

$$\vec{l}_k := \vec{b}_k - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_1 \rangle \cdot \vec{q}_1 - \cdots - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_{k-1} \rangle \cdot \vec{q}_{k-1}.$$

5. Normiere $\vec{l}_k$ : $\quad \vec{q}_k := \dfrac{\vec{l}_k}{||\vec{l}_k||}$.

Was macht der Algorithmus? Der Algorithmus konstruiert nach und nach Vektoren die orthogonal zueinander und normiert sind. Beginnen wir mit dem ersten Schritt. Der erste Basisvektor wird einfach normiert. Dies ist der erste Basisvektor $\vec{q}_1$ in der neuen Basis und hat die Eigenschaft $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle = 1$.

Im zweiten Schritt ist das Lot orthogonal zu dem ersten Vektor in der neuen Basis:

$$\begin{aligned} \langle \vec{l}_2, \vec{q}_1 \rangle &= \langle \vec{b}_2 - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle \cdot \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle \\ &= \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle - \langle \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle \cdot \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle \\ &= \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle \langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle \\ &= \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle \cdot 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bei dem Übergang von der 3. zu der 4. Zeile sieht man, warum die Normierung wichtig ist. Wäre $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle \neq 1$, so wäre $\vec{l}_2$ nicht zu $\vec{q}_1$ orthogonal.

Der Vektor $\vec{l}_2$ wird normiert und zu der neuen Basis zugefügt.

Die restlichen Vektoren in der neuen Basis werden ebenso konstruiert. Wir müssen nur beachten, dass das Lot immer orthogonal zu allen bisher konstruierten Vektoren in der neuen Basis ist.

**7. Aufgabe** (Lerncheck)

Zeigen Sie, dass das $k$-te Lot $\vec{l}_k$ orthogonal zu den orthonormierten Vektoren $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_{k-1}$ ist.

**Beispiel** (Gram-Schmidt-Verfahren)

Sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ an, um $\mathcal{B}$ in eine ONB zu überführen.

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{b}_1}{||\vec{b}_1||}, \; ||\vec{b}_1|| = \sqrt{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} = \sqrt{9 + 16} = 5 \quad \Rightarrow \quad \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

---

$$\vec{l}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} - \frac{31}{5} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-68}{25} \\ 0 \\ \frac{51}{25} \end{bmatrix}$$

---

$$||\vec{l}_2|| = \sqrt{\frac{68^2}{25^2}+\frac{51^2}{25^2}} = \frac{17}{5} \quad\Rightarrow\quad \vec{q}_2 = \frac{5}{17}\begin{bmatrix}\frac{-68}{25}\\ 0\\ \frac{51}{25}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-4}{5}\\ 0\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

---

$$\begin{aligned}\vec{l}_3 &= \vec{b}_3 - \langle\vec{b}_3,\vec{q}_1\rangle\vec{q}_1 - \langle\vec{b}_3,\vec{q}_2\rangle\vec{q}_2\\ &= \begin{bmatrix}4\\-1\\-3\end{bmatrix} - \left\langle\begin{bmatrix}4\\-1\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} - \left\langle\begin{bmatrix}4\\-1\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{-4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix}\frac{-4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}4\\-1\\-3\end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}\frac{-4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = \vec{q}_3,\end{aligned}$$

weil $\vec{l}_3$ schon normiert ist. Somit ist $\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{-4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Training in der MUMIE: „Konstruktion einer ONB in $\mathbb{R}^2$“, „Gram-Schmidt im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$“, „Konstruktion einer ONB im $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$“

**8. Aufgabe**

Der Vektorraum $\mathbb{R}^{2,2}$ sei ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}\right\rangle := a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2.$$

Zeigen Sie, dass die Matrizen $B_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B_2 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B_3 := \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ orthonormal sind.

**Beispiel** (Gram-Schmidt mit Matrizen)

Der Vektorraum $\mathbb{R}^{2,2}$ sei ausgestattet mit dem Skalarprodukt:

$$\left\langle\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}\right\rangle := a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{B_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B_2 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B_3 := \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}, B_4 := \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

des $\mathbb{R}^{2,2}$ an, um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^{2,2}$ zu konstruieren.

Das Gram-Schmidt-Verfahren läßt die ersten drei Matrizen unverändert, weil sie orthonormal sind (siehe die vorangehenden Aufgabe), d.h. $Q_1 = B_1, Q_2 = B_2, Q_3 = B_3$.

Berechne das Lot von span$\{B_1, B_2, B_3\}$ mit der Formel $L_4 := B_4 - \langle B_4, B_1\rangle B_1 - \langle B_4, B_2\rangle B_2 - \langle B_4, B_3\rangle B_3$ :

$$\begin{aligned}L_4 = &\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \left\langle\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \left\langle\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\\ &- \left\langle\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\\ = &\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} + \frac{1}{12}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Normiere $L_4$ : $\quad Q_4 := \dfrac{L_4}{||L_4||}$

$$\left\langle \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad ||L_4|| = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^{2,2}$ bzgl. des gegebenen Skalarproduktes ist

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

## 8.5 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 8. Kapitel

**1. Aufgabe** a) $\left\| \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\left\| \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\|_{\max} = \max\{|-3|, |-4|\} = 4$ c) $\left\| \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\|_L = |-3| + |-4| = 7$

**2. Aufgabe** Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ ist verträglich mit der Addition und der Multiplikation mit Skalaren:

- $L(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = L(\vec{v}_1) + L(\vec{v}_2)$
- $L(\alpha\vec{v}) = \alpha L(\vec{v})$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$.

[Idee: Wegen der ersten Eigenschaft einer Norm-Abbildung ist $||\vec{v}||$ nicht negativ, sodass das 2. Kriterium in der Definition einer linearen Abbildung vielleicht nicht gelten wird. Hier muss $\vec{v}$ sorgfältig gewählt werden, denn es gilt: $||\vec{0}|| = 0 = -||\vec{0}||$.]

Weil der Vektorraum $V$ nicht trivial ist, existiert ein von Null verschiedener Vektor $\vec{v} \in V$. Wegen der ersten Eigenschaft einer Norm-Abbildung sind $||\vec{v}||$ und $||-\vec{v}||$ positive Zahlen. Aber dann ist $||(-1)\cdot\vec{v}|| \neq (-1)\cdot||\vec{v}||$. Daher ist eine Norm-Abbildung **keine** lineare Abbildung, wenn $V$ einen von Null verschiedenen Vektor enthält.

**3. Aufgabe** $\langle 4x^2 + 2x + 1, -5x + 6\rangle = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 6 = -25 + 6 = -19$

**4. Aufgabe** Seien $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Nach der Definition einer linearen Abbildung muss geprüft werden, ob

$$L_{\vec{b}}(\vec{u} + \vec{v}) = L_{\vec{b}}(\vec{u}) + L_{\vec{b}}(\vec{v}) \text{ und } L_{\vec{b}}(\alpha\vec{v}) = \alpha L_{\vec{b}}(\vec{v})$$

gelten. Wir wenden die Rechenregeln des Skalarproduktes an:

$$L_{\vec{b}}(\vec{u} + \vec{v}) = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{v}_0\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_0\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}_0\rangle = L_{\vec{v}_0}(\vec{u}) + L_{\vec{v}_0}(\vec{v}),$$

$$L_{\vec{v}_0}(\alpha\vec{v}) = \langle \alpha\vec{v}, \vec{v}_0\rangle = \alpha\langle \vec{v}, \vec{v}_0\rangle = \alpha L_{\vec{v}_0}(\vec{v}),$$

$L_{\vec{v}_0}$ ist also eine lineare Abbildung. (Achtung! Das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ ist **keine** lineare Abbildung! Die Linearität funktioniert für $L_{\vec{v}_0}$ nur, weil $\vec{v}_0$ fest ist.)

**5. Aufgabe** Setze $M := M_{\vec{v}_0}$. Damit $M$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist, muss die Menge nicht leer sein. Des Weiteren muss $M$ bzgl. der Addition und bzgl. der Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen sein. Wir prüfen diese drei Bedingungen.

- $M$ ist nicht leer: $\langle \vec{0}, \vec{v}_0 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \vec{0} \in M.$

- $M$ ist abgeschlossen bzgl. der Addition: Seien $\vec{u}, \vec{v} \in M$, d.h. $\langle \vec{u}, \vec{v}_0 \rangle = 0 = \langle \vec{v}, \vec{v}_0 \rangle$. Nun ist wegen der 1. Eigenschaft eines Skalarproduktes:

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{v}_0 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_0 \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}_0 \rangle = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in M.$$

- $M$ ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit Skalaren: Seien $\vec{v} \in M, \alpha \in \mathbb{R}$. Wegen der 2. Eigenschaft eines Skalarproduktes:

$$\langle \alpha\vec{v}, \vec{v}_0 \rangle = \alpha \langle \vec{v}, \vec{v}_0 \rangle = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \alpha\vec{v} \in M.$$

$M$ erfüllt die Definition eines Teilraums des $\mathbb{R}^2$.

**6. Aufgabe** a) Weil es sich um eine ONB bzgl. des Standardskalarproduktes handelt, ist die Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

orthogonal; d.h. $Q^TQ = I$ und damit gilt

$$Q^T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(Wer diese Aufgabe mit dem Gaußalgorithmus löst, verliert wertvolle Zeit!)

b) Die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}^4$ bzgl. $\mathcal{B}$ ist $K_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; \vec{v} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$ mit $\vec{v} = \alpha_1\vec{q}_1 + \alpha_2\vec{q}_2 + \alpha_3\vec{q}_3 + \alpha_4\vec{q}_4$.

Weil $\mathcal{B}$ eine ONB ist, gilt

$$\alpha_i = \langle \vec{q}_i, \vec{v} \rangle = \vec{q}_i^{\,T}\vec{v},\ i = 1, 2, 3, 4,$$

sodass $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = Q^T\vec{v}$. Die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}^4$ bzgl. $\mathcal{B}$ ist also:

$$K_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \mapsto Q^T\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_4 \\ \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_4 \\ \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 - \frac{1}{2}v_4 \\ \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 - \frac{1}{2}v_4 \end{bmatrix}.$$

c) $K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = 2\vec{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{1}} + 4\vec{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{2}} - 6\vec{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{3}} - 2\vec{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{4}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

**7. Aufgabe** Das Lot $\vec{l}_k$ ist orthogonal zu $\vec{q}_i$, $i = 1, \ldots, k-1$ falls $\langle \vec{l}_k, \vec{q}_i \rangle = 0$. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{l}_k, \vec{q}_i \rangle &= \langle \vec{b}_k - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 - \cdots - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_i \rangle \vec{q}_i - \cdots - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_{k-1} \rangle \vec{q}_{k-1} \, , \, \vec{q}_i \rangle \\
&= \langle \vec{b}_k, \vec{q}_i \rangle - \langle \langle \vec{b}_k, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1, \vec{q}_i \rangle - \langle \langle \vec{b}_k, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2, \vec{q}_i \rangle - \cdots - \langle \langle \vec{b}_k, \vec{q}_i \rangle \vec{q}_i, \vec{q}_i \rangle - \cdots - \langle \langle \vec{b}_k, \vec{q}_{k-1} \rangle \vec{q}_{k-1}, \vec{q}_i \rangle \\
&= \langle \vec{b}_k, \vec{q}_i \rangle - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_1 \rangle \langle \vec{q}_1, \vec{q}_i \rangle - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_2 \rangle \langle \vec{q}_2, \vec{q}_i \rangle - \cdots - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_i \rangle \langle \vec{q}_i, \vec{q}_i \rangle - \cdots - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_{k-1} \rangle \langle \vec{q}_{k-1}, \vec{q}_i \rangle
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist $\langle \vec{q}_i, \vec{q}_j \rangle = \delta_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq k-1$, d.h. :

$$\langle \vec{l}_k, \vec{q}_i \rangle = \langle \vec{b}_k, \vec{q}_i \rangle - \langle \vec{b}_k, \vec{q}_i \rangle = 0$$

**8. Aufgabe** Die Matrizen $B_i, B_j, 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$ sind orthogonal zueinander, falls $\langle B_i, B_j \rangle = 0$. Wegen der Symmetrie des Skalarproduktes genügt es, die Matrizen für $i < j$ zu prüfen.

$B_1, B_2$ sind orthogonal: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2) = 0.$

$B_1, B_3$ sind orthogonal: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-1)) = 0.$

$B_2, B_3$ sind orthogonal: $\frac{1}{\sqrt{6}} \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} ((-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)) = 0.$

Die Matrix $B_i, 1 \leq i \leq 3$ ist normiert, falls $\|B_i\| = \sqrt{\langle B_i, B_i \rangle} = 1$ oder eben $\langle B_i, B_i \rangle = 1$.

$B_1$ ist normiert: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 (1^2 + 1^2) = \frac{1}{2}(2) = 1.$

$B_2$ ist normiert: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{6}((-1)^2 + 1^2 + 2^2) = 1.$

$B_3$ ist normiert: $\left\langle \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{12}((-1)^2 + 1^2 + 3^2 + (-1)^2) = 1.$

# 9 Orthogonale und unitäre Abbildungen

## 9.1 Grundlagen

**Definition** (orthogonale Transformation)

Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum und $Q : V \to V$ eine invertierbare lineare Abbildung. Dann ist $Q$ eine orthogonale Transformation (oder Abbildung), wenn für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt

$$\langle Q\vec{u}, Q\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

*Bemerkungen:*

- Weil das Skalarprodukt von Vektoren unverändert unter einer orthogonalen Abbildung bleibt und weil Norm und Winkel durch das Skalarprodukt definiert sind, sind orthogonale Abbildungen längen- und winkeltreu.
- Aus der vorangehenden Bemerkung folgt: eine orthogonale Transformation bildet eine ONB in eine ONB ab.

**Beispiel** (Drehung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$)

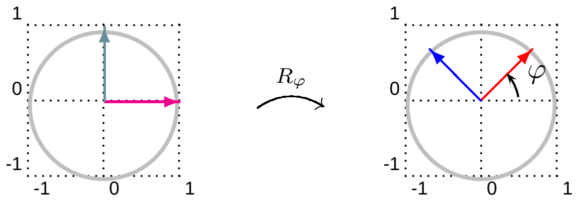
Sei $\mathbb{R}^2$ der euklidische Vektorraum ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie die Auswirkung der linearen Abbildung

$$R_\varphi := \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

an den Standardbasisvektoren.

$$R_\varphi \boldsymbol{\vec{e}_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\cos\varphi} \\ \boldsymbol{\sin\varphi} \end{bmatrix}$$

$$R_\varphi \boldsymbol{\vec{e}_2} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-\sin\varphi} \\ \boldsymbol{\cos\varphi} \end{bmatrix}$$



*Bemerkungen:*

- $R_\varphi$ ist eine orthogonale Matrix:

$$R_\varphi^T R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{bmatrix} = I_2.$$

$R_\varphi$ dreht alle Vektoren in $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi$ gegen den Uhrzeigersinn und heißt deshalb eine **Drehungsmatrix**.

- Statt Drehung wird auch Rotation gesagt. Dies erklärt die Bezeichnung $R_\varphi$.
- Drehungen in $\mathbb{R}^2$ sind längen-, winkel- und orientierungstreu. Orientierungstreu bedeutet hier, dass falls der Vektor $\vec{u}$ näher zu $\vec{v}$ gegen den Uhrzeigersinn als im Uhrzeigersinn ist, dann ist $R_\varphi(\vec{u})$ auch näher zu $R_\varphi(\vec{v})$ gegen den Uhrzeigersinn als im Uhrzeigersinn.
- Ferner gilt $R(\varphi_1) \cdot R(\varphi_2) = R_{\varphi_1+\varphi_2}$, sodass auch $R_{\varphi_1} \cdot R_{-\varphi_1} = R_0 = I_2$.

Training in der MUMIE: „Drehung im $\mathbb{R}^2$“, „Orthogonale Transformation von $\mathbb{R}^2$“

**1. Aufgabe** (Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$)

Sei $\mathbb{R}^2$ der euklidische Vektorraum ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ heißt **Spiegelung**, falls die assoziierte Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ alle Vektoren in $\mathbb{R}^2$ an einer festen Geraden durch den Nullvektor spiegelt. An welchen Geraden werden die folgenden Matrixabbildungen gespiegelt? $X := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $Y := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $S_{1,1} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

*Hinweis*: Bilden Sie den allgemeinen Vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ab.

*Bemerkungen:*

- Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$ sind längen- und winkeltreu.
- Ist $A$ eine Spiegelung, gilt $A^2 = I_2$.
- Ist $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt, können orthogonale Abbildungen mit orthogonalen Matrizen identifiziert werden. (Eine quadratische Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt orthogonal, falls $Q^TQ = I_n$.) Die Spalten einer orthogonalen Matrix bilden eine ONB bzgl. des Standardskalarproduktes.
- Das Produkt von orthogonalen Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist wieder orthogonal ($PP^T = I_n, QQ^T = I_n \Rightarrow PQ(PQ)^T = PQQ^TP^T = PI_nP^T = PP^T = I_n$).

**Beispiel** (Drehungen in der $(i, j)$-Koordinatenebene)

$$R_{2,3}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

ist eine Drehung um die 1. Achse (d.h. eine Drehung in der $(2, 3)$-Koordinatenebene). Weil es um die 1. Achse gedreht wird, ist die 1. Achse invariant (d.h. unverändert) unter der Abbildung. Deshalb sieht die 1. Spalte und 1. Zeile wie die Einheitsmatrix aus. Die andere Einträge sind so wie in einer Drehungsmatrix im $\mathbb{R}^{2,2,}$.

$$R_{1,3}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

ist eine Drehung um die 2. Achse.

- Diese Drehungen sind orthogonal, z.B.

$$R_{2,3}(\varphi)^T \cdot R_{2,3}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{bmatrix} = I_3.$$

Wie sieht $R_{1,2}(\varphi)$, die Drehung um den Winkel $\varphi$ um die 3. Achse, aus?

**2. Aufgabe** (Lerncheck: Drehungsmatrizen in $\mathbb{R}^{n,n}, n \geq 3$, sind nicht kommutativ)

Verifizieren Sie anhand der Matrizen $R_{1,2}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ und $R_{1,3}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, dass die Multiplikation von Drehungsmatrizen in $\mathbb{R}^{3,3}$ nicht kommutativ ist, d.h.
$\boldsymbol{R_{1,2}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot R_{1,3}\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq R_{1,3}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot R_{1,2}\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

Training in der MUMIE: „Drehung im $\mathbb{R}^n$“

In komplexen Vektorräume heißen Abbildungen, die das Skalarprodukt von Vektoren nicht ändern, unitäre Transformationen.

**Definition** (unitäre Transformation)

Sei $V$ ein unitärer Vektorraum und $U : V \to V$ eine invertierbare lineare Abbildung. Dann ist $U$ eine unitäre Transformation, genau dann, wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt

$$\langle U\vec{v}, U\vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle.$$

*Bemerkungen:*

- Unitäre Transformationen bilden ONBs in ONBs ab.
- Analog zu orthogonalen Matrizen gibt es unitäre Matrizen: $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt unitär, falls $U^*U = I_n$ gilt. Diese Matrizen sind die zugehörigen Matrizen für unitäre Abbildungen von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}^n$ bzgl. des komplexen Standardskalarproduktes: $\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right\rangle := u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n}$.

## 9.2 Die $QR$-Zerlegung

**Definition** ($QR$-Zerlegung)

Eine $QR$-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ ist eine Zerlegung der Form $A = QR$ mit $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ einer orthogonalen Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m,m}$ einer oberen Dreiecksmatrix.

*Motivation:*

Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ ein LGS und $A = QR$ mit $Q, R$ wie oben, dann wird durch Multiplikation von beiden Seiten des LGSs mit $(QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1}$ die Lösung $\vec{x} = R^{-1}Q^{-1}\vec{b}$ erhalten:

$$\begin{aligned} QR\vec{x} &= \vec{b} \\ (QR)^{-1}QR\vec{x} &= (QR)^{-1}\vec{b} \\ R^{-1}Q^{-1}QR\vec{x} &= R^{-1}Q^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= R^{-1}Q^{-1}\vec{b}. \end{aligned}$$

Hierbei sind $Q, R$ „leicht“ zu invertieren: $Q^{-1} = Q^T$ und $R$ ist schon in ZSF, sodass die NSZF schnell erreicht werden kann.

**Beispiel** ($QR$-Zerlegung)

Bestimmen Sie die $QR$-Zerlegung der invertierbaren Matrix $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$.

Da $A$ invertierbar ist, bilden die Spalten $\vec{a}_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_3 := \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ von $A$ eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$.

Idee: Gram-Schmidt auf der Basis $\mathcal{B}$ anwenden, um eine ONB $\mathcal{Q} := \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ zu konstruieren. Die Matrix $Q := [\vec{q}_1\, \vec{q}_2\, \vec{q}_3]$ ist bzgl. des Standardskalarproduktes orthogonal. Die Matrix $R := [[\vec{a}_1]_{\mathcal{Q}}\ [\vec{a}_2]_{\mathcal{Q}}\ [\vec{a}_3]_{\mathcal{Q}}]$ der Koordinatenvektoren von $\vec{a}_i$ bzgl. der ONB $\mathcal{Q}$ ist nach Konstruktion eine obere Dreiecksmatrix.

Das Gram-Schmidt-Verfahren haben wir bereits im 8. Kapitel auf $\mathcal{B}$ angewendet:

$$\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{ \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \vec{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \vec{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Nun wird $R$ bestimmt. Wir multiplizieren $A = QR$ auf beide Seiten mit $Q^{-1} = Q^T$, h.d.

$$Q^T A = Q^T Q R = R,$$

sodass

$$\begin{aligned} Q^T A &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & \frac{31}{5} & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= R. \end{aligned}$$

Prüfen Sie, ob die Spalten von $R$ die Koordinatenvektoren von $\vec{a}_i$ bzgl. der ONB $\mathcal{Q} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ sind. Die Matrix $R$ ist deshalb nach Konstruktion immer eine obere Dreiecksmatrix. (Warum? Schauen Sie notfalls das Gram-Schmidt-Verfahren nochmal an.)

**3. Aufgabe** (Lerncheck: Basis; Gram-Schmidt-Verfahren; orthogonale Abbildung; $QR$-Zerlegung)

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{b}_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bildet.

b) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\mathcal{B}$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis (ONB) $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ bzgl. des Standardskalarproduktes zu überführen.

c) Zeigen Sie, dass $Q = [\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3 \ \vec{q}_4]$ eine orthogonale Matrixabbildung ist.

d) Bestimmen Sie eine $QR$-Zerlegung der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Training in der MUMIE: „$QR$-Zerlegung“

In den nächsten Beispielen wird das lineare Ausgleichsproblem als Anwendung der $QR$-Zerlegung betrachtet.

**Anwendungsbeispiel** (Lineares Ausgleichsproblem mit einer Gerade)

Durch die vier Messpunkte

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} t_i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 5 & -3 & -2 & 6 \end{array}$$

soll eine Gerade $p(t) = a_1 t + a_2$ so gelegt werden, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$F(\vec{m}) = \sum_{i=1}^{4} ((m_1 t_i + m_2) - y_i)^2, \ \vec{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

minimal wird.

a) Schreiben Sie $F$ in der Form $F(\vec{m}) = \|A\vec{m} - \vec{y}\|^2$ mit der Standardnorm. Geben Sie die Matrix $A$ und den Vektor $\vec{y}$ an.

b) Benutzen Sie die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{b}_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^4$, um eine $QR$-Zerlegung von $A$ zu bestimmen.

c) Berechnen Sie damit die Lösung des Ausgleichsproblems und die Summe der Fehlerquadrate.

a) Die Matrix $A$ ist definiert durch $A\vec{m} = \begin{bmatrix} m_1 t_1 + m_2 \\ m_1 t_2 + m_2 \\ m_1 t_3 + m_2 \\ m_1 t_4 + m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ t_3 & 1 \\ t_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$. Mit den Messwerten eingesetzt bekommen wir $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Ferner ist $\vec{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Somit ist

$$F(\vec{m}) = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\|^2 .$$

b) Weil die Standardnorm gegeben ist, benutzen wir das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^4$. Das Gram-Schmidt-Verfahren wurde bereits in der 3. Aufgabe auf die Basis $B$ angewendet, um eine Orthonormalbasis zu konstruieren. Dies führte zu der orthogonalen Matrix

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{4}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} .$$

*Bemerkung:* Weil $A$ nicht quadratisch ist, $Q$ jedoch quadratisch sein muss ($Q$ ist eine orthogonale Matrix), wird $R$ in einer $QR$-Zerlegung nicht quadratisch sein. Die Formate von $Q$ und $R$ sind deshalb $4 \times 4$ bzw. $4 \times 2$.

Dann ist $Q := [\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3 \ \vec{q}_4]$ und $R = Q^T [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4]$ eine $QR$-Zerlegung von $A$.

Um $R$ zu bestimmen, rechnen wir $Q^TA$ nach:

$$R = Q^TA = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{\sqrt{30}} & \frac{10}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eine $QR$-Zerlegung von $A$ ist deshalb

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{4}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{30}{\sqrt{30}} & \frac{10}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Gesucht ist ein Vektor $\vec{m}$ mit $F(\vec{m})$ minimal; d.h.

$$F(\vec{m}) = \|A\vec{m} - \vec{y}\|^2 \overset{\text{orth. Transform.}}{=} \|Q^T(A\vec{m} - \vec{y})\|^2 = \|Q^TA\vec{m} - Q^T\vec{y}\|^2 = \|R\vec{m} - Q^T\vec{y}\|^2$$

soll minimiert werden. Nun ist

$$\begin{aligned} \|R\vec{m} - Q^T\vec{y}\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} \frac{30}{\sqrt{30}} & \frac{10}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \frac{30}{\sqrt{30}}m_1 + \frac{10}{\sqrt{30}}m_2 \\ \frac{2}{\sqrt{6}}m_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{17}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{7}{\sqrt{6}} \\ -\frac{41}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned}$$

minimal, wenn gilt

$$\begin{bmatrix} \frac{30}{\sqrt{30}}m_1 + \frac{10}{\sqrt{30}}m_2 \\ \frac{2}{\sqrt{6}}m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

EKM aufstellen und in NZSF bringen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{30}{\sqrt{30}} & \frac{10}{\sqrt{30}} & \frac{17}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{\sqrt{30}}{30}\text{I},\ \frac{\sqrt{6}}{2}\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{17}{30} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I-}\frac{1}{3}\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Somit ist $y = \frac{2}{5}t + \frac{1}{2}$ die Lösung des Ausgleichsproblems und die Summe der Fehlerquadrate ist

$$F(\vec{m}) = F\left(\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \left(\left(\frac{2}{5}t_i + \frac{1}{2}\right) - y_i\right)^2 = 64{,}2 = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{7}{\sqrt{6}} \\ -\frac{41}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \right\|^2.$$

*Bemerkung:* In der Praxis hat man Hunderte von Messwerten, die zu einem Modell bearbeitet werden sollen. Solche Aufgaben werden mit geeigneten Computerprogrammen wie MATLAB gelöst.

Das nächste Beispiel zeigt, wie man die obige Methode verallgemeinern kann, um Polynome von beliebigem Grad $n > 1$ (hier $n = 2$) als Modell zu gewinnen.

**Beispiel** (lineares Ausgleichsproblem mit einem quadratischen Polynom[a])

Durch die vier Messpunkte

| $t_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $2$ | $1$ | $2$ | $3$ |

soll ein quadratisches Polynom

$$p(t) = m_0 + m_1 t + m_2 t^2$$

so gelegt werden, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$F(m_0, m_1, m_2) = \sum_{i=1}^{4} (p(t_i) - y_i)^2$$

minimal wird.

a) Die Summe der Fehlerquadrate $F$ kann in der Form $F(\vec{m}) = \|A\vec{m} - \vec{y}\|^2$ mit der Standardnorm geschrieben werden. Geben Sie die Matrix $A$ und die Vektoren $\vec{m}, \vec{y}$ an.

b) Eine Approximation (mit einer Stelle Genauigkeit) der $QR$-Zerlegung in diesem Fall ist:

$$Q = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 7 & 5 & 2 \\ -5 & 2 & -5 & -7 \\ -5 & -2 & -5 & 7 \\ -5 & -7 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie damit die Lösung des Ausgleichsproblems und die Summe der Fehlerquadrate.

---

[a] Übernommen aus dem SS 2005

a) $F(\vec{m}) = \|A\vec{m} - \vec{y}\|^2$ mit

$$A := \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \; \vec{m} := \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \; \vec{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} R\vec{m} - Q^T\vec{y} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 & -5 \\ 7 & 2 & -2 & -7 \\ 5 & -5 & -5 & 5 \\ 2 & -7 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2m_0 - m_1 - 3m_2 \\ -2m_1 - 2m_2 \\ 2m_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -40 \\ -9 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$F(\vec{m})$ ist minimal für $\begin{bmatrix} -2m_0 - m_1 - 3m_2 \\ -2m_1 - 2m_2 \\ 2m_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -40 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix} = \vec{0}.$

Das LGS

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -0,9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

durch Rücksubstitution (oder Gaußalgorithmus) lösen. Die Koeffizienten lauten

$$m_2 = 0{,}5;\; m_1 = -0{,}05;\; m_0 = 1{,}275.$$

Von daher ist

$$F(m_0, m_1, m_2) = 0{,}5t^2 - 0{,}05t + 1{,}275.$$

Die Summe der Fehlerquadrate ist dann $\|\frac{5}{10}\|^2 = 0{,}25$.

## 9.3 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 9. Kapitel

**1. Aufgabe** $X\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$ (Spiegelung an der $x$-Achse)

$Y\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}$ (Spiegelung an der $y$-Achse)

$S_{1,1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$ (Spiegelung an der Gerade durch $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ und den Nullvektor)

*Hinweis*: Erstellen Sie jeweils eine Skizze, falls Sie die Antwort immer noch nicht verstehen.

**2. Aufgabe** Nach Definition:

$$\boldsymbol{R_{1,2}\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)&-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)&0\\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)&\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{R_{1,3}\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)&0&-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\0&1&0\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)&0&\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\ \frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}.$$

Zu berechnen sind die Produkte $R_{1,2}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot R_{1,3}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ und $R_{1,3}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot R_{1,2}\left(\frac{\pi}{3}\right)$:

$$\boldsymbol{R_{1,2}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot R_{1,3}\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\ \frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=:\boldsymbol{A},$$

$$\neq$$

$$\boldsymbol{R_{1,3}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot R_{1,2}\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\ \frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\ \frac{1}{4}&-\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=:\boldsymbol{B}.$$

Weil die Produkte nicht gleich sind ($\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$), ist die Multiplikation von Drehmatrizen in $\mathbb{R}^{3,3}$ nicht kommutativ (im Gegensatz zu Drehmatrizen in $\mathbb{R}^{2,2}$).

**3. Aufgabe** a) Jede Basis des $\mathbb{R}^4$ besteht aus vier Vektoren. Sind die vier Vektoren $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4\in\mathbb{R}^4$ linear unabhängig, so müssen sie auch ein Erzeugendensystem bilden (sonst wäre die Dimension des $\mathbb{R}^4$ größer als vier). Dazu berechnen wir den Rang der Matrix $B:=[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ \vec{b}_4]$ (gleich die maximale Anzahl von linear unabhängigen Zeilen bzw. Spalten, d.h. die Anzahl der **Kopfvariablen** von $[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ \vec{b}_4]$ in **ZSF**). Die ZSF

$$\begin{bmatrix}1&1&2&0\\2&1&-1&2\\3&1&4&0\\4&1&-3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{II-2I, III-3I, IV-4I}}\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-5&2\\0&-2&-2&0\\0&-3&-11&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III-2II, IV-3II}}\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-5&2\\0&0&8&-4\\0&0&4&-7\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{2IV-III}}\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-5&2\\0&0&8&-4\\0&0&0&-10\end{bmatrix}$$

hat 4 Kopfvariable, sodass $\text{Rang}(B)=4$. Die Menge $\{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3,\ \vec{b}_4\}$ ist also eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

b) Normiere $\vec{b}_1$ :

$$\vec{q}_1 := \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} \text{ mit } \|\vec{b}_1\| = \sqrt{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}.$$

Lot zur von $\vec{q}_1$ aufgespannten Geraden berechnen:

$$\vec{\ell}_2 := \vec{b}_2 - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Normiere $\ell_2$ :

$$\vec{q}_2 = \frac{\vec{\ell}_2}{\|\vec{\ell}_2\|} \text{ mit } \|\vec{\ell}_2\| = \sqrt{\langle \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_2 \rangle} = \sqrt{\tfrac{1}{9}(4+1+1)} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{q}_2} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}.$$

Lot zur von $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ aufgespannten Ebene berechnen:

$$\vec{\ell}_3 = \vec{b}_3 - \langle \vec{b}_3, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{b}_3, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{1}{30}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}(6) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Normiere $\vec{\ell}_3$:

$$\vec{q}_3 = \frac{\vec{\ell}_3}{\|\vec{\ell}_3\|} \text{ mit } \|\vec{\ell}_3\| = \sqrt{\langle \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_3 \rangle} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}.$$

Lot zur von $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ aufgespannten „Ebene“ berechnen:

$$\vec{\ell}_4 = \vec{b}_4 - \langle \vec{b}_4, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{b}_4, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 - \langle \vec{b}_4, \vec{q}_3 \rangle \vec{q}_3$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{30} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{30}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}(3) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}(-1) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Normiere $\vec{\ell}_4$:

$$\vec{q}_4 = \frac{\vec{\ell}_4}{\|\vec{\ell}_4\|} \text{ mit } \|\vec{\ell}_4\| = \sqrt{\langle \vec{\ell}_4, \vec{\ell}_4 \rangle} = \sqrt{\tfrac{1}{9}(9+16+1+4)} = \sqrt{\tfrac{30}{9}} = \tfrac{\sqrt{30}}{3} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{q}_4 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}.$$

Nach dem Gram-Schmidt-Verfahren ist

$$\mathcal{B}_{\text{ONB}} := \left\{ \vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{q}_4 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$.

c) Eine Matrixabbildung $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ist eine orthogonale Abbildung , falls $\langle Q\vec{u}, Q\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^4$ gilt. Durch Umformung von $\langle Q\vec{u}, Q\vec{v}\rangle$ erhalten wir

$$\langle Q\vec{v}, Q\vec{w}\rangle \overset{\text{Standardskalarprodukt}\downarrow}{=} (Q\vec{v})^T Q\vec{w} \overset{\downarrow\text{ Eigenschaften des Transponierens}}{=} \vec{v}^T Q^T Q\vec{w} = \vec{v}^T\vec{w} = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle.$$

Dabei gilt das vorletzte Gleichheitszeichen genau dann, wenn $Q^TQ = I$. Daher ist $Q$ genau dann eine orthogonale Matrixabbildung bzgl. des Standardskalarproduktes $\langle\ ,\ \rangle_{\text{Std}}$, wenn $Q$ eine orthogonale Matrix ist. Dies kann man explizit durch Matrixmultiplikation verifizieren, oder folgendermaßen argumentieren: für alle $1 \leq i, j \leq 4$ gilt

$$(\langle \vec{q}_i, \vec{q}_j\rangle_{\text{Std}} = \delta_{ij}) \Leftrightarrow \left(\vec{q}_i^{\,T}\vec{q}_j = \delta_{ij}\right) \Leftrightarrow \left(\vec{q}_i^{\,T}\vec{q}_j = 0 \ \ i \neq j \text{ und } \vec{q}_i^{\,T}\vec{q}_i = 1\right).$$

D.h. die Einträge auf der Diagonalen der Matrix $Q^TQ$ sind alle 1 und sonst 0. Dies entspricht der Einheitsmatrix, sodass $Q$ (als Matrix betrachtet) orthogonal ist. Die Abbildung $Q$ ist deshalb orthogonal.

d) Die Spalten der Matrix A bilden die Basis $\mathcal{B}$ aus Teil a). Der erste Schritt ist also schon fertig, sodass wir als orthogonale Matrix (siehe Teil c))

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{4}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

nehmen können. Um $R$ zu bestimmen betrachten wir die Gleichung $A = QR$. Durch Multiplikation mit $Q^T$ auf beiden Seiten der Gleichung bekommen wir $Q^TA = Q^TQR$. Weil $Q$ eine orthogonale Matrix ist (siehe Teil c), gilt auch $Q^TA = R$. Wir berechnen $R$ und prüfen, ob die Matrix eine obere Dreiecksmatrix ist, wie es die Definition der $QR$-Zerlegung verlangt:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-3}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{30} & \frac{10}{\sqrt{30}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{12}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $R$ ist eine obere Dreiecksmatrix, sodass man eine $QR$-Zerlegung von $A$ erhält:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{4}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{30} & \frac{10}{\sqrt{30}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{12}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

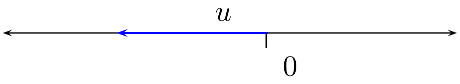
# 10 Determinante

## 10.1 Motivation aus $\mathbb{R}^{1,1}$, $\mathbb{R}^{2,2}$ und $\mathbb{R}^{3,3}$

**Definition** (Determinante von $[u] \in \mathbb{R}^{1,1}$)
Sei $u \in \mathbb{R}$. Die Determinante der Matrix $[u] \in \mathbb{R}^{1,1}$ ist definiert als $\det([u]) := u$.

*Bemerkungen:*

- $|\det([u])| =$ die Länge von $u$
- Das Vorzeichen zeigt die Richtung von $u$.



**Definition** (Determinante von $A \in \mathbb{R}^{2,2}$)

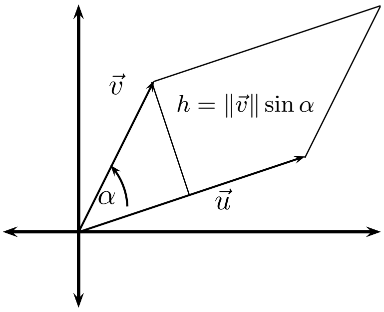
$$\text{Für } A := \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \text{ ist} \quad \det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}\right) := \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & & \boldsymbol{v_1} \\ & \times & \\ \boldsymbol{u_2} & & \boldsymbol{v_2} \end{vmatrix} := \boldsymbol{u_1 v_2} - \boldsymbol{u_2 v_1}.$$

*Bemerkungen:*

- Für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ist $|\det[\vec{u}\ \vec{v}]|$ der Flächeninhalt $F$ des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

$$F = \|\vec{u}\| h \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2(\alpha) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 \quad \text{(folgt aus } \cos(\alpha) := \tfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}) \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 \quad \text{(folgt aus } \|\vec{w}\| := \sqrt{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}) \\ &= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 \\ &= \cdots = u_1^2 v_2^2 - 2 u_1 u_2 v_1 v_2 + u_2^2 v_1^2 \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \quad \text{(binomische Formel)} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow F = |u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

- Das Vorzeichen zeigt die Orientierung der Vektoren an.

**Beispiel** (Determinante von $2 \times 2$ Matrizen)
Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, N := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, O := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

*Bemerkung:* Einige Gesetze, die auch für $n \times n$ Matrizen gelten, werden im Folgenden illustriert.

| | |
|---|---|
| $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ | Die Determinante der Einheitsmatrix ist 1. |
| $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$ | Das Vertauschen von Zeilen ändert das Vorzeichen. |
| $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$ | Die Determinante ist Null $\Leftrightarrow$ die Zeilen (bzw. Spalten) der Matrix sind linear abhängig. |
| $\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-8) - 0 \cdot 2 = -24$ | Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelementen. |

**1. Aufgabe** (Lerncheck)
Berechnen Sie die Determinante der Matrizen $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$, $A^T$, $A^2, A^{-1}$.

Training in der MUMIE: „Determinante, Fläche und Orientierung“

**Definition** (Vektorprodukt; Determinante für $A \in \mathbb{R}^{3,3}$)
Die Determinante einer Matrix $A := [\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \vec{w}] \in \mathbb{R}^{3,3}$ wird durch das Standardskalarprodukt $\langle\, ,\, \rangle$ und das **Vektorprodukt** von $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

$$v \times w := \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

definiert. Die **Determinante** von $A$ ist

$$\det(A) = \det\left([\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \vec{w}]\right) := \langle u, v \times w \rangle.$$

*Bemerkungen:*

- $|\det[\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \vec{w}]\,|$ ist das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Spates (Parallelepipedes).
- $\|v \times w\|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms (analog zum 2-dimensionalen Fall). Ist $\beta$ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, berechnen Sie

$$F^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \sin^2(\beta) = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \text{ und } \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2.$$

Die Ergebnisse müssen nach der Umformung gleich sein.

- Das Vektorprodukt von den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist orthogonal zu der durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Ebene. Das Volumen des Parallelepipedes ist dann $V = \|\vec{v} \times \vec{w}\|\, \|\vec{u}\| \cos\gamma$, wobei $\gamma$ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{v} \times \vec{w}$ und $\vec{u}$ ist.
- Das Vorzeichen zeigt die Orientierung der Vektoren an.

Nach der Definition und mit der Schreibweise $|A| := \det(A)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\det[\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \vec{w}] &= \left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\
&= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

So kann das Berechnen der Determinante einer $3 \times 3$ Matrix auf das Berechnen der Determinanten von $2 \times 2$ Matrizen (sogenannte Streichungsmatrizen) zurückgeführt werden.

$$\underset{S_{1,1}(A)}{\begin{bmatrix} \cancel{u_1} & \cancel{v_1} & \cancel{w_1} \\ \cancel{u_2} & v_2 & w_2 \\ \cancel{u_3} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}} \qquad \underset{S_{2,1}(A)}{\begin{bmatrix} \cancel{u_1} & v_1 & w_1 \\ \cancel{u_2} & \cancel{v_2} & \cancel{w_2} \\ \cancel{u_3} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}} \qquad \underset{S_{3,1}(A)}{\begin{bmatrix} \cancel{u_1} & v_1 & w_1 \\ \cancel{u_2} & v_2 & w_2 \\ \cancel{u_3} & \cancel{v_3} & \cancel{w_3} \end{bmatrix}}$$

Dieses Prinzip wird erweitert für das Berechnen der Determinante von $n \times n$ Matrizen für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ (**Laplace’scher Entwicklungssatz**). Um diesen Satz zu formulieren, wird eine formale Definition einer Streichungsmatrix benötigt.

**Definition** (Streichungsmatrix)

Seien $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Die $ij$-te **Streichungsmatrix** $S_{i,j}(A)$ ist die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die durch Streichung der **$i$-te Zeile** und **$j$-te Spalte** von $A$ erhalten wird.

## 10.2 Die Determinante in $\mathbb{R}^{n,n}$

**Definition/Satz** (Laplace'scher Entwicklungssatz)
Sei $A$ eine quadratische Matrix in $\mathbb{K}^{n,n}$.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(S_{i,j}(A)) \text{ (Entwicklung nach der } \boldsymbol{i}\textbf{-te Zeile)}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(S_{i,j}(A)) \text{ (Entwicklung nach der } \boldsymbol{j}\textbf{-te Spalte)}$$

*Bemerkungen:*

- Es ist egal, ob die Entwicklung nach Zeilen oder Spalten gemacht wird. Die Antwort bleibt gleich. Daraus folgt: $\boxed{\det(A) = \det(A^T)}$
- Die Determinante ist eine (nicht lineare) Abbildung $\det\ : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$ für $n > 1$.

**Schachbrettmuster für das Vorzeichen in der Laplace'schen Entwicklung**

Das Vorzeichen des Koeffizientens $a_{i,k}$ ist:

$$(-1)^{i+k} = \begin{cases} +1, & i+k \text{ gerade} \\ -1, & i+k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für $a_{1,1}$ ist $(-1)^{1+1} = 1$. Bewegt man sich zu der nächsten Position in der Matrix $A$ mit einem horizontalen oder vertikalen Schritt, dann addiert man noch eins zu der Potenz und $(-1)^{2+1} = (-1)^{1+2} = -1$. Mit jedem einzelnen Schritt ändert sich das Vorzeichen. So entsteht das folgende Schema für das Vorzeichen:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

**Beispiel** (Laplace; Determinante; lineare Unabhängigkeit; Invertierbarkeit; Kern)

Seien $A_1 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, $A_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A_i, i = 1, 2$.
b) Sind die Spalten von $A_i, i = 1, 2$ linear abhängig?
c) Ist die Matrix $A_i, i = 1, 2$ invertierbar?
d) Ist die Dimension des Kerns der Matrix $A_i, i = 1, 2$ Null?

a) Für $\det(A_1)$ entwickeln wir als Übung nach der 2. Zeile. die Streichungsmatrizen.

$$\underset{S_{2,1}(A_1)}{\begin{bmatrix} \cancel{1} & -2 & -3 \\ \enclose{circle}{-4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{-7} & 8 & 9 \end{bmatrix}} \quad \underset{S_{2,2}(A_1)}{\begin{bmatrix} 1 & \cancel{-2} & -3 \\ \cancel{-4} & \enclose{circle}{5} & \cancel{6} \\ -7 & \cancel{8} & 9 \end{bmatrix}} \quad \underset{S_{2,3}(A_1)}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & \cancel{-3} \\ \cancel{-4} & \cancel{5} & \enclose{circle}{6} \\ -7 & 8 & \cancel{9} \end{bmatrix}}$$

Die Koeffizienten $a_{i,k}$, das zugehörige Vorzeichen bestimmen wir auch dazu:

| | $S_{2,1}(A_1)$ | $S_{2,2}(A_1)$ | $S_{2,3}(A_1)$ |
|---|---|---|---|
| $a_{i,j}$ : | $-4$ | $5$ | $6$ |
| Vorzeichen: | $-$ | $+$ | $-$ |

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix}1&-2&-3\\-4&5&6\\-7&8&9\end{bmatrix}\right) &= -(-4)\begin{vmatrix}-2&-3\\8&9\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}1&-3\\-7&9\end{vmatrix} - (6)\begin{vmatrix}1&-2\\-7&8\end{vmatrix}\\ &= 4((-2)9-8(-3))+5(1\cdot 9-(-7)\cdot(-3))-6(1\cdot 8-(-7)(-2))\\ &= 4(-18+24)+5(9-21)-6(8-14)=24-60+36=0.\end{aligned}$$

a) Die Determinante von $A_1$ ist Null.

b) Die Spalten von $A_1$ sind linear abhängig: $-1\begin{bmatrix}1\\-4\\-7\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-2\\5\\8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\6\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

c) Die Matrix $A_1$ ist nicht invertierbar.

d) Die Dimension des Kerns der Matrix $A_1$ ist nicht Null. Beispielsweise ist $\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$ in $\mathrm{Kern}(A_1)$.

---

$\det(A_2)$: Entwicklung nach der 2. Spalte (wegen den vielen Nullen)

$$\det\begin{bmatrix}1&0&2&3\\4&0&5&6\\7&8&9&10\\0&0&11&12\end{bmatrix}=-8\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\0&11&12\end{vmatrix}$$

(Entw. nach der 3. Zeile)

$$=-8\left(-11\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}+12\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}\right)=-8(-11(6-12)+12(5-8))=-240$$

a) Die Determinante von $A_2$ ist ungleich Null.
b) Die Spalten von $A_2$ sind linear unabhängig. (Die NZSF von $A_2$ ist die Einheitsmatrix.)
c) Die Matrix $A_2$ ist invertierbar.
d) Die Dimension des Kerns der Matrix $A_2$ ist Null.

**2. Aufgabe** (Lerncheck)

Berechnen Sie jeweils die Determinante der Matrizen $B_1 := \begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&-2\\0&2&5\end{bmatrix}$ $B_2 := \begin{bmatrix}0&0&3\\0&-2&0\\5&0&0\end{bmatrix}$.

**3. Aufgabe** (Determinante; lineare Unabhängigkeit; Basis)

Überprüfen Sie, ob $\mathcal{B} := \left\{\vec{b}_1 := \begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix}0\\0\\3\\4\end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix}0\\5\\6\\0\end{bmatrix}, \vec{b}_4 := \begin{bmatrix}7\\0\\0\\8\end{bmatrix}\right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist. Benutzen Sie dazu die Determinante.

Training in der MUMIE: „Determinante, Zusammenhänge“

**Beispiel** (Obere Dreiecksmatrizen)

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\begin{bmatrix}2&-1&-3\\0&-5&6\\0&0&9\end{bmatrix}$.

$$\det\begin{bmatrix}2&-1&-3\\0&-5&6\\0&0&9\end{bmatrix}=2\begin{vmatrix}-5&6\\0&9\end{vmatrix}=2(-5\cdot 9-0\cdot 6)=(2)(-5)(9)=-90$$

Die Determinante einer *oberen Dreiecksmatrix* ist das Produkt der Diagonalelementen.

**Beispiel** (Determinante multiplikativ, nicht additiv)

Prüfen Sie anhand der Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, dass

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

aber

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 10 \qquad \det(B) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right) = -3$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}: \qquad \det(AB) = \left(\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}\right) = -30 = \det(A)\det(B)$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}: \qquad \det(A+B) = 8 \neq 10 - 3 = \det(A) + \det(B)$$

*Bemerkung:* Die Determinante ist nur bei quadratischen Matrizen anwendbar. Sind $A$ und $B$ quadratisch mit unterschiedlichen Formaten, dann ist die Matrixmultiplikation nicht definiert. Die Formel $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ gilt deshalb nur für Matrizen $A$ und $B$ mit $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$.

**Satz** (invertierbare Matrizen und Determinante)

Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine invertierbare Matrix, dann ist $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

$A$ invertierbar heißt $\det(A) \neq 0$ und $AA^{-1} = I_n$. Die Determinante ist multiplikativ und $\det(I_n) = 1$, also gilt:

$$\det(AA^{-1}) = \det I_n,$$
$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1,$$
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

*Konsequenz:*

Für Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit $A$ invertierbar gilt:

$$\det(B) = \det(B)\det(I) = \det(B)\det(AA^{-1}) = \boldsymbol{\det(B)\det(A)}\det(A^{-1})$$

$$\overset{*}{=} \boldsymbol{\det(A)\det(B)}\det(A^{-1}) = \det(ABA^{-1}).$$

* Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ ($AB$ ist nicht unbedingt dasselbe wie $BA$). $\det(B)$ und $\det(A)$ sind jedoch Zahlen, also ist $\det(B)\det(A) = \det(A)\det(B)$.

Insbesondere für die *darstellende Matrix* einer linearen Abbildung $L : V \to V$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ und die Transformationsmatrix $S = K_{\mathcal{B}_2}(K_{\mathcal{B}_1})^{-1}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach der Basis $\mathcal{B}_2$ gilt

$$L_{\mathcal{B}_2} = S L_{\mathcal{B}_1} S^{-1}$$

und somit auch

$$\det(L_{\mathcal{B}_2}) = \det(L_{\mathcal{B}_1}).$$

Damit ist der Wert der Determinante eine Invariante einer linearen Abbildung. D.h. die *Determinante einer darstellender Matrix einer linearen Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basis ab*! Wir setzen $\det(L) := \det(L_{\mathcal{B}_1})$.

**4. Aufgabe** $Q := [\vec{q}_1 \ \cdots \ \vec{q}_n] \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei eine orthogonale Matrix. Bestimmen Sie das Volumen des von $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$ aufgespannten Parallelepipedes.

**5. Aufgabe** Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ und betrachte $A$ als eine Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{v} \mapsto A\vec{v}$.

Die folgenden Informationen sind bekannt:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \; A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \; A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Matrix $A$.
b) Bestimmen Sie $\det(A)$.
c) Ist $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ eine injektive / surjektive / bijektive Abbildung?
d) Bestimmen Sie $\text{Kern}(A)$ und $\text{Bild}(A)$.

Weitere Eigenschaften (siehe Theorem 10.2.5 u. Folgerung 10.2.7 im Skript) illustrieren wir mit der Berechnung der Determinante einer Matrix mit Hilfe des Gaußalgorithmus.

**Beispiel** (Determinante mit Gauß)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußalgorithmus $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 16 & -2 \end{bmatrix}\right)$.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 16 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 16 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{III-2II}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 0 & 10 & 10 \end{vmatrix}$$

Eine Zeile ± ein Vielfaches einer anderen Zeile ändert die Determinante nicht.

$$\overset{\text{III}\leftrightarrow\text{II}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

**Vertauschen** von zwei Zeilen ändert das Vorzeichen.

$$\overset{\frac{1}{10}\text{II}}{=} -10 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

**Multiplikation** einer Zeile mit $\frac{1}{k}, k \neq 0$, ändert die Determinante um den Faktor $k$.

$$\overset{\text{III-2I}}{=} -10 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -12 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{III+5II}}{=} -10 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

obere Dreiecksform erreicht

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 16 & -2 \end{bmatrix}\right) = (-10)(1)(1)(-7) = 70$$

**6. Aufgabe** (Lerncheck)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ mit dem Gaußalgorithmus.

## 10.3 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 10. Kapitel

**1. Aufgabe**

• $\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\right) = 18 - 20 = -2$

• $\det(A^T) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}\right) = 18 - 20 = -2$

(Die Aufgabe illustriert $\det(A) = \det(A^T)$. Falls $\det(A)$ bekannt ist, muss für $\det(A^T)$ nicht neu berechnet werden.)

• $\det(A^2) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 29 & -45 \\ -36 & 56 \end{bmatrix}\right) = 1624 - 1620 = 4$

Bei dieser Aufgabe ist zu bemerken, dass die Eigenschaft $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ häufig einfacher zu benutzen ist als $A$ und $B$ zu multiplizieren und dann die Determinante des Ergebnisses zu bestimmen:

$$\det(A^2) = \det(A)\det(A) = (-2)(-2) = 4.$$

•$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \det(A^{-1}) = \frac{9}{2} - 5 = -\frac{1}{2}.$

Hier kann eine der Eigenschaften der Determinante leichter angewendet werden: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{-2}$.

**2. Aufgabe** $\det(B_1) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = \cdots = 15, \quad \det(B_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \cdots = 30.$

**3. Aufgabe** Jede Basis des vierdimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^4$ besteht aus vier Vektoren. Die Menge $\mathcal{B}$ enthält vier Elemente, also genügt es zu zeigen, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Nun sind $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ genau dann linear unabhängig, wenn $\det[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ \vec{b}_4] \neq\ 0$ gilt. Im Folgenden benutzen wir den Laplace'schen Entwicklungssatz.

$$\text{det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}\right) \overset{\text{Entw. 1. Zeile}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} + (-7) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. 1. Zeile bzw. 1. Spalte}}{=} 1 \cdot (-5) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + (-7) \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \cdot 24 + (-14) \cdot (-24) = \underset{\neq 0}{24} \cdot \underbrace{(-5 + 14)}_{\neq 0} \neq 0$$

Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ sind also linear unabhängig. Daraus folgt, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

**4. Aufgabe** Das Volumen des von $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$ aufgespannten Parallelepipedes (oder Spates) ist durch $|\text{det}(Q)|$ gegeben. Aus der Definition einer orthogonalen Matrix und Eigenschaften der Determinante haben wir folgende Informationen:

$\text{det}(Q) = \text{det}(Q^T)$
$Q$ ist orthogonal $\Rightarrow Q^TQ = I \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$ ($\Rightarrow Q$ invertierbar)
$Q$ invertierbar $\Rightarrow \text{det}(Q) = \frac{1}{\text{det}(Q^{-1})}$

$$|\text{det}(Q^T)| = |\text{det}(Q)| = \frac{1}{|\text{det}(Q^{-1})|} = \frac{1}{|\text{det}(Q^T)|}$$

Daraus folgt $|\text{det}(Q^T)|^2 = 1 \Rightarrow |\text{det}(Q)|^2 = 1 \Rightarrow |\text{det}(Q)| = 1$. Das gesuchte Volumen ist 1.

**5. Aufgabe** a) Da $A\vec{e}_i = i$-te Spalte von $A$, ist $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Da die drei Vektoren linear abhängig sind $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, gilt $\det(A) = 0$.

*Alternativen:*

1) $\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{II-2I, III-2I}}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \overset{\text{III-2II}}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 0 = 0$

2) $\det(A) \overset{\text{Entw. nach der 3. Zeile}}{=} 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-3) + 2(3-6) = 6 - 6 = 0$

c) Aus $\det(A) = 0$ folgt, dass die Zeilen von $A$ linear abhängig sind. Da es sich um eine quadratische Matrix handelt, muss die NZSF $\tilde{A}$ der Matrix $A$ eine Nullzeile enthalten, sodass die Anzahl der Kopfvariablen der Matrix $\tilde{A}$ kleiner als 3 sein muss.

Die Dimension des Kerns $A$ ist (3$-$Anzahl der Kopfvariablen von $\tilde{A}$) und deshalb ist dim(Kern($A$)) $> 0$. Somit ist $A$ keine injektive Abbildung (dafür müsste die Dimension des Kerns von $A$ gleich Null sein), also kann sie nicht bijektiv (injektiv und surjektiv) sein.

Die Dimension des Bildes von $A$ ist die Anzahl der Kopfvariablen von $\tilde{A}$, die hier kleiner als 3 ist. Die Abbildung ist nicht surjektiv, weil dim(Bild($A$)) $\neq 3 =$ Dimension des Bildraums $\mathbb{R}^3$.

*Bemerkung*: Es gibt viele alternative Begründungen!

d) Um Kern$(A)$ und Bild$(A)$ zu berechnen, bringen wir $A$ in NZSF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{II-2I, III-2I}}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \overset{\text{III-2II}}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{3}\text{II}}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{I-2II}}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: \tilde{A}.$$

Kern$(A)$: löse nach den Kopfvariablen (KV) $x_1, x_2$ auf:

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = -x_3.$$

Setze $x_3 = 1$. Somit ist Kern$(A) =$ span $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Bild$(A)$: Die KV von $\tilde{A}$ sind $x_1, x_2$, sodass die ersten zwei Spalten von $A$ eine Basis des Bildes von $A$ bilden:

$$\text{Bild}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}.$$

## 6. Aufgabe

$$\det\left(\begin{bmatrix}1&0&0&7\\2&0&5&0\\0&3&6&0\\0&4&0&8\end{bmatrix}\right) \overset{\text{II-2I}}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&7\\0&0&5&-14\\0&3&6&0\\0&4&0&8\end{vmatrix}$$

Eine Zeile ± ein Vielfaches einer anderen Zeile ändert die Determinante nicht.

$$\overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{=} -\begin{vmatrix}1&0&0&7\\0&3&6&0\\0&0&5&-14\\0&4&0&8\end{vmatrix}$$

**Vertauschen** von zwei Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante.

$$\overset{\frac{1}{3}\text{II}}{=} -(\mathbf{3})\begin{vmatrix}1&0&0&7\\0&1&2&0\\0&0&5&-14\\0&4&0&8\end{vmatrix}$$

Multiplikation einer Zeile mit $\frac{1}{k}$, $k \neq 0$, ändert die Determinante um den Faktor $\boldsymbol{k}$.

$$\overset{\text{IV-4II}}{=} -3\begin{vmatrix}1&0&0&7\\0&1&2&0\\0&0&5&-14\\0&0&-8&8\end{vmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{8}\text{IV}}{=} -3\cdot(-8)\begin{vmatrix}1&0&0&7\\0&1&2&0\\0&0&5&-14\\0&0&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{III}\leftrightarrow\text{IV}}{=} 3\cdot(-8)\begin{vmatrix}1&0&0&7\\0&1&2&0\\0&0&1&-1\\0&0&5&-14\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{IV-5III}}{=} \mathbf{3\cdot(-8)}\begin{vmatrix}\mathbf{1}&0&0&7\\0&\mathbf{1}&2&0\\0&0&\mathbf{1}&-1\\0&0&0&\mathbf{-9}\end{vmatrix}$$

Obere Dreiecksform erreicht

$$= \mathbf{-24}\cdot\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}\cdot(\mathbf{-9}) = 216$$

Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge auf der Diagonalen

# 11 Eigenwerte, Eigenvektoren, charakteristisches Polynom

## 11.1 Eigenwerte, Eigenvektoren

**Definition** (Eigenwert; Eigenvektor)

Seien $V$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $L : V \to V$ eine lineare Abbildung. Der Skalar $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert** (Abkürzung: **EW**) von $L$, falls es einen nichttrivialen Vektor $\boldsymbol{\vec{v}} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ (d.h. $\boldsymbol{\vec{v}} \in V$, $\boldsymbol{\vec{v}} \neq \vec{0}$) gibt für den gilt

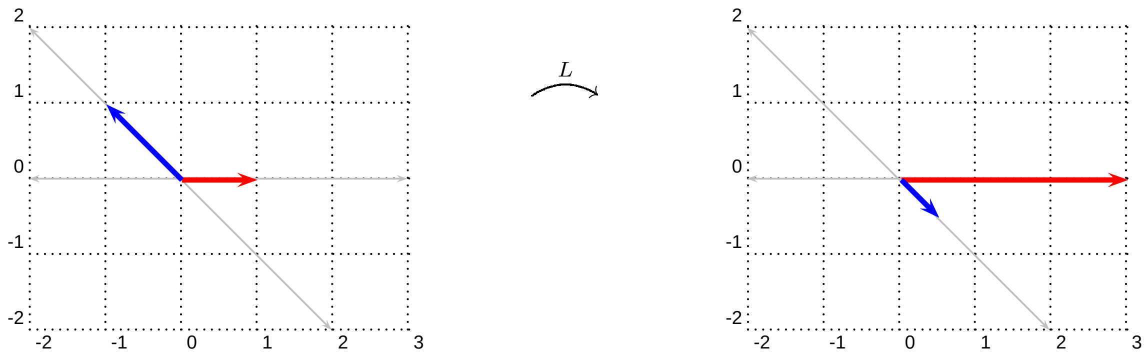
$$L(\boldsymbol{\vec{v}}) = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\vec{v}}.$$

Der nichttriviale Vektor $\boldsymbol{\vec{v}}$ heißt **Eigenvektor** (Abkürzung: **EV**) zum Eigenwert $\lambda$. Andersherum ist $\lambda$ der Eigenwert des Eigenvektors $\vec{v}$ von $L$.

*Bemerkungen:*

- Die Formulierung ist allgemeiner als im Skript.
- Die Abkürzungen EW und EV dürfen in den Hausaufgaben und in der Klausur benutzt werden.
- Die lineare Abbildung bildet $\vec{v}$ auf $\lambda\vec{v}$ ab, dass bedeutet, dass die lineare Abbildung den Vektor $\vec{v}$ skaliert. Das Bild $L(\vec{v})$ liegt auf der gleichen Geraden wie $\vec{v}$ (d.h., nach unserer Abmachung im 2. Kapitel auf der Geraden durch $\vec{v}$ und $\vec{0}$).

Beispielsweise erhalten wir für $V = \mathbb{R}^2$ und $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $L(\boldsymbol{\vec{e}_1}) = \boldsymbol{3\vec{e}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ (Eigenwert $3$ zum Eigenvektor $\boldsymbol{\vec{e}_1}$) und $L\left(\begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$ (Eigenwert $-\frac{1}{2}$ zum Eigenvektor $\begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$) das folgende Schaubild:



$L$ streckt den Vektor $\boldsymbol{\vec{e}_1}$ um den Faktor $3$. Die Wirkung von $L$ auf den Vektor $\begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ ist eine Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2} = \left|-\frac{1}{2}\right|$ und wegen des negativen Vorzeichens des Eigenwerts eine Änderung in der Orientierung des Vektors an der Gerade durch $\begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ und $\vec{0}$.

Training in der MUMIE: „Eigenvektoren-Eigenwerte“

*Folgerungen:*

Für eine lineare Abbildung $L : V \to V$, wobei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ ist, sind die folgenden Aussagen gültig.

**1. Der Nullvektor ist kein Eigenvektor!**

Der Nullvektor löst die Gleichung für jede Wahl von $\lambda \in \mathbb{K}$, denn $L(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda\vec{0}$. Dies führt zu keinen besonderen Skalar. Deshalb ist $\vec{0}$ als Eigenvektor ausgeschlossen.

**2.** $L$ ist **injektiv** genau dann, wenn $0$ **kein** Eigenwert von $L$ ist.

Ist $L$ injektiv, enthält der Kern von $L$ nur den Nullvektor. Die Gleichung $L(\vec{v}) = \vec{0} = 0\vec{v}$ ist deshalb nur für $\vec{v} = \vec{0}$ erfüllt, sodass $0$ kein Eigenwert von $L$ ist. Andersrum ist $0$ kein Eigenwert von $L$, so gibt es keine nichttriviale Vektoren $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $L(\vec{v}) = 0\vec{v} = \vec{0}$. Der Kern von $L$ besteht nur aus dem Nullvektor, sodass $L$ eine injektive Abbildung ist.

**3.** Ist $L$ **nicht injektiv**, so ist $0$ ein Eigenwert von $L$. Die **Eigenvektoren** zum **Eigenwert 0** sind die Elemente in **Kern** $\boldsymbol{L \setminus \{\vec{0}\}}$: aus $\vec{v} \in \text{Kern } L$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ folgt $L(\vec{v}) = \vec{0} = \boldsymbol{0\vec{v}}$.

**4.** Ist $L : V \to V; \vec{v} \mapsto \vec{0}$ die **Nullabbildung**, so ist dann auch jedes $\boldsymbol{\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}}$ ein **EV** von $L$ zu dem **EW** $\boldsymbol{\lambda = 0}$.

**5.** Ist $\boldsymbol{\vec{v}}$ ein **EV** von $L$ zu dem **EW** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}$, so ist auch $\boldsymbol{\alpha\vec{v}}$ $(\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\})$ ein **EV** von $L$ zum selben **EW** $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\vec{v} \neq \vec{0}}\ \textbf{EV} \quad \text{zum EW} \quad \boldsymbol{\lambda} && \Rightarrow L(\boldsymbol{\vec{v}}) = \boldsymbol{\lambda\vec{v}} && \text{Definition EW, EV} \\
& && \Rightarrow \alpha L(\vec{v}) = \alpha\lambda\vec{v} && \text{Multiplikation mit } \alpha \\
& && \Rightarrow L(\boldsymbol{\alpha\vec{v}}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\alpha\vec{v}}) && \text{Linearität von } L
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{span}\{\vec{v}\} \setminus \{\vec{0}\} \text{ sind Eigenvektoren von } L \text{ zu } \lambda.$$

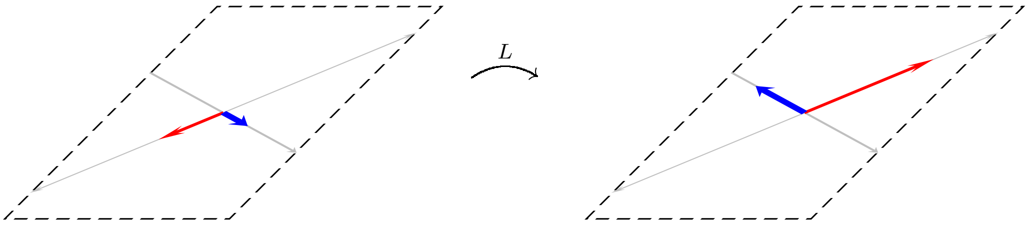
**6.** Sind $\boldsymbol{\vec{u}, \vec{v}}$ linear unabhängige **EV** zum selben **EW** $\boldsymbol{\lambda}$, d.h.

$$L(\boldsymbol{\vec{u}}) = \boldsymbol{\lambda\vec{u}}, \;\; L(\boldsymbol{\vec{v}}) = \boldsymbol{\lambda\vec{v}},$$

so ist auch jede Linearkombination $\boldsymbol{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (nicht beide Null) ein **EV** zum **EW** $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}}) &= L(\alpha\vec{u}) + L(\beta\vec{v}) && \text{Linearität} \\
&= \alpha L(\vec{u}) + \beta L(\vec{v}) && \text{Linearität} \\
&= \alpha(\lambda\vec{u}) + \beta(\lambda\vec{v}) && \text{Abbildung anwenden} \\
&= \lambda(\alpha\vec{u}) + \lambda(\beta\vec{v}) && \text{Kommutativität von Skalaren} \\
&= \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}}). && \text{Ausklammern}
\end{aligned}$$

Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit genau zwei linear unabhängigen Eigenvektoren $\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{v}}$ zum Eigenwert $-2$. Alle möglichen Linearkombinationen von $\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{v}}$ (span$\{\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{v}}\}$) definieren eine Ebene durch $\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{v}}$ und $\vec{0}$, die in $\mathbb{R}^3$ enthalten ist. Alle Vektoren in dieser Ebene (außer der Nullvektor) sind Eigenvektoren zum selben Eigenwert. Im Schaubild unten ist der Nullvektor der Punkt, in dem sich $\boldsymbol{\vec{u}}$ und $\boldsymbol{\vec{v}}$ treffen. Das Bild dieser Ebene bzgl. $L$ ist wieder dieselbe Ebene.



span$\{\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{v}}\}$ span$\{\boldsymbol{L(\vec{u})}, \boldsymbol{L(\vec{v})}\} =$ span$\{\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{v}}\}$

**Beispiel** (Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrixabbildung)

Seien $V = \mathbb{C}^2$ und $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$. Prüfen Sie, dass $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ Eigenvektoren der linearen Abbildung $A : V \to V; \vec{v} \mapsto A\vec{v}$ sind.

$$\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i^2\\ i\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} \text{ ist EV von } A \text{ zum EW } \lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ -\boldsymbol{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i^2\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ i\end{bmatrix} = -\mathbf{1}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ -\boldsymbol{i}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ -\boldsymbol{i}\end{bmatrix} \text{ ist EV von } A \text{ zum EW } \boldsymbol{\lambda_2 = -1}$$

**Beispiel** (Eigenwerte und Eigenvektoren einer Abbildung mit Polynomen)

Seien $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ und $L : V \to V;\ p \mapsto x \cdot p'$. Zeigen Sie, dass $x^3, x^2, x, 1$ Eigenvektoren der linearen Abbildung $L$ sind.

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{x^3}) &= x\cdot 3x^2 = \mathbf{3}\cdot\boldsymbol{x^3} & \text{EW}: \boldsymbol{\lambda_3 = 3} & \quad \text{EV}: \boldsymbol{x^3}\\
L(\boldsymbol{x^2}) &= x\cdot 2x = \mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x^2} & \text{EW}: \boldsymbol{\lambda_2 = 2} & \quad \text{EV}: \boldsymbol{x^2}\\
L(\boldsymbol{x}) &= x\cdot 1 = \mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x} & \text{EW}: \boldsymbol{\lambda_1 = 1} & \quad \text{EV}: \boldsymbol{x}\\
L(\mathbf{1}) &= x\cdot 0 = \mathbf{0}\cdot\mathbf{1} & \text{EW}: \boldsymbol{\lambda_0 = 0} & \quad \text{EV}: \mathbf{1}
\end{aligned}$$

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie jeweils den Eigenwert zu den Eigenvektoren $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ der Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $A := \begin{bmatrix}-16 & 7 & 11\\ -6 & 2 & 6\\ -16 & 7 & 11\end{bmatrix}$.

**2. Aufgabe**

Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit dem Eigenvektor $\vec{b}_1 := \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 := 3$ und dem Eigenvektor $\vec{b}_2 := \begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$ zu dem Eigenwert $\lambda_2 := -2$.

(a) Bestimmen Sie $L\left(\vec{b}_1\right)$ und $L\left(\vec{b}_2\right)$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $L$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} := \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}$ des $\mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_{\text{Std}}}$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B}_{\text{Std}}$ des $\mathbb{R}^2$.

(d) Bestimmen Sie $L\left(\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right)$.

Training in der MUMIE: „Eigenwert zum gegebenen Eigenvektor“

**Definition** (Eigenraum; geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts)

Der **Eigenraum** (Abkürzung: ER) zum Eigenwert $\lambda$ der linearen Abbildung $L : V \to V$ ist die Menge aller Lösungen der Gleichung

$$V_\lambda = \{\text{Eigenvektoren zum } \lambda\} \cup \{\vec{0}\}.$$

Die **geometrische Vielfachheit** (Abkürzung: geom VFH) des Eigenwerts $\lambda$ ist gegeben durch $\dim V_\lambda =$ maximale Anzahl von *linear unabhängigen* EV zu EW $\lambda$.

*Bemerkungen:*

- Insbesondere ist $\vec{0}$ in jedem Eigenraum enthalten, weil die Gleichung mit dem Nullvektor immer erfüllt ist.
- Die geometrische Vielfachheit ist für jeden einzelnen Eigenwert definiert. Diese werden nicht für verschiedene Eigenwerte zusammengezählt.
- In dem Schaubild auf Seite 121 ist nach Aufgabenstellung span$\{\vec{u},\vec{v}\}$ der zweidimensionalen Eigenraum zum Eigenwert $-2$. Daraus folgt, die geom VFH des EW $-2$ ist 2.

**Beispiel** (Eigenraum; geometrische Vielfachheit)

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (betrachtet als Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \vec{v} \mapsto A\vec{v}$) hat die Eigenvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1$ und den Eigenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_2$. Bestimmen Sie $\lambda_1$ und $\lambda_2$, die Eigenräume zu $\lambda_1$ und $\lambda_2$ sowie die geometrische Vielfachheiten von $\lambda_1$ und $\lambda_2$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

Der Eigenraum zu $\lambda_1$ enthält span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Weil $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ zwei Vektoren sind, wobei einer kein Vielfaches der anderen ist, sind die zwei Vektoren linear unabhängig, sodass die Dimension des Eigenraums mindestens 2 ist. Daraus folgt (geom. VFH $\lambda_1) \geq 2$.

Der Eigenraum zu $\lambda_2$ enthält span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Es gibt einen linear unabhängigen Vektor im $V_{\lambda_2=0}$, sodass die Dimension des Eigenraums mindestens 1 beträgt. Daraus folgt (geom. VFH $\lambda_2) \geq 1$.

Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind linear unabhängig. Wir haben in $\mathbb{R}^3$ drei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden. Weitere linear unabhängige Vektoren gibt es in einem dreidimensionalen Vektorraum nicht. Die Eigenräume sind deshalb

$$V_{\lambda_1=1} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad V_{\lambda_2=0} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

und (geom. VFH $\lambda_1) = 2$, (geom. VFH $\lambda_2) = 1$.

**Satz** (Eigenwerte und lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren)
Sei $L : V \to V$ eine lineare Abbildung mit dem Eigenvektor $\vec{v}_1$ zum Eigenwert $\lambda_1$ und $\vec{v}_2$ zum EW $\lambda_2$.

Dann gilt die Aussage: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig

Die Aussage mit denselben Voraussetzungen ist logisch äquivalent zu der folgenden Aussage, die einfacher zu beweisen ist: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear abhängig $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Angenommen $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sind linear abhängig, d.h. es existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (nicht beide Null) mit

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta\vec{v}_2} = \boldsymbol{-\alpha\vec{v}_1}.$$

Die Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \neq \vec{0}$ haben zur Folge, dass eigentlich weder $\alpha$ noch $\beta$ Null sein können.
Einerseits ist $\vec{v}_1 (\neq \vec{0})$ ein EV zum EW $\lambda_1$, d.h. $-\alpha\vec{v}_1$ ist auch ein EV zum EW $\lambda_1$ (siehe Punkt 5 auf Seite 121), also ist die folgende Eigenwertgleichung erfüllt:

$$L(-\alpha\vec{v}_1) = \lambda_1(-\alpha\vec{v}_1).$$

Weil $\beta\vec{v}_2 = -\alpha\vec{v}_1$, kann $\beta\vec{v}_2$ für $-\alpha\vec{v}_1$ in der Gleichung eingesetzt werden:

$$L(\beta\vec{v}_2) = \lambda_1(\beta\vec{v}_2).$$

Andererseits folgt aus $\vec{v}_2 (\neq \vec{0})$ EV zum EW $\lambda_2$, dass $\beta\vec{v}_2$ EV zum EW $\lambda_2$ ist:

$$L(\beta\vec{v}_2) = \lambda_2(\beta\vec{v}_2).$$

Daraus folgt

$$\lambda_1(\beta\vec{v}_2) = \lambda_2(\beta\vec{v}_2).$$

Weil $\beta \neq 0, \vec{v}_2 \neq \vec{0}$ gilt, ist $\lambda_1 = \lambda_2$.

*Folgerungen:*

- Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ Eigenvektoren von $L$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

  $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte (d.h. alle einzelne Eigenwerte sind verschieden)

  $$\Rightarrow \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \text{ linear unabhängig}.$$

- Ist $V$ endlich-dimensional und $L : V \to V$ eine lineare Abbildung, dann hat $L$ höchstens dim $V$ Eigenwerte.

## 11.2 Charakteristisches Polynom

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Für eine gegebene lineare Abbildung $L : V \to V$ werden alle $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}$ gesucht, für die es einen Vektor $\boldsymbol{\vec{v}} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ gibt, sodass die Eigenwertgleichung $L(\boldsymbol{\vec{v}}) = \boldsymbol{\lambda\vec{v}}$ erfüllt ist.

Um die Frage zu beantworten, wie die Eigenwerte bestimmt werden können, betrachten wir den Fall einer Matrixabbildung. Sei dazu $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ und $z$ eine Variable mit Werte in $\mathbb{K}$. Wir formen die Eigenwertgleichung um:

$$A\vec{v} = z\vec{v} \text{ und } \vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{v} - z\vec{v} = \vec{0} \text{ und } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Bei $A\vec{v} - z\vec{v}$ kann der Vektor $\vec{v}$ nicht ausgeklammert werden. Sonst hätten wir $(A - z)\vec{v}$ mit $A$ einer Matrix und $z$ einer Zahl. Das ergibt keinen Sinn. Multiplikation von $\vec{v}$ mit der Diagonalmatrix $zI_n$ von links (d.h. $(zI_n)\vec{v}$) hat aber dieselbe Auswirkung wie Skalarmultiplikation von $\vec{v}$ mit $z$, nämlich $z\vec{v} = \begin{bmatrix} zv_1 \\ \vdots \\ zv_n \end{bmatrix}$, sodass für $\vec{v} \neq \vec{0}$ gilt

$$A\vec{v} - z\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{v} - (zI_n)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - zI_n)\vec{v} = \vec{0}.$$

Gesucht wird $z \in \mathbb{K}$, sodass $\operatorname{Kern}(A - zI_n) \neq \{\vec{0}\}$. Dies gilt genau dann, wenn $\det(A - zI_n) = 0$.

**Definition** (Charakteristisches Polynom einer Matrixabbildung; algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts)

$p_A(z) = \det(A - zI_n)$ ist das **charakteristische Polynom** von $A$. (Abkürzung: char Pol)

Die Nullstellen $\boldsymbol{\lambda_1}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_k}, (\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j)$ des charakteristischen Polynoms $p_A(z)$ sind die Eigenwerte von $A$; d.h.

$$p_A(z) = (\boldsymbol{\lambda_1} - z)^{\boldsymbol{r_1}} \cdots (\boldsymbol{\lambda_k} - z)^{\boldsymbol{r_k}}$$

Die **algebraische Vielfachheit** von $\boldsymbol{\lambda_i}$ ist $\boldsymbol{r_i}$ (Abkürzung: (alg VFH $\boldsymbol{\lambda_i}$) $= \boldsymbol{r_i}$ ), d.h. wie oft der EW $\lambda_i$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms vorkommt.

**Beispiel** (char Pol; EW; alg VFH)

Sei $A$ die Matrixabbildung, die durch $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3;\ \vec{v} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}$ gegeben ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$ sowie jeweils die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte.

$$p_A(z) = \det(A - zI_3) = \det\left( \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left( \begin{bmatrix} 3-z & 1 & 0 \\ 0 & 3-z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \right) = (-z)(3-z)^2$$

$$p_A(z) = 0 \Leftrightarrow (z = \mathbf{0} \text{ oder } z = \mathbf{3})$$

Das char Pol ist $p_A(z) = (-z)^{\mathbf{1}}(3-z)^{\mathbf{2}}$. Die Eigenwerte von $A$ sind: $\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$ mit alg VFH $\mathbf{1}$ $\boldsymbol{\lambda_{2/3} = 3}$ mit alg VFH $\mathbf{2}$.

*Tipp:* Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge auf der Diagonalen. Ist $A$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist auch $A - zI_n$ eine obere Dreiecksmatrix. Die Eigenwerte sind dann die Einträge auf der Diagonalen von $A$. (Warum?)

**Beispiel** (EV; geom VFH)

Sei $A$ die Matrixabbildung $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3;\ \vec{v} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $A$ sowie jeweils die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte $0$ und 3.

Die Eigenwerte sind die Zahlen $\lambda_i$, für die $\det(A - \lambda_i I_n) = 0$. Die Determinante von $A - \lambda_i I_n$ ist 0, falls Kern$(A - \lambda_i I_n)$ nicht trivial ist. Um die Eigenvektoren zu berechnen, bestimmen wir den Kern von $A - \lambda_i I$, d.h. die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_i I_n)\vec{v} = 0$.

Es wird für den jeweiligen EW der Kern der Matrix $\begin{bmatrix} 3-\lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_i \end{bmatrix}$ berechnet.

$\lambda_1 = 0 :$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{NZSF}}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir folgen dem Algorithmus zum Berechnen des Kerns einer Matrix (vgl. Seite 41): $x_1 = 0, x_2 = 0$ und $x_3$ beliebig, da $x_3$ eine Nichtkopfvariable ist: $V_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Damit ist die Menge der EV (zum EW $\lambda_1$) $V_{\lambda_1} \setminus \{\vec{0}\}$. [*Bemerkung*: (alg VFH $\lambda_1$) = (geom VFH $\lambda_1$)]

$\lambda_{2/3} = 3$ : Aus $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{\text{NZSF}}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ folgt $V_{\lambda_{2/3}} = \left\{ \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \beta \in \mathbb{C} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Die Menge der EV (zum EW $\lambda_{2/3}$) ist $V_{\lambda_{2/3}} \setminus \{\vec{0}\}$.

*Tipp:* Die $\lambda_i$ wurden so gewählt, dass der Kern von $A - \lambda_i I$ nicht nur aus dem Nullvektor besteht. Da $A - \lambda_i I$ eine quadratische Matrix ist, heißt dies, dass die (N)ZSF von $A - \lambda_i I$ eine Nichtkopfvariable enthält. Falls Sie nur den Nullvektor im Kern$(A - \lambda_i I)$ bekommen (nur Kopfvariablen in (N)ZSF), haben Sie irgendwo falsch gerechnet.

*Bemerkungen:*

- In diesem Beispiel stimmen die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_{2/3}$ und seine geometrische Vielfachheit nicht überein. Für $\lambda_1$ sind die algebraische und die geometrische Vielfachheit gleich. Um zu bestimmen, ob die alg VFH gleich der geom VFH für jeden Eigenwert ist, muss jeder einzelne Eigenwert geprüft werden. Es reicht nicht, nur einen einzigen Eigenwert zu betrachten, wenn die Abbildung unterschiedliche Eigenwerte hat.
- Im Allgemeinen ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts mindestens 1, sonst gäbe es keinen Eigenvektor dazu. Ferner ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts durch seine algebraische Vielfachheit beschränkt (vgl. die Folgerungen am Ende des letzten Abschnitts):

$$1 \leq \text{ geom VFH } \lambda_i \leq \text{ alg VFH } \lambda_i \tag{8}$$

Ist die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts 1, so ist auch die geometrische Vielfach des Eigenwerts 1.

Wir fassen die Schritte zur Bestimmung von Eigenwerte und Eigenvektoren zusammen.

**Algorithmus** (Eigenwerte; Eigenräume; Eigenvektoren einer Matrixabbildung)

Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{K}^n$ und die Matrixabbildung $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n; \vec{v} \mapsto A\vec{v}$. Die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren können mit den folgenden Schritten berechnet werden:

1. Charakteristisches Polynom $p_A(z) = \det(A - zI)$ bestimmen.
2. Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms ermitteln.
3. Eigenraum $V_{\lambda_i}$ als Kern$(A - \lambda_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ bestimmen. Die Eigenvektoren sind die Vektoren in $V_{\lambda_i} \setminus \{\vec{0}\}$.

**Beispiel** (Eigenwerte; Eigenräume)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der linearen Abbildung

$$A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3;\ \vec{v} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \vec{v}.$$

1. Schritt (char Pol)

$$\begin{aligned} p_A(z) &= \det \begin{bmatrix} 1-z & 0 & -4 \\ 0 & 5-z & 4 \\ -4 & 4 & 3-z \end{bmatrix} \\ &= (1-z) \begin{vmatrix} 5-z & 4 \\ 4 & 3-z \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 0 & 5-z \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-z)((5-z)(3-z)-16)+(-4)(0-(-4)(5-z)) \\ &= -z^3+9z^2+9z-81 \end{aligned}$$

2. Schritt (EW = Nullstellen des char Pols)

Setze $p_A(z)=0$ und löse nach $z$:

$$p_A(z) = -z^3+9z^2+9z-81 = 0$$

$$(z-\mathbf{3})^{\mathbf{1}}(z-(\mathbf{-3}))^{\mathbf{1}}(z-\mathbf{9})^{\mathbf{1}} = 0$$

$$\text{EW}: \boldsymbol{\lambda_1 = 3}, \ \boldsymbol{\lambda_2 = -3}, \ \boldsymbol{\lambda_3 = 9}$$

*Bemerkung:* Die alg VFH **jedes** EW ist 1 (rot getönte Zahlen), d.h. die geom VFH **jedes** EW ist 1 (vgl. die Ungleichung (8) auf Seite 126).

3. Schritt (ER = $V_{\lambda_i}$)

$$\lambda_1 = 3: \begin{bmatrix} 1-3 & 0 & -4 \\ 0 & 5-3 & 4 \\ -4 & 4 & 3-3 \end{bmatrix} \overset{\text{NZSF}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\lambda_2 = -3: \begin{bmatrix} 1+3 & 0 & -4 \\ 0 & 5+3 & 4 \\ -4 & 4 & 3+3 \end{bmatrix} \overset{\text{ZSF}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_{\lambda_2} = \left\{ \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \ \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\lambda_3 = 9: \begin{bmatrix} 1-9 & 0 & -4 \\ 0 & 5-9 & 4 \\ -4 & 4 & 3-9 \end{bmatrix} \overset{\text{ZSF}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_{\lambda_3} = \left\{ \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \ \gamma \in \mathbb{C} \right\}$$

**3. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix $B := \begin{bmatrix} -1 & 12 & -28 \\ 0 & 9 & -18 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

Training in der MUMIE: „Charakteristisches Polynom“, „Eigenräume“

**Beispiel** (Komplexe Eigenwerte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte selbst.
Ergebnis zur Kontrolle: $p_A(z) = z^2-4z+5$ , Eigenwerte $\lambda_{1/2} = 2 \pm i$.

$$\text{Kern}(A-\lambda_1 I_2) = \text{Kern}\begin{bmatrix} 1-(2+i) & -2 \\ 1 & 3-(2+i) \end{bmatrix} = \text{Kern}\begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

Gaußalgorithmus anwenden:

$$\begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix} \overset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ -1-i & -2 \end{bmatrix} \overset{\text{II}+(1+i)I}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(KV: $x_1$, NKV: $x_2$)

$$\begin{aligned} x_1 &= (-1+i)x_2 \\ x_2 &= r \in \mathbb{C} \end{aligned} \qquad \text{ergibt } V_{\lambda_1} = \left\{ r \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ r \in \mathbb{C} \right\}$$

Machen Sie eine ähnliche Berechnung, um $V_{\lambda_2}$ zu bestimmen.

Ergebnis zur Kontrolle: $V_{\lambda_2} = \left\{ s \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\}$

**Beispiel** (Komplexe Eigenwerte; Eigenräume; Drehungen in $\mathbb{R}^2$)

Gegeben sei die Drehungsmatrix $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von $R_\varphi$ für $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Die **Eigenwerte (EW)** der Matrix $R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ sind die **Nullstellen des charakteristischen Polynoms** $p_{R_{\frac{\pi}{4}}}(z) = \det(R_{\frac{\pi}{4}} - zI_2)$. Das charakteristische Polynom ist:

$$\begin{aligned} p_{R_{\frac{\pi}{4}}}(z) = \det\left( \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - z & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - z\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = z^2 - \sqrt{2}z + 1. \end{aligned}$$

Die EW von $p_{R_{\frac{\pi}{4}}}(z)$ lauten (z.B. mit der $pq$-Formel bestimmt) $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$.

*Bemerkungen:*

• Bei einer Drehung um $\frac{\pi}{4}$ wird kein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ auf einen Vektor in $\operatorname{span}\{\vec{v}\} = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ abgebildet. (Machen Sie sich eine Skizze, um dies zu verdeutlichen.) Deshalb erwarten wir weder **reelle** Eigenwerte, noch reelle Eigenvektoren. Es gibt jedoch **komplexe** Eigenwerte. Wenn wir $R_{\frac{\pi}{4}}$ als eine **komplexe** Abbildung $R_{\frac{\pi}{4}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ betrachten (und dies ist unsere Vereinbarung, wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird), ist $R_{\frac{\pi}{4}}$ nicht mehr als eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ zu interpretieren.

• Das charakteristische Polynom hat reelle Koeffizienten. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass das charakteristische Polynom über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerlegbar ist und dass die komplexen Nullstellen in Paaren von konjugiert komplexen Zahlen vorkommen. D.h. ist $a + bi$ eine Nullstelle des reellen Polynoms $p$, so ist auch $a - bi$ eine Nullstelle von $p$. (*Achtung!* Polynome mit komplexen Koeffizienten sind auch in Linearfaktoren zerlegbar. Die Nullstellen müssen aber nicht in konjugierten Paaren vorkommen. Betrachte zum Beispiel das Polynom $p(z) = z - i$ mit der einzigen Nullstelle $z_1 = i$.)

Um die **Eigenräume** $V_{\lambda_i}, i = 1, 2$, zu bestimmen, muss **Kern**$(R_{\frac{\pi}{4}} - \lambda_i I_2)$ berechnet werden.

$$\boxed{\lambda_1} \quad \operatorname{Kern}(R_{\frac{\pi}{4}} - \lambda_1 I_2) = \operatorname{Kern}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Gauß anwenden:

$$\begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2i}{\sqrt{2}}\mathrm{I},\ \frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{II}} \begin{bmatrix} -i^2 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(KV: $x_1$, NKV: $x_2$)

$$\begin{aligned} x_1 &= ix_2 \\ x_2 &= r \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$V_{\lambda_1} = \left\{ r \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{C} \right\}$ ist der Eigenraum zum EW $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{\lambda_2}$ $\quad \operatorname{Kern}(R_{\frac{\pi}{4}} - \lambda_2 I_2) = \operatorname{Kern}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Gauß anwenden:

$$\begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2i}{\sqrt{2}}\mathrm{I},\ \frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{II}} \begin{bmatrix} -i^2 & i \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(KV: $x_1$, NKV: $x_2$)

$$x_1 = -ix_2$$
$$x_2 = s \in \mathbb{C}$$

$V_{\lambda_2} = \left\{ s \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\}$ ist der Eigenraum zum EW $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$.

**4. Aufgabe** (Lerncheck)

Gegeben sei die Drehung $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von $R_\varphi$ für ein allgemeines $\varphi \in\, ]0, \pi[\,$.

Training in der MUMIE: „Charakteristisches Polynom für Schwingungsgleichung“

## 11.3 Verbindung mit darstellenden Matrizen

In diesem Abschnitt betrachten wir endlich-dimensionale Vektorräume $V$ über dem Körper $\mathbb{K}$ und lineare Abbildungen $L : V \to V$.

Seien $A, S \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $S$ invertierbar.

- $p_A(z) = p_{A^T}(z)$, wobei $A^T$ die zu $A$ transponierte Matrix ist (vgl. Laplace'scher Entwicklungssatz).
- $p_A(z) = p_{SAS^{-1}}(z)$.

Wenn $S$ als die Transformationsmatrix beim Basiswechsel interpretiert wird, bekommen wir die folgende Aussage.

**Satz** (charakteristisches Polynom und darstellende Matrizen)

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit den zwei gegebenen Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$. Ist $L : V \to V$ eine lineare Abbildung mit den darstellenden Matrizen $L_{\mathcal{B}_1}$ und $L_{\mathcal{B}_2}$ bzgl. der Basen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, dann gilt $p_{L_{\mathcal{B}_1}}(z) = p_{L_{\mathcal{B}_2}}(z)$ (weil $L_{\mathcal{B}_2} = SL_{\mathcal{B}_1}S^{-1}$).

Der Satz besagt, dass das charakteristische Polynom invariant unter Basiswechsel ist, d.h. das charakteristische Polynom von $L : V \to V$ ist unabhängig von der Wahl der Basis. So können wir das charakteristische Polynom nicht nur für Matrixabbildungen sondern auch für allgemeine lineare Abbildungen definieren. Der Trick liegt darin, über eine darstellende Matrix der Abbildung zu gehen.

**Definition** (charakteristisches Polynom eines allgemeinen Vektorraums)

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Das **charakteristische Polynom** einer linearen Abbildung $L : V \to V$ bzgl. einer Basis $\mathcal{B}$ von $V$ ist das charakteristische Polynom von $L_{\mathcal{B}}$, die darstellende Matrix von $L$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$, d.h. $p_L(z) := \det(L_{\mathcal{B}} - zI_n)$.

**Beispiel** (charakteristisches Polynom; Eigenwerte)

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte der linearen Abbildung

$$L: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 3}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \\ p & \mapsto & x \cdot p' \end{array}.$$

Benutzen Sie dazu die Basis $\mathcal{B} := \{x^3, x^2, x, 1\}$.

Die darstellende Matrix ist $L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (Warum?) Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} p_{L_{\mathcal{B}}}(z) = \det(L_{\mathcal{B}} - zI_4) &= \det \begin{bmatrix} 3-z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \\ &= (3-z)(2-z)(1-z)(-z). \end{aligned}$$

Die EW sind die Nullstellen von $p_{L_{\mathcal{B}}}(z)$: $3, 2, 1, 0$ (wie bei dem Beispiel auf Seite 122). Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $L_{\mathcal{B}}$. Wie kann man daraus die Eigenvektoren von $L$ bestimmen?

**Beispiel** (Eigenwerte und Eigenvektoren einer allgemeinen Abbildung)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von der linearen Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]; \quad ax + b \mapsto (-12a + 15b)x + (-10a + 13b)$.

Zuerst wählen wir eine „einfache“ Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ um eine Matrixdarstellung $L_{\mathcal{B}}$ zu bekommen. Nach dem Satz auf Seite 129 ist das charakteristische Polynom von $L_{\mathcal{B}}$ unabhängig von der Wahl der Basis, sodass die Eigenwerte der Matrix(abbildung) $L_{\mathcal{B}}$ (d.h. die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von der Matrix $L_{\mathcal{B}}$) auch die Eigenwerte von $L$ sind.

Darstellende Matrix bzgl. einer Basis:

Wir wählen $\mathcal{B} := \{x, 1\}$. Die darstellende Matrix der Abbildung $L$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ ist gegeben durch $L_{\mathcal{B}} := [L(x)_{\mathcal{B}} \quad L(1)_{\mathcal{B}}]$. D.h. die Spalten sind die Koordinatenvektoren von den Bildern der Basisvektoren. Für die Berechnung ist es nützlich, die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ sowie die Inverse $K_{\mathcal{B}}^{-1}$ zu bestimmen:

$$K_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2;\ ax + b \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto ax + b. \qquad \text{(Warum?)}$$

$$L(x) = -12x - 10$$

$$K_{\mathcal{B}}(-12x - 10) = \begin{bmatrix} -12 \\ -10 \end{bmatrix} \leftarrow \text{1. Spalte von } L_{\mathcal{B}}$$

$$L(1) = 15x + 13$$

$$K_{\mathcal{B}}(15x + 13) = \begin{bmatrix} 15 \\ 13 \end{bmatrix} \leftarrow \text{2. Spalte von } L_{\mathcal{B}}$$

Damit ist $L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -12 & 15 \\ -10 & 13 \end{bmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} p_L(z) = p_{L_{\mathcal{B}}} = \det(L_{\mathcal{B}} - zI_2) &= \det\left(\begin{bmatrix} -12-z & 15 \\ -10 & 13-z \end{bmatrix}\right) \\ &= (-12-z)(13-z) + 150 = z^2 - z - 6 = (z+2)(z-3). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $p_L(z)$ sind $\lambda_1 := -2$ und $\lambda_2 := 3$. Dies sind die EW der Matrix(abbildung) $L_{\mathcal{B}}$ und der linearen Abbildung $L$.

Eigenvektoren der linearen Matrixabbildung $L_{\mathcal{B}}$

Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ ein EV zum EW $\lambda_1 = -2$ und $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ein EV zum EW $\lambda_2 = 3$ von $L_{\mathcal{B}}$ ist.

Eigenvektoren der linearen Abbildung $L$

Ein EV zum EW $\lambda_1 = -2$ von $L$ ist $K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) = 3x+2$.

Ein EV zum EW $\lambda_2 = 3$ von $L$ ist $K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = x+1$.

## 11.4 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 11. Kapitel

**1. Aufgabe** $A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\0\\-5\end{bmatrix} = -5\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow -5$ ist der EW zum EV $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ von $A$.

$A\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} \Rightarrow 0$ ist der EW zum EV $\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ von $A$.

$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow 2$ ist der EW zum EV $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ von $A$.

**2. Aufgabe** (a) $\vec{b}_i$ Eigenvektor (EV) zu dem Eigenwert (EW) $\lambda_i$, $i = 1,2 \quad \Rightarrow \quad L(\vec{b}_i) = \lambda_i \vec{b}_i$:

$$L\left(\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}\right) = \mathbf{3}\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}, \qquad L\left(\begin{bmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{-1}\end{bmatrix}\right) = \mathbf{-2}\begin{bmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix}.$$

(b) Die $i$-te Spalte von $L_{\mathcal{B}}$ ist der Koordinatenvektor von $L(\vec{b}_i)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

$$L\left(\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix} = \mathbf{3}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \text{ 1. Spalte von } L_{\mathcal{B}} \text{ ist } \begin{bmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

$$L\left(\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix} = \mathbf{0}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} + \mathbf{(-2)}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \text{ 2. Spalte von } L_{\mathcal{B}} \text{ ist } \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-2}\end{bmatrix}.$$

Die darstellende Matrix von $L$ bzgl. $\mathcal{B}$ ist $\begin{bmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{bmatrix}$.

(c) Die $i$-te Spalte von $L_{\mathcal{B}_{\text{Std}}}$ ist der Koordinatenvektor von $L(\vec{e}_i)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_{\text{Std}}$. Dies ist $L(\vec{e}_i)$.

(1. Alternative:) Schreibe $\vec{e}_i$ als eine Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und benutze die Linearität von $L$.

$$\alpha_1\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{2}\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

führt zu dem LGS

$$\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

mit der erweiterten Koeffizientenmatrix (EKM) $\left[\begin{array}{cc|cc}-1 & 3 & 1 & 0\\2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$. In NZSF bringen:

$$\xrightarrow{\text{II}+2\text{I}} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\text{I},\, \frac{1}{5}\text{II}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I}+3\text{II}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \mathbf{\frac{1}{5}} & \mathbf{\frac{3}{5}} \\ 0 & 1 & \mathbf{\frac{2}{5}} & \mathbf{\frac{1}{5}} \end{array}\right].$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{\frac{1}{5}} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} + \mathbf{\frac{2}{5}} \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{\frac{3}{5}} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} + \mathbf{\frac{1}{5}} \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}L\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \frac{2}{5}L\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{12}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Verifizieren Sie, dass $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, sodass gilt $L_{\mathcal{B}_{\text{Std}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & -3 \\ \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix}$.

(2. Alternative) Benutze $L_{\mathcal{B}_{\text{Std}}} = K_{\mathcal{B}}^{-1} L_{\mathcal{B}} K_{\mathcal{B}}$ um einen Basiswechsel durchzuführen.

*Bemerkung*: $K_{\mathcal{B}}$ und $K_{\mathcal{B}}^{-1}$ sind Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2$, sodass jede als Matrixabbildung betrachtet werden kann.

$$K_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \text{ wobei } \alpha_1 \vec{\boldsymbol{b}}_{\mathbf{1}} + \alpha_2 \vec{\boldsymbol{b}}_{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

LGS aufschreiben:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} -\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & = & u \\ 2\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & v. \end{array}$$

EKM aufstellen und in NZSF bringen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & u \\ 2 & -1 & v \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}+2\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & u \\ 0 & 5 & 2u+v \end{array}\right] \xrightarrow{-\text{I},\, \frac{1}{5}\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -u \\ 0 & 1 & \frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I}+3\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5}u + \frac{3}{5}v \\ 0 & 1 & \frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v \end{array}\right].$$

$$K_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{5}u + \frac{3}{5}v \\ \frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

$K_{\mathcal{B}}^{-1}$ ermitteln:

$$K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = u\vec{\boldsymbol{b}}_{\mathbf{1}} + v\vec{\boldsymbol{b}}_{\mathbf{2}} = u\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

(Alternativ kann die Matrix $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ invertiert werden.)

$L_{\mathcal{B}_{\text{Std}}}$ bestimmen:

$$L_{\mathcal{B}_{\text{Std}}} = K_{\mathcal{B}}^{-1} L_{\mathcal{B}} K_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix}.$$

(Wie sieht das kommutative Diagramm aus? Schauen Sie notfalls wieder die Beispiele zum 7. Kapitel an.)

(d) $L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a - 3b \\ 2a + 4b \end{bmatrix}$

**3. Aufgabe** Ergebnis zur Kontrolle

Eigenwerte: $0, -1, 3$

Eigenräume: $V_{\lambda_1=0} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}-4\\2\\1\end{bmatrix}\right\},\ V_{\lambda_2=-1} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\},\ V_{\lambda_3=3} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$

**4. Aufgabe** Weil $\varphi$ zwischen 0 und $\pi$ liegt, gilt $0 < \sin\varphi < 1$.

*Bemerkung*: $R_\varphi$ dreht die Vektoren in der Ebene um einen positiven Winkel kleiner als $\pi$, sodass wir wiederum nur komplexe EW zu erwarten sind.

Das charakteristische Polynom $p_{R_\varphi}(z)$ ist gegeben durch

$$\det(R_\varphi - zI_2) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - z & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - z \end{vmatrix} = (\cos\varphi - z)^2 + \sin^2\varphi$$

$$= z^2 - (2\cos\varphi)z + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = z^2 - (2\cos\varphi)z + 1.$$

Die EW von $R_\varphi$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_{1/2} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm \sqrt{-\sin^2\varphi},$$

$$\overset{\sin\varphi>0}{\Rightarrow} \qquad \lambda_1 = \cos\varphi + i\,\sin\varphi, \quad \lambda_2 = \cos\varphi - i\,\sin\varphi.$$

Der Eigenraum zum EW $\lambda_1$ ist Kern$(R_\varphi - \lambda_1 I_2)$ :

$$\text{Kern}\begin{bmatrix} \cos\varphi - (\cos\varphi + i\,\sin\varphi) & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - (\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \end{bmatrix} = \text{Kern}\begin{bmatrix} -i\,\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\,\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Mit der Information $\sin\varphi \neq 0$ wenden wir Gauss an:

$$\begin{bmatrix} -i\,\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\,\sin\varphi \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{i}{\sin\varphi}\text{I}, \frac{1}{\sin\varphi}\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{mit} \begin{array}{ll} \text{KV:} & x_1 = ix_2, \\ \text{NKV:} & x_2 = r \in \mathbb{C}. \end{array}$$

$V_{\lambda_1} = \left\{ r \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \mid r \in \mathbb{C} \right\}$ ist der Eigenraum zum EW $\lambda_1 = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$.

Analog ist der Eigenraum zum EW $\lambda_2 = \cos\varphi - i\,\sin\varphi$ gegeben durch $V_{\lambda_2} = \left\{ s \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$.

# 12 Diagonalisierbarkeit von Matrizen

## 12.1 Motivation und Definition

Rechnen mit Diagonalmatrizen ist leicht. Vergleiche:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6561 & 0 \\ 0 & \frac{1}{256} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^8 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^2 \\ = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} -49 & -130 \\ 65 & 146 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -49 & -130 \\ 65 & 146 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -49 & -130 \\ 65 & 146 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6049 & -12610 \\ 6305 & 12866 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Ziel*: Sei $V$ ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{K}$. Für eine gegebene lineare Abbildung $L : V \to V$ wähle (falls möglich) eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ so aus, dass die darstellende Matrix der Abbildung $L$ bzgl. $\mathcal{B}$ eine Diagonalmatrix ist.

*Frage:* Welche Basis ist „richtig“ ?

*Antwort:* Falls der Vektorraum $V$ eine **Eigenbasis** (Basis von Eigenvektoren) $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ von $L$ besitzt, d.h. $L(\vec{b}_i) = \lambda_i \vec{b}_i, i = 1, \ldots, n$, dann ist $A$ **diagonalisierbar** (und umgekehrt) ! Die **alg VFH** und die **geom VFH** von jedem Eigenwert müssen im Fall einer Eigenbasis von $L$ **übereinstimmen**. (Falls es eine Eigenbasis von $L$ gibt, gibt es unendlich viele Eigenbasen. Deshalb gibt es eigentlich mehrere „richtigen“ Eigenbasen.)

Warum ist dies so? Die Spalten der Matrix $D := L_{\mathcal{B}}$ sind einerseits $D\vec{e}_i$. Andererseits ist die $i$-te Spalte von $D$

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_i))) &= K_{\mathcal{B}}(L(\vec{b}_i)) \\ &= K_{\mathcal{B}}(\lambda_i \vec{b}_i) \\ &= \lambda_i \vec{e}_i, \end{aligned}$$

wie aus dem folgenden kommutativen Diagramm abzulesen ist (vgl. mit 7. Kapitel):

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_{\mathcal{B}}=D"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Die Matrix $D$ ist dann die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen: $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Insbesondere können wir aus dem erweiterten kommutativen Diagramm die einfache Formel $A = SDS^{-1}$ ablesen, wobei $A$ die zu $L$ zugehörige Matrix und $D$ die darstellende Matrix bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ sind:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \arrow[ddl, "K_{\mathcal{B}_{\text{Std}}}=I_{\mathbb{K}^n}"'] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] \arrow[ddr, "K_{\mathcal{B}_{\text{Std}}}=I_{\mathbb{K}^n}"] & \\ & \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_{\mathcal{B}}=D"'] \arrow[dl, "S"] & \mathbb{K}^n \arrow[dr, "S"'] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[rrr, "L_{\mathcal{B}_{\text{Std}}}=A"'] & & & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Hierbei ist $I_{\mathbb{K}^n}$ die Identitätsabbildung $I_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n; \vec{v} \to \vec{v}$. Die Transformationsmatrix $S$ beim Basiswechsel von der Basis $\mathcal{B}$ zur Basis $\mathcal{B}_{\text{Std}}$ enthält die Eigenvektoren zu der linearen Abbildung $A$, da die $i$-te Spalte von $S$ ist

$$S\vec{e}_i = K_{\mathcal{B}_{\text{Std}}}(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_i)) = K_{\mathcal{B}_{\text{Std}}}(\vec{b}_i) = \vec{b}_i.$$

**Definition** (Diagonalisierbarkeit)

Seien $V$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $L : V \to V$ eine lineare Abbildung. $L$ heißt diagonalisierbar, falls $V$ eine Eigenbasis von $L$ besitzt.

*Bemerkung:* Die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit von der Eigenwerte müssen jeweils übereinstimmen.

**Beispiel** (Diagonalisierung)

Ist die Matrix(abbildung) $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ diagonalisierbar (d.h. hat $A$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren)? Falls ja, welche Basis $\mathcal{B}$ könnte gewählt werden, sodass die darstellende Matrix $D := A_{\mathcal{B}}$ von $A$ bezüglich $\mathcal{B}$ diagonal ist?

1. Schritt: Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

**char Pol:** $p_A(z) = \det(A - zI) = \begin{vmatrix} 1-z & -2 \\ 1 & 4-z \end{vmatrix} = (1-z)(4-z) + 2 = z^2 - 5z + 6 = (z - \mathbf{2})(z - \mathbf{3})$

**Eigenwerte:** $p_A(z) = (z-2)(z-3) = 0$, also $\boldsymbol{\lambda_1 := 2}, \boldsymbol{\lambda_2 := 3}$

Die Matrix $A$ hat paarweise verschiedene EW, d.h. (alg VFH von $\lambda_i$) = (geom VFH von $\lambda_i$) = 1 für $i = 1, 2$, sodass es eine Basis von $\mathbb{C}^2$ aus EV von $A$ existiert. Also ist $A$ diagonalisierbar.
Eigenvektoren:

- zu $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$

$$\operatorname{Kern} \begin{bmatrix} 1-2 & -2 \\ 1 & 4-2 \end{bmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die EV zu $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$ sind span $\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \setminus \{\vec{0}\}$.

- zu $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$

$$\operatorname{Kern} \begin{bmatrix} 1-3 & -2 \\ 1 & 4-3 \end{bmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die EV zu $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$ sind span$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} \right\} \setminus \{\vec{0}\}$.

2. Schritt: Basis definieren

$\begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sind linear unabhängige EV (weil sie EV zu verschiedenen EW sind). Jede Basis von $\mathbb{C}^2$ enthält 2 Vektoren ($\dim \mathbb{C}^2 = 2$), sodass $\mathcal{B} := \left\{ \boldsymbol{\vec{b}_1 :=} \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{C}^2$ ist, die aus Eigenvektoren (von $A$) besteht.

3. Schritt: Darstellende Matrix $A_{\mathcal{B}}$ bestimmen

Die Koordinatenvektoren vom Bild der Basisvektoren sind die Spalten von $A_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} A\begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} &= \mathbf{2}\begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{2}\boldsymbol{\vec{b}_1} + 0\vec{b}_2 \Rightarrow [A\boldsymbol{\vec{b}_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= \mathbf{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{\vec{b}_1} + \mathbf{3}\vec{b}_2 \Rightarrow [A\vec{b}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \Rightarrow A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 \\ 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix}.$$

*Allgemeine Situation:* Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ die darstellende Matrix einer linearen Abbildung bzgl. einer Basis, wobei $A$ $n$ linear unabhängige EV $\vec{b}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{n}}$ zu den (nicht unbedingt verschiedenen) EW $\boldsymbol{\lambda_1}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_n}$ hat. Definiere die Basis $\mathcal{B} := \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ und die Matrix $S := \left[\vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{1}} \cdots \vec{b}_n\right]$. Dann ist $S$ invertierbar (warum?) und mit $D = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{\lambda_1}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_n}\}$ gilt: $D = S^{-1}AS$ und $A = SDS^{-1}$.

**Beispiel** (*nicht*-diagonalisierbare Matrix)

Zeigen Sie, dass die Matrix $C := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ nicht diagonalisierbar ist.

**char Pol:** $p_C(z) = (z-3)^2$

**EW:** $\lambda_{1/2} = 3$ (alg VFH von $\lambda_{1/2}$ ist 2)

**ER:** $V_{\lambda_{1/2}} = \operatorname{Kern}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{\vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ (geom VFH von $\lambda_{1/2}$ ist 1)

**Gesucht:** einen zu $\vec{b}_1$ linear unabhängigen Vektor $\vec{b}_2$, sodass der Koordinatenvektor von $\vec{b}_2$ bzgl. $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ die Form $[C\vec{b}_2]_{\{\vec{b}_1,\vec{b}_2\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ hat, d.h. $C\vec{b}_2 = \alpha\vec{b}_2$, sodass $\vec{b}_2$ ein zu $\vec{b}_1$ linear unabhängiger Eigenvektor ist. So ein $\vec{b}_2$ gibt es aber nicht!

## 12.2 Diagonalisierung, Eigenvektoren und Eigenwerte

**Satz** (Diagonalisierbarkeit und Eigenvektoren)

$A \in \mathbb{C}^{n,n}$ **diagonalisierbar**

$\Leftrightarrow$ Die Matrixabbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ hat eine **Basis von Eigenvektoren**.

$\Leftrightarrow$ Für jeden EW $\lambda$ der Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ gilt **(alg VFH $\lambda$) = (geom VFH $\lambda$)**.

$\Leftrightarrow$ Es existiert eine **invertierbare Matrix** $S \in \mathbb{C}^{n,n}$ (die Spalten der quadratischen Matrix $S$ sind linear unabhängige Eigenvektoren) mit $D := S^{-1}AS$ diagonal.

## 12.3 Algorithmus zur Berechnung der Diagonalisierung

**Algorithmus** (Diagonalisierung von Matrizen)

**Input:** $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

**Output:** Diagonalmatrix $D$ (falls dies existiert) und eine diagonalisierende Matrix $S \in \mathbb{C}^{n,n}$

**1. Schritt:** Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Eigenvektoren (bzw. Eigenräume) von $A$ berechnen.

**2. Schritt:** Falls alg VFH = geom VFH für alle $\lambda_i$, Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von $A$ wählen.

(Falls nicht, ist $A$ nicht diagonalisierbar – abbrechen!)

**3. Schritt:** $D = S^{-1}AS$, wobei die Eigenwerte an der Diagonalen von $D$ stehen und die Eigenvektoren in $\mathcal{B}$ die Spalten von $S$ in der entsprechenden Reihenfolge bilden.

*Bemerkung:* Ob man $S^{-1}$ bestimmt, hängt von der Fragestellung ab.

**Beispiel** (Diagonalisierbarkeit)

Prüfen Sie, ob die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie ggf. (invertierbare) Matrizen $S, S^{-1}$ sowie eine Diagonalmatrix $D$, sodass gilt $D = S^{-1}AS$.

**1. Schritt.** Eigenwerte (= Nullstellen von $p_A(z)$) berechnen:

$$p_A(z) = \det \begin{bmatrix} 1-z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 \\ 0 & 1 & -z \end{bmatrix} = (1-z)(z^2-1) = -(z-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}(z-(\mathbf{-1}))^{\mathbf{1}}$$

EW: $\boldsymbol{\lambda_{1/2} := 1}$, $\boldsymbol{\lambda_3 := -1}$.

Eigenräume berechnen:

$$V_{\boldsymbol{\lambda_{1/2}}} = \mathrm{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\}$$

$$V_{\boldsymbol{\lambda_3}} = \mathrm{Kern} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} \right\}$$

**2. Schritt:** VFH betrachten.

$\boldsymbol{\lambda_{1/2}}$ hat **alg VFH 2** (doppelte Nullstelle des char Pols) und geom VFH 2 (nach Konstruktion des Algorithmen „Basis des Kerns“ sind die zwei gegebenen Vektoren, die $V_{\lambda_{1/2}}$ aufspannen, linear unabhängig, d.h. $\dim V_{\boldsymbol{\lambda_{1/2}}} = 2$).

$\lambda_3$ hat **alg VFH 1** $\Rightarrow$ $\lambda_3$ hat geom VFH 1.

Die alg VFH und geom VFH jedes Eigenwerts von $A$ stimmen überein. Daraus folgt $A$ ist diagonalisierbar.

Wähle $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} \right\}$.

**3. Schritt:** Mit $S := \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$ ist $D = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$. $S$ kann mit dem folgenden Ansatz invertiert werden $S^{-1} : [S|I] \overset{\text{NZSF}}{\rightarrow} [I|S^{-1}]$. Dies ergibt $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

*Bemerkung:* Wählt man $\tilde{\mathcal{B}} := \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\}$, so ist $\tilde{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$, $\tilde{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$.

**(4. Schritt):** Ergebnis prüfen.

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

*Bemerkung:* $A = SDS^{-1} \Rightarrow p_A(z) = p_D(z)$

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Bestimmen Sie, ob $A := \begin{bmatrix} -16 & -14 & 0 \\ 21 & 19 & 0 \\ -21 & -14 & 5 \end{bmatrix}$ eine diagonalisierbare Matrix ist. Bestimmen Sie ggf. Matrizen $S, S^{-1}$ und $D$ diagonal, sodass $A = SDS^{-1}$.

**2. Aufgabe** (Lerncheck)

Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? Bestimmen Sie ggf. eine Diagonalmatrix $D$ und invertierbare Matrizen , $S, S^{-1}$, sodass $D = S^{-1}AS$.

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, C := \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

**3. Aufgabe** (Lerncheck)

Gegeben sei die Drehung $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

(a) Ist $R_\varphi$ diagonalisierbar für $\varphi = \frac{\pi}{4}$? Bestimmen Sie ggf. eine Diagonalisierung von $R_{\frac{\pi}{4}}$ (d.h. bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D$ und eine invertierbare Matrix $S$, sodass gilt $A = SDS^{-1}$).

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalisierung von $R_\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ für $\varphi \in ]0, \pi[$ .

Training in der MUMIE: „Markov Matrix“, „Trägheitstensor, Diagonalisierung“

*Bemerkung:* Der Begriff Diagonalisierung wurde in verschiedenen Semestern immer anders interpretiert. Manchmal war die Bestimmung von $S$ und $D$ die Rede, andersmal $S, D$ und $S^{-1}$. In diesem Kurs wird bei der Aufgabestellung klar gemacht, ob $S^{-1}$ auch zu bestimmen ist.

## 12.4 Rechnen mit diagonalisierbaren Matrizen

**Beispiel** (Rechnen mit diagonalisierbaren Matrizen)

Bestimmen Sie $A^8$ für $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ mit Hilfe der Diagonalisierung von $A$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^8 = (SDS^{-1})(SDS^{-1})\cdots(SDS^{-1}) &= SD^8S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 3^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 6561 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -256 & -256 \\ -6561 & -13122 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6049 & -12610 \\ 6305 & 12866 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Training in der MUMIE: „Polynom einer diagonalisierbaren Matrix“

Analog zur der Formel $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ aus der Analysis können wir eine Exponentialfunktion für Matrizen definieren.

**Definition** (Exponentialfunktion einer Matrix $A$)

Die Exponentialfunktion der quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist definiert als $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

*Bemerkungen:*

- Die Folge der partiellen Summen $\left( \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \right)_{N=0}^{\infty}$ konvergiert für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.
- Ist $A$ diagonalisierbar mit $D = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, so ist

$$e^A = S\boldsymbol{e^D}S^{-1} = S \begin{bmatrix} \boldsymbol{e^{\lambda_1}} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{e^{\lambda_n}} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(SDS^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SD^kS^{-1}}{k!} &= S \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) S^{-1} \\ &= S \left( \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} \right) S^{-1} \\ &= S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} S^{-1} = Se^DS^{-1} \end{aligned}$$

**Beispiel** (Exponentialfunktion)

Bestimmen Sie die Exponentialfunktion $e^A$ für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Eine Diagonalisierung von $A$ wurde in dem vorangehenden Beispiel schon gegeben.

$$\begin{aligned} e^A = Se^DS^{-1} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^2 & -e^2 \\ -e^3 & -2e^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^2 - e^3 & 2e^2 - 2e^3 \\ -e^2 + e^3 & -e^2 + 2e^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Training in der MUMIE: „Exponentialfunktion einer diagonalisierbaren Matrix“

## 12.5 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 12. Kapitel

### 1. Aufgabe

**EW**

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -16-\lambda & -14 & 0 \\ 21 & 19-\lambda & 0 \\ -21 & -14 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)[(-16-\lambda)(19-\lambda)-21(-14)]$$

$$=(5-\lambda)[\lambda^2-3\lambda-10]=-(\lambda-5)^2(\lambda+2)\overset{!}{=}0$$

$\lambda_{1/2}=5$ mit alg VFH 2, $\lambda_3=-2$ mit alg VFH 1

**ER**

$V_{\lambda_{1/2}=5}$

$$\text{Kern}(A-5I)=\text{Kern}\begin{bmatrix} -21 & -14 & 0 \\ 21 & 14 & 0 \\ -21 & -14 & 0 \end{bmatrix}=\text{Kern}\begin{bmatrix} -21 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\text{Kern}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$V_{\lambda_3=-2}$

$$\text{Kern}(A-(-2)I)=\text{Kern}\begin{bmatrix} -14 & -14 & 0 \\ 21 & 21 & 0 \\ -21 & -14 & 7 \end{bmatrix}=\text{Kern}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\text{Kern}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\text{Kern}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

**VFH**

$\lambda_{1/2}$ : geom. VFH $=\dim V_{\lambda_{1/2}}=2=$ alg VFH
$\lambda_3$ : geom. VFH $=\dim V_{\lambda_3}=1=$ alg VFH

$\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

**Basis und Diagonalisierung**

$$\mathcal{B}:=\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},\quad S=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(S^{-1}:[S|I]\xrightarrow{\text{NZSF}}[I|S^{-1}])\ S^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Antwort prüfen**

Ist $S^{-1}AS=D$?

$$S^{-1}AS=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -16 & -14 & 0 \\ 21 & 19 & 0 \\ -21 & -14 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}=D$$

### 2. Aufgabe

Die Eigenwerte einer Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, und diese sind bei oberen Dreiecksmatrizen genau die Einträge auf der Diagonalen. Ferner gilt $1\leq$ geom VFH $\lambda_i\leq$ alg VFH $\lambda_i$.

$\boxed{A}$ Die Eigenwerte von $A$ sind $\lambda_1:=2,\lambda_2:=-1,\lambda_3:=3,\lambda_4:=4$. Die alg VFH von jedem Eigenwert ist 1, sodass $1\leq$ geom VFH $\lambda_i\leq$ alg VFH $\lambda_i=1$, d.h. die geom VFH von jedem Eigenwert ist auch 1. Daraus folgt: $A$ ist diagonalisierbar.

Um eine diagonalisierende Matrix $S$ zu bestimmen, muss für jeden Eigenwert ein Eigenvektor gefunden werden.

$\boxed{\lambda_1}$ Ein Element von Kern$(A-2I)$ = Kern $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ist offensichtlich $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. (geom VFH $\lambda_1) = 1 = \dim V_{\lambda_1} \Rightarrow$ alle weiteren EV zu $\lambda_1$ liegen in span$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

$\boxed{\lambda_2}$ Ein Element von Kern$(A+I)$ = Kern $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ist $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Rechnen Sie nach, dass die NZSF der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist und berechnen Sie den Kern dieser Matrix.)

$\boxed{\lambda_3}$ Ein Element von Kern$(A-3I)$ = Kern $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (nachrechnen).

$\boxed{\lambda_4}$ Ein Element von Kern$(A-4I)$ = Kern $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist $\begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ (nachrechnen).

$A = SDS^{-1}$ mit $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

$\boxed{B, C}$

| EW $\lambda_i$ | alg VFH $\lambda_i$ | geom VFH $\lambda_i$ |
|---|---|---|
| $\lambda_{1/2} := 3$ | 2 | 1 oder 2 |
| $\lambda_3 := -1$ | 1 | 1 |
| $\lambda_4 := 4$ | 1 | 1 |

$\boxed{B}$ Die geom VFH von $\lambda_{1/2}$ ist die Dimension des Eigenraums $V_{\lambda_{1/2}}$ = Kern$(B - \lambda_{1/2}I)$.

$$\text{Kern}(B-\lambda_{1/2}I) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Kern}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{II}+\frac{4}{3}\text{ I,III}\leftrightarrow\text{IV}}{=} \text{Kern}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die ZSF von $B - \lambda_{1/2}I$ hat nur eine Nichtkopfvariable $(x_1)$ und deshalb ist die Dimension des Kerns von $B - \lambda_{1/2}I$ nur 1. Dies ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums:

$$(\text{geom VFH}\,\lambda_{1/2}) = \dim V_{\lambda_{1/2}} = 1 \neq 2 = (\text{alg VFH}\,\lambda_{1/2}).$$

Es existiert keine Basis des $\mathbb{R}^4$ von Eigenvektoren der Matrix $B$ und deshalb ist $B$ nicht diagonalisierbar.

$\boxed{C}$ Die geom VFH von $\lambda_{1/2}$ ist die Dimension des Eigenraums $V_{\lambda_{1/2}} = \mathrm{Kern}(C - \lambda_{1/2} I)$.

$$\mathrm{Kern}(C - \lambda_{1/2} I) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{NZSF}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{nachrechnen!}$$

$x_2 = 0, x_4 = 0, x_1, x_3$ beliebig $\Rightarrow V_{\lambda_{1/2}} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$,

sodass die geometrische Vielfachheit (= 2) von $\lambda_{1/2}$ mit der algebraischen Vielfachheit von $\lambda_{1/2}$ übereinstimmt. Von daher ist $C$ diagonalisierbar. Um eine diagonalisierende Matrix $S$ zu bestimmen, brauchen wir noch jeweils einen Eigenvektor zu den Eigenwerten $\lambda_3$ und $\lambda_4$:

$\boxed{\lambda_3}$

$$\mathrm{Kern}(C - \lambda_3 I) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Kern}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Rechnen Sie nach, dass $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ EV zum EW $\lambda_3 = -1$ ist.

$\boxed{\lambda_4}$

$$\mathrm{Kern}(C - \lambda_4 I) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Kern}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-\text{I}, -\frac{1}{5}\,\text{II}, -\text{III}}{=} \mathrm{Kern}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{I}+3\text{II}}{=} \mathrm{Kern}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = \frac{11}{5} x_4, x_2 = \frac{2}{5} x_4, x_3 = 0, x_4$ beliebig, mit $x_4 = 5$ ist $\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ein EV zum EW $\lambda_4 = 4$. $A = SDS^{-1}$ mit

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

**3. Aufgabe** (a) Die Eigenwerte (EW) der Matrix $R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_{R_{\frac{\pi}{4}}}(z) = \det(R_{\frac{\pi}{4}} - zI_2) = z^2 - \sqrt{2}z + 1$, die wir in einem Beispiel im Abschnitt 11.2 berechnet haben: $\boldsymbol{\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}}$, $\quad \boldsymbol{\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}}$.

*Bemerkung:* Weil es weder **reelle** Eigenwerte noch reelle Eigenvektoren gibt, ist die Matrix $R_{\frac{\pi}{4}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als reelle Abbildung nicht diagonalisierbar, denn es existiert keine Basis aus Eigenvektoren von $R_{\frac{\pi}{4}}$ in $\mathbb{R}^2$.

Wenn wir $R_{\frac{\pi}{4}}$ als eine **komplexe** Abbildung $R_{\frac{\pi}{4}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ betrachten, ist $R_{\frac{\pi}{4}}$ diagonalisierbar (im Komplexen), weil die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ paarweise verschieden sind.

Um $S$ zu bestimmen, muss jeder Eigenraum $V_{\lambda_i}, i = 1, 2$, bestimmt werden. Diese haben wir bereits im 11. Kapitel gerechnet:

$$V_{\boldsymbol{\lambda_1}} = \left\{ r \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mid r \in \mathbb{C} \right\} \text{ ist der Eigenraum zum EW } \boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}},$$

$$V_{\boldsymbol{\lambda_2}} = \left\{ s \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\} \text{ ist der Eigenraum zum EW } \boldsymbol{\lambda_2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}}.$$

Wählt man (als Basis aus Eigenvektoren) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, so ist

$$S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & -i \\ \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix}$$

eine diagonalisierende Matrix. Die zugehörige Diagonalmatrix hat die Eigenwerte auf der Diagonalen:

$$D = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}} \end{bmatrix}.$$

(b) Das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren wurden bereits im ersten Beispiel zum 11. Kapitel bestimmt:

$$p_{R_\varphi}(z) = z^2 - (2\cos\varphi)z + 1.$$

$$\text{EW:} \quad \boldsymbol{\lambda_1 = \cos\varphi + i\,\sin\varphi}, \quad \boldsymbol{\lambda_2 = \cos\varphi - i\,\sin\varphi}$$

$$\text{ER:} \quad V_{\boldsymbol{\lambda_1}} = \left\{ r \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mid r \in \mathbb{C} \right\} \quad V_{\boldsymbol{\lambda_2}} = \left\{ s \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

Eine Diagonalisierung von $R_\varphi$ (als eine komplexe Matrix aufgefasst) ist also:

$$S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & -i \\ \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\cos\varphi + i\sin\varphi} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\cos\varphi - i\sin\varphi} \end{bmatrix}.$$

# 13 Lineare Differentialgleichungen

## 13.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Definition** (lineare Differentialgleichung)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine (quadratische) Matrix. Dann heißt

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = A\vec{y}(\cdot)$$

eine **homogene lineare Differentialgleichung** (DGL) 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

**Definition** (**Anfang**swertproblem)

Gegeben seien $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\boldsymbol{t_0} \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{\vec{y}_0} \in \mathbb{K}^n$.

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = A\vec{y}(\cdot), \quad \vec{y}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{\vec{y}_0}$$

heißt **Anfangswertproblem** (AWP) der linearen DGL mit den Anfangsdaten $\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{\vec{y}_0}$.

**Ziel**: Exponentialmethode entwickeln, um das Anfangswertproblem zu lösen. Diese Methode basiert auf dem folgenden Satz.

**Satz** (Lösung des Anfangswertproblems mit der Exponentialmethode (Exp-Methode))

Das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = A\vec{y}(\cdot), \quad \vec{y}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{\vec{y}_0}$ hat die eindeutig für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{(t-\boldsymbol{t_0})A}\boldsymbol{\vec{y}_0}.$$

Ist $A$ diagonalisierbar mit $A = S\boldsymbol{D}S^{-1}$, so gilt $e^{tA} = Se^{t\boldsymbol{D}}S^{-1}$. Die Lösung des AWPs ist gegeben durch

$$\vec{y}(t) = Se^{(t-\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{D}}S^{-1}\boldsymbol{\vec{y}_0}.$$

**Beispiel** (AWP mit $A$ diagonalisierbar)

Lösen Sie das AWP $\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = A\vec{y}(\cdot), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{t_0 = 4}, \boldsymbol{\vec{y}_0} = \vec{y}(\boldsymbol{4}) = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}$.

Nach dem Satz hat das AWP die eindeutige Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{(t-\boldsymbol{4})\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}.$$

Gesucht ist die Diagonalisierung von $A$, falls diese existiert.

Da $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, sind die EW von $A$ die Einträge auf der Diagonalen:

$$\lambda_1 := 2, \lambda_2 := -1.$$

Die Matrix $A$ hat paarweise verschiedene EW, also ist $A$ diagonalisierbar mit $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$. Es bleibt $S, S^{-1}$ zu berechnen, indem wir eine Eigenbasis auswählen. Die Eigenräume sind

$$V_{\lambda_1} = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad V_{\lambda_2} = \text{Kern} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Wähle die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ und setze $S := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Eine Nebenrechnung ergibt $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Setze die Information in die Lösungsformel ein:

$$
\begin{aligned}
\vec{y}(t) = e^{(t-\mathbf{4})\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix} &= Se^{(t-4)\boldsymbol{D}} S^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{(t-4)\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 2(t-4) & 0 \\ 0 & -1(t-4) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2(t-4)} & 0 \\ 0 & e^{-1(t-4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5e^{2(t-4)} \\ 6e^{-(t-4)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5e^{2(t-4)} - 2e^{-(t-4)} \\ 6e^{-(t-4)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Die eindeutige Lösung des AWPs ist $\boldsymbol{\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 5e^{2(t-4)} - 2e^{-(t-4)} \\ 6e^{-(t-4)} \end{bmatrix}}$.

Die Lösung kann so geprüft werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = (\boldsymbol{\vec{y}(t)})' &= \begin{bmatrix} 10e^{2(t-4)} + 2e^{-(t-4)} \\ -6e^{-(t-4)} \end{bmatrix} && \text{[nach der Kettenregel]} \\
A\boldsymbol{\vec{y}(t)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5e^{2(t-4)} - 2e^{-(t-4)} \\ 6e^{-(t-4)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10e^{2(t-4)} + 2e^{-(t-4)} \\ -6e^{-(t-4)} \end{bmatrix} && \text{[Matrixmultiplikation]}
\end{aligned}
$$

Die beiden Seiten der DGL stimmen überein.

**1. Aufgabe** (Lerncheck)

Gegeben sei die Matrix $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$ mit $\varphi \in ]0, \pi[$ . Bestimmen Sie die Lösung der DGL $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = R_\varphi \vec{y}(t)$ mit dem Anfangswert $\vec{y}_0 = \vec{y}(3) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Benutzen Sie dazu die Diagonlisierung $S = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \cos\varphi + i\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi - i\sin\varphi \end{bmatrix}$ aus dem 12. Kapitel.

**Beispiel** (AWP mit EV als Anfangswert)

Lösen Sie das AWP

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = A\vec{y}(\cdot), \quad \vec{y}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{\vec{y}_0}$$

für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{t_0 = 4}$ aber diesmal mit $\boldsymbol{\vec{y}_0} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ einem EV zum EW $\boldsymbol{\lambda_2 = -1}$.

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= Se^{(t-\mathbf{4})\boldsymbol{D}}S^{-1}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2(t-4)} & 0 \\ 0 & e^{-(t-4)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2(t-4)} & 0 \\ 0 & e^{-(t-4)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-(t-4)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{-(t-4)} \\ 1e^{-(t-4)} \end{bmatrix} \\
&= e^{\mathbf{-1}(t-\mathbf{4})}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{c} \text{EV} \\ \text{zu } \boldsymbol{\lambda_2} \end{array} \\
&= e^{\boldsymbol{\lambda_2}(t-\boldsymbol{t_0})}\boldsymbol{\vec{y}_0}
\end{aligned}$$

**Satz** (AWP mit Eigenvektor-Methode)

1) Ist $\boldsymbol{\vec{y}_0}$ ein **Eigenvektor** zum Eigenwert $\boldsymbol{\lambda}$ der Matrix $A$, dann ist

$$\vec{y}(t) = e^{\boldsymbol{\lambda}(t-\boldsymbol{t_0})}\boldsymbol{\vec{y}_0}$$

die Lösung des AWPs $\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = A\vec{y}(\cdot), \quad \vec{y}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{\vec{y}_0}$.

2) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ EV zu den EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und $\vec{y}_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$, dann ist

$$\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)}\vec{v}_i$$

die Lösung des AWPs $\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = A\vec{y}(\cdot), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$.

*Bemerkung:* Der Satz ist auch für nicht-diagonalisierbare Matrizen gültig.

**2. Aufgabe** (Lerncheck)

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = A\vec{y}(t)$, $\boldsymbol{\vec{y}_0} = \vec{y}(\boldsymbol{t_0})$ mit $A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ und

(a) $\vec{y}(17) = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, (mit der Exp-Methode)

(b) $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, (mit der EV-Methode)

(c) $\vec{y}(\mathbf{7}) = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$. (Der Anfangswert ist eine offensichtliche Linearkombination von EV)

Training in der MUMIE: „Anfangswertproblem lösen“, „Anfangswertproblem“ (konzeptionell)

**Algorithmus** (Lösen von AWPs - Zusammenfassung)

Um die DGL $\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = A\vec{y}(\cdot), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ mit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ zu lösen, betrachte die Matrixabbildung

$$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}.$$

1. Schritt. Ist eine Darstellung von $\vec{y}_0$ als eine Linearkombination von EV von $A$ bekannt oder einfach zu rechnen? Falls nicht gehe zum 2. Schritt. Sonst berechne die Lösung:

Ist $\vec{y}_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$ mit $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ EV zu den EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, so gilt

$$\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)} \alpha_i \vec{v}_i.$$

Insbesondere für $\vec{y}_0$ EV zum EW $\lambda_i$ gilt

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)} \vec{y}_0.$$

Algorithmus abbrechen.

2. Schritt. Ist $A$ nicht diagonalisierbar, gehe zum 3. Schritt. Sonst diagonalisiere die Matrix $A$ im Komplexen $\left(A = SDS^{-1}\right)$. Berechne für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= Se^{(t-t_0)D} S^{-1} \vec{y}_0 \\ &= S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix} S^{-1} \vec{y}_0. \end{aligned}$$

Algorithmus abbrechen.

3. Schritt. Berechne die Lösung mit Hilfe der Exponentialfunktion der Matrix $A$.

**Beispiel** (AWP mit nicht diagonalisierbarer Matrix)

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt **nilpotent**, falls gilt $A^k = \mathbf{0}$ (mit $\mathbf{0}$ die Nullmatrix) für ein $k \geq 1$.
(a) Zeigen Sie, dass eine nilpotente Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $A \neq \mathbf{0}$ und $A^k = \mathbf{0}$ für ein $k \geq 2$ den Eigenwert 0 mit der alg VFH $n$ hat. Kann die geom VFH des Eigenwerts 0 $n$ sein? Ist $A$ diagonalisierbar?

(b) Verifizieren Sie, dass die Matrix $B := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ eine nilpotente Matrix ist. Bestimmen Sie $e^{(t-t_0)B}$ und lösen Sie das AWP $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \ \vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$. Prüfen Sie Ihre Antwort.

(a) Ist $\lambda$ ein EW von $A$ und $\lambda \neq 0$, so existiert ein EV $\vec{x} \neq \vec{0}$ zum EW $\lambda$. Einerseits gilt

$$A^k\vec{x} = A^{k-1}(A\vec{x}) = A^{k-1}(\lambda\vec{x}) = A^{k-2}A(\lambda\vec{x}) = A^{k-2}(\lambda A\vec{x}) = A^{k-2}(\lambda^2\vec{x}) = \cdots = \lambda^k\vec{x} \neq \vec{0}.$$

Andererseits weil $A$ nilpotent ist, gilt

$$A^k\vec{x} = \mathbf{0}\vec{x} = \vec{0}.$$

Weil dies ein Widerspruch ergibt, muss die Annahme, dass der EW $\lambda$ ungleich $0$ ist, falsch sein. Weil jede Matrix in $\mathbb{C}^{n,n}$ $n$ EW über den komplexen Zahlen hat, muss der EW $\lambda = 0$ $n$ mal vorkommen (entspricht alg VFH $n$).

Der Eigenraum zu dem Eigenwert $\lambda = 0$ ist durch den Kern von $A - 0I = A$ gegeben. Die Dimension des

Kerns von $A$ ist deshalb die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 0$.

$$A \neq \mathbf{0} \Rightarrow \text{Rang}(A) \geq 1,$$

d.h. die Anzahl der Nichtkopfvariablen (= dim Kern($A$)) ist $\leq n-1$. Daraus folgt (geom VFH von $\lambda = 0$)$< n$, sodass gilt

$$(\text{alg VFH von } \lambda = 0) \neq (\text{geom VFH von } \lambda = 0);$$

d.h. $A$ ist nicht diagonalisierbar.

(b) Für $B := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sodass $B$ eine nilpotente Matrix ist.

Aus (a) folgt, $B$ ist nicht diagonalisierbar. Ferner gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$B\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix},$$

sodass $\vec{y}_0$ kein Eigenvektor ist. Von daher können wir die Sätze aus den obigen Beispielen nicht anwenden. Wir wissen nur, dass die Lösung des AWPs

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t),\ \vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)B}\vec{y}_0$$

gegeben ist. Wir rechnen zuerst $e^{(t-t_0)B} = e^{(t-2)B}$. Nach der Definition ist

$$\begin{aligned} e^{(t-2)B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((t-2)B)^k \\ &= \tfrac{1}{0!}((t-2)B)^0 + \tfrac{1}{1!}((t-2)B)^1 + \tfrac{1}{2!}((t-2)B)^2 + \tfrac{1}{3!}((t-2)B)^3 + \cdots \\ &= \tfrac{1}{1}I + \tfrac{1}{1}(t-2)B + \tfrac{1}{2}(t-2)^2B^2 + \tfrac{1}{6}(t-2)^3B^3 + \cdots . \end{aligned}$$

Aber $B^2 = \mathbf{0}$ und für $k \geq 3$ gilt $B^k = B^2B^{k-2} = \mathbf{0}B^{k-2} = \mathbf{0}$. Von daher gilt

$$e^{(t-2)B} = I + (t-2)B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t-2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des AWPs ist

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)B}\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 & t-2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-5(t-2) \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5t+13 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Wir prüfen das Ergebnis:

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} (-5t+13)' \\ (-5)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5t+13 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die DGL $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t)$ ist erfüllt.

**3. Aufgabe** (Lerncheck)

Zeigen Sie, dass die Matrix $C := \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nilpotent ist. Lösen Sie das AWP

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = C\vec{y}(t),\ \vec{y}_0 = \vec{y}(5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

## 13.2 DGL 2. Ordnung - Reduktion auf einer DGL 1. Ordnung (Linearisierung)

**Beispiel** (Linearisierung der Newtonischen Gleichung)

Linearisieren Sie die Newtonische Gleichung für das Federpendel der Frequenz $\omega > 0$:

$$\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2}(\cdot) + \omega^2 x(\cdot) = 0.}$$

Hierbei ist $x(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit $t$.

Die Ableitung der Substitution $\vec{y}(t) := \begin{bmatrix} \omega x(\cdot) \\ \frac{dx}{dt}(\cdot) \end{bmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = \begin{bmatrix} \omega \frac{dx}{dt}(\cdot) \\ \boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2}(\cdot)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega \frac{dx}{dt}(\cdot) \\ \boldsymbol{-\omega^2 x(\cdot)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega x(\cdot) \\ \frac{dx}{dt}(\cdot) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \vec{y}(\cdot). \end{aligned}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(\cdot) + \omega^2 x(\cdot) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \vec{y}(\cdot)$$

Die rechte Seite ist eine DGL 1. Ordnung, die durch die Exp-Methode gelöst werden kann.

*Bemerkungen:*

- Die Substitution ist vielleicht nicht offensichtlich. Es wird in diesem Kurs nicht erwartet, dass Sie sich eine andere Substitution ausdenken müssen. Nur dieser „Trick“ ist relevant.
- Das Symbol $\omega$ ist das griechische Buchstabe omega.

**Beispiel** (Newtonische Gleichung)

Lösen Sie die Newtonische Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}(\cdot) + \omega^2 x(\cdot) = 0$$

mit $t_0 = 0, \vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Die Linearisierung der Differentialgleichung $\frac{d^2x}{dt^2}(\cdot) + \omega x(\cdot) = 0$ ist wie in dem obigen Beispiel durch $\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \vec{y}(\cdot)$ gegeben.

Die Eigenwerte der Matrix $A := \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$ sind $\lambda_1 = +\omega i, \lambda_2 = -\omega i$. Diese sind paarweise verschieden, weil nach Annahme $\omega > 0$ ist. Daraus folgt, dass $A$ diagonalisierbar ist. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$V_{\lambda_1} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}, \; V_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}.$$

Mit der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$ bekommen wir $A = SDS^{-1}$ für die Matrizen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \omega i & 0 \\ 0 & -\omega i \end{bmatrix}, S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

Für $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^2$ ist die eindeutige Lösung des AWPs

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \vec{y}(\cdot), \quad \vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

durch $\vec{y}(t) = Se^{tD}S^{-1}\vec{y}_0$ gegeben. Wir berechnen zuerst $Se^{tD}S^{-1}$ :

$$\begin{aligned} Se^{tD}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\omega ti} & 0 \\ 0 & e^{-\omega ti} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{\omega ti} & e^{-\omega ti} \\ ie^{\omega ti} & -ie^{-\omega ti} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{\omega ti}+e^{-\omega ti}}{2} & \frac{-ie^{\omega ti}+ie^{-\omega ti}}{2} \\ \frac{ie^{\omega ti}-ie^{-\omega ti}}{2} & \frac{e^{\omega ti}+e^{-\omega ti}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{\omega ti}+e^{-\omega ti}}{2} & \frac{e^{\omega ti}-e^{-\omega ti}}{2i} \\ \frac{-(e^{\omega ti}-e^{-\omega ti})}{2i} & \frac{e^{\omega ti}+e^{-\omega ti}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(Die letzte Gleichung ist eine Definition aus der Analysis.) Somit ist die eindeutige Lösung des AWPs

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos(\omega t) & + & b\sin(\omega t) \\ -a\sin(\omega t) & + & b\cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Kehren wir nun zu einer DGL 1. Ordnung zurück.

**Beispiel** (AWP mit komplexen EW)

Lösen Sie das AWP

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(\cdot) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \vec{y}(\cdot), \ \vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Rechnen Sie die folgenden Ergebnisse nach:

Das charakteristische Polynom von $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ist $p_A(z) = z^2 + z + \frac{5}{4}$.

Die Eigenwerte von $A$ (oder Nullstellen von $p_A(z)$) sind $\lambda_1 := -\frac{1}{2} + i, \ \lambda_2 := -\frac{1}{2} - i$.

Die zugehörigen Eigenräume sind $V_{\lambda_1} := \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}, \ V_{\lambda_2} := \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$.

$A$ ist diagonalisierbar mit $A = SDS^{-1}$ für

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i \end{bmatrix}, \ S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

Die eindeutige Lösung ist

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t)=Se^{tD}S^{-1}\vec{y}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{t(-\frac{1}{2}+i)} & 0 \\ 0 & e^{t(-\frac{1}{2}-i)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^{-\frac{t}{2}}e^{ti}+e^{-\frac{t}{2}}e^{-ti}}{2} & i(\frac{-e^{-\frac{t}{2}}e^{ti}+e^{-\frac{t}{2}}e^{-ti}}{2}) \\ i(\frac{e^{-\frac{t}{2}}e^{ti}-e^{-\frac{t}{2}}e^{-ti}}{2}) & \frac{e^{-\frac{t}{2}}e^{ti}+e^{-\frac{t}{2}}e^{-ti}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= e^{\frac{-t}{2}}\begin{bmatrix} \frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2} & \frac{e^{ti}-e^{-ti}}{2i} \\ \frac{-(e^{ti}-e^{-ti})}{2i} & \frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= e^{\frac{-t}{2}}\begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= e^{\frac{-t}{2}}\begin{bmatrix} a\cos(t)+b\sin(t) \\ -a\sin(t)+b\cos(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Training in der MUMIE: „Schwingungsgleichung, Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, charakteristisches Polynom“

## 13.3 Lösungen bzw. Lösungsskizzen zu den Aufgaben im 13. Kapitel

**1. Aufgabe** Weil $R_\varphi$ diagonalisierbar ist, ist die eindeutige Lösung des AWPs (hier mit $t_0 = \mathbf{3}$ da $\vec{y}_0 = \vec{y}(\mathbf{3})$)

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t)=Se^{(t-t_0)D}S^{-1}\vec{y}_0 &= \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{(t-3)\begin{bmatrix} \cos\varphi+i\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi-i\sin\varphi \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{(t-3)(\cos\varphi+i\sin\varphi)} & 0 \\ 0 & e^{(t-3)(\cos\varphi-i\sin\varphi)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{7-5i}{2} \\ \frac{7+5i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{7-5i}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi+i\sin\varphi)} \\ \frac{7+5i}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi-i\sin\varphi)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{i(7-5i)}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}+\frac{(-i)(7+5i)}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi-i\sin\varphi)} \\ \frac{7-5i}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}+\frac{7+5i}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi-i\sin\varphi)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{5+7i}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}+\frac{5-7i}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi-i\sin\varphi)} \\ \frac{7-5i}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}+\frac{7+5i}{2}e^{(t-3)(\cos\varphi-i\sin\varphi)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**2. Aufgabe** $A$ ist eine obere Dreiecksmatrix, sodass die Eigenwerte auf der Diagonalen stehen.

$$\boxed{\text{EW: } \lambda_1 := 2, \lambda_2 := -1, \lambda_3 := 3, \lambda_4 := 4}$$

Die EW sind paarweise verschieden ⇒ Die alg VFH von jedem Eigenwert ist 1 ⇒ Die geom VFH von jedem Eigenwert ist auch 1. Daraus folgt $A$ ist diagonalisierbar. Somit kann der Satz zur Lösung des Anfangswertproblems (AWP) mit einer diagonalisierbaren Matrix angewendet werden:

Die Lösung des AWPs

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = A\vec{y}(t), \ \vec{y}_0 = \vec{y}(t_0)$$

für eine diagonalisierbare Matrix $A = SDS^{-1}$ mit $D$ einer Diagonalmatrix ist gegeben durch

$$\vec{y}(t) = Se^{(t-t_0)D}S^{-1}\vec{y}_0.$$

In den Beispielen zum 12. Kapitel wurden passende Matrizen $S, D, S^{-1}$ bestimmt, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \; S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Überprüfen Sie, dass die $i$-te Spalte von $S$ ein Eigenvektor des Eigenwerts $\lambda_i$ ist. Beispielsweise gilt bei der ersten Spalte

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \vec{x}, \text{ mit } \vec{x} \neq \vec{0}.$$

(a) Der Anfangswert ist $\vec{\boldsymbol{y}}_{\mathbf{0}} = \vec{y}(\mathbf{17}) = \begin{bmatrix} \mathbf{-7} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$, also ist $\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}} = \mathbf{17}$.

Ansatz: $\vec{y}(t) = Se^{(t-\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}})D}S^{-1}\vec{\boldsymbol{y}}_{\mathbf{0}}$

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} e^{(t-\mathbf{17})\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{-7} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e^{2(t-17)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{e^{-(t-17)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{e^{3(t-17)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{e^{4(t-17)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16e^{2(t-17)} \\ 7e^{-(t-17)} \\ 5e^{3(t-17)} \\ 1e^{4(t-17)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -16e^{2(t-17)} & - & 7e^{-1(t-17)} & + & 5e^{3(t-17)} & + & 11e^{4(t-17)} \\ & & 7e^{-(t-17)} & & & + & 4e^{4(t-17)} \\ & & & & 5e^{3(t-17)} & & \\ & & & & & & 10e^{4(t-17)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Wir merken, dass der Anfangswert $\vec{\boldsymbol{y}}_{\mathbf{0}} = \vec{y}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ (mit $\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$) ein Eigenvektor zum Eigenwert

$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}} = \mathbf{2}$ ist $\left( \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_1 = 2} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right)$.

Setze die Werte in den Ansatz $\vec{y}(t) = e^{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}}(t-\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}})}\vec{\boldsymbol{y}}_{\mathbf{0}} = e^{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}}(t-\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}})}\vec{y}(\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}})$ ein:

$$\vec{y}(t) = e^{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}}(t-\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}})}\vec{y}(\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}}) = e^{\mathbf{2}(t-\mathbf{0})} \begin{bmatrix} \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10e^{2t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Der Anfangswert $\vec{y}(7) = \begin{bmatrix}\mathbf{11}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{5}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$ ($\to \boldsymbol{t_0} = \mathbf{7}$) ist kein EV, aber er ist leichter als Linearkombination von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{2}$ bzw. $\boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{3}$ zu beschreiben:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{11}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{5}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = \mathbf{6}\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} + \mathbf{5}\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

Ansatz: $\vec{y}(t) = \mathbf{6}e^{\boldsymbol{\lambda_1}(t-\boldsymbol{t_0})}\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} + \mathbf{5}e^{\boldsymbol{\lambda_3}(t-\boldsymbol{t_0})}\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$

Wir setzen $\boldsymbol{t_0} = \mathbf{7}$ und die Eigenwerte ein und erhalten

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{6}e^{\mathbf{2}(t-\mathbf{7})}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{5}e^{\mathbf{3}(t-\mathbf{7})}\\ 0\\ \mathbf{5}e^{\mathbf{3}(t-\mathbf{7})}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6e^{2(t-7)} + 5e^{3(t-7)}\\ 0\\ 5e^{3(t-7)}\\ 0\end{bmatrix}.$$

*Bemerkung:* Wir hätten diesen Lösungsweg auch für den in Teil a) (oder den in Teil a) präsentierten Lösungsweg hier) benutzen können. Probieren Sie die verschiedenen Lösungswege aus, um nachzuprüfen, ob Sie auf die gleichen Lösungen kommen.

**3. Aufgabe** $C^k = \mathbf{0}$ für $k \geq 3$ (nachweisen!)

Zwischenergebnisse:

$$e^{(t-t_0)C} = \begin{bmatrix} 1 & -2(t-5) & +7(t-5) - 3(t-5)^2\\ 0 & 1 & 3(t-5)\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 22(t-5) + 13 \cdot 7(t-5) - 39(t-5)^2\\ 11 + 39(t-5)\\ 13 \end{bmatrix} = \cdots$$

# Schlagwortverzeichnis