Tutorium 10

Aufgabe 1: Typen von Graphen

1.a) *Beweise oder Widerlege:* In jedem einfachem, endlichen, ungerichteten Graphen mit mindestens zwei Knoten gibt es mindestens zwei Knoten, welche den gleichen Grad haben.

Lösung

Sei $n \geq 2$ die Zahl der Knoten im Graphen. Da in einem einfachen Graphen kein Knoten eine Kante zu sich selbst und maximal eine Kante zu jedem anderen Knoten haben kann, hat jeder Knoten maximal den Grad $n-1$. Mögliche Grade sind also die Grade von 0 bis $n-1$.
Angenommen es gäbe keine zwei Knoten vom gleichen Grad. Nach dem Schubfachprinzip muss es dann genau einen Knoten von jedem der Grade 0 bis $n-1$ geben:

- Es gibt n Knoten.
- Angenommen in dem Graphen kommen nur $n-1$ verschiedene Grade vor.
- Dann gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei Knoten mit dem selben Grad. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme dass es keine zwei Knoten vom gleichen Grad gibt.
- Also muss es für jeden der Grade 0 bis $n-1$ einen Knoten geben.

Insbesondere gibt es dann einen Knoten vom Grad 0 und einen Knoten vom Grad $n-1$. Damit dieser letzte Knoten den Grad $n-1$ hat, muss er eine Kante zu jedem der n Knoten außer sich selbst haben. Also muss es auch eine Kante zwischen dem Knoten vom Grad $n-1$ und dem Knoten vom Grad 0 geben. Das ist aber ein Widerspruch, denn ein Knoten vom Grad 0 hat keine Kanten.
Damit muss jeder einfache Graph mit mindestens zwei Knoten mindestens zwei Knoten vom gleichen Grad haben.

Hinweis: Natürlich kann man hier auch ohne Schubfachprinzip argumentieren. Da es n Knoten und n verschiedene mögliche Grade gibt, muss es von jedem Grad genau einen Knoten geben oder mindestens zwei Knoten haben den selben Grad.

\Lösung

1.b) *Berechne:* Die maximale Anzahl an Kanten in einem einfachen, ungerichteten Graphen mit n Knoten.

Lösung

$$\mathrm{K_{oW}}(n,2) = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-2)! * (n-1) * n}{2 * (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

\Lösung

1.c) *Berechne:* Die maximale Anzahl an Kanten in einem ungerichteten Graphen mit n Knoten.

Lösung

$$\mathrm{K_{mW}}(n,2) = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n-1)! * n * (n+1)}{2 * (n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

\Lösung

1.d) *Beweise:* In jedem ungerichteten, endlichen Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.
Hinweis: Für alle ungerichteten, endlichen Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) = 2 * |E| \tag{T1}$$

Lösung

Seien V_g und V_u die Knoten mit geradem bzw. ungeradem Grad in V. Dann ist

$$2 * |E| \overset{\text{T1}}{=} \sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) = \left(\sum_{v_g \in V_g} \mathrm{d}_G(v_g) \right) + \left(\sum_{v_u \in V_u} \mathrm{d}_G(v_u) \right)$$

Da $\mathrm{d}_G(v_g)$ für alle $v_g \in V_g$ gerade ist, ist $\sum_{v_g \in V_g} \mathrm{d}_G(v_g)$ gerade. Offensichtlich ist auch $2 * |E|$ gerade. Damit muss auch die Summe $\sum_{v_u \in V_u} \mathrm{d}_G(v_u)$ gerade sein. Da alle Summanden $\mathrm{d}_G(v_u)$ mit $v_u \in V_u$ ungerade sind, muss es eine gerade Anzahl solcher Summanden geben. Also ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

\Lösung

1.e) *Beweise:* In jedem ungerichteten, endlichen Graph $G = (\ V,\ E\ )$, egal ob er Schlingen hat, gilt:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) = 2 * |E|$$

Hinweis: Ein Knoten, der lediglich eine Schlinge hat, hat den Grad 2.

Lösung

Wir beweisen per Induktion über $|E|$.
Sei V beliebig.

- **IA:** $G = (\ V,\ E\ )$ mit $|E| = 0$
  $\sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) = \sum_{v \in V} 0 = 2 * 0$
- **IV:** Für $G = (\ V,\ E\ )$ mit $|E| = n$ gilt: $\sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) = 2 * |E|$.
- **IS:** *Zu Zeigen:* $\sum_{v \in V} \mathrm{d}_{G'}(v) = 2 * |E'|$, für $G' = (\ V,\ E'\ )$ mit $|E'| = |E| + 1$.
  Seien $a, b \in V$ und $E = E' \setminus \{\ e'\ \}$.
  1. Fall: e' ist Schlinge über a:

$$\begin{aligned}
& \sum_{v \in V} \mathrm{d}_{G'}(v) \\
=\ & \sum_{v \in V \setminus \{\ a\ \}} \mathrm{d}_{G'}(v) + \mathrm{d}_{G'}(a) \\
=\ & \sum_{v \in V \setminus \{\ a\ \}} \mathrm{d}_G(v) + \mathrm{d}_G(a) + 2 \\
=\ & \sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) + 2 \\
\overset{\text{IV}}{=}\ & 2 * |E| + 2 \\
=\ & 2(|E| + 1) \\
=\ & 2 * |E'|
\end{aligned}$$

  2. Fall: e' ist Kante zwischen a und b:

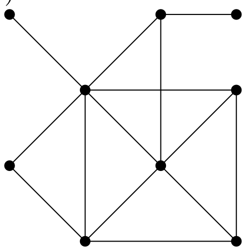
$$\begin{aligned}
& \sum_{v \in V} \mathrm{d}_{G'}(v) \\
=\ & \sum_{v \in V \setminus \{\ a, b\ \}} \mathrm{d}_{G'}(v) + \mathrm{d}_{G'}(a) + \mathrm{d}_{G'}(b) \\
=\ & \sum_{v \in V \setminus \{\ a, b\ \}} \mathrm{d}_G(v) + \mathrm{d}_G(a) + 1 + \mathrm{d}_G(b) + 1 \\
=\ & \sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) + 2 \\
\overset{\text{IV}}{=}\ & 2 * |E| + 2 \\
=\ & 2(|E| + 1) \\
=\ & 2 * |E'|
\end{aligned}$$

  Somit haben wir die Aussage bewiesen.

\Lösung

Aufgabe 2: Zerlegungen von Graphen

2.a) Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit



2.a(i) *Berechne:* Wie viele Färbungen der Knoten mit den Farben rot, grün und blau gibt es, so dass es gleich viele rote, grüne und blaue Knoten gibt.

Lösung

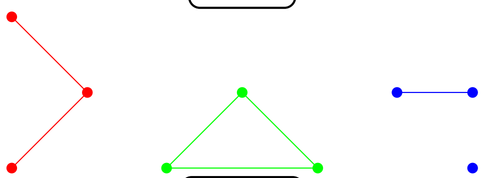
(Wähle 3 rote Knoten aus der Menge von 9 Knoten und dann wähle 3 grüne Knoten aus den verbleibenden 6 Knoten.)

$$\begin{aligned} K_{oW}(9,3) * K_{oW}(6,3) &= \binom{9}{3} * \binom{6}{3} = \frac{9!}{3! * 6!} * \frac{6!}{3! * 3!} \\ &= \frac{2*3*4*5*6*7*8*9}{2*3*2*3*2*3} = \frac{2*4*5*6*7}{1} = 1680 \end{aligned}$$

\Lösung

2.a(ii) *Gib an:* Für eine dieser Färbungen die 3 Teilgraphen, die jeweils nur Knoten einer Farbe, alle Knoten dieser Farbe und alle Kanten zwischen Knoten dieser Farbe enthalten.

Lösung



\Lösung

2.a(iii) *Berechne:* Wie viele Färbungen der Knoten mit den Farben rot und grün gibt es, so dass jeweils 3 Paare von benachbarten Knoten die Farbe rot haben und alle anderen Knoten grün sind.

Lösung

(Wähle 3 Kanten.)

$$K_{oW}(14,3) = \binom{14}{3} = \frac{14!}{3! * 11!} = \frac{12*13*14}{2*3} = 364$$

\Lösung

2.a(iv) *Gib an:* Wie viele Knoten müssen in jeder dieser Färbungen mindestens rot sein und wie viele Knoten können maximal rot gefärbt werden?

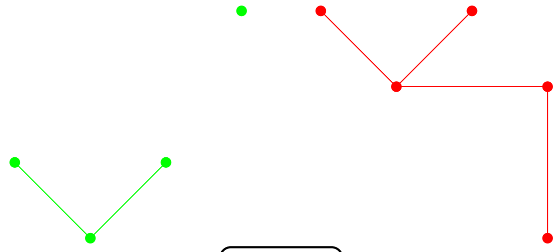
Lösung

Es müssen mindestens 3 Knoten und können maximal 6 Knoten rot gefärbt werden.

\Lösung

2.a(v) *Gib an:* Für eine dieser Färbungen die beiden Teilgraphen, die jeweils nur Knoten einer Farbe, alle Knoten dieser Farbe und so viele Kanten des Ursprungsgraphen wie möglich enthalten.

Lösung



\Lösung

2.b) *Beweise oder Widerlege:* Der Graph aus Aufgabe 2(a) ist bipartit.

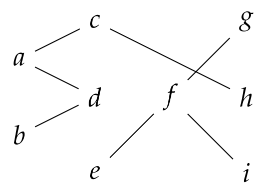
Lösung

Angenommen der Graph wäre bipartit und $\{ V_1, V_2 \}$ eine Bipartition von V. Sei v_1 der linke Knoten in der untersten Zeile, v_2 der rechte Knoten in der untersten Zeile und v_3 der rechte Knoten in der zweiten Zeile von unten. Da $\{ v_1, v_2 \} \in E$ und $\{ v_1, v_3 \} \in E$, gilt $v_1 \in V_1 \leftrightarrow v_2, v_3 \in V_2$. Damit sind v_2 und v_3 entweder beide in V_1 oder beide in V_2. Aber $\{ v_2, v_3 \} \in E$. Das widerspricht der Definition von bipartit.
Also ist der Graph nicht bipartit.

\Lösung

Aufgabe 3: Graphen

3.a) Gegeben sei der Graph G:



G

3.a(i) *Gib an:* G in Tupel-Schreibweise.

Lösung

$G = (V, E)$, wobei $V := \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i \}$ und
$E := \{ \{ a, c \}, \{ a, d \}, \{ b, d \}, \{ c, h \}, \{ e, f \}, \{ f, g \}, \{ f, i \} \}$.

\Lösung

3.a(ii) *Gib an:* Den Grad von f in G.

Lösung

$d_G(f) = 3$.

\Lösung

3.a(iii) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G einen Knotenpfad von a nach h sowie den dazu gehörigen Kantenpfad.

Lösung

Knotenpfad	Kantenpfad
(a, c, h)	$(\{ a, c \}, \{ c, h \})$

\Lösung

3.a(iv) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G zwei Knoten u und v so, dass es keinen Pfad von u nach v gibt.

Lösung

In G gibt es z. B. keinen Pfad von d nach f.

\Lösung

3.a(v) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G einen Knotenpfad, der alle Knoten des Graphen durchläuft.

Lösung

In G gibt es keinen solchen Pfad.

\Lösung

3.a(vi) *Gib an:* Bestimme in G alle kürzesten Pfade und Zyklen mit mindestens einer Kante sowie alle längsten einfachen Pfade und Zyklen.
Hinweis: Es reicht jeweils Knoten-Pfade anzugeben.

Lösung

	G
a)	$\{ (u, v) : \{ u, v \} \in E \}$
b)	$\{ (u, v, u) : \{ u, v \} \in E \}$
c)	$\{ (b, d, a, c, h), (h, c, a, d, b) \}$
d)	$\emptyset$

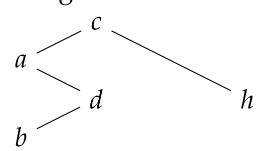
wobei a) die kürzesten Pfade mit mindestens einer Kante, b) die kürzesten Zyklen (Zyklen müssen per Definition mindestens eine Kante haben), c) die längsten einfachen Pfade und d) die längsten einfachen Zyklen sind.
Hinweis: G hat Zyklen aber keine einfachen Zyklen und ist damit azyklisch.

\Lösung

3.a(vii) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G den größten Teilgraphen, der zusammenhängend ist.

Lösung

G ist nicht zusammenhängend. Der größte zusammenhängende Teilgraph von G ist:



\Lösung

3.a(viii) *Gib an:* Ist G bipartit? Gib, falls möglich, eine Bipartition an.

Lösung

G ist bipartit, eine Bipartition von V ist z. B. $\{ \{ a, b, f, h \}, \{ c, d, e, g, i \} \}$.

\Lösung

3.a(ix) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G eine Färbung der Knoten in den Farben rot und grün so, dass es keine Pfade der Länge 2 gibt, in denen alle Knoten die gleiche Farbe haben.

Lösung

Für G erfüllt z. B. die Bipartion der letzen Aufgabe die Anforderungen, d. h. eine mögliche Färbung ist:

$$f(v) := \begin{cases} \text{rot} & \text{, falls } v \in \{ a, b, f, h \} \\ \text{grün} & \text{, falls } v \in \{ c, d, e, g, i \} \end{cases}$$

\Lösung

3.b) *Gib an:* Zeichne einen ungerichteten Graphen mit einem Zyklus der Länge 1.

Lösung

\Lösung

3.c) *Beweise oder Widerlege:* Es gibt einen ungerichteten Graphen, in dem der Grad eines Knotens größer ist als die Zahl der Knoten und als die Zahl der Kanten.

Lösung

Die Aussage ist richtig. Wähle $G = (\{ v \}, \{ \{ v \} \})$. Der Graph G erfüllt beide Eigenschaften, denn $\mathrm{d}_G(v) = 2 > |V| = |E| = 1$.

\Lösung