Sarah Köhler
Dora Szücs 358573
Florian Stelzer 355640

1	2	3	4	Σ
5	1	3	3	12

HA 9

9.1. 1 2 6 4 5 4 6 3 5 4

a) absolute Häufigkeiten: $H(x) := |\{i : x_i = x\}|$

$H(1) = 1$
$H(2) = 1$
$H(3) = 1$
$H(4) = 3$
$H(5) = 2$
$H(6) = 2$

relative Häufigkeiten: $h(x) := \frac{H(x)}{n}$

$h(1) = 1/10$
$h(2) = 1/10$
$h(3) = 1/10$
$h(4) = 3/10$
$h(5) = 2/10$
$h(6) = 2/10$

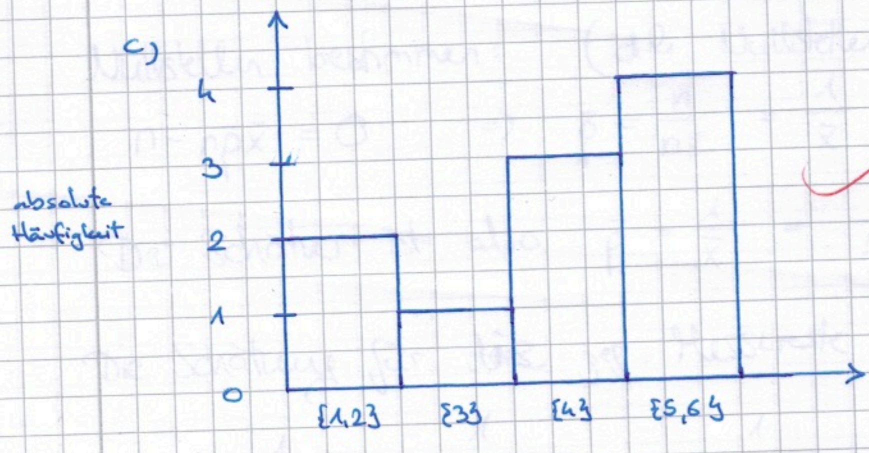
b) das empirische Mittel:

$$\bar{\mu}_x := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\cdot(1+2+6+4+5+4+6+3+5+4) = 4$$

die empirische Varianz:

$$\bar{\sigma}_x^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{\mu}_x)^2 = \frac{1}{9}\cdot(9+4+4+0+1+0+4+1+1+0) = \frac{8}{3} \approx 2.67$$

c)



5

9.2. $X_1, X_2, \ldots$, Erwartungswert μ , Varianz σ^2

a) zu zeigen: $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ erwartungstreu,

d.h. $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu$

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n}\cdot n\cdot \mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n\cdot \mu = \mu$$

1/3

Aufgabe 9.3

Geometrische Verteilung zu Parameter p

d.h. für $f_{\bar p}(x_i)$ gilt:

$$f_{\bar p}(x_i) = (1-\bar p)^{x_i - 1}\,\bar p$$

ML-Funktion:

$$L((x_1,\dots x_n),\bar p) = f_{\bar p}(x_1)\cdot\ldots\cdot f_{\bar p}(x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (1-\bar p)^{x_i-1}\cdot \bar p$$
$$= \bar p^{\,n}(1-\bar p)^{n\bar x - n}$$

mit $\bar x$ = empirischer Mittel der Messwerte x_i

Für Ableitung: logarithmieren:

$$l((x_1,\dots x_n),\bar p) = n\cdot \ln(\bar p) + (n\bar x - n)\cdot \ln(1-\bar p)$$

Ableitung nach $\bar p$

$$l'((x_1,\dots x_n),\bar p) = \frac{n}{\bar p} + \frac{n\bar x - n}{1-\bar p}\cdot(-1)$$
$$= \frac{n}{\bar p} - \frac{n\bar x - n}{1-\bar p} = \frac{n(1-\bar p) - \bar p\,(n\bar x - n)}{\bar p\cdot(1-\bar p)} = \frac{n - n\bar p\bar x}{\bar p - \bar p^2}$$

Nullstellen bestimmen: (d.h. Nullstellen d. Zählers)

$$n - n\bar p\bar x = 0 \Rightarrow \bar p = \frac{n}{n\bar x} = \frac{1}{\bar x}$$

Der Schätzer ist also $\bar p = \frac{1}{\bar x} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

Die Schätzung für ~~die~~ geg. Messwerte ist folglich:

$$p \approx \frac{1}{\bar x} = \frac{1}{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i} = \frac{1}{\frac{1}{10}\,24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 0{,}4167$$

b) $\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=1)$

$$= p(1-p)^{2-1} + p(1-p)^{1-1}$$

$$= p(1-p) + p = p(2-p) = 2p - p^2$$

Einsetzen von $\bar{p}$ aus a)

$$\approx 2\bar{p} - \bar{p}^2 = 2 \cdot \frac{5}{12} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{10}{12} - \frac{25}{144}$$

$$= \frac{120-25}{144} = \frac{95}{144} \approx 0{,}6597$$

3

Aufgabe 9.4

a)

Berechne die Korrelationskoeffizienten nach der Formel: $\rho_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

in R mit den Befehlen:

cov(Height, Girth) bzw. cov(Volume, Girth)

und sd(Height), sd(Girth), sd(Volume)

$\rho_{Height, Girth} = 0{,}5192801$

$\rho_{Volume, Girth} = 0{,}9671194$

b) Befehle zur Berechnung der Werte:

cor <- lm(Height ~ Girth, data=trees)
(Volume)

summary(cor)

Height ~ Girth:

p-Wert: 0,002758

R^2: 0,2697

Funktion: $y = 62{,}031 + 1{,}054x$

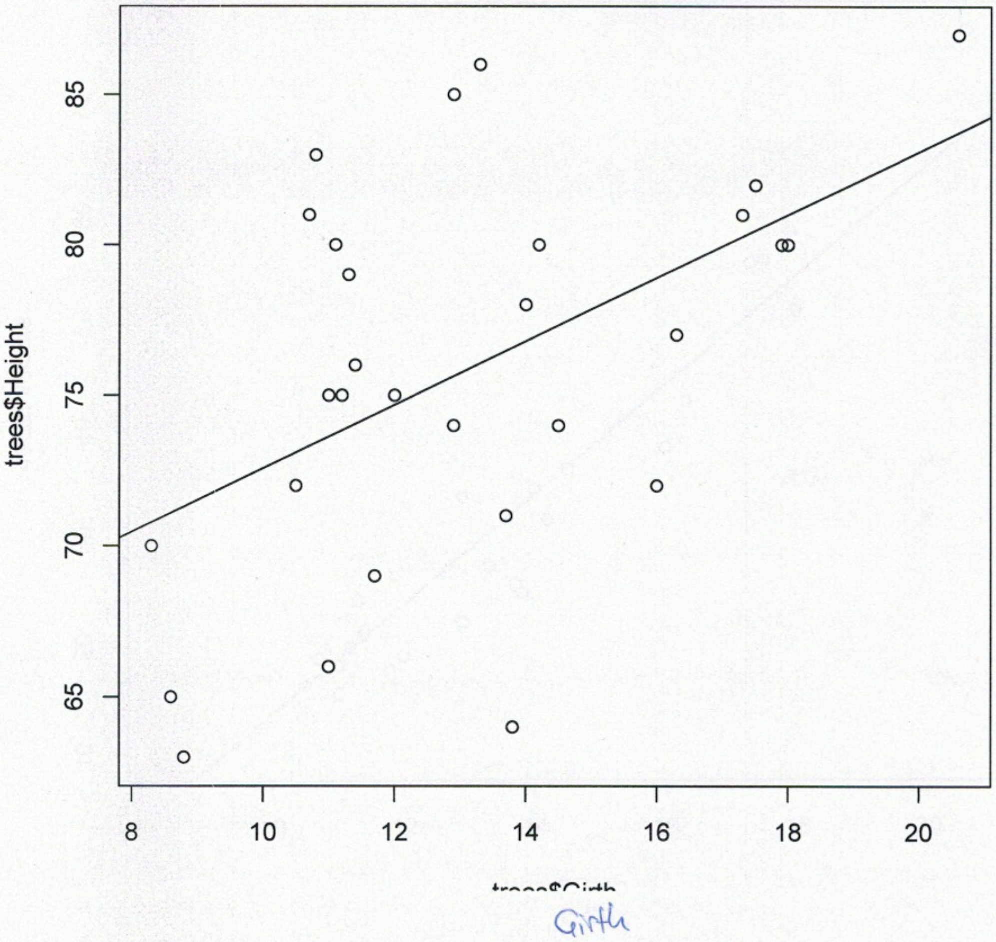
Volume ~ Girth

p-Wert: $2{,}2 \cdot 10^{-16}$

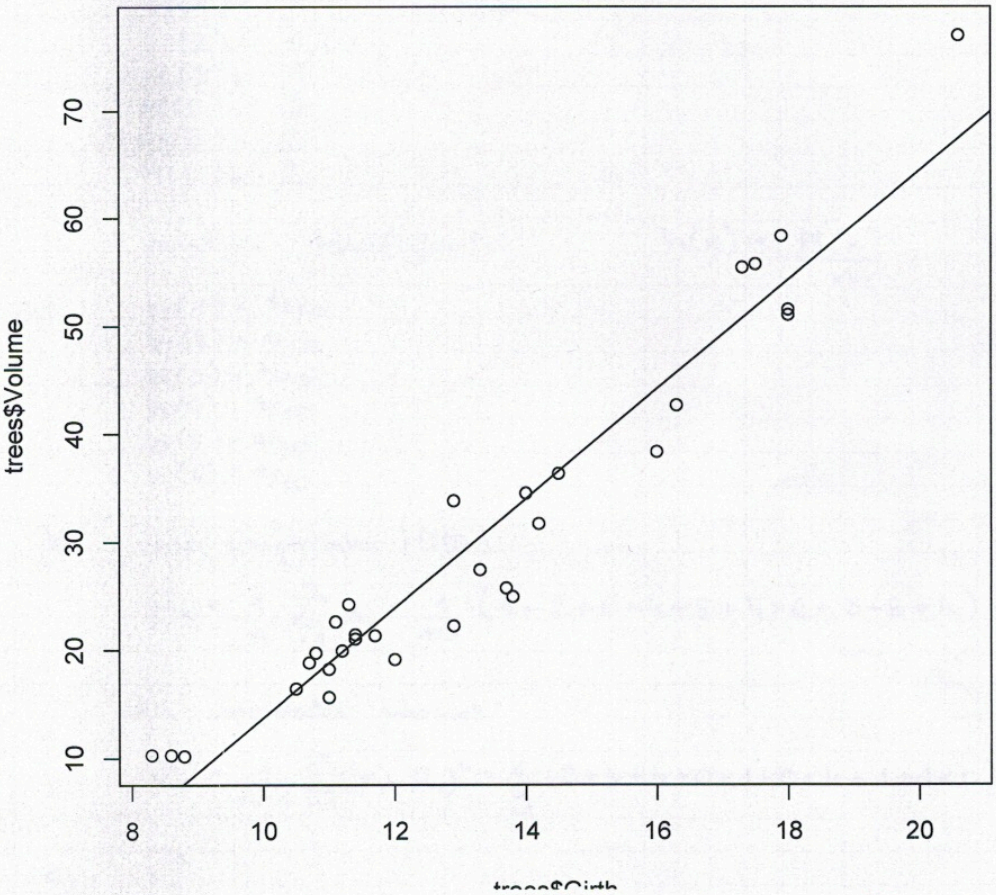
R^2: 0,9353

Funktion: $y = 5{,}066x - 36{,}943$

Zu 9.4 b)



Zu 9.4. b)



Girth

3