TU Berlin, Institut für Mathematik Prof. Dr. Noemi Kurt
SoSe 15 Dr. Mathias Rafler

Stochastik für Informatiker
Übungsblatt 2

Ausgabe: 24.04. – Abgabe bis 08.05. im jeweiligen Tutorium

Tutoriumsaufgabe 2.1 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

Es seien A und B Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$. Berechnen Sie:

(a) $\mathbb{P}(B|A)$ (b) $\mathbb{P}(A|B)$ (c) $\mathbb{P}(A \cup B)$ (d) $\mathbb{P}(A^c|B^c)$ (e) $\mathbb{P}(B^c|A^c)$

Tutoriumsaufgabe 2.2 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

Für zwei Ereignisse A und B bestimmen Sie $\mathbb{P}(B|A)$, falls

(a) $A \subseteq B$, (b) $A \cap B = \emptyset$.

Welche unmittelbaren Folgerungen ergeben sich? Wie berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit bei Laplace-Experimenten?

Tutoriumsaufgabe 2.3 (Medizinische Tests)

Sei Ω eine bestimmte Bevölkerungsgruppe, $K \subseteq \Omega$ die Teilmenge aller Personen, die an einer bestimmten Krankheit leidet sowie $T \subseteq \Omega$ die Teilmenge, bei der ein Test auf diese Krankheit positiv ausfällt. Für diesen Test seinen $\mathsf{Se} := \mathbb{P}(T|K)$ die Sensitivität sowie $\mathsf{Sp} := \mathbb{P}(T^c|K^c)$ die Spezifität.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{P}(K|T)$ und $\mathbb{P}(K^c|T^c)$, falls $\mathbb{P}(K) = 0.02$, $\mathsf{Se} = 0.98$ und $\mathsf{Sp} = 0.85$.

(b) Unter welchen Voraussetzungen an die Sensitivität und die Spezifität gelten

$$\mathbb{P}(K|T) > \mathbb{P}(K) \qquad \text{sowie} \qquad \mathbb{P}(K^c|T^c) > \mathbb{P}(K^c)?$$

(c) Wie verhalten sich die Quotienten $\frac{\mathbb{P}(K|T)}{\mathbb{P}(K)}$ und $\frac{\mathbb{P}(K^c|T^c)}{\mathbb{P}(K^c)}$ wenn $\mathbb{P}(K) \to 0$ und Sensitiviät und Spezifität fest sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

Tutoriumsaufgabe 2.4

Seien $\Omega := \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(b) = 1/8$, $\mathbb{P}(c) = \mathbb{P}(d) = \mathbb{P}(e) = 3/16$ sowie

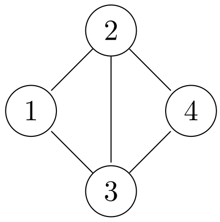
$$A := \{d, e, a\}, \qquad B := \{c, e, a\}, \qquad C := \{c, d, a\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass A, B, C nicht unabhängig sind.

Tutoriumsaufgabe 2.5 (Netzwerk)

In dem nachfolgend aufgeführten Netzwerk mit vier Knoten und fünf Leitungen fallen die einzelne Leitungen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$, wobei der Ausfall einer Leitung unabhängig von anderen möglichen Ausfällen eintritt.



(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es keine Verbindung zwischen den Knoten 1 und 4?

(b) Welchen Effekt hat die Leitung zwischen den Knoten 2 und 3 auf diese Wahrscheinlichkeit? Berechnen Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten bedingt auf den Ausfall sowie den Nichtausfall dieser Leitung.

Hausaufgabe 2.1 (Paarweise Unabhängigkeit) *4 Punkte*

Mit einem fairen Würfel wird zweimal gewürfelt. Wir betrachten die Ereignisse:

$A = \{\text{bei Wurf 1 gerade Augenzahl}\}$,

$B = \{\text{bei Wurf 2 gerade Augenzahl}\}$,

$C = \{\text{bei beiden Würfen gerade oder bei beiden Würfen ungerade Augenzahl}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass je zwei dieser Ereignisse unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass A, B, C nicht unabhängig sind.

Hausaufgabe 2.2 (Unabhängigkeit) *5 Punkte*

(a) Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Bestimmen Sie, ob jeweils die Ereignisse A_i und B_i unabhängig sind:

(i) A_1: Der erste Würfel zeigt eine Eins.
B_1: Der zweite Würfel zeigt eine Zahl größer oder gleich drei.

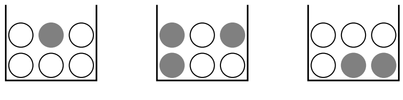
(ii) A_2: Die Summe der Würfel ist größer oder gleich zehn.
B_2: Der zweite Würfel zeigt eine Fünf.

(iii) A_3: Die Summe der Würfel ist ungerade.
B_3: Der zweite Würfel zeigt höchstens eine Drei.

(b) Zeigen Sie, dass für unabhängige Ereignisse A, B auch A^c und B sowie A^c und B^c unabhängig sind.

Hausaufgabe 2.3 *4 Punkte*

Ein Gefangener erhält eine Chance auf Freilassung: Mit verbundenen Augen wählt er eine der drei folgenden Urnen aus, aus der eine Kugel gezogen wird. Mit einer weißen Kugel erhält er die Freiheit.



(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gefangene freigelassen wird?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die linke Urne gewählt wurde, wenn die gezogene Kugel schawarz ist?

(c) Der Gefangene erhält die Erlaubnis, vorher mit offenen Augen die Kugeln zwischen den Urnen neu und beliebig zu verteilen. Wie sollte er die Kugeln aufteilen, um bestmögliche Chancen zu erreichen? Wie hoch ist dann die Chance der Begnadigung?

Hausaufgabe 2.4 (Nachrichtenübertragung) *3 Punkte*

Ein Sender übertrage „Wörter“ aus der Menge $\mathcal{W} = \{00, 01, 10, 11\}$ an einen Empfänger, wobei Fehler bei der Übertragung auftreten können. Es seien für ein Wort $v \in \mathcal{W}$ S_v das Ereignis, dass v gesendet wird sowie E_v das Ereignis, dass v empfangen wird. Bekannt sind weiterhin $\mathbb{P}(S_{00}) = 0.9$, $\mathbb{P}(S_{01}) = 0.06$, $\mathbb{P}(S_{10}) = 0.03$, $\mathbb{P}(S_{11}) = 0.01$, sowie die Übertragungsfehler

$$\mathbb{P}(E_w|S_v) = \begin{cases} 0.81 & \text{falls } w = v, \\ 0.09 & \text{falls } d(v,w) = 1, \\ 0.01 & \text{falls } d(v,w) = 2. \end{cases}$$

Dabei ist $d(v, w)$ die Anzahl der Stellen, an denen sich die Wörter v und w unterscheiden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(S_v|E_w)$ für alle $v, w \in \mathcal{W}$.