Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
LinAlg - Team

Lineare Algebra für Ingenieure

Wiederholungsaufgaben zur Klausurvorbereitung - 3. Blatt

Achtung: Diese Aufgaben lassen keine Rückschlüsse auf die Aufgaben in der Klausur zu!

1. Aufgabe. Die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & 2 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ sei gegeben.

(a) Ist 0 ein Eigenwert der Matrix B?

(b) Ist B injektiv/surjektiv/bijektiv?

(c) Bestimmen Sie die Determinante von B.

(d) Bilden die Spalten von B eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(e) Ist $\text{Rang}(B) = 3$?

(f) Gibt es einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^3$, so dass das lineare Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung hat?

(g) Ist B diagonalisierbar? Bestimmen Sie ggf. Matrizen S und D mit D eine Diagonalmatrix, so dass $B = SDS^{-1}$ gilt.

(h) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt} = B\vec{y}$ für $\vec{y}(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ sowie für $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Aufgabe. Gegeben seien die folgenden zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$

$$\mathcal{B}_1 := \{x-1, x+1\} \quad \mathcal{B}_2 := \{x-1, x+2\}$$

sowie die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ ax+b \mapsto (2a+b)x + (2a+3b).$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. $\mathcal{B}_1$.

(b) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. $\mathcal{B}_2$.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. $\mathcal{B}_2$.

(e) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von L.

3. Aufgabe. Die Matrix $A := \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ sei gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Bestimmen Sie $\text{Kern}(A)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren von A sind.

(d) Lösen Sie das AWP $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = A\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(e) Ist A eine injektive Abbildung?

Lösungsskizzen erscheinen am Wochenende nach dem entsprechenden Wiederholungsabend auf der ISIS-Seite.