HA 09

Sarah Köhler 356394
Iuva Stoliowa 325947
Dora Szücs 358573

2/6

1. $f(x) = e^{-x} \cdot \sin(x)$

a) Taylorpolynom vom Grad 3 in $x_0 = 0$

$f(x) = e^{-x} \cdot \sin(x)$ $\qquad f(0) = 0$

Frage mich wegen deine Abschätzungen!

$f'(x) = (e^{-x})' \cdot \sin(x) + e^{-x} \cdot (\sin(x))'$

$= (-1) \cdot e^{-x} \cdot \sin(x) + e^{-x} \cdot \cos(x)$

$= e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \cdot \sin(x)$

$f''(x) = (e^{-x} \cdot \cos(x) - e^{-x} \cdot \sin(x))'$

$= -e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \cdot (-\sin(x)) - (-e^{-x} \cdot \sin(x) + e^{-x} \cdot \cos(x))$

$= -2 \cdot e^{-x} \cdot \cos(x)$

$f'''(x) = (-2 \cdot e^{-x} \cdot \cos(x))'$

$= (-2) \cdot (-1) \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) + (-2) \cdot e^{-x} \cdot (-\sin(x))$

$= 2 \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot e^{-x} \cdot \sin(x)$

$f^{(4)}(x) = (2 \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot e^{-x} \cdot \sin(x))'$

$= 2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot e^{-x} \cdot (-\sin(x))$

$+ 2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} \cdot \sin(x) + 2 \cdot e^{-x} \cdot \cos(x)$

$= -4 \cdot e^{-x} \cdot \sin(x)$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = -2 \qquad f'''(0) = 2$

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k$$

$$= 1 \cdot x + \frac{(-2)}{2!} \cdot x^2 + \frac{2}{3!} \cdot x^3$$

$$= x - x^2 + \frac{x^3}{3}$$

groß (ersten gefühl)

$$|R_2(x)| \approx \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (10^{-3})^3}{6} \approx \frac{10^{-6}}{3} > 10^{-8}$$

1.6. R_2 Restglied , $I = \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right]$

$$R_2(x) = f'''(\xi)\,\frac{(x-x_0)^3}{3!}$$

$$= 2\cdot e^{-\xi}\cdot \sin(\xi) + 2\cdot e^{-\xi}\cdot\cos(\xi)\cdot\frac{(x-x_0)^3}{3!}$$

$\cancel{|R_2(x)| \leq f'''(\xi)}$

Fehlergliedabschätzung im Intervall $x \in \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right]$ um $x_0 = 0$ herum.

$$x \in \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right] \Longrightarrow \xi \in \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right] \quad \left(\xi \text{ liegt zwischen } x \text{ und } x_0\right)$$

$$|R_2(x)| \leq \left| f'''(\xi)\,\frac{(x-x_0)^3}{3!}\right|$$

$$= \left| 2\cdot e^{-\xi}\cdot\sin(\xi) + 2\cdot e^{-\xi}\cdot\cos(\xi)\cdot\frac{(x-x_0)^3}{3!}\right|$$

Wir setzen $x = \frac{1}{100}$ (der größte mögliche x-Wert) f

und schätzen die maximalen Werte von $e^{-\xi}$, $\sin(\xi)$ und $\cos(\xi)$ ab.

$e^{(-1/100)} \geq e^{-x}$ $\forall x \in \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right]$

$e^{-\xi} \leq 1$, $\sin(\xi) \leq 1$, $\cos(\xi) \leq 1$

$$|R_2(x)| \leq \left| \frac{2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1}{3!}\cdot (10^{-2})^3\right|$$

$$= \left|\frac{4}{6}\cdot 10^{-6}\right| > 10^{-8}$$

$R_2(x)$ ist also größer als 10^{-8}. f

Es ist zu zeigen $|R_2(x)| \geq |\ \ldots\ | > 10^{-8}$

Abschätzung

R_3 Restglied $\leq 10^{-8}$?

$$f(x) = T_3(x) + f^{(4)}(\xi)\frac{(x-x_0)^4}{4!}$$

$$R_3(x) = f^{(4)}(\xi)\frac{(x-x_0)^4}{4!} = -4 \cdot e^{-\xi} \cdot \sin(\xi) \cdot \frac{(x-x_0)^4}{4!}$$

$$x \in \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right] \Rightarrow \xi \in \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right]$$

$$|R_3(x)| \leq \left| -4 \cdot e^{-\xi} \cdot \sin(\xi) \cdot \frac{(x-x_0)^4}{4!}\right|$$

Wir setzen $x = \frac{1}{100}$ und schätzen die maximalen Werte von $e^{-\xi}$ und $\sin(\xi)$ ab. ($e^{-\xi} \leq 1$, $\sin(\xi) \leq 1$)

$$|R_3(x)| \leq \left|\frac{-4 \cdot 1 \cdot 1}{4!} \cdot (10^{-2})^4\right|$$

Nein $e^{-\left(\frac{-1}{100}\right)} = e^{\frac{1}{100}} > 1$

$$\text{f} = \frac{10^{-8}}{6} < 10^{-8}$$

$R_3(x)$ ~~nicht~~ ist kleiner als 10^{-8}.

Da wir den Betrag betrachten, würden wir bei dem anderen Randwert $x = \frac{-1}{100}$ auf das gleiche Ergebnis kommen.

~~Ein Abschätzung sollte~~

5/5 2. Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital bestimmen

a) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \overset{\text{l'Hospital Regel}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{\sin(2x-6)}{3-x} \overset{\text{l'Hosp. Regel}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{\cos(2x-6)\cdot 2}{-1} = -2$

c) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{\ln(x)\cdot(x-1)}$

$$\overset{\text{l'Hosp. Regel}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln(x) + \frac{1}{x}(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln(x) + 1 - \frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{l'Hosp. Regel}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x} + x^{-2}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$