Tutorium 13

Aufgabe 1: Minima, Maxima, Schranken

Gegeben sei die Halbordnung $\preceq: (\mathbb{N}_+, \mathbb{N}_+)$ mit $\preceq := \{ \ (a, \ b) : \exists c \in \mathbb{N}_+ \ . \ a \cdot c = b \ \}$ (d.h. $a \preceq b$ gdw. a ein Teiler von b ist).

1.a) *Gib an:* Alle kleinsten/größten und minimalen/maximalen Elemente, alle unteren/oberen Schranken und Infimum/Supremum der folgenden Mengen, falls diese existieren.
 1.a(i) $\{ \ n \mid n \text{ ist gerade } \}$
 1.a(ii) $\mathbb{N}_+$
 1.a(iii) $\{ \ 1, \ 5 \ \}$
 1.a(iv) $\{ \ 12, \ 21, \ 96 \ \}$

1.b) Für welche Teilmengen von $\mathbb{N}_+$ gibt es obere Schranken?

Aufgabe 2: Verbände

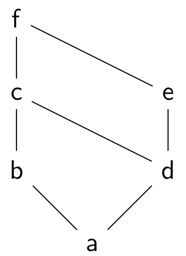
Gegeben sei die Halbordnung $\preceq$ aus Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$.

2.a) *Gib an:* $\inf(\{ \ a, \ b \ \})$.

2.b) *Beweise:*: Deine Angabe für $\inf(\{ \ a, \ b \ \})$ ist tatsächlich das Infimum von a, b.
Hinweis: Seien $c, m, n \in \mathbb{N}_+$. Wenn c der größte gemeinsame Teiler von m und n ist, dann existieren $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $c = u \cdot m + v \cdot n$ $(*)$
Hinweis: Seien $c, m, n \in \mathbb{N}_+$. Wenn c ein Teiler von m und ein Teiler von n ist, dann gilt für alle $p, q \in \mathbb{Z}$, dass c auch $p \cdot m + q \cdot n$ teilt $(**)$

Aufgabe 3: Hasse-Diagramme und Verbände

3.a) Gegeben sei $A := \{ \ a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ f \ \}$ und der Verband $V := (\ A, \ \sqsubseteq \ )$, der durch sein Hasse-Diagramm bestimmt ist:



Gib explizit an:
 3.a(i) $c \sqcup e$
 3.a(ii) $b \sqcap d$
 3.a(iii) $\sup(\{ \ a, \ b, \ e \ \})$
 3.a(iv) Eine injektive Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, so dass $\forall x, y \in A . f(x \sqcap y) = f(x) \cap f(y)$ und $\forall x, y \in A . f(x \sqcup y) = f(x) \cup f(y)$

3.b) Sei $P \subseteq \mathcal{P}(X)$. P ist eine *Partition* von X, wenn folgendes gilt:
- $\emptyset \notin P$
- $\forall x, y \in P \ . \ x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset$
- $\bigcup_{P_i \in P} P_i = X$

Bezeichnen wir mit $\text{Part}(X)$ die Menge aller Partitionen von X. Wir definieren die Halbordnung
$\sqsubseteq: (\text{Part}(X), \text{Part}(X))$ mit $\sqsubseteq := \{ \ (\ M, \ N \ ) : \forall m \in M \ . \ \exists n \in N \ . \ m \subseteq n \ \}$.
 3.b(i) Sei $X := \{ \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9 \ \}$.
 Gib an: Eine Partition P von X mit $|P| = 3$, so dass $\forall p \in P \ . \ |p| \geq 2$ und $\exists q \in P \ . \ |q| = 4$
 3.b(ii) Sei $X := \{ \ 1, \ 2, \ 3, \ 4 \ \}$. Visualisiere $\sqsubseteq$ mittels eines Hasse-Diagramms.
 3.b(iii) Sei $X := \mathbb{N}$. Gegeben sei eine beliebige Partition P von $\mathbb{N}$. Definiere eine Äquivalenzrelation $R : (\mathbb{N}, \mathbb{N})$ mit $P = \mathbb{N}/R$