Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
LinAlg - Team

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungsskizze - Wiederholungsaufgaben zur Klausurvorbereitung - 1. Blatt

Achtung: Diese Aufgaben lassen keine Rückschlüsse auf die Aufgaben in der Klausur zu!

1. Aufgabe.

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} -2 & -4 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ und der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGSs $A\vec{x} = \vec{b}$. [3., 4. Kapitel]

EKM Schritt für Schritt auf NZSF bringen und lösen:

$$\text{NZSF}([A|\vec{b}]) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \qquad (= \{\text{spezielle Lösung} + \text{Kern}(A)\})$$

(b) Gibt es einen Vektor $\vec{c}$, so dass das LGS $A\vec{x} = \vec{c}$ genau eine Lösung hat? [3., 4. Kapitel]

Nein, weil die Anzahl von Nicht-Kopfvariablen > 0 ist; d.h. $\text{Kern}(A) \neq \{\vec{0}\}$. Existiert eine Lösung zu dem LGS $A\vec{x} = \vec{c}$, so existieren unendlich viele Lösungen ($x_p +$ Kern(A)).

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A. [3., 4. Kapitel]

Nach dem Algorithmus zur Bestimmung des Kerns einer Matrix gilt:

$$\text{Basis Kern}(A) : \quad \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von A. [3., 4. Kapitel]

Benutze A', die NZSF von A. Die Kopfvariablen von A' sind x_1, x_3 und x_5. Nach dem Algorithmus zur Bestimmung einer Basis des Bildes von A bilden die 1., 3. und 5. Spalten von A eine Basis des Bildes von A:

$$\text{Basis Bild}(A) : \quad \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

(e) Ist die Abbildung $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3; \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ injektiv / surjektiv / bijektiv? [6. Kapitel]

A ist nicht injektiv : $\text{Kern}(A) \neq \{\vec{0}\}$

A ist surjektiv : $\dim(\text{Bild}(A)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

A nicht gleichzeitig injektiv **und** surjektiv $\Rightarrow$ A nicht bijektiv.

---

2. Aufgabe.

Gegeben seien die Vektoren $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ in dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und dessen assoziierter Norm.

(a) Sind $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ orthogonal zueinander? [8. Kapitel]

Zu prüfen: $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = -2 - 2 + 4 = 0$$

Die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind orthogonal zueinander.

(b) Warum bilden $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ keine Basis des $\mathbb{R}^3$? [2. Kapitel]
Jede Basis des $\mathbb{R}^3$ besteht aus 3 (linear unabhängigen) Vektoren, da $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Zwei Vektoren können den $\mathbb{R}^3$ nicht erzeugen.

(c) Wählen Sie einen Vektor $\vec{v}_3$ so, dass $\mathcal{B} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. [2. Kapitel]

(Hier kann beliebig gewählt werden, so lange die drei Vektoren linear unabhängig sind. Dies kann man beispielsweise mit der Determinante der Matrix $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3]$ prüfen.) Mit $\vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist $\mathcal{B}$ eine Basis:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{Laplace, 3. Spalte}}{=} 1(2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1)) = -3 \neq 0$$

Die Spalten sind somit linear unabhängig. Da wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, ist $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(d) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\mathcal{B}$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ zu überführen. [8. Kapitel]

... $\left\{ \vec{q}_1 := \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \vec{q}_2 := \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \vec{q}_3 := \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right\}$ (oder $\vec{q}_3\,' := \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$, abhängig von Ihrer Wahl von $\vec{v}_3$)

(e) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ bzgl. $\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$. [6., 8. Kapitel]

Weil $Q := [\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3]$ eine orthogonale Matrix ist, gilt:

$$Q^T \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/3 \\ 5/3 \\ -11/3 \end{bmatrix} \text{ ist der Koordinatenvektor von } \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ bzgl. } \mathcal{B}_{\text{ONB}}.$$

Mit $Q' := [\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3\,']$ ist der Koordinatenvektor $(Q')^T \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/3 \\ 5/3 \\ 11/3 \end{bmatrix}$

(f) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von der Matrix $[\vec{v}_1\ \ \vec{v}_2\ \ \vec{v}_3]$. [9. Kapitel]

Für das bei c) gewählte $\vec{v}_3$ ist $[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3] = QR$ mit

$$Q = [\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3] \text{ und } R = Q^T[\vec{v}_1\ \ \vec{v}_2\ \ \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

(Die konkreten Lösungen für Q und R sind abhängig vom gewählten Vektor $\vec{v}_3$!)

---

3. Aufgabe. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Teilräume des $\mathbb{R}^{2,2}$ sind.

(a) $M_1 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0 \right\}$

[5., 10. Kapitel]

Kein Teilraum. Gegenbeispiel: Die Matrizen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ sind Elemente in M_1: $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$ (oder die Spalten/Zeilen sind linear abhängig) , $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0$. Die Summe der Matrizen ist jedoch nicht in M_1 enthalten: $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0$.

(b) $M_2 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \det \begin{bmatrix} a & d \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \right\}$ [5., 10. Kapitel]

M_2 ist ein Teilraum. Die Menge M_2 ist nicht leer, weil beispielsweise die Nullmatrix in M_2 liegt: $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2$

M_2 ist abgeschlossen bzgl. der Addition: Seien $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2$; d.h. $\det \begin{bmatrix} a_i & d_i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3a_i - 2d_i = 0$ für $i = 1, 2$. Zu prüfen: ist $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in M_2$?

$$\det \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & d_1 + d_2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (a_1 + a_2) \cdot 3 - 2(d_1 + d_2) = (3a_1 - 2d_1) + (3a_2 - 2d_2) = 0 + 0 = 0$$

M_2 ist abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit Skalaren: Seien $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2$ (d.h. es gilt $3a - 2d = 0$), $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu prüfen: Ist $\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \in M_2$?

$$\det\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha d \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) = 3\alpha a - 2\alpha d = \alpha(3a - 2d) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2$$

Die Teilraumkriterien sind damit erfüllt. M_2 ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

(c) $M_3 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid ad = 1 \right\}$ [5. Kapitel]

Der Nullvektor muss in jedem Vektorraum enthalten sein. (notwendige Bedingung) Hier ist aber $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin M_3$, weil $0 \cdot 0 = 0 \neq 1$. Somit ist M_3 kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.