TU Berlin, Institut für Mathematik Prof. Dr. Noemi Kurt
SoSe 15 Dr. Mathias Rafler

Stochastik für Informatiker

Übungsblatt 7

Ausgabe: 29.05. – Abgabe bis 12.06. im jeweiligen Tutorium

Tutoriumsaufgabe 7.1 (Verteilungen bei Markovketten)

Eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$ habe die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 3/10 & 2/10 & 5/10 \\ 1/10 & 7/10 & 2/10 \\ 2/10 & 4/10 & 4/10 \end{pmatrix}.$$

Die Startverteilung sei gegeben durch $\nu^T = (1/4, 1/2, 1/4)$. Berechnen Sie

(a) $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2)$;

(b) $\mathbb{P}(X_2 = k)$, $k = 1, 2, 3$;

(c) $\mathbb{E}X_2$ für die Startverteilung ν sowie für die Startverteilung $\tilde{\nu}^T = (0, 0, 1)$.

Tutoriumsaufgabe 7.2 (Invariante Verteilung)

Eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$ habe die Übergangsmatrix P

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die invariante Verteilung π der Markovkette sowie für $k = 1, 2, 3$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k).$$

Tutoriumsaufgabe 7.3 (Doppeltstochastische Matrizen)

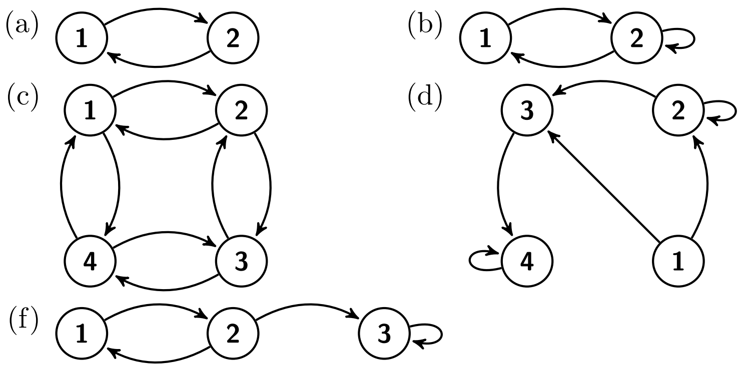
Eine doppeltstochastische Matrix P auf einem endlichen Zustandsraum S mit $N := |S|$ ist eine stochastische Matrix mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\sum_{i\in S} p_{i,j} = 1, \qquad \text{für alle } j \in S,$$

d.h. dass neben den Zeilensummen auch die Spaltensummen sich zu 1 aufsummieren. Zeigen Sie, dass für doppeltstochastische Matrizen die Gleichverteilung auf S eine invariante Verteilung ist.

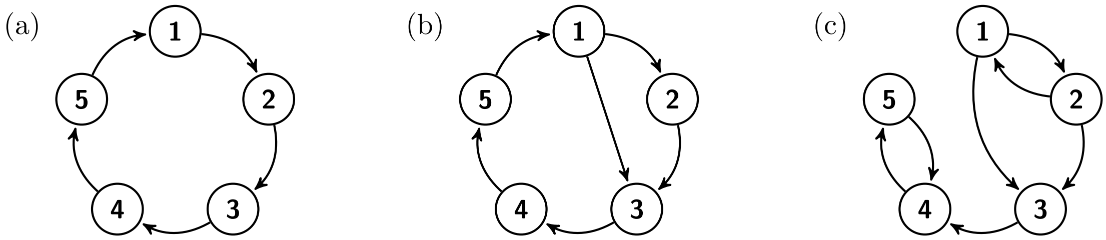
Tutoriumsaufgabe 7.4 (Irreduzibilität und Aperiodizität)

Welche der Markovketten zu den folgenden Übergangsgraphen sind irreduzibel bzw. aperiodisch? Begründen Sie Ihre Aussage!



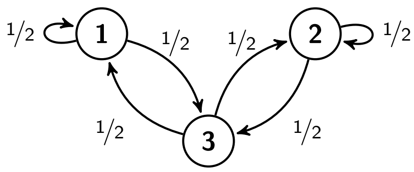
Hausaufgabe 7.1 (Irreduzibilität und Aperiodizität) *3 Punkte*

Welche der Markovketten zu den folgenden Übergangsgraphen sind irreduzibel bzw. aperiodisch? Begründen Sie Ihre Aussage!



Hausaufgabe 7.2 (Invariante Verteilung) *4 Punkte*

Bestimmen Sie die invariante Verteilung π einer Markovkette mit dem Übergangsgraphen



Berechnen sie den Grenzwert von $\mathbb{E}X_n$ für $n \to \infty$.

Hausaufgabe 7.3 (Invariante Verteilung und Irreduzibilität) *4 Punkte*

Sei P die Übergangsmatrix der homogenen Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ auf $S = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ irreduzibel?

(b) Bestimmen Sie alle invariante Verteilungen der Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$.

Hausaufgabe 7.4 (Lagerhaltungsmodell) *5 Punkte*

Wir betrachten ein Modell für ein Lager, in dem Ersatzteile bevorratet werden: Jeden Tag wird mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ ein Ersatzteil benötigt und aus dem Lager entfernt. An dem Tag, an dem das letzte Ersatzteil aus dem Lager genommen wird, wird abends eine Bestellung ausgelöst und das Lager wieder auf 5 Ersatzteile aufgefüllt (diese kommen zum Abend des folgenden Tag an). Sei X_n die Anzahl der Ersatzteile im Lager am Abend des n-ten Tages, es sei $X_0 = 3$.

(a) Geben Sie einen geeigneten Zustandsraum sowie die Übergangsmatrix dieser Markovkette an.

(b) Berechnen Sie die invariante Verteilung dieser Markovkette.

(c) Auf lange Sicht lassen sich die mittleren Kosten, die das Lager pro Tag verursacht, mithilfe der invarianten Verteilung bestimmen. Berechnen Sie die zu erwartenden Kosten pro Tag, wenn das Lager Fixkosten je Tag von 100 Euro, jedes Ersatzteil Kosten von 10 Euro, und jede Bestellung Kosten von 200 Euro verursacht.

Die nachfolgende Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe (und ist insbesondere freiwillig). Erworbene Punkte zählen als Zusatzpunkte.

Hausaufgabe 7.5 (Konvexkombinationen invarianter Verteilungen) *3 Punkte*

Seien $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$ zwei invariante Verteilungen für eine Übergangsmatrix P auf einem endlichen Zustandsraum S. Zeigen Sie, dass für beliebiges $\alpha \in [0,1]$ die Verteilung gegeben durch

$$\pi_j = \alpha \pi_j^{(1)} + (1-\alpha)\pi_j^{(2)}, \qquad j \in S$$

ebenfalls eine invariante Verteilung für P ist.