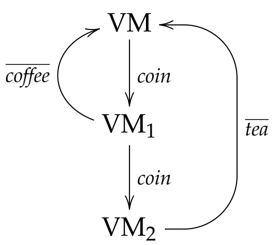
# Reaktive Systeme (SoSe 2015)

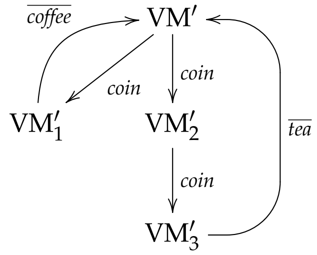
*MTV: Modelle und Theorie Verteilter Systeme* — *04.05.2015 – 10.05.2015*

## Tutorium 3

**Aufgabe 1: Trace Equivalence**

Gegeben seien die folgenden zwei Lösungen zum Getränkeautomaten aus dem letzten Tutorium.




1.a) Gib $\mathit{Traces}(\mathrm{VM})$ und $\mathit{Traces}(\mathrm{VM}')$ an.

Lösung

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{ \mathit{coin} \cdot \overline{\mathit{coffee}},\ \mathit{coin} \cdot \mathit{coin} \cdot \overline{\mathit{tea}} \right\} \\
\mathit{Traces}(\mathrm{VM}) &= A^* \cdot \{ \lambda,\ \mathit{coin},\ \mathit{coin} \cdot \mathit{coin} \} \\
\mathit{Traces}(\mathrm{VM}') &= A^* \cdot \{ \lambda,\ \mathit{coin},\ \mathit{coin} \cdot \mathit{coin} \}
\end{aligned}
$$

Alternativ auch:

$$
\begin{aligned}
\mathit{Traces}(\mathrm{VM}) &= \mathrm{L}\left(\left(\mathit{coin} \cdot \overline{\mathit{coffee}} + \mathit{coin} \cdot \mathit{coin} \cdot \overline{\mathit{tea}}\right)^* \cdot (\epsilon + \mathit{coin} + \mathit{coin} \cdot \mathit{coin})\right) \\
\mathit{Traces}(\mathrm{VM}') &= \mathrm{L}\left(\left(\mathit{coin} \cdot \overline{\mathit{coffee}} + \mathit{coin} \cdot \mathit{coin} \cdot \overline{\mathit{tea}}\right)^* \cdot (\epsilon + \mathit{coin} + \mathit{coin} \cdot \mathit{coin})\right)
\end{aligned}
$$

\Lösung

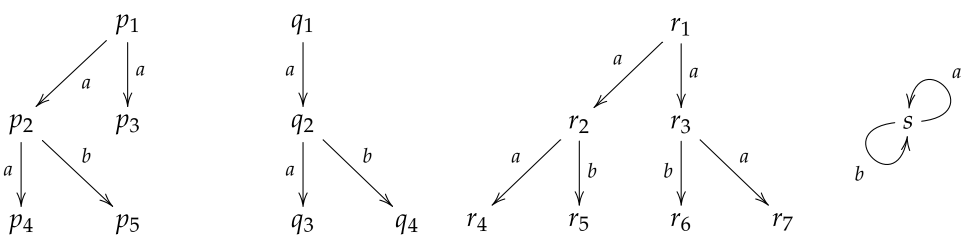
1.b) Wie stehen diese Mengen in Beziehung und was können wir daraus ableiten?

Lösung

Es gilt $\mathit{Traces}(\mathrm{VM}) = \mathit{Traces}(\mathrm{VM}')$. Wir können daraus lediglich folgern, dass die beiden Prozesse VM und VM′ für sich alleine dasselbe Verhalten haben. Nehmen wir z. B. den Informatiker aus dem letzten Tutorium in etwas abgewandelter Form: $\mathrm{CS}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\mathit{coin}}.\mathit{coffee}.\mathit{CS}'$ und schalten ihn parallel zu den Geränkeautomaten, dann sehen wir, dass die beiden Systeme nicht dasselbe Verhalten haben.
Vergleiche $(\mathrm{VM}' \mid \mathrm{CS}') \setminus \{ \mathit{coffee},\ \mathit{coin} \} \xrightarrow{\tau} (\mathrm{VM}'_2 \mid \mathrm{CS}'_1) \setminus \{ \mathit{coffee},\ \mathit{coin} \} \not\rightarrow$ und
$(\mathrm{VM} \mid \mathrm{CS}') \setminus \{ \mathit{coffee},\ \mathit{coin} \} \xrightarrow{\tau} (\mathrm{VM}_1 \mid \mathrm{CS}'_1) \setminus \{ \mathit{coffee},\ \mathit{coin} \} \xrightarrow{\tau} (\mathrm{VM} \mid \mathrm{CS}') \setminus \{ \mathit{coffee},\ \mathit{coin} \}$.

\Lösung

**Aufgabe 2: Starke Bisimulation I**




Gib für die folgenden Paare an, ob sie **stark bisimilar** sind, sich **gegenseitig stark simulieren** und/oder einer den anderen **stark simuliert**. Gib die jeweilige Relation an.
Beweise exemplarisch für Aufgabe 2.b) die angegebene Eigenschaft.

2.a) $p_1$ und $q_1$

Lösung

$q_1 \lesssim p_1$ und $p_1 \lesssim q_1$.
$q_1$ simuliert $p_1$ stark ($\mathcal{R}$) und $p_1$ simuliert $q_1$ stark ($\mathcal{S}$). Somit simulieren sich $p_1$ und $q_1$ gegenseitig stark, also $p_1 \simeq q_1$. Sie sind aber nicht stark bisimilar.
$\mathcal{R} = \{ (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_2), (p_4, q_3), (p_5, q_4) \}$
$\mathcal{S} = \{ (q_1, p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_4), (q_4, p_5) \}$
Sie sind nicht stark bisimilar, da $(p_3, q_2) \in \mathcal{R}$, aber $(q_2, p_3) \notin \mathcal{S}$.
$(q_2, p_3) \notin \mathcal{S}$, da $q_2 \rightarrow$, aber $p_3 \not\rightarrow$. $(p_3, q_2) \in \mathcal{R}$ **muss** aber gelten, da $(p_1, q_1) \in \mathcal{R}$ und $q_1 \xrightarrow{a} q_2$ die einzige Möglichkeit ist, um $p_1 \xrightarrow{a} p_3$ stark zu simulieren.

\Lösung

2.b) $q_1$ und $r_1$

Lösung

$q_1$ und $r_1$ sind stark bisimilar, wie wir an $\mathcal{R}$ zeigen werden.
Sei $\mathcal{R} = \{ (q_1, r_1), (q_2, r_2), (q_2, r_3), (q_3, r_4), (q_4, r_5), (q_3, r_7), (q_4, r_6) \}$. Nun bleibt zu beweisen, dass $\mathcal{R}$ eine starke Bisimulation ist:

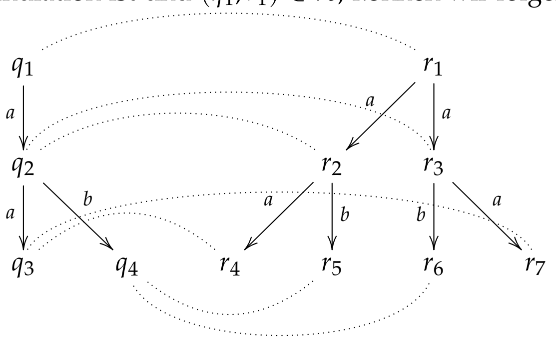
- Betrachte $(q_1, r_1) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $q_1$:
  - Für $q_1 \xrightarrow{a} q_2$ wähle $r_1 \xrightarrow{a} r_2$ und $(q_2, r_2) \in \mathcal{R}$.

  Transitionen in $r_1$:
  - Für $r_1 \xrightarrow{a} r_2$ wähle $q_1 \xrightarrow{a} q_2$ und $(q_2, r_2) \in \mathcal{R}$.
  - Für $r_1 \xrightarrow{a} r_3$ wähle $q_1 \xrightarrow{a} q_2$ und $(q_2, r_3) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(q_2, r_2) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $q_2$:
  - Für $q_2 \xrightarrow{a} q_3$ wähle $r_2 \xrightarrow{a} r_4$ und $(q_3, r_4) \in \mathcal{R}$.
  - Für $q_2 \xrightarrow{b} q_4$ wähle $r_2 \xrightarrow{b} r_5$ und $(q_4, r_5) \in \mathcal{R}$.

  Transitionen in $r_2$:
  - Für $r_2 \xrightarrow{a} r_4$ wähle $q_2 \xrightarrow{a} q_3$ und $(q_3, r_4) \in \mathcal{R}$.
  - Für $r_2 \xrightarrow{b} r_5$ wähle $q_2 \xrightarrow{b} q_4$ und $(q_4, r_5) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(q_2, r_3) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $q_2$:
  - Für $q_2 \xrightarrow{a} q_3$ wähle $r_3 \xrightarrow{a} r_7$ und $(q_3, r_7) \in \mathcal{R}$.
  - Für $q_2 \xrightarrow{b} q_4$ wähle $r_3 \xrightarrow{b} r_6$ und $(q_4, r_6) \in \mathcal{R}$.

  Transitionen in $r_3$:
  - Für $r_3 \xrightarrow{a} r_7$ wähle $q_2 \xrightarrow{a} q_3$ und $(q_3, r_7) \in \mathcal{R}$.
  - Für $r_3 \xrightarrow{b} r_6$ wähle $q_2 \xrightarrow{b} q_4$ und $(q_4, r_6) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(q_3, r_4) \in \mathcal{R}$.
  Keine Transitionen in $q_3$ oder $r_4$ möglich.
- Betrachte $(q_4, r_5) \in \mathcal{R}$.
  Keine Transitionen in $q_4$ oder $r_5$ möglich.
- Betrachte $(q_3, r_7) \in \mathcal{R}$.
  Keine Transitionen in $q_3$ oder $r_7$ möglich.
- Betrachte $(q_4, r_6) \in \mathcal{R}$.
  Keine Transitionen in $q_4$ oder $r_6$ möglich.

Da $\mathcal{R}$ eine starke Bisimulation ist und $(q_1, r_1) \in \mathcal{R}$, können wir folgern, dass $q_1 \sim r_1$.



\Lösung

2.c) $p_1$ und $r_1$

Lösung

Da wir bereits wissen, dass $q_1 \sim r_1$ gilt, wissen wir auch, dass $r_1$ von $p_1$ stark simuliert wird ($r_1 \lesssim p_1$) und $p_1$ von $r_1$ stark simuliert wird ($r_1 \lesssim p_1$). Somit simulieren sich $p_1$ und $r_1$ gegenseitig stark. Sie sind aber nicht stark bisimilar.

\Lösung

2.d) $p_1$ und $s$

Lösung

$s$ simuliert $p_1$ stark.
$\mathcal{R} = \{ (p_1, s), (p_2, s), (p_3, s), (p_4, s), (p_5, s) \}$

\Lösung

2.e) $q_1$ und $s$

Lösung

$s$ simuliert $q_1$.
$\mathcal{R} = \{ (q_1, s), (q_2, s), (q_3, s), (q_4, s) \}$

\Lösung

2.f) $r_1$ und $s$

Lösung

Da $r_1 \sim q_1$ und $q_1$ von $s$ stark simuliert wird ($q_1 \lesssim s$), folgern wir, dass $s$ auch $r_1$ stark simuliert ($s \lesssim r_1$).

\Lösung

**Aufgabe 3: Starke Bisimulation II**

Untersuche die in Aufgabe 1 gegebenen Prozesse darauf, ob sie **stark bisimilar** sind, sich **gegenseitig stark simulieren** und/oder einer den anderen **stark simuliert**. Beweise deine Aussage.

Lösung

VM simuliert VM′ stark ($\mathrm{VM}' \lesssim \mathrm{VM}$).
$\mathcal{R} = \left\{ (\mathrm{VM}', \mathrm{VM}), (\mathrm{VM}'_1, \mathrm{VM}_1), (\mathrm{VM}'_2, \mathrm{VM}_1), (\mathrm{VM}'_3, \mathrm{VM}_2) \right\}$

- Betrachte $(\mathrm{VM}', \mathrm{VM}) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in VM′:
  - Für $\mathrm{VM}' \stackrel{coin}{\rightarrow} \mathrm{VM}'_1$ wähle $\mathrm{VM} \stackrel{coin}{\rightarrow} \mathrm{VM}_1$ und $(\mathrm{VM}'_1, \mathrm{VM}_1) \in \mathcal{R}$.
  - Für $\mathrm{VM}' \stackrel{coin}{\rightarrow} \mathrm{VM}'_2$ wähle $\mathrm{VM} \stackrel{coin}{\rightarrow} \mathrm{VM}_1$ und $(\mathrm{VM}'_2, \mathrm{VM}_1) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(\mathrm{VM}'_1, \mathrm{VM}_1) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $\mathrm{VM}'_1$:
  - Für $\mathrm{VM}'_1 \stackrel{\overline{coffee}}{\rightarrow} \mathrm{VM}'$ wähle $\mathrm{VM}_1 \stackrel{\overline{coffee}}{\rightarrow} \mathrm{VM}$ und $(\mathrm{VM}', \mathrm{VM}) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(\mathrm{VM}'_2, \mathrm{VM}_1) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $\mathrm{VM}'_2$:
  - Für $\mathrm{VM}'_2 \stackrel{coin}{\rightarrow} \mathrm{VM}'_3$ wähle $\mathrm{VM}_1 \stackrel{coin}{\rightarrow} \mathrm{VM}_2$ und $(\mathrm{VM}'_3, \mathrm{VM}_2) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(\mathrm{VM}'_3, \mathrm{VM}_2) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $\mathrm{VM}'_3$:
  - Für $\mathrm{VM}'_3 \stackrel{\overline{tea}}{\rightarrow} \mathrm{VM}'$ wähle $\mathrm{VM}_2 \stackrel{\overline{tea}}{\rightarrow} \mathrm{VM}$ und $(\mathrm{VM}', \mathrm{VM}) \in \mathcal{R}$.

Da $\mathcal{R}$ eine starke Simulation ist und $(\mathrm{VM}', \mathrm{VM}) \in \mathcal{R}$, können wir folgern, dass VM′ von VM stark simuliert wird ($\mathrm{VM}' \lesssim \mathrm{VM}$).

\Lösung

**Aufgabe 4: Starke Bisimulation III**

Beweise oder widerlege für die folgenden Aussagen. Falls sie nicht gelten, gib an unter welchen Bedingungen sie gelten würden.

4.a) Wenn $P \sim Q$, dann $(P + R) \sim (Q + R)$

Lösung

Gilt.
Aus $P \sim Q$ folgt: Es gibt eine starke Bisimulation $\mathcal{B}_{\mathrm{PQ}}$ mit $(P, Q) \in \mathcal{B}_{\mathrm{PQ}}$.
Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathrm{PQ}} \cup \mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}} \cup \{\ (P + R,\ Q + R)\ \}$.
Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine starke Bisimulation ist.

- Betrachte $\mathcal{B}_{\mathrm{PQ}} \subseteq \mathcal{B}$.
  - $\mathcal{B}_{\mathrm{PQ}}$ ist bereits nach Voraussetzung eine Bisimulation.
- Betrachte $\mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}} \subseteq \mathcal{B}$.
  - $\mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}}$ ist per Definition eine Bisimulation.
- Betrachte $(P + R, Q + R) \in \mathcal{B}$.
  - Transitionen in $P + R$:

    1. Fall: SUM1

    $$\text{SUM1}\ \frac{\overline{P \xrightarrow{a} P'}}{P + R \xrightarrow{a} P'}$$

    wegen $P \sim Q$ gibt es auch einen Übergang $Q \xrightarrow{a} Q'$. Also gibt es auch einen Übergang in $Q + R$

    $$\text{SUM1}\ \frac{\overline{Q \xrightarrow{a} Q'}}{Q + R \xrightarrow{a} Q'}$$

    und $(P', Q') \in \mathcal{B}_{\mathrm{PQ}}$.

    2. Fall: SUM2

    $$\text{SUM2}\ \frac{\overline{R \xrightarrow{b} R'}}{P + R \xrightarrow{b} R'}$$

    in $Q + R$ gibt es den Übergang

    $$\text{SUM2}\ \frac{\overline{R \xrightarrow{b} R'}}{Q + R \xrightarrow{b} R'}$$

    und $(R', R') \in \mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}}$.
  - Transitionen in $Q + R$:
    Da $P + R$ und $Q + R$ die gleiche Struktur haben, läuft dieser Fall analog ab.

Da $\mathcal{B}$ eine starke Bisimulation ist und $(P + R, Q + R) \in \mathcal{B}$, können wir folgern, dass $P + R \sim Q + R$.

\Lösung

4.b) $(a.\mathbf{0} + b.P) \setminus \{\ a\ \} \sim b.P$

Lösung

Gilt nicht; Gegenbeispiel: $P \overset{\text{def}}{=} a.\mathbf{0}$.
Unter der Bedingung, dass weder die Aktion $a$, noch ihre co-Aktion $\bar{a}$ in $P$ enthalten ist, gilt diese Bisimulation.

\Lösung

4.c) $(P + Q)\,[f] \sim (P\,[f] + Q\,[f])$

Lösung

Gilt.
Sei $\mathcal{B} = \mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}} \cup \{\ ((P + Q)\,[f],\ P\,[f] + Q\,[f])\ \}$.

- Betrachte $\mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}} \subseteq \mathcal{B}$.
  - $\mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}}$ ist per Definition eine Bisimulation.
- Betrachte $((P + Q)\,[f], P\,[f] + Q\,[f]) \in \mathcal{B}$.
  - Transitionen in $(P + Q)\,[f]$:

    1. Fall: SUM1

    $$\text{REL}\ \frac{\text{SUM1}\ \dfrac{\overline{P \xrightarrow{a} P'}}{P + Q \xrightarrow{a} P'}}{(P + Q)\,[f] \xrightarrow{f(a)} P'\,[f]}$$

in $P[f]+Q[f]$ gibt es den Übergang

$$\text{SUM1}\,\dfrac{\text{REL}\,\dfrac{\overline{P \overset{a}{\to} P'}}{P[f] \overset{f(a)}{\to} P'[f]}}{P[f]+Q[f] \overset{f(a)}{\to} P'[f]}$$

und $(P'[f], P'[f]) \in \mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}}$.

2. Fall: SUM2

$$\text{REL}\,\dfrac{\text{SUM2}\,\dfrac{\overline{Q \overset{b}{\to} Q'}}{P+Q \overset{b}{\to} Q'}}{(P+Q)[f] \overset{f(b)}{\to} Q'[f]}$$

in $P[f]+Q[f]$ gibt es den Übergang

$$\text{SUM2}\,\dfrac{\text{REL}\,\dfrac{\overline{Q \overset{b}{\to} Q'}}{Q[f] \overset{f(b)}{\to} Q'[f]}}{P[f]+Q[f] \overset{f(b)}{\to} Q'[f]}$$

und $(Q'[f], Q'[f]) \in \mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}}$.

- Transitionen in $P[f]+Q[f]$:
  1. Fall: SUM1

$$\text{SUM1}\,\dfrac{\text{REL}\,\dfrac{\overline{P \overset{a}{\to} P'}}{P[f] \overset{f(a)}{\to} P'[f]}}{P[f]+Q[f] \overset{f(a)}{\to} P'[f]}$$

in $(P+Q)[f]$ gibt es den Übergang

$$\text{REL}\,\dfrac{\text{SUM1}\,\dfrac{\overline{P \overset{a}{\to} P'}}{P+Q \overset{a}{\to} P'}}{(P+Q)[f] \overset{f(a)}{\to} P'[f]}$$

und $(P'[f], P'[f]) \in \mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}}$.

2. Fall: SUM2

$$\text{SUM2}\,\dfrac{\text{REL}\,\dfrac{\overline{Q \overset{b}{\to} Q'}}{Q[f] \overset{f(b)}{\to} Q'[f]}}{P[f]+Q[f] \overset{f(b)}{\to} Q'[f]}$$

in $(P+Q)[f]$ gibt es den Übergang

$$\text{REL}\,\dfrac{\text{SUM2}\,\dfrac{\overline{Q \overset{b}{\to} Q'}}{P+Q \overset{b}{\to} Q'}}{(P+Q)[f] \overset{f(b)}{\to} Q'[f]}$$

und $(Q'[f], Q'[f]) \in \mathrm{Id}_{\mathsf{Proc}}$.

Da $\mathcal{B}$ eine starke Bisimulation ist und $((P+Q)[f], P[f]+Q[f]) \in \mathcal{B}$, können wir folgern, dass $(P+Q)[f] \sim P[f]+Q[f]$.

\Lösung

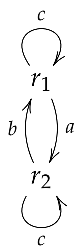
4.d) $\Big(\big(a.P \mid \bar{b}.Q\big)\,[a/b,\ b/a]\Big) \setminus \{\, a,\ b \,\} \sim \mathbf{0}$

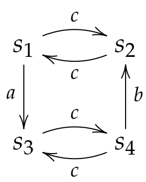
Lösung

Gilt.
Da die Aktionen $a$ und $b$ auf unterster Ebene unter Restriktionen stehen, wäre nur ein COM3 Schritt möglich. Dieser Schritt ist allerdings nicht möglich, da $a$ keine co-Aktion zu $b$ ist.

\Lösung

**Aufgabe 5: Starke Bisimulation IV**




5.a) Wird $s_1$ von $r_1$ stark simuliert ($s_1 \lesssim r_1$)?

Lösung

Ja, $r_1$ simuliert $s_1$ stark ($s_1 \lesssim r_1$).
Sei $\mathcal{S} = \{\, (s_1,\ r_1),\ (s_2,\ r_1),\ (s_3,\ r_2),\ (s_4,\ r_2) \,\}$.

- Betrachte $(s_1, r_1) \in \mathcal{S}$.
  Transitionen in $s_1$:
  - Für $s_1 \xrightarrow{c} s_2$ wähle $r_1 \xrightarrow{c} r_1$ und $(s_2, r_1) \in \mathcal{S}$.
  - Für $s_1 \xrightarrow{a} s_3$ wähle $r_1 \xrightarrow{a} r_2$ und $(s_3, r_2) \in \mathcal{S}$.
- Betrachte $(s_2, r_1) \in \mathcal{S}$.
  Transitionen in $s_2$:
  - Für $s_2 \xrightarrow{c} s_1$ wähle $r_1 \xrightarrow{c} r_1$ und $(s_1, r_1) \in \mathcal{S}$.
- Betrachte $(s_3, r_2) \in \mathcal{S}$.
  Transitionen in $s_3$:
  - Für $s_3 \xrightarrow{c} s_4$ wähle $r_2 \xrightarrow{c} r_2$ und $(s_4, r_2) \in \mathcal{S}$.
- Betrachte $(s_4, r_2) \in \mathcal{S}$.
  Transitionen in $s_4$:
  - Für $s_4 \xrightarrow{c} s_3$ wähle $r_2 \xrightarrow{c} r_2$ und $(s_3, r_2) \in \mathcal{S}$.
  - Für $s_4 \xrightarrow{b} s_2$ wähle $r_2 \xrightarrow{b} r_1$ und $(s_2, r_1) \in \mathcal{S}$.

\Lösung

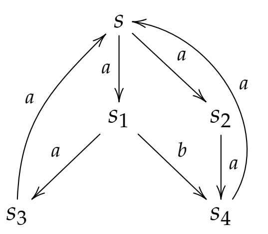
5.b) Wird $r_1$ von $s_1$ stark simuliert ($r_1 \lesssim s_1$)?

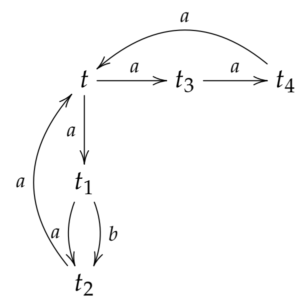
Lösung

$s_1$ simuliert $r_1$ nicht stark.
Angenommen $s_1$ simuliert $r_1$ stark, dann existiert eine Simulation $\mathcal{R}$ mit $(r_1, s_1) \in \mathcal{R}$. Mit dem Übergang $\xrightarrow{c}$ muss dann auch gelten, dass $(r_1, s_2) \in \mathcal{R}$. Da nun aber gilt, dass $r_1 \xrightarrow{a}$, aber $s_2 \overset{a}{\not\rightarrow}$, kann diese Simulation nicht existieren.
$r_1$ und $s_1$ simulieren sich nicht gegenseitig stark. Gilt, da $s_1$ $r_1$ nicht stark simuliert.
$r_1$ und $s_1$ sind nicht stark bisimilar. Gilt, da $s_1$ $r_1$ nicht stark simuliert.

\Lösung

**Aufgabe 6: Starke Bisimulation V**




Beweise, dass $s \sim t$ gilt.

Lösung

Sei $\mathcal{R} = \{\ (s,\ t),\ (s_1,\ t_1),\ (s_3,\ t_2),\ (s_4,\ t_2),\ (s_2,\ t_3),\ (s_4,\ t_4)\ \}$.

- Betrachte $(s,t) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $s$:
  - Für $s \xrightarrow{a} s_1$ wähle $t \xrightarrow{a} t_1$ und $(s_1,t_1) \in \mathcal{R}$.
  - Für $s \xrightarrow{a} s_2$ wähle $t \xrightarrow{a} t_3$ und $(s_2,t_3) \in \mathcal{R}$.

  Transitionen in $t$:
  - Für $t \xrightarrow{a} t_1$ wähle $s \xrightarrow{a} s_1$ und $(s_1,t_1) \in \mathcal{R}$.
  - Für $t \xrightarrow{a} t_3$ wähle $s \xrightarrow{a} s_2$ und $(s_2,t_3) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(s_1,t_1) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $s_1$:
  - Für $s_1 \xrightarrow{a} s_3$ wähle $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ und $(s_3,t_2) \in \mathcal{R}$.
  - Für $s_1 \xrightarrow{b} s_4$ wähle $t_1 \xrightarrow{b} t_2$ und $(s_4,t_2) \in \mathcal{R}$.

  Transitionen in $t_1$:
  - Für $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ wähle $s_1 \xrightarrow{a} s_3$ und $(s_3,t_2) \in \mathcal{R}$.
  - Für $t_1 \xrightarrow{b} t_2$ wähle $s_1 \xrightarrow{b} s_4$ und $(s_4,t_2) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(s_3,t_2) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $s_3$:
  - Für $s_3 \xrightarrow{a} s$ wähle $t_2 \xrightarrow{a} t$ und $(s,t) \in \mathcal{R}$.

  Transitionen in $t_2$:
  - Für $t_2 \xrightarrow{a} t$ wähle $s_3 \xrightarrow{a} s$ und $(s,t) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(s_4,t_2) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $s_4$:
  - Für $s_4 \xrightarrow{a} s$ wähle $t_2 \xrightarrow{a} t$ und $(s,t) \in \mathcal{R}$.

  Transitionen in $t_2$:
  - Für $t_2 \xrightarrow{a} t$ wähle $s_4 \xrightarrow{a} s$ und $(s,t) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(s_2,t_3) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $s_2$:
  - Für $s_2 \xrightarrow{a} s_4$ wähle $t_3 \xrightarrow{a} t_4$ und $(s_4,t_4) \in \mathcal{R}$.

  Transitionen in $t_3$:
  - Für $t_3 \xrightarrow{a} t_4$ wähle $s_2 \xrightarrow{a} s_4$ und $(s_4,t_4) \in \mathcal{R}$.
- Betrachte $(s_4,t_4) \in \mathcal{R}$.
  Transitionen in $s_4$:
  - Für $s_4 \xrightarrow{a} s$ wähle $t_4 \xrightarrow{a} t$ und $(s,t) \in \mathcal{R}$.

  Transitionen in $t_4$:
  - Für $t_4 \xrightarrow{a} t$ wähle $s_4 \xrightarrow{a} s$ und $(s,t) \in \mathcal{R}$.

Da $\mathcal{R}$ eine starke Bisimulation ist und $(s,t) \in \mathcal{R}$, können wir folgern, dass $s \sim t$.

\Lösung