Tutorium 9

Aufgabe 1: Kombinatorik

1.a) Wie viele Möglichkeiten gibt es eine $n-$elementige Menge syntaktisch verschieden aufzuschreiben, ohne Elemente doppelt aufzuschreiben?

Lösung

$P(n) = n!$.

\Lösung

1.b) Wie viele Werte kann ein Byte annehmen?

Lösung

Ein Byte hat 8 Bit, von denen jedes 2 Werte annehmen kann, also $V_{mW}(2,8) = 2^8 = 256$.

\Lösung

1.c) In einem Hotel sind noch 12 Zimmer frei, wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 Gäste auf diese 12 Zimmer zu verteilen?

Lösung

$V_{oW}(12,9) = \frac{12!}{(12-9)!} = 79\,833\,600$.

\Lösung

1.d) Gegeben seien 5 Ziffern, $1, 2, 2, 3, 4$.

1.d(i) Wie viele Zahlen bestehend aus diesen Ziffern gibt es?

Lösung

Wir haben eine Äquivalenz bestehend aus vier Äquivalenzklassen, den Ziffern $1, 2, 3, 4$. Nur in der Äquivalenzklasse der 2 sind zwei Elemente enthalten.

Also erhalten wir $P_{\equiv}(5) = \frac{5!}{1! * 2! * 1! * 1!} = 60$

\Lösung

1.d(ii) Wie viele dieser Zahlen beginnen mit einer 2?

Lösung

Die 2 an der ersten Stelle der Zahl ist fest, für die restlichen 4 Ziffern gibt es noch $P(4) = 4! = 24$ Möglichkeiten sie zu verteilen.

\Lösung

1.d(iii) Wie viele dieser Zahlen beginnen mit einer 4?

Lösung

Die 4 an der ersten Stelle der Zahl ist fest, für die restlichen 4 Ziffern gibt es noch $P_{\equiv}(4) = \frac{4!}{1! * 2! * 1!} = 12$ Möglichkeiten sie zu verteilen.

\Lösung

1.e) Auf wie viele verschiedene Arten kann man die Flächen eines Würfels mit sechs Farben färben, wenn jede Farbe nur einmal verwendet werden darf?
Hinweis: Als verschieden gelten nur die Färbungen, die nicht durch Drehung des Würfels ineinander überführt werden können.

Lösung

Insgesamt gibt es $P(6) = 6! = 720$ Möglichkeiten die Farben auf den Würfel zu verteilen.
Jetzt zählen wir alle Möglichkeiten, wie man einen Würfel durch Drehungen anders hinlegen kann. Jede der 6 Seiten kann unten liegen, für jede dieser 6 Seiten gibt es 4 verschiedene Möglichkeiten die Seitenflächen nach vorne zeigen zu lassen. Also gibt es insgesamt 24 verschiedene Möglichkeiten einen Würfel mit festen Farben zu drehen.

Somit gibt es also insgesamt $\frac{P(6)}{24} = \frac{6!}{24} = 30$ verschiedene Möglichkeiten einen Würfel mit sechs Farben zu färben.

\Lösung

1.f) In einem Tutorium sind 15 Studierende. Die Hausaufgaben sind in Gruppen zu je 3 oder 4 Personen abzugeben. Wie viele Möglichkeiten der Gruppeneinteilung gibt es?

Lösung

Entweder bilden wir 5 Gruppen zu je 3 Personen oder 3 Gruppen zu je 4 Personen und eine 3er Gruppe. Somit ergeben sich dann folgende Möglichkeiten:

- 3**er Gruppen:** Die Studierenden einer Gruppe gehören einer Äquivalenzklasse an, also erhalten wir: $P_{\equiv}(15) = \frac{15!}{3! * 3! * 3! * 3! * 3!} = 168\,168\,000$.
  Da die Reihenfolge der Gruppen keine Rolle spielt, müssen wir durch die Anzahl der Möglichkeiten diese Gruppen anzuordnen teilen: $\frac{P_{\equiv}(15)}{P(5)} = \frac{P_{\equiv}(15)}{5!} = 1\,401\,400$.
- 3**er und** 4**er Gruppen:** Die Studierenden einer Gruppe gehören einer Äquivalenzklasse an, also erhalten wir: $P_{\equiv}(15) = \frac{15!}{3! * 4! * 4! * 4!} = 15\,765\,750$. Die Reihenfolge der 4er Gruppen spielt wieder keine Rolle: $\frac{P_{\equiv}(15)}{P(3)} = \frac{P_{\equiv}(15)}{3!} = 2\,627\,625$

Somit ergeben sich insgesamt also $1\,401\,400 + 2\,627\,62 = 4\,029\,025$ Möglichkeiten 15 Studierende aufzuteilen.

\Lösung

1.g) In einem Bücherregal stehen 6 japanische, 4 spanische und 9 koreanische Bücher. Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Bücher in verschiedenen Sprachen auszuwählen?

Lösung

$$\begin{aligned} & K_{oW}(6,1) * K_{oW}(4,1) + K_{oW}(6,1) * K_{oW}(9,1) + K_{oW}(4,1) * K_{oW}(9,1) \\ &= \binom{6}{1}\binom{4}{1} + \binom{6}{1}\binom{9}{1} + \binom{4}{1}\binom{9}{1} \\ &= 24 + 54 + 36 \\ &= 114 \end{aligned}$$

\Lösung

1.h) Wir spielen Lotto, also „6 aus 49".

1.h(i) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Richtige zu haben?

Lösung

Wir bilden 2 Urnen, in der einen Urne sind die 6 Richtigen, in der anderen Urne sind die restlichen 43 Zahlen.
Dann greifen wir jeweils 3-mal in jede Urne, also
$K_{oW}(6,3) * K_{oW}(43,3) = \binom{6}{3}\binom{43}{3} = 246\,820$.

\Lösung

1.h(ii) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Richtige mit Zusatzzahl zu haben?

Lösung

Wir bilden 3 Urnen, eine mit den 6 Richtigen, eine mit der Zusatzzahl und eine mit den restlichen 42 Zahlen.
Dann greifen wir 5-mal in die Urne mit den 6 Richtigen, und 1-mal in die Urne mit der Zusatzzahl, also
$K_{oW}(6,5) * K_{oW}(1,1) * K_{oW}(42,0) = \binom{6}{5}\binom{1}{1}\binom{42}{0} = 6$.

\Lösung

1.i) In einer Urne sind 5 gelbe, 3 grüne und 7 blaue Kugeln. Wie oft muss gezogen werden, damit auf jeden Fall 2 Kugeln mit gleicher Farbe gezogen wurden.

Lösung

Wir benutzen das Schubfachprinzip. Wir bilden 3 Schubfächer, jeweils eins für jede Farbe. Wir müssen also 3-mal ziehen, damit in jedem Schubfach eine Kugel ist, also haben wir auf jeden Fall 2 Kugeln mit gleicher Farbe, wenn wir 4-mal gezogen haben.

\Lösung

1.j) Ein Restaurant bietet 7 verschiedene Vorspeisen, 12 Hauptgerichte und 4 Nachspeisen an. Christoph will höchstens zwei Vorspeisen, ein oder zwei Hauptgerichte und höchstens eine Nachspeise essen. Wie viele mögliche Menüzusammenstellungen gibt es?

Lösung

$$\begin{aligned}
&(K_{mW}(7,0) + K_{mW}(7,1) + K_{mW}(7,2)) * (K_{mW}(12,1) + K_{mW}(12,2)) * \\
&(K_{mW}(4,0) + K_{mW}(4,1)) \\
&= \left(\binom{7+0-1}{0} + \binom{7+1-1}{1} + \binom{7+2-1}{2}\right) * \left(\binom{12+1-1}{1} + \binom{12+2-1}{2}\right) * \\
&\left(\binom{4+0-1}{0} + \binom{4+1-1}{1}\right) \\
&= 36 * 90 * 5 \\
&= 16\,200
\end{aligned}$$

\Lösung

1.k) Eine Firma hat 25 Angestellte, davon sind 14 männlich. Es soll eine Arbeitsgruppe bestehend aus 9 Mitarbeitern gebildet werden, so dass mindestens eine Frau und ein Mann in der Arbeitsgruppe sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Arbeitsgruppe zu bilden?

Lösung

$$\sum_{i=1}^{8} K_{oW}(14, i) * K_{oW}(11, 9-i) = \sum_{i=1}^{8} \binom{14}{i}\binom{11}{9-i} = 2\,040\,918$$

\Lösung