Grundlagen und algebraische Strukturen (WiSe 13/14)

LaS: Logik und Semantik — *13.1.2014 – 19.1.2014*

Tutorium 10

Aufgabe 1: Typen von Graphen

1.a) *Beweise oder Widerlege:* In jedem einfachem, endlichen, ungerichteten Graphen mit mindestens zwei Knoten gibt es mindestens zwei Knoten, welche den gleichen Grad haben.

1.b) *Berechne:* Die maximale Anzahl an Kanten in einem einfachen, ungerichteten Graphen mit n Knoten.

1.c) *Berechne:* Die maximale Anzahl an Kanten in einem ungerichteten Graphen mit n Knoten.

1.d) *Beweise:* In jedem ungerichteten, endlichen Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.
Hinweis: Für alle ungerichteten, endlichen Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) = 2 * |E| \tag{T1}$$

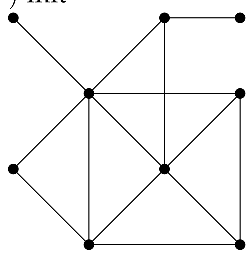
1.e) *Beweise:* In jedem ungerichteten, endlichen Graph $G = (V, E)$, egal ob er Schlingen hat, gilt:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) = 2 * |E|$$

Hinweis: Ein Knoten, der lediglich eine Schlinge hat, hat den Grad 2.

Aufgabe 2: Zerlegungen von Graphen

2.a) Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit



2.a(i) *Berechne:* Wie viele Färbungen der Knoten mit den Farben rot, grün und blau gibt es, so dass es gleich viele rote, grüne und blaue Knoten gibt.

2.a(ii) *Gib an:* Für eine dieser Färbungen die 3 Teilgraphen, die jeweils nur Knoten einer Farbe, alle Knoten dieser Farbe und alle Kanten zwischen Knoten dieser Farbe enthalten.

2.a(iii) *Berechne:* Wie viele Färbungen der Knoten mit den Farben rot und grün gibt es, so dass jeweils 3 Paare von benachbarten Knoten die Farbe rot haben und alle anderen Knoten grün sind.

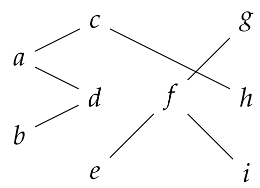
2.a(iv) *Gib an:* Wie viele Knoten müssen in jeder dieser Färbungen mindestens rot sein und wie viele Knoten können maximal rot gefärbt werden?

2.a(v) *Gib an:* Für eine dieser Färbungen die beiden Teilgraphen, die jeweils nur Knoten einer Farbe, alle Knoten dieser Farbe und so viele Kanten des Ursprungsgraphen wie möglich enthalten.

2.b) *Beweise oder Widerlege:* Der Graph aus Aufgabe 2(a) ist bipartit.

Aufgabe 3: Graphen

3.a) Gegeben sei der Graph G:



G

3.a(i) *Gib an:* G in Tupel-Schreibweise.

3.a(ii) *Gib an:* Den Grad von f in G.

3.a(iii) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G einen Knotenpfad von a nach h sowie den dazu gehörigen Kantenpfad.

3.a(iv) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G zwei Knoten u und v so, dass es keinen Pfad von u nach v gibt.

3.a(v) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G einen Knotenpfad, der alle Knoten des Graphen durchläuft.

3.a(vi) *Gib an:* Bestimme in G alle kürzesten Pfade und Zyklen mit mindestens einer Kante sowie alle längsten einfachen Pfade und Zyklen.
Hinweis: Es reicht jeweils Knoten-Pfade anzugeben.

3.a(vii) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G den größten Teilgraphen, der zusammenhängend ist.

3.a(viii) *Gib an:* Ist G bipartit? Gib, falls möglich, eine Bipartition an.

3.a(ix) *Gib an:* Bestimme, falls möglich, für G eine Färbung der Knoten in den Farben rot und grün so, dass es keine Pfade der Länge 2 gibt, in denen alle Knoten die gleiche Farbe haben.

3.b) *Gib an:* Zeichne einen ungerichteten Graphen mit einem Zyklus der Länge 1.

3.c) *Beweise oder Widerlege:* Es gibt einen ungerichteten Graphen, in dem der Grad eines Knotens größer ist als die Zahl der Knoten und als die Zahl der Kanten.