Methodische und Praktische Grundlagen der Informatik 4

Aufgabenblatt 6

mpgi4@cg.tu-berlin.de

WiSe 2013/2014

Allgemeine Hinweise:

- Die Aufgaben sollen in Gruppen bestehend aus zwei bis drei Personen bearbeitet werden. Ausnahmen müssen mit dem jeweiligen Tutor abgesprochen werden.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen in Form einer ZIP Datei bis **Montag, den 10.02.2014, um 23:55 Uhr** auf der ISIS Webseite der Vorlesung ein. Wählen Sie dazu für Ihre Gruppe eine/n Sprecher/in, welche/r die Abgabe durchführt, und tragen Sie in jede abgegebene Datei Name und Email-Adresse aller Gruppenmitglieder ein.
- Wenn eine Aufgabe die Abgabe einer Grafik verlangt, dann muss ein vollständig funktionsfähiges Programm in der Lösung enthalten sein, welches bei der Ausführungen die Grafik erstellt. Wenn zum Erstellen einer Grafik bereits eine Funktion gegeben ist, dann darf diese nicht verändert werden.
- Tragen Sie in die Datei `README.txt` Name und Email-Adresse aller Gruppenmitglieder sowie einige kurze Kommentare zu Ihrer Abgabe ein. Vermerken Sie insbesondere Fehler oder Unvollständigkeiten in Ihrer Abgabe.

Aufgabe 1: Lotka-Volterra Modell (6.0 Punkte)

Das Lotka-Volterra Modell ist durch folgendes System von Differentialgleichungen gegeben:

$$u' = u(v-2) \tag{1a}$$

$$v' = v(1-u). \tag{1b}$$

Integrieren Sie die Differentialgleichung unter Verwendung des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens. Führen Sie jedes Verfahren für 100 Schritte mit einer Schrittweite von $h = 0.05$ und den Anfangswerten $u_0 = 1$ und $v_0 = 0.5$ durch. Nutzen Sie für Ihre Implementierung den vorgegebenen Programmrahmen und geben Sie den durch das Programm erstellten Plot (vgl. Abbildung 1) in Form einer PDF Datei ab.

Hinweise: Das System von Differentialgleichungen in Gleichung 1 sollte zunächst in Vektorform geschrieben werden. Mit $\mathbf{y} = (u(t), v(t))^T$ ergibt sich dann

$$\mathbf{y}' = f\big(t, \mathbf{y}(t)\big), \tag{2a}$$

wobei

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\big(t, \mathbf{y}(t)\big) = \begin{pmatrix} u(t)\big(v(t)-2\big) \\ v(t)\big(1-u(t)\big) \end{pmatrix} \tag{2b}$$

ist. Ein Schritt des expliziten Euler-Verfahrens ist dann wie gewöhnlich gegeben durch:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\, f(t_i, \mathbf{y}_i) \tag{3}$$

Ein Schritt des impliziten Euler-Verfahrens ist geben durch:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\, f(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}) \tag{4}$$

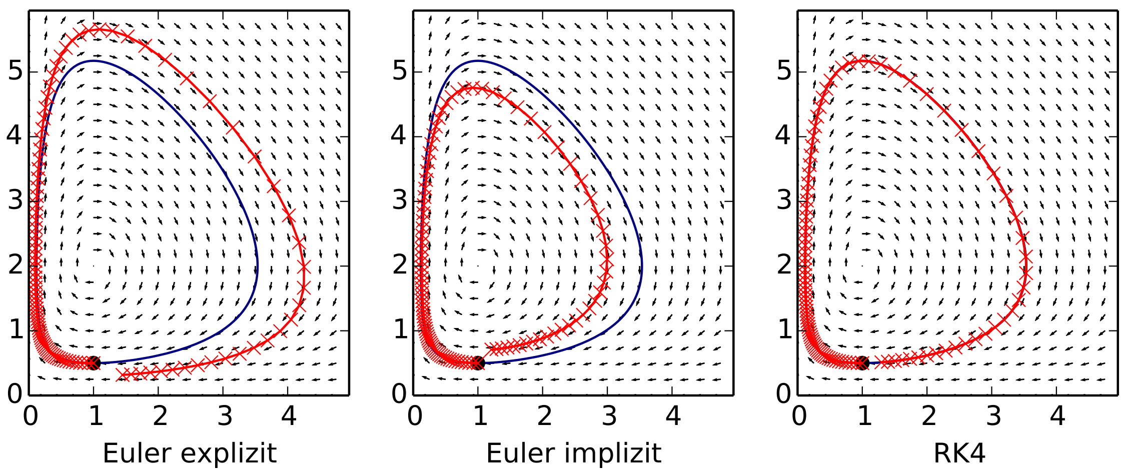

Abbildung 1: Vergleich der analytischen Lösung mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren und dem Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung.

Dies ist ein System von zwei gekoppelten Gleichungen:

$$u_{k+1} = u_k + h\, u_{k+1}\left(v_{k+1} - 2\right) \tag{5a}$$
$$v_{k+1} = v_k + h\, v_{k+1}\left(1 - u_{k+1}\right) \tag{5b}$$

Einsetzten der einen Gleichung in die andere ergibt eine quadratische Gleichung (z.B. in v_{k+1}). Aus dieser erhalten Sie zwei Lösungen, aus welchen Sie die richtige auswählen müssen (wählen Sie z.B. die Lösung v_{k+1} welche näher an v_k liegt). Die andere Unbekannte (z.B. u_{k+1}) erhalten Sie dann durch entsprechendes Einsetzten. Alternativ können Sie die Gleichungen auch Linearisieren, wie es in der Vorlesung besprochen wurde.

Aufgabe 2: Runge-Kutta (3.0 Bonus Punkte)

Integrieren Sie die Lotka-Volterra Gleichung aus Aufgabe 1 unter Verwendung des in der Vorlesung vorgestellten Runge-Kutta Verfahrens vierter Ordnung.