7/8

HA 5

Sarah Köhler 356394
Dora Szücs 358573
Iwa Stoilowa 325947

1) a)

$a_n := \frac{n!}{n^n}$ [Wir rechnen mit $0^0 = 1$]

(4) Toll

$a_0 = \frac{1}{1} = 1$ $a_1 = \frac{1}{1} = 1$

Für a_0 gilt $a_n \geq a_{n+1}$, damit es für alle a_n gilt ist zu zeigen: $a_n \geq a_{n+1}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \overset{*}{>} \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{(n+1)\,n!}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = a_{n+1}$$

$*$ da $n \in \mathbb{N}$ und $n+1 > n \Rightarrow (n+1)^n > n^n$

Daraus folgt: (a_n) ist monoton fallend

Da $\forall n \in \mathbb{N}$ $n! < n^n$ ist $a_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Da $n \in \mathbb{N} \geq 0$ ist $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(die Multiplikation und Division nat. Zahlen ergibt nur positive Zahlen)

$\Rightarrow$ da $a_n \in [0,1]$ $\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt

Weil a_n beschränkt und monoton fallend ist konvergiert a_n.

$\varepsilon = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$

$|a_n - a| < \varepsilon$ $a = 0$ (untere Schranke)

$\Rightarrow \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{1000}$

$\forall n \geq 9$ ist $|a_n| < \varepsilon = \frac{1}{1000}$

1b) $b_n = \frac{2n^2+n+3\sin(n)}{4n^2-5n}$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+3\sin(n)}{4n^2-5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{3\sin(n)}{n^2})}{n^2(4-\frac{5}{n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{3\sin(n)}{n^2}}{4-\frac{5}{n}} = \frac{2+0+0}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Vorsicht mit Aufschreiben: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{4n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} 4n}$ nur falls $\lim_{n\to\infty} x_n$ und $\lim_{n\to\infty} 4n$ existieren. Also sollt ihr dieses erstmal zeigen.

(b_n) ist folglich konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}$.

$c_n := \cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)$

Für $n = 5k \quad k \in \mathbb{N}$

$$c_k = \cos\left(\frac{2 \cdot 5k \cdot \pi}{5}\right) = \cos(2k\pi) = 1$$

Jedes 5. Folgenglied ist somit 1, was bedeutet, dass 1 der einzig mögliche Grenzwert ist.

Für $n = 5k+1 \quad k \in \mathbb{N}$

$$c_k = \cos\left(\frac{1}{5} \cdot 2 \cdot (5k+1)\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{5}(5k+1)\pi\right)$$
$$= \cos\left(2k\pi + \frac{2}{5}\pi\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) \neq 1$$

$\Rightarrow$ somit ist (c_n) alternierend und nicht konvergent.

$d_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ da $n \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \mathbb{N}$

Für $n > 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \dots \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow n = 1 \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$

Für alle $n > 0$ ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1$.

Zudem: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq n$ für $n \in \mathbb{N}$

Bemerkung: dieses ist kein Schranke man muss ein Zahl finden die NICHT von n abhängt.

Da $1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq n$ für $n \in \mathbb{N} > 0$

muss der Grenzwert von $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ zwischen $\lim_{n\to\infty}(1)$ und $\lim_{n\to\infty} n$ liegen.

zu 1b)

Wegen der Grenzwertregeln gilt:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Wir setzen für $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die beiden Schranken ein:

I) $\lim_{n\to\infty} d_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

II) $\lim_{n\to\infty} d_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$= 0$ Richtig Aber besser $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} n = 0$

Da ~~[illegible]~~ $0 \leq \lim_{n\to\infty} d_n \leq 0$

Also $\lim_{n\to\infty} d_n \leq 0$ und $d_n \geq 0$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_n = 0$

folgt, dass der Grenzwert von (d_n) 0 ist und die Folge konvergiert.

$$e_n := \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} i\right)^n = \left(\frac{\sqrt{145}}{\sqrt{144}} e^{i\varphi}\right)^n$$

mit $\varphi = \arctan\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) = \arctan\left(\frac{8}{9}\right)$

$$= \left(\frac{\sqrt{145}}{\sqrt{144}}\right)^n e^{in\varphi}$$

Da für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten-Darstellung gilt: $r \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{i\varphi}$

ist für die Stetigkeit nur der Radius relevant, da gilt: $z_1 > z_2 \Leftrightarrow |z_1| > |z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Wir betrachten also nur die Entwicklung von r bzw. $|z|$:

$$\lim_{n\to\infty} (|z|) = \lim_{n\to\infty} r(z) = \lim_{n\to\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{145}}{\sqrt{144}}}_{>1}\Bigg)^n = \infty$$

Somit konvergiert (e_n) nicht, d.h. (e_n) ist divergent.

1c) $x_0 := 1 \qquad x_{n+1} := \frac{x_n}{x_n + 3}$

I) Alle Folgenglieder sind positiv $\forall n \in \mathbb{N}.\ x_n > 0$

I.A. $n = 0$

Laut Def: $x_0 := 1 > 0$

I.S. $n \to n+1$

(IV) $x_n > 0$

$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+3} \overset{\text{gilt}}{\underset{*}{\geq}} 0$

* Addition und Division ~~natürlicher~~ positiver Zahlen ergibt wieder positive Zahlen

$\forall n \in \mathbb{N}.\ x_n > 0$

Alle Folgeglieder von (x_n) sind also positiv.

II) (x_n) ist monoton fallend

I.A. $n = 0$

$x_0 := 1 \geq \frac{1}{4} = \frac{1}{1+3} = x_1$

IV. $x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $x_n \geq \frac{x_n}{x_n+3}$

I.S. $n \to n+1$

$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+3} \geq \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}+3} = x_{(n+1)+1}$ soll gelten

$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}+3} = \frac{\frac{x_n}{x_n+3}}{x_{n+1}+3} = \frac{x_n}{(x_n+3)(x_{n+1}+3)}$

$= \frac{x_n}{x_n x_{n+1} + 3x_n + 3x_{n+1} + 9} \overset{(\text{III})}{\leq} \frac{x_n}{x_n+3} = x_{n+1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\text{III}) \quad \underbrace{x_n x_{n+1}} + \underbrace{3x_n} + \underbrace{3x_{n+1}} + 9 \\ \Rightarrow \quad <1 \qquad <3 \qquad <3 \\ x_n x_{n+1} + 3x_n + 3x_{n+1} + 9 > \underbrace{x_n}_{<1} + 3 \end{array}}$$

// aus I.A und IV folgt: $x_n \leq 1$, $x_{n+1} \leq 1$

Somit gilt die IV und (x_n) ist monoton fallend.

Da aus I) folgt, dass (x_n) nach unten beschränkt ist und aus II) (x_n) ~~[illegible]~~ monoton fallend muss (x_n) konvergent sein mit Grenzwert 0:

$\lim\limits_{x_n \to 0^*} \frac{x_n}{x_n+3} = \frac{0}{0+3} = 0$

* aus I) folgt, dass x_n durch 0 beschränkt ist $\Rightarrow$ x_n nähert sich 0 an

Das Grenzwert ist Null ABER Ein monotone fallende Folge nähert sich an sein ~~Ai~~ maximal unterschranke, in i) hast du gezeigt dass a_n positive sind, und ii) monotone fallend, daraus folgt nicht dass das Grenzwert null ist.

Behauptete $a_n = \frac{1}{n} + 1/2$

a_n ist positive

a_n ist monotone fallend

aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/2 \neq 0$

f

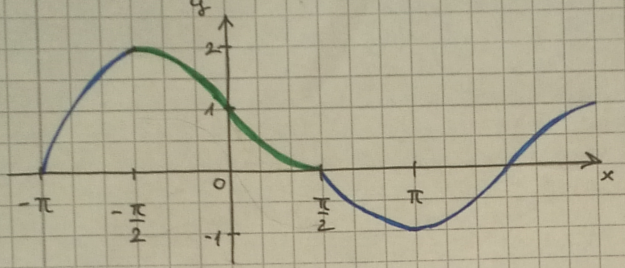
2/4

2/4

2. Aufgabe

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} -2\sin(x) & \text{für} \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin(x) + b & \text{für} \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{für} \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & a \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = 2 \\ \text{II.} & a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = 0 \end{array}\right\}$$

I. $a(-1) + b = 2$

$\boxed{b = 2 + a} \longrightarrow b = 2 - b$

$2b = 2$

$b = 1$

II. $a(1) + b = 0$

$\boxed{a = -b}$

$a = -1$

Falls $a = -1$ und $b = 1$, ist die Funktion f überall stetig.

ich habe zwei Punkte abgezogen, weil ihr dieses nicht erklärt habt.

Was heißt Stetigkeit?

f ist in $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ schon stetig warum?

f ist in $-\frac{\pi}{2}$ stetig falls

$$\lim_{x \nearrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$$

und diese folgt nur wenn $a = ?$ $b = ?$