Ana I 8 Hausaufgabe

Iwa Stoilowa 325947
Sarah Köhlen 356394
Dora Szücs 358573

6/6 ① Aufgabe

a) z.z. mit Differentialrechnung, dass Tangensfkt. $\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ injektiv & mit Zwischenwertsatz, dass Fkt. auch surjektiv

1) Injektivität:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Da $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, gilt $\cos^2(x) \neq 0$ ✓

wegen dem Quadrat ist $\frac{1}{\cos^2(x)}$ immer echt größer 0. ✓

✓

$\tan'(x) > 0 \implies$ die Fkt ist streng monoton steigend ✓

$\implies$ die Fkt. ist injektiv ✓

2) Surjektivität

$\tan(x)$ ist stetig, da diff'bar ✓

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig.

Da $\lim_{x \to +\infty} \tan(x) = +\infty$ und

$\lim_{x \to -\infty} \tan(x) = -\infty$

existieren $x_L, x_R \in \mathbb{R}$ mit

$\tan(x_L) < y < \tan(x_R)$ ✓

Die Tangensfkt. ist diff'bar, d.h. auch stetig auf $\mathbb{R}$, gilt auch ZWS

$$\exists x^* \in [x_L, x_R] \text{ mit } \tan(x^*) = y$$

Da alle mögliche $y \in \mathbb{R}$ Werte angenommen werden, ist die Fkt. surjektiv

3) Bijektivität

Weil die Funktion injektiv & surjektiv ist, ist sie auch bijektiv

b) Nach a) $\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ bijektiv, existiert Umkehrfkt. $\arctan: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Berechnung Ableitung arctan

Mit dem Satz 98 aus der Vorlesung ergibt sich:

Sei $f: I \to Y$ diff'bar & umkehrbar mit diff'barer Umkehrfkt. $f^{-1}: Y \to I$, dann gilt: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

falls $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{\tan'((\arctan(x))}$$

rechenweg?

$$= \frac{1}{1+x^2} = \cos^2(\arctan(x))$$

② Aufgabe

Beweisen mit Hilfe Mittelwertsatzes

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^x \geq 1 + x$

$f(x) = e^x$

4/6

$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \frac{e^b - e^a}{b - a} = e^\xi$ ✓

1. Fall: $b = x$, $a = 0$ $x > 0$

$\frac{e^b - 1}{b} = e^\xi \Rightarrow e^x - 1 = e^\xi \cdot x$

$e^x = \underbrace{\underbrace{e^\xi}_{>1} \cdot x}_{> x} + 1$

$\xi \in]0, x]$

$e^x > x + 1$ ✓

2. Fall: $x = 0$

$e^0 = 0 + 1$

$1 = 1$

3. Fall: $b = 0$, $a = x$ $x < 0$

$\frac{e^0 - e^a}{0 - a} = \frac{1 - e^x}{-x} = e^\xi$

$1 - e^x = e^\xi \cdot (-x) \quad | \cdot (-1)$

$-1 + e^x = x e^\xi$

$e^x = \underbrace{x e^\xi}_{\geq x} + 1 \geq x + 1$ ✓

$x < 0$, $e^\xi < 1$

Somit $e^x \geq 1 + x$ ✓

2b) fehlt.

$f'(x) = 2x + \left(-\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ✓

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left(2x + \left(-\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2x - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2x - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} + \frac{2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cancel{2x}^{\to 0}}{\cancel{x}} - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} + \frac{\cancel{2x}^{\to 0}}{\cancel{x}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right) (*)$$

→ Ja aber warum?

Die Funktion konvergiert nicht, somit NICHT diff'bar. Also warum divergiert dieser (*) Grenzwert!

b) Zz., dass f in 0 globales Minimum besitzt.

Damit 0 ein globales Minimum ist, müssen alle anderen Werte positiv sein oder Null – G. minimum muss nicht eindeutig sein

$$f(x) = x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \underbrace{x^2}_{>0} \underbrace{\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{0 \leq x \leq 2}$$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist beschränkt

$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

✓

Somit ist die Funktion insgesamt ≥ 0 und der Punkt $x_0 = 0$ ein globales Minimum.

③ Aufgabe

2/4

geg: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zz, dass Fkt. f bei $x = 0$ diff'bar, aber NICHT 2-mal differenzierbar

1) Bildung 1. Abl. im Punkt $x_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{|x| \to 0} \frac{x^2 + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{|x| \to 0} \frac{x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)$$

Man muss $\lim_{x \downarrow 0}$ und $\lim_{x \uparrow 0}$ unterscheiden!

$$= \lim_{|x| \to 0} \left(\cancel{x} + \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right) \qquad -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

beschränkt

$$= \lim_{|x| \to 0} \left(\cancel{x}^{\,0} + \cancel{x}^{\,0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{beschränkt}}\right)$$

$$= 0$$

Vorsicht hier * ihr untersucht ob das Grenzwert $\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ und $\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existiert und denselben wert sind.

Somit ist die Fkt. bei $x = 0$ differenzierbar.

Dann darf ihr sagen dass das Grenzwert $f'(0)$ ist.

2) Bildung 2. Abl. im Punkt $x_0 = 0$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \overbrace{f'(0)}}{x - x_0} \quad {}^{\text{"}}0$$

2.1) Bildung $f'(x)$

$$f'(x) = \Big(\underbrace{x^2}_{g(x)} + \underbrace{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{a(x)}\Big)'$$

$f'(x) = u \cdot v' + v \cdot u'$ $\qquad \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$u' = 2x \qquad u = x^2$

$$a'(x) = x^2 \cdot -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$a'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$