

# Übungsblatt 8

mpgi4@cg.tu-berlin.de

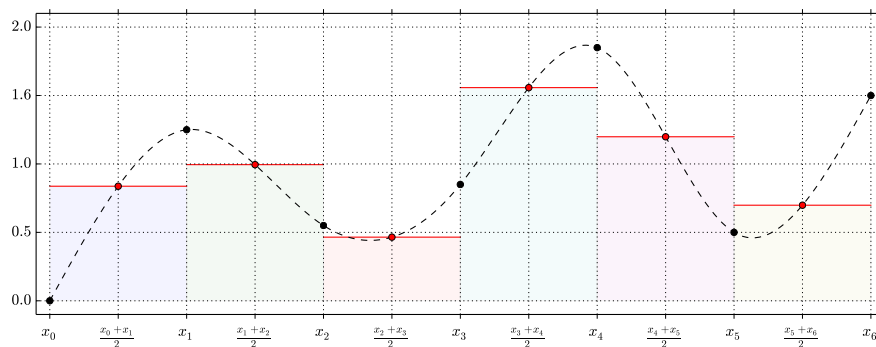
WiSe 2014/2015

Die Berechnung bzw. Approximation von Integralen spielt im wissenschaftlichen Rechnen eine wichtige Rolle. Zum Beispiel sind die Arbeit eines physikalischen Prozesses, der Erwartungswert von kontinuierlichen Zufallsvariablen (wie sie im maschinellen Lernen sehr häufig benötigt werden) und die Basiskoeffizienten von Finite-Elemente-Methoden durch Integrale definiert. Bei vielen Anwendungen ist es jedoch nicht möglich eine geschlossene analytische Lösung des Integrals zu bestimmen oder dies ist zu aufwendig. Daher verwendet man in der Regel numerische Integrationsverfahren, sogenannte Quadraturregeln, um die Integrale hinreichend genau zu approximieren. Für die Integration einer Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  über das Intervall  $[a, b]$  haben diese typischerweise die Form

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

für Stützstellen  $x_i \in [a, b]$  und an den Stützstellen bekannte Funktionswerte  $f(x_i)$ . Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich dabei in der Wahl der verwendeten Koeffizienten  $w_i$ . Eine übliche Herangehensweise um geeignete  $w_i$  zu bestimmen, ist dabei die Funktion  $f(x)$  durch einfachere Funktionen zu approximieren oder zu interpolieren. Das Integral von  $f(x)$  ergibt sich dann näherungsweise durch die Berechnung des Integrales der stückweisen Repräsentation der Funktion.

## Aufgabe 1: Mittelpunktsregel



Für die Mittelpunktsregel wird die zu integrierende Funktion  $f(x)$  (grau) zunächst mit einer Treppenfunktion  $\varphi_n(x)$  interpoliert, d.h. stückweise durch Funktionen  $\varphi_i(x)$  (rot), welche über jedem der gegebenen Intervallen  $[x_i, x_{i+1}]$  konstant sind. Die Höhe von  $\varphi_i(x)$  ist dabei durch den Funktionswert von  $f(x)$  am Mittelpunkt  $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$  des Intervalls  $[x_i, x_{i+1}]$  gegeben. Wird die Anzahl  $n$  der Intervalle vergrößert, so verbessert sich die Approximation und man kann zeigen, dass die Treppenfunktion  $\varphi_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $f(x)$  konvergiert, d.h. für hinreichend große  $n$  ist  $\varphi_n(x)$  eine beliebige genaue Approximation von  $f(x)$ .

Als Approximation für das Integral von  $f(x)$  wird nun das Integral von  $\varphi_n(x)$  verwendet:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \int_a^b \varphi_n(x) \, dx. \quad (2)$$

Das Integral der Treppenfunktion lässt sich aufgrund der einfachen Form sehr einfach berechnen. Bezeichnen  $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$  die Stützstellen, so ist die Fläche jedes Rechtecks durch  $(x_i - x_{i-1}) \cdot f(\bar{x}_i)$  gegeben.

Damit erhalten wir als Quadraturregel:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \int_a^b \varphi_n(x) \, dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \quad (3)$$

Eine einfache Python-Implementierung ist im folgenden gegeben:

```
def quadMidpoint( signal, n_quad) :
    """
    Quadrature approximation of \int_{-1}^1 f(x) dx using midpoint rule.

    Inputs:
    signal : function f(x) whose integral is sought
    n_quad : number of quadrature points

    Return:
    integral : approximation to integral value

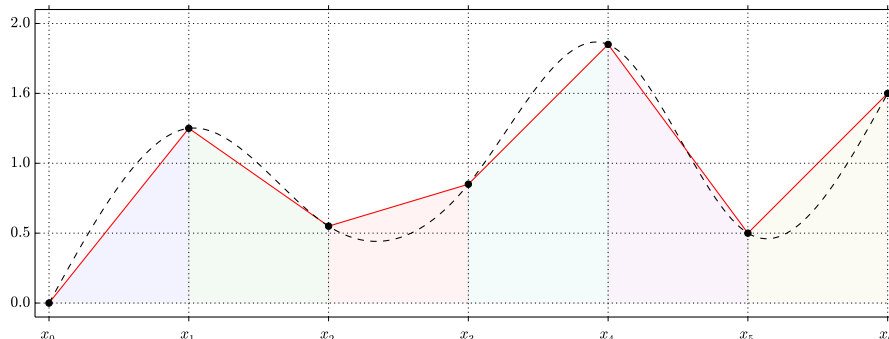
    """

    integral = 0.0
    xs = np.linspace( -1.0, 1.0, n_quad)

    # naive implementation; one can factor out terms
    # to obtain a substantially more efficient implementation
    for i in range(n_quad-1) :
        integral += (xs[i+1] - xs[i]) * signal((xs[i+1] + xs[i]) / 2.0)

    return integral
```

## Aufgabe 2: Trapezregel



Um die Genauigkeit der Quadratur zu steigern, kann man entweder mehr Stützstellen oder bessere Approximationen der zu integrierenden Funktion verwenden. Eine sinnvolle Erweiterung der Mittelpunktsregel besteht darin, die mit stückweise konstante Interpolation durch eine stückweise lineare Interpolation zu ersetzen. Für zwei benachbarte Stützstellen  $x_{i-1}, x_i$  mit zugehörigen Funktionswerten  $f(x_{i-1}), f(x_i)$  lässt sich die Funktion im Intervall  $[x_{i-1}, x_i]$  durch die lineare Funktion

$$\psi_i(x) \approx f(x_{i-1}) + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad (4)$$

lokal approximieren. Integration der linearen Approximation ergibt:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_i(x) \, dx = (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}, \quad (5)$$

was genau der Fläche unter dem Trapez entspricht. Damit erhalten wir für das Integral von  $f(x)$  im

Intervall  $[a, b]$  die Näherung:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \, dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_i(x) \, dx \quad (6a)$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \quad (6b)$$

### Aufgabe 3: Interpolatorische Quadraturformeln

Interpolatorische Quadraturformeln approximieren das Integral einer Funktion durch die Integration eines interpolierenden Polynoms. Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf dem Intervall  $[a, b]$  und seien  $\{x_i \in [a, b]\}_{i=0, \dots, n}$  paarweise verschiedene Stützstellen mit  $x_0 = a$  und  $x_n = b$ . Das Lagrange'sche Interpolationspolynom vom Grad  $n$ , welches an den Stützstellen  $x_i$  die Funktionswerte  $f(x_i)$  interpoliert, ist dann

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(x), \quad (7)$$

wobei

$$l_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad (8)$$

das  $j$ -te Lagrange Polynom bezeichnet. Für das Integral von  $f$  gilt dann:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \int_a^b p(x) \, dx = \int_a^b \left( \sum_{j=0}^n l_j(x) f(x_j) \right) \, dx \quad (9a)$$

$$= \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_a^b l_j(x) \, dx \quad (9b)$$

$$= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j). \quad (9c)$$

Es stellt sich somit die Aufgabe die Integrale  $w_j = \frac{1}{b-a} \int_a^b l_j(x) \, dx$  zu integrieren. Bevor wir dies weiterverfolgen, wollen wir zunächst den Fall  $n = 1$ , d.h. lineare Interpolation, genauer betrachten. Wir haben zwei Stützstellen und für die Lagrang'schen Interpolationspolynome erhalten wir also:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - b}{a - b} = \frac{b - x}{b - a} \quad (10a)$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a}. \quad (10b)$$

Das Integral von  $f(x)$  kann damit wie folgt approximiert werden:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx f(a) \int_a^b l_0(x) \, dx + f(b) \int_a^b l_1(x) \, dx \quad (11a)$$

$$= f(a) \int_a^b \frac{b-x}{b-a} \, dx + f(b) \int_a^b \frac{x-a}{b-a} \, dx \quad (11b)$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} \int_a^b (b-x) \, dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a) \, dx \quad (11c)$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} \left( b(b-a) - \frac{b^2-a^2}{2} \right) + \frac{f(b)}{b-a} \left( \frac{b^2-a^2}{2} - a(b-a) \right) \quad (11d)$$

$$= f(a) \left( b - \frac{(b+a)}{2} \right) + f(b) \left( \frac{(b+a)}{2} - a \right) \quad (11e)$$

$$= f(a) \frac{(b-a)}{2} + f(b) \frac{(b-a)}{2} \quad (11f)$$

$$= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)). \quad (11g)$$

Dies ist genau die Trapezregel, welche wir bereits zuvor hergeleitet hatten.

#### Aufgabe 4: Abgeschlossene Newton-Cotes Quadraturformeln

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass die Stützstellen für das Interpolationspolynom äquidistant gewählt werden. Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf dem Intervall  $[a, b]$  und es bezeichne

$$x_i = a + ih \quad \text{mit} \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (12)$$

die  $n+1$  Stützstellen. Wir wollen zunächst eine kompaktere Darstellung der Gewichte

$$w_j = \frac{1}{b-a} \int_a^b l_j(x) \, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k} \, dx \quad (13)$$

der allgemeinen Quadraturformel

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \quad (14)$$

bestimmen und dabei ausnutzen, dass die Stützpunkte äquidistant verteilt sind. Da  $x_i = a + ih$  ist, gilt umgekehrt also  $i = \frac{x_i-a}{h}$ . Für das  $j$ -te Lagrangepolynom (bzgl. der Stützstellen  $x_i$ ) erhalten wir somit:

$$l_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{\frac{x-a}{h} - \frac{x_k-a}{h}}{\frac{x_j-a}{h} - \frac{x_k-a}{h}} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{\frac{x-a}{h} - k}{\frac{x_j-a}{h} - k} \quad (15)$$

Substitution<sup>1</sup> von  $x = \varphi(t) = th + a$  in Gleichung (13) ergibt dann:

$$w_j = \frac{1}{b-a} \int_a^b l_j(x) \, dx = \frac{1}{b-a} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} l_j(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt \quad (16a)$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t-t_k}{t_j-t_k} \cdot \frac{b-a}{n} \, dt = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t-k}{j-k} \, dt \quad (16b)$$

<sup>1</sup>Substitutionsregel: Sei  $z = \varphi(x)$  und  $dz = \varphi'(x) \, dx$ , dann gilt:  $\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z) \, dz$

**Trapezregel**  $n = 1$ :

$$w_0 = \int_0^1 \frac{t-1}{0-1} dt = \int_0^1 (1-t) dt = \left[ t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (17a)$$

$$w_1 = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0} dt = \int_0^1 t dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad (17b)$$

Zusammengefasst ergibt dies erneut die Trapezregel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)). \quad (18)$$

**Simpsonregel**  $n = 2$ :

$$w_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t-1}{0-1} \frac{t-2}{0-2} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 (t-1)(t-2) dt \quad (19a)$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^2 = \frac{1}{6} \quad (19b)$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t-0}{1-0} \frac{t-2}{1-2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^2 (t^2 - 2t) dt = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^2 = \frac{2}{3} \quad (19c)$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t-0}{2-0} \frac{t-1}{2-1} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 (t^2 - t) dt = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 = \frac{1}{6} \quad (19d)$$

Zusammengefasst ergibt dies die Simpsonregel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (20)$$

## Aufgabe 5: Summierte Quadraturformeln

Für  $i = 0, \dots, n$  seien Stützstellen definiert wie folgt:

$$x_i = a + ih \quad \text{mit} \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (21)$$

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \quad (22)$$

Summierte Quadraturformeln approximieren die Integrale  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$  mittels einer geeigneten Quadraturformel, wie zum Beispiel der Trapez- oder Simpsonregel.

**Summierte Trapezregel**

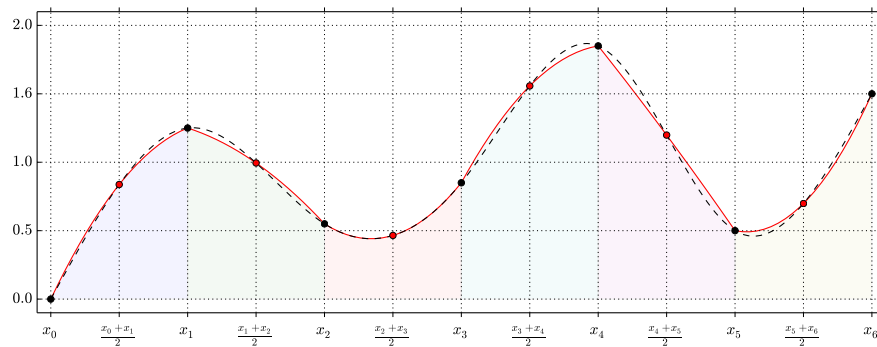
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad (23a)$$

$$= \frac{h}{2} \left( \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \right) \quad (23b)$$

$$= \frac{h}{2} \left( f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-2} f(x_{i+1}) + f(x_n) \right) \quad (23c)$$

$$= \frac{h}{2} \left( f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) \quad (23d)$$

**Summierte Simpsonregel** Von der summierten Simpsonregel gibt es zwei Varianten. Die erste Variante wendet die Simpsonregel für  $i = 1, \dots, n$  auf die Stützstellen  $x_{i-1}$ ,  $(x_{i-1} + x_i)/2$ ,  $x_i$  an:



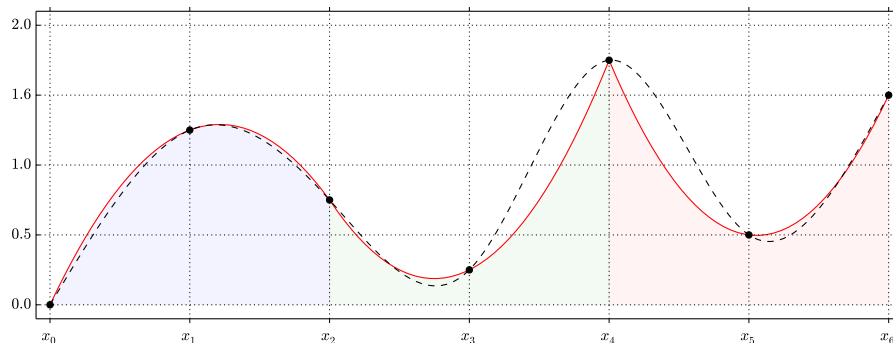
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \left[ \frac{h}{6} \left( f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right) \right] \quad (24a)$$

$$= \frac{h}{6} \left( \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + \sum_{i=1}^n f(x_i) \right) \quad (24b)$$

$$= \frac{h}{6} \left( f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) \quad (24c)$$

$$= \frac{h}{3} \left( \frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + \frac{1}{2} f(x_n) \right) \quad (24d)$$

Die zweite Variante wendet die Simpsonregel für  $i = 1, \dots, n/2$  auf die Stützstellen  $x_{2i-2}$ ,  $x_{2i-1}$ ,  $x_{2i}$  an:



$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n/2} \left[ \frac{2h}{6} \left( f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right) \right] \quad (25a)$$

$$= \frac{h}{3} \left( \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-2}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i}) \right) \quad (25b)$$

$$= \frac{h}{3} \left( f(x_0) + \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right) \quad (25c)$$

$$= \frac{h}{3} \left( f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right) \quad (25d)$$