**Technische Universität Berlin**
**Fakultät II – Institut für Mathematik**
**LinAlg - Team**

# Lineare Algebra für Ingenieure

## Lösungsskizze - Wiederholungsaufgaben zur Klausurvorbereitung - 2. Blatt

---

Achtung: Diese Aufgaben lassen keine Rückschlüsse auf die Aufgaben in der Klausur zu!

**1. Aufgabe.**
Die Eigenwerte einer linearen Abbildung $L : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ sind $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$. Zu jedem Eigenwert $\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sei ein Eigenvektor $\vec{v}_i$ bekannt: $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

---

(a) Ist $L$ diagonalisierbar? [11., 12. Kapitel]

Ja. Die 3 EW sind paarweise verschieden. Das charakt. Polynom hat höchstens 3 Nullstellen, weil die Abbildung von $\mathbb{C}^3$ nach $\mathbb{C}^3$ abbildet. D.h., alle EW sind bekannt und alg VFH von jedem EW von $L$ ist 1. Da für jeden EW $1 \leq$ geomVFH $\leq$ algVFH gelten muss, ist hier geom VFH von jedem EW von $L$ ebenfalls 1. Die alg VFH und die geom VFH von jedem EW von $L$ stimmen überein, also ist $L$ diagonalisierbar.

---

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p_L(z)$ von $L$. [3., 11. Kapitel]

$L : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \Rightarrow L$ kann als eine Matrixabbildung also auch als eine Matrix betrachtet werden. Das charakteristische Polynom $p_L(z) = \det(L - zI_3)$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit Nullstellen $2, -1, 4$ (die EW von $L$) nämlich $p_L(z) = (2 - z)(-1 - z)(4 - z)$. [Alternativ: Das charakt. Poly der Abbildung ist das charakt. Poly einer darstellenden Matrix der Abbildung. Die 3 gegebenen Eigenvektoren sind linear unabhängig, weil sie zu verschiedenen Eigenwerte gehören. Jede drei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{C}^3$ bilden eine Basis des $\mathbb{C}^3$. Die darstellende Matrix bzgl. der Basis des $\mathbb{C}^3$, die aus den Eigenvektoren $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ besteht, ist $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ und dies hat charakt. Poly $p(z) = (2 - z)(-1 - z)(4 - z)$.]

---

(c) Ist $\det(L) = 0$ ? [10. Kapitel]

Weil 0 kein Eigenwert ist, ist $\det(L) \neq 0$.
Alt.: Die Determinante der Abbildung $L$ ist die Determinante der darstellenden Matrix der Abbildung bzgl. einer gegebenen Basis. Es folgt aus Teil (b): $\det(L) = 2 \cdot (-1) \cdot 4 \neq 0$.

---

(d) Ist die Abbildung $L$ invertierbar? [6. Kapitel]

Weil 0 kein Eigenwert der Abbildung $L$ ist, ist $\text{Kern}(L) = \{\vec{0}\}$; d.h. $L$ ist injektiv. Nach dem Dimensionssatz folgt

$$\dim(\mathbb{C}^3) = 3 = \dim(\text{Kern}(L)) + \dim(\text{Bild}(L)) = 0 + \dim(\text{Bild}(L))$$

Somit ist $\dim(\text{Bild}(L)) = 3$, die gleiche Dimension wie der Bildraum, so dass $L$ surjektiv ist. Weil $L$ injektiv und surjektiv ist, ist sie auch bijektiv. Damit ist die Abbildung invertierbar.

[alternative Begründung z.B. mit $\det(L) = 0$ aus c)]

---

(e) Bestimmen Sie $L(2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3)$. [6. Kapitel]

$$L(2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3) \overset{\text{lin.}}{=} 2L(\vec{v}_1) - 3L(\vec{v}_2) + 5L(\vec{v}_3) = 2 \cdot 2\vec{v}_1 - 3 \cdot (-1)\vec{v}_2 + 5 \cdot 4\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 27 \\ 22 \\ 20 \end{bmatrix}$$

---

(f) Ist die Menge $\mathcal{M} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$? [2. Kapitel]
Siehe Teil (b) "Alternativ".

---

(g) Bestimmen Sie $L_{\mathcal{M}}$. $\quad L_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ [7. Kapitel]

Begründung wie in Teil (b) "Alternativ" oder mit Koordinatenvektoren.

---

(h) Bestimmen Sie $L_{\mathcal{B}_{\text{std}}}$, wobei $\mathcal{B}_{\text{std}}$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^3$ ist. [7., 12. Kapitel]

$$L_{\mathcal{B}_{\text{std}}} = SL_{\mathcal{M}}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

*Bemerkung (vgl. Kommutatives Diagramm und 12. Kapitel):* $S = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3]$,
da für den $i$-ten Spaltenvektor von $S$ gilt ($i = 1, 2, 3$): $S\vec{e}_i = K_{\mathcal{B}_{\text{std}}}(K_{\mathcal{M}}^{-1}(\vec{e}_i)) = K_{\mathcal{B}_{\text{std}}}(\vec{v}_i) = \vec{v}_i$
($\vec{e}_i$ sei hierbei der $i$-te Einheitsvektor).

---

**2. Aufgabe.** Bestimmen Sie jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{2,2}$, die die gegebene Bedingung erfüllt.
*Bemerkung: Auch hier darf die jeweilige Begründung nicht fehlen!*

---

(a) Die NZSF von $A$ enthält eine 2. [4. Kapitel]

$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist in NZSF (Erster von Null verschiedenen Eintrag in jeder Zeile ist ein 1. Nur Nullen stehen unter der Kofpvariable (KV) in der *ersten* Zeile. $x_2$ ist eine Nichtkopfvariable (NKV), darf also ein 2 sein.)

---

(b) Das charakteristische Polynom von $A$ ist $p_A(z) = z^2 - 7z + 12$. [11. Kapitel]

$$p_A(z) = z^2 - 7z + 12 = (z-3)(z-4) = \det \begin{bmatrix} 3-z & 0 \\ 0 & 4-z \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - zI_2\right).$$

$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ erfüllt das Kriterium.

Alt.: Nullstellen von $p_A$ bestimmen. Überlege dir, welche Matrix $A$ dazu passt und warum!? …

---

(c) Die erste Spalte von $A$ ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $A$ ist nicht invertierbar. [3. Kapitel]

$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ist nicht invertierbar, da die Spalten (bzw. Zeilen) von $A$ gleich und somit auch linear abhängig sind.

[Alt.: $\det(A) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ die Spalten sind linear abhängig $\Rightarrow$ $A$ ist nicht invertierbar.]

---

(d) $A$ ist eine obere Dreiecksmatrix, die nicht diagonalisierbar ist. [11., 12. Kapitel]

$A$ nicht diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ geom VFH $\lambda \neq$ alg VFH $\lambda$ für ein EW $\lambda$ von $A$. Wegen $A \in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow$ grad$(p_A(z)) = 2$ gilt

$$1 \leq \text{ geom VFH } \lambda \leq \text{ alg VFH } \lambda \leq 2,$$

so dass (geom VFH $\lambda$) $= 1$ und (alg VFH $\lambda$) $= 2$ sein müssen.
[Bemerkung, eine Diagonalmatrix ist diagonalisierbar. Wir probieren es mit einer oberen Dreiecksmatrix aus, die keine Diagonalmatrix ist!]
Die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ erfüllt die Bedingungen und ist damit nicht diagonalisierbar: $A$ hat den EW $\lambda = 1$ (EW einer oberen Dreiecksmatrix liegen auf der Diagonalen) mit der alg VFH 2. Die geom VFH von $\lambda$ ist dim $(V_\lambda) = 1$:

$$V_\lambda = \text{Kern}(A - \lambda I_2) = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

---

**3. Aufgabe.** Gegeben ist die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$. [3., 4. Kapitel]

---

(a) Bestimmen Sie alle Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$, für die Rang$(A) \leq 2$ gilt. Rang$(A) \leq 2 \Rightarrow$ es existiert eine NKV, da $A \in \mathbb{R}^{3,3}$.
Gauß anwenden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II}-2\text{I},\, \text{III}-a\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -3 \\ 0 & 0 & 1-2a \end{bmatrix}$$

$x_1$ ist ein KV; $x_2$ ist eine NKV für $a = 0$; $x_3$ ist eine NKV für $a = \frac{1}{2}$. Rang$(A) \leq 2 \Leftrightarrow a \in \{0, \frac{1}{2}\}$
Alt.: Rang$(A) \leq 2$, falls det$(A) = \cdots = a(1-2a) = 0$ ist, da $A \in \mathbb{R}^{3,3}$. Also ist für $a = 0$ und $a = \frac{1}{2}$ Rang$(A) \leq 2$.

---

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von $A$ für den größten der oben bestimmten Werte von $a$.
Ist $a = \frac{1}{2}$, so sind $x_1$ und $x_2$ KV, $x_3$ NKV. Die Dimension des Kerns von $A$ ist die Anzahl von NKV, also 1.

---

**4. Aufgabe.** Sei $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^2$, und sei $\|\cdot\|$ die assoziierte Norm. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? [6., 8. Kapitel]

$$L_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \mapsto & \|\vec{x}\| \end{array} \qquad L_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \mapsto & \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{x} \right\rangle \end{array}$$

$$L_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 2}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ ax^2 + bx + c & \mapsto & (a+b)x^2 + (c+1)x + b \end{array}$$

---

$L_1$ ist nicht linear, da nicht homogen:

$-1 \cdot L_1\left(\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right]\right) = -\sqrt{\left\langle\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right],\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right]\right\rangle} = -\sqrt{1^2+0^2} = -1$

$\neq 1 = \sqrt{(-1)^2+0^2} = \sqrt{\left\langle\left[\begin{array}{r}-1\\0\end{array}\right],\left[\begin{array}{r}-1\\0\end{array}\right]\right\rangle} = L_1\left(\left[\begin{array}{r}-1\\0\end{array}\right]\right) = L_1\left(-1\cdot\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right]\right).$

---

$L_2$ ist linear, da additiv und homogen, denn für $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$L_2\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = \left\langle\left[\begin{array}{c}2\\3\end{array}\right],\vec{x}+\vec{y}\right\rangle \underset{\text{Skalarprodukt}}{\overset{\text{Eigenschaft}}{=}} \left\langle\left[\begin{array}{c}2\\3\end{array}\right],\vec{x}\right\rangle + \left\langle\left[\begin{array}{c}2\\3\end{array}\right],\vec{y}\right\rangle = L_2\left(\vec{x}\right) + L_2\left(\vec{y}\right)$ und

$L_2\left(\alpha\vec{x}\right) = \left\langle\left[\begin{array}{c}2\\3\end{array}\right],\alpha\vec{x}\right\rangle \underset{\text{Skalarprodukt}}{\overset{\text{Eigenschaft}}{=}} \alpha\left\langle\left[\begin{array}{c}2\\3\end{array}\right],\vec{x}\right\rangle = \alpha L_2\left(\vec{x}\right).$

---

$L$ ist nicht linear, da nicht homogen, denn für z.B. $x^2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ und das Skalar 0 ist
$0 \cdot L_3(x^2) = 0 \neq x = 1 \cdot x = L_3(0) = L_2(0 \cdot x^2).$

Alt.: Für jede lineare Abbildung $L$ ist $L(\vec{0}) = \vec{0}$. (notwendige Bedingung)
Hier ist $L_3(0) = L_3(0x^2 + 0x + 0) = 1x \neq 0x^2 + 0x + 0 = 0$. Somit ist $L_3$ nicht linear.