Teil II.

Strukturen

4. Strukturen

4.1. Einleitung

Die Aussagenlogik formalisiert das Schließen über Aussagen die entweder wahr oder falsch sein können. Die eigentliche Bedeutung der Aussagen ist dabei irrelevant. Um über Aussagen der folgenden Form zu sprechen, ist die Aussagenlogik also nicht geeignet:

> *Für jede reelle Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, die größer als x ist.*

Eine Logik, die zur Formalisierung derartiger Aussagen geeignet ist, muss die Möglichkeit bieten über verschiedene Arten von Objekten zu sprechen. Außerdem muss sie die Möglichkeit bieten, einige Aussagen über alle Objekte zu machen, andere Aussagen nur über einige Objekte. Wir werden im nächsten Kapitel die Prädikatenlogik einführen, in der solche Aussagen gemacht werden können.

In diesem Kapitel entwickeln wir zunächst den Begriff der mathematischen *Strukturen* und schaffen damit den Kontext, in dem prädikatenlogische Formeln ausgewertet werden. Dieser Begriff wird hinreichend allgemein sein um fast alle in der Mathematik und Informatik auftretenden Strukturen zu erfassen, z.B. algebraische und geometrische Strukturen, Datenstrukturen, Datenbanken, Transitionssysteme und viele mehr. Außerdem führen wir Abbildungen zwischen Strukturen ein, die (in unterschiedlichem Maße) *strukturerhaltend* sind.

4.2. Relationen

Ein fundamentaler Grundbegriff ist der Begriff der Relation.

Definition 4.1 Sei $k \geqslant 0$ und A eine Menge.

(1) A^k ist die Menge aller k-Tupel von Elementen aus A.

(2) Eine *k-stellige Relation auf A* ist eine Teilmenge von A^k. ⊣

Bemerkung 4.2 Wir erlauben auch $k = 0$. Es gibt genau zwei *nullstellige* Relationen; $R \subseteq A^0$ ist entweder $\varnothing$ oder $\{()\}$. ⊣

Notation 4.3 Für einige spezielle Relationen wie z.B. $<, =$, benutzen wir *Infix*-Notation und schreiben $a = b$ oder $a < b$ anstatt $(a, b) \in =$ oder $(a, b) \in <$. ⊣

Als nächstes führen wir einige wichtige Eigenschaften von Relationen ein.

Definition 4.4 Eine binäre Relation $R \subseteq A^2$ einer Menge A ist

- *reflexiv*, wenn $(a, a) \in R$, für alle $a \in A$.
- *symmetrisch*, wenn aus $(a, b) \in R$ immer $(b, a) \in R$ folgt, für alle $a, b \in A$.
- *antisymmetrisch*, wenn $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ zusammen $a = b$ impliziert, für alle $a, b \in A$.
- *transitiv*, wenn aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ immer $(a, c) \in R$ folgt, für alle $a, b, c \in A$. ⊣

Definition 4.5 Eine *Äquivalenzrelation* ist eine binäre Relation, die *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist. ⊣

Beispiel 4.6 Wir betrachten einige Beispiele für Äquivalenzrelationen.

- *Gleichheit*. Für jede Menge A ist die Relation

  $$\{(a, a) \in A^2 : a \in A\}$$

  eine Äquivalenzrelation.

- *Gleichmächtigkeit*. Für jede Menge A ist die Relation

  $$\{(A, B) \in \mathcal{P}(A)^2 : A, B \text{ haben die gleiche Kardinalität } \}$$

  eine Äquivalenzrelation.

- *Logische Äquivalenz* ist die Relation

  $$\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL}^2 : \varphi \equiv \psi\}$$

  eine Äquivalenzrelation. ⊣

Definition 4.7 Sei A eine Menge.

(1) Eine *(strikte) partielle Ordnung* $<$ über einer Menge A ist eine irreflexive und transitive binäre Relation über A.

(2) Eine *(strikte) lineare Ordung* $<$ über A ist eine partielle Ordung über A, so dass für alle $a, b \in A$:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{oder} \quad b < a \tag{4.1}$$

Bemerkung 4.8

- Sei $<$ eine partielle Ordnung über einer Menge A. Dann impliziert Bedingung (1) aus Definition 4.7, dass $<$ antisymmetrisch ist.
- Bisweilen ist es nützlich, reflexive Ordungen zu betrachten. Wir definieren $\leqslant$ als $< \cup \{(a, a) \in A^2 : a \in A\}$. Das heißt, eine reflexive lineare Ordung ist eine reflexive, antisymmetrische, transitive und binäre Relation für die (4.1) aus Definition 4.7 gilt. $\dashv$

4.3. Strukturen

In diesem Abschnitt führen wir den allgemeinen Strukturenbegriff ein. Mathematische Strukturen bestehen aus einem Universum und aus ausgezeichneten Funktionen, Relationen und Konstanten auf diesem Universum. Die Namen für die in einer Struktur auftretenden Relationen und Funktionen bilden die Signatur der Struktur.

Definition 4.9 Eine *Signatur* ist eine Menge σ von *Relationssymbolen*, *Funktionssymbolen* und *Konstantensymbolen*. Jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine *Stelligkeit* (englisch: arity)

$$ar(R) \in \mathbb{N} \text{ bzw. } ar(f) \in \mathbb{N}. \qquad \dashv$$

Notation 4.10

- Wir verwenden griechische Symbole σ, τ für Signaturen.
- Für Relationssymbole verwenden wir $R, P, Q, R', <, \leqslant, \ldots$
- Für Funktionssymbole verwenden wir $f, g, h, +, *, \ldots$

- Für Konstantensymbole verwenden wir $c, d, 0, 1, \ldots$ ⊣

Die Relations-, Funktions- und Konstantensymbole der Signatur können in beliebiger Weise durch konkrete Relationen, Funktionen und Konstanten interpretiert werden. Allgemein wird die Struktur festgelegt durch Angabe ihres Universums und der konkreten Interpretation der Relations-, Funktions- und Konstantensymbole über dem Universum.

Definition 4.11 Sei σ eine Signatur. Eine *σ-Struktur* $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A, dem *Universum* von $\mathcal{A}$,
- einer k-stelligen Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^k$ für jedes k-stellige Relationssymbol $R \in \sigma$,
- einer k-stelligen Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^k \to A$ für jedes k-stelliges Funktionssymbol $f \in \sigma$ und
- einem Element $c^{\mathcal{A}} \in A$ für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$. ⊣

Bemerkung 4.12 Man beachte den Unterschied zwischen einem Symbol

$$R \in \sigma \qquad \text{oder} \qquad f \in \sigma$$

und seiner *Interpretation*

$$R^{\mathcal{A}} \qquad \text{bzw.} \qquad f^{\mathcal{A}}$$

in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$. ⊣

Notation 4.13 Wir verwenden kalligraphische Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ für Strukturen und entsprechende lateinische Buchstaben $A, B. \ldots$ für deren Universen.

Wir schreiben σ-Strukturen oft als Tupel

$$\mathcal{A} := \big(A, (R^{\mathcal{A}})_{R\in\sigma}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in\sigma}, (c^{\mathcal{A}})_{c\in\sigma}\big)$$

oder, falls $\sigma := \{R_1, \ldots, R_k, f_1, \ldots, f_l, c_1, \ldots, c_m\}$ endlich ist, auch als

$$\mathcal{A} := \big(A, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_n^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_l^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_m^{\mathcal{A}}\big). \qquad ⊣$$

In der Literatur werden Strukturen oft mit deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$,... bezeichnet. Wir geben als nächstes einige Beispiele für häufig benutzte Strukturen.

Beispiel 4.14 Sei $\sigma_{ar} := \{+, *, 0, 1\}$ die Signatur der Arithmetik, wobei

- $+, *$ binäre Funktionsymbole und
- $0, 1$ Konstantensymbole sind.

Wir können σ_{ar}-Strukturen zur Modellierung von Körpern, etc. benutzen.

(1) Wir definieren eine σ_{ar}-Struktur $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, *^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ mit Universum $\mathbb{N}$, wobei
   - $+^{\mathcal{N}}$ und $*^{\mathcal{N}}$ die Addition und Multiplikation der natürlichen Zahlen sind und
   - $0^{\mathcal{N}} := 0$ und $1^{\mathcal{N}} := 1$.

   Die Struktur $\mathcal{N}$ entspricht also der Arithmetik.

(2) Eine andere σ_{ar}-Struktur ist $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, +^{\mathcal{Z}}, *^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, 1^{\mathcal{Z}})$ mit Universum $\mathbb{Z}$ und
   - $+^{\mathcal{Z}}$ und $*^{\mathcal{Z}}$ als Addition und Multiplikation der ganzen Zahlen und
   - $0^{\mathcal{Z}} := 0$ und $1^{\mathcal{Z}} := 1$. ⊣

Bemerkung 4.15 σ_{ar}-Strukturen müssen nicht „natürliche" arithmetische Strukturen wie die rellen oder ganzen Zahlen sein. Wir können genauso eine σ_{ar}-Struktur

$$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$$

mit Universum $\mathbb{N}$ definieren, wobei

- $+^{\mathcal{A}}(a, b) := a^2 + b^2$,
- $*^{\mathcal{A}}$ ist die übliche *Addition* der natürlichen Zahlen und
- $0^{\mathcal{A}} := 17$ sowie $1^{\mathcal{A}} := 0$. ⊣

Ein weiteres Beispiel, das wir in den folgenden Kapiteln oft benutzen werden, sind *Graphen*.

Definition 4.16 Ein *gerichteter Graph* $\mathcal{G}$ ist eine Struktur über der Signatur $\{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist welches durch eine binäre und irreflexive Relation über dem Universum interpretiert wird. ⊣

Wir werden Graphen meistens als ein Paar $\mathcal{G} := (V, E^{\mathcal{G}})$ notieren, wobei

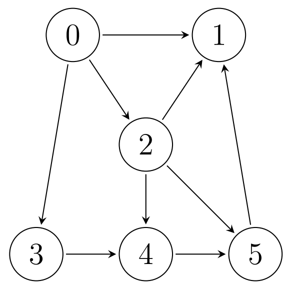
- das Universum V als Knotenmenge und
- die Relation $E^{\mathcal{G}} \subseteq V^2$ als Kantenmenge bezeichnet wird.

Für Graphen als Struktur $\mathcal{G}$ weichen wir also von der Konvention ab, das Universum mit G zu bezeichnen.

Beispiel 4.17 Sei $\mathcal{G} := (V, E^{\mathcal{G}})$ mit

$$\begin{aligned} V &:= \{0,1,2,3,4,5\} \\ E^{\mathcal{G}} &:= \{(0,1),(0,2),(0,3),(2,1),(2,4),(2,5),(3,4),(4,5),(5,1)\}. \end{aligned}$$

Wir werden Graphen wie üblich graphisch darstellen.

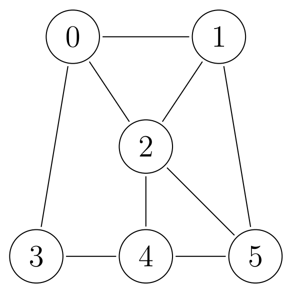


⊣

Definition 4.18 Ein *ungerichteter Graph*, oder einfach *Graph*, ist ein Paar $\mathcal{G} := (V, E^{\mathcal{G}})$ mit den folgenden Eigenschaften.

- $(V, E^{\mathcal{G}})$ ist ein gerichteter Graph.
- $E^{\mathcal{G}}$ ist symmetrisch. ⊣

Da die Kantenrelation in ungerichteten Graphen symmetrisch ist, wird die Richtung der Kanten in ungerichteten Graphen nicht gezeichnet:



Mit Hilfe von Graphen können viele Probleme formalisiert werden. Sie sind natürliche Modelle für Straßenkarten, Flugverbindungen oder Computernetzwerke. Auch elektrische Schaltkreise werden oft als Graphen modelliert, dort repräsentieren Knoten Komponenten wie z.B. Dioden, Transistoren oder Widerstände und Kanten repräsentieren die Drähte.

Definition 4.19 Sei $\mathcal{G} := (V, E^{\mathcal{G}})$ ein gerichteter Graph.

(1) Ein *Weg* in $\mathcal{G}$ ist ein Tupel $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$, für ein $l \in \mathbb{N}$, so dass

$$(v_{i-1}, v_i) \in E^{\mathcal{G}} \qquad \text{für alle } 1 \leqslant i \leqslant l.$$

Wir nennen $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$ einen *Weg von v_0 zu v_l* und l die *Länge* des Wegs.

Bemerkung. Das Tupel (v) ist ein Weg der Länge 0, für alle $v \in V$.

(2) Ein *Pfad* in $\mathcal{G}$ ist ein Weg $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$ so dass $v_i \neq v_j$ für alle $0 \leqslant i < j \leqslant l$.

(3) Ein *geschlossener Weg* in $\mathcal{G}$ ist ein Weg $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$ mit $v_0 = v_l$.

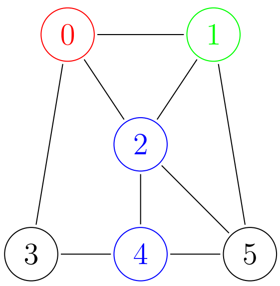
(4) Ein *Kreis* in $\mathcal{G}$ ist ein Pfad $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$ mit $(v_l, v_0) \in E^{\mathcal{G}}$. ⊣

Wir betrachten oft auch *gefärbte Graphen*, wobei jeder Knoten mit einer Farbe aus einer festen Menge $\mathcal{C}$ von Farben gefärbt sein kann. Sei $\mathcal{C}$ eine endliche Menge von einstelligen Relationssymbolen und sei $\sigma := \{E\} \cup \mathcal{C}$, wobei wir annehmen, dass $E \notin \mathcal{C}$. Wir modellieren $\mathcal{C}$-gefärbte Graphen als Strukturen

$$\mathcal{G} := (V, E^{\mathcal{G}}, (C^{\mathcal{G}})_{C \in \mathcal{C}})$$

wobei $C^{\mathcal{G}}$ alle Knoten mit Farbe C enthält.

Beispiel 4.20 Sei $\mathcal{C}$:= {Rot, Grün, Blau}. Im gezeichneten Graphen gilt $\text{Rot}^{\mathcal{G}} = \{0\}$, $\text{Grün}^{\mathcal{G}} = \{1\}$ und $\text{Blau}^{\mathcal{G}} = \{2, 4\}$.



⊣

4.4. Substrukturen

Definition 4.21 Sei τ eine Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukturen.

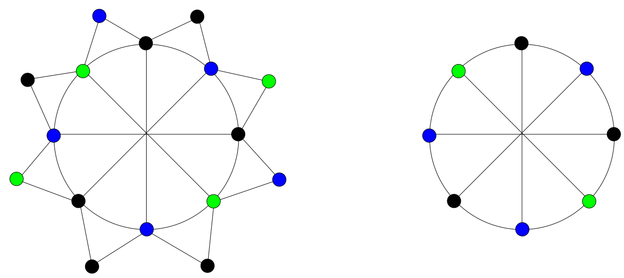
(1) $\mathcal{A}$ ist eine *Substruktur* von $\mathcal{B}$, geschrieben als $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
- für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \tau$ und alle $\overline{a} \in A^k$,

$$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \overline{a} \in R^{\mathcal{B}},$$

- für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \tau$ und alle $\overline{a} \in A^k$, $f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$ und
- für alle Konstantensymbole $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

(2) Wenn $\mathcal{A}$ eine Substruktur von $\mathcal{B}$ ist, dann ist $\mathcal{B}$ eine *Erweiterung* von $\mathcal{A}$. $\dashv$

Beispiel 4.22 Die folgende Abbildung zeigt eine $\sigma := \{E, \text{Blau}, \text{Grün}\}$-Struktur (a) und eine Substruktur (b).



a) b)

$\dashv$

Definition 4.23 Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B. Eine Menge $A \subseteq B$ heißt *τ-abgeschlossen* in $\mathcal{B}$, wenn folgende Bedingungen gelten.

(1) Für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ ist $c^{\mathcal{B}} \in A$.

(2) Wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol und $\overline{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen ist, so ist $f(\overline{a}) \in A$. $\dashv$

Bemerkung 4.24 Wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, dann ist A τ-*abgeschlossen*. Umgekehrt gibt es für jede τ-abgeschossene Menge $A \subseteq B$ genau eine induzierte Substruktur $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ mit Universum A. Diese wird die *durch A induzierte Substruktur* genannt. $\dashv$

Beispiel 4.25 Sei $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{Z}}, +^{\mathcal{Z}})$, wobei $<^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$ und $+^{\mathcal{Z}}$ die Addition auf den ganzen Zahlen ist. Dann ist $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}})$, wobei $<^{\mathcal{N}}$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ und $+^{\mathcal{N}}$ die übliche Addition auf den natürlichen Zahlen ist, die durch $\mathbb{N}$ induzierte Substruktur von $\mathcal{Z}$. $\dashv$

Substrukturen sind *eine* Art, in der eine Struktur in einer anderen enthalten sein kann. Hier haben wir ein kleineres Universum, aber die gleiche Signatur. Eine andere Art, in der $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ enthalten sein kann, ist indem weniger Symbole zur Verfügung stehen, aber das Universum gleich bleibt.

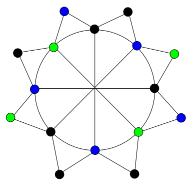
Definition 4.26 Sei $\sigma \subseteq \tau$ eine Signatur und sei $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur.

Das σ-*Redukt* $\mathcal{B}_{|\sigma}$ von $\mathcal{B}$ ist definiert als die σ-Struktur $\mathcal{B}_{|\sigma}$ die man aus $\mathcal{B}$ enthält, indem die Symbole aus $\tau \setminus \sigma$ „entfernt“ werden, d.h. die Struktur mit

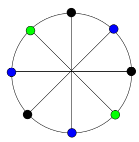
- Universum B und
- $S^{\mathcal{B}_{|\sigma}} = S^{\mathcal{B}}$ für jedes (Relations-, Funktions-, Konstanten-) Symbol $S \in \sigma$.

$\mathcal{B}$ heißt *Expansion* von $\mathcal{B}_{|\sigma}$. $\dashv$

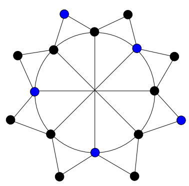
Beispiel 4.27 (Fortsetzung von Beispiel 4.22.) Die folgende Abbildung zeigt eine $\sigma := \{E, \textsc{Blau}, \textsc{Grün})$-Struktur (a), eine Substruktur (b) sowie zwei verschiedene Redukte (c) und (d).



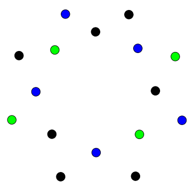
a) $\mathcal{G}$



b) $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$



c) $\mathcal{G}_{|\{E,\textsc{Blue}\}}$

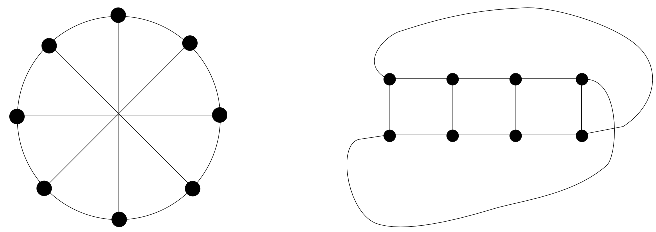


d) $\mathcal{G}_{|\{\textsc{Blue},\textsc{Green}\}}$

$\dashv$

4.5. Homo- und Isomorphismen

In diesem Abschnitt betrachten wir strukturerhaltende Abbildungen. Betrachten wir dazu zunächst einmal die folgenden Graphen?



Frage. *Sind die folgenden zwei Graphen verschieden?*

Mögliche Antworten.

Ja, wenn wir daran interessiert sind, wie sie gezeichnet sind.

Nein, wenn wir uns nur für ihre Knoten und Verbindungen dazwischen interessieren.

Als Strukturen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ über $\sigma_{Graph} := \{E\}$ sind sie gleich (im Sinne der Isomorphie, siehe weiter unten). Wenn wir uns für ihre Einbettung in den $\mathbb{R}^2$ (also eine Zeichnung wie oben) interessieren, brauchen wir eine andere Modellierung als Struktur, die diese Informationen enthält.

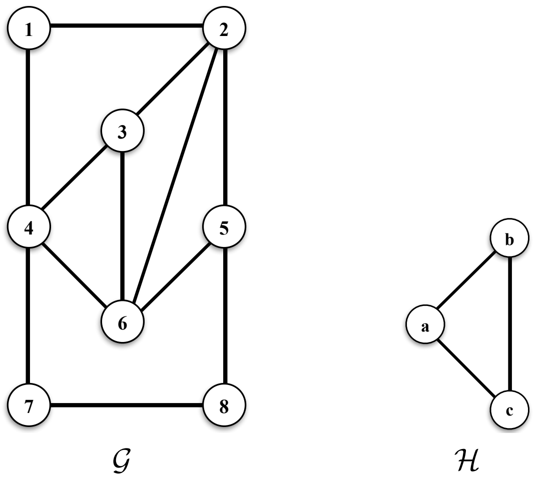
Wir betrachten im Folgenden zwei verschiedene Begriffe der Ähnlichkeit zwischen Strukturen. Der erste Begriff ist relativ schwach, wohingegen der zweite Begriff die "Gleichheit" zwischen Strukturen vollständig beschreibt.

Definition 4.28 Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen. Ein *Homomorphismus* von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist eine Funktion $h : A \to B$, so dass

- für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$:
$$\text{wenn} \quad \overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{dann auch} \quad \big(h(a_1), \dots, h(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}},$$
- für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt
$$h(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}\big(h(a_1), \dots, h(a_k)\big) \quad \text{und}$$
- für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt
$$h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}.$$

Wir schreiben $h : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$ um zu sagen, dass h ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist. $\dashv$

Beispiel 4.29 Wir betrachten die folgenden Graphen $\mathcal{G} := (G, E^{\mathcal{G}})$ und $\mathcal{H} := (H, E^{\mathcal{H}})$.



Dann gilt $\mathcal{G} \to_{hom} \mathcal{H}$ und $\mathcal{H} \to_{hom} \mathcal{G}$. Zum Beispiel ist die Abbildung $h : G \to H$, die die Elemente $2, 4, 8$ auf das Element a, die Elemente $1, 3, 5, 7$ auf das Element b sowie das Element 6 auf c abbildet, ein Homomorphismus von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}$. Es gibt aber viele andere Homomorphismen von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}$. $\dashv$

Wie das vorherige Beispiel zeigt, können homomorphe Strukturen recht unterschiedlich "aussehen". Wir werden daher jetzt einen erheblich stärkeren Ähnlichkeitsbegriff zwischen Strukturen kennen lernen.

Definition 4.30 Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen. Ein *Isomorphismus* von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist eine Funktion $I : A \to B$, so dass

- I eine Bijektion zwischen A und B ist
- für alle k-stell. Relationssymb. $R \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$:
$$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \big(I(a_1), \dots, I(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$
- für alle k-stell. Funktionssymb. $f \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt
$$I(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}(I(a_1), \dots, I(a_k)\big).$$

- für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt

$$I(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}.$$

Wir schreiben $I : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ um zu sagen, dass I ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist. ⊣

Definition 4.31 Sei σ eine Signatur.

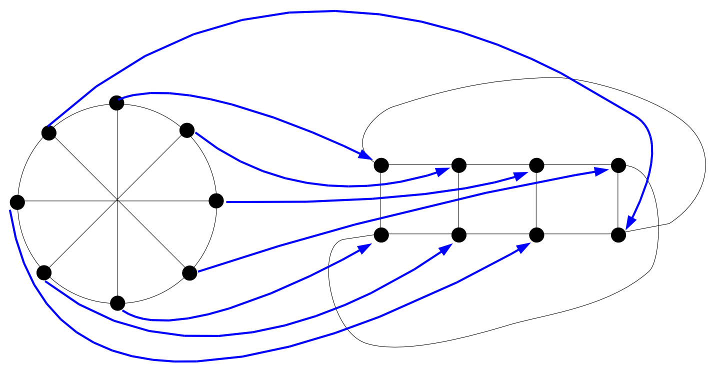
(1) Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind *isomorph*, geschrieben $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, wenn es einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt.

(2) Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind *homomorph*, geschrieben $\mathcal{A} \rightarrow_{hom} \mathcal{B}$, wenn es einen Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt. ⊣

Man beachte, dass der Isomorphiebegriff symmetrisch ist, der Begriff eines Homomorphismus jedoch nicht.

Beispiel 4.32
- Wenn A, B endliche Mengen der gleichen Kardinalität sind, dann gilt für die $\varnothing$-Strukturen $(A, \varnothing) \cong (B, \varnothing)$.
- Wenn A, B endliche Mengen gleicher Kardinalität und $<^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{B}}$ lineare Ordnungen auf A, B sind, dann $(A, <^{\mathcal{A}}) \cong (B, <^{\mathcal{B}})$.

  Aber: $(\mathbb{Z}, <) \ncong (\mathbb{N}, <)$
- Als letztes Beispiel zeigen wir noch, dass die beiden Graphen zu Beginn des Abschnitts in der Tat isomorph sind. Ein möglicher Isomorphismus ist in folgender Abbildung dargestellt.



⊣

4.6. Constraint Satisfaction Probleme

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch einmal die Constraint Satisfaction Probleme aus Definition 3.29. Wir wiederholen die Definition zur Erinnerung:

Ein Constraint Satisfaction Problem $\mathcal{C} := (V, D, C)$ besteht aus

- einer Menge V von Variablen
- einem Wertebereich D
- und einer Menge C von *constraints*, d.h. Tupeln $((v_1, \dots, v_n), R)$ mit $v_1, \dots, v_n \in V$ und $R \subseteq D^n$

Eine *Lösung* eines CSPs ist eine Abbildung $f : V \to D$, so dass für alle constraints $((v_1, \dots, v_n), R) \in C$ gilt: $(f(v_1), \dots, f(v_n)) \in R$.

Constraint Satisfaction Probleme können äquivalent als Homomorphieproblem interpretiert. Zu einem CSP $\mathcal{C} := (V, D, C)$ wie zuvor definieren wir ein Homomorphieproblem über einer Signatur σ_C wie folgt.

- Für jedes constraint $c := ((v_1, \dots, v_n), R)$ enthält die Signatur σ_C ein n-stelliges Relationssymbol R_c.
- Wir definieren weiterhin eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit Universum $A := V$ und $R_c^{\mathcal{A}} := \{(v_1, \dots, v_n)\}$.
- Schließlich definieren wir eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit Universum D und $R_c^{\mathcal{B}} := R$, für $c = ((v_1, \dots, v_n), R)$.

Nun gilt: $\mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$ genau dann, wenn das CSP $\mathcal{C}$ lösbar ist.

Umgekehrt lässt sich das Homomorphieproblem zwischen zwei Strukturen sehr leicht als CSP schreiben. CSPs und Homomorphieprobleme sind also nur unterschiedliche Sichtweisen auf das selbe Problem.

CSPs sind ein in der künstlichen Intelligenz viel untersuchtes Problem. Das CSP-Problem, also das Problem zu entscheiden, ob ein gegebenes CSP eine Lösung hat, ist NP-vollständig. Wie wir gesehen haben, kann das CSP-Problem, äquivalent auch als Homomorphieproblem angesehen werden, d.h. als Problem für zwei gegebene Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zu entscheiden, ob $\mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$.

In der aktuellen Forschung wird zur Zeit die Komplexität des Homomorphieproblems für feste Strukturen $\mathcal{B}$ intensiv untersucht. Zum Beispiel können wir sehr leicht das 3-Färbbarkeitsproblem als Homomorphieproblem für die Struktur $\mathcal{B}$ schreiben, die nur aus einem Dreieck besteht. Für dieses $\mathcal{B}$ ist das

Homomorphieproblem also NP-vollständig. Für andere Strukturen $\mathcal{B}$ ist das Problem jedoch in PTime.

Vermutung 4.33 (Feder, Vardi) *Für jede feste Struktur $\mathcal{B}$ ist das Homomorphieproblem entweder NP-vollständig oder in* PTime.