HAUSAUFGABE 1 - BLATT 2, 3 & 4

SARAH KÖHLER UND MATTHIAS LOIBL

Blatt 2

Aufgabe 1

a).

- Prüfungsamt

$$\text{PA} \stackrel{\text{def}}{=} betr.(verl.\text{Pa} + an.verl.\text{PA} + ab.verl.\text{PA})$$

- Zwei Prüfungsämter

$$\text{AmtFoSA} \stackrel{\text{def}}{=} \text{PA}\,[FoSA\_an/an,\ FoSA\_ab/ab]$$
$$\text{AmtReSyst} \stackrel{\text{def}}{=} \text{PA}\,[ReSyst\_an/an,\ ReSyst\_ab/ab]$$

- Student

$$\text{Student} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{betr}.\Big(\overline{verl}.\text{Student} + \overline{an}.\overline{verl}.$$
$$\Big(\overline{betr}.\overline{ab}.\overline{verl}.\text{Student} + \overline{betr}.\overline{verl}.\text{Student} + pr\text{ü}.\mathbf{0}\Big)\Big)$$

- Student besucht FoSA

$$\text{Günther} \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\text{Student}\,[FoSA\_an/an,\ FoSA\_ab/ab,\ FoSA\_pr\text{ü}/pr\text{ü}]$$

- Universität

$$\mathcal{B} = \{betr, verl, FoSA\_an, FoSA\_ab, ReSyst\_an, ReSyst\_ab\}$$
$$\text{Uni} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Günther} \mid \text{AmtReSyst} \mid \text{AmtFoSA}) \setminus \mathcal{B}$$

b).

Günther im $\mathrm{PA}_{\mathrm{FoSA}} \stackrel{\text{def}}{=}$
$(\text{AmtReSyst} \mid FoSA\_an.verl.\text{AmtFoSA} + FoSA\_ab.verl.\text{AmtFoSA} \mid$
$\Big(\overline{verl}.\text{Student} + \overline{an}.\overline{verl}.\Big(\overline{betr}.\overline{ab}.\overline{verl}.\text{Student} + \overline{betr}.\overline{verl}.\text{Student} + pr\text{ü}.\mathbf{0}\Big)\Big)$
$[FoSA\_an/an, FoSA\_ab/ab]) \setminus \mathcal{B}$

Günther im $\mathrm{PA}_{\mathrm{ReSyst}} \stackrel{\text{def}}{=} \Big(verl.\text{AmtReSyst}|\text{AmtFoSA}|\overline{verl}.\text{Günther}\Big) \setminus \mathcal{B}$

$\text{Günther}_{\text{an}} \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\overline{betr}.\overline{ab}.\overline{verl}.\text{Student} + \overline{betr}.\overline{verl}.\text{Student} + pr\text{ü}.\mathbf{0}\Big)\,[FoSA\_an/an, FoSA\_ab/ab]$

$\text{Günther}_{\text{an}}$ im $\mathrm{PA}_{\mathrm{FoSA}} \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\text{AmtReSyst} \mid \overline{verlassen}.\text{Günther}_{\text{an}} \mid FoSA\_an.verlassen.\text{AmtFoSA}\Big) \setminus \mathcal{B}$

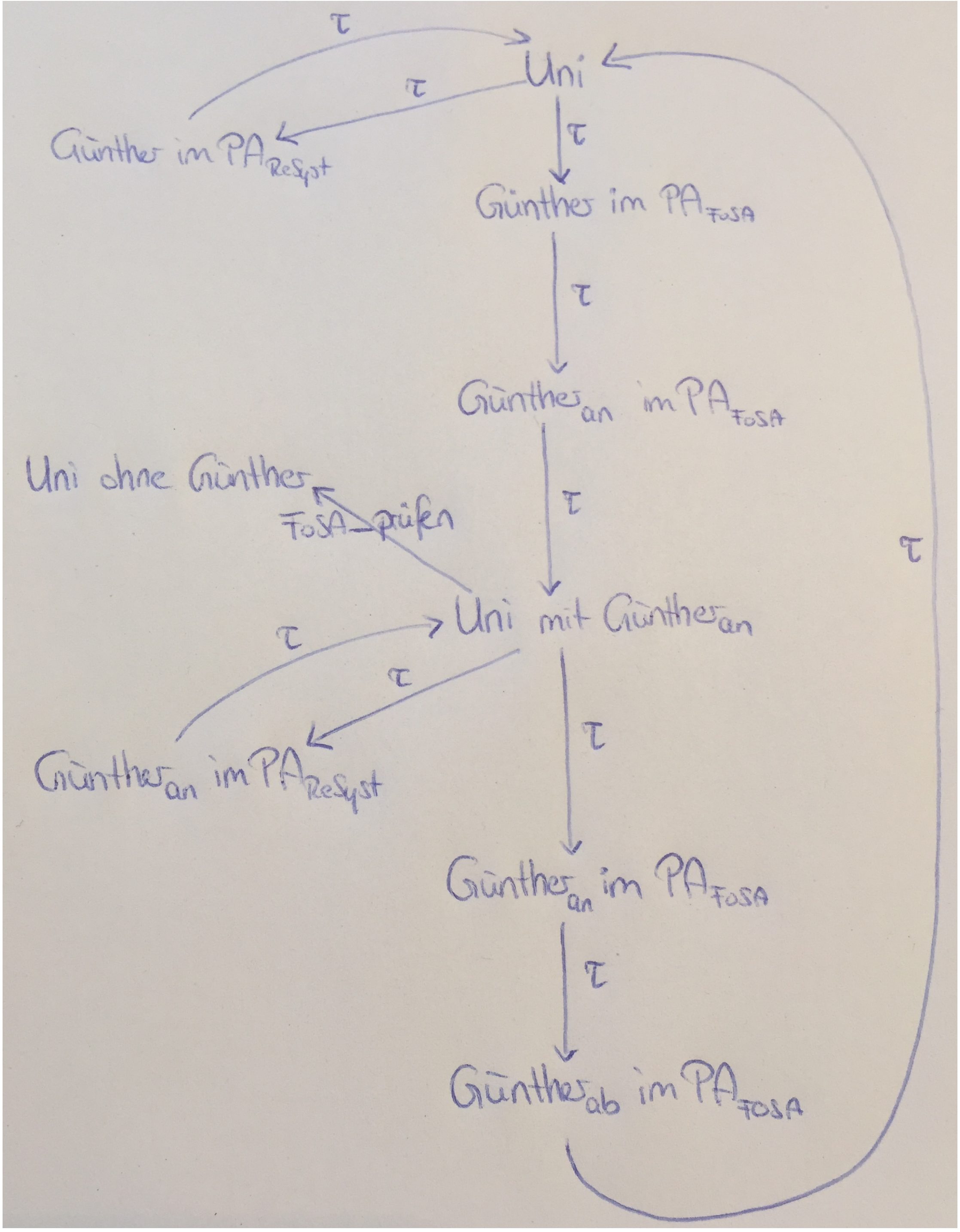
Uni mit $\text{Günther}_{\text{an}} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{AmtReSyst} \mid \text{Günther}_{\text{an}} \mid \text{AmtFoSA}) \setminus \mathcal{B}$

$\text{Günther}_{\text{an}}$ im $\mathrm{PA}_{\mathrm{FoSA}}2 \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\text{AmtReSyst} \mid \overline{FoSA\_ab}.\overline{verlassen}.\text{Günther} \mid$
$FoSA\_ab.verlassen.\text{AmtFoSA}) \setminus \mathcal{B}$

$\text{Günther}_{\text{an}}$ im $\mathrm{PA}_{\mathrm{ReSyst}} \stackrel{\text{def}}{=} \Big(verl.\text{AmtReSyst} \mid \text{AmtFoSA} \mid \overline{verl}.\text{Günther}_{\text{an}}\Big) \setminus \mathcal{B}$

$\text{Günther}_{\text{ab}}$ im $\mathrm{PA}_{\mathrm{FoSA}} \stackrel{\text{def}}{=} \Big(verl.\text{AmtFoSA} \mid \text{AmtReSyst} \mid \overline{verl}.\text{Günther}\Big) \setminus \mathcal{B}$

Uni ohne Günther $\stackrel{\text{def}}{=} (\text{AmtReSyst} \mid \text{AmtFoSA}) \setminus \mathcal{B}$


Uni
τ
Günther im PA ReSyst
Günther im PA FoSA
Günther an im PA FoSA
Uni ohne Günther
FoSA-prüfen
Uni mit Günther an
Günther an im PA ReSyst
Günther an im PA FoSA
Günther ab im PA FoSA

Aufgabe 2

a).

$$\left(\mathsf{Proc}, \mathsf{Act}, \xrightarrow{\alpha} | \alpha \in \mathsf{Act}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{Proc} &= \{H, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8\} \\
\mathsf{Act} &= \left\{a, \overline{a}, b, c, \overline{b}, \overline{c}, \tau\right\} \\
\xrightarrow{a} &= \{(H, H_1), (H, H_3), (H_3, H_4), (H_2, H_5), (H_1, H_4), (H_6, H_7)\} \\
\xrightarrow{\overline{a}} &= \{(H_1, H_2), (H_4, H_5), (H_7, H_8)\} \\
\xrightarrow{b} &= \{(H_3, H_6), (H_4, H_7), (H_5, H_8)\} \\
\xrightarrow{\overline{b}} &= \emptyset \\
\xrightarrow{c} &= \{(H_3, H_6), (H_4, H_7), (H_5, H_8)\} \\
\xrightarrow{\overline{c}} &= \emptyset
\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} &\stackrel{\text{def}}{=} a.\mathrm{H}_1 | a.\mathrm{H}_3 \\
\mathrm{H}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} a.\mathrm{H}_4 1 | \overline{a}.\mathrm{H}_2 | \tau.\mathrm{H}_5 \\
\mathrm{H}_3 &\stackrel{\text{def}}{=} a.\mathrm{H}_4 | b.\mathrm{H}_6 + c.\mathrm{H}_6 \\
\mathrm{H}_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{a}.\mathrm{H}_5 | b.\mathrm{H}_7 + c.\mathrm{H}_7 \\
\mathrm{H}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} a.\mathrm{H}_5 \\
\mathrm{H}_5 &\stackrel{\text{def}}{=} b.\mathbf{0} | c.\mathbf{0} \\
\mathrm{H}_6 &\stackrel{\text{def}}{=} a.\mathrm{H}_7 \\
\mathrm{H}_7 &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{a}.\mathrm{H}_8 |
\end{aligned}$$

c).

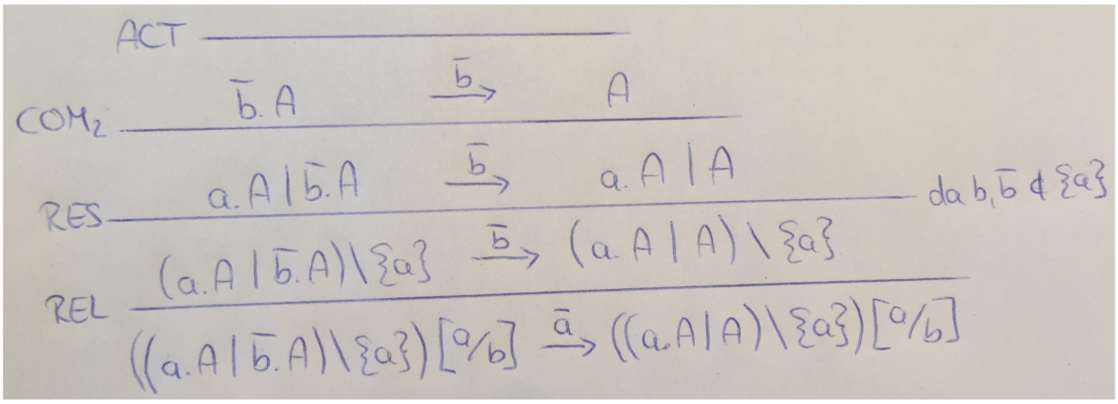
$$\mathrm{H} \stackrel{\text{def}}{=} a.\left(a.\mathbf{0} | \overline{a}.\mathbf{0} | \left(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0}\right)\right)$$

Aufgabe 3

a). Im ersten Schritt mögliche Aktionen: $\{\overline{a}\}$

Mit $\mathrm{B} \overset{\text{def}}{=} a.\mathrm{A}$ ist zu zeigen:
$\left(\left(a.\mathrm{A}|\overline{b}.\mathrm{A}\right) \setminus \{\ a\ \}\right)[a/b] \xrightarrow{\overline{a}} ((a.\mathrm{A}|\mathrm{A}) \setminus \{\ a\ \})[a/b]$

Beweis:

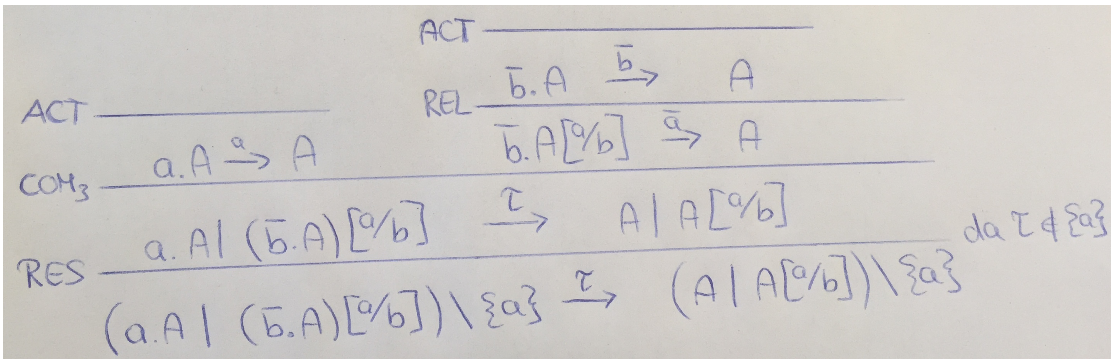


b). Es sind keine Aktionen möglich: $\emptyset$

c). Im ersten Schritt mögliche Aktionen: $\{\tau\}$

Mit $\mathrm{B} \overset{\text{def}}{=} a.\mathrm{A}$ ist zu zeigen:
$\left(a.\mathrm{A}|\left(\overline{b}.\mathrm{A}\right)[a/b]\right) \setminus \{\ a\ \} \xrightarrow{\tau} (\mathrm{A}|\,(\mathrm{A})\,[a/b]) \setminus \{\ a\ \}$

Beweis:



Aufgabe 5: Starke Bisimulation

d). Sei $\mathcal{B} = \{(q_2, p_1), (q_1, p_2), (q_4, p_2), (q_3, p_4), (q_5, p_3)\}$.
Beweis, dass $\mathcal{B}$ eine starke Bisimulation ist:

- Betrachte $(q_1, p_2) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in q_1:
  - Für $q_1 \xrightarrow{c} q_3$ wähle $p_2 \xrightarrow{c} p_4$ und $(q_3, p_4) \in \mathcal{B}$.
  - Für $q_1 \xrightarrow{b} q_5$ wähle $p_2 \xrightarrow{b} p_3$ und $(q_5, p_3) \in \mathcal{B}$.

  Transitionen in p_2:
  - Für $p_2 \xrightarrow{b} p_3$ wähle $q_1 \xrightarrow{b} q_5$ und $(q_5, p_3) \in \mathcal{B}$.
  - Für $p_2 \xrightarrow{c} p_4$ wähle $q_1 \xrightarrow{c} q_3$ und $(q_3, p_4) \in \mathcal{B}$.
- Betrachte $(q_4, p_2) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in q_4:
  - Für $q_4 \xrightarrow{b} q_5$ wähle $p_2 \xrightarrow{b} p_3$ und $(q_5, p_3) \in \mathcal{B}$.

  Transitionen in p_2:
  - Für $p_2 \xrightarrow{b} p_3$ wähle $q_4 \xrightarrow{b} q_5$ und $(q_5, p_3) \in \mathcal{B}$.
- Betrachte $(q_3, p_4) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in q_3:
  - Für $q_3 \xrightarrow{a} q_5$ wähle $p_4 \xrightarrow{a} p_3$ und $(q_5, p_3) \in \mathcal{B}$.

  Transitionen in p_4:
  - Für $p_4 \xrightarrow{a} p_3$ wähle $q_3 \xrightarrow{a} q_5$ und $(q_5, p_3) \in \mathcal{B}$.
- Betrachte $(q_5, p_3) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in q_5:
  - Für $q_5 \xrightarrow{a} q_2$ wähle $p_3 \xrightarrow{a} p_1$ und $(q_2, p_1) \in \mathcal{B}$.

  Transitionen in p_3:
  - Für $p_3 \xrightarrow{a} p_1$ wähle $q_5 \xrightarrow{a} q_2$ und $(q_2, p_1) \in \mathcal{B}$.

Da $\mathcal{B}$ eine starke Bisimulation ist und $(q_2, p_1) \in \mathcal{B}$, gilt $q_2 \sim p_1$.

a), b), c). Da $q_2 \sim p_1$ (Beweis siehe d), gilt auch, dass q_2 von p_1 stark simuliert wird, sowie dass p_1 von q_2 stark simuliert wird. Damit simulieren sich q_2 und p_2 auch stark gegenseitig.

Aufgabe 6: Starke Bisimulation

a). q_6 und p_1 sind stark bisimilar. Eine passende Relation ist:
$\mathcal{B} = \{(p_1, q_6), (p_2, q_5), (p_3, q_9), (p_4, q_3), (p_5, q_3), (p_6, q_4), (p_6, q_7), (p_4, q_1), (p_5, q_2)\}$

b). q_6 wird von p_1 stark simuliert, siehe Relation $\mathcal{B}$ aus a)

c). p_1 wird von q_6 stark simuliert, siehe Relation $\mathcal{B}$ aus a)

d). q_6 und p_1 simulieren sich gegenseitig stark, siehe Relation $\mathcal{B}$ aus a)

e). $q_1 \sim p_4$, d.h. es existiert eine starke Bisimulation:
Sei $\mathcal{R} = \{(q_1, p_4), (q_3, p_5), (q_2, p_5), (q_4, p_6), (q_7, p_6), (q_8, p_4)\}$

Beweis, dass $\mathcal{R}$ eine starke Bisimulation ist:

Betrachte $(q_1, p_4) \in \mathcal{R}$.
Transitionen in q_1:
- Für $q_1 \xrightarrow{a} q_3$ wähle $p_4 \xrightarrow{a} p_5$ und $(q_3, p_5) \in \mathcal{R}$.
- Für $q_1 \xrightarrow{b} q_2$ wähle $p_4 \xrightarrow{b} p_5$ und $(q_2, p_5) \in \mathcal{R}$.

Transitionen in p_4:
- Für $p_4 \xrightarrow{a} q_3$ wähle $q_1 \xrightarrow{a} p_3$ und $(p_3, q_3) \in \mathcal{R}$.

Betrachte $(q_3, p_5) \in \mathcal{R}$.
Transitionen in q_3:
- Für $q_3 \xrightarrow{b} q_4$ wähle $p_5 \xrightarrow{b} p_6$ und $(q_4, p_6) \in \mathcal{R}$.
- Für $q_3 \xrightarrow{b} q_7$ wähle $p_5 \xrightarrow{b} p_6$ und $(q_7, p_6) \in \mathcal{R}$.

Transitionen in p_5:
- Für $p_5 \xrightarrow{a} e$ wähle $q_3 \xrightarrow{a} f$ und $(f, e) \in \mathcal{R}$.

Betrachte $(q_2, p_5) \in \mathcal{R}$.
Transitionen in q_2:
- Für $q_2 \xrightarrow{b} q_4$ wähle $p_5 \xrightarrow{b} p_6$ und $(q_4, p_6) \in \mathcal{R}$.

Transitionen in p_5:
- Für $p_5 \xrightarrow{b} p_6$ wähle $q_2 \xrightarrow{b} q_4$ und $(q_4, p_6) \in \mathcal{R}$.

Somit ist $\mathcal{R}$ eine starke Bisimulation. Da außerdem $(q_1, p_4) \in \mathcal{R}$ ist bewiesen, dass $q_1 \sim p_4$ gilt.

Aufgabe 7: Schwache Bisimulation

a). Zu zeigen: $i \approx j$

Sei $\mathcal{B} = \{(i,j),(i_1,j_1),(i_2,j_1),(i_1,j_3),(i_1,j_4),(i_3,j_3),(i,j_2),(i_4,j_3),(i_4,j_4)\}$.
Zu zeigen: $\mathcal{B}$ ist eine schwache Bisimulation.

- Betrachte $(i,j) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in i:
  - Für $i \xrightarrow{a} i_1$ wähle $j \xrightarrow{a} j_1$ und $(i_1,j_1) \in \mathcal{B}$.
  - Für $i \xrightarrow{a} i_2$ wähle $j \xrightarrow{a} j_1$ und $(i_2,j_1) \in \mathcal{B}$.

  Transitionen in j:
  - Für $j \xrightarrow{a} j_1$ wähle $i \xrightarrow{a} i_1$ und $(i_1,j_1) \in \mathcal{B}$.
- Betrachte $(i_1,j_1) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in i_1:
  - Für $i_1 \xrightarrow{b} i_1$ wähle $j_1 \xrightarrow{b} j_3$ und $(i_1,j_3) \in \mathcal{B}$.
  - Für $i_1 \xrightarrow{c} i_1$ wähle $j_1 \xrightarrow{c} j_4$ und $(i_1,j_4) \in \mathcal{B}$.

  Transitionen in j_1:
  - Für $j_1 \xrightarrow{\tau} j_3$ wähle $i_1 \xrightarrow{\tau} i_1$ und $(i_1,j_3) \in \mathcal{B}$.
- Betrachte $(i_2,j_1) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in i_2:
  - Für $i_2 \xrightarrow{\tau} i_3$ wähle $j_1 \xrightarrow{\tau} j_3$ und $(i_3,j_3) \in \mathcal{B}$.
  - Für $i_2 \xrightarrow{d} i$ wähle $j_1 \xrightarrow{d} j_2$ und $(i,j_2) \in \mathcal{B}$.

  Transitionen in j_1:
  - Für $j_1 \xrightarrow{\tau} j_3$ wähle $i_2 \xrightarrow{\tau} i_1$ und $(i_1,j_3) \in \mathcal{B}$.
  - Für $j_1 \xrightarrow{d} j_2$ wähle $i_2 \xrightarrow{d} i$ und $(i,j_2) \in \mathcal{B}$.
- Betrachte $(i_1,j_3) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in i_1:
  - Für $i_1 \xrightarrow{b} i_1$ wähle $j_3 \xrightarrow{b} j_3$ und $(i_1,j_3) \in \mathcal{B}$.
  - Für $i_1 \xrightarrow{c} i_1$ wähle $j_3 \xrightarrow{c} j_4$ und $(i_1,j_4) \in \mathcal{B}$.

  Keine Transitionen in j_3 möglich.
- Betrachte $(i_1,j_4) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in i_1:
  - Für $i_1 \xrightarrow{b} i_1$ wähle $j_4 \xrightarrow{b} j_3$ und $(i_1,j_3) \in \mathcal{B}$.
  - Für $i_1 \xrightarrow{c} i_1$ wähle $j_4 \xrightarrow{c} j_3$ und $(i_1,j_3) \in \mathcal{B}$.

  Keine Transitionen in j_4 möglich.
- Betrachte $(i_3,j_3) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in i_3:
  - Für $i_3 \xrightarrow{b} i_4$ wähle $j_3 \xrightarrow{b} j_3$ und $(i_4,j_3) \in \mathcal{B}$.
  - Für $i_3 \xrightarrow{c} i_3$ wähle $j_3 \xrightarrow{c} j_4$ und $(i_3,j_4) \in \mathcal{B}$.

  Transitionen in j_3:
  - Für $j_3 \xrightarrow{b} j_3$ wähle $i_3 \xrightarrow{b} i_4$ und $(i_4,j_3) \in \mathcal{B}$.
  - Für $j_3 \xrightarrow{c} j_4$ wähle $i_3 \xrightarrow{c} i_3$ und $(i_3,j_4) \in \mathcal{B}$.

- Betrachte $(i, j_2) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in i:
  – Für $i \xrightarrow{a} i_2$ wähle $j_2 \xrightarrow{a} j_1$ und $(i_2, j_1) \in \mathcal{B}$.
  – Für $i \xrightarrow{a} i_1$ wähle $j_2 \xrightarrow{a} j_1$ und $(i_1, j_1) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in j_2:
  – Für $j_2 \xrightarrow{\tau} j$ wähle $i \xrightarrow{\tau} i$ und $(i, j) \in \mathcal{B}$.
- Betrachte $(i_4, j_3) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in i_4:
  – Für $i_4 \xrightarrow{c} i_4$ wähle $j_3 \xrightarrow{c} j_4$ und $(i_4, j_4) \in \mathcal{B}$.
  – Für $i_4 \xrightarrow{b} i_3$ wähle $j_3 \xrightarrow{b} j_3$ und $(i_3, j_3) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in j_3:
  – Für $j_3 \xrightarrow{c} j_4$ wähle $i_4 \xrightarrow{c} i_4$ und $(i_4, j_4) \in \mathcal{B}$.
  – Für $j_3 \xrightarrow{b} j_3$ wähle $i_4 \xrightarrow{b} i_3$ und $(i_3, j_3) \in \mathcal{B}$.
- Betrachte $(i_4, j_4) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in i_4:
  – Für $i_4 \xrightarrow{b} i_3$ wähle $j_4 \xrightarrow{b} j_3$ und $(i_3, j_3) \in \mathcal{B}$.
  – Für $i_4 \xrightarrow{c} i_4$ wähle $j_4 \xrightarrow{c} j_3$ und $(i_4, j_3) \in \mathcal{B}$.
  Transitionen in j_4:
  – Für $j_4 \xrightarrow{c} j_3$ wähle $i_4 \xrightarrow{c} i_4$ und $(i_4, j_3) \in \mathcal{B}$.
  – Für $j_4 \xrightarrow{b} j_3$ wähle $i_4 \xrightarrow{b} i_3$ und $(i_3, j_3) \in \mathcal{B}$.

Somit ist $\mathcal{B}$ eine schwache Bisimulation. Da $(i, j) \in \mathcal{B}$ kann gefolgert werden, dass i und j schwach bisimilar sind.

b). $i \not\approx k$, weil in k auch nach der ersten c-Aktion noch eine d-Aktion möglich ist, in i aber nach dem ersten c kein Weg mehr zu einer d-Aktion exisitiert.

c). $j \not\approx k$, weil in k auch nach der ersten c-Aktion noch eine d-Aktion möglich ist, in i aber nach dem ersten c kein Weg mehr zu einer d-Aktion exisitiert.