HA 4

Dora Szücs (358573)
Iwa Stoilowa (325947)
Sarah Köhler (356394)

1. Aufgabe

3/5

a)

z.z. (a_n), $a_n := \sqrt{n}$ ist streng monoton wachsend.

D.h. $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n < a_{n+1}$

Beweis: Für bel. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = \underbrace{\sqrt{n} < \sqrt{n+1}}_{\text{zu beweisen}} = a_{n+1}$$

Somit ist (a_n) streng monoton wachsend.

z.z. (b_n) ist streng monoton: (b_n), $b_n = -1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Beweis per Induktion:

I.A. $n = 1$

$b_1 = -1 + \frac{1}{1} = -1 + 1 = 0 > -\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = b_2 = b_{1+1}$

Somit kann (b_n) nur monoton fallend sein und es folgt als IV:

IV $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $b_n > b_{n+1}$

I.S. $n \to n+1$

Es soll gelten $b_{n+1} > b_{(n+1)+1}$.

$n+1 < n+2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$

sorry

$b_{n+1} = -1 + \frac{1}{n+1} > -1 + \frac{1}{n+2} = b_{n+2} = b_{(n+1)+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}$ Stimmt, da bei Brüchen gilt, dass je größer der Nenner, desto kleiner die Zahl.

Aus I.A. und IS. folgt somit, dass (b_n) streng monoton fallend ist.

BRUNNEN

b) z.z. (a_n) ist unbeschränkt.

Aus a) wissen wir, dass (a_n) streng monoton wächst,

~~deswegen kann es keine untere Schranke geben~~

z.z. ist somit, dass kein $M \in \mathbb{R}$ ex. mit $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Da die natürlichen Zahlen nach oben unbeschränkt sind gilt für (a_n):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \to \infty$$

Ja aber versuche lieber

Gilt: $\forall S > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : a_n > S$

So ist (a_n) unbeschränkt

D.h. für jedes $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $M < a_n$.

(a_n) ist also unbeschränkt.

c) Aus a) wissen wir, dass (a_n) streng monoton wächst, aus b), dass (a_n) keine obere Schranke hat.

D.h. $\lim_{n\to\infty} (a_n) = \infty$

f Du benutzt die bestimmt divergenz um zu zeigen dass (a_n) unbeschränkt ist, dann kannst du nicht unbeschränktheit benutzen um bestimmt divergent zu zeigen.

Daraus folgt, dass (a_n) bestimmt divergent ist

d) z.z. nicht jede streng monotone Folge ist divergent.

Per Gegenbeispiel (b_n):

aus a) wissen wir, dass (b_n) streng monoton fällt.

(b_n) ist aber nicht divergent, sondern konvergiert mit Grenzwert $b = -1$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(-1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(-1) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= -1 + 0 = -1$$

Aus (b_n) lässt sich also erkennen, dass nicht jede streng monotone Folge divergiert.

Grenzwert

wieder Zu zeigen ist $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |b_n - (-1)| < \varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon$

3/5

2. Aufgabe

a) $z = i(2-3i)^2(2+i)$

$= i\ (4 - 12i + 9i^2)(2+i)$

$= i(8 + 4i - 24i - 12i^2 + 18i^2 + 9i^3$

$= i(8 - 20i + 6i^2 + 9i^3)$

$= 8i - 20\underbrace{i^2}_{=-1} + 6\underbrace{i^3}_{(-1)\cdot i} + 9i^4$

$= 8i + 20 - 6i + 9$

$= 29 + 2i$

$= a + bi$

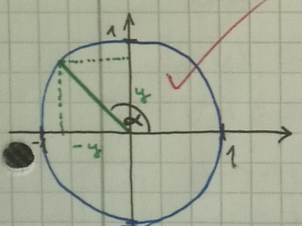
$\operatorname{Im}(z) = b = 2$

b) $z \in \mathbb{C}$, $z^3 = \sqrt{32}\,(i-1)$

$z = a + bi = r \cdot e^{i\varphi} = r\,(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

$z^3 = (r \cdot e^{i\varphi})^3 = r^3 \cdot e^{i3\varphi} = r^3\,(\cos(3\varphi) + i \cdot \sin(3\varphi))$

$z^3 = \sqrt{32}\,(i-1) = \sqrt{2^5}\,(-1+i) = \sqrt{2^5}\,\dfrac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$



es existiert kein α, so dass
$\cos(\alpha) = -1$ und $\sin(\alpha) = 1$,
aber $\cos(\alpha) = -y$ und $\sin(\alpha) = +y$
gilt, wenn $\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2z\pi$ $z \in \mathbb{Z}$

$= \dfrac{2 \cdot \sqrt{2^5}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2^4 \cdot 2}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 2^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Longrightarrow \quad r^3 = 2^3 \quad \Longleftrightarrow \quad r = 2$

$\Longrightarrow \quad 3\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2z\pi \quad , z \in \mathbb{Z}$

$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2z\pi}{3} \quad , z \in \mathbb{Z}$

in Eulerscher Darstellung:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \frac{k}{3}\right)} \qquad k \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad k = 0, 1, 2$$

k einsetzen und z_0, z_1, z_2 angeben.

in kartesischen Darstellung:

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

? hängt von θ ab !!

c) $\operatorname{Im}(a + 3i + \sqrt{2}) = \operatorname{Re}(z) + b \qquad \text{mit } z = a + bi$

$$\operatorname{Im}(a + 3i + \sqrt{2}) = \operatorname{Re}(a + bi) + b$$

$$3 = a + b$$

$$\mathbb{L} = \{ z \in \mathbb{C} : z = a + bi \land a + b = 3 \}$$