Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
LinAlg - Team

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungsskizze - Wiederholungsaufgaben zur Klausurvorbereitung - 3. Blatt

---

Achtung: Diese Aufgaben lassen keine Rückschlüsse auf die Aufgaben in der Klausur zu!

1. Aufgabe. Die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & 2 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ sei gegeben.

(a) Ist 0 ein Eigenwert der Matrix B? [11. Kapitel]

Die 1. und 3. Spalte der Matrix B sind gleich, also lin. abh. und somit $\det(B) = 0$. Also ist Kern$(B) \neq \{\vec{0}\}$. $\Rightarrow B\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat eine von Nullvektor verschiedene Lösung $\vec{x} \Rightarrow 0$ ist ein Eigenwert von B.

(b) Ist B injektiv/surjektiv/bijektiv? [6., 11. Kapitel]

0 ist ein Eigenwert von $B \Rightarrow$ Kern$(B) \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow B$ ist nicht injektiv $\Rightarrow B$ ist nicht bijektiv

B nicht injektiv $\Rightarrow$ die Anzahl von Nicht-Kopfvariablen ist mindestens 1 $\Rightarrow$ Anzahl von Kopfvariablen ist höchstens 2 (da $B \in \mathbb{C}^{3,3}$) $\Rightarrow$ eine Basis des Bildes von B besteht aus maximal 2 Elementen, die dann keine Basis des drei-dimensionalen Raums $\mathbb{C}^3$ sein kann und somit Bild$(B) \neq C^3 \Rightarrow B$ nicht surjektiv

alternativ (surjektiv): Nach Dimensionssatz ist $\underbrace{\dim(\mathbb{C}^3)}_{=3} = \underbrace{\dim(\text{Kern}(B))}_{\geq 1} + \dim(\text{Bild}(B))$. Somit ist $\dim(\text{Bild}(B)) \leq 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{C}^3)$ und B also nicht surjektiv.

(c) Bestimmen Sie die Determinante von B. [10. Kapitel]

Die Spalten der quadratischen Matrix B sind nach a) linear abhängig $\Rightarrow \det(B) = 0$.

(d) Bilden die Spalten von B eine Basis des $\mathbb{R}^3$? [2., 10. Kapitel]

Die Spalten sind nach a) linear abhängig. Sie können keine Basis bilden.

(e) Ist $\text{Rang}(B) = 3$? [4. Kapitel]

Nein, denn $\text{Rang}(B) \overset{\text{nach b)}}{=} \#$ Kopfvariablen $\leq 2 < 3$.

alternativ: Nein, denn Rang(B) ist die max. Anzahl lin. unabh. Spalten/Zeilen. Nach a) sind die 3 Spalten von B lin. abh. und $B \in \mathbb{C}^{3,3}$. Somit ist $\text{Rang}(B) \leq 2$.

(f) Gibt es einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^3$, so dass das lineare Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung hat? [4. Kapitel]

Nein. Ist $\text{Rang}(B) < \text{Rang}([B|\vec{b}])$, so gibt es keine Lösung. Ist $\text{Rang}(B) = \text{Rang}([B|\vec{b}])$, so existiert im konkreten Fall nicht nur eine Lösung $\vec{x}_p$ sondern unendlich viele Lösungen $\{\vec{x}_p + \vec{x}_h | \vec{x}_h \in \text{Kern}(B)\}$, denn Kern$(B) \neq \{\vec{0}\}$.

(g) Ist B diagonalisierbar? Bestimmen Sie ggf. Matrizen S und D mit D eine Diagonalmatrix, so dass $B = SDS^{-1}$ gilt. [12. Kapitel]

charakt. Polynom: $p_B(\lambda) = -\lambda(\lambda + 2)^2$

Eigenwerte (= Nullstellen des charakt. Polynoms) berechnen: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2/3} = -2$

Eigenräume (= Kern$(B - \lambda_i I_3)$) bestimmen:

$$V_{(\lambda_1=0)} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \qquad V_{(\lambda_{2/3}=-2)} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

algVFH $\lambda_1 = 1 =$ geomVFH λ_1 und algVFH $\lambda_{2/3} = 2 =$ geomVFH $\lambda_{2/3}$
Also ist die algVFH gleich der geomVFH für alle EWe und B somit diagonalisierbar mit
$S := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(h) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt} = B\vec{y}$ für $\vec{y}(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ sowie [13. Kapitel]

für $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Ansatz für $\vec{y}(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$: $\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)B}\vec{y}_0 \overset{B \text{ diagonalisierbar}}{=} Se^{(t-t_0)D}S^{-1}\vec{y}_0$ mit $S^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 3e^{-2(t-3)} \\ 3e^{-2(t-3)} \\ -1 + 6e^{-2(t-3)} \end{bmatrix}$$

Ansatz für $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$: $\vec{y}(t) = e^{\lambda_1(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\vec{y}(t) = e^{0t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

---

2. Aufgabe. Gegeben seien die folgenden zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$

$$\mathcal{B}_1 := \{x - 1, x + 1\} \quad \mathcal{B}_2 := \{x - 1, x + 2\}$$

sowie die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x];\ ax + b \mapsto (2a + b)x + (2a + 3b).$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. $\mathcal{B}_1$. [7. Kapitel] ⋮

Antw.: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. $\mathcal{B}_2$. [7. Kapitel] ⋮

Antw.: $K_{\mathcal{B}_2} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2;\ ax + b \mapsto \begin{bmatrix} \frac{2a-b}{3} \\ \frac{a+b}{3} \end{bmatrix}$

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$. [7. Kapitel] ⋮

Antw.: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. $\mathcal{B}_2$. [7. Kapitel] :

Antw.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(e) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume. [11. Kapitel]

$L_{\mathcal{B}_2}$ ist eine Matrix $\in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow L$ hat höchstens 2 EWe, also sind 1 und 4 die einzigen EW und zwar jeder einzeln mit algVFH 1. Von daher gilt, dass die geomVFH jeder EW von L 1 ist, denn $1 \leq$geomVFH$\leq$algVFH. D.h., die Dimension jedes Eigenraums ist 1. Von daher reicht es, ein EV pro Eigenwert zu bestimmen. Da $L_{\mathcal{B}_2}$ *diagonal* ist, sind die Basisvektoren in $\mathcal{B}_2$ ($x-1$ bzw. $x+2$) EVen zu den EW 1 bzw. 4, denn $L(x-1) = x-1 = 1 \cdot (x-1)$ und $L(x+2) = 4x+8 = 4 \cdot (x+2)$
Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ zugehörige Eigenraum ist span$\{x-1\}$.
Der zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ zugehörige Eigenraum ist span$\{x+2\}$.
alternativ: EVen $\vec{v}_1, \vec{v}_{2/3}$ zu den EWen $\lambda_1, \lambda_{2/3}$ einer darstellenden Matrix von L bestimmen, z.B. von $L_{\mathcal{B}_2}$. Dann gilt:
Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ zugehörige Eigenraum ist span$\{K_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\vec{v}_1)\} = \ldots$
Der zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ zugehörige Eigenraum ist span$\{K_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\vec{v}_{2/3})\} = \ldots$

---

3. Aufgabe. Die Matrix $A := \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ sei gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A und die zugehörigen Eigenräume. [11. Kapitel]
EWe sind Nullstellen des char. Pol.:

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)[(2-\lambda)(-3-\lambda)+6]$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda-6+6) = -(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda) = -\lambda(\lambda+1)^2$$

Die EWe sind also $\lambda_1 := 0, \lambda_{2/3} := -1$.
ER zum EW λ_i ist Kern$(A - \lambda_i I_3)$

$\lambda_1 = 0 : V_{(\lambda_1)} = \text{Kern} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \text{Kern} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Kern} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda_{2/3} = -1 : V_{(\lambda_{2/3})} = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(b) Bestimmen Sie Kern(A). [3., 11. Kapitel]

0 ist EW von A. Also ist Kern(A) der ER zum EW 0: $V_{(\lambda_1)} =$Kern$(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren von A sind. [11. Kapitel]

$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Also ist $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ EV zum EW -1.

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ Also ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ EV zum EW 0.

alternativ: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_{(\lambda_{2,3})}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in V_{(\lambda_1)}$ (Begründung nicht vergessen!)

(d) Lösen Sie das AWP $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = A\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$. [13. Kapitel]

$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ist Linearkombination von EV: $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$\vec{y}(t) = 2e^{\lambda_{2,3}(t-t_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{\lambda_1(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= 2e^{-1(t-2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{0(t-2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2e^{-t+2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2e^{2-t} + 3 \\ 2e^{2-t} + 2 \end{bmatrix}$

(e) Ist A eine injektive Abbildung? [6., 11. Kapitel]

A ist nicht injektiv, da nach a) bzw. c) 0 EW von A ist.
alternativ: A ist nicht injektiv, da nach b) $\text{Kern}(A) \neq \{\vec{0}\}$ ist.