FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2014/2015
Stand: 12.12.2014

8. Hausaufgabe – Logik

Abgabe: 8.1.2015 vor der Vorlesung

Hausaufgabe 1

5 Punkte

Sei $\sigma := \emptyset$ die leere Signatur. Für eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ schreiben wir

$$[\mathcal{A}] := \{\mathcal{B} \text{ eine } \sigma\text{-Struktur} \mid \mathcal{A} \cong \mathcal{B}\}$$

für ihre Äquivalenzklasse bezüglich Isomorphie. Wir definieren

$$\mathcal{S} := \{[\mathcal{A}] \mid \mathcal{A} \text{ eine } \sigma\text{-Struktur mit Universum } A \subseteq \mathbb{N}\}\,.$$

Für $[\mathcal{A}], [\mathcal{B}] \in \mathcal{S}$ sei

$$[\mathcal{A}] \leq [\mathcal{B}] \text{ genau dann, wenn es ein } f : \mathcal{A} \rightarrow_{\text{hom}} \mathcal{B} \text{ gibt.}$$

Ist $(\mathcal{S}, \leq)$ eine partielle Ordnung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 2

15 Punkte

Sei $\sigma = \{R_1, \ldots, R_n\}$ eine relationale Signatur.

(i) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine σ-Struktur $\mathbf{1}$ gibt, sodass gilt: Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gibt es genau einen Homomorphismus $f : \mathcal{A} \rightarrow_{\text{hom}} \mathbf{1}$.

(ii) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbf{1}$ mit dieser Eigenschaft eindeutig ist bis auf Isomorphie.

(iii) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass es keine σ-Struktur $\mathbf{0}$ gibt, sodass gilt: Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gibt es genau einen Homomorphismus $f : \mathbf{0} \rightarrow_{\text{hom}} \mathcal{A}$.