

SVM 算法的推导过程：

可将 $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$ 转换成 $\frac{a_1}{a_2}x_1 + x_2 + \frac{b}{a_2} = 0$ 。

此时该线性方程可看成 $w^T x + b' = 0$ 。

最优化问题可看成

$$\min_w \frac{1}{2} \|w\|^2$$

$$s.t. \quad g_i(w, b') = 1 - y_i(w^T x_i + b') \leq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

首先构造拉格朗日函数：

$$\min_{w,b} \max_{\lambda} L(w, b', \lambda) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i [1 - y_i(w^T x_i + b')]$$

对 w, b' 求偏导：

$$\frac{\partial L}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b'} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0$$

有

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0$$

带入拉格朗日函数可得：

$$L(w, b', \lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i \cdot x_j)$$

则

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} & \left[\sum_{j=1}^n \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i \cdot x_j) \right] \\ s.t. & \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0 \quad \lambda_i \geq 0 \end{aligned}$$

对于式子

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$$

可得到 w 的表示。

找到一个支持向量带入 $y_s(w x_s + b') = 1$

得 $b' = y_s - w x_s$

$$\text{其中} b' = \frac{b}{a_2}, \quad w = \sqrt{1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}$$

$$b=a_2(y_s-\sum_{i=1}^n\lambda_ix_iy_ix_s)$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_iy_i\right)^2-1$$