２０２１（令和３）年度

大阪大学医学部医学科

学士編入学試験問題

【物　理　学】

問　題　冊　子

（注　意）

1　問題冊子及び解答冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2　受験番号は、解答冊子の表紙及び各解答用紙の受験番号欄に左詰めで、正確に記入すること。
3　問題冊子は、表紙を除き７枚ある。ただし、１枚目、６枚目及び７枚目は白紙である。
4　問題冊子又は解答冊子の落丁、印刷の不鮮明等がある場合は、解答前に申し出ること。
5　解答は、解答用紙の指定されたところに記入すること。枠からはみ出してはいけない。
　問題冊子に解答を書いても採点されません。
6　問題冊子の余白は、適宜下書きに使用してよい。
7　問題冊子は、持ち帰ること。

Ｉ．水素原子は「正電荷を持った陽子の周囲に，負電荷を持った球対称の電子雲が取りまき，全体として電気的中性になっている系」としてモデル化される。この水素原子モデルを以下の順で考察する。真空の誘電率は ε_0 とする。以下の問１〜問１１に答えなさい。問題末尾（参考）に記した球座標系（$r\theta\varphi$ 系）の公式を用いてよい。

問１． 静電場の Poisson 方程式は，静電ポテンシャルを $\phi(\vec{r})$，電荷密度分布を $\rho(\vec{r})$ として

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0},$$

と書ける。$\vec{r}$ は位置ベクトルである。真空中で原点Ｏに点電荷 q（> 0）を置く（陽子のモデル）。このとき，原点Ｏ以外の空間で，静電ポテンシャル

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

が上記の Poisson 方程式を満たすことを示しなさい。この静電ポテンシャルは r（$= |\vec{r}|$）のみの関数であり，θ と φ には依存しないことに留意せよ。

問２． 原点Ｏを中心とする半径 a の球の内部に，電荷密度 ρ_0 の一様な負電荷が分布しているとする（一様な電子雲のモデル）。球内電荷の合計は $-q$，よって，$\rho_0 = -3q/(4\pi a^3)$ であるとする。球の外では $\rho(\vec{r}) = 0$ とする。球外（$r > a$）の静電場が，球内の電荷をすべて原点Ｏに集めた場合と同じであることに留意して，球外（$r > a$）での静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を求めなさい。ただし無限遠での静電ポテンシャルの値は 0 とする。

問３． 問２と同じ設定の場合（球内が一様な負の電荷密度 ρ_0）について，球内（$r < a$）での静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を，Poisson 方程式から求めなさい。球対称な場合の Poisson 方程式は r に関して２階の微分方程式なので，r 積分を２回実行する必要がある。その際，２つの積分定数が未定のまま残るので，それらを C と D とせよ。

問４． 前問の解から電場ベクトル $\vec{E}(\vec{r})$ を求め，すべての成分（球座標系）を答えなさい。積分定数 C と D は未定のままでよい。

問５． 電子雲の電荷分布は球内で一様であり，原点に電荷が集中していることはない。このことから，問４の $\vec{E}(\vec{r})$ の式に残っている積分定数の一つを決め，球内での静電ポテンシャルの式を書きなさい。最後に一つ残った積分定数は未定のままでよい。

（Ｉの続き）

問６．問２で求めた球外の静電ポテンシャルと問５で求めた球内の静電ポテンシャルは，球の境界 ($r = a$) で連続でなければならない（球面上で電荷密度の絶対値が無限大ではないため）。この条件を用いて残っていた積分定数を決め，球内の静電ポテンシャルの式を書きなさい。

問７．陽子のモデルと一様な電子雲のモデルを組み合わせる（水素原子を最も単純化したモデル）。原点に点電荷 q があり，加えて，原点を中心とする半径 a の球の内部に一様な負の電荷密度 $\rho_0 = -3q/(4\pi a^3)$ がある時，球の内部における静電ポテンシャルを求めなさい。

問８．前問６で求めた静電ポテンシャルから，球内の電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を３成分（球座標系）とも求めなさい。

問９．実際の水素原子では，電子雲における電荷分布は問７で仮定したような一様分布ではない。量子力学に基づく計算により，水素原子（陽子＋電子雲）の基底状態における時間平均した静電ポテンシャル（球対称になる）は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} e^{-2r/a_0} \left(1 + \frac{r}{a_0}\right),$$

で近似できることが知られている。ただし a_0 は Bohr 半径である。この静電ポテンシャルを与えるような電荷分布を，原点以外の場所で Poisson 方程式を用いて求めなさい。

問１０．問９における静電ポテンシャルの原点付近における近似式（最低次）を求めなさい。

問１１．問１０で求めた近似静電ポテンシャルを作るような原点での電荷を求めなさい。

（参考）球座標でのベクトル公式

３次元空間の任意のスカラー物理量 f とベクトル物理量 $\vec{A}$ に関して，以下の公式が成り立つ。ただし，$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$，は，$r\theta\varphi$ 球座標系の基本ベクトルであり，A_r, A_θ, A_φ はベクトル $\vec{A}$ の球座標系における成分である。

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\ A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Ⅱ．以下の $\boxed{(1)}$ ～ $\boxed{(13)}$ に入る適切な式，数，または記号を答えなさい。

はじめに，ある物理量 ϕ が振動的な時間変動をする現象を考える。

問１．時刻 t の原点を適切に選ぶことにより，一定の角振動数 ω（$\omega > 0$）をもつ調和振動は，振幅を A（$A > 0$），振動の位相を $\theta(t)$ として

$$\phi(t) = A\cos[\theta(t)], \quad \theta(t) = \omega t, \qquad (*)$$

と表現できる。角振動数 ω は単位時間当たりの位相変化量という意味をもち，ω と振動数 f の間には

$$f = \boxed{\quad (1) \quad},$$

の関係がある。

$\phi(t)$ が人間の聞く音の時間波形を表わす場合を例にとる。このとき振動数 f は聞こえる音の高さ（音高）に対応する。

問２．$(*)$ 式における ω が一定ではなく，時間の関数である場合を考える：

$$\phi(t) = A\cos[\theta(t)], \quad \theta(t) = \eta(t)t.$$

ただし，$\eta(t)$ の時間変動量は小さく，かつ，ゆっくりとしているものとする。$\eta(t)$ がゆっくりと時間変動する場合，人間の聴覚系では，聞こえる音の高さがゆっくりと時間変化する現象として認識される。

この「時間的に変動する音高」という現象を定量的に解析するため，ある時刻 t_1 の近傍で短い時間間隔 Δt をとり，Δt 間での位相変化量（$\theta(t)$ の変化量）$\Delta\theta$ を計算する。Δt の１次までの範囲で

$$\Delta\theta = \left(\boxed{\quad (2) \quad} \right) \Delta t,$$

となる（t_1 と $\eta(t_1)$，および微分係数 $\eta'(t_1) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}$ を用いて答えること）。単位時間あたりの位相変化量を振動数に換算することにより，時刻 t_1 における実効振動数 $f_{\mathrm{eff}}(t_1)$（＝時刻 t_1 で聞こえる音の高さ）が得られ，

$$f_{\mathrm{eff}}(t_1) = \boxed{\quad (3) \quad},$$

となる（t_1 と $\eta(t_1)$，および微分係数 $\eta'(t_1)$ を用いて答えること）。

（Ⅱの続き）

問３．例として，$\eta(t)$ が時間とともに一定の割合でゆっくりと増加する場合を考える。$\eta(t)$ の初期値（$t=0$ での値）を η_{initial} とし，$\eta(t)$ が $2\eta_{\mathrm{initial}}$ になる時刻を T とすると（$T \gg 1/\eta_{\mathrm{initial}}$），$\eta(t)$ は

$$\eta(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right)\eta_{\mathrm{initial}},$$

と表現される。この場合，時刻 T で聞こえる音の高さ $f_{\mathrm{eff}}(T)$ は

$$f_{\mathrm{eff}}(T) = \boxed{\quad (4) \quad},$$

となる。

次に，物理量の時間的変動が空間を伝わる現象，つまり波動現象について考える。１次元空間における波動場を $\psi(x,t)$ とすると（x は空間座標，t は時刻），$\psi(x,t)$ は次の偏微分方程式（１次元の波動方程式）を満たす：

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t) = 0.$$

ここで，$c\ (>0)$ は波が媒質中を伝わる速さを表わす定数である（媒質は静止しているものとする）。

問４．１次元波動方程式の一般解を求めるために，変数 X, T を次のように導入する：

$$X = t + \frac{x}{c}, \quad T = t - \frac{x}{c}.$$

X, T の関数として見た波動場を $\tilde{\psi}(X,T)$ とすると，１次元波動方程式は，X, T での偏微分作用素を用いて

$$\left(\boxed{\quad (5) \quad}\right)\tilde{\psi}(X,T) = 0.$$

となる。この方程式は容易に解け，１次元波動方程式の一般解が，２つの１変数関数，$\psi_{\mathrm{R}}, \psi_{\mathrm{L}}$（$\psi_{\mathrm{R}}, \psi_{\mathrm{L}}$ は，２回微分可能な任意関数）を用いて

$$\psi(x,t) = \psi_{\mathrm{R}}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi_{\mathrm{L}}\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

の形で表わされることが結論される。物理的には，ψ_{R} は右向き進行波を表わし，ψ_{L} は左向き進行波を表わしている。$\psi_{\mathrm{R}}, \psi_{\mathrm{L}}$ の具体形は，初期条件・境界条件によって決まる。

（Ⅱの続き）

問５．座標原点（$x=0$）に静止した波源があり，波源における時間振動の関数形 $\phi_0(t)$ が

$$\phi_0(t) = A\cos\omega t,$$

である場合を考える（A, ω は正の定数）。この場合，波動場 $\psi(x,t)$ には次の境界条件が課される：

$$\psi(0,t) = \phi_0(t) = A\cos\omega t.$$

波源から波が放射される現象を考えると，波源の右側（$x>0$）には右向き進行波 ψ_{R} のみが存在し，波源の左側（$x<0$）には左向き進行波 ψ_{L} のみが存在する。境界条件により，$\psi_{\mathrm{R}}, \psi_{\mathrm{L}}$ の具体的な関数形が決まり，それを用いて，$x>0$ では

$$\psi(x,t) = \boxed{\quad (6) \quad},$$

$x<0$ では

$$\psi(x,t) = \boxed{\quad (7) \quad},$$

という結論を得る。

最後に，波動場 $\psi(x,t)$ を音波（音圧変動の波）とし，波源（音源）が運動する場合のドップラー効果を議論する（媒質は静止しているものとする）。

問６．音源が速さ v（$0<v<c$）の等速直線運動をする場合を考える。音源の座標を $x_0(t)$ としたとき

$$x_0(t) = vt,$$

とすると，この場合の境界条件は

$$\psi\left(x_0(t), t\right) = \phi_0(t) = A\cos\omega t,$$

となる。この条件を用いると，音源の右側（$x > x_0(t)$）での音波 $\psi(x,t)$ の具体形として

$$\psi(x,t) = \boxed{\quad (8) \quad},$$

が得られる。つまり，音源の右側で静止している観測者には，音源の音高の $\boxed{\quad (9) \quad}$ 倍の音高の音が聞こえることになる。

（Ⅱの続き）

問7．音源が原点付近で，微小振幅でゆっくりとした周期運動をする場合を考える。音源の座標を $x_0(t)$ としたとき

$$x_0(t) = a\sin\omega_0 t,$$

とする（a, ω_0 ともに正の定数で ω_0 は ω より十分小さい）。この場合の境界条件は

$$\psi\left(x_0(t), t\right) = \psi\left(a\sin\omega_0 t, t\right) = \phi_0(t) = A\cos\omega t,$$

となる。音源より右側の位置 x（$x > a$）での音波を考え，右向き進行波 ψ_{R} の関数形を決めることにすると，境界条件は

$$\psi_{\mathrm{R}}\left(t - \frac{a}{c}\sin\omega_0 t\right) = A\cos\omega t,$$

と表現できる。ここで

$$g(t) = t - \frac{a}{c}\sin\omega_0 t,$$

と置くと，微小振幅の場合（a が十分小さい場合），g の逆関数 G（$= g^{-1}$）が存在する。この事実に注意すると，ψ_{R} の関数形を決めることができ，それにより，音源の右側の音波は，逆関数 G を用いて

$$\psi\left(x, t\right) = A\cos\left(\boxed{\quad(10)\quad}\right),$$

となる。この表式を用いて計算すると，音源の右側で静止している人が聞く音の高さは周期的に変動することが導かれる。具体的には，位置 x（$x > a$）で時刻 t_0 に聞こえる音の高さ $f_{\mathrm{eff}}(x, t_0)$ は逆関数 G を用いて

$$f_{\mathrm{eff}}(x, t_0) = \boxed{\quad(11)\quad},$$

と書ける。これから，聞こえる音の高さの最大値 $f_{\max}$ と最小値 $f_{\min}$ は x に依らず

$$f_{\max} = \boxed{\quad(12)\quad}, \quad f_{\min} = \boxed{\quad(13)\quad},$$

となる。