2018（平成３０）年度

大阪大学医学部医学科

学士編入学試験問題

【物　理　学】

問 題 冊 子

（注　意）

1　問題冊子及び解答用紙は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2　受験番号は、解答冊子の表紙及び各解答用紙の受験番号欄に左詰めで、正確に記入すること。
3　問題冊子は、表紙を除き７枚ある。ただし、１枚目、６枚目及び７枚目は白紙である。
4　問題冊子又は解答用紙の落丁、印刷の不鮮明等がある場合は、解答前に申し出ること。
5　解答は、解答用紙の指定されたところに記入すること。枠からはみ出してはいけない。問題冊子に解答を書いても採点されません。
6　問題冊子の余白は、適宜下書きに使用してよい。
7　問題冊子は、持ち帰ること。

I. 図1 は単振り子を描いたものである。この振り子は，質量の無視できる長さ l の棒の一端を支点として(x, y) 面内で自由に回転する。支点は原点の位置にあるとする。棒の他端には質量 m の質点がついている。鉛直下向きに x 軸，水平方向に y 軸を取る。質点には鉛直下向きに重力が働いており，重力加速度を g とする。以下の問１〜問３に答えなさい。

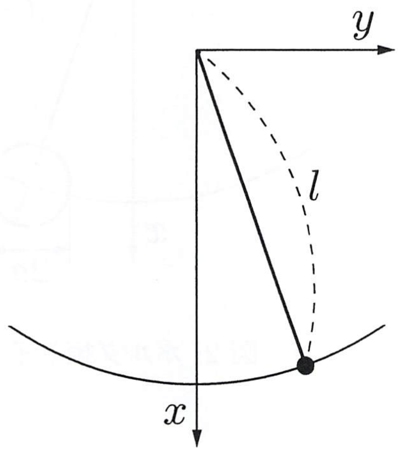

図 1: 単振り子

問１．棒が質点を引張る張力を F として，質点の加速度の x 成分 $\ddot{x}$ および y 成分 $\ddot{y}$ を x，y，l，m，g，F の中から必要なものを用いて表しなさい。

問２．直交直線座標 (x, y) と

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

の関係にある極座標 (r, θ) を用いて，θ の時間変化を表す微分方程式を求めなさい。

問３．θ が十分小さくて $\sin\theta \simeq \theta$ と近似できる場合について，振り子の周期 T を求めなさい。

次に，図２に示すように質量の無視できる長さ $l-a$ の棒の先端に半径 a の一様な球をつけて固定し，(x, y) 平面内で振らせる場合を考える（ボルダ振り子）。支点は棒の他端にあり，その位置は原点にある。この場合，おもりの大きさが無視できないのでその回転運動も考慮する必要がある。球の質量を M として以下の問４〜問６に答えなさい。

（Ｉの続き）

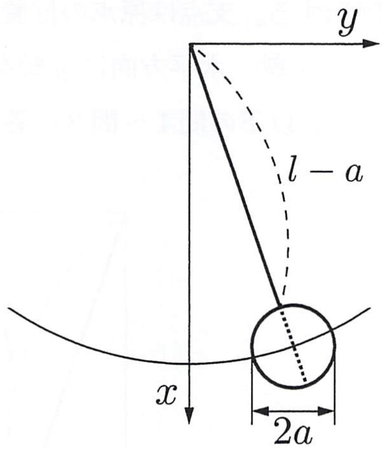

図 2: ボルダ振り子

問４．剛体の z 軸まわりの慣性モーメントは，剛体の内部 V にわたる体積積分

$$I \equiv \int_V (x^2+y^2)\rho(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}$$

により定義される。ただし，$\rho(\boldsymbol{r})$ は位置 $\boldsymbol{r}$ における剛体の密度である。半径 a，質量 M で一様な球について，球の中心を通る回転軸まわりの慣性モーメントが

$$I_G = \frac{2}{5}Ma^2$$

となることを示しなさい。

問５．振り子全体の，支点まわりの慣性モーメント I を求めなさい。

問６．振幅が小さい時の振動の周期 T_B を求めなさい。また，問３の T との大小関係を述べなさい。

さて次に，もう一度質量 m の質点を質量の無視できる長さ l の棒の先端に取付けた振り子を考える。振り子の支点は棒の他端にある。ただし今回振り子は，鉛直面内に限らず３次元空間中で回転する。支点を原点として，鉛直下向きに z 軸，水平方向に x，y 軸をとり，鉛直下向きに重力が働いている。重力加速度は g とする。以下の問７～問９に答えなさい。

（Ｉの続き）

問７．(x, y) 平面に射影した質点の位置と支点を結ぶ線が，単位時間当たりに掃く面積を h とする。h が保存することを示しなさい。

問８．系の全エネルギーを l, z, $\dot{z}$, h, m, g の中から必要なものを用いて表しなさい。ただし $h > 0$ とし，$z = 0$ での位置エネルギーを 0 とする。

問９．質点に対して，支点と同じ高さの位置から水平方向に初速 v_0 を与えて運動させる。運動中に質点が取りうる z の最大値を求めなさい。

II．以下の $\boxed{(1)}$ 〜 $\boxed{(12)}$ に適切な式，数，または記号を記入しなさい。

気体中を伝わる音波について考える。気体がマクロに見て静止した状態（音波のない状態）では，気体の温度は場所に依らず一定であり，また気体の密度も，場所に依らず一定の値 ρ_0 をとる。音波は密度変化の波であり，音波が存在する場合には，気体の密度は，場所および時間の依存性をもつ。また，密度の大きい場所では気体の圧力が大きく，密度の小さい場所では気体の圧力は小さい。従って，音波が存在する場合には，気体の圧力も場所・時間に依存する。

３次元空間中の場所を位置ベクトル $\vec{r}$ で表し，気体圧力を $\vec{r}$ の関数とみる。また，気体圧力は時刻 t にも依存しうるので，場所と時刻の関数としての気体圧力を $p(\vec{r},t)$ とする。気体の静止状態における圧力を p_0 とし，

$$p(\vec{r},t) = p_0 + \delta p(\vec{r},t)$$

とおく。$\delta p(\vec{r},t)$ は気体の静止状態からの圧力変動を表し，この変動は微小であるとする。

まず，最も単純な音の波である，平面波の性質について考察する。平面波は次式の形の圧力変動に対応する：

$$\delta p(\vec{r},t) = A_p \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \theta_0\right). \qquad \text{(A)}$$

$\vec{k}$ は波数ベクトルと呼ばれ，その大きさ $|\vec{k}|$ は，波長 λ と

$$|\vec{k}| = \boxed{\quad (1) \quad}$$

の関係にある。また，ω (>0) は角振動数と呼ばれ，振動数 ν と

$$\omega = \boxed{\quad (2) \quad}$$

の関係にある。A_p は平面波の振幅，θ_0 は初期位相である。音速を c (>0) とすると，圧力変動 $\delta p(\vec{r},t)$ は波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)\delta p(\vec{r},t) = 0 \qquad \text{(B)}$$

を満たすことが知られている。平面波の式（A）はこの波動方程式の解であるから，音速 c は，$|\vec{k}|, \omega$ を用いて

$$c = \boxed{\quad (3) \quad}$$

と表される。

（IIの続き）

次に，変位と圧力変動の関係について考察する。場所 $\vec{r}$ 付近に圧力の空間分布があると，その場所近傍の微小体積の気体には力が働く。気体の質量密度を ρ とし，場所 $\vec{r}$ での気体の変位ベクトルを $\vec{\xi}(\vec{r},t)$ とすると，微小体積の気体にニュートンの運動方程式を適用することにより，$\rho\dfrac{\partial^2\vec{\xi}(\vec{r},t)}{\partial t^2}$ は $\vec{\nabla}p(\vec{r},t)$ に比例することがわかる。つまり，この比例定数を η とすると

$$\rho\frac{\partial^2\vec{\xi}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=\eta\vec{\nabla}p(\vec{r},t)$$

が成り立つ。詳しく考察すると η の値を求めることができて

$$\eta=\boxed{\quad(4)\quad}$$

となる。$\vec{\nabla}p(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\delta p(\vec{r},t)$ であるから，$\vec{\nabla}p(\vec{r},t)$ は微小量である。また，変位ベクトル $\vec{\xi}$ も微小量と考えてよいので，高次の微小量を無視することにより，ρ は一定値 ρ_0 に置きかえてよい。よって，

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{\xi}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=\eta\vec{\nabla}\delta p(\vec{r},t) \qquad \text{(C)}$$

が成り立つとして，以降，考えを進める。

圧力変動が平面波（A）の場合,（C）式に基づくと，変位ベクトル $\vec{\xi}(\vec{r},t)$ の変動も平面波となり，

$$\vec{\xi}(\vec{r},t)=\vec{A}_\xi\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\theta_0\right) \qquad \text{(D)}$$

の形に表現できる。（C）式を用いて計算すると,（D）式におけるベクトル $\vec{A}_\xi$ と $A_p,\vec{k},\rho_0,\omega,\eta$ の関係を求めることができて，

$$\vec{A}_\xi=\boxed{\quad(5)\quad}$$

となる。この結果は，音波が縦波であることを示している。

さらに考察を進めて，波動方程式（B）を導くことにする。変位 $\vec{\xi}$ の空間的非一様性は，気体の疎密に結びつく。静止状態（音波のない状態）における場所 $\vec{r}$ 近傍で，微小体積 V の領域 D を考える。静止状態においては，領域 D 内の各点での変位はゼロである。音波が存在する場合，領域 D 内の各点は，その点における変位ベクトルだけ移動する。D 内の各点の移動先全体は，D とは別の領域を構成し，その体積を V' とする。体積の変化量を $\delta V=V'-V$ とする。体積変化の

（Ⅱの続き）

割合 $\dfrac{\delta V}{V}$ は，$\vec{\xi}$ の非一様性を起源とし，また，$\dfrac{\delta V}{V}$ はスカラー量（つまり，ベクトル量でない）であるから，$\vec{\xi}$ から作られるスカラー量である $\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}(\vec{r},t)$ と関係することが期待される。高次の微小量を無視することにより，$\dfrac{\delta V}{V}$ と $\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}(\vec{r},t)$ が比例することが期待されるので，比例定数を ζ として

$$\frac{\delta V}{V}=\zeta\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}(\vec{r},t) \tag{E}$$

と置く。詳しい考察を行うと

$$\zeta=\boxed{\quad(6)\quad}$$

となることがわかる。

各場所 $\vec{r}$ 近傍の微小領域 D は，マクロに見れば微小であるが，ミクロに見れば（分子スケールで見れば）巨大な領域であるので，微小領域 D での気体のふるまいには熱力学が適用できる。また，常温付近の通常の気体（例えば空気）は，理想気体と見なすことができる。

音波の伝播に際して，気体中の微小領域 D で生じる気体の膨張・圧縮は断熱過程であることが知られている。理想気体の比熱比 γ を

$$\gamma=\frac{\text{定圧モル比熱}}{\text{定積モル比熱}}$$

とすると，断熱過程における気体の圧力 p と 体積 V の間には，p, V, γ を用いて

$$p\times\boxed{\quad(7)\quad}=\text{一定}$$

の関係がある。これから，微小領域 D における，気体の静止状態からの微小な圧力変動 δp と微小な体積変化 δV の間には，ある定数 σ を用いて

$$\frac{\delta V}{V}=\sigma\frac{\delta p}{p_0} \tag{F}$$

の関係があることが導かれる。計算すると

$$\sigma=\boxed{\quad(8)\quad}$$

であることがわかる。（C）式の両辺に対して $\vec{\nabla}\cdot$（ナブラ演算子との内積）の操作（つまり，ベクトル場に対する div（発散）の操作）を行い，さらに（E），（F）を考慮すると，δp に対する波動方程式（B）が導かれる。また，音速 c の値は ρ_0, p_0, γ を用いて

$$c=\boxed{\quad(9)\quad}$$

となる。

（IIの続き）

最後に，以上の考察をもとに，空気中の音波の音速の値を実際に計算で求めることにする。空気の主な構成要素は，窒素分子（約８割）と酸素分子（約２割）である。窒素分子，酸素分子ともに２原子分子であり，両者ともに共通の γ の値

$$\gamma = \boxed{\quad (10) \quad}$$

をもつ。よって，空気中の音速の計算には，空気を，分子量が平均分子量（有効数字２桁で 29）の，仮想的な２原子分子理想気体として扱ってよい。気体定数 R の値を 8.3 J/(K・mol) とし，気温が 17℃の場合の音速 c の値を計算すると，有効数字２桁で

$$c = \boxed{\quad (11) \quad}\ \ \mathrm{m/s}$$

となる。また，空気ではなく，ヘリウムガス（^{4}He の気体）の中を伝わる音波の音速は，同一の温度で比較した場合，空気中の音速の $\boxed{\quad (12) \quad}$ 倍（有効数字２桁）になる。