物理（2022）

出題の意図

I

剛体の運動の基礎を問うと共に回転座標系での記述能力を問う。

(1)　固定軸周りの剛体回転運動の基本について問う。

(2)-(5)　回転運動と並進運動の両者が絡む問題の取り扱い能力を問う。

(6)-(12)　等速円運動を回転座標系で扱うと静力学の問題となることの理解を問う。また、遠心力、コリオリ力、力のモーメントの具体的計算能力を問う。

II

大学教養課程で学ぶ電磁気学に基づきその知識と応用力を問う。

問 A-1 マックスウェル方程式を使って、電場と磁場の関係を正しく満たす解を求める能力を問う。

問 A-2 ポインティングベクトルを正しく計算する能力を問う。

問 B-1 ポインティングベクトルを通して、ベクトル演算を正しく計算する能力を問う。

問 B-2 立体的に積分することにより、放射エネルギーを求める能力を問う。

問 C-1 荷電粒子の受ける加速度から、放射される全エネルギーを求める能力を問う。

問 C-2 与えられた散乱断面積の定義に従い、荷電粒子の散乱断面積を古典力学に基づき求める能力を問う。

問 D-1 静止質量を含めたエネルギー保存と運動量保存を適用する能力を問う。

問 D-2 保存則に基づき、粒子と衝突した光子がどう変化するかを求める能力を問う。

問 D-3 計算結果を正しく認識できているかどうかを問う。

解答

I

(1) $Id^2\theta(t)/dt^2$

(2) $a\theta$

(3) $5g\sin\beta/7$

(4) Ma^2

(5) 7/10

(6) $MR\Omega^2 a\, \mathrm{con}\gamma$

(7) $(R + a\sin\gamma)\,\Omega/a$

(8) $\cos\gamma\, a(\sin\theta + 1)$

(9) 0

(10) $\cos\gamma\,(\sin\theta + 1)\sin\theta$

(11) $Ma(R + a\sin\gamma)\cos\gamma$

(12) $\sqrt{g\sin\gamma/(2R + a\sin\gamma)\cos\gamma}$

II

問 A-1

電磁波はマックスウェル方程式に従うので。

$\mathrm{rot}E = -\partial B/\partial t = -\mu_0\,\partial H/\partial t$ である。

ここで E のゼロでない成分は

$E_y = E_0\sin(\omega x/c - \omega t)$ だけであるから、ゼロにならない項は

$\partial E_y/\partial x = -\mu_0\,\partial H_Z/\partial t$ である。

従って、H は Z 軸成分だけがゼロでないので、入射方向と電場方向とに直交している。

$\partial H_Z/\partial t = -\omega/\mu_0 c * E_0\cos(\omega x/c - \omega t)$

∴ $\underline{H_Z = 1/\mu_0 c * E_0\sin(\omega x/c - \omega t)}$

問 A-2

エネルギー流量

E は y 軸成分だけ、H は z 成分だけだから、それらに直交するポインティングベクトルは x 軸成分だけである。

原点における流量なので、x=0 として計算する。

$\mathbf{S}in = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$

$\phi in = |\mathbf{S}in| = E_yH_z$

$= 1/\mu_0 c * E_0^2\sin^2(\omega x/c - \omega t)$

$= \underline{1/\mu_0 c * E_0^2 \sin^2 \omega t}$

問 B-1

ポインティングベクトルの大きさとその方向性依存の特徴

$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ の計算のため、ベクトル積の部分だけを別途計算する

$\{\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\} \times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})$

$= \{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{r} - (r^2)\,\mathbf{a}\}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})$

$= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\{\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\} - r^2\{\mathbf{a}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\}$

$= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{r} - r^2\mathbf{a}\} - r^2\{a^2\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}\}$

$= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})^2\,\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,r^2\mathbf{a} - r^2a^2\mathbf{r} + r^2\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}$

$=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})^2\,\mathbf{r} - r^2a^2\mathbf{r}$

$=\{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})^2 - r^2a^2\}\,\mathbf{r}$

$= -r^2a^2\sin^2\theta\,\mathbf{r}$　　θは a と r のなす角

$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$

$= -\ q^2/\ 16\pi^2\varepsilon_0 c^3 * \{\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\} \times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})/r^5$

$= \underline{q^2/\ 16\pi^2\varepsilon_0 c^3 * a^2\sin^2\theta\ /\ r^2 * \mathbf{r}/r}$

S の大きさは a の方向からの角度をθとして $\sin^2\theta$に比例する。つまり、a 方向（$a = 0, \pi$)の強度はゼロでそれに直交する面上($\theta = \pi/2$)で最大値となる。

問 B-2

全放射エネルギー

S を全方向で積分する。

$\int S\,ds = \int S r^2 \sin\theta\,d\theta d\varphi = q^2\,a^2/\ 16\pi^2\varepsilon_0 c^3 * 2\pi\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\,d\theta = q^2\,a^2/\ 8\pi\varepsilon_0 c^3 * 4/3 = \underline{q^2\,a^2/\ 6\pi\varepsilon_0 c^3}$

問 C-1

全放射エネルギーW

荷電粒子は原点にあり、電磁波の電場方向に沿って振動するので、その x 座標はゼロである。電磁波の電場により荷電粒子の受ける力から、加速度 a は

$ma = qE_0\sin(-\omega t)$

である。これを問 B-2 に代入する。

$W = q^2\,a^2/\ 6\pi\varepsilon_0 c^3 * (\ qE_0 \sin\omega t/\ m)^2 = \underline{1/6\pi\varepsilon_0 c^3 * q^4 E_0^2 \sin^2\omega t/\ m^2}$

問 C-2

散乱断面積

平面波の電磁波エネルギー密度（問 A-2 の結果）を使って、断面積σを通過するエネルギーを求めて問 C-1 と等しいとおく。

$W = \sigma\phi\text{in}$

$1/6\pi\varepsilon_0 c^3 * q^4 E_0^2 \sin^2 \omega t/ m^2 = \sigma * 1/\mu_0 c * E_0^2 \sin^2 \omega t$

$\sigma = \mu_0/6\pi\varepsilon_0 c^2 * q^4/ m^2$ （$c=1/\sqrt{\varepsilon 0\mu 0}$ を代入)

$= \underline{\mu_0^2 q^4/6\pi m^2}$

問 D-1

エネルギー保存則と運動量保存則

光子の衝突前の進行方向と衝突後の進行方向の単位ベクトル **n, n'** は与えられているから、相対論的なエネルギーと運動量の保存は以下の 2 式で表される。

$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2$ （エネルギー保存則）

$\frac{h\nu}{c}\mathbf{n} = \frac{h\nu'}{c}\mathbf{n'} + m\mathbf{v}$ （運動量保存則）

問 D-2

衝突後の光子の波長

E の表式にエネルギー保存則と運動量保存則の式を使って計算する。

ここで $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n'} = \cos\theta$ である。

$E^2 = (mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + (m\mathbf{v}c)^2$

$\therefore\ (h\nu + m_0c^2 - h\nu')^2 = (m_0c^2)^2 + (h\nu\mathbf{n} - h\nu'\mathbf{n'})^2$

$\therefore\ h\nu\, h\nu'(1 - \mathbf{n}\cdot\mathbf{n'}) = (h\nu - h\nu')\, m_0c^2$

$1 - \cos\theta = (1/h\nu' - 1/h\nu)\, m_0c^2$

$1/h\nu' = 1/h\nu + 1/m_0c^2 * (1 - \cos\theta)$

$\therefore\ \nu' = h^{-1}\{1/h\nu + 1/m_0c^2 * (1 - \cos\theta)\}^{-1}$

波長λを使うと粒子のコンプトン波長λ_0として、以下になる。

$\lambda' = \lambda + h/m_0c * (1 - \cos\theta)$

$= \underline{\lambda + \lambda_0 (1 - \cos\theta)}$

問 D-3

光子消滅に関する説明

衝突後の光子の振動数ν'の表式から、θの値によらずν'がゼロになることはない。従って、衝突によって光子が消滅することはない。波長で見ると、波長λの光子は衝突によってその波長は($\lambda \sim \lambda + 2\lambda_0$)に変化する。つまり、波長は無限大にはならないから、光子は消滅しない。