２０２０年度

大阪大学医学部医学科

学士編入学試験問題

【物　理　学】

問　題　冊　子

（注　意）

１　問題冊子及び解答用紙は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
２　受験番号は、解答冊子の表紙及び各解答用紙の受験番号欄に左詰めで、正確に記入すること。
３　問題冊子は、表紙を除き７枚ある。ただし、１枚目、６枚目及び７枚目は白紙である。
４　問題冊子又は解答用紙の落丁、印刷の不鮮明等がある場合は、解答前に申し出ること。
５　解答は、解答用紙の指定されたところに記入すること。枠からはみ出してはいけない。
　　問題冊子に解答を書いても採点されません。
６　問題冊子の余白は、適宜下書きに使用してよい。
７　問題冊子は、持ち帰ること。

I．太陽を中心とする惑星の運動に関するケプラーの三法則と万有引力の法則について考える。

太陽を中心とする惑星の運動を扱うには，二次元極座標を用いるのが便利である。そこでまず，二次元極座標を用いて，速度ベクトルと加速度ベクトルを書き表わすことにする。図１のように，二次元直交座標 (x, y) に対して，二次元極座標 (r, θ) を定義する（$r = |\vec{r}|$）。以下では，動径方向の単位ベクトルを $\vec{e}_r$ とし，それに垂直で反時計回りの方向を向いた単位ベクトルを $\vec{e}_\theta$ とする。また，時間 t による r の一階微分と二階微分を，それぞれ，$\dot{r}$ と $\ddot{r}$ と書き，時間 t による θ の一階微分と二階微分を，それぞれ，$\dot{\theta}$ と $\ddot{\theta}$ と書くことにする。以下の問１に答えなさい。

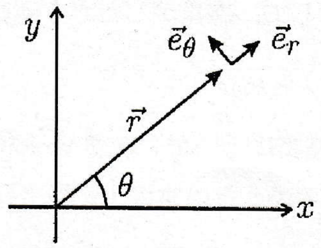

図１: 二次元極座標

問１．二次元極座標で表現した，速度ベクトル $\vec{v}$ と加速度ベクトル $\vec{a}$ を導出する。次の文章の $\boxed{(ア)}$ 〜 $\boxed{(オ)}$ に入る適切な式，数，または記号を答えなさい。

二次元極座標では，位置ベクトル $\vec{r}$ は，単位ベクトルを用いて $\vec{r} = r\vec{e}_r$ と書ける。これを時間微分すれば，速度ベクトル $\vec{v}$ が得られるが，二次元極座標では単位ベクトル自体も時間変化することに注意が必要である。単位ベクトルの時間微分 $\dot{\vec{e}}_r$ と $\dot{\vec{e}}_\theta$ は，$\dot{\theta}$ を用いて次のように書ける。

$$\dot{\vec{e}}_r = \boxed{(ア)}\ \vec{e}_\theta \qquad \dot{\vec{e}}_\theta = \boxed{(イ)}\ \vec{e}_r$$

これに注意すると，速度ベクトル $\vec{v}$ は次のようになる。

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

同様に加速度ベクトル $\vec{a}$ を書くと次のようになる。

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - \boxed{(ウ)}\right)\vec{e}_r + \left(\boxed{(エ)} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta \tag{1}$$

式(1)は次のようにも書ける。

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - \boxed{(ウ)}\right)\vec{e}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\boxed{(オ)}\right)\right]\vec{e}_\theta \tag{2}$$

（Ｉの続き）

次に，太陽（質量 M）を中心とする惑星（質量 m）の運動に関する，ニュートンの運動方程式を求める。太陽系には惑星が多数あるが，$M \gg m$ であるので，ここでは太陽と一つの惑星の間の運動のみを考え，また太陽は静止していると考えてよいものとする。以下では，二次元極座標 (r, θ) の座標原点に太陽が静止しており，惑星の位置は位置ベクトル $\vec{r}$ を用いて表す。太陽と惑星の間には，中心力 $\vec{F} = F\,\vec{e}_r$ がはたらいているとする。以下の問２に答えなさい。

問２．問１の式 (2) を参考にして，惑星がしたがう運動方程式を，$\vec{e}_r$ に平行な成分と $\vec{e}_\theta$ に平行な成分に分けて書きなさい。

太陽を中心とする惑星の運動について，ケプラーの三法則と呼ばれる以下の法則が観測から分かっている。

（第一法則）惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道の上を運動する

（第二法則）太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に掃く面積（面積速度）は一定である

（第三法則）惑星の公転周期の２乗と惑星軌道の長半径の３乗の比は惑星に依らず一定である

この法則の力学的な意味を考えることにする。以下では，図２のような，長半径 a，短半径 b の楕円軌道を考える。以下の問３～問８に答えなさい。

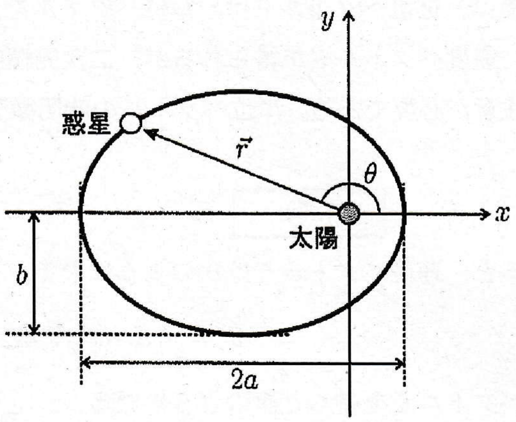

図２: 惑星の楕円軌道

問３．ケプラーの第二法則で述べられている面積速度を $\dot{S}$ とする。この $\dot{S}$ を r，θ，$\dot{r}$，$\dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて書きなさい。また，面積速度 $\dot{S}$ と太陽を中心とする惑星運動の角運動量 $\vec{L} = L\,(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta)$ の関係式を求めなさい。

（Ｉの続き）

問４．面積速度が一定になる理由を問２で求めた惑星の運動方程式を用いて説明しなさい。

問５．問２で求めた運動方程式の $\vec{e}_r$ に平行な成分を，$\dot{\theta}$ の代わりに面積速度 $\dot{S}$ を用いて書き直しなさい。

問６．図２の楕円軌道は次のように表すことができる。

$$r = \frac{\ell}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

ここで，ε $(0 \leqq \varepsilon < 1)$ は楕円の離心率，ℓ $(\ell > 0)$ は長さの次元を持つ定数である。これを用いて，太陽と惑星の距離 r の時間微分 $\dot{r}$ を求めると次のようになることを示しなさい。

$$\dot{r} = \frac{2\varepsilon\dot{S}}{\ell}\sin\theta \tag{3}$$

問７．式 (3) を時間 t で微分し，さらに問５で得られた方程式を用いることで，太陽と惑星の間にはたらく中心力 $\vec{F} = F\vec{e}_r$ が，距離の二乗に反比例し惑星の質量 m に比例する引力であることが分かる。F を r，m，$\dot{S}$，ℓ，ε のうち必要なものを用いて書きなさい。

問８．ケプラーの第三法則が成り立つ場合には，太陽と惑星の間にはたらく中心力 $\vec{F}$ が，質量 m 以外には，惑星固有の物理量にあらわには依らない力であることが分かる。このことを示しなさい。なお，楕円軌道の長半径 a と短半径 b は，ℓ と ε を用いて次のように書ける。また，楕円の面積は πab である。

$$a = \frac{\ell}{1-\varepsilon^2} \qquad b = \frac{\ell}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Ⅱ．電磁場のポインティング・ベクトルは，電場を $\vec{E}$，磁場を $\vec{H}$ すると，$\vec{E}\times\vec{H}$ と定義される。以下では，この物理量について考える。なお，電場 $\vec{E}$，磁束密度 $\vec{B}$ と時間 t を用いると，真空中の電磁場がみたすマクスウェル方程式は次のように書ける。

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

ここで ρ は電荷密度，$\vec{J}$ は電流密度である。ε_0 と μ_0 は，それぞれ，真空中の誘電率と透磁率である。また，真空中では磁束密度と磁場の関係は $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$ となる。以下の問１～問２に答えなさい。

問１．ポインティング・ベクトル $\vec{E}\times\vec{H}$ の意味を考えるために $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$ という量に関する計算を行う。次の文章の $\boxed{\text{（ア）}}$ ～ $\boxed{\text{（オ）}}$ に入る適切な式，数，または記号を答えなさい。

まず，ベクトル恒等式

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{X}\times\vec{Y}\right)=\vec{Y}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{X}\right)-\vec{X}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{Y}\right)$$

とマクスウェル方程式を用いると，

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\boxed{\text{（ア）}}-\vec{E}\cdot\left(\boxed{\text{（イ）}}\right)$$

となる。これを整理すると次の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boxed{\text{（ウ）}}\right)+\boxed{\text{（エ）}}+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=0$$

この式の意味を理解しやすいように，式全体をある閉曲面Ｃで囲まれた体積Ｖ内で積分し，さらにガウスの発散定理を用いると次の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{V}}\left(\boxed{\text{（ウ）}}\right)dV+\int_{\mathrm{V}}\boxed{\text{（エ）}}\,dV+\int_{\mathrm{C}}\left(\boxed{\text{（オ）}}\right)\cdot\vec{n}\,dS=0 \quad (1)$$

ここで，dV は体積積分の体積要素，dS は面積分の面積要素，$\vec{n}$ は閉曲面Ｃ上で外向きの単位法線ベクトルである。

問２．問１で最後に得られた関係式 (1) の左辺にある各項と式全体が物理的に何を意味するかについて簡単に説明しなさい。

（Ⅱの続き）

次に，具体的なポインティング・ベクトルの計算を行ってみる。ここでは，電流が流れる抵抗線の内外の電場と磁場について考える。図１のように，一様な物質で出来た十分長い円柱状の抵抗線の内部に，電流密度が場所に依らず一定で，時間変化しない定常電流 I $(I>0)$ が流れている。定常電流 I の流れる方向は図中で上向きとする。円柱の半径を a とし，抵抗線の電気伝導率（電気伝導度）を σ とする。なお，抵抗線中の透磁率は真空中の透磁率 μ_0 に等しいとする。以下の問３〜問７に答えなさい。

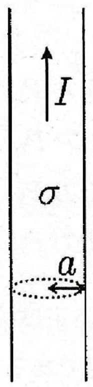

図１: 抵抗線と電流

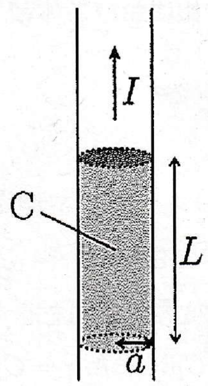

図２: 閉曲面Ｃの定義

問３． 電流が抵抗線を定常的に流れるためには，抵抗線内に図中上向きの一様な電場 $\vec{E}$ が必要である。この電場の大きさを求めなさい。

問４． 抵抗線（円柱）の中心軸から距離 r だけ離れた位置に生じる磁場 $\vec{H}(r)$ の大きさを求めなさい。距離 r は，$r<a$ および $r>a$ の区間に分けて答えなさい。

問５． $r \leqq a$ の範囲でポインティング・ベクトル $\vec{E}\times\vec{H}$ の大きさを求めなさい。

問６． この抵抗線に対して，図２の灰色で示すような，半径 a の円板二枚と半径 a で長さ L の円筒から成る閉曲面Ｃを考える。ポインティング・ベクトルを，この閉曲面Ｃ上で面積分した値を求めなさい。符号は外向きの流れを正とすること。

問７． 問６の計算によると，面積分の結果はゼロでない値を持つ。このような結果になる理由を，問１の式 (1) を参考にして，定量的に説明しなさい。

Ⅲ．１モルの理想気体の様々な状態変化を考える。図１はこの気体の体積V，圧力Pの状態変化を示している。状態１から状態$1'$と，状態１，状態２，状態３の各状態間の状態変化(過程)は次のとおりである。

状態１→状態$1'$：等温過程

状態１→状態２：断熱過程

状態２→状態３：等圧過程

状態３→状態１：等積過程

また，各状態における体積，圧力は次のとおりである。

状態１：体積V_1，圧力P_1

状態$1'$：体積V_1'，圧力P_2

状態２：体積V_2，圧力P_2

状態３：体積V_1，圧力P_2

この気体は各状態間を非常にゆっくりと変化する。気体定数はR，この気体の定積比熱と定圧比熱をC_VとC_P，また$\gamma = C_P/C_V$とし，C_VとC_Pは一定であるとする。次の問１～問７に答えなさい。

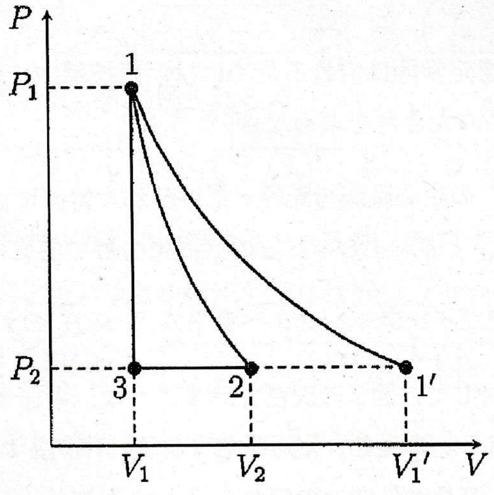

図 1: 理想気体の状態変化

(Ⅲの続き)

問１．この気体が状態１から状態 $1'$ へ変化（等温過程）するときの，気体が吸収する熱量 Q とエントロピーの変化 ΔS を求めなさい。状態１における気体の温度は T_1 である。

問２．熱力学第一法則と理想気体の状態方程式などを用いて，定積比熱 C_V と定圧比熱 C_P の関係式を求めなさい。途中経過（考え方）も書きなさい。

問３．この気体の状態１から状態２への変化（断熱過程）において，気体の温度を T とすると，次の式が成り立つことを示しなさい。

$$C_V dT + PdV = 0$$

問４．この気体が状態１から状態２へ変化するとき，気体の体積 V と圧力 P はある関係式を満たしている。問３の式を用いて，この関係式を求めなさい。考え方も書きなさい。

問５．問４で求めた関係式を利用して，V_2 を V_1，P_1，P_2，γ を用いて書きなさい。

問６．次の状態変化 (1)，(2)，(3) における気体のエントロピーの変化を求めなさい。

(1)　状態１→状態２

(2)　状態２→状態３

(3)　状態３→状態１

問７．問６で求めた３つの状態変化におけるエントロピーの変化を用いると，問５と同じ関係式が求まることを示しなさい。