阪大物理解答（2021 年度）

I.

問 1

原点以外では$\rho(\vec{r})=0$ ゆえ,$\Delta\phi(\vec{r})=0$ を示す。

r方向のみを考えればよく, $\Delta\phi(\vec{r})=\Delta\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)=0$

問 2.

$\rho_0=-\frac{3q}{4\pi a^3}$ のとき,$\phi(\vec{r})=\frac{\rho_0\cdot\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\boldsymbol{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

問 3.

$r<a$ のとき,Poisson 方程式より, $\Delta\phi(\vec{r})=\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

微分方程式 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi(\vec{r})\right)=\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$ を解いて,$\boldsymbol{\phi(\vec{r})=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}r^2-\frac{C}{r}+D}$

問 4.

$\phi(\vec{r})$はrのみの関数ゆえ,$\vec{E}(\vec{r})=\vec{\nabla}\phi(\vec{r})=\vec{e_r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\phi(\vec{r})\right)=\boldsymbol{\vec{e_r}\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}r-\frac{C}{r^2}\right)}$

問 5.

境界条件は $\lim_{r\to+0}\vec{E}(\vec{r})=\vec{0}$ より,$C=0$ となる。よって $\boldsymbol{\phi(\vec{r})=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}r^2+D}$

問 6.

境界条件は問 2 と問 5 より $\lim_{r\to a-0}\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)=\lim_{r\to a+0}\left(\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}r^2+D\right)$ で,$D=-\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 a}r^2$ となる。

よって $\boldsymbol{\phi(\vec{r})=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}(r^2-3a^2)}$

問 7.

問 1 と問 6 の和となる。よって $\boldsymbol{\phi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}(r^2-3a^2)}$

問 8.

問 4 と同様に,$\vec{E}(\vec{r})=\vec{\nabla}\phi(\vec{r})=\boldsymbol{\vec{e_r}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{a^3}\right)}$

問 9.

$\rho(\vec{r})=-\varepsilon_0\,\Delta\phi(\vec{r})=-\varepsilon_0\,r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}e^{-\frac{2r}{a_0}}\left(1+\frac{r}{a_0}\right)\right)\right)=\boldsymbol{-\frac{q}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}}$

問 10, 11

$r\approx 0$ のとき $\phi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}e^{-\frac{2r}{a_0}}\left(1+\frac{r}{a_0}\right)\cong\boldsymbol{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ であり,これを作る原点での電荷は $\boldsymbol{q}$ である。

阪大物理解答（2021 年度）

Ⅱ.

(1)

$f=\dfrac{\omega}{2\pi}$

(2)

$$\theta(t_1+\Delta t)-\theta(t_1)=\left\{\frac{\mu(t_1+\Delta t)-\mu(t_1)}{\Delta t}t_1+\mu(t_1+\Delta t)\right\}\Delta t$$
$$\to\left(\mu'(t_1)+\mu(t_1)\right)\Delta t.$$

(3)

(2) を用いると

$$f_{\text{eff}}(t_1)=\frac{\Delta\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{1}{2\pi}\left(\mu'(t_1)t_1+\mu(t_1)\right).$$

(4)

$\mu(t)=\left(1+\dfrac{t}{T}\right)\mu_{\text{initial}}$ より

$$f_{\text{eff}}(T)=\frac{1}{2\pi}\left(\mu'(T)T+\mu(T)\right)=\frac{1}{2\pi}\left\{\mu_{\text{initial}}+\left(1+\frac{T}{T}\right)\mu_{\text{initial}}\right\}=\frac{3}{2\pi}\mu_{\text{initial}}.$$

(5)

$X=t+\dfrac{x}{c},\, T=t-\dfrac{x}{c}$ より

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}-\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right)\quad,\quad\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2}{\partial X\partial T}+\frac{\partial^2}{\partial T^2}.$$

よって $\dfrac{\partial^2}{\partial X\partial T}\tilde{\psi}(X,T)=0.$

(6)

$x>0$ では $\psi(x,t)=A\cos\left(\omega t-\dfrac{\omega}{c}x\right).$

(7)

$x<0$ では $\psi(x,t)=A\cos\left(\omega t+\dfrac{\omega}{c}x\right).$

(8)

時刻 t_1 に $x_0(t_1)$ を出た音を, 時刻 t に位置 x で聞くとする.
$x - x_0(t_1) = c(t - t_1)$ より $t_1 = \dfrac{1}{1-\frac{v}{c}}\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$.
よって $\psi(x,t) = \psi\left(x_0(t_1), t_1\right) = A\cos\left[\dfrac{\omega}{1-\frac{x}{c}}\left(t-\dfrac{x}{c}\right)\right]$.

(9)

(8) より $f \to \dfrac{1}{1-\frac{x}{c}} f$ なので $\dfrac{1}{1-\frac{x}{c}}$ 倍.

(10)

$\psi_R(t) = A\cos\omega G(t)$ なので $\psi(x,t) = A\cos\omega G\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$.

(11)

$x_0(t) = a\sin\omega_0 t$ より $v_0(t) = a\omega_0\cos\omega_0 t_0$ とおくと

$$f_{eff} = \frac{1}{1-\frac{1}{c}v_0\left(t_0-\frac{x}{c}\right)}\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{1-\frac{a\omega_0}{c}\cos\omega_0 G(t_0-\frac{x}{c})}\frac{\omega}{2\pi}.$$

(12)

(11) より $f_{\max} = \dfrac{\omega}{2\pi}\dfrac{1}{1-\frac{a\omega_0}{c}}$.

(13)

(11) より $f_{\min} = \dfrac{\omega}{2\pi}\dfrac{1}{1+\frac{a\omega_0}{c}}$.