2019（平成３１）年度

大阪大学医学部医学科

学士編入学試験問題

【物　理　学】

問　題　冊　子

（注　意）

1　問題冊子及び解答用紙は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。

2　受験番号は、解答冊子の表紙及び各解答用紙の受験番号欄に左詰めで、正確に記入すること。

3　問題冊子は、表紙を除き７枚ある。ただし、１枚目、５枚目、６枚目及び７枚目は白紙である。

4　問題冊子又は解答用紙の落丁、印刷の不鮮明等がある場合は、解答前に申し出ること。

5　解答は、解答用紙の指定されたところに記入すること。枠からはみ出してはいけない。問題冊子に解答を書いても採点されません。

6　問題冊子の余白は、適宜下書きに使用してよい。

7　問題冊子は、持ち帰ること。

I．以下では小物体または剛体球の運動を考える。時刻を t $(t \geqq 0)$ とする。小物体の重心および剛体球の重心は直線的な運動を行い，その重心の位置 x は $t=0$ のとき $x=0$ にある。また，速度 $\dot{x}$ は $t=0$ で V_0 $(V_0>0)$ とする。重力加速度は g とする。

最初に，質量 m の小物体に速さに比例する抵抗力がはたらく場合を考える。この場合の小物体の運動方程式は小物体の加速度 $\ddot{x}$ と速度 $\dot{x}$ を用いて次のように書ける。

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} \tag{1}$$

ただし，β $(\beta>0)$ は定数である。以下の問１～問３に答えなさい。

問１． 式 (1) の運動方程式を時刻 t について積分し，小物体の位置 x と速度 $\dot{x}$ の関係式を求めなさい。また，その関係を横軸が位置 x，縦軸が速度 $\dot{x}$ のグラフとして図示しなさい。グラフには適切な記号を用いて切片の値を示しなさい。

問２． 問１で求めた関係式および描いたグラフをもとにして，小物体が到達する位置 x の最大値を推定しなさい。

問３． 問１で求めた関係式を更に時刻 t について積分し，小物体の位置 x を時刻 t の関数として求めなさい。また，その関係を横軸が時刻 t，縦軸が位置 x のグラフとして図示しなさい。グラフには適切な記号を用いて，小物体の運動を特徴づける位置 x の値を示しなさい。

次に，図１に示した質量 m，半径 a の一様な密度の剛体球の水平面上での運動を考える。剛体球と水平面との間には摩擦力がはたらき，その動摩擦係数は μ である。時刻 $t=0$ には，剛体球は回転しておらず，水平面上をすべっている。その直後，水平面との間に摩擦力があるため剛体球が回転を始めた。時刻 $t=T$ 以降は水平面上をすべらずに等速で転がるようになった。

図１中で，右向きを重心の位置 x の正の向きとする。剛体球の重心まわりの回転の角速度を ω とし，図中に示した時計回りを ω の正の向きとする。剛体球の重心まわりの回転の慣性モーメントは $\frac{2}{5}ma^2$ である。以下の問４～問６に答えなさい。

（Ⅰの続き）

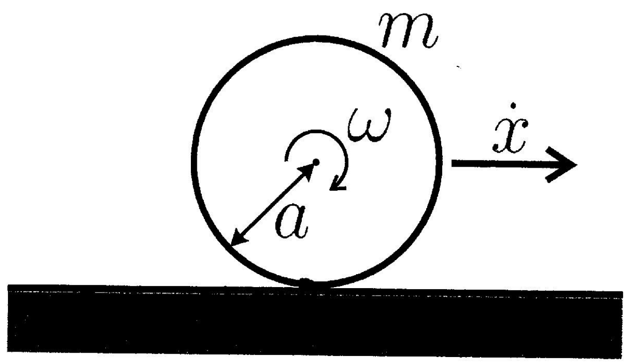

図 1: 水平面上の剛体球の運動

問4．時刻 t が $t < T$ の範囲において，剛体球が水平面上をすべっているときの運動方程式を考える。剛体球の重心の水平方向の加速度を $\ddot{x}$，重心まわりの回転の角速度 ω の時間微分を $\dot{\omega}$ とするとき，剛体球の重心の水平方向の運動に関する方程式および重心まわりの回転運動に関する方程式を書きなさい。

問5．時刻 T を適切な記号を用いて書きなさい。

問6．時刻 t が $t \leqq 2T$ の範囲において，$|\dot{x}|$（剛体球の重心の速さ）および $|a\omega|$（剛体球の重心から見た剛体球表面の速さ）を時刻 t の関数としてグラフにプロットしなさい。グラフには $|\dot{x}|$ を実線で，$|a\omega|$ を破線で描きなさい。また，$t \geqq T$ における等速運動の速さの値を，適切な記号を用いてグラフ中に示しなさい。

Ⅱ. 時間的に変化しない真空中の電場 $\vec{E}(\vec{r})$ と磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ はマックスウェル方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \tag{4}$$

をみたす。ただし，$\vec{r}$ は空間中の任意の位置，$\rho(\vec{r})$ は電荷密度，$\vec{j}(\vec{r})$ は電流密度，ε_0 は真空中の誘電率，μ_0 は真空中の透磁率である。このとき，以下の問 1 〜問 3 に答えなさい。

問１. 静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を用いて

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \tag{5}$$

とすると，式 (2) がみたされることを示しなさい。

問２. 式 (5) を式 (1) に代入して，$\phi(\vec{r})$ に関する微分方程式を示しなさい。

問３. 原点 $\vec{r} = 0$ を中心とした半径 a $(a > 0)$ の球の内部に電荷密度 ρ_0 で一様に電荷が分布しているとき，問 2 で示した微分方程式を解いて $\phi(\vec{r})$ を求めなさい。ただし，無限遠では $\phi = 0$ としなさい。図 1 に示す球座標では

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

である。なお，この電荷分布では $\vec{E}(\vec{r})$ と $\phi(\vec{r})$ はそれぞれ連続で発散しない。

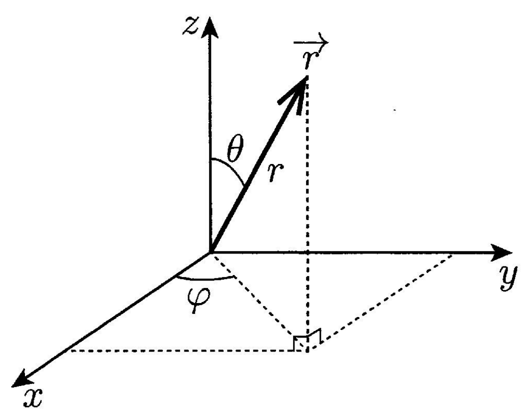

図 1: 球座標

(Ⅱの続き)

次に，時間的に変化する電場と磁場を考察しよう。以下の問４～問５に答えなさい。

問４．以下の文中の $\boxed{\quad(a)\quad}$ ～ $\boxed{\quad(d)\quad}$ に適切な式，数，または記号を記入しなさい。

ファラデーは時間的に変化する磁場の周りには電場が発生することを発見した。この現象(電磁誘導の法則) は式 (2) を

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r}, t)$$

とすることによってマックスウェル方程式に取り込まれた。さらに，時間変動がある場合の電流密度を $\vec{j}(\vec{r}, t)$ とすると，電荷保存則との整合性から式 (3) を

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \boxed{\quad(a)\quad}$$

と変更する必要がある。なお，式 (1) は $\vec{E}(\vec{r})$ から $\vec{E}(\vec{r}, t)$，$\rho(\vec{r})$ から $\rho(\vec{r}, t)$ への変更で，式 (4) は $\vec{B}(\vec{r})$ から $\vec{B}(\vec{r}, t)$ への変更で，時間的に変動する場合であってもそれぞれ成立する。

ここで，$\rho(\vec{r}, t) = 0$，$\vec{j}(\vec{r}, t) = 0$ をみたす領域に存在する，時間的に変動する磁場と電場を考えてみよう。マックスウェル方程式から $\vec{B}$ を消去して $\vec{E}$ がみたす方程式を導くと $\boxed{\quad(b)\quad}$ となる。この方程式の解が

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E_0}\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

の形であると仮定しよう。ただし，$\vec{E_0}$，$\vec{k}$ は定ベクトル，ω は定数であり，$\vec{r}$ や t によらない。この解が任意の場所と時間に対して方程式をみたすためには ω，$\vec{k}$，ε_0，μ_0 の間に $\boxed{\quad(c)\quad}$ の関係があればよい。この解は空間中を伝播する電磁波をあらわす。この電磁波の波面が移動する速さは ε_0 と μ_0 を用いて $\boxed{\quad(d)\quad}$ と表され，これが光の速さと一致することからも光が電磁波であることが理解される。

問５．この電磁波の電場の方向は電磁波の進行方向に対して垂直であることを示しなさい。

Ⅲ. 次の状態方程式に従う１モルの気体がある。P は気体の圧力，V は体積，T は絶対温度，R は気体定数を表し，a と b は正の定数とする。

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \tag{1}$$

P，V，T は気体が液化しない範囲にあるとし，V は b より十分大きいとする。解答用紙には，解答と途中経過 (考え方) も記述しなさい。

まず，温度 T が一定の状態で，この気体の体積 V を V_0 から V_1（$V_0 < V_1$）まで，準静的に変化させた場合を考える。以下の問１～問３に答えなさい。

問１． 上のように，この気体の体積を V_0 から V_1 まで変化させたときの気体のヘルムホルツ自由エネルギー $F(=U-TS)$ の変化を，V_0 と V_1 を用いて書きなさい。ただし，U は内部エネルギー，S はエントロピーをあらわす。また，熱力学第一法則は $dU=TdS-PdV$ と書ける。

問２． 上のように，この気体の体積を V_0 から V_1 まで変化させたときの気体のエントロピーの変化を，V_0 と V_1 を用いて書きなさい。ただし，次の関係式を用いてよい。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

問３． 上のように，この気体の体積を V_0 から V_1 まで変化させたときの気体の内部エネルギーの変化を，V_0 と V_1 を用いて書きなさい。

(Ⅲの続き)

次に，この気体と理想気体の違いを明確に示す現象として，ジュール・トムソン過程を考えてみる。このとき，この気体はエンタルピー $H(= U + PV)$ が一定の条件のもとで，ゆっくりと状態変化する。以下の問４～問６に答えなさい。

問４． エンタルピー H が一定の条件のもとで気体が状態変化したとき，次の式が成り立つことを示しなさい。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left\{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right\} \tag{2}$$

ただし，C_P は気体の定圧モル比熱をあらわし，

$$C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$$

のように書ける。また，次の関係式を用いてよい。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

問５． 式 (1) の状態方程式に従う気体では，式 (2) が次のように近似できることを示しなさい。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H \approx \frac{1}{C_P}\left(\frac{2a}{RT} - b\right) \tag{3}$$

ただし，$b \ll V$，$a \ll RTV$ としてよい。

問６． 式 (3) は，ある特徴的な温度を境に気体の圧力増減に伴う物理現象が異なることを示している。この温度を答えなさい。また，観測される物理現象がどのように異なるか説明しなさい。