２０２２（令和４）年度

大阪大学医学部医学科

学士編入学試験問題

【物　理　学】

問 題 冊 子

（注　意）

1　問題冊子及び解答冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2　受験番号は，解答冊子の表紙及び各解答用紙の受験番号欄に，正確に記入すること。
3　問題冊子は，表紙を含み８枚ある。ただし，２枚目，７枚目及び８枚目は白紙である。
4　問題冊子又は解答冊子の落丁，印刷の不鮮明等がある場合は，解答前に申し出ること。
5　解答は，解答用紙の指定されたところに記入すること。枠からはみ出してはいけない。
　問題冊子に解答を書いても採点されません。
6　問題冊子の余白は，適宜下書きに使用してよい。
7　問題冊子は，持ち帰ること。

I．剛体の運動について考察する。以下の $\boxed{(1)}$ ～ $\boxed{(12)}$ に入る適切な式，数，または記号を答えなさい。重力の方向は鉛直下向きであるとし，重力加速度の大きさは g とする。

問1．固定軸のまわりで剛体が回転運動する場合を考える。この軸のまわりの慣性モーメントを I とする。剛体に作用する，固定軸まわりの力のモーメントを N_0 とする。時刻 t における回転角を $\theta(t)$ とすると，角速度は $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$ で定義され，角加速度は $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}$ で定義される。回転運動の運動方程式は

$$\boxed{(1)} = N_0,$$

と表現される。

問2．質量 m，半径 a の剛体球が，球の中心を通る軸のまわりで回転運動する場合を考える。剛体球内部の質量密度は一様であり，回転の軸の方向は変わらないとする。

中心軸まわりの慣性モーメント $I_{球}$ は m, a を用いて

$$I_{球} = \frac{2}{5}ma^2,$$

と表される。

この剛体球を，図1に示したように傾き角 β $(0 < \beta < \pi/2)$ の斜面に置いて，初速0で運動させると，球は回転しながら斜面を転がり下る。球と斜面の接触点において，球表面と斜面とは滑らないものとする。

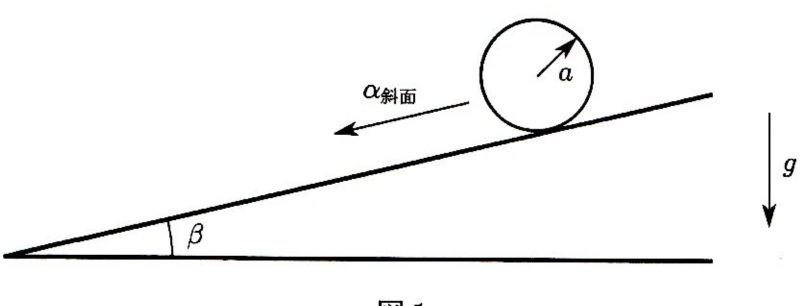

図1

球表面と斜面とが滑らないという条件から，運動開始時点からの球の重心の移動距離 s と球の回転角 θ との間には

$$s = \boxed{(2)},$$

（Ｉの続き）

の関係がある。この関係を考慮すると，斜面に沿った重心の加速度の大きさ$\alpha_{斜面}$は，$g, \sin\beta$を用いて

$$\alpha_{斜面} = \boxed{\quad(3)\quad},$$

となる。

次に，剛体球の代わりに，質量M，半径aの密度が一様な円環（太さの無視できるリング）を，同じ斜面に沿って転がす場合を考える。球の場合と同様に円環と斜面との接触点が滑らず，円環面が鉛直を保ちながら斜面を転がり下る。円環の回転軸は円環面に垂直で円環の重心を通る。回転軸のまわりの，円環の慣性モーメント$I_{円環}$は，M, aを用いて

$$I_{円環} = \boxed{\quad(4)\quad},$$

となる。斜面に沿った円環の重心の加速度の大きさは，剛体球の場合の $\boxed{\quad(5)\quad}$ 倍 となる。

問3．質量M，半径aの密度が一様な円環を水平面上で転がす場合を考える。円環と水平面との接触点において円環の表面と水平面とは滑らないものとする。さらに，円環面が鉛直よりわずかに傾き，その傾き角γを一定に保ったまま，円環の重心が，水平面上の点Oを通る垂直軸のまわりで，半径R，角速度Ωの等速円運動する状況を考える（図２）。以下では$\Omega > 0$とし，上から見て左回りに運動する場合を考える。

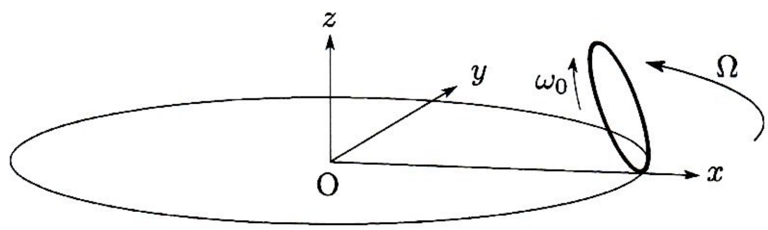

図２

この円環重心の等速円運動を，原点を図２のＯとしz軸のまわりに角速度Ωで回転する回転座標系で記述する。回転座標系のx軸は円環と水平面との接触点を通るように設定する（図２，図３）。この回転座標系では，円環の重心は静止しており，力学的つり合いの問題として扱うことができる。

（Ｉの続き）

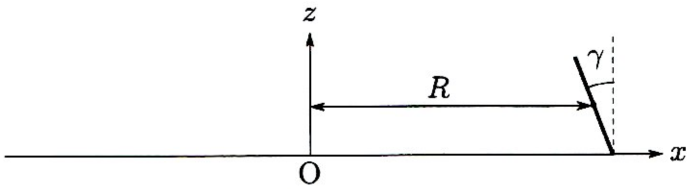

図 3

円環に作用する力には，重力の他に，水平面からの抗力，遠心力，およびコリオリ力がある。傾き角 γ が一定に保たれるということから，円環と水平面との接触点のまわりでの力のモーメント $\vec{N}$ のつり合いを考える。具体的には，$\vec{N}$ の x 成分 N_x，y 成分 N_y，z 成分 N_z を求め，各成分が 0 となる条件を議論する。簡単のため，$a \ll R$ とし，遠心力は円環の重心に作用するものと考える。

水平面からの抗力は $\vec{N}$ に寄与しない。また，対称性により，重力および遠心力は N_x, N_z には寄与しない。重力による N_y への寄与は $-Mga\sin\gamma$ であり，また，遠心力による N_y への寄与は

$$\boxed{\quad(6)\quad},$$

である。

続いて円環に作用するコリオリ力について考察する。角速度ベクトル $\vec{\Omega}$ で回転する回転座標系において，質量 μ，速度 $\vec{v}$ をもつ質点が受けるコリオリ力 $\vec{F}_{コリオリ}$ は

$$\vec{F}_{コリオリ} = -2\mu\vec{\Omega}\times\vec{v},$$

で与えられる。

円環は角速度の大きさ ω_0 で自転している。円環と水平面との接触点で滑らないという条件から，ω_0 と Ω, R, a, γ の間には

$$\omega_0 = \boxed{\quad(7)\quad},$$

（Ｉの続き）

の関係がある。自転により，この回転座標系において円環の各部分は速度をもち，その結果コリオリ力を受ける。円環の各微小部分に作用するコリオリ力を考えることによって，コリオリ力による $\overrightarrow{N}$ への寄与を計算することができる。

円環上の点の位置は，半径 a の円周上の点として角度変数 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を用いて指定できる。傾き角 γ が 0 の場合，円環上の点の，接触点からの相対座標ベクトル $\overrightarrow{\Delta r}_0(\theta)$ が

$$\overrightarrow{\Delta r}_0(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ a\cos\theta \\ a(\sin\theta + 1) \end{pmatrix},$$

となるように θ のとり方を決める。傾き角 γ が 0 でない場合，接触点からの相対座標ベクトル $\overrightarrow{\Delta r}(\theta)$ は

$$\overrightarrow{\Delta r}(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\gamma \cdot a(\sin\theta + 1) \\ a\cos\theta \\ \boxed{\quad (8) \quad} \end{pmatrix},$$

となる。

円環は角速度の大きさ ω_0 の自転運動をしているから，円環上の各点は，速さ $u = a\omega_0$ で動いている。円環上で角度変数 θ の場所における速度ベクトル $\overrightarrow{v}(\theta)$ は

$$\overrightarrow{v}(\theta) = \begin{pmatrix} \sin\gamma \cdot u\cos\theta \\ u\sin\theta \\ -\cos\gamma \cdot u\cos\theta \end{pmatrix},$$

となる。円環上の質量 $\mathrm{d}m$ の微小領域に作用する微小コリオリ力 $\mathrm{d}\overrightarrow{F}(\theta) = -2(\mathrm{d}m)\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v}(\theta)$ は，$\overrightarrow{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$ に注意して

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}(\theta) = 2(\mathrm{d}m)u\Omega \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\sin\gamma\cos\theta \\ \boxed{\quad (9) \quad} \end{pmatrix},$$

(Ｉの続き)

と表される。$\mathrm{d}\overrightarrow{F}(\theta)$ による，接触点まわりの力のモーメントへの寄与 は $\mathrm{d}\overrightarrow{N}(\theta) = \overrightarrow{\Delta r}(\theta) \times \mathrm{d}\overrightarrow{F}(\theta)$ である。特にその y 成分は

$$2(\mathrm{d}m)au\Omega \cdot \left(\boxed{\quad (10) \quad} \right),$$

となる。$\mathrm{d}m = \dfrac{M}{2\pi}\mathrm{d}\theta$ として，円環に沿っての積分を実行し，$u = a\omega_0$ の関係と $\omega_0 = \boxed{\quad (7) \quad}$ の関係にも注意すると，コリオリ力による N_y への寄与として

$$\Omega^2 \cdot \left(\boxed{\quad (11) \quad} \right),$$

を得る。$\mathrm{d}\overrightarrow{N}(\theta)$ の x 成分および z 成分は円環に沿っての積分を実行すると０となる。

以上により，すべての力による $\overrightarrow{N}$ への寄与が得られ，N_x, N_z については釣り合い条件が満たされていることがわかる。また，水平面からの抗力，重力，遠心力，コリオリ力の寄与による N_y についての釣り合い条件から，Ω が γ, g, R, a の関数として以下のように求まる。

$$\Omega = \boxed{\quad (12) \quad}.$$

Ⅱ．　真空の誘電率を ϵ_0，透磁率を μ_0，光の速さを c として，以下の問Aから問Dに答えなさい。

問A　真空中において，原点で静止している荷電粒子に直線偏光した平面波の電磁波が入射する場合を考えよう。

直交座標系として，平面波の入射方向を x 軸にとり，直線偏光している電磁波の電場 $\boldsymbol{E}$ の方向を y 軸にとる。入射する電磁波は直線偏光しているため，その電場は y 軸成分 E_y だけであり，角振動数を ω として $E_y = E_0 \sin\left(\dfrac{\omega}{c}x - \omega t\right)$ で表される。

問A-1　入射する電磁波の作る磁場の方向は，電磁波の入射方向と電場方向とに直交することをマックスウェル方程式を基に示しなさい。そして，磁場の大きさを求めなさい。

問A-2　入射する電磁波のエネルギーの流れを表すポインティングベクトル $\boldsymbol{S}_{\mathrm{in}}$ を計算し，原点における単位面積当たりのエネルギー流量 ϕ_{in} を求めなさい。

問B　一般的に，荷電粒子が加速度をもって運動する状態を考えよう。原点にある質量 m，電荷 q の荷電粒子の加速度を $\boldsymbol{a}$ とすると，粒子から十分に遠い点 $\boldsymbol{r}$ での電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{H}$ は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})}{r^3}, \qquad \boldsymbol{H} = -\frac{q}{4\pi c}\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{r^2}, \qquad \text{ただし}, r = |\boldsymbol{r}|$$

問B-1　点 $\boldsymbol{r}$ におけるポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ を求めなさい。また，$\boldsymbol{S}$ の大きさの方向依存性の特徴を説明しなさい。

(参考)　ベクトルの三重積の公式　　$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

問B-2　$\boldsymbol{S}$ を全方向で積分することにより，この荷電粒子の放射する全放射エネルギーを求めなさい。

問C　問Aと問Bを基に，静止している荷電粒子に平面波の電磁波が入射する場合を考えよう。入射電磁波の波長が長い時，入射電磁波の作る電場により荷電粒子は振動する。その結果，荷電粒子は入射電磁波と同じ波長（振動数）の電磁波を球面波として放射する。この現象は，ある面積 σ に垂直に入射した平面波の電磁波エネルギー $\sigma\phi_{\mathrm{in}}$ が荷電粒子から放射される球面波の全放射エネルギー W に変換されたとみなせる。つまり，荷電粒子が電磁波を散乱したことになり，面積 σ を荷電粒子による電磁波の散乱断面積と言う。

（Ⅱの続き）

問C - 1　入射した電磁波により荷電粒子が振動して放射する電磁波の全放射エネルギー W を求めなさい。

問C - 2　この粒子による電磁波の散乱断面積 σ を求めなさい。

問D　入射電磁波の波長 λ が短い時，電磁波は粒子（光子）として振る舞う。プランク定数を h とすると，光子のエネルギーは $h\nu$ で表される。ここで $\nu = c/\lambda$ である。それでは，この場合の荷電粒子と光子の衝突過程を相対論に基づいて考えよう。光子のエネルギー $h\nu$ と運動量 $\boldsymbol{p}$ とには以下の関係がある。

$$h\nu = p\,c, \qquad \text{ただし}, p = |\boldsymbol{p}| = \sqrt{\boldsymbol{p}^2}$$

また，静止質量 m_0 の粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する時の質量を m とすると，その粒子の運動量 $m\boldsymbol{v}$ と，m_0 を含んだ全エネルギー E とには以下の関係がある。

$$E^2 = (mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + (m\boldsymbol{v}c)^2$$

静止質量 m_0 の静止している粒子に，振動数 ν の光子が衝突した。その結果，この粒子は速度 $\boldsymbol{v}$ で動き出した。また，衝突後の光子の振動数は ν' となり，入射方向から θ だけ向きを変えた。この衝突において，エネルギーと運動量とは保存される。以下では，衝突する前の光子の進行方向を示す単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$，衝突後の光子の進行方向を示す単位ベクトルを $\boldsymbol{n}'$ としなさい。この場合，$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}'$ のなす角度が θ である。

問D - 1　衝突前後でのエネルギー保存則と運動量保存則をそれぞれ式で表しなさい。

問D - 2　衝突後の光子の波長 λ' を求めなさい。

問D - 3　この衝突で，光子が消滅する（光子が粒子に吸収されてしまう）ことがあるか，理由を付けて説明しなさい。