物理　出題の意図

問１　運動方程式を正確に書き出す力
問２　極座標を取り扱う力を問う
問３　微分方程式を解く力を問う
問４　多重積分を解く力を問う
問５　剛体の運動で基本となる慣性モーメントの合成を理解しているかを確認する
問６　剛体の回転運動を取り扱う力を問う
問７　中心力による運動で保存する量を問う
問８　保存量を活用した高度な座標変換を行う力を問う
問９　運動の全体像を把握する力を問う

解答例
問１
　式１：$\ddot{x} = g - F\dfrac{x}{ml}$

　式２：$\ddot{y} = -F\dfrac{y}{ml}$

問２　r = l　とおいて x = l cosθ, y = l sinθ

例１　支点の周りの力のモーメントは　–lmg　sinθまた慣性モーメントは ml^2。よって固定軸周りの回転系の運動方程式より

$ml^2\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta$を得る。

例２　$\dot{x} = -l\sin\theta\dot{\theta}, \dot{y} = l\cos\theta\dot{\theta}$

もう一回の時間微分は

$$\ddot{x} = -l\cos\theta(\dot{\theta})^2 - l\sin\theta\ddot{\theta}$$
$$\ddot{y} = -l\sin\theta(\dot{\theta})^2 + l\cos\theta\ddot{\theta}$$

F = mg cosθであるから、運動方程式は、

$m[-l\cos\theta(\dot{\theta})^2 - l\sin\theta\ddot{\theta}] = mg - F\cos\theta$ ---(上)

$m[-l\sin\theta(\dot{\theta})^2 + l\cos\theta\ddot{\theta}] = -F\sin\theta$ ---(下)

となる。 - sinθ×(上)＋　cosθ×(下)を行うと

ml$^2\ddot{\theta}$ = - lmg sinθが導かれる。

問３

前問で得たθについて方程式にsinθ≅θを代入して

$$ml\dot{\theta} = -mg\theta$$

これは単振動の方程式であるから、時間の原点を適切に設定すると、解は

$$\theta = Acos\omega t$$

の形になる。これを方程式に代入すると

$$-mlA\omega^2 cos\omega t = -mgAcos\omega t$$

となる。これより

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

問４

体積積分は極座標で

$$\int_v (\ldots)dr^3 = \iiint(\ldots)r^2\,dr\,d\phi\,dcos\theta$$

となるので

$$\begin{aligned} I_G &= \iiint (rsin\theta)^2\rho_0 r^2\,dr\,d\phi\,dcos\theta \\ &= 2\pi\rho_0\int_0^a r^4 dr\int_{-1}^1 sin^2\theta\,dcos\theta \\ &= 2\pi\rho_0\frac{1}{5}a^5\int_{-1}^1\left(1-t^2\right)dt \\ &= \frac{2}{5}a^2M \end{aligned}$$

問５

剛体の重心Gを通る回転軸周りの慣性モーメントをI_Gとするとき、その軸から平行にd離れた軸周りの慣性モーメントは、

$$I = I_G + Md^2$$

となる従って、

$$I = M\left(l^2 + \frac{2}{5}a^2\right)$$

問6

振り子の角度がθのときに全体に働く力のモーメントは、

$$N = -Mgl\sin\theta$$

となる$\sin\theta \cong \theta$としてこれを解くと、

$$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{l^2 + \frac{2}{5}a^2}{l^2}}$$

また

$$\frac{T_B}{T} = \sqrt{\frac{l^2 + \frac{2}{5}a^2}{l^2}} > 1$$

従ってT_BはTより大きくなる。

問7

(x,y)平面に射影した質点の位置ベクトルをRとする。

題意により

$$h = \frac{1}{2}\left|\left(R \times \dot{R}\right)_Z\right|$$

である。

さて、質点(x,y)平面内における運動方程式は、力の(x,y)平面の射影をFとすると、

$$m\frac{d^2R}{dt^2} = F$$

なので

$$mR\times\frac{d^2R}{dt^2}=R\times F$$

Fは棒からの張力の射影であるから中心力である。よって$F \parallel R$であり、

$$R\times F=0$$

従って

$$R\times\frac{d^2R}{dt^2}=0$$

である、よって

$$\frac{d}{dt}\left(R\times\dot{R}\right)=\frac{dR}{dt}\times\frac{dR}{dt}+R\times\frac{d^2R}{dt^2}$$

の右辺は0となる。つまり

$$\frac{d}{dt}\left(R\times\dot{R}\right)=0$$

が成立し、$R\times\dot{R}=0$が成立し$R\times\dot{R}$は時間に依らない、Z軸に平行な定ベクトルとなる。よってhは時間に依らない量(保存量)となる。

問８

円筒座標で考える。

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \quad \text{を時間微分すると} \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}sin\phi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

である。また

$$h = \frac{1}{2}\left|\left(R\times\dot{R}\right)_Z\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|r\cos\phi\left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right) - r\sin\phi\left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}sin\phi\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}r^2\left|\dot{\phi}\right|$$

である。$r^2 + z^2 = l^2$より

$$\dot{r}^2=\frac{z^2}{l^2-z^2}\dot{z}^2$$

である。運動エネルギーは、

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2+\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2+\frac{z^2}{l^2-z^2}\dot{z}^2+\frac{(2h)^2}{l^2-z^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{l^2\dot{z}^2+(2h)^2}{l^2-z^2}\right)$$

全エネルギーEは、$E=K-mg=\frac{1}{2}m\left(\frac{l^2\dot{z}^2+(2h)^2}{l^2-z^2}\right)-mg$

ちなみにh>0では$r\neq 0$より$l^2-z^2>0$であり、分母が0になる場合は考慮しなくてよい。

問９

題意により$h=\frac{1}{2}lv_0$、$E=\frac{1}{2}m{v_0}^2$である。これを前問で得られた全エネルギーの式に代入して整理すると、

$$z\left(2gz^2+{v_0}^2z-2gl^2\right)+l^2\dot{z}^2=0$$

zが取りうる範囲の端では$\dot{z}^2=0$なので、この時

$$z\left(2gz^2+{v_0}^2z-2gl^2\right)=0$$

これを満たすzは

$$z=0,\ \frac{-{v_0}^2\pm\sqrt{{v_0}^4+16g^2l^2}}{4g}$$

題意より、初速v_0 で水平に運動し始めた質点は、重力を受けて下向きの速度を持つようになる。これにより、しばらくはz>0の領域で運動が行われる。よって取りうるzの最大

値についてはz>0の領域で考えれば良い。よってzが最大値を取るのは質点が一番下に下がる場合であり、

$$z\text{の最大値} = \frac{-{v_0}^2 - \sqrt{{v_0}^4 + 16g^2l^2}}{4g}$$となる。

II
出題の意図
3次元の波動(気体中の音波)の基礎を問うとともに気体の熱力学を援用して気体の音速を求める。
解答と出題の意図
(1)$\frac{2\pi}{\lambda}$, (2)$2\pi\nu$
平面波の基本量についての知識を問う。
(3) $\frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|}$
平面波が波動方程式を満たすことを偏微分を実行することにより確認できることを問う
(4)－1
微小領域での圧力差が変位の駆動力になることを認識し運動方程式を立てる。
(5) $-\frac{\vec{k} A_p \eta}{\rho_0 \omega^2}$
音波が縦波であることを、平面波に対する微積分操作で導く。
(6)1
ベクトル解析で使われる「発散」の物理($\vec{\nabla}$)的意味を問う

(7)V^{γ}　(8) $-\frac{1}{\gamma}$

理想気体の断熱変化に関する知識を問う。

(9) $\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$

微分操作を駆使し、既に得られた式を組み合わせて波動方程式を導く

(10) $\frac{7}{5}$

理想気体の比熱比と運動の自由度に関する知識を問う

(11)3.4×10^2, (12)3.0(または2.9)

理想気体の音速を、数値計算で実際に求める。