阪大解答物理

出題の意図

Ⅰ．太陽を中心とする惑星の運動を例にとり，大学教養課程で学ぶ力学に関して問う．

Ⅱ．電磁場のポインティング・ベクトルを題材にとり，大学教養課程で学ぶ電磁気学に関して問う．

Ⅲ．理想気体の状態変化を例にとり，大学教養課程で学ぶ熱学に関して問う．

解答例

Ⅰ．問１．(ア) $\dot{\theta}$ (イ) $-\dot{\theta}$ (ウ) $r\dot{\theta}^2$ (エ) $2\dot{r}\dot{\theta}$ (オ) $r^2\dot{\theta}$

問２．$\overrightarrow{e_r}$ 平行成分 $m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=F$， $\overrightarrow{e_\theta}$ 平行成分 $m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0$

問３．$\dot{S}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$　式 $L=2m\dot{S}$

問４．運動方程式の $\overrightarrow{e_\theta}$ に平行な成分は $m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0$ なので，$r^2\dot{\theta}$ は時間に依らず一定．$\dot{S}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ なので $\dot{S}$ も時間に依らず一定．

問５．$m\left(\ddot{r}-\frac{4\dot{S}^2}{r^3}\right)=F$

問６．$r=\frac{l}{1+\varepsilon cos\theta}$ を時間微分して，$\dot{r}=\frac{\varepsilon l sin\theta}{(1+\varepsilon cos\theta)^2}\dot{\theta}$ となる．$r$ を代入して

$\dot{r}=\frac{\varepsilon}{l}r^2\dot{\theta}sin\theta$．さらに$\dot{S}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ を代入し，$\dot{r}=\frac{2\varepsilon\dot{S}}{l}sin\theta$．

問７．$F=-\frac{4m\dot{S}^2}{l}\frac{1}{r^2}$

問８．楕円の面積は $a,b$ を代入して，$\pi ab=\frac{\pi l^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$，惑星の公転周期 $T$ はこれを $\dot{S}$ で割ったものなので，$T=\frac{\pi l^2}{\dot{S}(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$ となる．ケプラーの第３法則より $\alpha$ を惑星によらない定数として，$\left(\frac{\pi l^2}{\dot{S}(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2=\alpha a^3=\alpha\left(\frac{l}{1-\varepsilon^2}\right)^3$，整理して，$\frac{\pi^2 l^4}{\dot{S}^2(1-\varepsilon^2)^3}$ となり，$\dot{S}^2=\frac{\pi^2 l}{\alpha}$ とわかる．これを問７の $F$ に代入して，$F=-\frac{4m}{l}\left(\frac{\pi^2 l}{\alpha}\right)\frac{1}{r^2}=-\frac{4\pi^2 m}{\alpha}\frac{1}{r^2}$ となり，$F$ は$m$ 以外には惑星によらない物理量でかけることがわかる．

Ⅱ．問１．(ア) $-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (イ) $\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (ウ) $\frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2+\frac{1}{2}\mu_0\left|\vec{H}\right|^2$ (エ) $\vec{E}\cdot\vec{J}$ (オ) $\vec{E}\times\vec{H}$

問２．（１項）体積Ｖの中に蓄えられた電磁エネルギーの時間変化率

（２項）体積Ｖの中の電流に対して電場が単位時間にする仕事

（３項）閉曲面Ｃを通して単位時間に出ていく電磁エネルギー

(式全体) 電磁エネルギーに関するエネルギー保存の法則

問３．$\frac{I}{\pi a^2 \sigma}$　問４．$r < a$ では $\frac{Ir}{2\pi a^2}$，$r > a$ では $\frac{I}{2\pi r}$

問５．$\frac{I^2 r}{2\pi^2 a^4 \sigma}$　問６．$-\frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma}$

問７．問６の結果は閉曲面Ｃを通して電磁エネルギーが流入しているという結果である．単位時間に流入するエネルギーの量は $\frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma}$ であるが，長さ $L$ の抵抗線の抵抗は$R = \frac{L}{\pi a^2 \sigma}$ であるので，エネルギー量は $RI^2$ となりジュール熱と一致する．この設問では，$E$ と$H$ は時間変化しないので，体積Ｖに流れ込むエネルギーは全て電場が電流にする仕事として消費される．この設問ではこの仕事が最終的にジュール熱となることを示している．

Ⅲ．問１．$Q = RT_1 \log \frac{V_1{}'}{V_1}$，$\Delta S = R \log \frac{V_1{}'}{V_1}$

問２．第一法則より $d'Q = dU + d'W = dU + pdV$（Ｗは気体がする仕事），理想気体の内部エネルギー $U$ は温度 $T$ にのみ依存し，$dU = C_V dT$，よって$d'Q = C_V dT + pdV = C_v dT + d(pV) - Vdp$．理想気体の状態方程式 $pV = RT$ より，$d'Q = C_V dT + d(RT) - Vdp = (C_v + R)dT - Vdp$．定圧比熱の表式より，$C_p = \left(\frac{d'Q}{dt}\right)_p = C_V + R$ ．

問３．第一法則と，理想気体の内部エネルギーが温度 $T$ にのみ依存することより，$d'Q = dU + pdV = C_V dT + pdV$．断熱過程では$d'Q = 0$ より，$C_V dT + pdV = 0$.

問４．問３の式に理想気体の状態方程式を代入して$C_V dT + pdV = C_V dT + \frac{RT}{V} dV = 0$.

問２の式を用いて整理して，$C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = C_V \frac{dT}{T} + \left(C_p - C_V\right) \frac{dV}{V} = 0$．両辺を微分して

$C_V \log T + \left(C_p - C_V\right) \log V = A$（定数)．整理して$T^{C_V} V^{C_p - C_v} = A'$，$TV^{\gamma - 1} = A''$　$(\gamma = \frac{C_p}{C_V})$

また，$pV = RT$ より，$PVV^{\gamma-1} = PV^{\gamma} = A'''$．　よって$PV^{\gamma} =$ 一定.

問５．$V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$　問６．(1)　０　(2)　$C_p \log \frac{V_1}{V_2}$　(3)　$C_V \log \frac{P_1}{P_2}$

問７．エントロピーは状態量なので$PV$平面上の閉経路１→２→３→１での変化は０．よって$C_p \log \frac{V_1}{V_2} + C_V \log \frac{P_1}{P_2} = 0$，よって，$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{C_p} \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{C_V} = 1$ となり，$V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$