数学模型

马尔萨斯人口模型

北京科技大学

马尔萨斯人口模型

回忆：对于离散的数据：

差分方程

现在的值 X_0　　变化的量 ΔX

未来的值 X　　$\Delta X = X - X_0$

X 可以看作时间的函数$X(t)$　　$t \in \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$　　$X(t_n)$

思考：对于连续的数据：

微分方程

现在的值 $X(t_0)$　　变化的量 dX

未来的值 $X(t)$　　$dX = X(t) - X(t_0)$

$t \in R$　　$X(t)$

一、人口问题

人口问题

经济 社会 环境 资源

社会问题核心

全球社会矛盾

数量 结构 分布

二、马尔萨斯模型

假设：

在一定的区域和时间范围内，不存在人口的迁出和外来人口的迁入。

变化值只考虑人口死亡和繁殖的平均效应。

人口的增长率与时间无关。

二、问题提出

分析：

由于人口的数量总数很大，不妨假设人口是一个关于时间的连续性函数。 设在 t 时刻的人口总数为 $p(t)$。

在 $[t, t+dt]$ 这一段时间中的人口变化量为

$$p(t+dt)-p(t) = (bp(t)-dp(t))\ dt = ap(t)\ dt$$

b ——出生率
d ——死亡率
a ——增长率

Thomas Robert Malthus
1766-1834

二、问题提出

分析：

在 $[t, t+dt]$ 这一段时间中的人口变化量为

$$p(t+dt)-p(t)=ap(t)dt$$

利用Taylor公式，展开得：

$$p(t+dt)-p(t)=\frac{dp}{dt}dt+o(dt)$$

$$\Downarrow$$

$$ap(t)=\frac{dp}{dt}$$

初始条件 $p(t_0)=p_0$ $\Rightarrow$

$$p(t)=p_0e^{a(t-t_0)}$$

$$\Uparrow$$

$$\ln p(t)=\ln p_0+a(t-t_0)$$

$$\Uparrow$$

$$y=b+a(t-t_0)$$

三、数据拟合

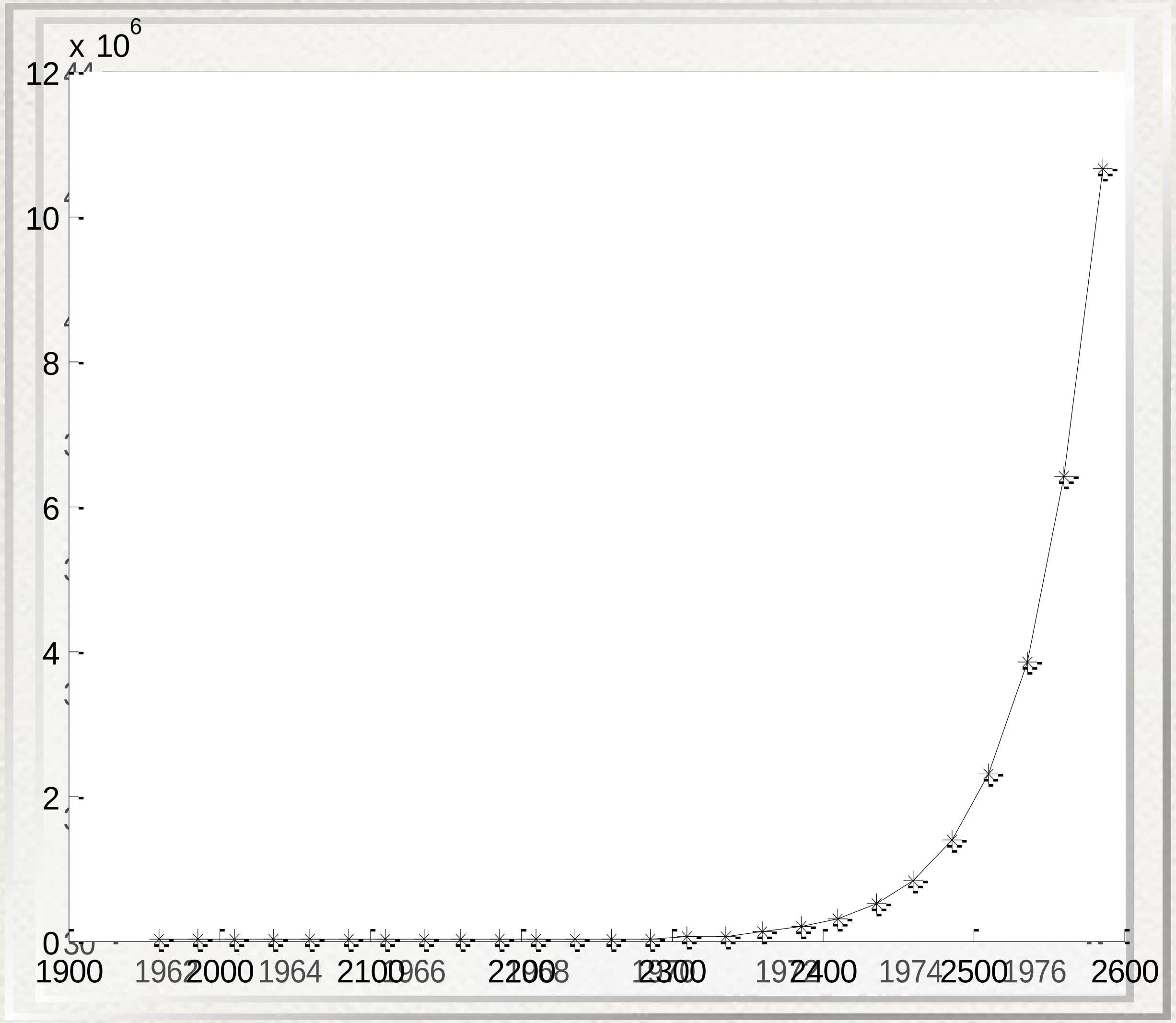
1961年到1976年世界人口的数量，其中人口数的单位为10^8人：

年	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口数	30.73	31.26	31.91	32.57	33.24	33.94	34.63	35.34
年	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
人口数	36.08	36.84	37.61	38.38	39.13	39.89	40.64	41.36

三、数据拟合

$$\frac{dp}{dt} = 0.0204\,p(t)$$

初始条件 $p(1961) = 30.73$



1974年拟合较好，但是后面偏差越来越大

2600年，人口数无限增长，达到 1.2×10^{15}