

FSAT 反射面板的调节策略

摘要

本文研究的是 FSAT 在接收天体发射的平行电磁波时反射面板的调节问题,通过调节促动器在径向的伸缩量,使信号接收系统具有最佳接收效果。

针对问题一:根据抛物面和基准球面的对称性,可将其简化为二维空间的抛物线和圆弧线,要确定抛物面,可以先确定抛物线再将其绕轴旋转得到抛物面,故要确定该抛物线的顶点和焦点的位置,根据被测天体的位置,可以确定唯一的焦点,在反射面板调节约束下,顶点可以在距圆弧线径向 $-0.6\sim 0.6\text{m}$ 的范围内变化,所以满足条件的抛物线有无限多个,为防止主索网过度松弛或过度拉紧,主索节点径向的位移量在一定范围内越小越好,考虑原基准球面上各点调整距离之和最短为理想抛物面的衡量标准,故以抛物线上各点到圆弧线上各点的径向距离绝对值之和最小为目标函数,以抛物线顶点到圆弧线的距离为决策变量,以抛物线口径为 300m ,抛物线上各节点的径向波动范围为约束条件,建立各节点径向位移的绝对值之和最小的**单目标优化模型**,从而求得当顶点到基准圆弧线的距离 $h=0.3845$ 时为最佳抛物线,经旋转后得到抛物面的方程为: $x^2 + y^2 = 561.484z + 168885.5639$ ($x^2 + y^2 \leq 150^2$)。

针对问题二:由**罗德里格旋转公式**可知,一个向量在给定旋转轴和旋转角度下经过旋转可以求得新的向量,以坐标原点为起点,理想抛物面上各点坐标为终点得到原向量,由题条件可以求得旋转轴和旋转角度,绕旋转轴转到第一题理想抛物面的位置上得到新的各点坐标,再代入第一题理想抛物面的方程即可求得理想抛物面的方程为,之后再以各个促动器的伸缩量为决策变量,以调整后 300m 口径内反射面板上主索节点与理想抛物面径向间的距离之和最小为目标函数,以主索节点都要求在反射面 300m 口径内、促动器的伸缩范围以及相邻节点之间距离的变化幅度为约束,建立**反射面板调节模型**,利用该模型求得理想抛物面的顶点坐标为 $(-49.3832, -36.9366, -294.3948)$,以及调节后反射面 300 米口径内的主索节点编号、位置坐标和各促动器的伸缩量。

针对问题三:考虑到某平面的信号接收量与该平面沿光垂直投影方向上的面积成正比,故将信号接收比**转化为面积之比**。将馈源舱信号接收量转化为反射光线在馈源舱平面上的投影与馈源舱的面积重叠部分,将反射面板信号反射量等价于反射面板信号接收量,进而转化为抛物面沿光垂直投影方向上的面积。在求解馈源舱信号接收量时,建立了空间光线的反射模型对面积进行求解,求得调整后馈源舱信号接收比 **1.24%**。并运用求解调整后馈源舱接收比的模型,改变代入数据和反射面的反射信号,对基准反射球面的接收比进行求解,得到接收比为 **0.17%**。经比较,发现将反射平面调整为工作抛物面时接收比得到了大幅提高,得到结论:以抛物面为反射平面时,对天体发出的信号监听和检测更加有效。

最后对焦径比对理想抛物面的影响做**灵敏度分析**,得到实际情况中不能大幅度的改变焦径比的结论。

关键词: 单目标优化模型 罗德里格旋转公式 灵敏度分析 反射面板调节

一、问题的背景和重述

1.1 问题的背景

位于贵州省的 500m 口径射电望远镜（简称 FAST）是全球目前单口径最大的射电望远镜，在建设初期，科学家需要突破重重技术难关。选址问题、设计问题、调试问题等各种问题。科学家们经过重重难关历经数年终于建成了该巨型射电望远镜，把不可能变成可能。该射电望远镜主要由主动反射面、下拉索和周边支承结构组成，FAST 的占地面积大、观测距离远，极大提高了人类检测宇宙中微弱的信号的能力，同时也推动了人类对宇宙深处的理解与探索，在研究射电望远镜接收天体电磁波的过程中，将反射面调整为工作抛物面对有效接收电磁波起着重要作用，所以工作抛物面的确定以及反射面板的调节具有重大意义。

1.2 问题的重述

FAST 主要由主动反射面、下拉索和周边支承结构组成，主索网按照三角形网格方式铺成，每个三角网格上都有一块反射面板，多个反射面板组成反射面，主索网由周边支撑结构固定，各三角网格之间由主索节点，其下面连接着下拉索，下拉索由促动器固定，可以通过对促动器沿径向的伸缩来控制主索网的结构。主动反射面有两个状态，分别为基准态和工作态，其中基准态时，反射面是一个口径为 500m，半径大约为 300m 的基准球面，工作态时，通过促动器的调节，反射面变为一个口径为 300m 的工作抛物面，其中信号接收系统（有效接收信号的区域为直径 1m 的圆面）即馈源舱圆面的中心必须与基准球面同球心的焦面上，基准球面与焦面的半径之差 $F=0.466R$ ，其中 R 是基准球面半径，当望远镜观测到天体 S 时馈源舱圆面的中心会移到直线 SO 与焦面的交点 P 处，再通过对部分反射面的调节形成照明区域，使 FAST 将来自天体的电磁波汇聚到有效接收信号的区域。

根据上述问题已知条件，建立数学模型求解下面问题：

①如果被观测到的天体在基准球面的正上方，在反射面板调节的约束下，求理想的工作抛物面。

②如果被观测到的天体在 $\alpha=36.769^\circ$ ， $\beta=78.169^\circ$ 处（ α 为方位角， β 为仰角），求理想的工作抛物面。建立反射面板调节模型，同时通过调节促动器的伸缩，使反射面尽可能的接近理想的工作抛物面，将求出的理想工作抛物面的顶点坐标、调节后反射面口径内主索节点的编号、坐标、各促动器伸缩量放入附件 4 中。

③在第二问反射面调节的基础上，计算馈源舱的有效区域接收到的反射信号与反射面 300m 口径内的反射信号之比，同时将求得的接收比与基准球面接收到的反射信号之比做比较。

二、问题的分析

FAST 在接收天体发射来的信号时，馈源舱圆面的中心会移到直线 SO 与焦面的交点 P 处，再通过对部分反射面板的调节形成工作抛物面，反射面板的主索节点连接着下拉索（长度保持不变），促动器连接着下拉索下端，通过促动器顶端的伸缩来调节反射面板，从而使反射面板尽可能的贴近理想抛物面，使 FAST 将来自天体的电磁波汇聚到有效接收信号的区域。如下图所示，左图为天体方位角 α 和仰角 β 示意图，右图 FAST 工作时的剖面图，即左图的 XOZ 平面示意图：

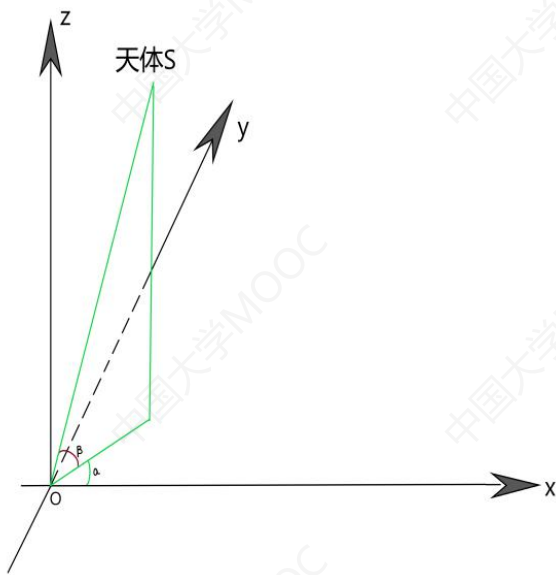


图 1 天体方位角 α 和仰角 β 示意图

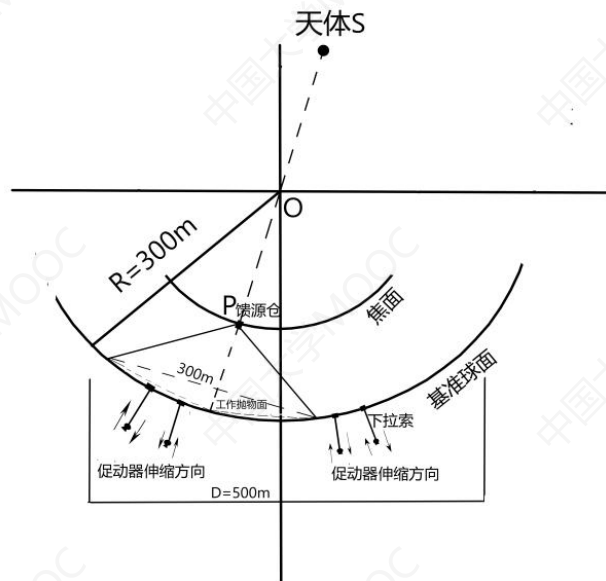


图 2 FAST 工作时剖面示意图

针对问题一：根据抛物面和基准球面的对称性，因此可以将其分别简化为抛物线和圆弧线，此时天体在基准球面的正上方即 S 在 O 的正上方，由于工作时馈源舱圆面的中心会移到直线 SO 与焦面的交点 P 处，因此 P 唯一且确定，要确定抛物线还要知道抛物线顶点的位置，由于要满足反射面板调节的约束，因此抛物线的顶点在距圆弧线径向 $-0.6 \sim 0.6\text{m}$ 的范围内变化，因此可以得到无限个抛物线，为防止主索网过度的松弛或过度拉紧使其所受应力超过设计值，因此主索节点在径向的位移量应在合理范围内且越小越好^[1]，在这无限的抛物线中寻找使抛物线上各点到圆弧线上各点的径向距离绝对值之和最小的抛物线即理想抛物线，此时该问题可以看作单目标优化问题，以抛物线上各点到圆弧线上各点的径向距离绝对值之和最小作为目标函数，以抛物线顶点到圆弧线的距离为决策变量，以抛物线口径 300m 、抛物线上各节点的径向波动范围为约束条件，建立各节点径向位移之和最小的单目标优化模型，从而求得理想抛物线。

针对问题二：当天体在 $\alpha=36.769^\circ$ ， $\beta=78.169^\circ$ 处时，我们可以根据三维旋转理论中的罗德里格旋转公式对理想抛物面进行求解，在给定单位化后的旋转轴向量和旋转角度，便可利用罗德里格旋转公式将原始向量旋转为新的向量，我们以坐标原点为起点，理想抛物面上的各点坐标为终点作为原始向量，根据题目条件求出旋转轴和旋转角度，经过旋转后得到新的向量，因为是以坐标原点为起点，因此这里的向量也就是新的各点坐标，将这些坐标代入第一题理想抛物面方程即可求得该理想抛物面方程。为了使反射面板更贴近理想抛物面，我们以调节后反射面板 300m 口径内的主索节点到理想抛物面径向距离衡量贴近指标，以该指标最小为目标函数，各个促动器的伸缩量为决策变量，以主索节点都要求在反射面 300m 口径内、促动器的伸缩范围以及相邻节点之间距离的变化幅度为约束建立单目标的反射面板优化模型，最后利用该模型求解得到理想抛物面的顶点坐标、 300m 口径内反射面板上各主索节点的坐标、编号以及各促动器的伸缩量。

针对问题三：本题要计算馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300m 口径内反射面的反射信号之比，由于 300m 口径大小不变，所以认为对于工作抛物面的反射信号是固定的，这里以与反射信号传播方向垂直的与抛物面截面的面积作为反射信号量，有效区域接收到的信号以每个三角面板反射到馈源舱上的信号与馈源舱有效区域的重叠面积进行计算，再将每个重叠面积累加，与截面面积的比值即为接收比。最后对于“与基准反射球面的接收比”，理解为馈源舱有效区域接收到的反射信号与 500m 口径内反射面

的反射信号之比，重新代入主索节点数据，将上述的接收比的公式中半口径 150 改为 250，进行模型求解即可。

三、 模型假设

- 1、假设基准球面实际以 300.4m 为半径。
- 2、假设促进器下端点上端点与其对应的主索节点满足在同一条直线上。
- 3、假设不考虑电磁波在经过反射后信号的折射损失。
- 4、假设来自目标天体的电磁波以平行光形式入射。
- 5、不考虑经过二次反射到达馈源舱的情况。

四、 符号及变量说明

符号	表示含义	单位
R	表示基准球面的半径	m
(x, Y)	表示工作抛物面上节点的坐标	
(x, y)	表示基准球面上节点的坐标	
F	表示表示基准球面与焦面的半径差	m
h	表示抛物面顶点到基准面的距离	m
x_i	表示横坐标为 i 的节点	
P	表示直线 SO 与焦面的交点	
\vec{n}	表示平面 xos 的法向量	
α	表示天体的方位角	$^\circ$
β	表示天体的仰角	$^\circ$
γ	表示向量的旋转角度	
v	表示待旋转的向量	
vl	表示旋转后的向量	
n	表示 300m 口径范围内的主索节点个数	
h_j	表示第 j 个主索节点调节的距离	m
(x_{jl}, y_{jl}, z_{jl})	表示第 j 个主索节点的径向直线与理想抛物面的交点	
(x_{j0}, y_{j0}, z_{j0})	表示反射面板调整前各主索节点的坐标	
(x_{j1}, y_{j1}, z_{j1})	表示反射面板调整后各主索节点的坐标	
d_{j0}	表示调整前主索节点到调整后理想抛物面对称轴的距离	m
D_0	表示反射面板调整前相邻节点之间的距离	m
D_1	表示反射面板调整后相邻节点之间的距离	m
\vec{S}_{in}	表示入射信号的方向向量	m
\vec{S}_{out}	表示出射信号的方向向量	m
\vec{m}	表示三角面板的法向量	
η	表示调整后馈源舱接收比	
η_1	表示调整前馈源舱接收比	
S_a	表示每个三角面板反射的信号与馈源舱重叠面积	m^2

五、模型的建立和求解

5.1 问题一位移量最小的单目标优化模型建立与讨论求解

5.1.1 数据预处理

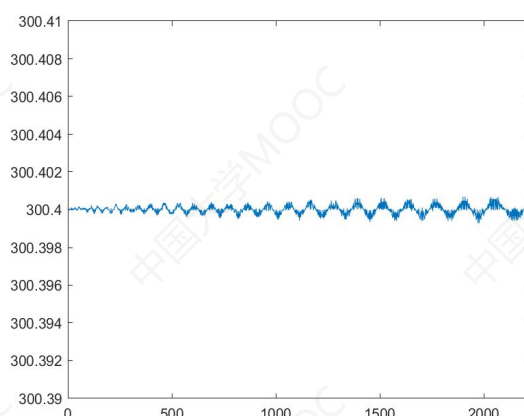


图 3 各点坐标算得的基准球面半径

由题意知基准球面的半径为 300m 左右，具体数值不确定，如上图所示，根据附件 1 中数据可以从各点坐标算得基准球面的半径具体数值在 $R = 300.4\text{m}$ 左右波动。因此此后的 R 均取 300.4m 。

5.1.2 位移量最小的单目标优化模型的建立

首先由于抛物面和基准球面的对称性将三维空间转化为二维空间，为防止主索网过度拉紧或者过度松弛导致主索网发生形变，因此抛物面以主索节点在径向的位移量最小为最佳，由于对称性，仅考虑抛物线右侧的情况即可，如图示：

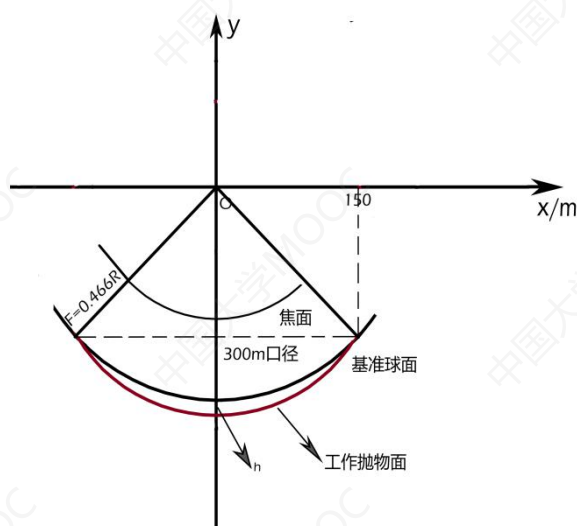


图 4 FSAT 剖视图

以基准球心为坐标原点，根据数学知识可以得到圆弧线和抛物线的方程为分别为：

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (1)$$

$$x^2 = 4(F + h)Y + 4(F + h)(R + h) \quad (2)$$

因此建立优化模型如下：

$$(1) \text{ 目标函数: } \min f = \sum_{i=0}^{150} \left| \sqrt{x_i^2 + \left[\frac{1}{4(F+h)} x_i^2 - (R+h)^2 \right]} - R \right| \quad (3)$$

其中 x_i 表示横坐标为 i 的节点, h 表示抛物面顶点到基准面的距离。

R 表示基准球面的半径, F 表示两个同心圆的半径差。

(2) 决策变量: 抛物面顶点到基准面的距离 h 。

(3) 约束条件:

①: 工作抛物面的口径为 300m, 由于只考虑右侧, 因此其上的节点横坐标 x_i 都要小于 150m, i 以 0.01 为步长即:

$$x_i \leq 150 \quad i = 0, 0.01, 0.02, \dots, 150 \quad (4)$$

②: 由反射面板调节约束可知抛物面顶点到基准面的距离在-0.6~0.6m 内波动, 则有:

$$-0.6 \leq h \leq 0.6 \quad (5)$$

其中 h 以 0.0001 为步长

③: 由反射面板调节约束可知每个抛物面上的节点都要满足调节范围, 即在-0.6~0.6m 内波动, 则有:

$$\left| \sqrt{x_i^2 + \left[\frac{1}{4(F+h)} x_i^2 - (R+h)^2 \right]} - R \right| \leq 0.6 \quad (6)$$

其中 x_i 表示横坐标为 i 的节点, h 表示抛物面顶点到基准面的距离。

R 表示基准球面的半径, F 表示两个同心圆的半径差。

综上, 模型为:

$$\min f = \sum_{i=0}^{150} \left| \sqrt{x_i^2 + \left[\frac{1}{4(F+h)} x_i^2 - (R+h)^2 \right]} - R \right|$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 = 4(F+h)y + 4(F+h)(R+h) \end{cases} \\ \begin{cases} x_i \leq 150 \quad i = 0, 0.01, 0.02, \dots, 150 \\ -0.6 \leq h \leq 0.6 \end{cases} \\ \left| \sqrt{x_i^2 + \left[\frac{1}{4(F+h)} x_i^2 - (R+h)^2 \right]} - R \right| \leq 0.6 \end{cases} \quad (7)$$

5.1.3 单目标优化模型的求解

Step1: 将 h 从-0.6 以 0.0001 为步长一直加到 0.6, 求出每一个 h 所对应的抛物线方程。

Step2: 将 x_i 从 0 以 0.01 为步长一直加到 150, 得到每一个 h 所对应的抛物线上各点到圆弧线上各点的径向距离之和。

Step3: 找到每一个 h 对应的抛物线上的各点到圆弧线上各点的径向距离绝对值之和最小时所对应的 h , 得到该 h 对应的抛物线方程, 再对该抛物线方程进行旋转即可得到最佳抛物面。

下图为本题求解流程图:

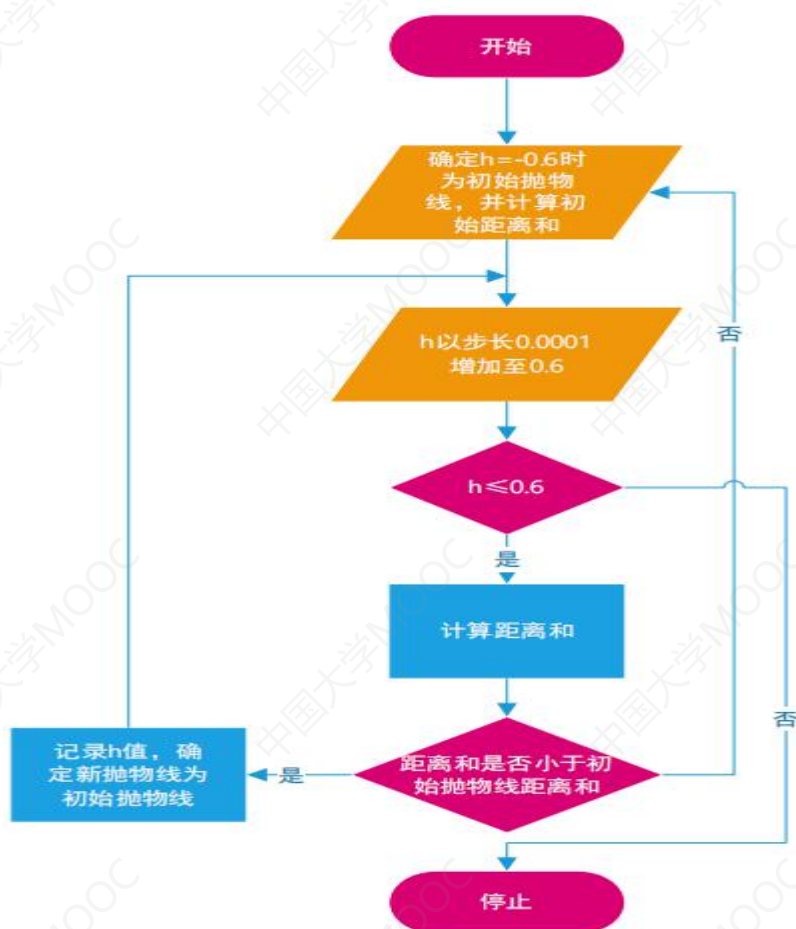


图 5 算法流程图

对该算法运用 matlab 进行求解得到当 $h=0.3845$ 时为理想抛物线, 绕 SO 轴旋转后得到抛物面, 抛物面的方程为: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 561.4836z + 168885.5639 \\ x^2 + y^2 \leq 150^2 \end{cases}$, 如图所示为该理想抛物面, 300m 口径圆面以下的抛物面即为所得:

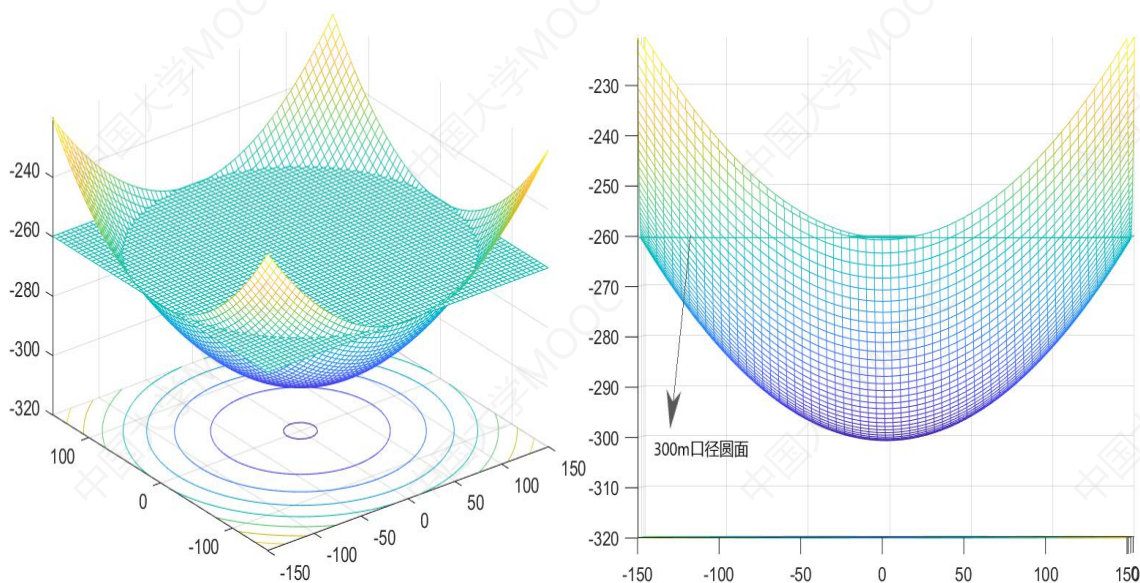


图 6 理想抛物面三视图与主视图

我们不妨看看从基准球面调整为理想抛物面时基准球面上各点的径向位移变化，如下图所示。由下图可知当 x 在 -150m 到 0m 的范围内时，随着 x 的增大，节点的径向位移先增大后减小，当 x 在 0m 到 150m 的范围时，随着 x 的增大，节点的径向位移也先增大后减小。各点的径向位移变化均在 $-0.6\sim 0.6\text{m}$ 之间，且各点径向位移变化较小。

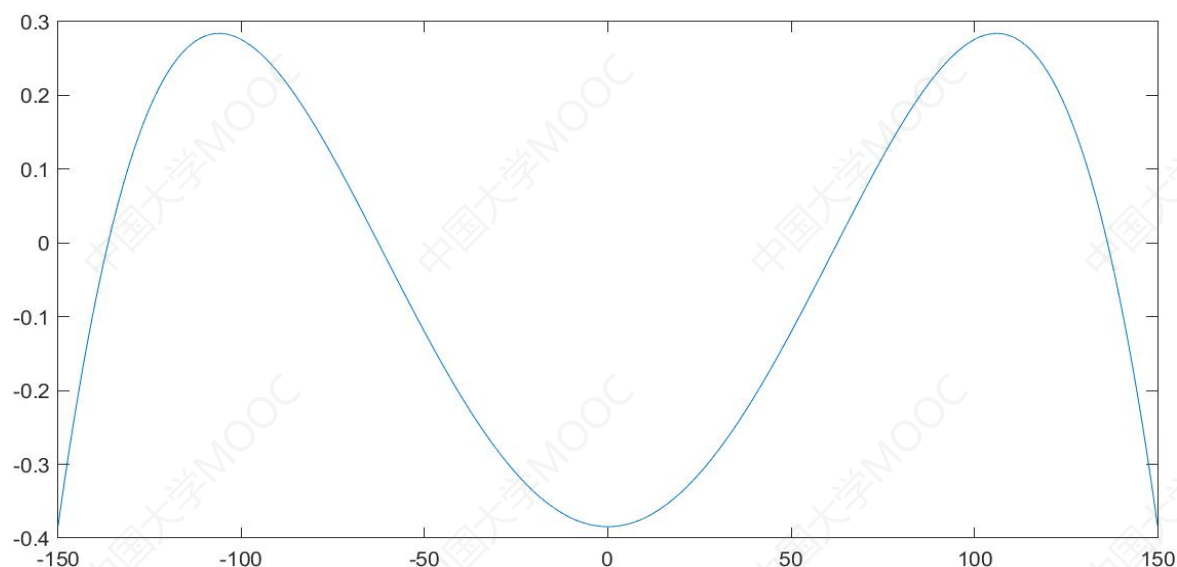


图 7 基准球面上各点的径向位移变化

5.2 对于问题二的模型建立与讨论求解

5.2.1 理想抛物面模型的建立

在三维旋转理论中，由罗德里格旋转公式^[2]可知对于一个向量，如果给定旋转轴和旋转角度，则经过旋转后可以得到新的向量计算公式，因为本题以基准球心为坐标原点，所以以坐标原点为起点，理想抛物面上各点坐标为终点得到各点对应的向量。

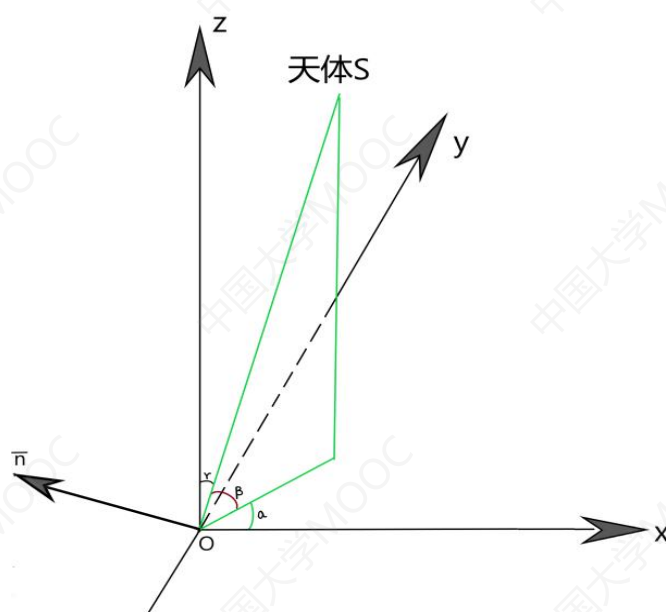


图 8 天体旋转示意图

如图所示假设向量 \vec{n} 垂直平面 zox 且过原点，则其为原始抛物面的旋转轴，根据几何关系容易求得单位向量 \vec{n} 的坐标为：

$$\vec{n} = (m, q, p) = \left(-\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, 0 \right) \quad (8)$$

又因为原始抛物面上的各点的旋转角度为：

$$\gamma = 90^\circ - \beta \quad (9)$$

由罗德里格旋转公式：

$$v1 = v\cos\theta + n(n \cdot v)(1 - \cos\theta) + (n \times v)\sin\theta \quad (10)$$

其中 $v=(x,y,z)$ 表示旋转前理想抛物面上各点坐标， $v1=(x1,y1,z1)$ 表示旋转到第一题中理想抛物面位置上的新各点坐标， $\theta = \gamma$ 表示旋转角度。

其中 $(x1,y1,z1)$ 表达式如下：

$$\begin{cases} x1 = x\cos\theta + (qz - py)\sin\theta + m(mx + qy + pz)(1 - \cos\theta) \\ y1 = y\cos\theta + (px - mz)\sin\theta + n(mx + qy + pz)(1 - \cos\theta) \\ z1 = z\cos\theta + (my - qx)\sin\theta + p(mx + qy + pz)(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (11)$$

5.2.2 理想抛物面模型的求解

将理想抛物面的各点 (x,y,z) 由已知条件即旋转轴的坐标和旋转角度通过罗德里格旋转到所求第一题中所求得理想抛物面的位置 $(x1,y1,z1)$ ，得到理想抛物面上各点的坐标代入第一题的抛物面方程即可求得新的理想抛物面的方程。将上述模型通过matlab求解得到当 $\alpha=36.769^\circ$ ， $\beta=78.169^\circ$ 时该理想抛物面的方程为：

$$0.9731x^2 + 0.985y^2 + 0.0421z^2 - 0.0403xy - 0.3214xz - 0.2404yz = 92.1956x + 68.9502y + 549.5801z + 168885.5639$$

$$(0.9731x^2 + 0.985y^2 + 0.0421z^2 - 0.0403xy - 0.3214xz - 0.2404yz \leq 150^2)$$

求得理想抛物面的顶点坐标为：

表 1 理想抛物面的顶点坐标为

X(m)	Y(m)	Z(m)
-49.3832	-36.9366	-294.3948

下图为求解模型图：

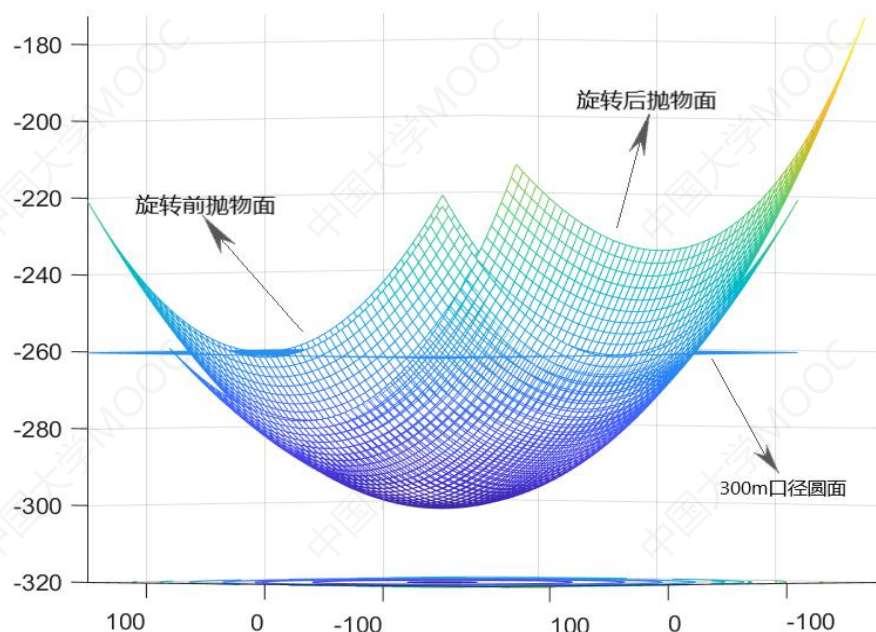


图 9 旋转前后抛物面的对比图

上图为旋转前后抛物面的对比图，旋转前的抛物面即为第一题中求出的理想抛物面，经过罗德里格旋转后即可得到当 $\alpha=36.769^\circ$ ， $\beta=78.169^\circ$ 时的理想抛物面。

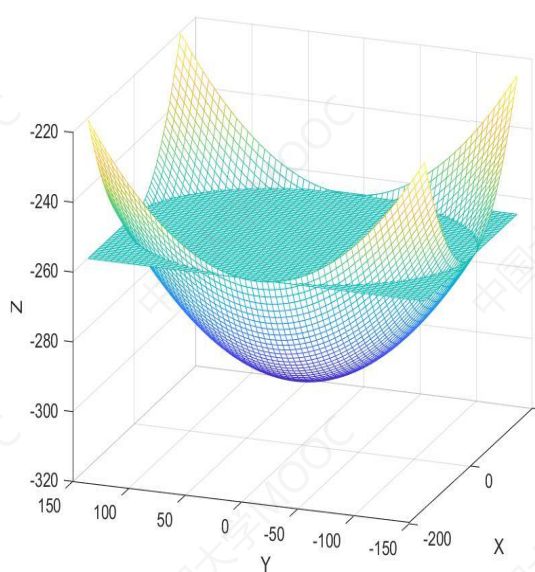


图 10 旋转前抛物面

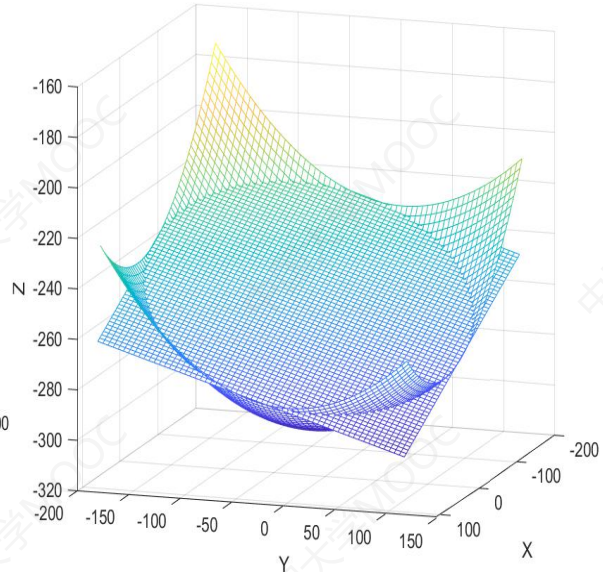


图 11 旋转后抛物面

上图分别为旋转前的抛物面和旋转后的抛物面（300m 口径圆面以下的抛物面）。

5.2.3 反射面板模型的建立

本题中要求反射面板尽量贴近上述理想抛物面，我们以调整后 300m 口径内反射面板上主索节点与理想抛物面径向间的距离之和为衡量标准，径向间的距离之和越小则越贴近理想抛物面。

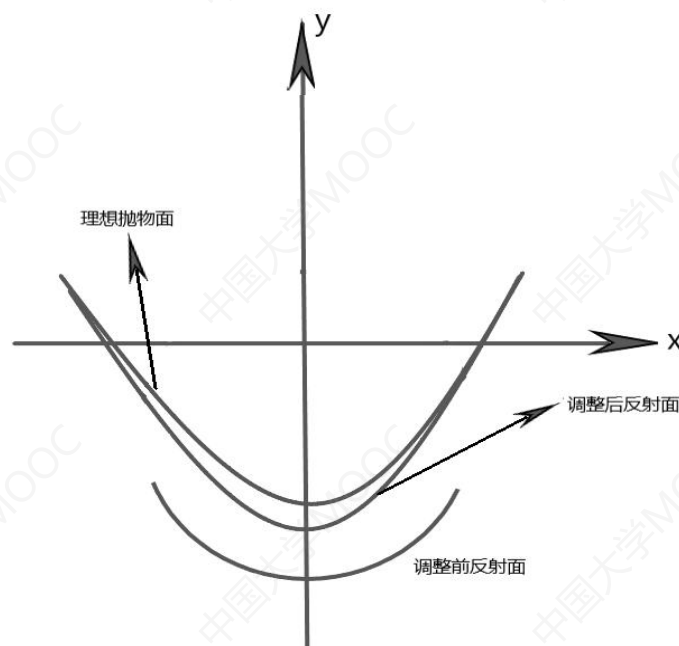


图 12 反射面板调整示意图

(1) 目标函数为:

$$\min Z = \sum_{j=1}^n |(R + h_j - \sqrt{x_{jl}^2 + y_{jl}^2 + z_{jl}^2})| \quad (12)$$

其中 $j=1,2,3\cdots n$, n 表示 300m 口径内的主索节点个数, R 表示调整前反射面的半径也就是基准球面的半径, (x_{jl}, y_{jl}, z_{jl}) 表示第 j 个主索节点的径向直线与理想抛物面的交点, h_j 表示第 j 个主索节点调节的距离。

(2) 决策变量: 各个促动器的伸缩量即 h_j 。

(3) 约束条件:

①: 由于本题的主索节点都要求在反射面 300m 口径内, 因此对于任意的主索节点满足下述约束:

$$|d_{j0}| \leq 150 + \varepsilon, j=1,2,3\cdots n \quad (13)$$

其中 d_{j0} 表示调整前主索节点到调整后理想抛物面对称轴的距离。

考虑到调整前节点可能不在 300m 口径内, 因此给定一个波动阈值 ε 确保节点都在反射面 300m 口径内。

②: 各个促动器的伸缩范围都在 -0.6~0.6 米内, 因此满足下述约束:

$$|h_j| \leq 0.6, j=1,2,3\cdots n \quad (14)$$

③: 由于主索节点调节后, 相邻节点之间距离的变化幅度不能超过 0.07%, 因此满足下述约束:

$$\frac{D_1 - D_0}{D_0} \leq 0.07\% \quad (15)$$

$$D_1 = \sqrt{(x_{j1} - x_{(j+1)1})^2 + (y_{j1} - y_{(j+1)1})^2 + (z_{j1} - z_{(j+1)1})^2} \quad (16)$$

$$D_0 = \sqrt{(x_{j0} - x_{(j+1)0})^2 + (y_{j0} - y_{(j+1)0})^2 + (z_{j0} - z_{(j+1)0})^2} \quad (17)$$

其中 D_0 表示调整前相邻节点之间的距离, (x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}) 表示调整前各主索节点的坐标, $(x_{(j+1)0}, y_{(j+1)0}, z_{(j+1)0})$ 表示与之相邻的点的坐标, D_1 表示调整后相邻节点之间的距离, (x_{j1}, y_{j1}, z_{j1}) 表示调整后主索节点坐标, $(x_{(j+1)1}, y_{(j+1)1}, z_{(j+1)1})$ 表示与调整后的主索节点相邻的节点的坐标。

④: 调整后的主索节点坐标在调整后的工作抛物面上, 则有:

$$x_{j1}^2 + y_{j1}^2 = 4(F + h_j)z_{j1} + 4(F + h_j)(R + h_j) \quad (18)$$

综上, 模型为:

$$\min Z = \sum_{j=1}^n \left| (R + h_j - \sqrt{x_{jl}^2 + y_{jl}^2 + z_{jl}^2}) \right|$$

$$\begin{cases} |x_{j0}| \leq 150 + \varepsilon, j = 1, 2, 3 \dots n \\ |h_j| \leq 0.6, j = 1, 2, 3 \dots n \\ \frac{D_1 - D_0}{D_0} \leq 0.07\% \\ D_0 = \sqrt{(x_{j0} - x_{(j+1)0})^2 + (y_{j0} - y_{(j+1)0})^2 + (z_{j0} - z_{(j+1)0})^2} \\ D_1 = \sqrt{(x_{j1} - x_{(j+1)1})^2 + (y_{j1} - y_{(j+1)1})^2 + (z_{j1} - z_{(j+1)1})^2} \\ x_{j1}^2 + y_{j1}^2 = 4(F + h_j)z_{j1} + 4(F + h_j)(R + h_j) \end{cases} \quad (19)$$

5.2.4 反射面板模型的求解

Step1:在所有主索节点中循环遍历找到符合在反射面 300m 口径内条件的主索节点。记录下它们的编号以及坐标位置。

Step2:找到各主索节点对应的径向理想抛物面交点。

Step3:计算出满足条件的主索节点与交点之间的距离即为各促动器伸缩量，同时记录下各个促动器的伸缩量。

将上述算法通过 matlab 求解得到部分结果见下表，具体见附件 4

表 2：反射面板模型的求解部分结果

编号	主索节点坐标(x,y,z)			促动器伸缩量(m)
A0	0	0	-300.3870872	0.012912785
B1	6.105650831	8.404041805	-300.1145607	0.105702607
C1	9.880272058	-3.210211134	-300.1464431	0.07380106
D1	0	-10.39239373	-300.2604682	-0.04029234
E1	-9.885281721	-3.21183883	-300.2986285	-0.078475418
A1	-6.107343715	8.406371952	-300.1977719	0.022441488
A3	0	16.8114135	-299.8114377	0.117646802
B2	12.20065573	16.79334056	-299.4910004	0.190555617
B3	15.98575439	5.194255764	-299.7705248	0.158623928
C2	19.74442193	-6.41501802	-299.5418599	0.139574113
.....
D246	-139.4659791	-129.1910798	-232.6371545	-0.035068149
D247	-148.6035614	-121.6567151	-231.0958447	-0.08080317

D248	-157.5221398	-113.9363868	-229.2078461	-0.151379836
D249	-164.725122	-105.9984064	-228.0206585	-0.205340145
D250	-171.7315501	-97.92883779	-226.556565	-0.281979972
D265	-110.4310746	-162.5702801	-227.6541571	-0.350162304
D266	-120.4703416	-155.238877	-227.6191211	-0.303876817
D267	-130.182304	-147.7439378	-227.2347286	-0.284797881
D268	-139.7042419	-139.9847138	-226.5002898	-0.29151747
D269	-148.9741793	-132.0113837	-225.4212329	-0.324352564

由结果可知，在满足促动器的伸缩量均在 $-0.6\sim 0.6\text{m}$ 之间等的约束条件下得到调节后反射面 300 米口径内的主索节点共有 692 个，并得到到其对应的各主索节点的坐标、编号以及各个促动器的伸缩量。

5.3 对于问题三的建立与讨论求解

5.3.1 模型的准备

由第二题可知反射面 300 米口径内的主索节点共有 692 个，然后根据附件三给出的 4300 块反射面板对应的主索节点编号，算得共有 1295 个三角面板。

5.3.2 对调节反射面后馈源舱接收比模型的建立

反射板的信号接收量的大小与信号垂直界面的投影面积成正比，由于工作抛物面的 300m 口径是确定的，因此接收到的总信号量也是固定的，由于每个反射面的朝向角度不同，因此每个反射面板反射的信号量各不相同，每个反射面板反射的信号量可以根据该三角面板反射的信号与馈源舱重叠的面积进行计算，每个反射面板反射的信号量之和即为总的馈源舱信号接收量。

则有：

$$\eta = \frac{\sum_{a=1}^{1295} S_a}{\pi \times 150^2} \quad (20)$$

η : 馈源舱信号接收比

针对每一个反射面板进行分析求取每一个反射面板反射的信号量在馈源舱上的信号接收量这里涉及到已知入射光线求解平面上的反射光线的模型^[4]。

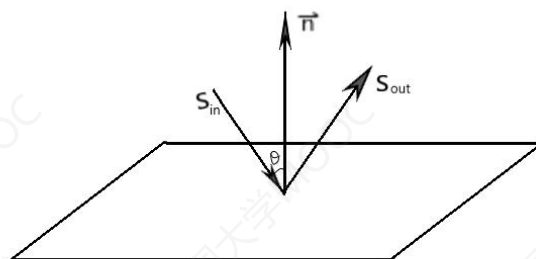


图 13 信号入射反射示意图

由于入射信号从无穷远射过来，因此各信号之间可以看做平行的信号，入射信号向

量 \vec{S}_{in} 的方向即与抛物面的对称轴平行，所以易得：

$$\vec{S}_{in} = (26.3369, 19.6989, 157.0059) \quad (21)$$

其中 $\vec{m} = (A, B, C)$ 是该三角形反射面板的法向量，设第 a 个反射面板的三个顶点即主索节点的坐标分别为：

$$\begin{cases} (x_{a1}, y_{a1}, z_{a1}) \\ (x_{a2}, y_{a2}, z_{a2}) \\ (x_{a3}, y_{a3}, z_{a3}) \end{cases} \xrightarrow{\vec{m}} \begin{cases} A = (y_{a2} - y_{a1}) \times (z_{a3} - z_{a1}) - (z_{a2} - z_{a1}) \times (y_{a3} - y_{a1}) \\ B = (x_{a3} - x_{a1}) \times (z_{a2} - z_{a1}) - (x_{a2} - x_{a1}) \times (z_{a3} - z_{a1}) \\ C = (x_{a2} - x_{a1}) \times (y_{a3} - y_{a1}) - (x_{a3} - x_{a1}) \times (y_{a2} - y_{a1}) \end{cases} \quad (22)$$

由以上两式得到：

$$\vec{S}_{out} = \frac{2\vec{m} \cdot \vec{S}_{in}}{\vec{m}^2} \vec{m} - \vec{S}_{in} = (S_x, S_y, S_z) \quad (23)$$

因此节点对应的平面的反射光信号方程为：

$$\frac{x-x_a}{S_x} = \frac{y-y_a}{S_y} = \frac{z-z_a}{S_z} = t \quad (24)$$

由于馈源舱所在平面的法向量 \vec{S}_{in} 已知，且该向量过点 P，所以易得该馈源舱所在平面的方程为：

$$26.3369(x + 26.3699) + 19.6989(y + 19.6989) + 157.0059(z + 157.0059) = 0 \quad (25)$$

联立反射信号方程和馈源舱所在平面的方程可得每个三角形平面 3 个顶点上的入射信号反射到馈源舱所在平面上的三个交点。

最后求 3 个交点连线构成的三角形和馈源舱的重叠面积 S_a ，即为馈源舱接收到的一个三角形平面的反射信号。

5.3.3 对基准球面馈源舱接收比模型的建立

最后对于“与基准反射球面的接收比”，我们理解为馈源舱有效区域接收到的反射信号与 500m 口径内反射面的反射信号之比，即将上述的接收比的公式中 150 改为 250，同时需要考虑整个基准球面 2226 个主索节点及其构成的 4300 个平面，得到新的馈源舱信号接收比即：

$$\eta_1 = \frac{\sum_{a=1}^{4300} S_a}{\pi \times 250^2} \quad (26)$$

相比于上述模型，只需更新焦点 P 的坐标为 (0, 0, -160.4316)，以及相应的入射信号方向向量 $\vec{S}_{in} = (0, 0, 160.4316)$ 从而得到如下方程：

$$\begin{cases} \frac{x-x_a}{S_x} = \frac{y-y_a}{S_y} = \frac{z-z_a}{S_z} = t \\ z = -160.4316 \end{cases} \quad (27)$$

5.3.4 模型的求解

由 matlab 求解上述模型，得到馈源舱所在平面与每个三角形平面的反射信号交点为 (x_k, y_k, z_k) , $k = 1, 2, 3$ 。然后需要求解每个反射后得到的新三角形和馈源舱接收圆面的重叠面积，即为馈源舱接收到的信号。

由于三维坐标下任意三角形和圆形的相交面积计算有些困难。对此，我们采用贪婪策略进行求解。

观察到反射后得到的交点确定的三角形面近似满足等边三角形，我们考虑将三角形面转化为圆面，从而将三角形和圆形的相交面积转化为圆和圆之间的重叠面积进行求解。

Step1: 选取三角形的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) ，作为转化后圆面的圆心。

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 x_k, \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 y_k, \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 z_k \right) \quad (28)$$

Step2: 以半径为三角形面 3 个顶点距离平均值的二分之一，即

$$r = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} (d_{12} + d_{13} + d_{23}) \quad (29)$$

其中，

$$d_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (30)$$

表示三角形顶点 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 之间的距离， d_{13} 、 d_{23} 同理。

Step3: 求两个圆面相交的面积 S

①如果圆心距大于两圆半径之和，即

$$D > r_1 + r_2 \quad (31)$$

其中 D 表示圆心距， r_1 和 r_2 分别表示两圆半径。

则

$$S = 0 \quad (32)$$

②如果圆心距小于两圆半径之差，即

$$D < |r_1 - r_2| \quad (33)$$

则

$$S = \pi \times \min(r_1, r_2)^2 \quad (34)$$

③如果圆心距介于两圆半径之差和两圆半径之和之间，即

$$|r_1 - r_2| < D < r_1 + r_2 \quad (35)$$

则

$$S = 2 * \text{扇形面积} - 2 * \text{三角形面积} \quad (36)$$

具体示意如下图：

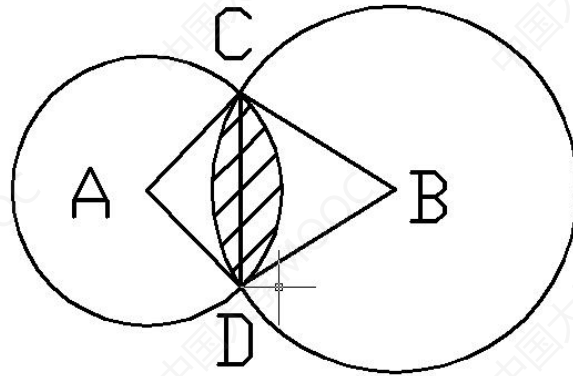


图 14 两圆相交面积求解示意图

最终求得第二问节点调整后馈源舱信号接收比 1.24%，而基准反射球面的接收比为

0.17%。比较后发现将反射平面调整为工作抛物面时接收比得到了大幅提高，因此得出结论：当以抛物面为反射平面时，对天体所发出的信号的接收效果更好。

六、灵敏度分析

在第一题中求解理想抛物面的过程中，在确定当顶点到基准圆弧线的距离 $h=0.3833$ 时为最佳抛物面，此时可以考虑改变焦距比 F 来观察理想抛物面的径向位移波动是否显著，这里重新取 $F=0.455R$ 、 $0.465R$ 、 $0.466R$ 、 0.467 、 $0.477R$ 来观察理想抛物面的径向位移情况：

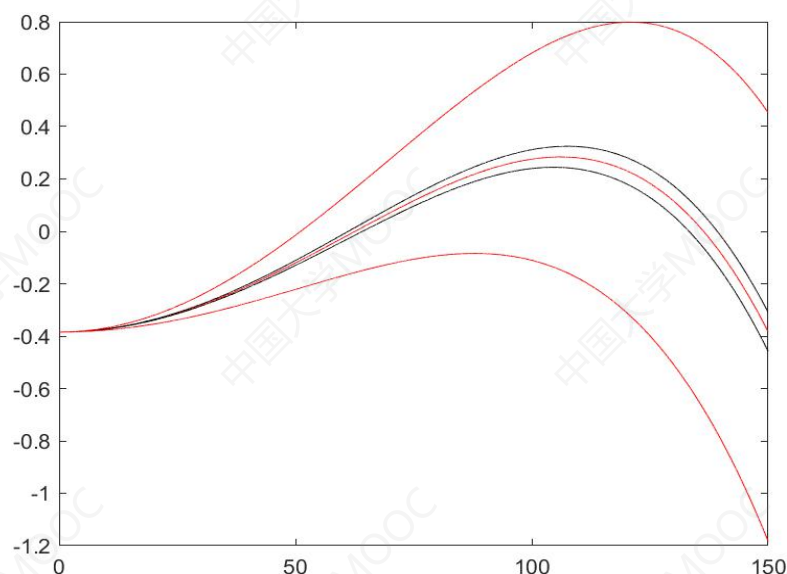


图 15 不同焦距比时节点径向位移

上图所示从上到下依次为 $F=0.455R$ 、 $0.465R$ 、 $0.466R$ 、 0.467 、 $0.477R$ 时理想抛物面的径向位移，由图趋势可知 F 只能在小范围内波动，若 F 波动范围较大则理想抛物面的径向位移波动范围也会增大，可能会造成索网过度松弛或过度拉紧，使其所受应力超过设计值，故在实际情况中不能大幅度的改变焦距比。

七、模型的评价与改进

6.1 模型的评价

6.1.1 优点

1：本题第一问建立了单目标优化模型，结合实际情况在各种约束下对该问题进行求解，得到了最优解，求出了最理想的抛物面，结果较为可靠。

2：本题第二问引入了罗德里格旋转公式，根据旋转轴和旋转角度，通过旋转理想抛物面到第一题中理想抛物面的位置，再代入第一题的抛物面方程即可得到理想抛物面，同时天体 S 的方位发生改变也能快速的重新求解该理想工作抛物面，模型具有普适性。

3：本题第三问建立了入射光线求解平面上的反射光线的模型，通过将接收的信号转化为信号覆盖的面积，有效地解决了接收比的问题。

6.1.2 缺点

1：本文求解理想抛物面时，选择的衡量指标可能不够准确，求得理想抛物面可能会有误差。

2：旋转后抛物面的方程不能直接确定，需要代入第一题中理想抛物面的方程，求解步骤较为繁琐，速度较慢。

6.2 模型的改进^[3]

在确定理想抛物面时，我们是以抛物线上各点到圆弧线上各点的径向距离绝对值之和最小为评价指标，指标可能过于单一，在这里我们再引用其他两个指标，一是以抛物线弧长与圆弧弧长之差最小为评价指标，二是以边缘平滑度即抛物线的边缘和圆弧边缘的导数之差最小为指标，这些指标各有优劣，为了权衡这些指标，再为这三个指标进行加权处理，具体如下：

$$\text{指标一:} \quad \min f = \sum_{i=0}^{150} \left| \sqrt{x_i^2 + \left[\frac{1}{4(F+h)} x_i^2 - (R+h)^2 \right]} - R \right| \quad (37)$$

$$\text{指标二:} \quad \min f_1 = |\hat{l}_a - \hat{l}_b| \quad (38)$$

其中 \hat{l}_a 表示抛物线的弧长， \hat{l}_b 表示基准弧线的弧长。

$$\text{指标三:} \quad \min f_2 = \left| \frac{dl_1}{dx} - \frac{dl_2}{dx} \right| \quad (39)$$

其中 $\frac{dl_1}{dx}$ 表示抛物线边缘的导数， $\frac{dl_2}{dx}$ 表示圆弧线边缘的导数。

再根据具体情况给三个指标分别赋予权重 a , b , c ，则得到新的综合评价指标 N ：

$$N = af + bf_1 + cf_2 \quad (40)$$

再对 h 进行遍历求解，当 N 越小时，抛物面越理想，从而使模型得到更大程度的优化。

八、模型的推广和应用

本文应用了运筹学中最优化的理论以及几何学的知识，运筹学中的最优化理论在工商经济、军事活动等方面都发挥了巨大的作用，它以目标函数最大化或者最小化为最优，帮助人们解决了各种实际问题。运筹学中包含的整数规划、线性规划或者非线性规划在各管理工程中或者在我们实际生活中都发挥着重要的作用，可以说运筹学理论已经渗透到了人类生活的方方面面，在现代化建设中也有着举足轻重的地位，因此具有很强的推广意义。

九、参考文献

- [1] 钱宏亮, 范峰, 等. FAST 反射面支承结构整体索网方案研究[J]. 2005, 38(12):19-23
- [2] 刘锋. 罗德里格斯旋转公式的证明及应用[M]. 湖南工学院. 2020
- [3] 李明辉, 朱丽春. FAST 瞬时抛物面变形策略优化分析[M]. 贵州大学. 2012
- [4] 刘希强, 梁肇, 王黎, 张瑰. 向量法巧解反射光线方程[J]. 高等数学研究. 2017

附录 1 数据预处理

```
clc;
clear;
%主索节点坐标位置
X=xlsread('附件 1.csv','B2:D2227');
n=size(X,1);
x=X(:,1);
y=X(:,2);
z=X(:,3);
r=sqrt(x.*x+y.*y+z.*z);
figure(1)
plot(1:2226,r);
axis([0,2230,300.39,300.41]);
%主索节点对应的促动器下端点（固定）和基准态时上端点（±0.6）坐标位置
Y=xlsread('附件 2.csv','B2:G2227');
x1=Y(:,1);
y1=Y(:,2);
z1=Y(:,3);
r1=sqrt(x1.*x1+y1.*y1+z1.*z1);%下端点
x2=Y(:,4);
y2=Y(:,5);
z2=Y(:,6);
r2=sqrt(x2.*x2+y2.*y2+z2.*z2);%上端点
s=sqrt((x-x2).^2+(y-y2).^2+(z-z2).^2);
figure(2)
%plot3(x,y,z,'-');
d0=sqrt((x(1)-x(2))^2+(y(1)-y(2))^2+(z(1)-z(2))^2);
D=[];
for i=1:n
    for j=i+1:n
        d=sqrt((x(i)-x(j))^2+(y(i)-y(j))^2+(z(i)-z(j))^2);
        if d>10&d<12.5
            D=[D d];
            plot3([x(i),x(j)],[y(i),y(j)],[z(i),z(j)],'-');%基准球面上的节点展示绘图
            hold on
        end
    end
end
Dmax=max(D);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
```


附录 2 问题 1 求解

```
clc;
clear;
R=300.4;
F=0.466*R;
h0=0;
min=100000;
for h=-0.6:0.0001:0.6
    sum=0;
    for x=-150:0.01:150
        y=x^2/(4*(F+h))-(R+h);
        d=abs(sqrt(x^2+y^2)-R);
        if d<=0.6
            flag=1;
            sum=sum+d;
        else
            flag=0;
            break
        end
    end
    if (flag==1)&(sum<min)
        min=sum;
        h0=h;
    end
end
```

附录 3 问题 2 理想抛物面求解

```
clc;
clear;
R=300.4;
F=0.466*R;
h0=0.3845;
a=36.795;
b=78.169;
%plot3([0,-100],[0,-100*tand(a)],[0,-100/cosd(a)*tand(b)],'r');
syms x y z;
eq1=y==x*tand(a);
eq2=z==x*tand(b)/cosd(a);
eq3=x^2+y^2+z^2==(R+h0)^2;
[x,y,z]=solve(eq1,eq2,eq3,x,y,z);
x0=double(x(1));
y0=double(y(1));
```

```

z0=double(z(1));

u=-150:5:150;
v=-150:5:150;
[x,y]=meshgrid(u,v);
z=(x.^2+y.^2)./(4*(F+h0))-(R+h0);
zo=-sqrt(300.4^2-150^2)*ones(61,61);
meshc(x,y,z);%旋转前抛物面
hold on
meshc(x,y,zo);%画 300 口径圆面
theta=(90-b);
k=[-tand(a)/sqrt(1+(tand(a))^2),1/sqrt(1+(tand(a))^2),0];
% d=[x0 y0 z0];
% s=rot(d,k,theta);
v1=x*cosd(theta)+(k(2)*z-k(3)*y)*sind(theta)+k(1)*(k(1)*x+k(2)*y+k(3)*z)*(1-cosd(theta));
v2=y*cosd(theta)+(k(3)*x-k(1)*z)*sind(theta)+k(2)*(k(1)*x+k(2)*y+k(3)*z)*(1-cosd(theta));
v3=z*cosd(theta)+(k(1)*y-k(2)*x)*sind(theta)+k(3)*(k(1)*x+k(2)*y+k(3)*z)*(1-cosd(theta));
mesh(v1,v2,v3);%旋转后抛物面
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');

```

附录 4 问题 2 工作抛物面求解

```

clc;
clear;
R=300.4;
F=0.466*R;
h0=0.3845;
%主索节点坐标位置
[X,Y]=xlsread('附件 1.csv','A2:D2227');
x=X(:,1);
y=X(:,2);
z=X(:,3);
Y=string(Y);
%% 求给定范围内节点
n=0;
jie=[];name=[];
k=[-49.3832,-36.9366,-294.3948];
q=0;
for i=1:2226
    if dis([x(i) y(i) z(i)],k)<=150+q
        n=n+1;
        jie=[jie;x(i) y(i) z(i)];
    end
end

```

```

        name=[name;Y(i)];
    end
end
%% 求节点对应的理想抛物面交点
jiao=[];
for i=1:n
    x0=jie(i,1);
    y0=jie(i,2);
    z0=jie(i,3);
    a=0.9731*x0^2+0.985*y0^2+0.0421*z0^2-0.0403*x0*y0-0.3214*x0*z0-0.2404*y0*z0;
    b=-4*(F+h0)*(0.1642*x0+0.1228*y0+0.9788*z0);
    c=-4*(F+h0)*(R+h0);
    t=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/2/a;
    xo=x0*t;
    yo=y0*t;
    zo=z0*t;
    jiao=[jiao;x0 yo zo];
end
% jd=[];
% for i=1:size(jiao,1)
%     if dis([jiao(i,1),jiao(i,2),jiao(i,3)],k)<=150
%         jd=[jd;jiao(i,1),jiao(i,2),jiao(i,3)];
%     end
% end
%% 交点到节点距离（伸缩量）
D=[];
for i=1:n
    if (jiao(i,1)^2+jiao(i,2)^2+jiao(i,3)^2)<R^2
        D=[D;sqrt((jie(i,1)-jiao(i,1))^2+(jie(i,2)-jiao(i,2))^2+(jie(i,3)-jiao(i,3))^2)];
    else
        D=[D;-sqrt((jie(i,1)-jiao(i,1))^2+(jie(i,2)-jiao(i,2))^2+(jie(i,3)-jiao(i,3))^2)];
    end
end
%% 计算节点邻接矩阵 初始距离
lj=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=i+1:n
        s=sqrt((jie(i,1)-jie(j,1))^2+(jie(i,2)-jie(j,2))^2+(jie(i,3)-jie(j,3))^2);
        if s>10&s<12.5
            lj(i,j)=s;
            lj(j,i)=s;
        end
    end
    % plot3([jie(i,1),jie(j,1)], [jie(i,2),jie(j,2)], [jie(i,3),jie(j,3)], '-');
    % hold on
end

```

```

end
end
%% 求节点对应的最优工作抛物面
min=100000;
for h=-0.6:0.0001:0.6
    sum=0;
    for i=1:n%遍历每个节点对应的工作抛物面上的交点
        x0=jie(i,1);
        y0=jie(i,2);
        z0=jie(i,3);
        a=0.9731*x0^2+0.985*y0^2+0.0421*z0^2-0.0403*x0*y0-0.3214*x0*z0-0.2404*y0*z0;
        b=-4*(F+h)*(0.1642*x0+0.1228*y0+0.9788*z0);
        c=-4*(F+h)*(R+h);
        t=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/2/a;
        xi=x0*t;
        yi=y0*t;
        zi=z0*t;%第 i 个交点坐标
        % 0.07 约束
        for j=i+1:n
            if lj(i,j)>1
                x1=jie(j,1);
                y1=jie(j,2);
                z1=jie(j,3);
                a=0.9731*x1^2+0.985*y1^2+0.0421*z1^2-0.0403*x1*y1-0.3214*x1*z1-0.2404*y1*z1;
                b=-4*(F+h)*(0.1642*x1+0.1228*y1+0.9788*z1);
                c=-4*(F+h)*(R+h);
                t=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/2/a;
                xj=x1*t;
                yj=y1*t;
                zj=z1*t;%第 j 个交点坐标
                if abs(sqrt((xi-xj)^2+(yi-yj)^2+(zi-zj)^2)-lj(i,j))/lj(i,j)>0.007
                    flag=0;
                    break
                else
                    flag=1;
                end
            end
        end
        end
    end
    if flag==0
        f=0;
        break
    end
    % 0.6 约束

```

```

        if abs(sqrt(xi^2+yi^2+zi^2)-R)<=0.6
            f=1;
            d=sqrt((xi-jiao(i,1))^2+(yi-jiao(i,2))^2+(zi-jiao(i,3))^2);
            sum=sum+d;
        else
            f=0;
            break
        end
    end
    if (f==1)&(sum<min)
        min=sum;
        ho=h;
    end
end
end

```

附录 5 问题 3 求解

```

clc;
clear;
%主索节点坐标位置
[A,B]=xlsread('附件 3.csv','A2:C4301');
B=string(B);
[X,Y]=xlsread('附件 1.csv','A2:D2227');
x=X(:,1);
y=X(:,2);
z=X(:,3);
Y=string(Y);
%% 求给定范围内节点
n=0;
jie=[];name=[];
k=[-49.3832,-36.9366,-294.3948];
K=[-26.3369,-19.6989,-157.0059];
q=0;
for i=1:2226
    if dis([x(i) y(i) z(i)],k)<=150+q
        n=n+1;
        jie=[jie;x(i) y(i) z(i)];
        name=[name;Y(i)];
    end
end
%% 求节点对应的理想抛物面交点
R=300.4;
F=0.466*R;
h0=0.3845;

```



```

jiao=[];
for i=1:n
    x0=jie(i,1);
    y0=jie(i,2);
    z0=jie(i,3);
    a=0.9731*x0^2+0.985*y0^2+0.0421*z0^2-0.0403*x0*y0-0.3214*x0*z0-0.2404*y0*z0;
    b=-4*(F+h0)*(0.1642*x0+0.1228*y0+0.9788*z0);
    c=-4*(F+h0)*(R+h0);
    t=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/2/a;
    xo=x0*t;
    yo=y0*t;
    zo=z0*t;
    jiao=[jiao;x0 yo zo];
end
%% 求给定范围内三角形平面
N=[];M=[];
for i=1:4300
    for a=1:n
        if B(i,1)==name(a)
            for b=1:n
                if B(i,2)==name(b)
                    for c=1:n
                        if B(i,3)==name(c)
                            N=[N;B(i,1),B(i,2),B(i,3)];
                            M=[M;a,b,c];%对应第 a, b, c 个节点
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
%% 求每个三角面 3 个顶点坐标和相应的法向量
mian=[];
fxl=[];
for i=1:size(M,1)
    a=M(i,1);
    b=M(i,2);
    c=M(i,3);
    x1=[jiao(a,1),jiao(a,2),jiao(a,3)];
    x2=[jiao(b,1),jiao(b,2),jiao(b,3)];
    x3=[jiao(c,1),jiao(c,2),jiao(c,3)];
    mian=[mian;x1,x2,x3];%每个面上对应三个顶点坐标
    A=(x2(2)-x1(2))*(x3(3)-x1(3))-(x2(3)-x1(3))*(x3(2)-x1(2));

```

```

B=(x3(1)-x1(1))*(x2(3)-x1(3))-(x2(1)-x1(1))*(x3(3)-x1(3));
C=(x2(1)-x1(1))*(x3(2)-x1(2))-(x3(1)-x1(1))*(x2(2)-x1(2));
fxl=[fxl;-A,-B,-C];%每个面法向量
end
%% 求和馈源舱圆面的交点坐标
jd=[];
for i=1:size(M,1)
    JD=[];
    for j=1:3
        s=fan(-k,[fxl(i,1),fxl(i,2),fxl(i,3)]);%反射信号方向向量
        xp=mian(i,j*3-2);
        yp=mian(i,j*3-1);
        zp=mian(i,j*3);

        t=(-26.3369*(xp+26.3369)-19.6989*(yp+19.6989)-157.0059*(zp+157.0059))/(26.3369*s(1)+19.6989*s(2)
        +157.0059*s(3));
        Xp=s(1)*t+xp;
        Yp=s(2)*t+yp;
        Zp=s(3)*t+zp;
        JD=[JD Xp Yp Zp];
    end
    jd=[jd;JD];
end
%% 每个三角面反射后的光线和馈源舱平面的交点作图
plot3(K(1),K(2),K(3),'r*');
hold on
for i=1:size(M,1)
    plot3([jd(i,1),jd(i,4)],[jd(i,2),jd(i,5)],[jd(i,3),jd(i,6)],'b-');
    hold on
    plot3([jd(i,1),jd(i,7)],[jd(i,2),jd(i,8)],[jd(i,3),jd(i,9)],'b-');
    hold on
    plot3([jd(i,7),jd(i,4)],[jd(i,8),jd(i,5)],[jd(i,9),jd(i,6)],'b-');
    hold on
end
%% 三角形中心坐标和等价圆半径
zd=[];
r=[];
for i=1:size(M,1)
    xz=(jd(i,1)+jd(i,4)+jd(i,7))/3;
    yz=(jd(i,2)+jd(i,5)+jd(i,8))/3;
    zz=(jd(i,3)+jd(i,6)+jd(i,9))/3;
    zd=[zd;xz,yz,zz];

    r=[r;(sqrt((jd(i,1)-jd(i,4))^2+(jd(i,2)-jd(i,5))^2+(jd(i,3)-jd(i,6))^2)+sqrt((jd(i,1)-jd(i,7))^2+(jd(i,2)-jd(i,8))^2

```

```

+(jd(i,3)-jd(i,9))^2)+sqrt((jd(i,7)-jd(i,4))^2+(jd(i,8)-jd(i,5))^2+(jd(i,9)-jd(i,6))^2))/3];
end
%% 重叠面积求和
sum=0;
for i=1:size(M,1)
    S=yuan(K,0.5,[zd(i,1),zd(i,2),zd(i,3)],sqrt(3)*r(i)/2);
    sum=sum+S;
end

```