第四章 数学规划模型

实际问题中的优化模型

$$\min(\text{或}\max)\ \ z=f(x),\ \ x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\text{s.t.}\ \ g_i(x)\le 0,\ \ i=1,2,\cdots,m$$

x~决策变量　　$f(x)$~目标函数　　$g_i(x)\le 0$~约束条件

多元函数条件极值

决策变量个数n和约束条件个数m较大

最优解在可行域的边界上取得

数学规划

线性规划

非线性规划

整数规划

重点在模型的建立和结果的分析

第四章 数学规划模型

4.1 钢管和易拉罐下料

原料下料问题

生产中通过切割、剪裁、冲压等手段，将原材料加工成规定大小的成材.

优化问题：按照工艺要求，确定下料方案，使所用材料最省，或利润最大.

例1 钢管下料

客户需求

原料钢管:每根19m

50根4m

20根6m

15根8m

问题1. 如何下料最节省 ?　　节省的标准是什么?

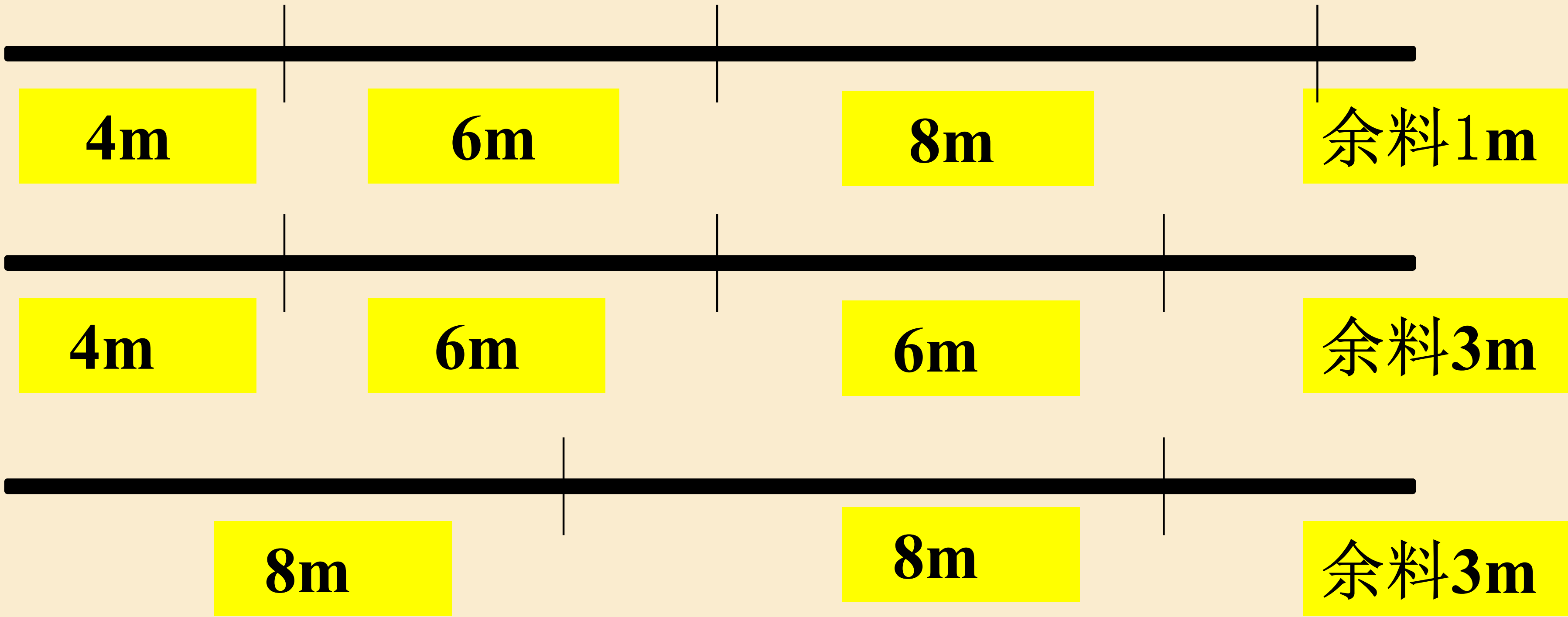
问题2. 客户增加需求:　　10根5m

由于采用不同切割模式太多, 会增加生产和管理成本, 规定切割模式不能超过3种. 如何下料最节省?

钢管下料

切割模式

按照客户需要在一根原料钢管上安排切割的一种组合, 如:



合理切割模式的余料应小于客户需要钢管的最小尺寸.

钢管下料问题1

合理切割模式

模式	4m钢管根数	6m钢管根数	8m钢管根数	余料(m)
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3

为满足客户需要，按照哪些种合理模式切割，每种模式切割多少根原料钢管，最为节省？

节省的两种标准

1. 原料钢管剩余总余量最小.
2. 所用原料钢管总根数最少.

决策变量 x_i~按第i种模式切割的原料钢管根数(i=1,…,7)

目标1（总余量） $\min Z_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7$

模式	4m根数	6m根数	8m根数	余料
1	4	0	0	3m
2	3	1	0	1m
3	2	0	1	3m
4	1	2	0	3m
5	1	1	1	1m
6	0	3	0	1m
7	0	0	2	3m
需求	50	20	15	

约束　满足需求

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

整数约束： x_i为整数

最优解：x_2=12, x_5=15,
其余为0；

最优值：27.

按模式2切割12根, 按模式5切割15根, 共27根, 余料27m.

钢管下料问题1

目标2（总根数） $\min Z_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

约束条件不变

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

x_i 为整数

最优解：x_2=15, x_5=5, x_7=5, 其余为0；最优值：25.

按模式2切割15根，按模式5切割5根，按模式7切割5根，共25根，余料35m .

与目标1的结果“共切割**27根，余料27m**” 相比.

目标2切割减少了2根，但余料增加8m, 为什么？

钢管下料问题1　原料钢管:每根19m

目标1(总余量) ~ x_2=12, x_5=15, 共27根, 余27m

目标2(总根数) ~ x_2=15, x_5=5, x_7=5, 共25根, 余35m

模式	4m根数	6m根数	8m根数	余料(m)
2	3	1	0	1
5	1	1	1	1
7	0	0	2	3

	4m根数	6m根数	8m根数
需求	50	20	15
目标1	51	27	15
目标2	50	20	15

按照目标1比需求多生产1根4m、7根6m, 共46m, 正好等于2根原料(38m)再加8m.

若多生产的也视为余料, 则总余量最小等价于总根数最少.

若余料没有用处, 通常以总根数最少为目标.

钢管下料问题2

增加一种需求：10根5m；切割模式不超过3种.

现有4种需求：50根4m，10根5m，20根6m, 15根8m，用枚举法确定合理切割模式，过于复杂.

对大规模问题，用模型的约束条件界定合理模式.

决策变量

x_i~按第i种模式切割的原料钢管根数(i=1,2,3).

$r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$~第$i$种切割模式下，每根原料钢管生产4m、5m、6m和8m长的钢管的数量.

钢管下料问题2

目标函数（总根数） $\min\ x_1+x_2+x_3$

约束条件

满足需求

$$r_{11}x_1+r_{12}x_2+r_{13}x_3\ge 50$$
$$r_{21}x_1+r_{22}x_2+r_{23}x_3\ge 10$$
$$r_{31}x_1+r_{32}x_2+r_{33}x_3\ge 20$$
$$r_{41}x_1+r_{42}x_2+r_{43}x_3\ge 15$$

模式合理：每根余料不超过**3m**

$$16\le 4r_{11}+5r_{21}+6r_{31}+8r_{41}\le 19$$
$$16\le 4r_{12}+5r_{22}+6r_{32}+8r_{42}\le 19$$
$$16\le 4r_{13}+5r_{23}+6r_{33}+8r_{43}\le 19$$

整数约束： $x_i, r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$ （i=1,2,3）为整数

整数非线性规划模型

钢管下料问题2　增加约束，缩小可行域，便于求解.

需求：50根4m，10根5m，20根6m，15根8m

每根原料钢管长**19m**

原料钢管总根数下界：
$$\left\lceil \frac{4\times 50+5\times 10+6\times 20+8\times 15}{19} \right\rceil = 26$$

特殊生产计划：对每根原料钢管

模式1：切割成**4**根**4m**钢管，需**13**根；

模式2：切割成**1**根**5m**和**2**根**6m**钢管，需**10**根；

模式3：切割成**2**根**8m**钢管，需**8**根.

原料钢管总根数上界：**13+10+8=31**

$$26 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 31$$

模式排列顺序可任定

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3$$

LINGO求解整数非线性规划模型

Local optimal solution found.

Objective value: 28.00000

Variable	Value	Reduced Cost
X(1)	10.00000	1.000000
X(2)	10.00000	1.000000
X(3)	8.000000	1.000000
R(1, 1)	3.000000	0.000000
R(1, 2)	2.000000	0.000000
R(1, 3)	0.000000	0.000000
R(2, 1)	0.000000	0.000000
R(2, 2)	1.000000	0.000000
R(2, 3)	0.000000	0.000000
R(3, 1)	1.000000	0.000000
R(3, 2)	1.000000	0.000000
R(3, 3)	0.000000	0.000000
R(4, 1)	0.000000	0.000000
R(4, 2)	0.000000	0.000000
R(4, 3)	2.000000	0.000000

也是全局最优解

模式1：每根原料钢管切割成3根4m和1根6m钢管, 共10根;

模式2：每根原料钢管切割成2根4m、1根5m和1根6m钢管，共10根;

模式3：每根原料钢管切割成2根8m钢管，共8根.

原料钢管总根数为28根.

4.2 投资的收益和风险

(选自1998年全国大学生数学建模竞赛A题)

问题

资产 S_i	收益率 r_i(%)	风险损失率 q_i(%)	交易费率 p_i(%)	阈值 u_i(元)
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40
存款S_0	5	0	0	0

n=4种资产

给定资金M，设计投资组合方案

另一组数据n=15

使净收益尽可能大，而总体风险(最大者)尽可能小

模型

决策变量 $x=(x_0, x_1,\ldots, x_n)$ ~投资每种资产的金额

目标函数 $V(x)$ ~投资的净收益，$Q(x)$ ~风险

$$\min\ (Q(x), -V(x))$$

约束条件

购买$S_i(i=1,\ldots,n)$的交易费

$$c_i(x_i)=\begin{cases} 0, & x_i=0 \\ p_i u_i, & 0<x_i<u_i \\ p_i x_i, & x_i \ge u_i \end{cases}$$

购买$S_i(i=0,\ldots,n)$的净收益

$$V_i(x_i)=r_i x_i - c_i(x_i)$$

$$V(x)=\sum_{i=0}^{n} V_i(x_i)$$

$c_0(x_0)=0$

模型

决策变量 $\boldsymbol{x}=(x_0, x_1,\ldots, x_n)$ ~投资每种资产的金额

目标函数 $V(\boldsymbol{x})$ ~投资的净收益，$Q(\boldsymbol{x})$ ~风险

$$\min \quad (Q(x), -V(x))$$

约束条件 风险损失（最大损失作为指标）

$$Q(x)=\max_{0\le i\le n} q_i x_i$$

资金平衡 $I(x)=\sum_{i=0}^{n}(x_i+c_i(x_i))=M$

$$\boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{0}$$

多目标规划

求解 LINGO软件实现

加权法

$$\min \ \ wQ(x)-(1-w)V(x))$$
$$s.t. \qquad I(x)=M,$$
$$x \geq 0.$$

M=1万元