插值与拟合

§1 曲线拟合

实例：温度曲线问题

气象部门观测到一天某些时刻的温度变化数据为：

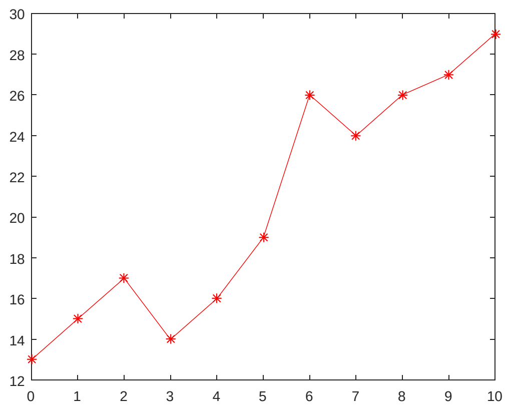
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	13	15	17	14	16	19	26	24	26	27	29

试描绘出温度变化曲线。

t=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];

T=[13 15 17 14 16 19 26 24 26 27 29];

plot(t,T,'-r*');



曲线拟合就是计算出两组数据之间的一种**函数关系**，由此可描绘其变化曲线及估计非采集数据对应的变量信息。

曲线拟合有多种方式：

1. 线性拟合函数：regress()

调用格式： **b=regress(y,X)**

[b,bint,r,rint,stats]= regress(y,X)

[b,bint,r,rint,stats]= regress(y,X,alpha)

说明：b=regress(y,X)返回 X 处 y 的最小二乘拟合值。一元函数采用最小二乘法对给定数据进行多项式曲线拟合，最后给出拟合的多项式系数。

该函数求解线性模型：

$$y=X\beta+\varepsilon$$

β 是 p×1 的参数向量；ε 是服从标准正态分布的随机干扰的 n×1 的向量；y 为 n×1 的向量；X 为 n×p 矩阵。

bint 返回 β 的 95%的置信区间。r 中为形状残差，rint 中返回每一个残差的 95%置信区间。Stats 向量包含 R^2 统计量、回归的 F 值和 p 值。

例 1：设 y 的值为给定的 x 的线性函数加服从标准正态分布的随机干扰值得到。即 $y=10+x+\varepsilon$ ；求线性拟合方程系数。

程序：

x=[ones(10,1) (1:10)']

y=x*[10;1]+normrnd(0,0.1,10,1)
[b,bint]=regress(y,x,0.05)

结果：

```
x =
     1     1
     1     2
     1     3
     1     4
     1     5
     1     6
     1     7
     1     8
     1     9
     1    10
y =
   10.9567
   11.8334
   13.0125
   14.0288
   14.8854
   16.1191
   17.1189
   17.9962
   19.0327
   20.0175
b =
    9.9213
    1.0143
bint =
    9.7889   10.0537
    0.9930    1.0357
```

即回归方程为：y=9.9213+1.0143x

2. 多项式曲线拟合函数：polyfit( )

调用格式： **p=polyfit(x,y,n)**

[p,s]= polyfit(x,y,n)

说明：x,y 为数据点，n 为多项式阶数，返回 p 为幂次从高到低的多项式系数向量 p。矩阵 s 用于生成预测值的误差估计。(见下一函数 polyval)

例 2：由离散数据

x	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
y	.3	.5	1	1.4	1.6	1.9	.6	.4	.8	1.5	2

拟合出多项式。

程序：

```
x=0:.1:1;
y=[.3 .5 1 1.4 1.6 1.9 .6 .4 .8 1.5 2]
n=3;
p=polyfit(x,y,n)
xi=linspace(0,1,100);
z=polyval(p,xi); %多项式求值
plot(x,y,'-ob',xi,z,'k:')
legend('原始数据','3 阶曲线')
```

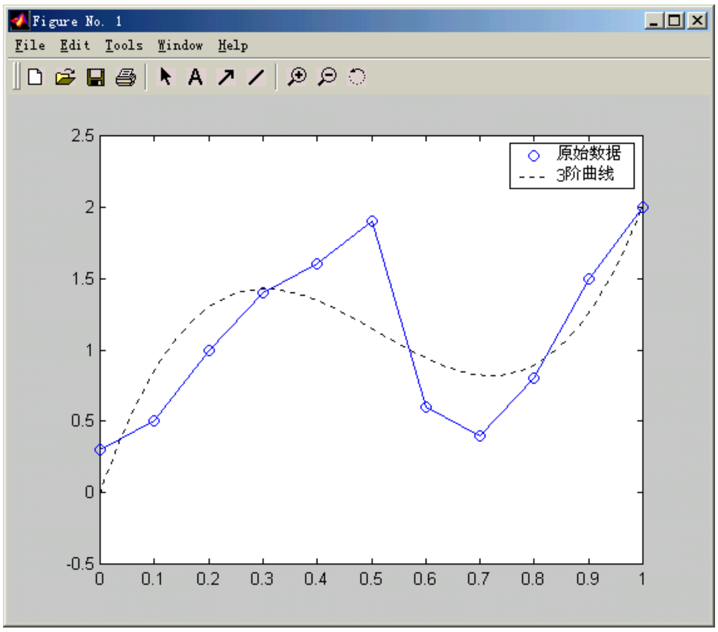
结果：

p =

16.7832 -25.7459 10.9802 -0.0035

多项式为：$16.7832x^3-25.7459x^2+10.9802x-0.0035$

曲线拟合图形：



也可由函数给出数据。

例 3：x=1:20,y=x+3*sin(x)

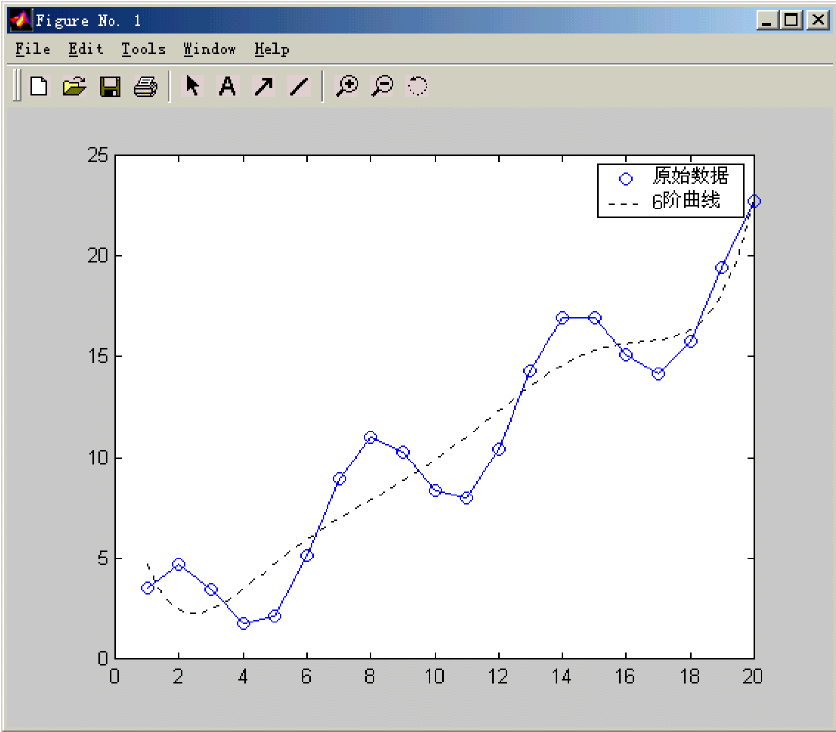
程序：

```
x=1:20;
y=x+3*sin(x);
p=polyfit(x,y,6)
xi=linspace(1,20,100);
z=polyval(p,xi); %多项式求值函数
plot(x,y,'-ob',xi,z,'k:')
legend('原始数据','6 阶曲线')
```

结果：

p =

0.0000 -0.0021 0.0505 -0.5971 3.6472 -9.7295 11.3304



再用 10 阶多项式拟合

程序：

```
x=1:20;
y=x+3*sin(x);
p=polyfit(x,y,10)
xi=linspace(1,20,100);
z=polyval(p,xi);
plot(x,y,'o',xi,z,'k:',x,y,'b')
legend('原始数据','10 阶多项式')
```

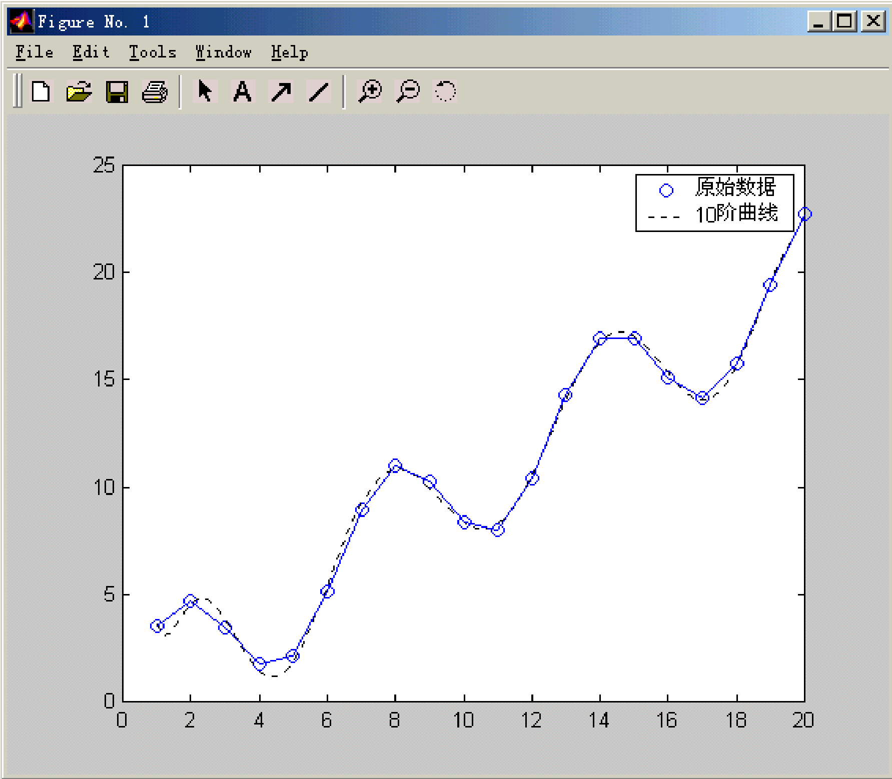
结果：p =

Columns 1 through 7

0.0000 -0.0000 0.0004 -0.0114 0.1814 -1.8065 11.2360

Columns 8 through 11

-42.0861 88.5907 -92.8155 40.2671



可用不同阶的多项式来拟合数据，但也不是阶数越高拟合的越好。

3. 多项式曲线求值函数：polyval( )

调用格式： **y=polyval(p,x)**
[y,DELTA]=polyval(p,x,s)

说明：y=polyval(p,x)为返回对应自变量 x 在给定系数 P 的多项式的值。

[y,DELTA]=polyval(p,x,s) 使用 polyfit 函数的选项输出 s 得出误差估计 Y±DELTA。它假设 polyfit 函数数据输入的误差是独立正态的，并且方差为常数。则 Y±DELTA 将至少包含 50%的预测值。

4. 稳健回归函数：robust( )

稳健回归是指此回归方法相对于其他回归方法而言，受异常值的影响较小。

调用格式： **b=robustfit(x,y)**
[b,stats]=robustfit(x,y)
[b,stats]=robustfit(x,y,'wfun',tune,'const')

说明：b 返回系数估计向量；stats 返回各种参数估计；'wfun'指定一个加权函数；tune 为调协常数；'const'的值为'on'(默认值)时添加一个常数项；为'off '时忽略常数项。

例 5: 演示一个异常数据点如何影响最小二乘拟合值与稳健拟合。首先利用函数 y=10-2x 加上一些随机干扰的项生成数据集，然后改变一个 y 的值形成异常值。调用不同的拟合函数，通过图形观查影响程度。

程序：

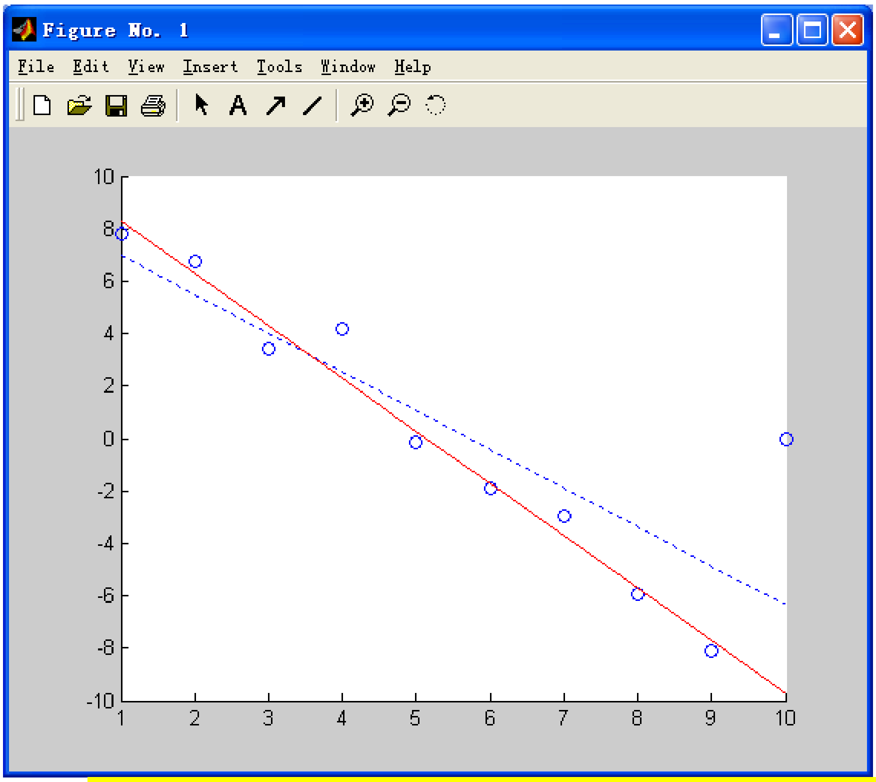
```
x=(1:10)';
y=10-2*x+randn(10,1);
y(10)=0;
bls=regress(y,[ones(10,1) x]) %线性拟合
brob=robustfit(x,y) %稳健拟合
scatter(x,y)
hold on
plot(x,bls(1)+bls(2)*x,':')
plot(x,brob(1)+brob(2)*x,'r')
```

结果 ： bls =

8.4452
-1.4784

brob =

10.2934
-2.0006



分析：稳健拟合(实线)对数据的拟合程度好些，忽略了异常值。最小二乘拟合(点线)则受到异常值的影响，向异常值偏移。

5. 自定义函数拟合

对于给定的数据，根据经验拟合为带有待定常数的自定义函数。

所用函数：nlinfit( )

调用格式： **[beta,r,J]=nlinfit(X,y,’fun’,beta0)**

说明：beta 返回函数’fun’中的待定常数；r 表示残差；J 表示雅可比矩阵。X,y 为数据；‘fun’自定义函数；beta0 待定常数初值。

例 6：在化工生产中获得的氯气的级分 y 随生产时间 x 下降，假定在 x≥8 时，y 与 x 之间有如下形式的非线性模型：

$$y = a + (0.49 - a)e^{-b(x-8)}$$

现收集了 44 组数据，利用该数据通过拟合确定非线性模型中的待定常数。

x	y	x	y	x	y
8	0.49	16	0.43	28	0.41
8	0.49	18	0.46	28	0.40
10	0.48	18	0.45	30	0.40
10	0.47	20	0.42	30	0.40
10	0.48	20	0.42	30	0.38
10	0.47	20	0.43	32	0.41
12	0.46	20	0.41	32	0.40
12	0.46	22	0.41	34	0.40
12	0.45	22	0.40	36	0.41
12	0.43	24	0.42	36	0.36
14	0.45	24	0.40	38	0.40

14	0.43	24	0.40	38	0.40
14	0.43	26	0.41	40	0.36
16	0.44	26	0.40	42	0.39
16	0.43	26	0.41		

首先定义非线性函数的 m 文件：model.m

```
function yy=model(beta0,x)
  a=beta0(1);
  b=beta0(2);
  yy=a+(0.49-a)*exp(-b*(x-8));
```

程序：

```
x=[8.00 8.00 10.00 10.00 10.00 10.00 12.00 12.00 12.00 14.00 14.00 14.00...
     16.00 16.00 16.00 18.00 18.00 20.00 20.00 20.00 20.00 22.00 22.00 24.00...
     24.00 24.00 26.00 26.00 26.00 28.00 28.00 30.00 30.00 30.00 32.00 32.00...
     34.00 36.00 36.00 38.00 38.00 40.00 42.00]';
y=[0.49 0.49 0.48 0.47 0.48 0.47 0.46 0.46 0.45 0.43 0.45 0.43 0.43 0.44 0.43...
     0.43 0.46 0.42 0.42 0.43 0.41 0.41 0.40 0.42 0.40 0.40 0.41 0.40 0.41 0.41...
     0.40 0.40 0.40 0.38 0.41 0.40 0.40 0.41 0.38 0.40 0.40 0.39 0.39]';
beta0=[0.30 0.02];
betafit = nlinfit(x,y,'model',beta0)
```

结果：betafit =

0.3896

0.1011

即：a=0.3896 ，b=0.1011 拟合函数为：

$$y = 0.3896 + (0.49 - 0.3896)e^{-0.1011(x-8)}$$

§2 插值问题

在应用领域中，由有限个已知数据点，构造一个解析表达式，由此计算数据点之间的函数值，称之为插值。

实例：海底探测问题

某公司用声纳对海底进行测试，在 5×5 海里的坐标点上测得海底深度的值，希望通过这些有限的数据了解更多处的海底情况。并绘出较细致的海底曲面图。

1. 一元插值

一元插值是对一元数据点(x_i,y_i)进行插值。

1．线性插值：由已知数据点连成一条折线，认为相临两个数据点之间的函数值就在这两点之间的连线上。一般来说，数据点数越多，线性插值就越精确。

调用格式：**yi=interp1(x,y,xi,'linear')** %线性插值

zi=interp1(x,y,xi,'spline') %三次样条插值

wi=interp1(x,y,xi,'cubic') %三次多项式插值

说明：yi、zi、wi 为对应 xi 的不同类型的插值。x、y 为已知数据点。

例 1：已知数据：

x	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
y	.3	.5	1	1.4	1.6	1.9	.6	.4	.8	1.5	2

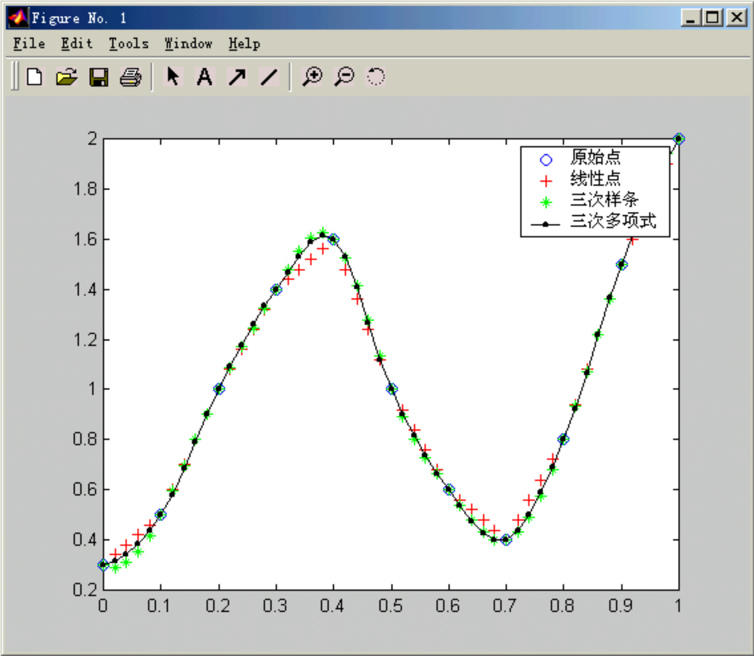
求当 x_i=0.25 时的 y_i 的值。

程序：

```
x=0:.1:1;
y=[.3 .5 1 1.4 1.6 1 .6 .4 .8 1.5 2];
yi0=interp1(x,y,0.025,'linear')
```

```
xi=0:.02:1;
yi=interp1(x,y,xi,'linear');
zi=interp1(x,y,xi,'spline');
wi=interp1(x,y,xi,'cubic');
plot(x,y,'o',xi,yi,'r+',xi,zi,'g*',xi,wi,'k.-')
legend('原始点','线性点','三次样条','三次多项式')
```

结果： yi0 = 0.3500



要得到给定的几个点的对应函数值，可用：

xi =[0.2500 0.3500 0.4500]

yi=interp1(x,y,xi,'spline')

结果：

yi =1.2088 1.5802 1.3454

2. 二元插值

二元插值与一元插值的基本思想一致，对原始数据点(x,y,z)构造函数求出插值点数据(xi,yi,zi)。

1)单调节点插值函数，即 x,y 向量是单调的。

调用格式 1：**zi=interp2(x,y,z,xi,yi,'linear')**　　'liner' 是双线性插值（缺省)

调用格式 2：**zi=interp2(x,y,z,xi,yi,'nearest')**　　'nearest' 是最近邻域插值

调用格式 3：**zi=interp2(x,y,z,xi,yi,'spline')**　　'spline'是三次样条插值

调用格式 4：**zi=interp2(x,y,z,xi,yi,'cubic')**　　'cubic'：双三次插值。

说明：这里 x 和 y 是两个独立的向量，它们必须是单调的。z 是矩阵，是由 x 和 y 确定的点上的值。z 和 x,y 之间的关系是 z(i,:)=f(x,y(i)) z(:,j)=f(x(j),y) 即：当 x 变化时，z 的第 i 行与 y 的第 i 个元素相关，当 y 变化时 z 的第 j 列与 x 的第 j 个元素相关。如果没有对 x,y 赋值，则默认 x=1:n, y=1:m。n 和 m 分别是矩阵 z 的行数和列数。

例 2：已知某处山区地形选点测量坐标数据为：

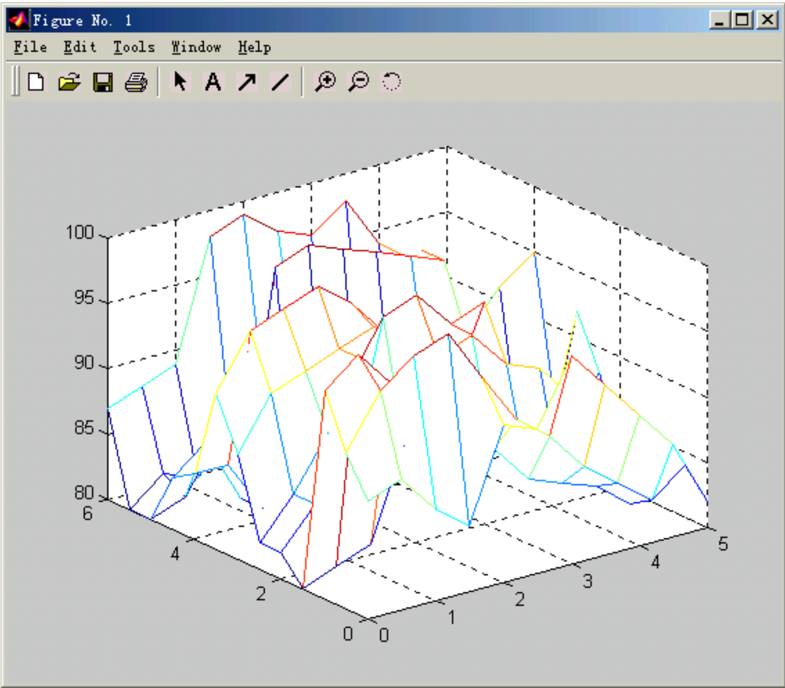
```
x=0  0.5  1  1.5  2  2.5  3  3.5  4  4.5  5
y=0  0.5  1  1.5  2  2.5  3  3.5  4  4.5  5  5.5  6
```

海拔高度数据为：

```
z=89 90 87 85 92 91 96 93 90 87 82
   92 96 98 99 95 91 89 86 84 82 84
   96 98 95 92 90 88 85 84 83 81 85
   80 81 82 89 95 96 93 92 89 86 86
   82 85 87 98 99 96 97 88 85 82 83
```

```
   82 85 89 94 95 93 92 91 86 84 88
   88 92 93 94 95 89 87 86 83 81 92
   92 96 97 98 96 93 95 84 82 81 84
   85 85 81 82 80 80 81 85 90 93 95
   84 86 81 98 99 98 97 96 95 84 87
   80 81 85 82 83 84 87 90 95 86 88
   80 82 81 84 85 86 83 82 81 80 82
   87 88 89 98 99 97 96 98 94 92 87
```

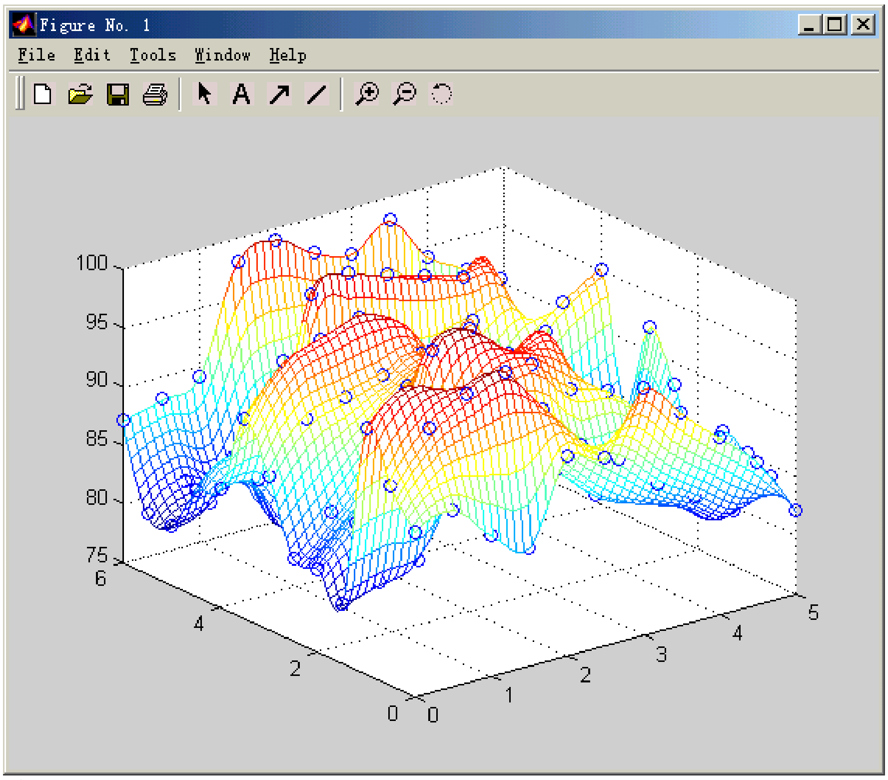
其地貌图为：



对数据插值加密形成地貌图。

程序：

```
x=0:.5:5;
y=0:.5:6;
z=[89 90 87 85 92 91 96 93 90 87 82
   92 96 98 99 95 91 89 86 84 82 84
   96 98 95 92 90 88 85 84 83 81 85
   80 81 82 89 95 96 93 92 89 86 86
   82 85 87 98 99 96 97 88 85 82 83
   82 85 89 94 95 93 92 91 86 84 88
   88 92 93 94 95 89 87 86 83 81 92
   92 96 97 98 96 93 95 84 82 81 84
   85 85 81 82 80 80 81 85 90 93 95
   84 86 81 98 99 98 97 96 95 84 87
   80 81 85 82 83 84 87 90 95 86 88
   80 82 81 84 85 86 83 82 81 80 82
   87 88 89 98 99 97 96 98 94 92 87];
mesh(x,y,z)  %绘原始数据图
xi=linspace(0,5,50);  %加密横坐标数据到 50 个
yi=linspace(0,6,80);  %加密纵坐标数据到 60 个
[xii,yii]=meshgrid(xi,yi);  %生成网格数据
zii=interp2(x,y,z,xii,yii,'cubic');  %插值
mesh(xii,yii,zii)  %加密后的地貌图
hold on     % 保持图形
[xx,yy]=meshgrid(x,y);  %生成网格数据
plot3(xx,yy,z+0.1,'ob')  %原始数据用'O'绘出
```



2)二元非等距插值

调用格式：zi=griddata(x,y,z,xi,yi,'指定插值方法')

插值方法有： linear　　% 线性插值　（默认）

bilinear　　% 双线性插值

cubic　　% 三次插值

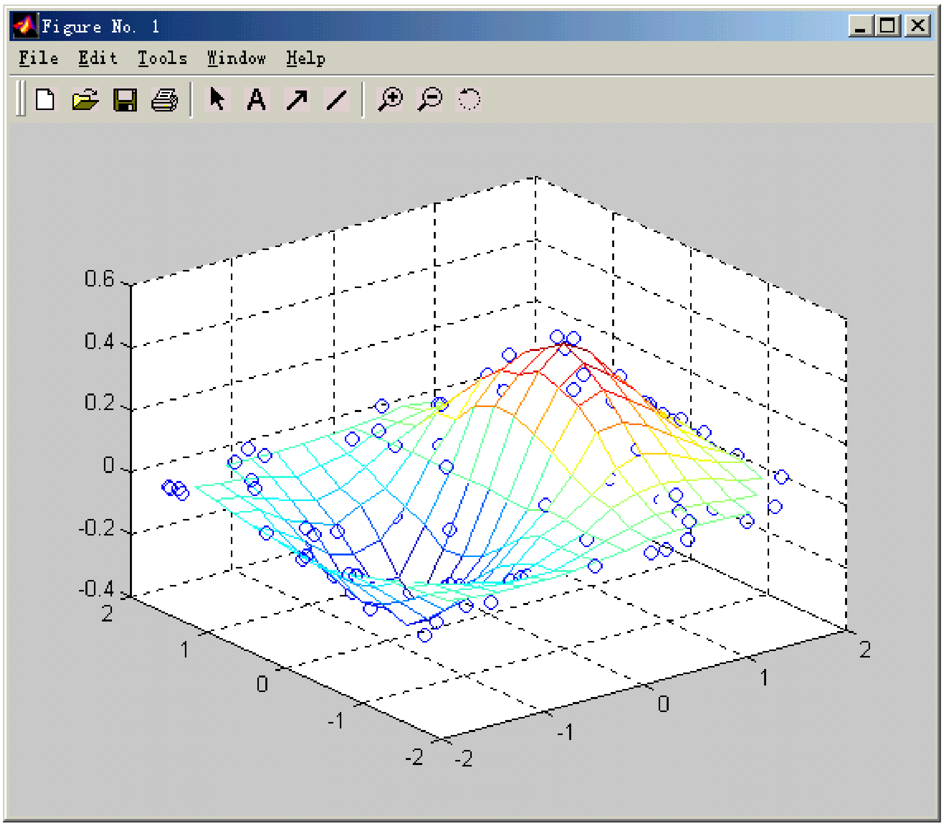
bicubic　　% 双三次插值

nearest　　% 最近邻域插值

例：用随机数据生成地貌图再进行插值

程序：

```
x=rand(100,1)*4-2;
y=rand(100,1)*4-2;
z=x.*exp(-x.^2-y.^2);
ti=-2:.25:2;
[xi,yi]=meshgrid(ti,ti); % 加密数据
zi=griddata(x,y,z,xi,yi);% 线性插值
mesh(xi,yi,zi)
hold on
plot3(x,y,z,'o')
```



该例中使用的数据是随机形成的，故函数 griddata 可以处理无规则的数据。

两者的区别是，**interp2** 的插值数据必须是矩形域，即已知数据点（**x,y)**组成规则的矩阵，或称之为栅格，可使用 **meshgid** 生成。而 **griddata** 函数的已知数据点（**X，Y**）不要求规则排列，特别是对试验中随机没有规律采取的数据进行插值具有很好的效果。