第二章　初等模型

- 研究对象的机理比较简单
- 用静态、线性、确定性模型即可达到建模目的

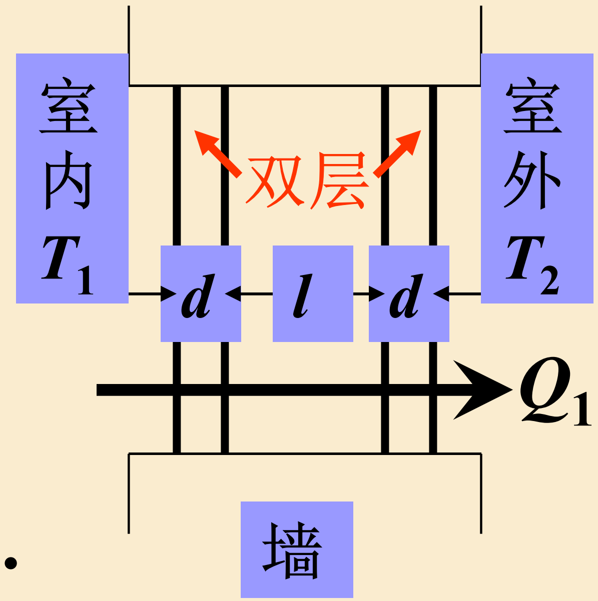
可以利用初等数学方法来构造和求解模型

如果用初等和高等的方法建立的模型，其应用效果差不多，那么初等模型更高明，也更受欢迎.

尽量采用简单的数学工具来建模

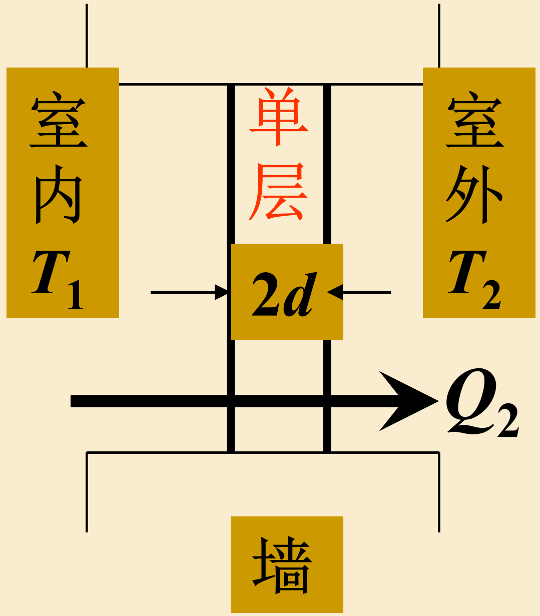
2.1 双层玻璃窗的功效

问题 双层玻璃窗与同样多材料的单层玻璃窗相比，减少多少热量损失.



假设

- 热量传播只有传导，没有对流.
- T_1,T_2不变，热传导过程处于稳态.
- 材料均匀，热传导系数为常数.



建模

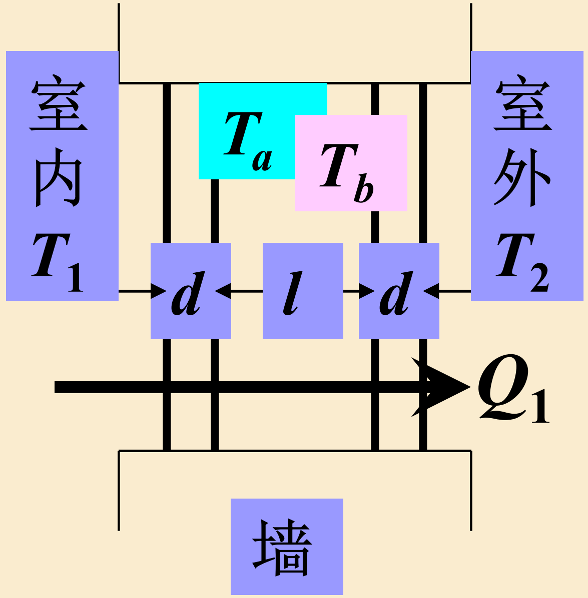
Q ~单位时间单位面积传导的热量

ΔT~温差, d~材料厚度, k~热传导系数

热传导定律

$$Q = k\frac{\Delta T}{d}$$

建模 记双层玻璃窗传导的热量Q_1



T_a~内层玻璃的外侧温度

T_b~外层玻璃的内侧温度

k_1~玻璃的热传导系数

k_2~空气的热传导系数

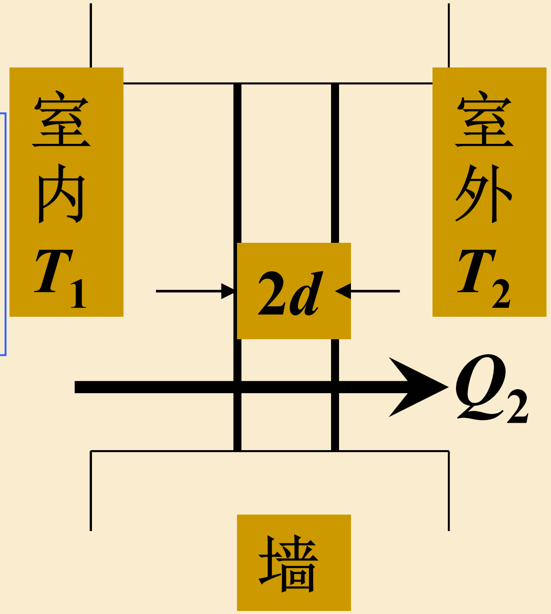
$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d}$$

$$\Rightarrow \quad Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(s+2)}, \quad s = h\frac{k_1}{k_2}, \quad h = \frac{l}{d}$$

建模 记单层玻璃窗传导的热量Q_2

$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d}$$

$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(s+2)}$$



双层与单层窗传导的热量之比

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2}{s+2}, \quad s = h\frac{k_1}{k_2}, \quad h = \frac{l}{d}$$

$$Q_1 < Q_2$$

k_1=4~8 ×10^{-3} (J/cm·s·kw·h)，k_2=2.5×10^{-4}，k_1/k_2=16 ~32

对Q_1比Q_2的减少量

作最保守的估计，

取k_1/k_2=16

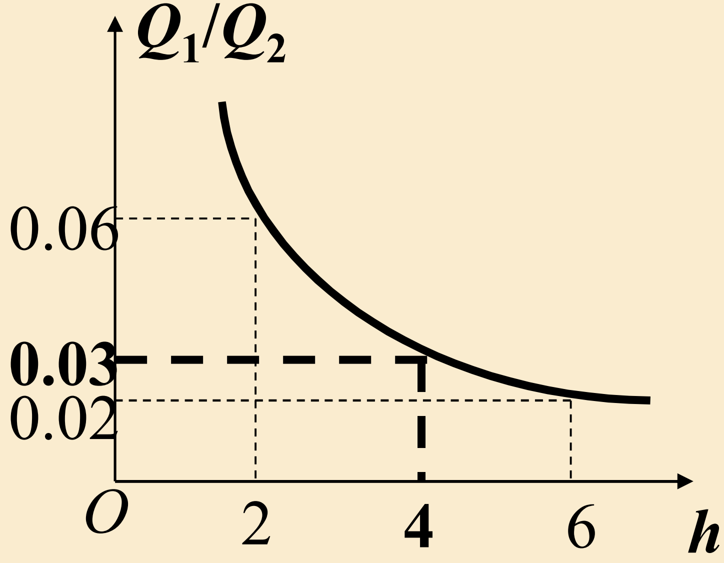
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{8h+1}, \quad h = \frac{l}{d}$$

模型应用

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{1}{8h+1},\quad h=\frac{l}{d}$$

取 $h=l/d=4$，则 $Q_1/Q_2=0.03$

即双层玻璃窗与同样多材料的单层玻璃窗相比，可减少97%的热量损失.



结果分析

Q_1/Q_2所以如此小，是由于层间空气的热传导系数k_2极低，而这要求空气非常干燥、不流通.

房间通过天花板、墙壁、…损失的热量更多.

实际上双层窗的功效不会如此之大!

2.2 估计出租车的总数

一些人喜欢记驶过身旁的汽车号码.

两难境地的决策　　与朋友打赌的“骰子”

共识：出现任何号码汽车的机会相同.

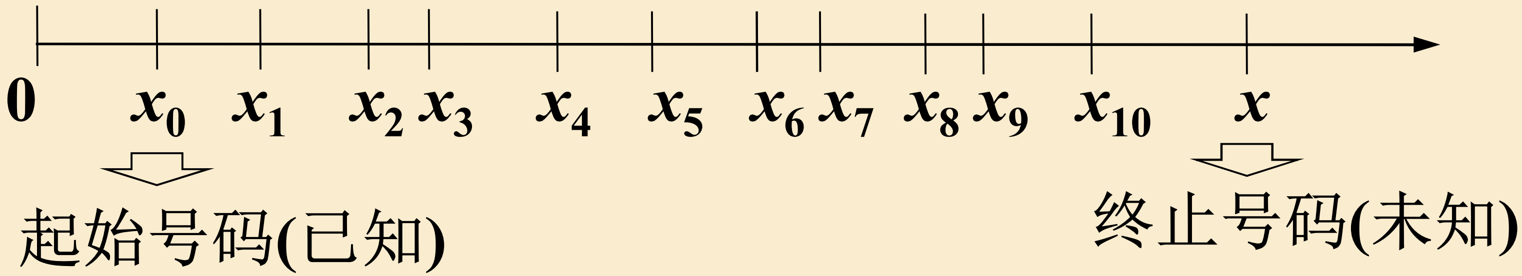
随意记下驶过的10辆出租车牌号：**0421, 0128, 0702, 0410, 0598, 0674, 0712, 0529, 0867, 0312**

出租车牌号从某一个数字**0101**按顺序发放.

估计这座城市出租车的总数.

估计出租车的总数

问题分析 10个号码从小到大重新排列.



$[x_0, x]$ 区间内全部整数值 ~ 总体

$x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ ~ 总体的一个样本

根据样本和x_0对总体的x作出估计.

⇨ 出租车总数为 $x-x_0+1$

估计出租车的总数

模型建立

起始号码x_0平移为0001

总体～全部号码$\{0001, 0002, \ldots, x\}$　x~出租车总数

样本～总体中的n个号码从小到大排列　$x_1, x_2, \ldots, x_n$

建立由$x_1, x_2, \ldots, x_n$估计x的模型

基本假定：每个x_i取自总体中任一号码的概率相等.

模型建立

模型1　平均值模型

$\bar{x}$ ~ 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的平均值　　$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\bar{X}$ ~ 总体 0001, 0002, … , x 的平均值　　$\bar{X} = \frac{1}{x}\sum_{j=1}^{x} j = \frac{x+1}{2}$

用 $\bar{x}$ 估计 $\bar{X}$ ⇨ $\bar{x}=\bar{X}$ ⇨ $x = 2\bar{x} - 1$

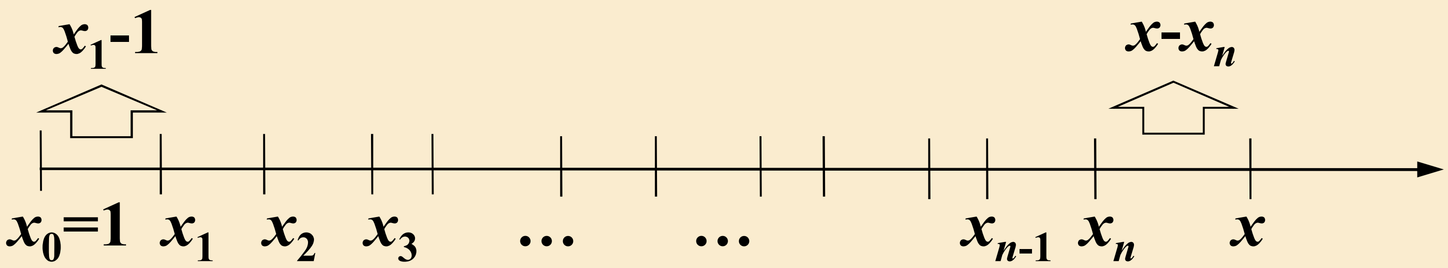
$\bar{x}$ 较大 ⇨ $x \approx 2\bar{x}$　　总数是样本均值的2倍

模型2　中位数模型

$\tilde{x}$～样本中位数　$\tilde{X}$～总体中位数　$\tilde{X} = \bar{X} = \frac{x+1}{2}$

用$\tilde{x}$估计$\tilde{X}$　$\tilde{x} = \tilde{X} = \frac{x+1}{2}$ $\Rightarrow$ $x = 2\tilde{x} - 1 \approx 2\tilde{x}$

模型3　两端间隔对称模型



假定：样本的最小值与最大值在总体中对称.

$x_1\text{-}1 = x\text{-}x_n$ $\Rightarrow$ $x = x_n + x_1 - 1 \approx x_n + x_1$

模型4　平均间隔模型

把起始号码和样本排成数列：$1, x_1, x_2, \dots, x_n$,

相邻两数有n个间隔：$x_1-1, x_2-x_1-1, \dots, x_n-x_{n-1}-1$

n个间隔的平均值 ⇨ 作为x_n与x间隔的估计

$$\frac{1}{n}\left[(x_1-1)+\sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1}-1)\right]=\frac{x_n-n}{n}=x-x_n$$

$$\Rightarrow x=\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n-1\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$$

模型5　区间均分模型

将总体区间[1, x]平均分成 n 份.

每个小区间长度 $\dfrac{x-1}{n}$

假定：样本中每个x_i都位于小区间的中点.

$x-x_n$应是小区间长度的一半 $x-x_n=\dfrac{x-1}{2n}$

$$\Rightarrow x=\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\left(x_n-\frac{1}{2n}\right)\approx\left(1+\frac{1}{2n}\right)x_n$$

计算与分析　　设定x_0 =0001

第1样本： **0321，0028，0602，0310，0498，0574，0612，0429，0767，0212**

第2样本：**0249，0739，0344，0148，0524，0284，0351，0089，0206，0327**

用**5**个模型估计出租车总数x

	模型1	模型2	模型3	模型4	模型5	最大相差
第1样本	870	926	794	843	807	134
第2样本	651	610	827	812	778	217
相差	221	316	33	31	29	

不稳定（相差大）　　不合理 (x = 651, 610 < 739)

计算与分析

1. 平均值模型 $x \approx 2\bar{x}$

用全部样本，有统计依据　　结果可能 $x < x_n$

2. 中位数模型 $x \approx 2\tilde{x}$　　用$\tilde{x}$, 有统计依据, 可能 $x < x_n$

3. 两端间隔对称模型 $x \approx x_n + x_1$　用x_n, x_1, 直观, $x > x_n$

4. 平均间隔模型 $x \approx (1 + \frac{1}{n})x_n$　　只用x_n, 直观, $x > x_n$

5. 区间均分模型 $x \approx (1 + \frac{1}{2n})x_n$　　只用x_n, 直观, $x > x_n$

数值模拟　给定总体{1, 2, … , x}，x=1000

从总体中取n=10个数为一个样本，共m=200个样本

用5个模型分别对每个样本估计总体x.

对每个模型计算m个样本估计的x的平均值、标准差

及平均值与真值x=1000间的误差

样本估计结果与总体对比, 评价各个模型.

画m个样本估计的x的直方图，分析x的分布.

数值模拟

总体x=1000,每个样本 n=10, m=200个样本

第1次模拟

	模型1	模型2	模型3	模型4	模型5
平均值	1023.2	1037.4	1010.0	1005.6	962.3
平均值误差	23.2	37.4	10.0	5.6	-37.7
标准差	170.1	261.0	126.3	90.9	87.0

第2次模拟

	模型1	模型2	模型3	模型4	模型5
平均值	986.5	985.4	980.8	992.9	950.1
平均值误差	-13.5	-14.6	-19.2	-7.1	-49.9
标准差	181.4	271.1	107.9	86.6	82.8

平均值误差大
标准差大

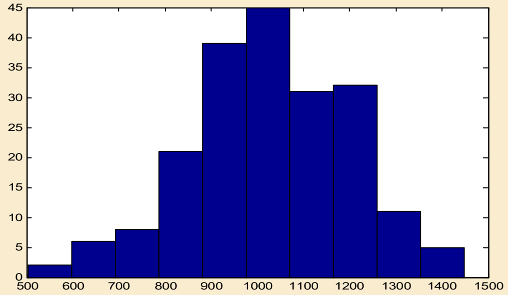
平均值误差小
标准差小

模型4 (平均间隔模型)较优.

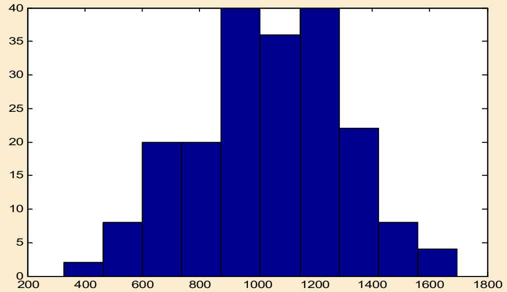
数值模拟

第1次模拟的直方图

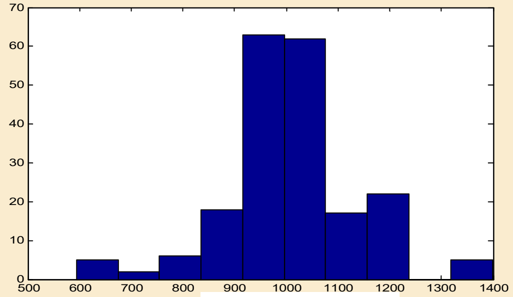
估计值的分布情况



模型1

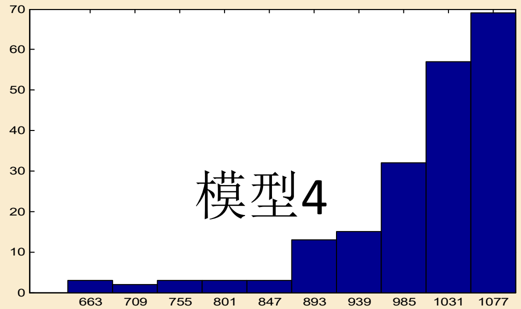


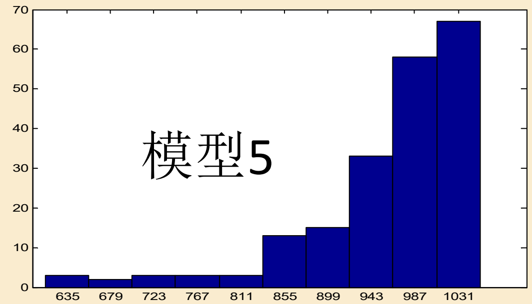
模型2



模型3

左右对称型





左低右高的非对称型

小结与评注

- **5**个模型中平均值和中位数模型用到一点统计，其他**3**个模型来自常识, 后者竟然较前者更优.
- 模型中起始号码已知(平移至**1**),限制了应用范围.

问题：哪些模型可以推广到起始号码未知的情况？

- 数值模拟是模型检验的重要方法：给定总体通过模拟产生样本, 根据模型得到总体参数, 进行比较和评价.

与“估计出租车的总数”相关的历史事实

二战中一支盟军的指挥部急需掌握德军坦克的数量.

盟军俘获了若干辆德军坦克，得到它们的序列号码.

情报人员获知这支部队的坦克号码按顺序编排.

以俘获的坦克号码为样本，估计出坦克总量.

英美情报机构通过捕获德军武器的序列编号，对军用轮胎、枪支、装甲车等众多装备的产量做出估计.

战后将估计值与从档案中得到的实际产量进行比较，多数估计的误差在10%以内！

2.3 节水洗衣机

我国淡水资源有限，节约用水人人有责。洗衣在家庭用水中占有相当大的份额，节约洗衣机用水十分重要。假设放入衣物和洗涤剂后洗衣机的运行过程为：加水—漂洗—脱水—加水—漂洗—脱水…（称“加水—漂洗—脱水”为一轮）。请为洗衣机设计一种程序（包括运行多少轮，每轮加水量等），使在满足一定洗涤效果的条件下，总用水量最少。

选自1996年全国大学生数学建模竞赛B题

问题分析 洗衣机运行的基本过程

- 将待洗衣物和洗涤剂放入缸内，加水后启动洗衣机.
- 漂洗中通过洗涤剂的物理化学作用，将附着在衣物上的污物溶于水中，再脱去含有污物的污水，构成“加水—漂洗—脱水”一轮运行过程.
- 一轮后残留在衣物上的污物有所减少，但若尚未达到洗净的效果，就需要再来一轮，如此循环.
- 直到衣物上污物减少到相对清洁，可以接受.

建模应考虑：现实生活中洗衣机大多运行2或3轮.

问题分析　　洗衣机运行的基本过程

一次性加入的洗涤剂虽能帮助衣物上污物溶于水，但也不希望留在衣物上，因此将“污物”视为衣物上原有的污物与留在衣物上的洗涤剂的总和.

洗涤剂溶解污物的过程涉及物理化学的微观机制，只需从宏观层面上认为，每一轮运行中污物都已充分溶于水中，形成一定的浓度. 通过一轮一轮地加水和脱水，使污物浓度不断降低.

不讨论通常洗衣机运行的最后一步—甩干或烘干.

模型假设

1. 每轮漂洗后衣物上的污物全部均匀地溶于水中.

2. 与每轮的加水量相比，每轮脱水后衣物仍含少量的水，每轮的含水量为常数.

3. 每轮脱水前后污物在水中的浓度保持不变.

4. 最后一轮脱水后衣物的污物含量与初始含量之比 (污物比)，需不超过某个给定的数值.

5. 建模目标：在满足衣物污物比的条件下，确定洗衣机运行多少轮 (最多4轮) 及每轮的加水量，使总用水量最少.

模型建立

洗衣机共运行n轮(n=2,3,4), x_0~初始污物含量.

u_k~第k轮加水量，x_k~第k轮脱水后污物含量.

c~每轮脱水后衣物含水量，ε~最终污物比 (给定).

污物浓度~单位容积水中的污物含量.

脱水前后污物浓度保持不变

$$\frac{x_0}{u_1}=\frac{x_1}{c},\quad \frac{x_1}{u_2+c}=\frac{x_2}{c},\quad \cdots\cdots$$

$$\frac{x_{n-1}}{u_n+c}=\frac{x_n}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_n}{x_0}=\frac{c^n}{u_1(u_2+c)\ldots(u_n+c)}$$

模型建立　　建模目标要求 $x_n/x_0 \le \varepsilon$

$$\frac{x_n}{x_0} = \frac{c^n}{u_1(u_2+c)\dots(u_n+c)}$$

在条件 $\frac{c^n}{u_1(u_2+c)\dots(u_n+c)} \le \varepsilon$ 下确定洗衣机

运行轮数n(=2,3,4)和每轮加水量u_k (k=1,2,…, n),

使总用水量 $z = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 最少.

模型简化

$$\frac{c^n}{u_1(u_2+c)\ldots(u_n+c)} \le \varepsilon \quad \xRightarrow{c \ll u_k} \quad \frac{c^n}{\prod_{k=1}^{n} u_k} \le \varepsilon$$

$$\min z = \sum_{k=1}^{n} u_k \Rightarrow \min u_k \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} u_k = c^n/\varepsilon$$

算术平均值　　　　　　　　几何平均值

n个数的几何平均值小于或等于算术平均值，当且仅当n个数相等时等号成立.

u_k 全相等，即每轮加水量是一个固定值u.

模型简化

$\min z=\sum_{k=1}^{n} u_k$ $\qquad$ $\prod_{k=1}^{n} u_k = c^n/\varepsilon$

$u_k = u$

$\min z = nu$ $\qquad$ $u^n = c^n/\varepsilon$

问题化为在条件 $u^n = c^n/\varepsilon$ 下求u和

n (=2,3,4) 使 $z=nu$ 最小.

简化: $u_1(u_2+c)\ldots(u_n+c) \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} u_k$

- u是第1轮加水量，此后各轮加水量应减掉c（脱水后衣物的含水量）.

模型求解

$$\min z = nu$$

$$u^n = c^n/\varepsilon$$

$$z = n\frac{c}{\varepsilon^{1/n}}$$

$$u = \frac{c}{\varepsilon^{1/n}}$$

- 对于给定的c,ε, 依次固定n=2,3,4， 比较总用水量z的大小，确定u和n的解.

$$u = \mu_n c, \quad \mu_n = \frac{1}{\varepsilon^{1/n}}$$

$$z = \lambda_n c, \quad \lambda_n = \frac{n}{\varepsilon^{1/n}}$$

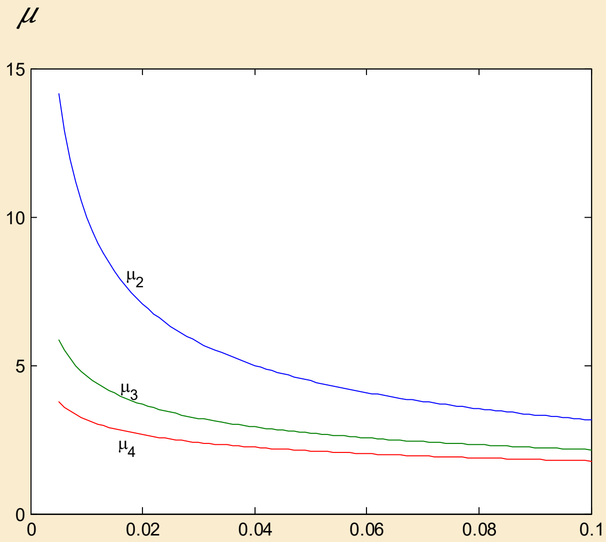
- 对于固定的c, 数值μ_n和λ_n直接反映了每轮加水量和总用水量的大小.

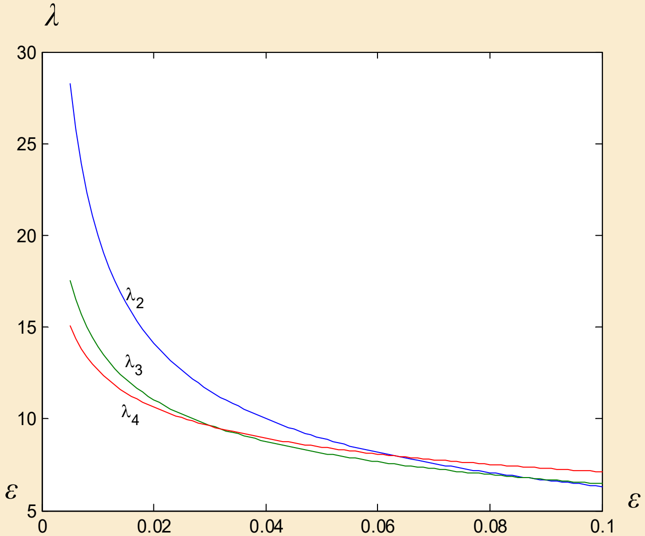
模型求解

$$u = \mu_n c, \quad \mu_n = \frac{1}{\varepsilon^{1/n}} \qquad z = \lambda_n c, \quad \lambda_n = \frac{n}{\varepsilon^{1/n}}$$

ε	0.5%	1%	2%	5%	10 %
μ_2	14.2	10.0	7.1	4.5	3.2
μ_3	5.8	4.6	3.7	2.7	2.2
μ_4	3.8	3.2	2.7	2.1	1.8
λ_2	28.3	20.0	14.2	8.9	6.3
λ_3	17.5	13.9	11.1	8.1	6.5
λ_4	15.0	12.6	10.6	8.5	7.1

若衣物清洁程度要求较高($\varepsilon \le 2\%$)，洗衣机运行4轮的总用水量最少.





清洁程度要求较低时($\varepsilon \ge 5\%$)，总用水量都差不多，运行3轮更合适.

模型讨论　每轮加水量u的上限和下限

缸体容积限制 ⇨ u的上限u_{max}

浸没衣物需求 ⇨ u的下限u_{min}

$u_{min} \le u \le u_{max}$

w~洗涤前衣物质量(kg)　　c~脱水后衣物含水量

a~每kg衣物脱水后含水量　$c = aw$　　$u = \mu_n c = \mu_n aw$

b~每kg衣物浸泡所需水量　$u_{min} = bw$

a和b取决于衣物的质地，其数值可通过实验确定.

$u_{min} \le u$ ⇨ $\mu_n a \ge b$　　μ_n =2, 3时大体上能满足.

$u \le u_{max}$　　通过控制w来满足.

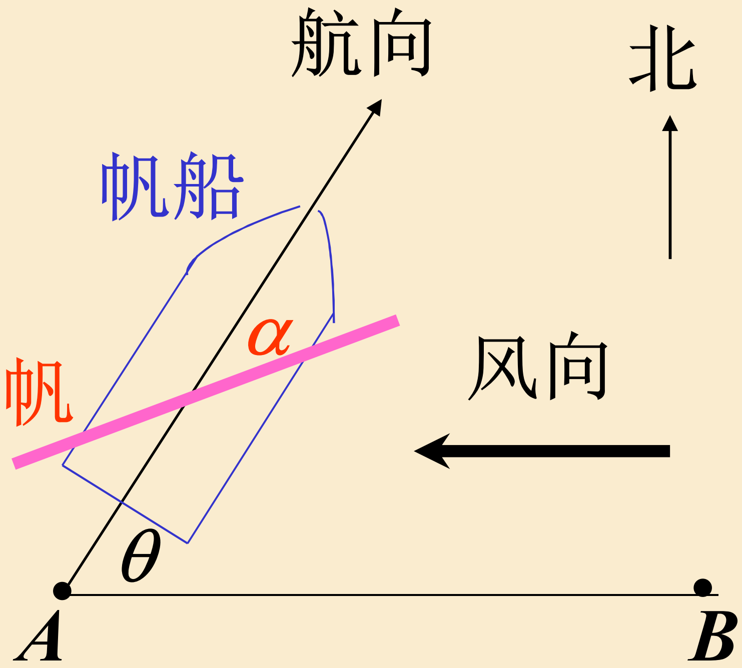
2.4 扬帆远航

帆船在海面上乘风远航，确定最佳的航行方向及帆的朝向.

简化问题

海面上东风劲吹，设帆船要从*A*点驶向正东方的*B*点，确定起航时的航向θ，

以及帆的朝向α.



模型分析

- 风(通过帆)对船的推力w
- 风对船体部分的阻力p

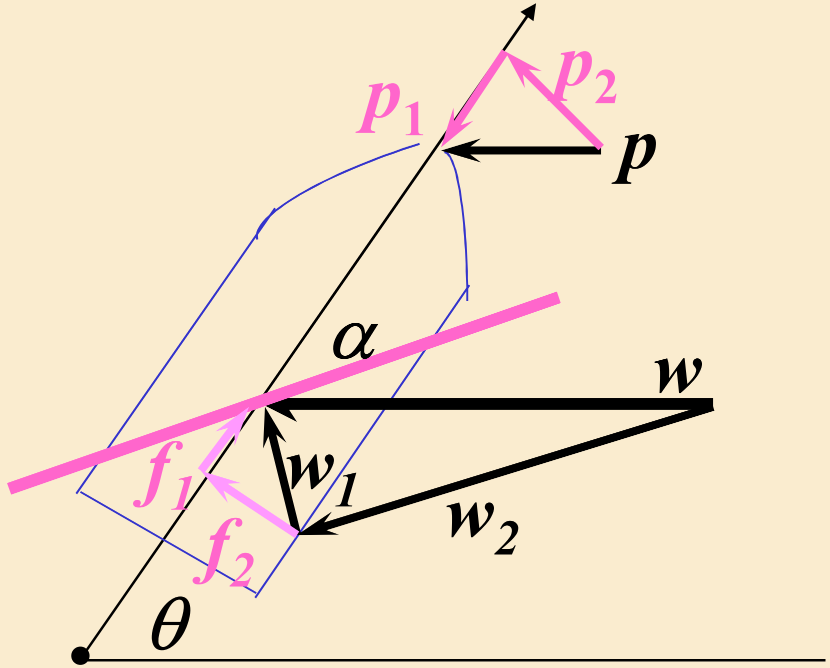
推力w的分解 $w=w_1+w_2$

$w_1=f_1+f_2$

f_1~航行方向的推力

阻力p的分解 $p=p_1+p_2$

p_1 ~航行方向的阻力



模型假设

- w与帆迎风面积s_1成正比，p与船迎风面积s_2成正比k，比例系数相同且 s_1远大于 s_2.

模型假设

- w_2与帆面平行，可忽略.
- f_2, p_2垂直于船身，可由舵抵消.
- 航向速度v与力$f=f_1-p_1$成正比k_1.

模型建立

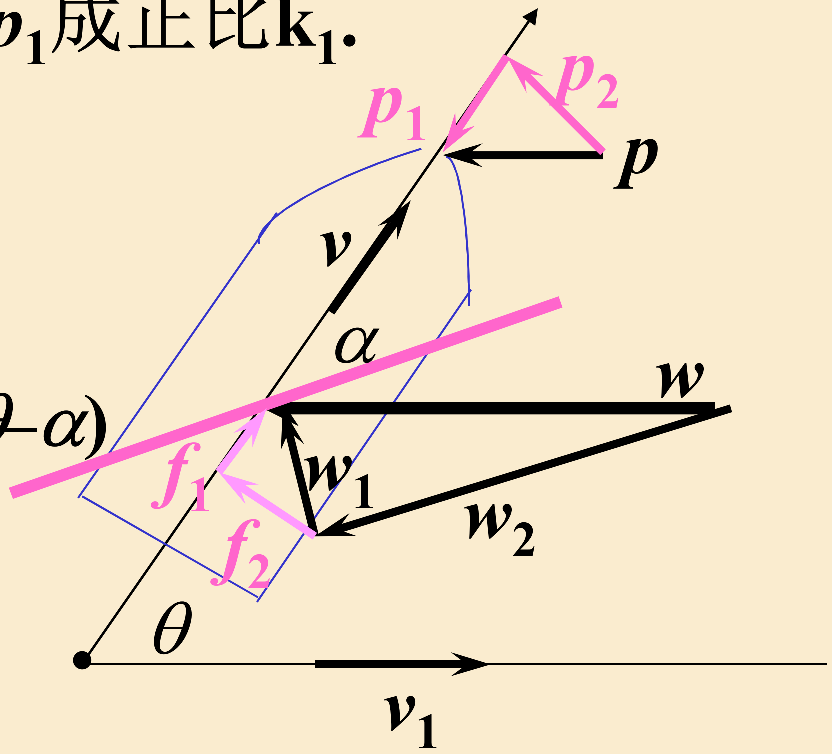
$w=ks_1$, $p=ks_2$

$w_1=w\sin(\theta-\alpha)$

$f_1=w_1\sin\alpha=w\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)$

$p_1=p\cos\theta$

$v=k_1(f_1-p_1)$



船在正东方向速度分量$v_1=v\cos\theta$

模型建立

$v_1=v\cos\theta=k_1(f_1-p_1)\cos\theta$

$f_1=w_1\sin\alpha=w\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)$ $\quad p_1=p\cos\theta$

模型求解

求θ,α，使 v_1最大

1) 当θ固定时求α使f_1最大

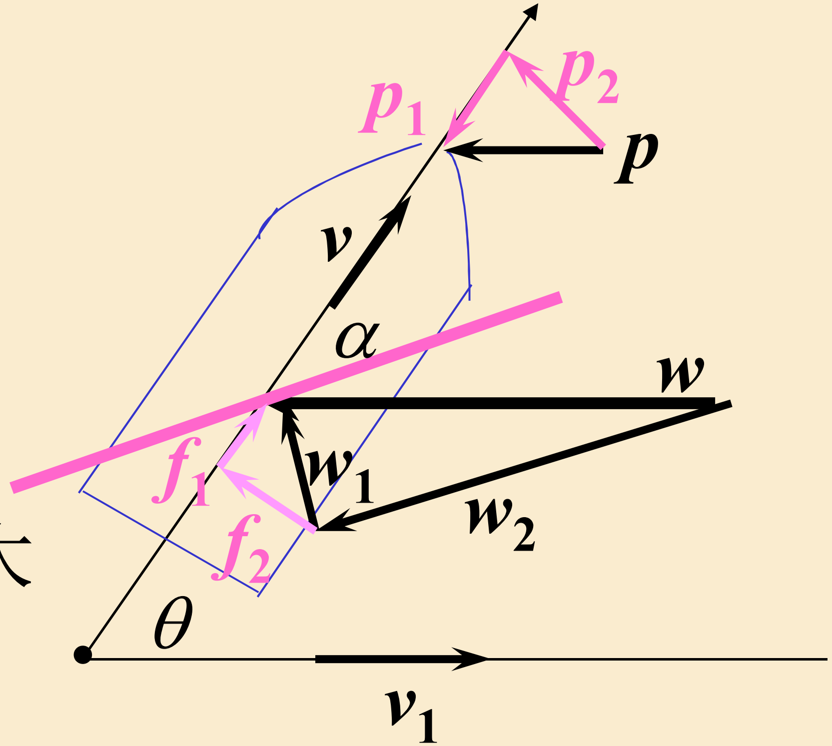
$f_1=w[\cos(\theta-2\alpha)-\cos\theta]/2$

⇨ $\alpha=\theta/2$ 时 $f_1=w(1-\cos\theta)/2$最大

2) 令$\alpha=\theta/2$,

$v_1=k_1[w(1-\cos\theta)/2-p\cos\theta]\cos\theta$

求θ使v_1最大（$w=ks_1, p=ks_2$）



模型求解

$$v_1=k_1\,[w(1-\cos\theta)/2-p\cos\theta]\cos\,\theta$$

$$=(\,k_1w/2)[1-(1+2p/w)\cos\theta]\cos\,\theta$$

$w=ks_1,\ p=ks_2$　　　记 $t=1+2s_2/s_1,\ \ k_2=k_1w/2$

$$v_1=k_2(1-t\cos\theta)\cos\theta=k_2t[\frac{1}{4t^2}-(\cos\theta-\frac{1}{2t})^2]$$

$$\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{1}{2t}\quad(t=1+\frac{2s_2}{s_1}),\quad \alpha=\frac{\theta}{2}$$

v_1最大

$s_1>>s_2 \Rightarrow 1<t<2 \Rightarrow 1/4<\cos\theta<1/2 \Rightarrow 60^{\circ}<\theta<75^{\circ}$

备注

- 只讨论起航时的航向，是静态模型.
- 航行过程中终点B将不在正东方，应调整θ和α.