数学模型

Logistic人口模型

北京科技大学

一、问题提出

短　　期： 人口数量或者种群数量是时间函数，指数增长

长　　期： 环境限制，种群的增长速度逐渐减缓

假设人口是一个关于时间的连续性函数， 在 t 时刻的人口数为 $p(t)$

$$p(t+dt)-p(t)=\frac{dp}{dt}dt+o(dt)$$

Pierre Francois Verhulst
1804-1849

二、问题分析

t 时刻的人口数为 $p(t)$

$$p(t+dt)-p(t)=\frac{dp}{dt}dt$$

$$p(t+dt)-p(t)=ap(t)dt-\bar{a}p^2(t)dt$$

$$\frac{dp}{dt}=ap-\bar{a}p^2=ap(1-\frac{p}{s})\qquad s=\frac{a}{\bar{a}}$$

$$\frac{dp}{dt}=ap(1-\frac{p}{s})$$

初始条件 $p(t_0)=p_0$

$$\frac{dp}{dt}=0$$

数量不再改变

$$ap(1-\frac{p}{s})=0$$

人口达到最大值时其导数为零，s 代表**最大人口数**

二、问题分析

t 时刻的人口数为 $p(t)$

$$p(t+dt)-p(t)=ap(t)dt$$

$$p(t+dt)-p(t)=\frac{dp}{dt}dt$$

$$\frac{dp}{dt}=a(p(t))p(t)$$

$$a(p(t))=a-kp(t)\quad=a(1-\frac{k}{a}p(t))$$

数量不再改变

$$1-\frac{k}{a}p_m(t)=0$$

$$\frac{dp}{dt}=ap(1-\frac{p}{P_m})$$

$$k=\frac{a}{P_m}$$

初始条件 $p(t_0)=p_0$

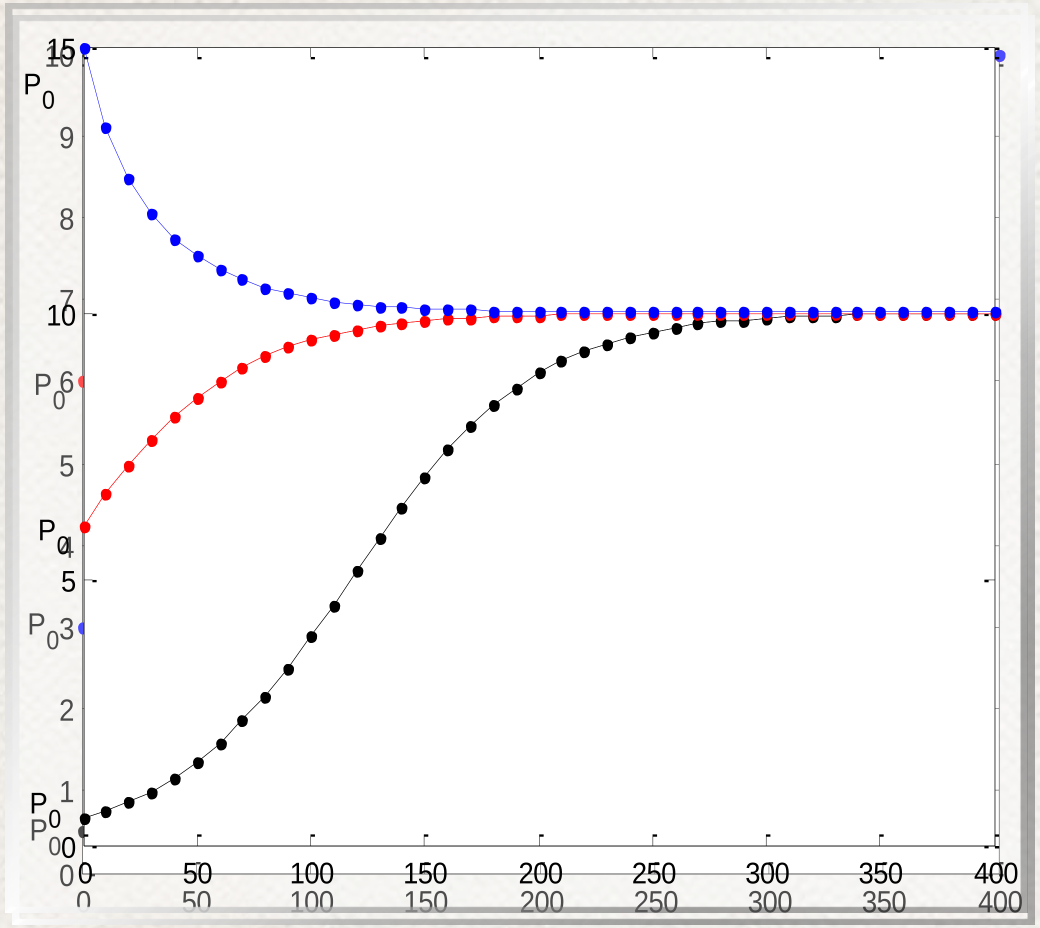
$$\frac{dp}{dt}=ap(1-\frac{p}{s})$$

三、结果分析

$$\frac{dp}{dt} = ap(1 - \frac{p}{s})$$

$$p(t) = \begin{cases} s, \; p_0 = s \\ \dfrac{sp_0}{p_0 + (s - p_0)e^{-a(t-t_0)}}, \; p_0 \neq s \end{cases}$$

当$t \to \infty$，人口数量趋于s，称为饱和值。



$p < s$ $\qquad \dfrac{dp}{dt} > 0$ 单调递增

$p = s$ $\qquad \dfrac{dp}{dt} = 0$

$p > s$ $\qquad \dfrac{dp}{dt} < 0$ 单调递减

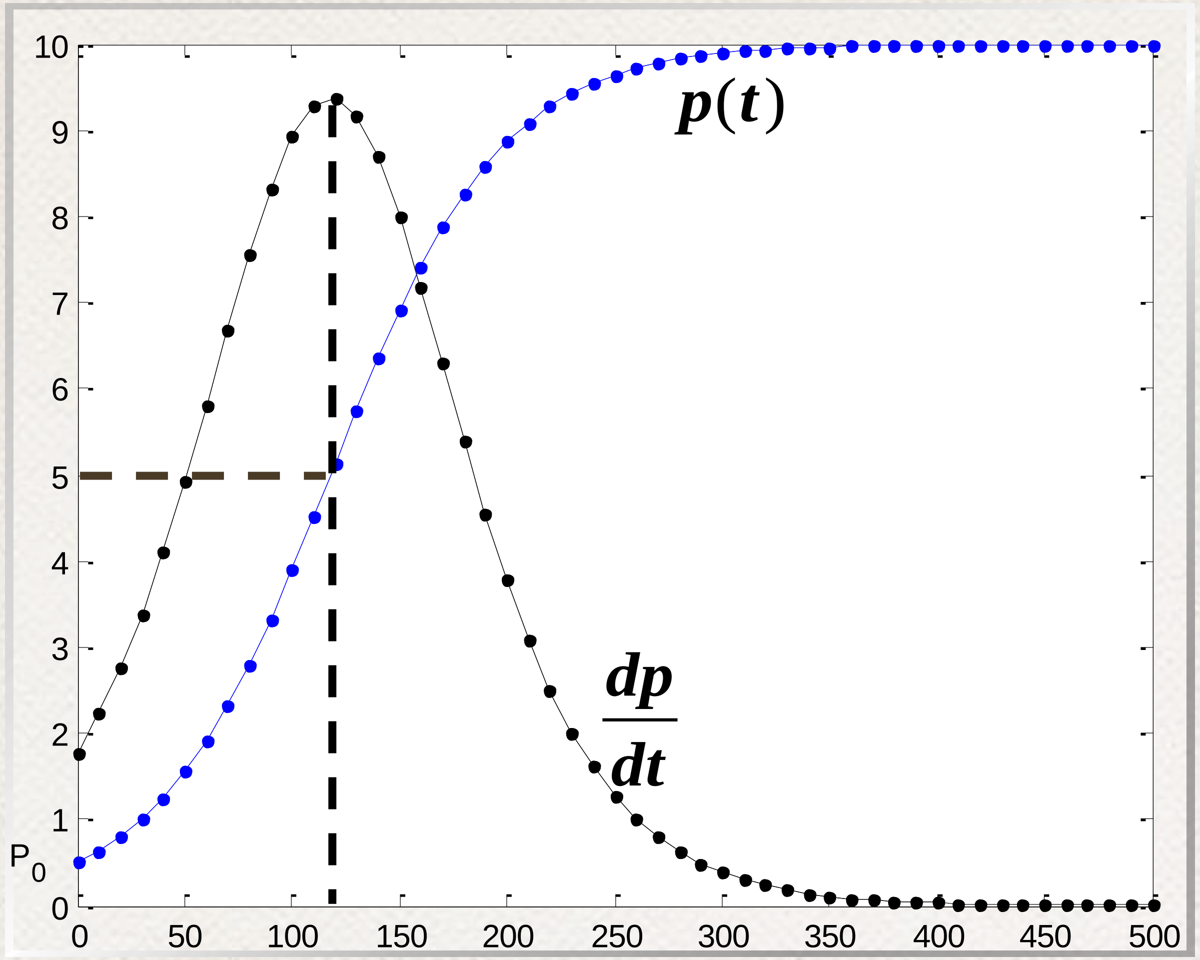
三、结果分析

$$\frac{dp}{dt} = ap\left(1 - \frac{p}{s}\right)$$

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \bar{a}(s - 2p)\frac{dp}{dt}$$

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \begin{cases} > 0, & p < \dfrac{s}{2} \\ < 0, & \dfrac{s}{2} < p < s \end{cases}$$

$$p = \frac{s}{2}$$



四、差分方程

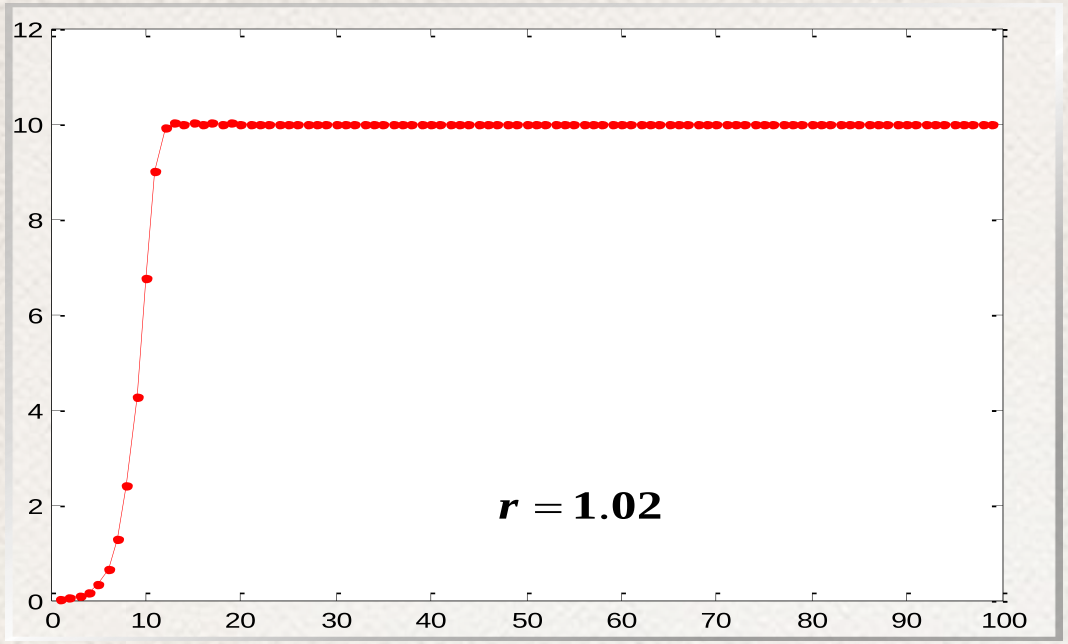
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

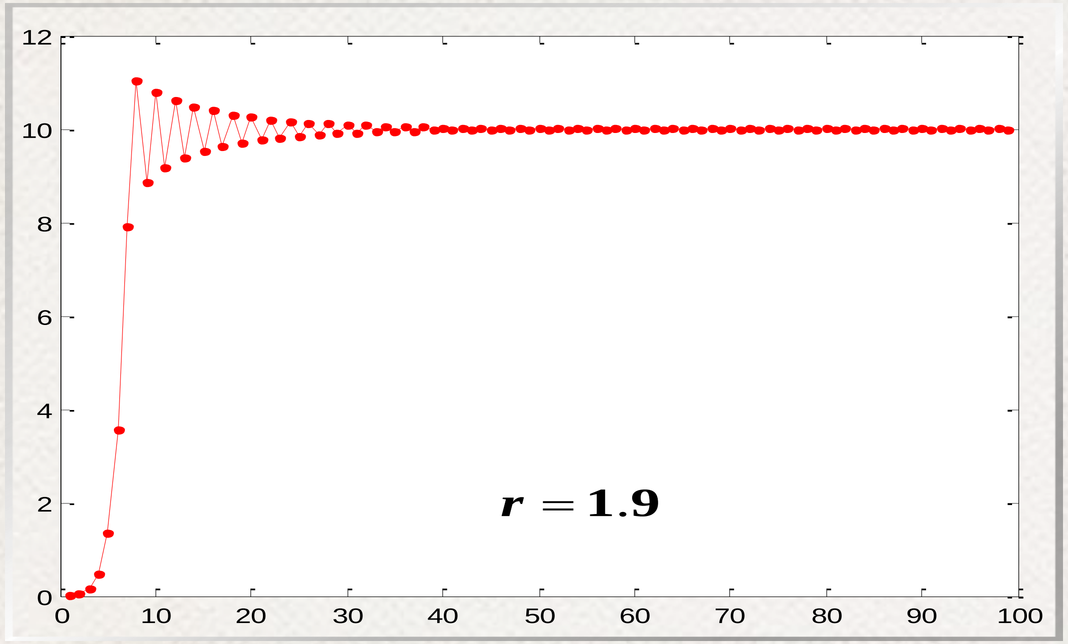
$\Delta t = 1$

$\Delta N = N_{t+\Delta t} - N_t$

$$\frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t} = rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

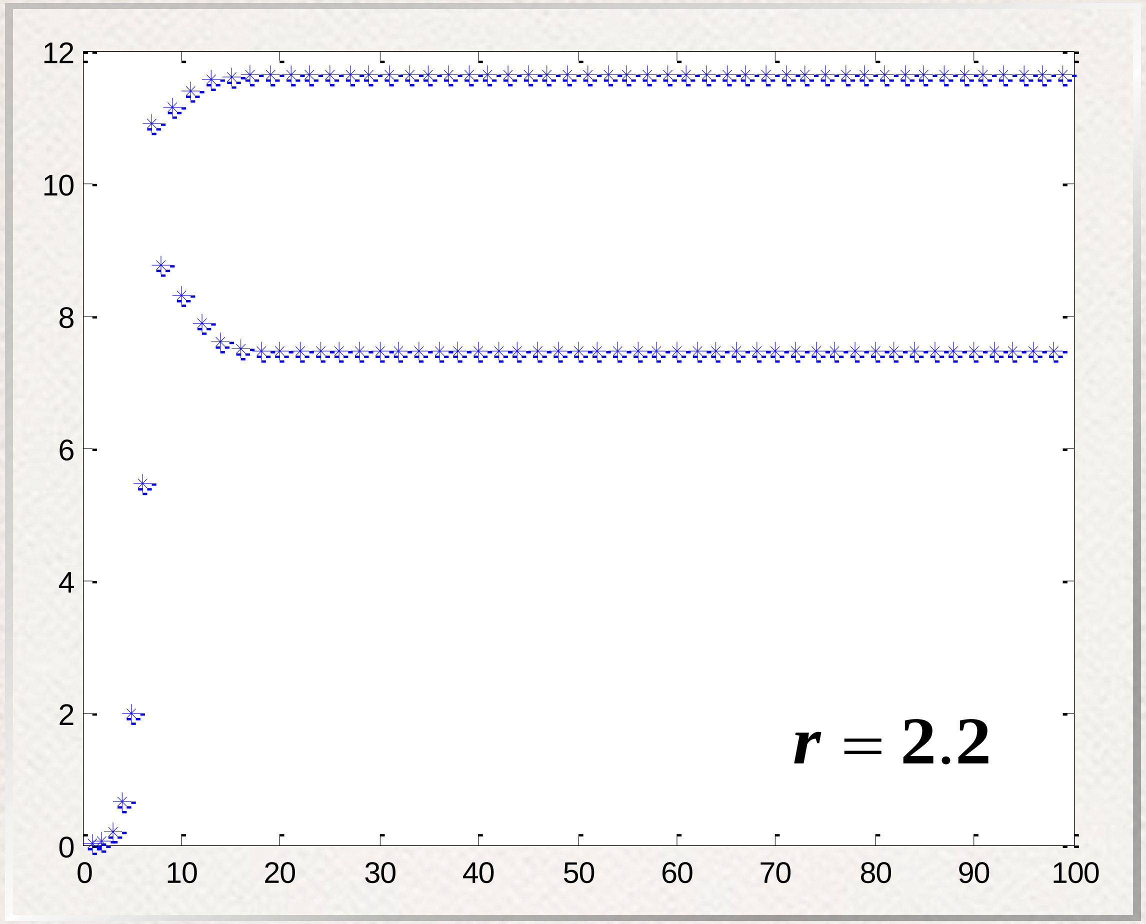
$$N_{t+\Delta t} = N_t + \Delta t\left(rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right)$$

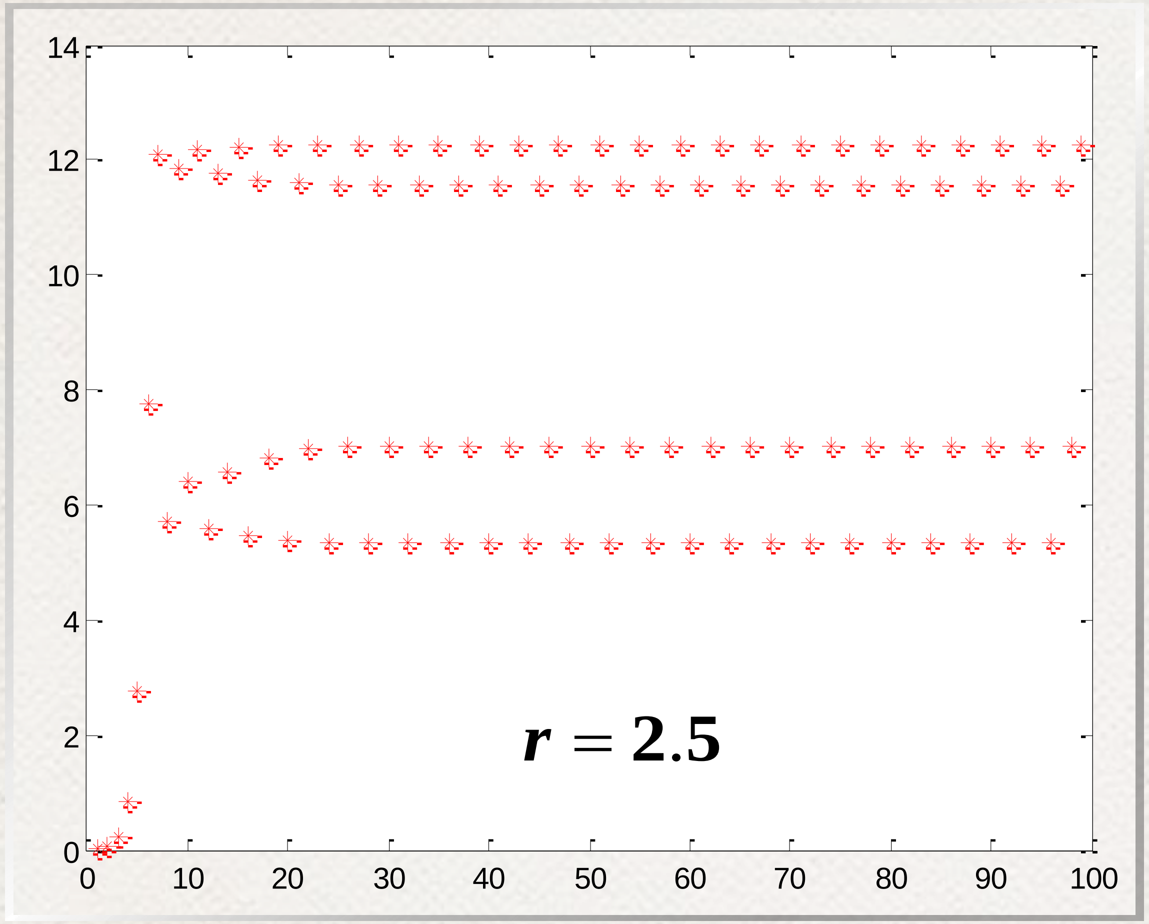




三、差分方程

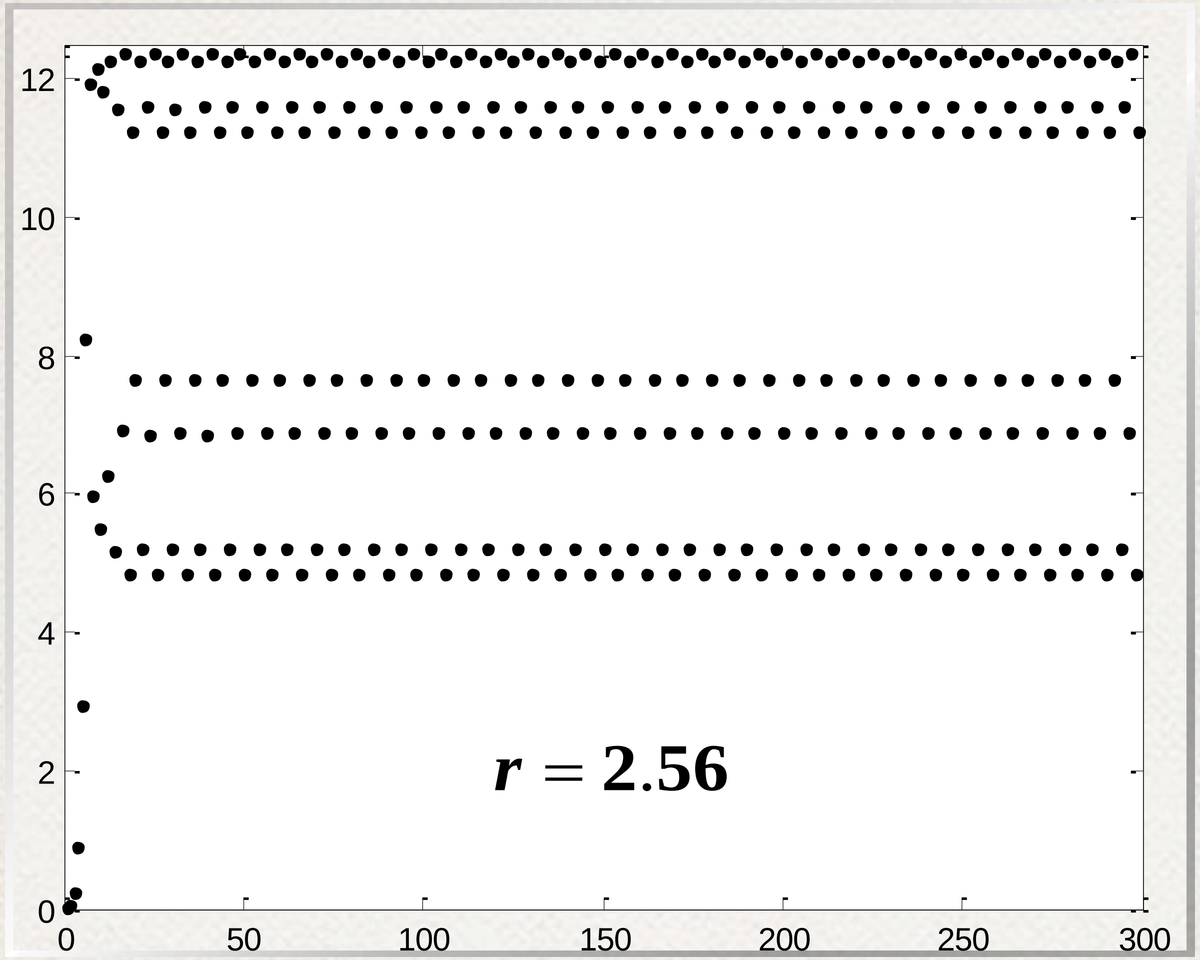
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \Rightarrow N_{t+\Delta t} = N_t + \Delta t\left(rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right)$$

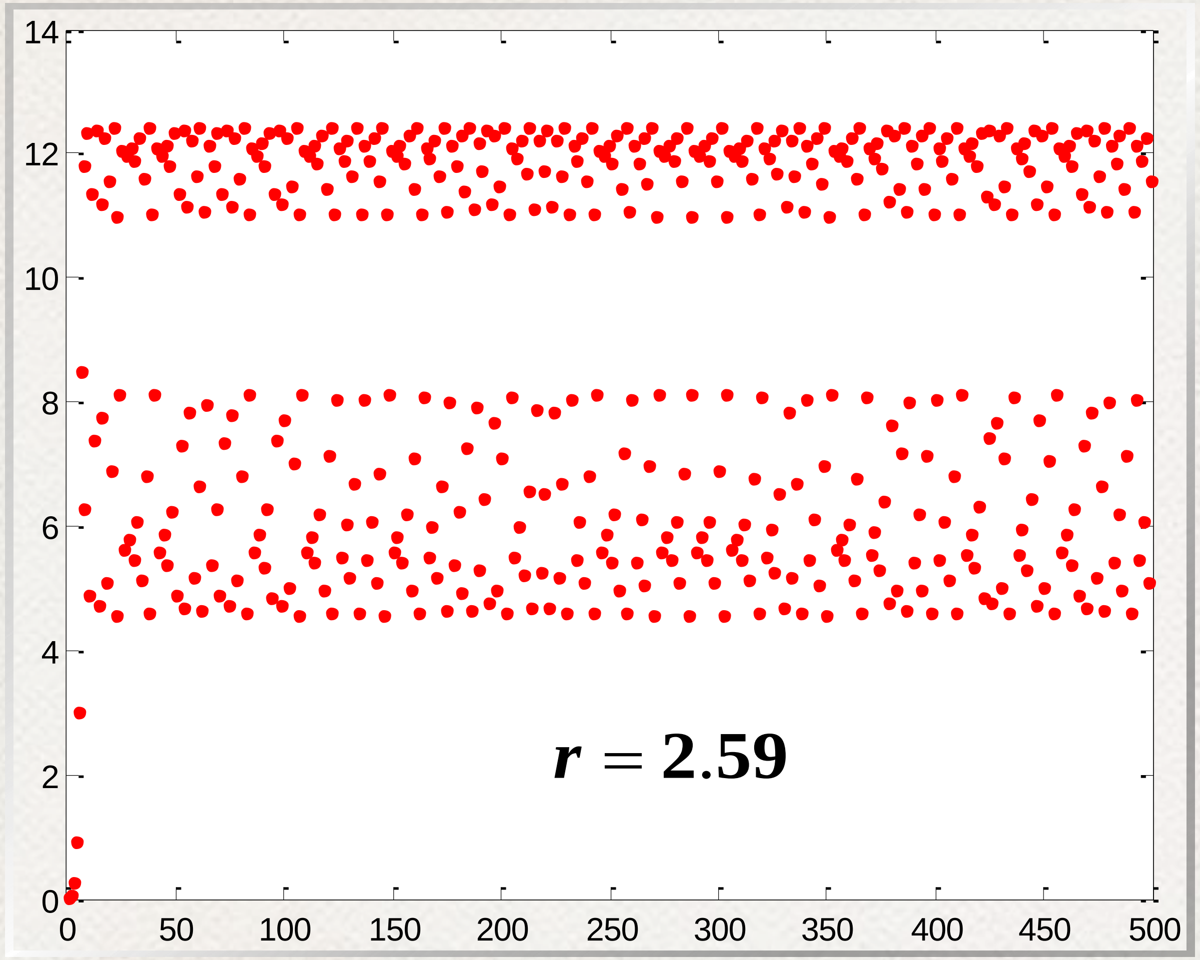




三、差分方程

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) \Rightarrow N_{t+\Delta t} = N_t + \Delta t\left(rN_t\left(1-\frac{N_t}{K}\right)\right)$$





四、混沌系统