第七章　离散模型

连续模型	离散模型
微分方程	差分方程
线性、非线性规划	整数规划
科学、技术等领域	经济、社会等领域

- 案例主要取自决策、排序、分配等方面的问题.
- 从应用角度只涉及代数、几何和图的一点知识.

第七章 离散模型

[7.1 汽车选购]

7.1 汽车选购

- 考虑的因素：经济适用、性能良好、款式新颖.
- 对3个因素在汽车选购中的重要性有大致比较.
- 对待选汽车在每一因素中的优劣程度有基本判断.
- 对待选汽车作出综合评价, 为选购确定决策.

人们在日常生活中常常碰到类似的决策问题：选择旅游目的地，选择学校上学，选择工作岗位.

从事各种职业的人在工作中经常面对决策：购买哪种设备；选择研究课题；选拔秘书；对经济、环境、交通、居住等方面的发展做出规划.

汽车选购等决策问题的共同特点

- 考虑的因素常涉及经济、社会等领域，对它们的重要性、影响力作比较、评价时缺乏客观的标准.
- 待选对象对于这些因素的优劣程度常难以量化.

多属性决策是处理这类决策问题的常用方法.

什么是多属性决策

为一特定目的在备选方案中确定一个最优的 (或给出优劣排序、优劣数值), 而方案的优劣由若干属性(准则、特征、性能)给以定量或定性的表述.

多属性决策的要素

要素：1.决策目标、备选方案与属性集合

2.决策矩阵　3.属性权重　4.综合方法.

1. 确定属性集合的一般原则：

- 全面考虑, 选取影响力(或重要性) 强的.
- 属性间尽量独立(至少相关性不太强)
- 不选难以辨别方案优劣的(即使影响力很强).
- 尽量选可量化的, 定性的也要能明确区分档次.
- 若数量太多(如大于7个), 应将它们分层.

要素：1.决策目标、备选方案与属性集合

2.决策矩阵 3.属性权重 4.综合方法.

2.决策矩阵 表示方案对属性的优劣(或偏好)程度.

以方案为行、属性为列、每一方案对每一属性的取值为元素构成的矩阵.

3.属性权重 对目标影响力(或重要性)的权重分配

可以定量的属性 只能定性的属性

4. 综合方法 将决策矩阵与属性权重加以综合，得到最终决策的数学方法.

以汽车选购为例说明如何确定决策矩阵、属性权重以及利用综合方法得到决策结果.

- 3个方案供决策～选购的汽车型号A_1, A_2, A_3
- 3个属性为选购准则～价格X_1, 性能X_2, 款式X_3
- 3种汽车价格(万元): 25, 18, 12
- 3种汽车性能 (打分, 10分满分): 9, 7, 5
- 3种汽车款式: 7, 7, 5

d_{ij}~A_i对X_j的取值(原始权重)

d_{ij}	X_1	X_2	X_3
A_1	25	9	7
A_2	18	7	7
A_3	12	5	5

1）决策矩阵及其标准化

m个备选方案 $A_1, A_2,\ldots,A_m$

n个属性 $X_1, X_2, \ldots, X_n$　　d_{ij}~A_i对X_j的取值

$D=(d_{ij})_{m\times n}, d_{ij}\geq 0$ ~决策矩阵

汽车选购 $D=\begin{bmatrix} 25 & 9 & 7 \\ 18 & 7 & 7 \\ 12 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

决策矩阵的获取

- 调查、量测各方案对属性的取值(定量, 偏于客观).
- 决策者打分评定或用层次分析法的成对比较得到(定性, 偏于主观).

1）决策矩阵及其标准化

决策矩阵D的列~各方案对某属性的取值(属性值).

各属性物理意义(包括量纲)不同 ⇨ 决策矩阵标准化

标准化第1步：区分

费用型属性　　效益型属性

价格X_1　　性能X_2, 款式X_3

$$D=\begin{bmatrix}25 & 9 & 7\\ 18 & 7 & 7\\ 12 & 5 & 5\end{bmatrix}$$

⇩

对费用型的属性值d_{ij}作倒数变换

——将全部属性统一为效益型.

$$D=\begin{bmatrix}1/25 & 9 & 7\\ 1/18 & 7 & 7\\ 1/12 & 5 & 5\end{bmatrix}$$

1）决策矩阵及其标准化

$$R=(r_{ij})_{m\times n},\ 0\le r_{ij}\le 1$$

标准化第2步：对d_{ij}作比例尺度变换

$$r_{ij}=\frac{d_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} d_{ij}}$$

R的列和为1 ~归一化

$$r_{ij}=\frac{d_{ij}}{\max\limits_{i=1,2,\cdots m} d_{ij}}$$

R的列最大值为1~最大化

$$r_{ij}=\frac{d_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_{ij}^2}}$$

R的列模为1 ~模一化

R~标准化的决策矩阵 当且仅当$d_{ij}=0$时才有$r_{ij}=0$

比例变换假定: 属性的重要性随属性值线性变化.

2）属性权重的确定

$w_1, w_2, \ldots, w_n$~属性$X_1, X_2, \ldots, X_n$的权重 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

- 根据决策目的和经验先验地给出.
- 用层次分析法的成对比较得到.

偏于主观

- 信息熵法

偏于客观

熵～信息论中衡量不确定性的指标，信息量的(概率)分布越一致，不确定性越大.

R归一化的每一列 $(r_{1j}, r_{2j}, \cdots, r_{mj})$

～各方案对X_j信息量的(概率)分布.

2）属性权重的确定

方案关于属性X_j的熵 $$E_j = -k\sum_{i=1}^{m} r_{ij}\ln r_{ij},\ k = 1/\ln m$$

r_{ij}=1/m时E_j=1. $\Rightarrow$ X_j对于辨别方案优劣不起作用.

r_{ij}只有一个1其余为0时E_j=0 $\Rightarrow$ X_j最能辨别方案优劣.

r_{ij} (i=1,2,…,m)相差越大, E_j越小, X_j越能辨别优劣.

属性X_j对于方案的区分度 $$F_j = 1 - E_j,\quad 0 \le F_j \le 1$$

X_j的权重(归一化的区分度) $$w_j = \frac{F_j}{\sum_{j=1}^{n} F_j},\quad j = 1,2,\cdots,n$$

2）属性权重的确定

汽车选购

$$D=\begin{bmatrix} 1/25 & 9 & 7 \\ 1/18 & 7 & 7 \\ 1/12 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{归一化}}$$

	X_1	X_2	X_3
	0.2236	0.4286	0.3684
r_{ij}	0.3106	0.3333	0.3684
	0.4658	0.2381	0.2632
E_j	0.9594	0.9749	0.9895
F_j	0.0406	0.0251	0.0105
w_j	0.5330	0.3293	0.1377

w_1最大　　w_3最小

3种汽车价格X_1取值相差最大,款式X_3取值相差最小.

- r_{ij} $(i=1,2,\ldots,m)$的均方差可作为区分度F_j (m较大时).

3）主要的综合方法

决策矩阵 + 属性权重 $\Longrightarrow$ 方案对目标的权重

综合方法　　（综合取值）

1. 简单加权和法 (SAW, Simple Additive Weighting)

$$R=(r_{ij})_{m\times n} \qquad w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$$

方案$\boldsymbol{A_i}$对$\boldsymbol{n}$个属性的综合取值为

$$v=(v_1,v_2,\cdots,v_m)^T$$

$$v_i=\sum_{j=1}^{n}v_{ij}=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}w_j,\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$v=Rw$$

对决策矩阵采用不同的标准化,得到的结果会不同.

2. 加权积法（WP, Weighted Product）

将SAW的算术加权平均改为几何加权平均：

$$v_i = \prod_{j=1}^{n} d_{ij}^{w_j}, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

- 可直接用方案对属性的原始值d_{ij}, 不需要标准化.
- 若效益型属性的权重取正值，则费用型属性的权重应取负值 .

3. 接近理想解的偏好排序法（TOPSIS , Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution）

n个属性、m个方案视为n维空间中m个点的几何系统

- 每个点的坐标由各方案标准化的加权属性值确定.
- 决策矩阵模一化, 以便在空间定义欧氏距离.
- 正理想解(最优方案)由所有最优加权属性值构成.
- 负理想解由所有最劣加权属性值构成.
- 定义距正、负理想解距离的数量指标:相对接近度.
- 按照相对接近度确定备选方案的优劣顺序.

汽车选购　用3种综合方法确定3种汽车的优劣顺序

统一为效益型的决策矩阵　$D=\begin{bmatrix} 1/25 & 9 & 7 \\ 1/18 & 7 & 7 \\ 1/12 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

R归一化　R最大化　R模一化

$$R=\begin{bmatrix} 0.2236 & 0.4286 & 0.3684 \\ 0.3106 & 0.3333 & 0.3684 \\ 0.4658 & 0.2381 & 0.2632 \end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix} 0.4800 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.6667 & 0.7778 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.5556 & 0.7143 \end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix} 0.3709 & 0.7229 & 0.6312 \\ 0.5151 & 0.5623 & 0.6312 \\ 0.7727 & 0.4016 & 0.4508 \end{bmatrix}$$

属性权重取信息熵法结果:$w=(0.5330,0.3293,0.1377)^T$

汽车选购　用3种综合方法确定3种汽车的优劣顺序

1. 简单加权和法 (SAW)

$$v = Rw$$

R归一化　$v=(0.3110,0.3260,0.3629)^T$

R最大化　$v=(0.7228,0.7492,0.8143)^T$

$\Downarrow$ v归一化

$v=(0.3162,0.3277,0.3562)^T$

2. 加权积法(WP)

$v=(0.4847,0.5316,0.5639)^T$

$$v_i = \prod_{j=1}^{n} d_{ij}^{w_j}$$

$\Downarrow$ v归一化

$v=(0.3067,0.3364,0.3569)^T$

3. 理想解法（TOPSIS）

R模一化 $v_{ij}=r_{ij}w_j$ $V=(v_{ij})=\begin{bmatrix} 0.1977 & 0.2381 & 0.0869 \\ 0.2746 & 0.1852 & 0.0869 \\ 0.4118 & 0.1323 & 0.0621 \end{bmatrix}$

正理想解 $v^{+}=(0.4118, 0.2381, 0.0869)$

负理想解 $v^{-}=(0.1977, 0.1323, 0.0621)$

A_i与v^+距离 $S_i^{+}=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(v_{ij}-v_j^{+})^2}$ S^{+}=(0.2141,0.1470,0.1087)

A_i与v^-距离 $S_i^{-}=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(v_{ij}-v_j^{-})^2}$ S^{-}=(0.1087,0.0966,0.2141)

相对接近度 $C_i^{+}=\dfrac{S_i^{-}}{S_i^{+}+S_i^{-}}$

C^{+}=(0.3368,0.3966,0.6633)

⇩ 归一化

C^{+}=(0.2411,0.2840,0.4749)

汽车选购 用3种综合方法确定3种汽车的优劣顺序

方法 / 方案	SAW (*R*归一化)	SAW (*R*最大化)	WP	TOPSIS
A_1	0.3110	0.3162	0.3067	0.2411
A_2	0.3260	0.3277	0.3364	0.2840
A_3	0.3629	0.3562	0.3569	0.4749

SAW(*R*归一化, 最大化), WP结果差别很小,

TOPSIS结果差别稍大. 优劣顺序均为A_3 , A_2 , A_1

- 简单、直观的加权和法(SAW)是人们的首选.
- SAW的前提~属性之间相互独立, 并且具有互补性.

多属性决策应用的步骤

1. 确定决策目标、备选方案与属性集合；

2. 用量测、调查等手段确定决策矩阵和属性权重，推荐用信息熵法由决策矩阵得出属性权重；

3. 将全部属性统一 (如效益型)，并采用归一化、最大化或模一化对决策矩阵标准化；

4. 选用加权和、加权积、TOPSIS等综合方法计算方案对目标的权重，作为决策的依据.

多属性决策应用中的几个问题

1. 比例尺度变换的归一化和最大化

归一化～分配模式 **(Distributive Mode)**

- 列和为1: 各方案分配总量固定(1单位)的资源.
- 某一方案属性值改变引起其他方案属性值随之改变.

最大化～理想模式 **(Ideal Mode)**

- 列最大值为1:各方案与占资源1的最优方案比较.
- 任一方案的属性值独立于最优方案外的其他方案.

比例尺度变换的理想模式和分配模式

- 两种模式计算的结果数值上一般不会相同.
- 方案的优劣排序大体上一致(方案数量不多时).

在实际应用中究竟应该采用哪种模式?

理想模式~决策者关心每个方案相对于基准指标的优劣; 从众多候选方案中只选一个最优者.

分配模式~决策者关心每个方案相对于其他方案的占优程度; 需要对候选方案的优劣给出定量评价;特别用于资源分配问题.

2. 区间尺度变换使用中的问题

区间尺度变换 ~对原始权重d_{ij}作伸缩与平移变换

$$r_{ij}=\frac{d_{ij}-\min\limits_{i=1,2,\cdots m} d_{ij}}{\max\limits_{i=1,2,\cdots m} d_{ij}-\min\limits_{i=1,2,\cdots m} d_{ij}}$$

对比比例尺度变换的最大化

$$r_{ij}=\frac{d_{ij}}{\max\limits_{i=1,2,\cdots m} d_{ij}}$$

- 两种变换d_{ij}最大值(对每个j)都变为r_{ij}=1.
- 但区间尺度变换d_{ij}最小值(对每个j)都变为r_{ij}=0.

虚拟一个极端的例子说明,某些实际问题适于采用比例尺度变换归一化, 用最大化会出现较大谬误, 而用区间尺度变换将得到极不合理的结果.

区间尺度变换使用中的问题

例. 奖金1万元按教学和科研并重原则分配给A,B.

得分	教学X_1 (w_1=0.5)	科研X_2 (w_2=0.5)
教师A	51	1
教师B	49	99

常识：教学0.5万平分, 科研0.5万给B. $\Rightarrow$ A~0.25万元, B~0.75万元

分配模式(归一化)
$$\begin{bmatrix} 0.51 & 0.01 \\ 0.49 & 0.99 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.74 \end{pmatrix}$$
与常识一致

理想模式(最大化)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ 0.96 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.505 \\ 0.98 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.33 \\ 0.67 \end{pmatrix}$$
与常识有别

为什么？

区间尺度
$$\begin{bmatrix} 51 & 1 \\ 49 & 99 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$
严重不妥!

把非常接近的教学原始分51和49分别变成1和0

3. 方案的排序保持与排序逆转

若各准则对目标的权重和原有方案对属性的权重都不变，当有新方案加入或旧方案退出时，原有方案的优劣排序是保持还是会逆转？

用理想模式和分配模式可能会得到不同的结果.

例. 工作选择 (训练题15)

原始分	$X_1(w_1=0.6)$	$X_2(w_2=0.4)$
A_1	4	1
A_2	1	5
A_3	2	2
A_4	4	1
A_4'	6	1

两种模式排序都是A_1, A_2, A_3

理想模式保持排序A_1,A_2 ,分配模式逆转.

在一定条件下理想模式保持排序A_1,A_2 .

方案的排序保持与排序逆转

新方案加入时,只要它对每个准则的权重都不超过原方案,用理想模式计算原方案的排序保持不变, 用分配模式计算原方案的排序可能逆转.

- 分配模式~各方案对每一准则权重r_{ij}对i之和恒为1,新方案加入导致原来r_{ij}减少, 稀释了原有资源, 资源的重新分配可能导致原方案排序逆转.
- 理想模式~各方案对每一准则权重r_{ij}对i最大值为1, 新方案加入只要不改变原来的最大值, 就不会稀释原有资源, 原方案排序将保持不变.

小结与评注

- 决策矩阵标准化的不同或综合方法的不同对最终决策的影响，远小于属性集合的不同及属性权重的不同对最终决策的影响. 所以不要过度注意前者, 而应对后者多些关注.
- 实际应用中对于从众多候选方案中只选一个最优者的情况，多用理想模式；而那些需要对候选方案的优劣给出定量比较时，或者对资源按照候选方案的优劣进行分配时，多用分配模式.