

基于动力学的同心鼓最优协作策略

摘要

本文研究如何基于动力学设计同心鼓最优协作策略,根据动力学相关原理,分析排球与同心鼓的受力情况,建立同心鼓与排球运动轨迹模型,以颠球系统的稳定性为目标得到在抛球过程中各队员间的最优协作策略。

针对问题一:首先将同心鼓与球的运动过程分为三个阶段:排球下落、鼓上升阶段、排球与鼓碰撞阶段、碰撞后排球上升阶段,然后对各阶段进行受力分析,考虑参与人数、各队员的施力大小,方向,用力时机,站位等,根据**动力学原理**,建立同心鼓与球的运动模型,以球的运动周期与鼓面运动周期差异最小为目标,通过遍历用力方向、力度及人数,求得当人数为**10人**,执行最优协作策略时,排球与鼓面的运动周期之差的绝对值达到最小值,此时夹角为 **35°** ,施力大小为**83N**,颠球高度为**0.4004m**。

针对问题二:对于存在一定倾斜角的鼓面,根据**转动定律**,考虑三种情况:仅力度改变、仅时机改变、力度与时机均改变而导致鼓面倾斜。情况一:由于队员人数不确定及队员站位不同,对力度改变的队员在水平方向上的拉力进行分解,通过建立鼓面倾斜角与其所受的**合外力的微分方程**得到力度与某一特定时刻鼓面倾斜角的关系,求解得到**1~3组**的鼓面倾角为 **0.3601° 、 0.3812° 、 0.3378°** 。情况二:在力度不变情况下,考虑发力时机提早的所产生的力对倾斜角的影响,建立鼓面倾斜角与其所受合外力的微分方程,求解得到**4~6组**的鼓面倾角为 **0.9499° 、 1.4097° 、 0.3921°** 。情况三:考虑某一时刻仅有一个因素发生变化,某一时刻的发力时机与力度均发生改变,建立鼓面倾斜角与其所受合外力的微分方程,求解得到**7~9组**的鼓面倾角为 **1.0502° 、 0.3933° 、 0.3933°** 。

针对问题三:基于模型二,对理想状况下的最优策略进行调整,考虑现实情况,对已倾斜的鼓面进行调整。排球在一次碰撞后,其方向发生改变,水平方向出现速度,通过抵消水平方向的速度,改变排球二次碰撞后的运动方向,实现颠球过程的稳定性。调整方案如下:(1)不断对鼓进行水平移动,使排球的落点在鼓心位置;(2)水平移动调整鼓的位置,通过改变某些队员的力度大小使排球再次落在鼓心上;(3)仅通过改变某些队员的力度大小,满足颠球高度大于0.4但落点不在鼓心的竖直运动。根据运动力学的相关原理求解调整的位移,通过**随机模拟**团队成员**每个人的发力时间和发力大小**,通过对比分析,同时调整位移和发力情况是使系统稳定的调整策略。

针对问题四:根据问题三中的调整位移和发力的策略模型,**随机模拟力度与发力时机**,将理想状态下的发力情况作为指标,以发力大小的方差最小为目标建立模型,求解得到**站位3,5,8**的队员需**提前0.1s发力**,10位队员的发力大小依次为**85.45、82.59、87.57、80.08、82.65、85.50、81.39、84.46、81.41(N)**。并对一个人的发力大小、方向进行灵敏度分析,通过对比得出调整策略的实施效果。

最后,本文对绳子的长短进行灵敏度分析并分析模型的优缺点,提出改进方向。

关键词:运动周期、转动定律、微分方程、随机模拟

一、问题的提出和重述

1.1 问题的提出

同心鼓项目依靠每位队员牵拉一根与鼓相连的绳子并相互配合使鼓面保持水平，共同将鼓上的球颠起。在准确的时间点合理的在正确方向上使用力度，对尽量多的连续完成颠球次数具有重要意义。

1.2 问题的重述

已知一同心鼓项目中使用的排球和鼓的质量和尺寸以及相关游戏规则要求，现解决如下问题：

问题 1: 研究参与者可准确控制力度的时机、大小与方向的理想状况下，完成项目的最优策略以及此时的颠球高度。

问题 2: 研究现实情况下参与者控制力度的时机、大小与某一时刻鼓面倾斜角的关系。根据表 1 中发力时机及其大小的相关数据确定 0.1s 时鼓面倾斜角度。

问题 3: 已经问题 2 所得模型，改进现实情况下问题 1 模型的策略。

问题 4: 研究当鼓面与竖直方向产生 1 度倾斜时，所有队员可控制的调整发力时间与大小使其恢复竖直状态的策略并分析其效果。

二、问题的分析

2.1 问题的分析

针对问题一，首先对排球下落与鼓面碰撞的过程进行简单分析，将该过程分为排球下落、鼓位置上升阶段；排球与鼓碰撞阶段；碰撞后排球上升阶段。结合动力学知识，建立满足排球的运动周期与鼓面的运动周期的差的绝对值最小最优协作策略模型。再利用动量定理与机械能守恒定律确定碰撞后排球与鼓的速度，得到整个过程中二者运动周期的表达式。由于拉力与水平方向的夹角的不确定性，通过遍历所有可能取值找到满足需求时力的大小与角度，以此得到最优的协调策略。

针对问题二，确定力度和时机与某时刻鼓面的倾斜角的关系式时，通过力矩分析将某时刻的鼓面倾斜角转换为与鼓所受的合外力和其方向有关的微分方程模型。将团队所有队员对鼓的拉力转换为水平、竖直方向上的分力，讨论仅力度发生改变、仅时机发生改变、二者同时发生改变情况下鼓所受的合外力，利用前面所得微分方程模型得到三种不同清理下力度、时机与鼓面倾斜角的关系式。最后根据已知关系式计算所给数据在上述三种不同情况下 0.1s 时鼓面的倾斜角度。

针对问题三，根据问题二可知在现实情况中当团队成员的控制用力方向和时机等发生变化时，鼓面会有一定的倾角，导致小球弹跳方向与竖直方向有一定角度。故有三种调整团队整体位移和成员发力情况的综合方案，分别为调整位移和发力，调整位移以及调整发力。其中根据运动力学的相关原理求解调整的位移，通过随机模拟团队成员每个人的发力时间和发力大小，通过对比分析，同时调整位移和发力情况是使垫球数最多的调整策略。

针对问题四，首先根据问题一的模型，通过题目中所给数据得到理想状态下的倾角及力与水平方向的夹角，再根据问题三中的调整位移和发力的策略模型，进行调整，通过随机模拟将理想状态下的发力情况作为指标，以发力大小的方差最小为目标求解调整的发力情况。再通过考虑空气对这种调整策略进行灵敏度分析。

三、 模型假设

1. 假设排球在空气中运动时不受空气阻力影响；
2. 假设绳子固定点沿着牛皮鼓均匀分布，且每根绳子长度相同；
3. 假设在颠球过程中，每位团队成员仅握在绳子末端；
4. 假设团队成员的站位呈等距间隔。

四、 符号变量及说明

符号	表示含义	单位
M	表示鼓的质量	kg
m	表示排球的质量	kg
g	表示地球上的重力加速度	m/s^2
$F_{拉}$	每位队员作用在绳子上对鼓的拉力	N
F_i	第 <i>i</i> 名队员的拉力	N
β	人对绳子的拉力方向与水平面的夹角	度
θ	鼓面的倾斜角度	度
l	绳子长度	m
d	鼓的初始位置较绳子水平时的距离	m
n	参与的队员人数	人
J	鼓面发生倾斜时的转动惯量	$kg \cdot m$
v_1	鼓在碰撞前的运动速度	m/s
v'_1	鼓在碰撞后的运动速度	m/s
v_2	排球在碰撞前的运动速度	m/s
v'_2	排球在碰撞后的运动速度	m/s
T_1	鼓的运动周期	s
T_2	排球的运动周期	s

五、 模型的建立与求解

5.1 理想状况下最优颠球策略模型的建立与求解

5.1.1 整个团队的最优协作策略

由题目可知，该项目的目标是使连续颠球的次数尽可能多，即使整个系统的状态尽可能的稳定。最优的协作策略可以表现在以下几个方面：

- (1) 各队员控制绳子的力度是相同的，即

$$F_1 = F_2 = \dots = F_n \quad (1)$$

其中 F_i 表示第*i*名队员对绳子的拉力大小。

- (2) 团队成员的站位呈等距间隔，即相邻两队员间的角度间隔为

$$\frac{2\pi}{n} \quad (2)$$

其中， n 表示成员数量。

5.1.1 理想状况下最优颠球策略模型的建立

在理想状态下，假设各队员控制绳子的力度、方向与时间都是相同的。假设

该项目共有 n 人参与，绳子的长度为 l 。

设计合理的协作策略时，需根据排球的运动周期与鼓面的运动周期的差的绝对值最小原则进行设计，即

$$\min T = T_2 - T_1 \quad (3)$$

其中， T_1 表示鼓面的运动周期， T_2 表示排球的运动周期。

假设鼓心竖直上方 40cm 处为排球的初始位置，则排球从 40cm 处落下与鼓碰撞过程中的受力分析图如图 1 所示：

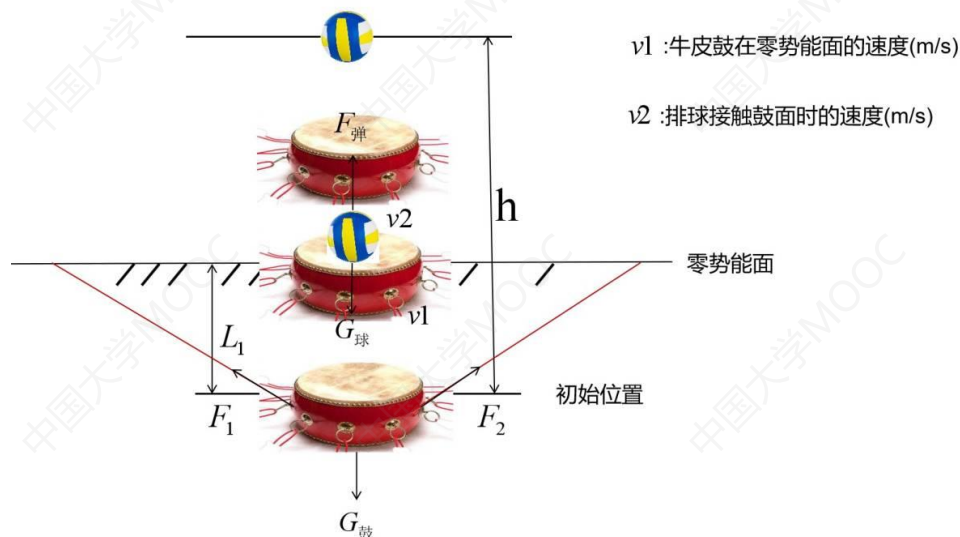


图 1：排球下落与鼓碰撞过程中的受力分析图

根据受力分析图可将该过程分为 3 个阶段：排球下落、鼓位置上升阶段；排球与鼓碰撞阶段；碰撞后排球上升阶段。

(1) 排球下落、鼓上升阶段模型

基于以上对排球从 40cm 处落下与鼓碰撞过程中的受力分析可知，每位队员作用在绳子上对鼓的拉力为 $F_{\text{拉}}$ ， β 为人对绳子的拉力方向与水平面的夹角。

假设该项目共有 n 人参与将拉力 $F_{\text{拉}}$ 沿水平方向分解为 $F_{\text{拉}}\cos\beta$ ，沿竖直方向分解为 $F_{\text{拉}}\sin\beta$ ，根据牛顿第二定律可得：

$$nF_{\text{拉}}\sin\beta - Mg = Ma \quad (4)$$

其中 M 为鼓的质量。

为顺利接到排球，如图 1 所示，鼓的初始位置为 C，二者碰撞的位置为 B，假设此时 B、C 间的竖直距离为 L_1 ，则由质点运动的位移与速度关系式可得

$$L_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \quad (5)$$

$$v_1 = at_1 \quad (6)$$

其中， v_1 为鼓运动至与排球碰撞位置时的速度， t_1 为该阶段所花费的时间。

与此同时，排球作自由落体运动，则由质点自由落体运动的速度、位移公式可知

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = 0.4 - L_1 \quad (7)$$

$$v_2 = gt_1 \quad (8)$$

其中, v_2 为排球自由落体至与排球碰撞位置时的速度。

将 (4), (6) 式联立后求解可得该过程所花费时间 t_1 的表达式为

$$t_1 = \sqrt{\frac{0.8}{a+g}} \quad (9)$$

(2) 排球与鼓碰撞阶段

设排球与鼓碰撞后鼓的速度变为 v'_1 , 排球的速度变化为 v'_2 。因为排球质量远小于鼓的质量, 因此二者在碰撞后朝同一个方向运动。由于排球撞击鼓面时对其有作用力, 而鼓面对排球有大小相同、方向相反的反作用力, 所以由质点系的动量定理^[1]知, 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量, 即

$$mg\Delta t = Mv'_1 - Mv_1 \quad (10)$$

$$mg\Delta t = mv'_2 - mv_2 \quad (11)$$

将 (8)、(9) 式联立可得

$$Mv'_1 - Mv_1 = mv'_2 - mv_2 \quad (12)$$

又因为排球与鼓面碰撞的瞬间仅有弹性势能做功, 所以遵循机械能守恒定律。排球与鼓面碰撞的过程中, 根据机械能守恒定律得:

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}Mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \quad (13)$$

综上, 排球与鼓碰撞阶段的运动方程为

$$\begin{cases} Mv'_1 - Mv_1 = mv'_2 - mv_2 \\ \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}Mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \end{cases} \quad (14)$$

(3) 碰撞后排球与鼓的上升阶段

与鼓面碰撞后排球受到鼓面对其的反作用力竖直向上作减速运动, 由质点的运动与位置公式可知排球上升的高度 h 、运动时间 t_2 分别为

$$h = \frac{v_2'^2}{2g} \quad (15)$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (16)$$

鼓受惯性作用影响向上运动, 其运动的加速度 a' 、时间 t_3 为

$$a' = \frac{nF_{\text{拉}}\sin\beta - Mg}{M} \quad (17)$$

$$t_3 = \frac{v_2'}{a'} \quad (18)$$

综上可知在排球与鼓碰撞的过程中, 由 (9)、(16)、(18) 式可知鼓、排球的运动周期分别为

$$T_1 = (t_1 + t_3) \times 2 = \left(\sqrt{\frac{0.8}{a+g}} + \frac{v_2'}{a'} \right) \times 2 \quad (19)$$

$$T_2 = 2t_2 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (20)$$

5.1.2 理想状况下最优颠球策略模型的求解

由题可知, 排球的质量为 $0.27kg$, 鼓的质量为 $3.6kg$ 。当球与鼓面碰撞后弹起的高度小于 $40cm$ 时项目结束, 由 (15) 可知, 若要项目继续则可得

$$h = \frac{v_2'^2}{2g} \geq 40 \quad (21)$$

由(19)、(20)式可得,排球的运动周期与鼓面的运动周期的差的绝对值

$$T = |T_1 - T_2| = \left| \sqrt{\frac{0.8}{a+g}} + \frac{v_2'}{a'} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \right| \quad (22)$$

将(4)、(17)式代入(22)式后发现若要使得两者时间之差的绝对值最小,则当 $F_{\text{拉}}$ 及 β 确定时,最短的间隔时间便易求得,但由于拉力与水平方向的夹角 β 的不确定性,考虑实际情况中人对绳子的拉力与水平方向的角度范围为 $[0, \frac{\pi}{2})$,进而通过 MATLAB 对所有可能的 β 值进行遍历计算,通过计算后发现当 β 的值为 0.6109° 时,排球与鼓面的运动周期之差的绝对值达到最小值,此时 $F_{\text{拉}} = 83N$,

求解得最优策略下的颠球高度为 $0.4004m$,此时有 10 名成员,得到最优的协作颠球策略:

(1) 准备阶段:在颠球开始前,每位队员所牵的绳子与鼓面在同一平面上,其后鼓下落一定位置,使得在开始时给予小球向上的力;

(2) 排球抛出阶段:每位队员均匀发力 $83N$,绳子与鼓面水平方向呈 0.6109° ,将鼓面拉至水平发力,排球向上抛出,鼓下落一定位置;

(3) 排球与鼓碰撞阶段:每位队员仍均匀发力 $83N$,绳子与鼓面水平方向呈 0.6109° ,将鼓面拉至水平发力,此时排球下落与鼓中心相互碰撞;

(4) 碰撞后排球与鼓的上升阶段:碰撞后,鼓由于惯性仍上升一定高度,小球向上抛出,此后鼓回到原来位置。

5.2 求解现实情况下发力时机、力度与特定时刻倾斜角的关系

5.2.1 发力时机、力度与特定时刻倾斜角的关系模型

(1) 对鼓的力矩分析

假设绳子的长度为 l ,鼓的初始位置较绳子水平时的距离为 d , β 为人对绳子的拉力方向与水平面的夹角,因此可知

$$\sin\beta = \frac{d}{l} \quad (23)$$

当鼓发生倾斜时仅考虑旋转,将其视作一通过鼓中心 O 并绕与鼓垂直的轴转动的旋转体,旋转点为鼓心 O 。设所有队员对鼓的合外力为 $F_{\text{合}}$,则点 O 到 $F_{\text{合}}$ 的作用线的垂直距离 d 与合力的大小的乘积为合外力对转轴的力矩,即

$$M = F_{\text{合}}d = F_{\text{合}}r\sin\beta \quad (24)$$

其中 M 表示合外力对转轴的力矩。

设某一时刻鼓面的倾斜角度为 θ ,则发生倾斜时的角加速度为

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (25)$$

由转动定律^[2]知,刚体的角加速的与其所受合外力矩成正比,即

$$M = J\alpha \quad (26)$$

其中 J 为刚体的转动惯量。

当内半径趋于 0 时，均匀圆柱壳刚体可近似作为均匀圆柱体刚体^[3]，此时鼓为空心鼓，内部厚度可忽略不计，则鼓的转动惯量为

$$J = \frac{1}{4}Mr^2 + \frac{1}{12}ML^2 \quad (27)$$

其中 M, L 分别为鼓的质量与高度。

将(25)式代入(26)式并与(24)式联立，可得到某一时刻鼓发生倾斜时的角度与其合外力的微分方程：

$$\begin{cases} J \frac{d^2\theta}{dt^2} = F_{\text{合}} r \sin\beta \\ J = \frac{1}{4}Mr^2 + \frac{1}{12}ML^2 \end{cases} \quad (28)$$

(2) 鼓面产生倾斜时刻的受力分析

基于以上对鼓发生倾斜时力矩的变化可知，当鼓面的倾斜角度与其所受的合外力相关。假设有 n 个队员且站位是均匀分布的，则相邻队员间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$ 。当鼓发生倾斜时其受力情况如图 2 所示：

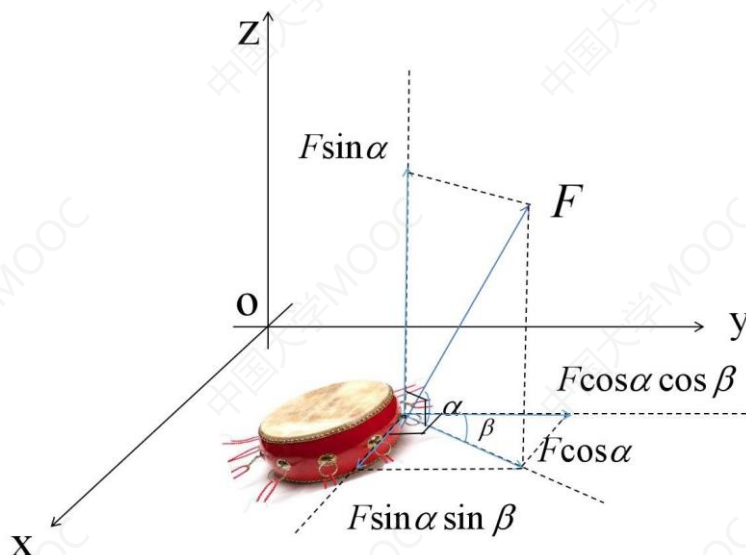


图 2：鼓发生倾斜时的受力分析图

现考虑以下三种情况时鼓所受的合外力大小：

(1) 仅力度改变时某时刻鼓面倾斜的模型

设第 i 名队员对鼓的拉力大小为 $F_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，因为队员在某一时刻改变发力的时机或力度是非常迅速的，因此可认为各拉力的方向不变。所以当某一时刻发力时机或力度发生改变时，人对绳子的拉力方向与水平面的夹角仍为 α 。

将拉力 F_i 沿水平、竖直方向分解，则可得竖直方向上鼓所受的合外力为

$$F_{\text{竖}} = \sum_{i=1}^n F_i \sin\beta - Mg \quad (29)$$

由于水平方向上第 i 名队员的拉力大小方向各不相同，设鼓面的中心为原点，以鼓面所在平面为 xoy 面，以鼓面的水平直径的连线方向为 x 轴，垂直直径的连线方向为 y 轴，建立如图 3 所示的直角坐标系：

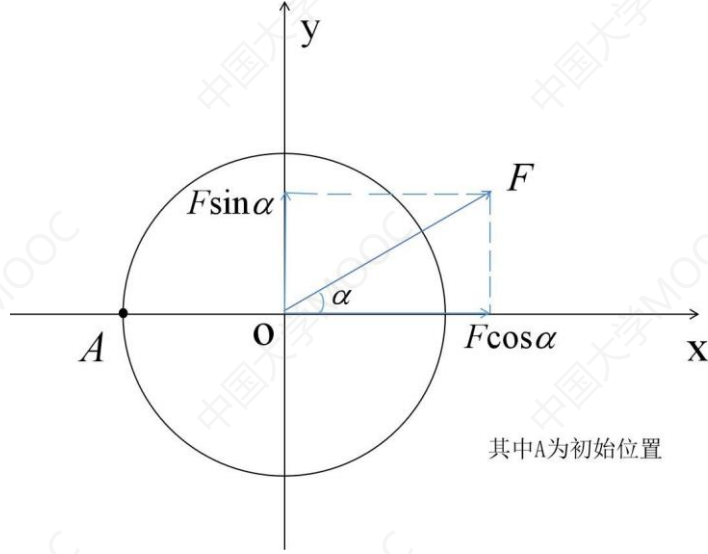


图 3: 鼓面的直角坐标系

假设第 1 名队员恒位于图 2 中 A 点处且以逆时针顺序依次均匀排列, 第 j 名队员拉绳子的力度发生了改变, 对第 j 名队员水平方向上的拉力 $F_j \cos \alpha$ 进行分解, x 、 y 轴方向上的分力大小的表达式如表 1 所示:

表 1: 水平拉力位于不同范围时 x 、 y 方向的分量表达式

范围	$0 \leq \frac{2\pi(k-1)}{n} \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\pi(k-1)}{n} \leq \pi$
x 方向的分力表达式	$F_{x1} = \sum_j F_j \cos \beta \cos(\frac{2\pi(k-1)}{n})$	$F_{x2} = \sum_j F_j \cos \beta \cos(\frac{2\pi(k-1)}{n} - \frac{\pi}{2})$
y 方向的分力表达式	$F_{y1} = \sum_j F_j \cos \beta \sin(\frac{2\pi(k-1)}{n})$	$F_{y2} = \sum_j F_j \cos \beta \sin(\frac{2\pi(k-1)}{n} - \frac{\pi}{2})$
范围	$\pi \leq \frac{2\pi(k-1)}{n} \leq \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{2\pi(k-1)}{n} \leq 2\pi$
x 方向的分力表达式	$F_{x3} = \sum_j F_j \cos \beta \cos(\frac{2\pi(k-1)}{n} - \pi)$	$F_{x4} = \sum_j F_j \cos \beta \cos(\frac{2\pi(k-1)}{n} - \frac{3\pi}{2})$
y 方向的分力表达式	$F_{y3} = \sum_j F_j \cos \beta \sin(\frac{2\pi(k-1)}{n} - \pi)$	$F_{y4} = \sum_j F_j \cos \beta \sin(\frac{2\pi(k-1)}{n} - \frac{3\pi}{2})$

综上 x 、 y 轴方向上总分力 F_x, F_y 分别为

$$F_x = -F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} - F_{x4} \quad (30)$$

$$F_y = -F_{y1} - F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} \quad (31)$$

所以鼓在水平方向所受的合外力为

$$F_{\text{合}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (32)$$

由 (21) 式、(24) 式可知所有队员对鼓的合外力 $F_{\text{合}}$

$$F_{\text{合}} = \sqrt{F_{\text{竖}}^2 + F_{\text{水}}^2} \quad (33)$$

其中 $F_{\text{竖}}$ 、 $F_{\text{水}}$ 分别为鼓在竖直、水平方向上所受的合外力。

将 (33) 式代入 (28) 式即可得仅力度改变的情况下鼓面倾斜角与其所受的合外力的微分方程关系式

$$\begin{cases} J \frac{d^2\theta}{dt^2} = r \sin\alpha \sqrt{F_{\text{竖}}^2 + F_{\text{水}}^2} \\ J = \frac{1}{4}Mr^2 + \frac{1}{12}ML^2 \end{cases} \quad (34)$$

(2) 仅时机改变时某时刻鼓面倾斜的模型

设在 0 时刻前每名队员对绳子的拉力 F 是恒定的。因为在鼓开始颠球前的运动状态是静止的，此时鼓仅受自身的重力以及绳子对其的拉力影响，由受力平衡可知在竖直方向上鼓所受的合外力为 0，即

$$nF \sin\beta = Mg \quad (35)$$

由此可求得鼓开始运动前每名队员对绳子的拉力 F 为

$$F = \frac{Mg}{n \sin\beta} \quad (36)$$

采取与仅力度改变时鼓面倾斜角变化情况的相同的建模方法，同理可得如 (34) 式的仅时机发生改变时鼓面的倾斜角与鼓所受的合外力的微分方程关系式。

(3) 当力度、时机均改变时某时刻鼓面倾斜的模型

在该情况下队员发力时机及力度均可能发生变化，可能某一时刻发力的时机和力度均发生变化或仅有一项发生改变。

若某一时刻仅有一个因素发生变化，则鼓面的倾斜角与鼓所受的合外力的微分方程关系式如 (34) 式。

若某一时刻的发力时机与力度均发生改变，则鼓面的倾斜角与鼓所受的合外力的微分方程关系式为

$$\begin{cases} J \frac{d^2\theta}{dt^2} = r \sin\alpha \sqrt{F_{\text{竖}}^2 + F_{\text{水}}^2} \\ J = \frac{1}{4}Mr^2 + \frac{1}{12}ML^2 \\ F = \frac{Mg}{n \sin\beta} \end{cases} \quad (37)$$

5.2.2 发力时机、力度与特定时刻倾斜角的关系模型的求解

已知不同情况下鼓面的倾斜角与鼓所受的合外力的微分方程关系式，设某一时刻前的时间间隔为 Δt ，通过给定初值条件 Δt 、0 时刻的鼓面的倾斜角来计算微分方程在满足初值条件下的数值解。求解某一时刻鼓面的倾斜角的流程图如图 4 所示：

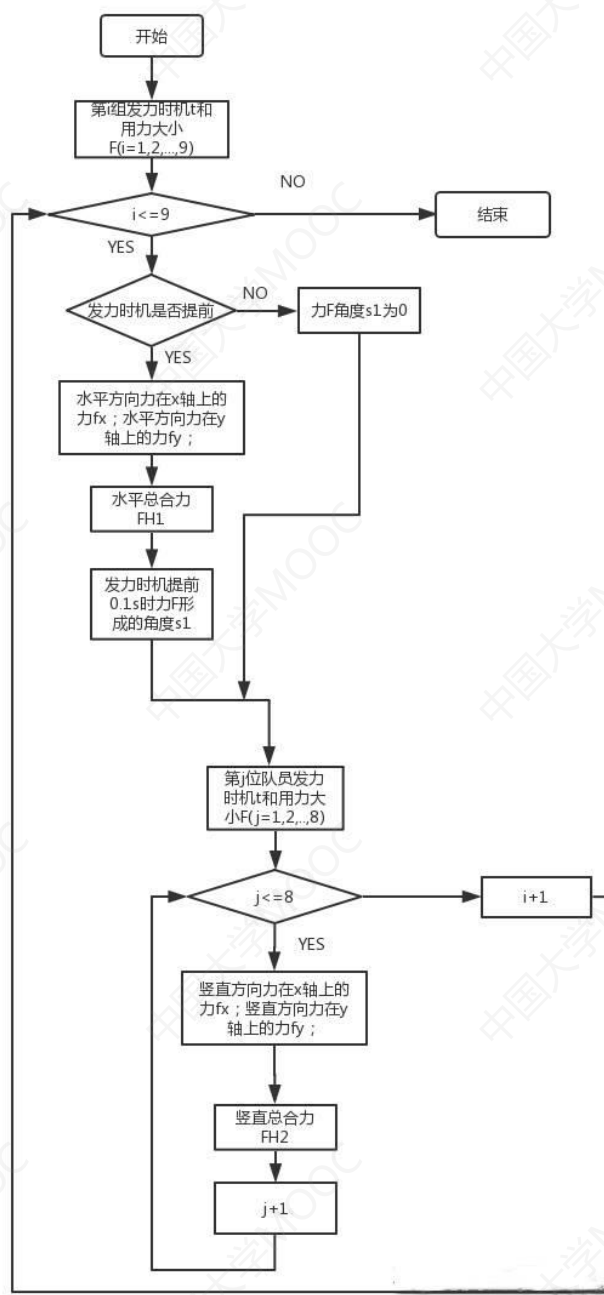


图 4：求解某时刻鼓面倾斜角的流程图

求解的算法步骤为：

Step1：导入 9 组发力时机 t 和用力大小 F ；

Step2：判断 i 是否小于等于 9；若是，则转至 Step3；若否，则结束；

Step3：判断第 i 组发力时机 t 是否提前 ($i=1, 2, \dots, 9$)，若是，则转至 Step2；若否，则力 F 角度与水平夹角 s_1 为 0；

Step4：计算第 i 组水平方向力在所在平面的 x 轴上的分力 f_{x1} ，在 y 轴上的分力 f_{y1} ；

Step5：求解水平总合力 FH_1 ；

Step6：求解发力时机提前 0.1s 时力 F 形成的角度 s_1 ；得到每组的角速度 s_1 ；

Step7: 导入 8 位队员发力时机 t 和用力大小 F ;

Step8: 判断 j 是否小于等于 8; 若是, 则转至 Step7; 若否, $i + 1$ 且转至 Step2;

Step9: 计算第 j 位队员 ($j=1, 2, \dots, 9$) 竖直方向力在所在平面的 x 轴上的分力 f_{x2} , 在 y 轴上的分力 f_{y2} ;

Step10: 求解竖直总合力 FH_2 ; $j + 1$ 且转至 Step8。

5.2.3 在不同发力时机和力度大小下 0.1s 时鼓面倾斜角求解

题目给出了 9 组发力时机和力度大小在不同情况下的数据。由题目可得队员数为 8 人, 与鼓相连的绳子长度为 1.7 m , 鼓的初始位置与绳子水平时的相对距离为 0.11 m 。通过分析 9 组已知数据可知: 序号 1、2、3 针对仅力度发生改变时的情况; 序号 4、5、6 针对仅时机发生改变时的情况; 序号 7、8、9 针对力度与时间均发生改变时的情况。

根据上述的模型求解流程, 首先判断已知数据所针对的情况, 再分别求出竖直、水平方向上的合外力根据式 (33) 计算得出鼓所受到的合外力, 最后通过 MATLAB 求解微分方程关系式得不同发力时机和用力大小的情况下 0.1s 时鼓面的倾斜角度如表 2 所示:

表 2: 9 组不同数据情况下 0.1s 时鼓面的倾斜角度表

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
鼓面 倾角 (度)	0.360 1	0.381 2	0.337 8	0.949 9	1.409 7	0.392 1	1.050 2	0.393 3	0.393 3

5.3 已发生鼓面倾斜时对理想状况下策略调整的模型的建立与求解

由问题二所建立的力度大小、时机与鼓面倾斜角的关系可知, 此时鼓面已经发生倾斜, 小球再撞击后在水平方向上会产生分力造成小球的移动, 所以需对理想状况下给出的最优策略进行调整。

对已倾斜的鼓面进行颠球的调整可以分为以下三种情况:

情况一: 所有队员进行水平移动, 通过倾斜鼓面角度使得排球作竖直状态运动;

情况二: 水平移动调整鼓的位置, 通过改变某些队员的力度大小使排球再次落在鼓心上;

情况三: 所有队员不进行水平移动, 仅通过倾斜鼓面使得排球作满足颠球高度大于 0.4 m 但落点不在鼓心的竖直运动。

针对上述的 3 种情况分别作受力分析并给出合理的调整方案。

5.3.1 针对情况一的调整模型的建立与求解

(1) 情况一调整模型的建立

在该情况下所有队员进行水平移动, 通过改变倾斜角度使得排球下落与鼓面再次碰撞后变为竖直运动。假设所有队员调整的水平位移为 x , 调整的倾斜角度为 γ , 则在该情况下排球与鼓的受力分析图如图 5 所示:

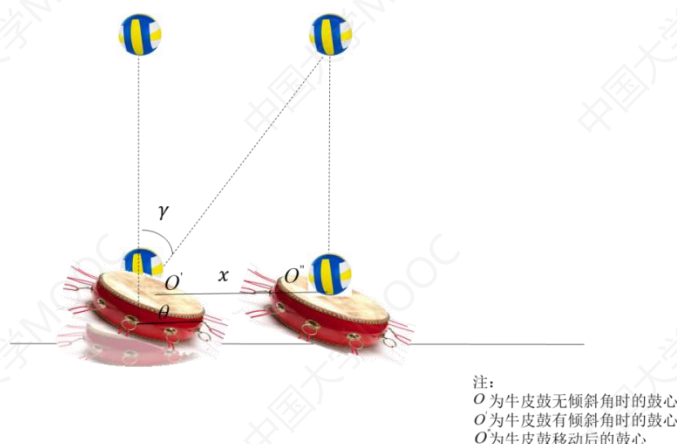


图 5：情况一下排球与鼓的受力分析图

由于排球与鼓面碰撞时不考虑能量的损失，通过动量守恒定律可知碰撞后排球运动的动能转换为排球竖直下落的重力势能，即

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2'^2 \quad (38)$$

其中， m 为排球的质量， h 为鼓面调整后排球作竖直运动时的下降高度。

通过问题一可求得排球与鼓面碰撞后排球的速度 v_2' ，代入（38）式后可得出调整后排球作竖直运动时的下降高度，假设调整的倾斜角度为 γ ，所以调整后排球与水平方向的夹角为 $\frac{\pi}{2} - 2\gamma$ ，调整的水平位移与夹角的关系可得

$$\frac{h}{x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right) \quad (39)$$

由此可得出当倾斜角度调整时所有队员的水平位移变化。

（2）情况一调整模型的求解

通过求解问题一的模型可得排球与鼓面碰撞后的速度 v_2' 为

$$v_2' = \frac{0.5375v_2}{1.4625} \quad (40)$$

将（40）式代入（38）式后可得下落高度，由此得出调整的倾斜角度与队员水平位移的关系式，但由于调整角度 γ 的不确定性，通过 MATLAB 对所有可能的 γ 值进行遍历计算得出相应倾斜角度调整下水平位移的调整方案。

5.3.2 针对情况二的调整模型的建立与求解

（1）情况二调整模型的建立

当鼓发生倾斜时，通过水平移动鼓的位置并人为施加力改变则在该情况下鼓的倾斜角度使得排球的落点在鼓心上，此时排球与鼓的受力分析图如图 6 所示：

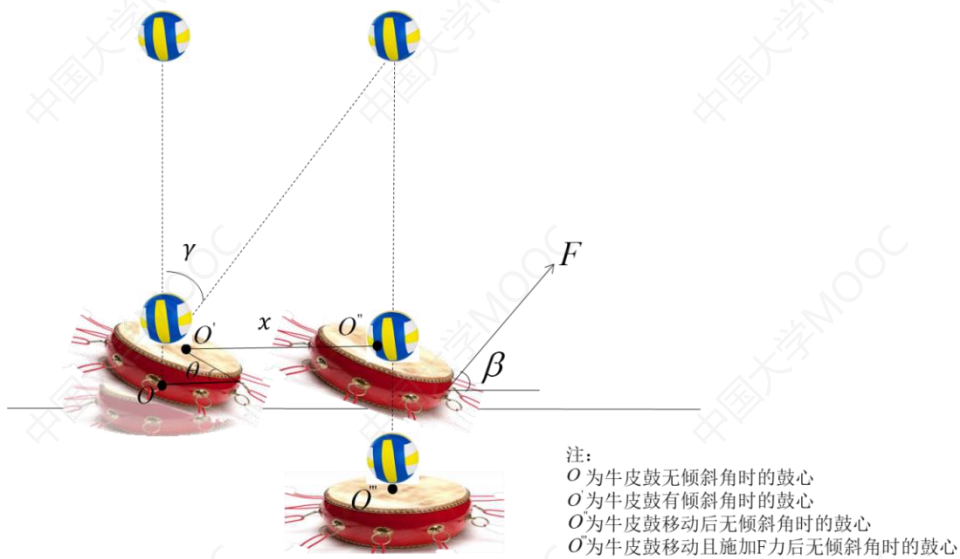


图 6：情况二下排球与鼓的受力分析图

与情况一相同，鼓需进行水平方向上的移动，得到如（39）式的倾斜角度变化与水平方向上的位移关系式。

另外，为了使下次下落时排球落在鼓心处，此时仍需施加力 F 进行调整，由问题二模型可得鼓面倾斜角度变化与合外力的微分方程为

$$\begin{cases} J \frac{d^2\gamma}{dt^2} = Fr \sin\beta \\ J = \frac{1}{4}Mr^2 + \frac{1}{12}ML^2 \end{cases} \quad (41)$$

其中 J 为鼓发生倾斜时的转动惯量。

综上，将（39）、（41）式联立，

$$\begin{cases} J \frac{d^2\gamma}{dt^2} = Fr \sin\beta \\ \frac{h}{x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right) \\ J = \frac{1}{4}Mr^2 + \frac{1}{12}ML^2 \end{cases} \quad (42)$$

上述模型即为情况二下调整鼓的水平位移和施加外力的策略模型。

（1）情况二调整模型的求解

基于情况一模型的求解，通过求解调整的倾斜角度 γ 基于情况二模型计算出相应角度值时的水平位移及 F 的大小以此改变协作策略。由于问题二存在发力时机与力度不同的情况，所以在计算时采用随机模拟，随机产生发力时机为 $-0.1 \sim 0s$ ，力度大小为 $80 \sim 90N$ 的情况。通过 MATLAB 进行计算，若存在一倾斜角 γ 使得总力矩可以与已存在的鼓面倾斜角抵消，则说明该方法可以有效调整使得团队可以稳定接到球。

5.3.3 针对情况三的调整模型的建立与求解

（1）情况三调整模型的建立

在该情况下所有成员不发生水平位移，通过调整人员的发力力度大小使得球每一次都能竖直弹跳且弹跳高度不低于 $0.4m$ 。假设调整的倾斜角度为 γ ，在该情况下排球与鼓的受力分析图如图 7 所示：

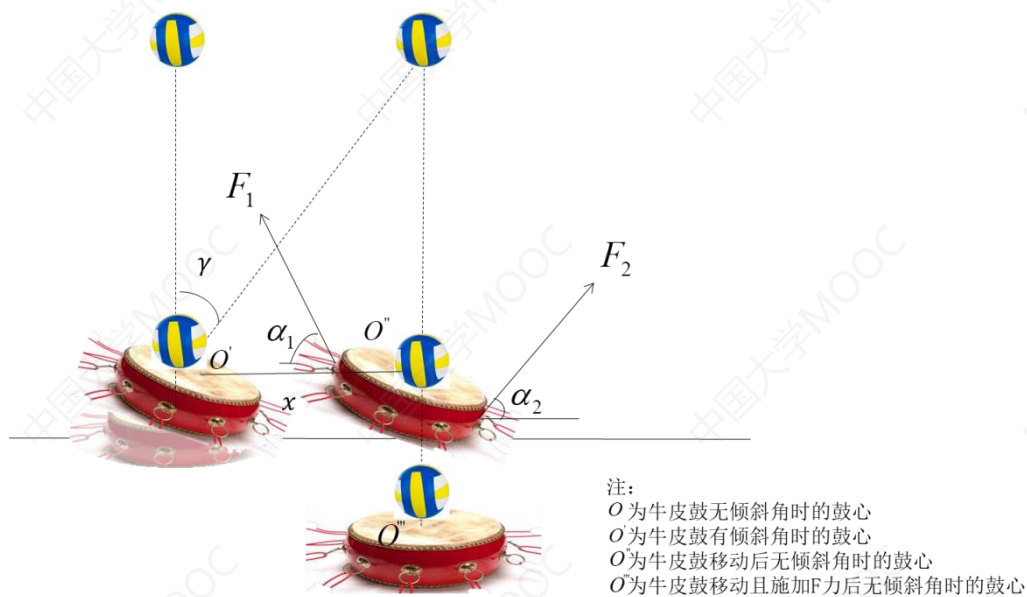


图 7：情况三下排球与鼓的受力分析图

设 h 为鼓面调整后排球作竖直运动时的下降高度，在每次颠球过程中都应保证高度 h 不低于 $0.4m$ ，即

$$h \geq 0.4 \quad (43)$$

如图 6 受力分析图所示，假设倾斜角较高处的合力为 F_1 ，分力与水平方向的夹角为 α_1 ；倾斜角较低处的合力为 F_2 ，分力与水平方向的夹角为 α_2 。队员通过不断调整发力力度大小使得排球保持竖直运动，因此应减小 F_1 、增大 F_2 。将合力沿水平、竖直进行分解，水平方向上的力相互抵消鼓的位置保持不变，竖直方向上的分力可以提起鼓的质量，即

$$\begin{cases} |(F_1 \sin \alpha_1 - \Delta_1) - (F_2 \sin \alpha_2 - \Delta_2)| \geq Mg \\ F_1 \cos \alpha_1 \cos \gamma = F_2 \cos \alpha_2 \cos \gamma \end{cases} \quad (44)$$

其中 Δ_1, Δ_2 表示对应分力的变化量。

(2) 情况三调整模型的求解

依据问题二的模型可以求得各分力在水平方向上的大小，通过判断某一次下落过程中排球的落点位置与鼓心位置的关系，若落点位置在鼓心的左边则减小所在边的合力，反之则增大其合力相应。运过 MATLAB 判断某一次排球的落点位置确定相应的调整方案，对所有可能的 γ 值进行遍历计算寻找满足（43）式条件的最小倾斜角度以此确定相应合力方向上的力的大小的变化量。

5.4 鼓面发生倾斜时调整策略的模型建立与求解

5.4.1 鼓面发生倾斜时调整策略的模型的建立

队员通过改变对绳子的拉力大小或方向来调整已发生倾斜的鼓面属于问题三中的情况二。根据问题三的情况二所建立的调整模型，得到队员通过改变拉绳策略来改变倾斜角的模型为

$$\begin{cases} J \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = Fr \sin \beta \\ \frac{h}{x} = \tan(\frac{\pi}{2} - 2\gamma) \\ J = \frac{1}{4} Mr^2 + \frac{1}{12} ML^2 \end{cases} \quad (45)$$

5.4.2 鼓面发生倾斜时调整策略的模型的求解

(1) 评价调整合理性的评价的确定

由题可知，队员数为 10，拉绳长度为 $2m$ ，排球与鼓面碰撞后的反弹高度为 $0.6m$ 。为了保持整个团队系统的稳定性，故采取逼近理想点方法将评价对象与理想点进行比较，

设评价函数为：

$$f(y_j) = \sum_{j=1}^n (y_j - y_{理})^2 \quad (46)$$

其中 $y_{理}$ 代表理想状态下的拉力值。

(2) 合理调整策略的求解及调整效果的评价

通过 MATLAB 采用随机模拟，随机产生发力时机为 $-0.1 \sim 0s$ ，力度大小为 $80 \sim 90N$ 的情况，寻找可行的策略调整方案。由 (46) 式模型计算得最优的调整策略如表 3 所示：

表 3：当团队有 10 名时调整为竖直弹跳的策略

队员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
时机	0	0	0	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	0	-0.1	0
力度	83.74	83.43	83.49	80.67	81.31	85.14	87.21	84.96	84.50	87.23

由上表可知，第 4、5、6、7、9 名队员需提前拉绳且拉绳的大小分别为： $80.67N$, $81.31N$, $85.14N$, $87.21N$, $84.50N$ 。

发力大小在理想状态附近的波动图如图 8 所示：

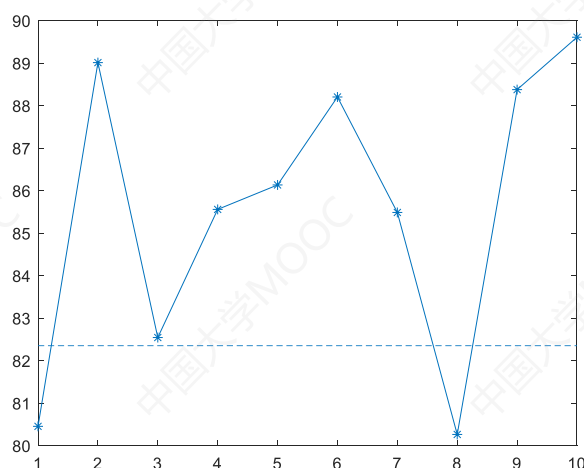


图 8：发力大小在理想状态附近的波动图

此时评价函数的指标为 74.85，说明该调整策略下团队系统的稳定性较好。为分析该策略在现实情况中的效果，对调整发力大小的队员数进行灵敏度分析，分别考虑调整 1 人、2 人、3 人发力大小时的调整策略，所得结果如下：

当 1 人改变发力大小时，策略如表 4 所示：

表 4：改变 1 人发力大小时的调整策略

队员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
力度	82.61	82.35	82.35	82.35	82.35	82.35	82.35	82.35	82.35	82.35

由上表可知当仅有 1 人大小改变时，力的改变值为 82.61N
改变 1 人发力大小时在理想状态附近的波动图如图 9 所示：

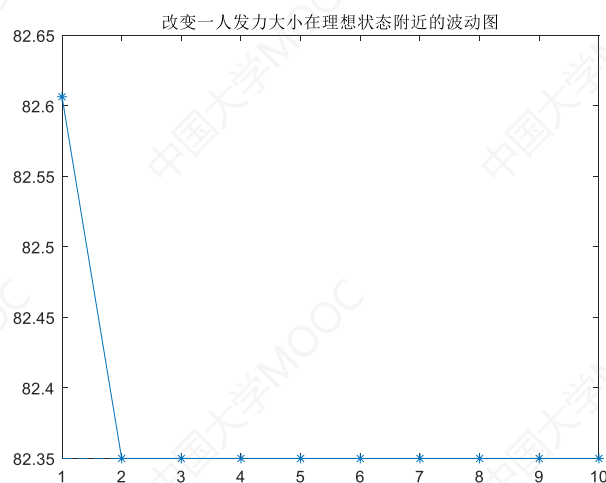


图 9：改变 1 人发力大小时在理想状态附近的波动图

同理，改变 2、3 人发力大小时在理想状态附近的波动图如图 10、11 所示：

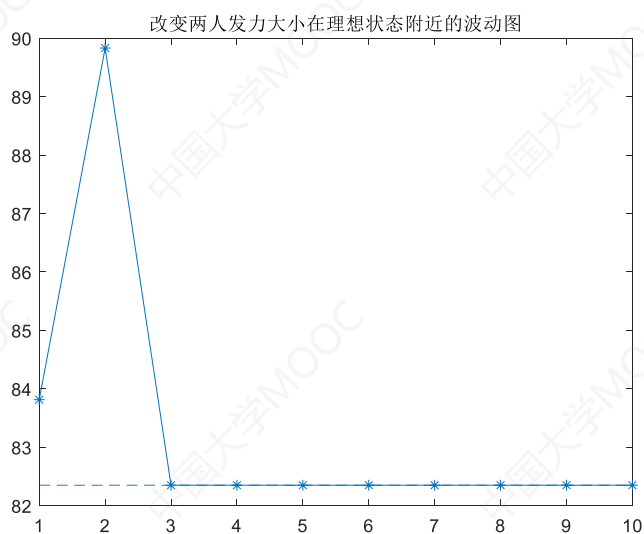


图 10：改变 2 人发力大小时在理想状态附近的波动图

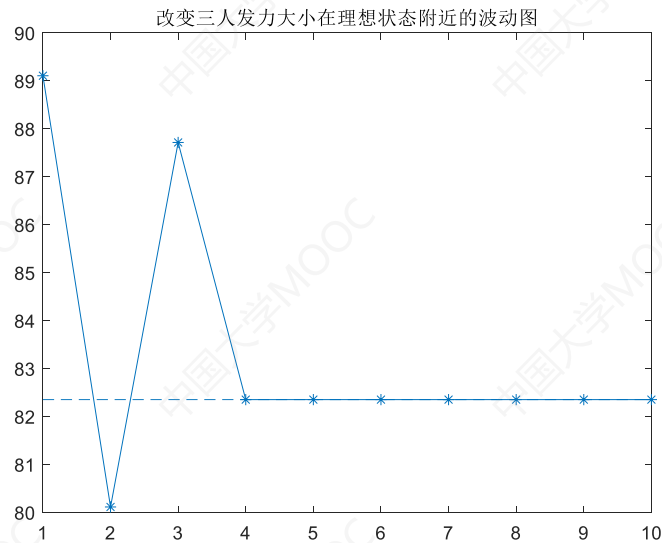


图 11: 改变 3 人发力大小时在理想状态附近的波动图

综上, 当且仅当一个人进行改变时, 整个系统较为稳定, 而随着人数的增加, 波动幅度变大, 而当所有成员开始调度, 则两两之间波动幅度变大, 较为不稳定。

六、模型的检验

6.1 对问题二模型绳长的灵敏度分析

考虑到绳子的长度对初始拉力方向有着影响, 会对每组倾角有影响, 因此对绳子长度进行灵敏度分析, 通过 MATLAB 计算得不同绳长与倾角的情况如图 12 所示:

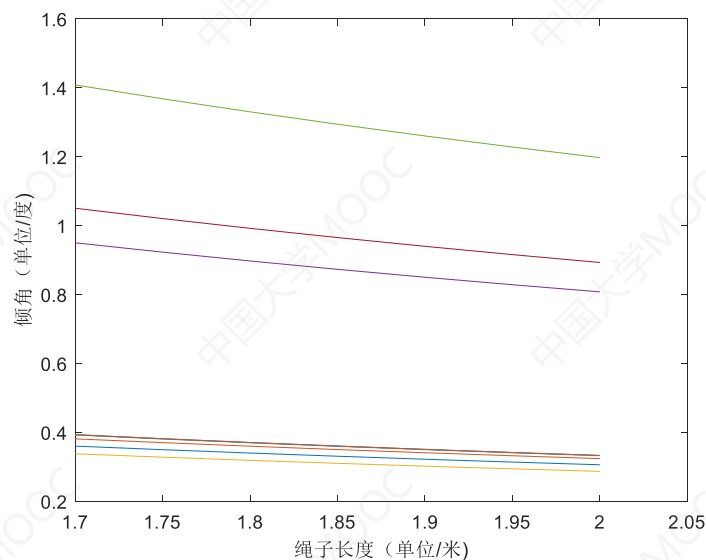


图 12: 绳子长度与的关系图

综上可知, 随着绳子的长度的增长, 倾角呈下降趋势。

七、模型的改进与评价

7.1 模型的优点

1. 本文采用动力学模型和力矩模型对同心鼓项目的最优协作策略进行描述, 分别考虑了理想、现实情况下成员力度大小与发力时机对鼓面倾斜角的影响以及对策略的调整, 建立的模型具有严谨的推导过程和普适性。

2. 在模型计算调整排球为竖直方向弹跳时采用了评价函数来衡量策略对团体稳定性的影响, 在一定程度上可靠性。

7.2 模型的缺点

1. 在排球与鼓运动过程中考虑的因素较少导致解决问题时可能存在部分误差。

7.3 模型的改进

在实际情况下, 颠球过程的稳定性不仅受到参与者所施力的大小, 方向, 角度, 用力时机, 站位等因素, 还受到外界因素的影响, 如: 空气阻力, 鼓面的弹性系数。因此可在模型中加入空气阻力与鼓面的弹性系数, 分析对颠球过程稳定性的影响。

八、模型的应用与推广

本文运用了动力学与力矩的相关知识对合理的同心鼓颠球策略进行了求解。动力学模型在经济、军事等领域有着广泛的应用, 还可将该方法应用于资源与可持续发展的研究中。动力学不仅可以解决对简单事物的控制问题, 对其它相关行业也有很高的应用价值。

参考文献:

- [1] 马文蔚; 周雨青; . 物理学(上); 北京: 高等教育出版社; 2014.
[2] 张金锋; 刘建军; 公丕锋; 袁五届; 张永兴; . 基于均质圆柱壳刚体转动惯量的计算[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2015, v. 37; No. 136 (02).

附录:

1. 基于 MATLAB2016b 求解理想状况下的最优控制颠球方案

```
clear;clc
B=[];T=[];V1=[];V2=[];V11=[];V22=[];H=[];
for F=70:1:90
    for afa=pi/12:pi/36:pi*5/12
        for n=8:12
            a=double((n*F*sin(afa)-3.6*9.8)/3.6);
            a1=double((n*F*sin(afa)+3.6*9.8)/3.6);
            B=[B;a a1]
            t=sqrt(80/(a+9.8));
            T=[T;t]
            v1=a*t;%鼓运动至与排球碰撞位置时的速度
            V1=[V1;v1];
            v2=9.8*t;%排球运动至与鼓碰撞位置时的速度
            V2=[V2;v2];
            % [v11,v22]=solve('3.6*v11-3.6*v1=0.27*v22+0.27*v2','0.5*3.6*v1^2+0.5*0.27*v2^2=0.5*3.6*v11^2+0.5*0.27*v22^2')
            v11=double(0.4625*v2-0.5375^2/1.4625*v2);%碰撞后鼓的运动速度
```

```

v22=double(0.5375/1.4625*v2);%碰撞后排球的运动速度
V11=[V11;v11]
V22=[V22;v22]
h=v22^2/(2*9.8);%碰撞后排球的上升高度
t1=sqrt(2*h/9.8);%排球的运动周期
t2=v22/a1;%鼓下降过程中的运动周期
tt=abs(t1-(t+t2));%排球运动周期与鼓的运动周期的差的绝对值
if h>=0.4
H=[H;tt h F afa n];
end
end
end
end
H(find(H(:,1)==min(H(:,1))),2)%寻找最小颠球高度
H(find(H(:,1)==min(H(:,1))),3)%寻找最合适的人的拉力大小
H(find(H(:,1)==min(H(:,1))),4)%寻找此时拉力与水平面的夹角
H(find(H(:,1)==min(H(:,1))),5)%寻找此时参与的队员数

```

2. 基于 MATLAB2016b 求解在发力的力度与时间变化的情况下鼓面的倾斜角

```

clear;clc;
x=[0 0 0 0 0 0 0 0
90 80 80 80 80 80 80 80
0 0 0 0 0 0 0 0
90 90 80 80 80 80 80 80
0 0 0 0 0 0 0 0
90 80 80 90 80 80 80 80
-0.1 0 0 0 0 0 0 0
80 80 80 80 80 80 80 80
-0.1 -0.1 0 0 0 0 0 0
80 80 80 80 80 80 80 80
-0.1 0 0 -0.1 0 0 0 0
80 80 80 80 80 80 80 80
-0.1 0 0 0 0 0 0 0
90 80 80 80 80 80 80 80
0 -0.1 0 0 -0.1 0 0 0
90 80 80 90 80 80 80 80
0 0 0 0 -0.1 0 0 -0.1
90 80 80 90 80 80 80 80];
m=3.6;
g=9.8;
ss=[];
for o=1:2:17
xx=x(o:o+1,:);
s1=0;

```

```

syms t;
y1=find(xx(1,:)==-0.1);
fx=0;
fy=0;
F=0;
S1=[];
FH1=[];
FH2=[];
if size(y1,2)~=0
    for i=1:size(y1,2)
        fx=fx+(xx(2,y1(i))*169.6/170)*cos(45*(y1(i)-1));
        fy=fy+(xx(2,y1(i))*169.6/170)*sin(45*(y1(i)-1));
    end
    fh=sqrt(fx^2+fy^2);
    for i=1:size(y1,2)
        F=F+(xx(2,y1(i))*11/170-m*g/8);
    end
    FH=sqrt(F^2+fh^2);
    FH1=[FH1;FH];

y=dsolve('(3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH1*0.2*11/170','s(0)=0','s(-0.1)=0','t');
    s1=eval(subs(y,t,0.1));
else
    s1=0;
end
% S1=[S1;s1];
fx=0;
fy=0;
F=0;
for j=1:8
    fx=fx+(xx(2,j)*169.6/170)*cos(45*(j-1));
    fy=fy+(xx(2,j)*169.6/170)*sin(45*(j-1));
    fh=sqrt(fx^2+fy^2);
    F=F+(xx(2,j)*11/170-m*g/8);
end
    FH=sqrt(F^2+fh^2);
    FH2=[FH2;FH];

y=dsolve('(3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH2*0.2*11/170','s(0)=s1','s(-0.1)=0','t');
    s2=eval(subs(y,t,0.1));
    ss=[ss;s1+s2];

end

```

```

ss
3.
for p=2:2:size(aa)
    for q=1:10
        cha=cha+(aa(p,q)-82.35)^2;
        ss=[ss;cha];
    end
end
aa(find(ss==min(ss))*2-1:find(ss==min(ss))*2,:)
min(ss)

```

3. 基于 MATLAB2016b 对问题二的模型检验

```

clear;clc;
m=3.6;
g=9.8;
ss=[];
theta=[ 0.3601
        0.3812
        0.3378
        0.9499
        1.4079
        0.3921
        1.0502
        0.3933
        0.3933];
for xh=1:9
    a=asin(11/170);
    count=0;
    for jj=1:100
        x=unifrnd(-0.1,0,1,8);
        y=unifrnd(80,90,1,8);
        for i=1:8
            if x(i)<=-0.05
                x(i)=-0.1;
            else
                x(i)=0;
            end
        end
        xx=[x;y];
        s1=0;
        syms t;
        y1=find(xx(1,:)==-0.1);
        fx=0;
        fy=0;
    end
end

```

```

F=0;
FH1=[];
FH2=[];
if size(y1,2)~=0
    for i=1:size(y1,2)
        fx=fx+(xx(2,y1(i))*cos(a))*cos(45*(y1(i)-1));
        fy=fy+(xx(2,y1(i))*cos(a))*sin(45*(y1(i)-1));
    end
    fh=sqrt(fx^2+fy^2);
    for i=1:size(y1,2)
        F=F+(xx(2,y1(i))*sin(a)-m*g/8);
    end
    FH=sqrt(F^2+fh^2);
    FH1=[FH1;FH];

yy=dsolve('(3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH1*0.2*sin(a)', 's(0)=0', 's(-0.1)=0', 't');
    s1=eval(subs(yy,t,0.1));
else
    s1=0;
end
fx=0;
fy=0;
F=0;
for j=1:8
    fx=fx+(xx(2,j)*cos(a))*cos(45*(j-1));
    fy=fy+(xx(2,j)*cos(a))*sin(45*(j-1));
    fh=sqrt(fx^2+fy^2);
    F=F+(xx(2,j)*sin(a)-m*g/8);
end
FH=sqrt(F^2+fh^2);
FH2=[FH2;FH];

yy=dsolve('(3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH2*0.2*sin(a)', 's(0)=s1', 's(-0.1)=0', 't');
    s2=eval(subs(yy,t,0.1));
    if abs((s1+s2)-theta(xh))<=0.1
        count=1;
        break;
    end

end

ss=[ss;count];

```

```

end
ss
4. 基于 MATLAB2016b 求解鼓面发生倾斜时的调整方案
clear;clc;
m=3.6;
g=9.8;
ss=[];
theta=0.5;
a=asin(0.035);
aa=[];
cha=0;
for jj=1:1000
    x=unifrnd(-0.1,0,1,10);
    y=unifrnd(80,90,1,10);
    for i=1:10
        if x(i)<=-0.05
            x(i)=-0.1;
        else
            x(i)=0;
        end
    end
    xx=[x;y];
    s1=0;
    syms t;
    y1=find(xx(1,:)==-0.1);
    fx=0;
    fy=0;
    F=0;
    FH1=[];
    FH2=[];
    if size(y1,2)~=0
        for i=1:size(y1,2)
            fx=fx+(xx(2,y1(i))*cos(a))*cos(45*(y1(i)-1));
            fy=fy+(xx(2,y1(i))*cos(a))*sin(45*(y1(i)-1));
        end
        fh=sqrt(fx^2+fy^2);
        for i=1:size(y1,2)
            F=F+(xx(2,y1(i))*sin(a)-m*g/10);
        end
        FH=sqrt(F^2+fh^2);
        FH1=[FH1;FH];
    end
    yy=dsolve(' (3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH1*0.2*sin(a)', 's(0)=0', 's(-0.1)=0', 't');

```

```

        s1=eval(subs(yy,t,0.1));
    else
        s1=0;
    end
    fx=0;
    fy=0;
    F=0;
    for j=1:10
        fx=fx+(xx(2,j)*cos(a))*cos(45*(j-1));
        fy=fy+(xx(2,j)*cos(a))*sin(45*(j-1));
        fh=sqrt(fx^2+fy^2);
        F=F+(xx(2,j)*sin(a)-m*g/10);
    end
    FH=sqrt(F^2+fh^2);
    FH2=[FH2;FH];

yy=dsolve(' (3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH2*0.2*sin(a)', 's(0)=s1', 's(-0.1)=0', 't');
    s2=eval(subs(yy,t,0.1));
    if abs((s1+s2)-theta)<=0.1
        aa=[aa;xx];
    end
end
for p=2:2:size(aa)
    for q=1:10
        cha=cha+(aa(p,q)-82.35)^2;
    end
    ss=[ss;cha];
end
sss=aa(find(ss==min(ss))*2-1:find(ss==min(ss))*2,:);
min(ss)
plot(sss(2,:), '-*')
line([1,10],[82.35,82.35], 'linestyle','--');
%title('发力大小在理想状态附近的波动图')

```

5. 基于 MATLAB2016b 对调整模型效果的评价

```

clear;clc;
m=3.6;
g=9.8;
ss=[];
theta=0.5;
a=asin(0.035);
aa=[];
cha=0;

```



```

for jj=1:1000
    x=unifrnd(-0.1,0);
    y=unifrnd(80,90);
    xy=[zeros(1,9);82.35*ones(1,9)];
    x=[x zeros(1,9)];
    y=[y 82.35*ones(1,9)];
    for i=1:10
        if x(i)<=-0.05
            x(i)=-0.1;
        else
            x(i)=0;
        end
    end
    xx=[x;y];
    s1=0;
    syms t;
    y1=find(xx(1,:)==-0.1);
    fx=0;
    fy=0;
    F=0;
    FH1=[];
    FH2=[];
    if size(y1,2)~=0
        for i=1:size(y1,2)
            fx=fx+(xx(2,y1(i))*cos(a))*cos(45*(y1(i)-1));
            fy=fy+(xx(2,y1(i))*cos(a))*sin(45*(y1(i)-1));
        end
        fh=sqrt(fx^2+fy^2);
        for i=1:size(y1,2)
            F=F+(xx(2,y1(i))*sin(a)-m*g/10);
        end
        FH=sqrt(F^2+fh^2);
        FH1=[FH1;FH];
    end
    yy=dsolve('(3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH1*0.2*sin(a)', 's(0)=0', 's(-0.1)=0', 't');
    s1=eval(subs(yy,t,0.1));
    else
        s1=0;
    end
    fx=0;
    fy=0;
    F=0;
    for j=1:10

```

```

        fx=fx+(xx(2,j)*cos(a))*cos(45*(j-1));
        fy=fy+(xx(2,j)*cos(a))*sin(45*(j-1));
        fh=sqrt(fx^2+fy^2);
        F=F+(xx(2,j)*sin(a)-m*g/10);
    end
    FH=sqrt(F^2+fh^2);
    FH2=[FH2;FH];

yy=dsolve(' (3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH2*0.2*sin(a)', 's(0)=s1', 's(-0.1)=0', 't');
s2=eval(subs(yy,t,0.1));
if abs((s1+s2)-theta)<=0.1
    aa=[aa;xx];
end
end
for p=2:2:size(aa)
    for q=1:10
        cha=cha+(aa(p,q)-82.35)^2;
    end
    ss=[ss;cha];
end
sss=aa(find(ss==min(ss))*2-1:find(ss==min(ss))*2,:);
min(ss)
plot(sss(2,:), '-*')
line([1,10],[82.35,82.35], 'linestyle', '--');
title('改变一人发力大小在理想状态附近的波动图')

```

6. 基于 MATLAB2016b 对问题二绳子的长度进行灵敏度分析

```

clear;clc;
ss=[];ss1=[];ss2=[];ss3=[];ss4=[];ss5=[];ss6=[];ss7=[];ss8=[];ss9=[];
for l=170:5:200
    x=[0    0    0    0    0    0    0    0
        90  80  80  80  80  80  80  80
        0    0    0    0    0    0    0    0
        90  90  80  80  80  80  80  80
        0    0    0    0    0    0    0    0
        90  80  80  90  80  80  80  80
        -0.1  0    0    0    0    0    0    0
        80  80  80  80  80  80  80  80
        -0.1 -0.1  0    0    0    0    0    0
        80  80  80  80  80  80  80  80
        -0.1  0    0   -0.1  0    0    0    0
        80  80  80  80  80  80  80  80
        -0.1  0    0    0    0    0    0    0
    ]

```

```

90 80 80 80 80 80 80 80
0 -0.1 0 0 -0.1 0 0 0
90 80 80 90 80 80 80 80
0 0 0 0 -0.1 0 0 -0.1
90 80 80 90 80 80 80 80];
m=3.6;
g=9.8;
for o=1:2:17
    xx=x(o:o+1,:);
    s1=0;
    syms t;
    y1=find(xx(1,:)==-0.1);
    fx=0;
    fy=0;
    F=0;
    S1=[];
    FH1=[];
    FH2=[];
    if size(y1,2)~=0
        for i=1:size(y1,2)
            fx=fx+(xx(2,y1(i))*sqrt(1^2-11^2)/1)*cos(45*(y1(i)-1));
            fy=fy+(xx(2,y1(i))*sqrt(1^2-11^2)/1)*sin(45*(y1(i)-1));
        end
        fh=sqrt(fx^2+fy^2);
        for i=1:size(y1,2)
            F=F+(xx(2,y1(i))*11/1-m*g/8);
        end
        FH=sqrt(F^2+fh^2);
        FH1=[FH1;FH];
    y=dsolve('(3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH1*0.2*11/1','s(0)=0','s(-0.1)=0','t');
    s1=eval(subs(y,t,0.1));
    else
        s1=0;
    end
    % S1=[S1;s1];
    fx=0;
    fy=0;
    F=0;
    for j=1:8
        fx=fx+(xx(2,j))*sqrt(1^2-11^2)/1*cos(45*(j-1));
        fy=fy+(xx(2,j))*sqrt(1^2-11^2)/1*sin(45*(j-1));
        fh=sqrt(fx^2+fy^2);
    end
end

```

```

        F=F+(xx(2,j)*11/1-m*g/8);
    end
    FH=sqrt(F^2+fh^2);
    FH2=[FH2;FH];

y=dsolve(' (3.6*0.2^2*0.25+1/12*3.6*0.22^2)*D2s=FH2*0.2*11/1','s(0)=s1','s(-0.1)
=0','t');
    s2=eval(subs(y,t,0.1));
    ss=[ss;s1+s2];
end
end
for ii=1:9:63
    ss1=[ss1;ss(ii)];
    ss2=[ss2;ss(ii+1)];
    ss3=[ss3;ss(ii+2)];
    ss4=[ss4;ss(ii+3)];
    ss5=[ss5;ss(ii+4)];
    ss6=[ss6;ss(ii+5)];
    ss7=[ss7;ss(ii+6)];
    ss8=[ss8;ss(ii+7)];
    ss9=[ss9;ss(ii+8)];
end
l=1.7:0.05:2
plot(l,ss1)
hold on;
plot(l,ss2)
hold on;
plot(l,ss3)
hold on;
plot(l,ss4)
hold on;
plot(l,ss5)
hold on;
plot(l,ss6)
hold on;
plot(l,ss7)
hold on;
plot(l,ss8)
hold on;
plot(l,ss9)
hold on;
xlabel('绳子长度 (单位/米)');
ylabel('倾角 (单位/度)');

```