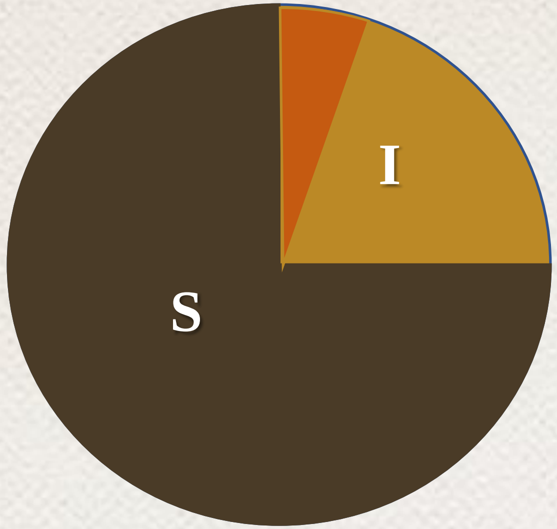
数学模型

传染病模型—SIS模型

北京科技大学

一、SIS传染病模型



易感者：　指未得病者，但是与感染者接触后容易感染

Susceptible

感染者：　已经感染病毒的人

Infective

$$\frac{dI}{dt}=k(1-I)I$$

$$I(0)=I_0$$

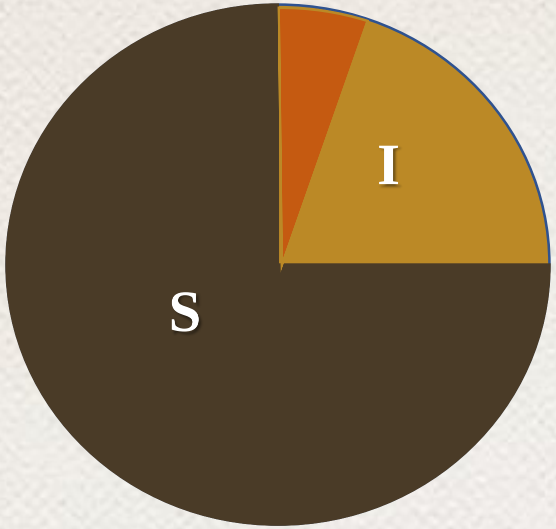
假设人口总数为 N, 病人和健康人的比例为 I，S, $I+S=1$

两类个体在人群中混合均匀

感染率：每个病人每天有效的平均接触人数是 k

日治愈率：病人每天被治愈的占总病人的比率 μ

一、SIS传染病模型



分析：

假设人口总数为N，则 $I+S=1$

感染率： k

治愈率： μ

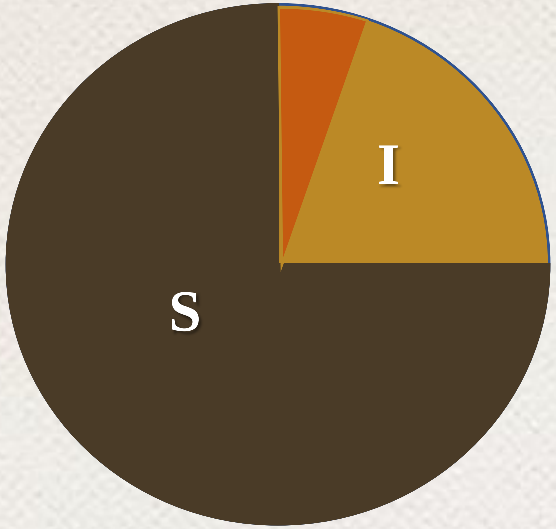
假设t时刻的病人数是$I(t)$, 根据Taylor公式

$$N\left(I(t+\Delta t)-I(t)\right)=N\frac{dI}{dt}\Delta t+o(\Delta t)$$

$$N(I(t+\Delta t)-I(t))=(kS\,NI-\mu IN)\Delta t$$

$$\frac{dI}{dt}=kSI-\mu I$$

二、问题分析



分析： $$\frac{dI}{dt}=kSI-\mu I$$

初始条件 $$I(0)=I_0$$

$$I(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{k}{k-\mu}+\left(\dfrac{1}{I_0}-\dfrac{k}{k-\mu}\right)e^{(\mu-k)t}\right]^{-1}, & k\neq\mu\\[2ex] \dfrac{I_0}{ktI_0+1}, & k=\mu\end{cases}$$

二、问题分析

分析：

$$\frac{dI}{dt}=kSI-\mu I$$

初始条件

$$I(0)=I_0$$

$$I(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{k}{k-\mu}+\left(\dfrac{1}{I_0}-\dfrac{k}{k-\mu}\right)e^{(\mu-k)t}\right]^{-1}, & k\neq\mu\\ \dfrac{I_0}{ktI_0+1}, & k=\mu\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{k}{\mu}$$

$$I(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{\sigma}{\sigma-1}+\left(\dfrac{1}{I_0}-\dfrac{\sigma}{\sigma-1}\right)e^{\mu(1-\sigma)t}\right]^{-1}, & k\neq\mu\\ \dfrac{I_0}{ktI_0+1}, & k=\mu\end{cases}$$

$\dfrac{1}{\mu}$ 对应于传染病的平均传染周期

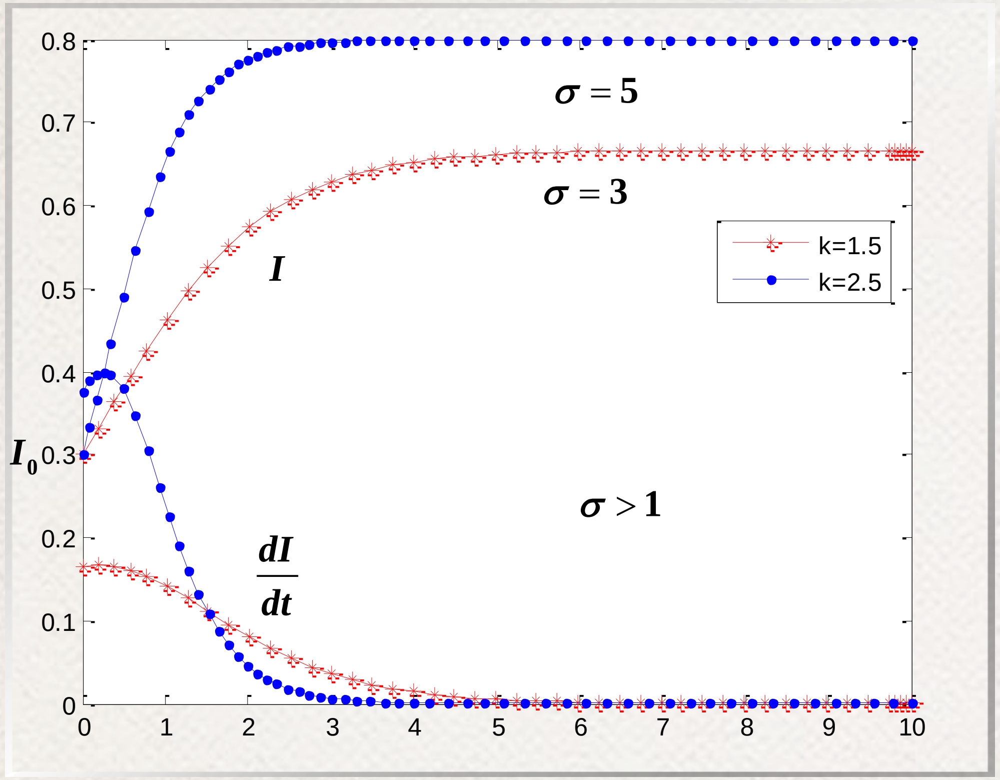
σ 一个周期内一个病人有效的传染人数

二、问题分析

$$I(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{\sigma}{\sigma-1}+\left(\dfrac{1}{I_0}-\dfrac{\sigma}{\sigma-1}\right)e^{\mu(1-\sigma)t}\right]^{-1}, k\neq\mu\\ \dfrac{I_0}{ktI_0+1}, k=\mu\end{cases}\Rightarrow I(t)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sigma}, k\neq\mu\\ 0, k=\mu\end{cases}$$

$\dfrac{1}{\mu}$ 对应于传染病的平均传染周期

σ 一个周期内一个病人有效的传染人数



二、问题分析

$$I(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{\sigma}{\sigma-1}+\left(\dfrac{1}{I_0}-\dfrac{\sigma}{\sigma-1}\right)e^{\mu(1-\sigma)t}\right]^{-1}, k\neq\mu\\ \dfrac{I_0}{ktI_0+1}, k=\mu\end{cases} \Rightarrow I(t)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sigma}, k\neq\mu\\ 0, k=\mu\end{cases}$$

$\dfrac{1}{\mu}$ 对应于传染病的平均传染周期

σ 一个周期内一个病人有效的传染人数