# 第八章　概率模型

# 随机模型

## 确定性因素和随机性因素

随机因素可以忽略

随机因素影响可以简单地以平均值的作用出现 ⇒ 确定性模型

随机因素影响必须考虑 ⇒ 随机性模型

概率模型　　统计回归模型　　马氏链模型

# 9.1 报童的诀窍

问题

报童售报： *a* (零售价) > *b*(购进价) > *c*(退回价)

售出一份赚 *a*-*b*；退回一份赔 *b*-*c*

每天购进多少份可使收入最大？

分析

购进太多→卖不完退回→赔钱

购进太少→不够销售→赚钱少

⇨ 存在一个合适的购进量

应根据需求确定购进量.

每天需求量是随机的 ⇨ 每天收入是随机的

优化问题的目标函数应是长期的日平均收入

等于每天收入的期望

**准备**

调查需求量的随机规律——每天需求量为 $r$ 的概率 $f(r)$，$r=0,1,2\ldots$

**建模**

• 设每天购进 $n$ 份，日平均收入为 $G(n)$

• 已知售出一份赚 $a-b$；退回一份赔 $b-c$

$$r \le n \Rightarrow \text{售出}\, r \Rightarrow \text{赚}\,(a-b)r$$

$$\Rightarrow \text{退回}\, n-r \Rightarrow \text{赔}\,(b-c)(n-r)$$

$$r > n \Rightarrow \text{售出}\, n \Rightarrow \text{赚}\,(a-b)n$$

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-b)r-(b-c)(n-r)]f(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)nf(r)$$

求 $n$ 使 $G(n)$ 最大

求解　将r视为连续变量　$f(r)\Rightarrow p(r)\mathrm{d}r$(概率密度)

$$G(n)=\int_0^n[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)\mathrm{d}r+\int_n^\infty(a-b)np(r)\mathrm{d}r$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}n}=(a-b)np(n)-\int_0^n(b-c)p(r)\mathrm{d}r-(a-b)np(n)+\int_n^\infty(a-b)p(r)\mathrm{d}r$$

$$=-(b-c)\int_0^n p(r)\mathrm{d}r+(a-b)\int_n^\infty p(r)\mathrm{d}r$$

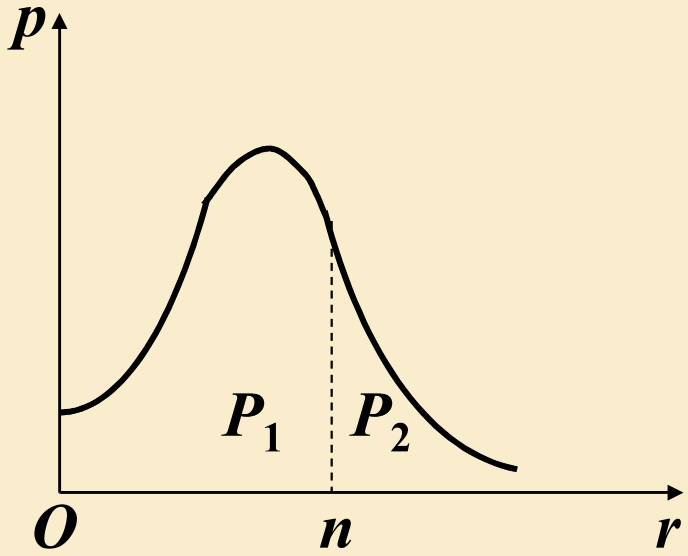
$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}n}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\int_0^n p(r)\mathrm{d}r}{\int_n^\infty p(r)\mathrm{d}r}=\frac{a-b}{b-c}$$

## 结果解释

$$\frac{\int_0^n p(r)\mathrm{d}r}{\int_n^\infty p(r)\mathrm{d}r} = \frac{a-b}{b-c}$$

$$\int_0^n p(r)\mathrm{d}r = P_1, \int_n^\infty p(r)\mathrm{d}r = P_2$$

取$n$使 $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{a-b}{b-c}$




**a-b** ~售出一份赚的钱

**b-c** ~退回一份赔的钱

$$(a-b)\uparrow \Rightarrow n\uparrow, \quad (b-c)\uparrow \Rightarrow n\downarrow$$

# 9.2 轧钢中的浪费

背景

轧制钢材两道工序

• 粗轧(热轧) ~ 形成钢材的雏形

• 精轧(冷轧) ~ 得到钢材规定的长度

随机因素影响

粗轧

钢材长度正态分布

均值可以调整

方差由设备精度确定

粗轧钢材长度大于规定 → 切掉多余部分

精轧

粗轧钢材长度小于规定 → 整根报废

问题：如何调整粗轧的均值，使精轧的浪费最小.

分析 设已知精轧后钢材的规定长度为 $l$，粗轧后钢材长度的均方差为 $\sigma$.

记粗轧时可以**调整**的**均值**为 $m$，则粗轧得到的钢材长度为正态随机变量，记作 $x \sim N(m, \sigma^2)$.

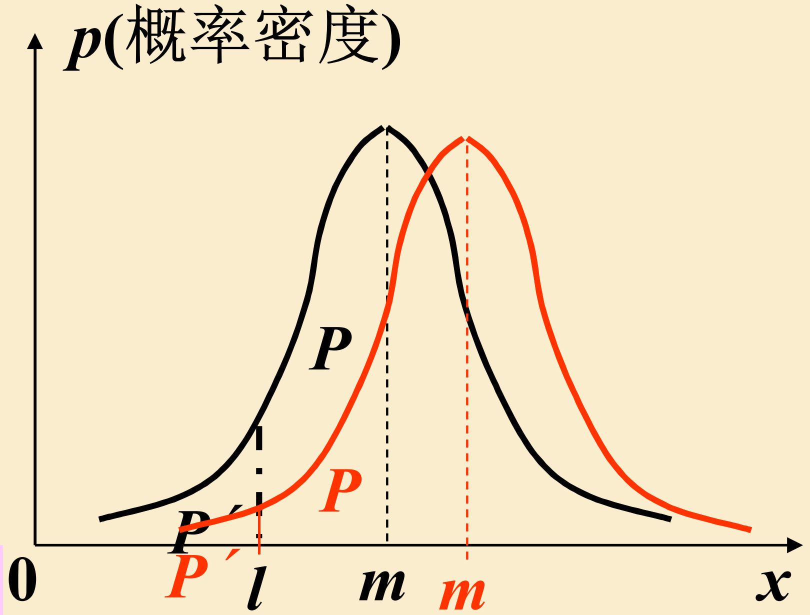
$$P = P(x \geq l) \quad P' = P(x < l)$$

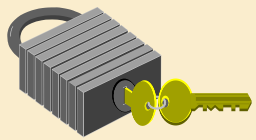
切掉多余部分的概率　　整根报废的概率

$$m \uparrow \Rightarrow P \uparrow, P' \downarrow$$

$$m \downarrow \Rightarrow P \downarrow, P' \uparrow$$

存在最佳的$m$使总的浪费最小





**建模** 选择合适的目标函数

总浪费 = 切掉多余部分的浪费 + 整根报废的浪费

$$W=\int_l^{\infty}(x-l)p(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{l}xp(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\mathrm{d}x-\int_l^{\infty}lp(x)\mathrm{d}x=m-lP$$

粗轧一根钢材平均浪费长度

$$\frac{mN-lPN}{N}=m-lP$$

直接方法

粗轧$N$根 ⇨ 成品材 $PN$根

总长度$mN$ ⇨ 成品材长度$lPN$

⇨ 共浪费长度 $mN-lPN$

建模 选择合适的目标函数

粗轧一根钢材平均浪费长度 $\dfrac{mN-lPN}{N}=m-lP$

粗轧$N$根得成品材 $PN$根

得到一根成品材平均浪费长度 $\dfrac{mN-lPN}{PN}=\dfrac{m}{P}-l$

略去常数$l$, 记 $J(m)=\dfrac{m}{P(m)}$

更合适的目标函数

$$P(m)=\int_l^{\infty}p(x)\mathrm{d}x,\ p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

优化模型：已知$l$ ,$\sigma$, 求$m$ 使$J(m)$ 最小.

## 求解

$$y=\frac{x-m}{\sigma},\quad \mu=\frac{m}{\sigma},\ \lambda=\frac{l}{\sigma}$$

$$J(m)=\frac{m}{P(m)}$$

$$P(m)=\int_l^{\infty} p(x)\mathrm{d}x$$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$J(\mu)=\frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)}$$

$$\Phi(z)=\int_z^{\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y$$

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$z=\lambda-\mu$$

$$\Downarrow$$

$$J(\mu)=\frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)} \Longrightarrow J(z)=\frac{\sigma(\lambda-z)}{\Phi(z)}$$

已知$\lambda$, 求 $z$ 使$J(z)$ 最小

# 求解

$$J(z)=\frac{\sigma(\lambda-z)}{\Phi(z)}$$

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}z}=0 \quad \Rightarrow \quad -\Phi(z)-(\lambda-z)\Phi'(z)=0$$

$$\Phi'(z)=-\varphi(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda-z=\Phi(z)/\varphi(z)$$

$$\Phi(z)=\int_z^{\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y$$

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$F(z)=\lambda-z$$

$$F(z)=\Phi(z)/\varphi(z)$$

求解 $F(z)=\lambda - z$ $F(z)=\Phi(z)/\varphi(z)$简表

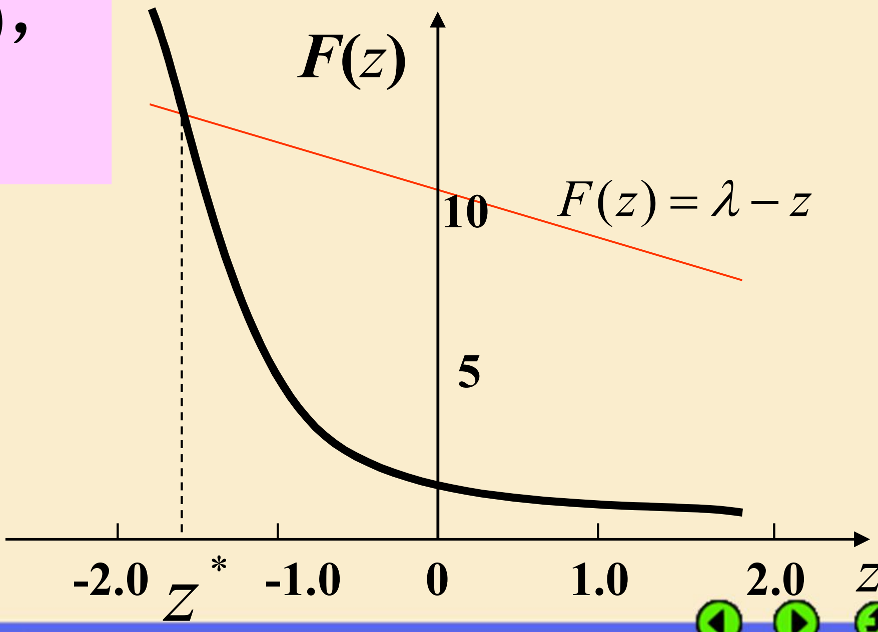
| $z$ | -3.0 | -2.5 | -2.0 | -1.5 | -1.0 | -0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(z)$ | 227.0 | 56.79 | 18.10 | 7.206 | 3.477 | 1.680 |
| $z$ | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
| $F(z)$ | 1.253 | 0.876 | 0.656 | 0.516 | 0.420 | 0.355 |

例 设$l$=2(米), $\sigma$=20(厘米)，求 $m$ 使浪费最小.

$\lambda = l/\sigma = 10$ ⇨ $z^* = -1.78$

⇨ $\mu^* = \lambda - z^* = 11.78$

⇨ $m^* = \mu^* \sigma = 2.36$(米)



# 轧钢中的浪费

模型假定：粗轧钢材长度小于规定长度$l$→整根报废

改为新的假定(习题8)：

1. 粗轧钢材长度在规定长度$[l_1, l]$内→降级使用
2. 粗轧钢材长度小于规定长度$l_1$→整根报废

日常生产、生活中的类似问题：

在随机因素影响下过程有两种结果，其损失(或收益)各有不同，综合考虑来确定应采取的决策，在统计意义下使总损失最小(或总收益最大).