第六章　差分方程与代数方程模型

- 差分方程~若干离散点上未知变量数值的方程.
- 描述离散时间段上客观对象的动态变化过程.
- 现实世界中随时间连续变化的动态过程的近似.
- 差分方程与代数方程都是离散模型的数学表述，二者有着类似的向量-矩阵表达形式，求解过程也存在相互联系.

第六章 代数方程与差分方程模型

6.1 贷款购房

贷款购房需考虑的问题

买多大的房子

一共贷多少钱

每月还多少钱

网上的房贷计算器

贷款购房——最简单的差分方程模型

输入必要信息　轻击鼠标即得

单利和复利 两种计算利息的基本方式

单利～1 万元存5年定期, 年利率4.75%, 到期后本息(本金加利息)：$10000\times(1+0.0475\times5)=12375$元.

复利～1 万元存1年定期, 年利率为3%, 到期不取则自动转存, 5年后本息：$10000\times(1+0.03)^5=11593$元.

单位本金、同一利率r、同一存期n计算单利和复利：

单利本息：$1+nr$

复利本息：$(1+r)^n > 1+nr$

利滚利！

单利和复利　按单利计算的业务——零存整取

零存整取～每月固定存额，约定存款期限，到期一次支取本息的定期储蓄.

方式：5元起存，多存不限，存期1年、3年、5年.

例　每月存入3000元，存期 5 年（年利率3.5%）

零存整取计算器

累计存入金额180,000元

到期本息总额196,012.50元

勤俭节约、科学理财

单利和复利

按单利计算的业务——零存整取

a~每月存入金额，r~月利率，n~存期(月)

x_k~存入k个月后的本息 $x_1=a+ar$ $x_2=x_1+a+a2r$

$x_k=x_{k-1}+a+akr,\ k=2,3,\ldots,n$ $k=n$递推至$k=1$

$$x_n=na+ar(1+2+\ldots+n)=na+ar\frac{n(n+1)}{2}$$

$a=3000,\ r=0.035/12,\ n=12\times5$ (月) $\Rightarrow x_n=196{,}012.50$

等额本息贷款和等额本金贷款

房贷计算器的选项

- 贷款类别：商业贷款, 公积金, 组合型　　年利率不同
- 计算方法：根据贷款总额或面积、单价计算.
- 按揭年数：可选 1 至30年. 选择20年.
- 银行利率：基准利率、利率上限或下限. 选择商业贷款的基准利率6.55%.
- 还款方式：等额本息还款或等额本金还款.

等额本息贷款和等额本金贷款

等额本息还款~每月归还本息(本金加利息)数额相同.

等额本金还款~每月归还本金数额相同, 加上所欠本金的利息.

所欠本金逐月减少 ⇨ 每月还款金额递减

例1 “房贷计算器”选择等额本息还款, 输入: 商业贷款总额100万元, 期限20年, 年利率6.55%. 点击“开始计算”得: 还款总额1796447.27元, 月均还款7485.2元.

建立等额本息还款方式的数学模型, 并作数值计算.

等额本息还款模型

x_0 ~贷款总额　　r ~月利率　　n ~贷款期限(月)

x_k ~第k月还款后尚欠金额　　a~每月还款金额

本月欠额=上月欠额的本息–还款金额

$$x_k = x_{k-1}(1+r) - a,\quad k = 1,2,\ldots,n$$

$k=n$递推至$k=1$

$$x_n = x_0(1+r)^n - a[1+(1+r)+\ldots+(1+r)^{n-1}] = x_0(1+r)^n - a\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

贷款到期时$x_n=0$ ⇨ $$a = x_0 r\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

等额本息还款模型

x_0 ~贷款总额　　r ~月利率　　n ~贷款期限(月)

a~每月还款金额

$$a = x_0 r \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

A_1 ~还款总额

$$A_1 = na = x_0 rn \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

例1　x_0=100(万元), r=0.0655/12, n=12×20=240(月)

⇨ a=7485.2(元), A_1=1796447.27(元)

与房贷计算器给出的相同

等额本息贷款和等额本金贷款

例 2　“房贷计算器”选择等额本金还款, 输入: 商业贷款总额**100**万元, 期限**20**年, 年利率**6.55%**. 点击“开始计算”得到: 还款总额**1657729.17**元, 每月还款金额由第 1 月的**9625**元逐月递减, 最后 1 月为**4189.41**元.

建立等额本金还款方式的数学模型, 并作数值计算.

等额本金还款模型

x_0 ~贷款总额　　r ~月利率　　n ~贷款期限(月)

每月归还本金x_0/n　　第1月还款金额 $x_1 = \frac{x_0}{n} + x_0 r$

还款金额逐月减少归还本金x_0/n所产生的利息$x_0 r/n$

x_k ~第k月还款金额　$x_k = x_{k-1} - \frac{x_0 r}{n}, \quad k = 2,3,\ldots,n$

$k=n$递推至$k=2$

$$x_k = \frac{x_0}{n} + x_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)r, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

等额本金还款模型

x_0 ~贷款总额　　r ~月利率　　n ~贷款期限(月)

x_k ~第k月还款金额　$$x_k = \frac{x_0}{n} + x_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)r, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

A_2 ~还款总额　$$A_2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_0 + x_0 r \frac{n+1}{2}$$

例2　x_0=100(万元), r=0.0655/12, n=12×20=240(月)

⇨ x_1=9625元, x_{240}=4189.41(元), A_2=1657729.17(元).

与房贷计算器给出的相同

等额本息与等额本金方式的比较

- 等额本息方式简单，便于安排收支.
- 等额本金方式每月还款金额前期高于等额本息方式, 后期低于等额本息方式, 适合当前收入较高人群.
- 等额本息方式还款总额大于等额本金方式.

等额本息方式前期还款额较少, 所欠本息的利息逐月归还, 所以利息总额较大. $\Rightarrow$ 还款总额 $A_1>A_2$

例1 例2： A_1=1796447.27(元) , A_2=1657729.17(元).

小结与评注

- 贷款购房两种基本还款方式：等额本息、等额本金.
- 要点: 明确利息计算, 列出差分方程, 利用递推关系.
- 模型适用于任何还款周期(半月、一季度等)——将公布的年利率折换为一个还款周期的利率.
- 不同还款周期一次还款金额和还款总额都不一样.

周期越短还款总额越小？

小，可分析上面2个总额公式

6.2 信息传播

- 当今每天都有大量的、正面或负面的信息，甚至谣言，通过各种传统的、近代的、特别是互联网的渠道，在几乎没有限制的人群中传播.
- 考察总人数一定的封闭环境, 开始极少数人得到了一条信息或制造了一条谣言, 然后通过人与人之间的交流在人群中传播, 使获知的人越来越多.
- 在合理的简化假设下，建立数学模型来描述信息传播的规律，研究其发展趋势.

模型假设

1. 在封闭环境中人群的总人数不变.

2. 信息通过已获知的人向未获知的人传播.

- 已获知信息的人数越多 (传播人群), 每天新获知信息的人数越多.
- 未获知信息的人数越多 (潜在人群), 每天新获知信息的人数越多.

3. 每天新获知信息的人数与已获知信息的人数和未获知信息的人数的乘积成正比.

模型建立

N~总人数

p_k~第k天已获知信息人数 (传播人群)，

$N-p_k$~第k天未获知信息人数(潜在人群).

假设：第k+1天新获知信息人数$p_{k+1}-p_k=\Delta p_k$

与p_k和$N-p_k$的乘积成正比.

$$p_{k+1}-p_k=cp_k(N-p_k)$$

$$c=\frac{\Delta p_k/p_k}{N-p_k}$$

~对于潜在人群的一位而言,每天新获知信息人数的百分比增量.

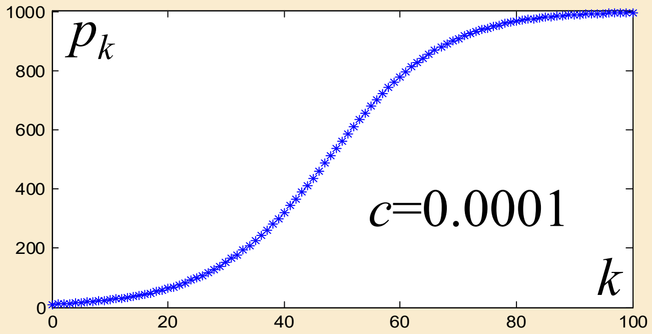
c是反映传播速度的参数，c越大传播速度越快

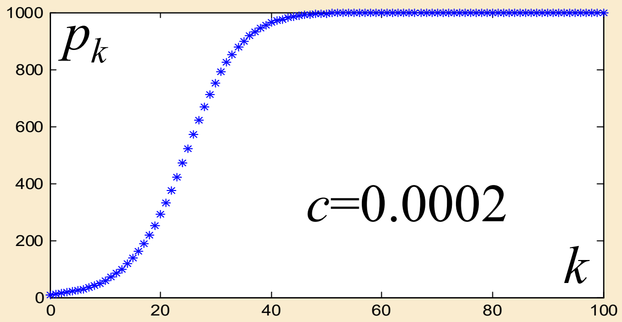
模型求解 $p_{k+1}-p_k=cp_k(N-p_k)$ p_k~第k天获知信息人数

$$p_{k+1}=(1+cN)p_k(1-\frac{c}{1+cN}p_k)$$

logistic微分方程的离散形式——差分方程

- 设N=1000，初始获知信息的人数 p_0=10.





80天后p_k才接近N

p_k接近N只需40天

logistic微分方程的离散形式——差分方程

$$p_{k+1}=(1+cN)p_k\left(1-\frac{c}{1+cN}p_k\right)$$

无法得到p_k的显式表达式

关注$k\to\infty$时p_k的变化

$$b=1+cN \qquad x_k=\frac{c}{1+cN}p_k$$

标准形式

$$x_{k+1}=bx_k(1-x_k)$$

一阶非线性差分方程

通过讨论x_k的平衡点及其稳定性研究p_k的收敛性质($k\to\infty$).

预备知识6-1　差分方程的类型、求解及稳定性

标准形式$x_{k+1}=bx_k(1-x_k)$的平衡点及其稳定性

- 解代数方程 $x=f(x)=bx(1-x)$ 得到非零平衡点x^* ⇨ $x^*=1-1/b$

- 为判断x^*的稳定性计算$f(x)=bx(1-x)$在x^*的导数

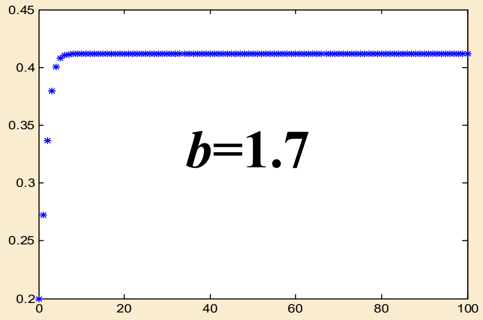
⇨ $f'(x^*)=b(1-2x^*)=2-b$

- 根据x^*稳定性条件$|f'(x^*)|<1$ ⇨ $1<b<3$

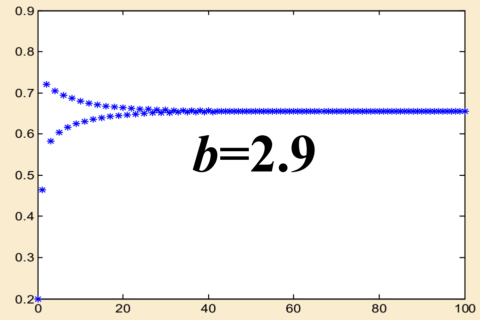
$b=1+cN>1$

只需讨论$b<3$和$b>3$时x_k的变化规律$(k\to\infty)$.

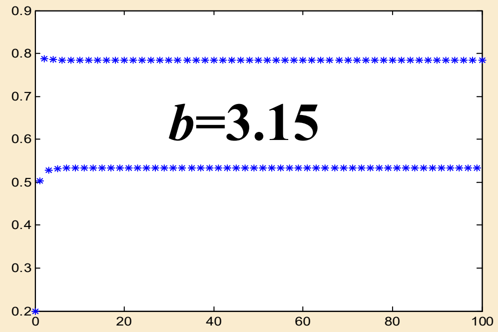
不同b值下$x_{k+1}=bx_k(1-x_k)$的计算结果(初值$x_0=0.2$)



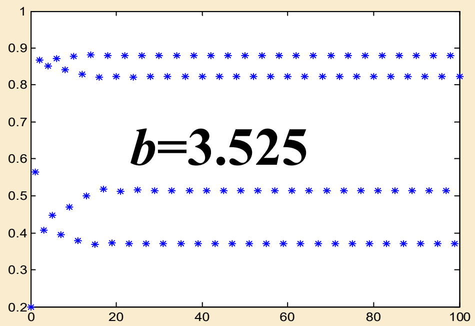
$x_k \to x^*$ (单调收敛)



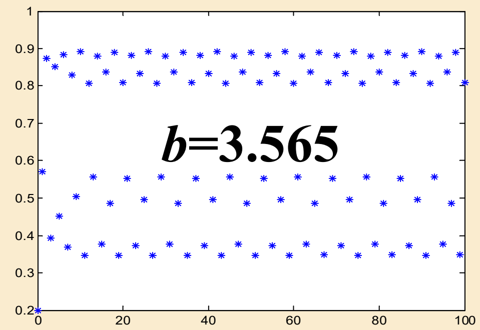
$x_k \to x^*$ (振荡收敛)



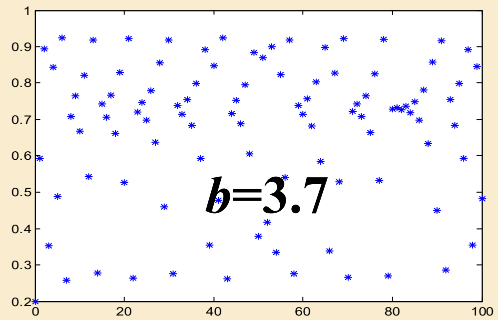
x_k的2个子序列趋向另外2个平衡点



x_k的4个子序列趋向另外4个平衡点



x_k的8个子序列趋向另外8个平衡点



x_k不趋向任何平衡点, 出现混沌现象

拓展阅读6-1 差分方程$x_{k+1}=bx_k(1-xk)$的收敛、分岔和混沌

模型讨论

$$b = 1 + cN \qquad x_k = \frac{c}{1+cN}p_k$$

标准形式	原方程
$x_{k+1}=bx_k(1-x_k)$	$p_{k+1}=(1+cN)p_k(1-\frac{c}{1+cN}p_k)$
平衡点 $x^*=1-1/b$	平衡点 $p^*=N$
$1<b<3$, x^*稳定	$cN<2$, p^*稳定
$b<2$, x_k单调收敛于x^*	$cN<1$, p_k单调收敛于p^*
$2<b<3$, x_k振荡收敛于x^*; $b>3$, 出现分岔、混沌	出现$cN>1$, p_k振荡收敛、分岔、混沌

模型讨论

$$p_{k+1}=(1+cN)p_k\left(1-\frac{c}{1+cN}p_k\right)$$

$$c=\frac{(p_{k+1}-p_k)/p_k}{N-p_k}$$

$cN>1$?

设总人数N固定，讨论参数c (传播速度) 的上限.

- 传播过程中对于任意的k都有$p_{k+1}< N$. ⇨ $cp_k<1$
- p_k可以无限接近N. ⇨ c的上限是$1/N$.

模型拓展

信息自由传播 ⇨ 人为干预信息(谣言)的传播

- a ~ 每天被制止传播谣言的人数比例.

$$p_{k+1}-p_k=cp_k(N-p_k) \Rightarrow p_{k+1}-p_k=cp_k(N-p_k)-ap_k$$

$$b=1+cN-a \qquad x_k=\frac{c}{1+cN-a}p_k \qquad x_{k+1}=bx_k(1-x_k)$$

- 被制止传播谣言的人又加入到听信谣言的潜在人群中.

模型拓展 $a\sim$ 每天被制止传播谣言的人数比例.

- 被制止传播谣言的人既不再传播也不会听信，从此退出这个信息传播系统.
- 增加新的人群——被制止传播后退出系统者.

$q_k\sim$第k天退出系统者的人数

$$q_{k+1}-q_k=ap_k$$

$$p_{k+1}-p_k=cp_k(N-p_k-q_k)-ap_k$$

- p_k, q_k 联立组成非线性差分方程组.
- 给定 p_0和q_0可递推计算p_k和q_k

小结与评注

- 信息传播模型的解只能具有单调增的收敛形式，完全符合人们的直观认识.
- 讨论方程$x_{k+1}=bx_k(1-xk)$的平衡点及稳定性，说明非常简单的非线性差分方程，也会出现比相应的logistic微分方程有着远为复杂的特性.
- 实际上信息传播速度c不可能保持不变，用随k而变的c_k代替c，仍可递推计算p_k，结果会更好.
- 受限环境下传染病的蔓延和生物种群的增长都可以建立类似的数学模型.

6.3 CT技术的图像重建

背景

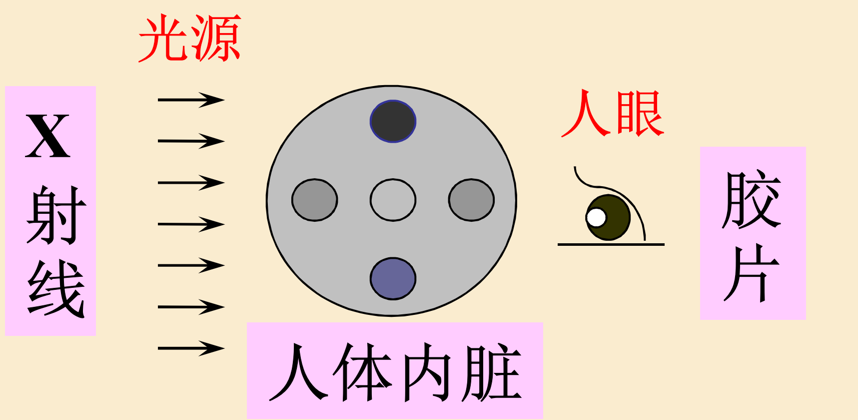
- CT(计算机断层成像)技术是20世纪50至70年代由美国科学家科马克和英国科学家豪斯费尔德发明的.
- 1971年第一代供临床应用的CT设备问世.
- 螺旋式CT机等新型设备被医疗机构普遍采用.
- CT技术在工业无损探测、资源勘探、生态监测等领域也得到了广泛的应用.

什么是CT，它与传统的X射线成像有什么区别？

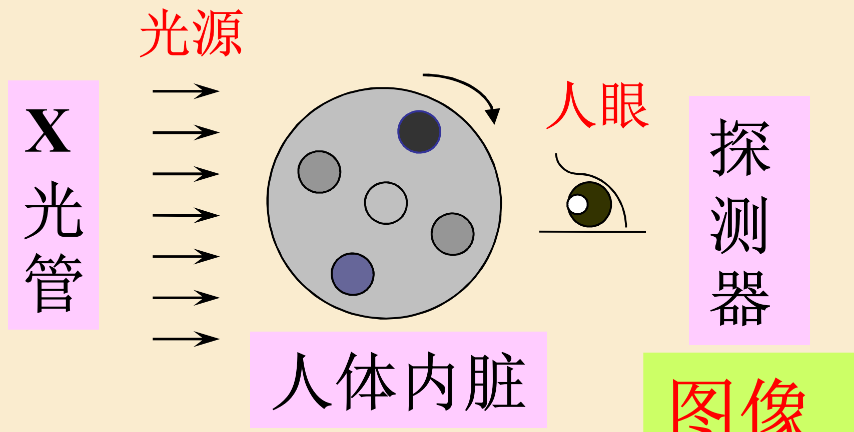
概念图示 一个半透明物体嵌入5个不同透明度的球

单方向观察无法确定球的数目和透明度

让物体旋转从多角度观察能分辨出5个球及各自的透明度



传统的X射线成像原理



CT技术原理

图像重建

CT技术: 在不同深度的断面上,从各个角度用探测器接收旋转的X光管发出、穿过人体而使强度衰减的射线; 经过测量和计算将人体器官和组织的影像重新构建.

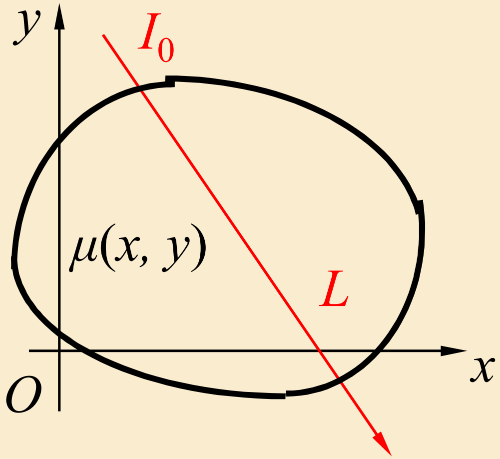
X射线强度衰减与图像重建的数学原理

I~射线强度　　l~物质在射线方向的厚度

I_0~入射强度　　μ~物质对射线的衰减系数

• 射线强度的衰减率与强度成正比.

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l} = -\mu I \quad \Rightarrow \quad I = I_0 e^{-\mu l}$$



• 射线沿直线L穿行, 穿过由不同衰减系数的物质组成的非均匀物体(人体器官).

$$\mu l \Rightarrow \int_L \mu(x, y)\mathrm{d}l$$

$$\Rightarrow \quad I = I_0 e^{-\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}l} \quad \Rightarrow \quad \int_L \mu(x, y)\mathrm{d}l = \ln\frac{I_0}{I}$$

X射线强度衰减与图像重建的数学原理

$\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}l = \ln \frac{I_0}{I}$ 右端数值可从CT 的测量数据得到

图像重建

多条直线L的线积分 $\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}l$ ⇨ 被积函数$\mu(x, y)$

⇨ 反映人体器官大小、形状、密度的图像

数学原理

$$P_f(L) = \int_L f(x,y)\mathrm{d}l \qquad f(Q) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}F_Q(q)}{q}$$

Radon变换 **Radon逆变换**

$F_Q(q)$~与Q相距q的直线L的线积分$P_f(L)$对所有q的平均值

实际上只能在有限条直线上得到投影(线积分).

图像重建在数学方法上的进展，为CT技术在各个领域成功的和不断拓广的应用提供了必要条件.

图像重建的代数模型

m个像素$(j=1,\ldots,m)$, n束射线$(i=1,\ldots,n)$

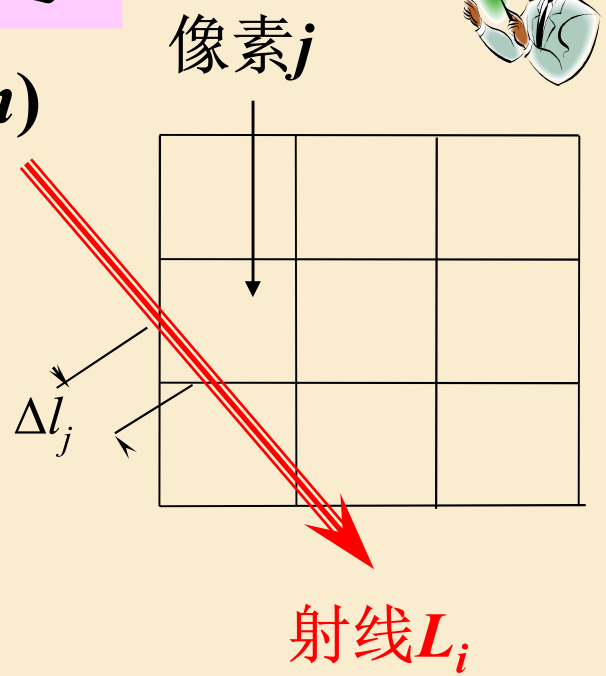
每个像素对射线的衰减系数是常数

μ_j~像素j的衰减系数

Δl_j~射线在像素j中的穿行长度

$J(L_i)$~射线L_i穿过的像素j的集合

$\ln(I_0/I)_i$ ~L_i的强度测量数据

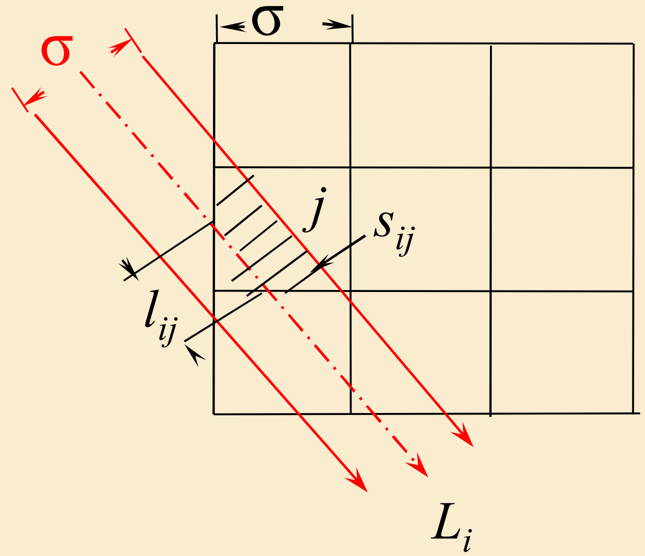


$$\int_L \mu(x,y)dl = \ln\frac{I_0}{I} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j\in J(L_i)} \mu_j \Delta l_j = \ln(I_0/I)_i, \ i=1,2,\ldots,n$$

图像重建的代数模型

常用算法 $\ln(I_0/I)_i = b_i, \quad \mu_j = x_j$

设像素的边长和射线的宽度均为**σ**



中心线法

a_{ij}~射线L_i的中心线在像素j内的长度l_{ij}与σ之比.

$$\sum_{j\in J(L_i)} \mu_j \Delta l_j = \ln(I_0/I)_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,2,\ldots,n \Rightarrow Ax = b$$

面积法

a_{ij}~射线L_i的中心线在像素j内的面积s_{ij}与σ^2之比.

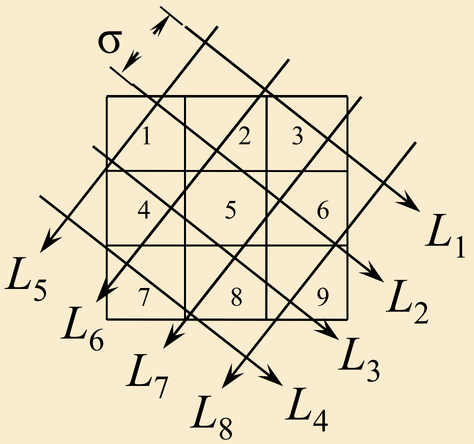
中心法 $a_{ij}=1$~射线L_i经过像素j的中心点.

图像重建的代数模型

代数重建技术(ART)

中心法的简化形式 假定射线的宽度为零, 间距**σ**

$a_{ij}=1$ ~L_i经过像素j内任一点



$\Rightarrow$

$$A=\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

根据A和b, 由 $Ax=b$ 确定像素的衰减系数向量x

m和n很大且$m>n$, 方程有无穷多解 + 测量误差和噪声

$\Rightarrow$ $Ax+e=b$ 在x和e满足的最优准则下估计x