差分方程方法建模

差分方程简介

王宏洲
数学与统计学院，北京理工大学

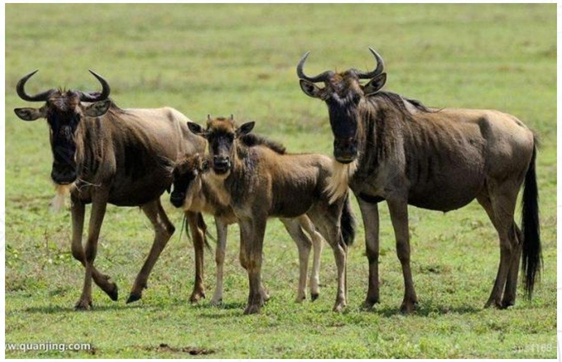
1 适用对象

1. 适用对象

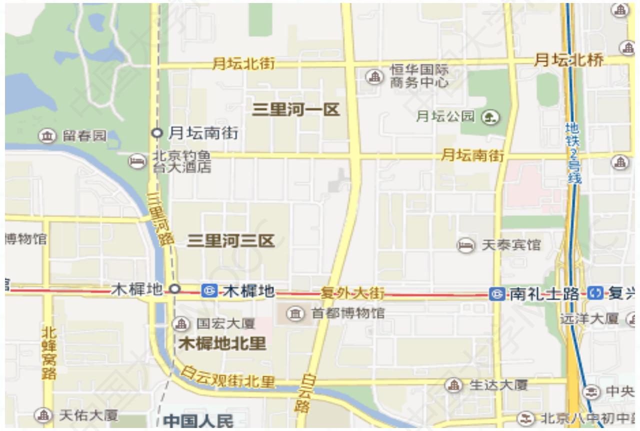
事物发展有明显阶段性，应考虑用差分方程建立模型。

植物有固定的繁殖周期，每年开花结籽一次

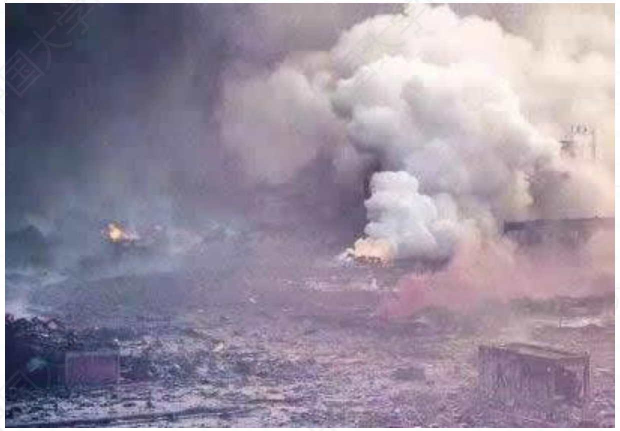
多数大型哺乳动物有繁殖周期



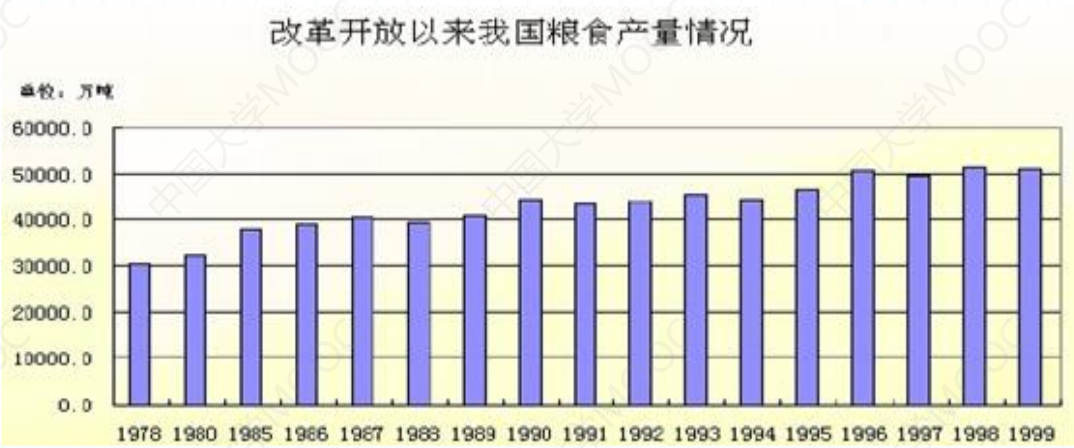
外来物种入侵，在地理区块之间的传播

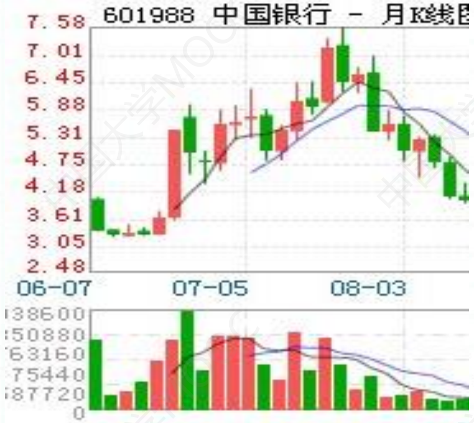


污染物随时间在一片区域内的扩散



经济运行的阶段性：农产品、股市





2 差分的形态

2. 差分的形态

一阶前向差分：$\Delta x(i) = x(i+1) - x(i), i = 0,1,2,\ldots$

一阶后向差分：$\nabla x(i)=x(i)-x(i-1),\ i=1,2,3,\ldots$

二阶差分：
$$\begin{aligned}\Delta^2 x(i) &= \Delta x(i+1) - \Delta x(i)\\ &= x(i+2) - 2x(i+1) + x(i)\end{aligned}$$

3 差分方程的形态

3. 差分方程的形态

一阶差分方程：$\Delta x(i) = f\big(i, x(i)\big)$

比如$x(i+1) - x(i) = rx(i) - dx(i)$

二阶差分方程：$\Delta^2 x(i) = f\big(i, x(i), \Delta x(i)\big)$

更一般的形态：

$$F\big(i, x(i), x(i+1), x(i+2), \ldots, x(i+k)\big) = 0$$

比如：$x(i+1) - x(i) = \sum_{j=0}^{i} p(j)x(j)$

4 差分方程的解

4.差分方程的解

$$F\big(i, x(i), x(i+1), x(i+2), \dots, x(i+k)\big) = 0$$

若向量$x = (x(0), x(1), \dots, x(n))$让上面的方程成立，则此向量称为差分方程的一个解。

求解差分方程一般需要初始条件：

$$x(i+1) - x(i) = rx(i) - dx(i)$$

通解：$x(i+1) = (1+r-d)x(i)$

若有初始条件$x(0) = X_0$，则方程的解为：

$$x(i) = (1+r-d)^i X_0, i = 1,2,3, \dots$$

4.差分方程的解

(1) 一阶线性常系数差分方程： $x(i+1)+ax(i)=b$

若$a\neq -1,0$，则其通解为$x(n)=C(-a)^n+\frac{b}{a+1}$,

4.差分方程的解

(2) 二阶线性常系数差分方程：$x(i+2)+ax(i+1)+bx(i)=r$

若$r=0$，有特解$x^*=0$;

若$r\neq 0$且$a+b+1\neq 0$，有特解$x^*=\frac{r}{a+b+1}$.

差分方程的特征方程：$\lambda^2+a\lambda+b=0$

特征根：λ_1，λ_2

4.差分方程的解

(2) 二阶线性常系数差分方程：$x(i+2)+ax(i+1)+bx(i)=r$

特征方程：$\lambda^2+a\lambda+b=0$　　　　特征根：λ_1，λ_2

λ_1,λ_2为相异实根，则通解$x(n)=x^*+C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$

$\lambda_1=\lambda_2$，则通解$x(n)=x^*+(C_1+nC_2)\lambda^n$

$\lambda_{1,2}=\rho(cos\theta\pm isin\theta)$，则通解

$$x(n)=x^*+\rho^n(C_1\cos(n\theta)+C_2\sin(n\theta)).$$

5 差分方程的平衡点和稳定性

5. 差分方程的平衡点和稳定性

$$F\big(i, x(i), x(i+1), x(i+2), \dots, x(i+k)\big) = 0$$

若有常数a使得$F(i, a, a, a, \dots, a) = 0$，则称$a$为差分方程的平衡点

比如对于$x(i+1) - x(i) = 3x(i) + 4,$

令$a - a = 3a + 4,$ 可得差分方程的平衡点：$a = -4/3.$

若差分方程的任意解$\{x(n)\}$都满足 $\lim\limits_{n \to +\infty} x(n) = a$

则称a是稳定的平衡点

Final page