

“同心协力”协作策略研究

摘要

本文研究的是“同心鼓”协作策略的设计与优化问题，根据力学、运动学相关原理，建立数学模型。

针对问题一，在理想状态下，考虑队员的站位沿圆周均匀分布，绳子在水平面上的投影落在鼓的半径方向上。且每个人对绳子施加的拉力大小相等，力的作用线与竖直方向的夹角相同。球与鼓在竖直方向上做周期性运动。以鼓中间截面的圆心为原点、竖直向下方向为正方向建立坐标系，基于力学、运动学对球、鼓、球-鼓组成的系统进行分析，建立鼓与球运动的微分模型。以人对鼓做功最小和球距鼓面距离高于 40cm 为最佳决策目标，运用微元法进行仿真计算。在人数 8，鼓较绳子水平时下降 0.11m 的情况下，得出最优协作策略为：绳长 0.6m 时，最佳发力情况：59.2N，平衡后球与鼓面距离 40.2cm；绳长 0.7m 时，最佳发力情况：69.0N，平衡后球与鼓面距离 40.3cm。

针对问题二，考虑队员发力时机与力度不精确，认为当鼓受力不均匀时，鼓作定轴转动，转轴过鼓中心且平行于鼓面直径。通过计算每时刻的和力矩关系求得鼓的角加速度，进而建立加速度，速度，旋转角关于时间的微分方程。通过计算得到序号 1~9 的倾斜角度为： 0.3074° ， 0.4196° ， 0.2549° ， 1.4096° ， 2.7567° ， 2.1584° ， 1.4716° ， 2.1227° ， 2.6083° 。

针对问题三，在问题一的基础上考虑队员发力时刻和力度问题使系统达到动态稳定。首先用问题一的模型计算鼓面与球碰撞时的时间和力度及球的反弹高度，结合问题二的模型求得球碰撞后球的倾斜角度，并用以下两种优化方案改变倾斜角：方案一，通过调节队员力度来调整鼓倾斜角度；方案二，通过调节队员用力时刻来调节鼓倾斜角度。运用动力学知识，对下一次碰撞前进行分析，以下一次碰撞后球变为竖直上升为目标，进行建模，进而对问题一模型进行优化调整。

针对问题四，首先根据球运动情况确定鼓的转轴，结合问题一的模型、动能守恒、动量守恒，以碰撞后球的水平速度等于零为条件，求出碰撞前鼓的倾斜角度。再通过改变队员的用力力度和时刻，以倾斜角度偏差最小为目标，得出各个队员发力情况。

最后对微元法的迭代步长进行了灵敏度分析，并对模型进行了评价与推广。

关键词：同心鼓；微元法；碰撞动量守恒

一、问题的背景和重述

1.1 问题的背景

同心鼓是一个考验团队各成员间协作能力的项目。在鼓身的中间位置沿圆周均匀固定若干长度相同的绳子，队员牵拉绳子以保持鼓面水平。项目开始时，使球从鼓面中心正上方竖直掉落，队员拉起绳子用鼓面颠球。整个过程中，队员不能接触除绳子末端外的其他位置。若球的颠起高度低于规定高度，停止项目。

1.2 问题的重述

现有一道具鼓，鼓面直径 40cm，鼓身高度 22cm，质量 3.6kg。使用的排球重 270g。项目开始时，球从距离鼓面 40cm 高度处竖直下落。要求：参加人数不少于 8 名，且队员之间的最小距离不小于 60cm；球的颠起高度应距鼓面 40cm 以上，否则停止项目。

- 1) 试讨论在理想状态下（可精确控制用力方向、时机和力度），团队的最佳协作策略，并计算相应的颠球高度。
- 2) 在实际操作中无法做到对发力时机和力度的精确控制，而导致鼓面倾斜。建立描述队员发力时机和力度与特定时刻的鼓面倾角间关系的数学模型。设参加人数为 8 人，绳长 1.7m，鼓面初始状态水平静止且较绳子水平是下降 11cm。求不同情况下 0.1 秒时鼓面倾角。
- 3) 根据问题 2 所建立的模型，相应调整问题 1 中制定的协作策略。
- 4) 制定鼓面倾斜时的拉绳调整策略，将球的反弹状态调整为沿竖直方向。设参与人数为 10 人，绳长 2m。球的颠起高度为 60cm，与竖直方向夹角为 1° ，且倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员间，与他们的夹角之比为 1:2。计算所有队员的发力时机和力度，并分析调整策略在现实中的应用效果。

二、问题的分析

针对问题一：在理想状态下，考虑队员的站位沿圆周均匀分布，则绳子在水平面上的投影落在鼓的半径方向上。且每个人对绳子施加的拉力大小相等，力的作用线与竖直方向的夹角相同。以鼓中间截面的圆心为原点、竖直向下方向为正方向建立坐标系，对鼓和球分别进行力学、运动学分析。以单次颠球过程中团队对鼓做功最小为最佳策略的目标，满足绳长、颠球高度、球下落过程与鼓上升过程的时间匹配等约束条件，建立单目标优化模型。并利用微元法，设计可行算法对其求解。

针对问题二：因队员发力时机和力度大小无法精确控制，导致鼓面出现倾斜。分析不同时间点上所有队员的发力时机和力度大小，可将鼓视作绕一固定轴做旋转运动，该旋转轴方向沿鼓直径方向并穿过鼓的中心。按旋转轴左右两边将队员

对鼓施加的拉力分作两组，并进行受力分析。利用两组的合力矩，可计算出鼓绕轴旋转的角加速度。对其进行两次时间积分，得到任意时刻的鼓面倾角大小。

针对问题三：当排球与倾斜鼓面碰撞后，将不再沿竖直方向上升。调整鼓面倾斜方向使排球再次与鼓面碰撞后能恢复到沿竖直方向运动的状态。为此需对理想状态下的协作策略进行改进。设排球已经与倾斜鼓面发生碰撞，可计算出被颠起后位移方向与竖直方向夹角。取排球再次下落时刻为起始点，研究排球第二次的下落过程。在此期间调整鼓面倾角，使碰撞后的排球恢复的理想运动状态。结合问题一、二的情况，提出两种的调整方案：

方案 1：控制队员的施力大小以调整鼓面倾角

方案 2：改变队员的发力时机以调整鼓面倾角

针对问题四：本问可认为是在问题三的基础上加以新的约束条件对问题三模型进行改进。首先根据球运动情况确定鼓的转轴，结合问题 1 模型、动能守恒、动量守恒，以碰撞后球的水平速度等于零为条件，求出碰撞前鼓应有的倾斜角度。再通过改变队员的用力力度和时刻，以倾斜角度偏差最小为目标，得出各队员发力情况。

三、模型的假设

1. 鼓等效为一均质的空心圆柱体。
2. 假设用于牵拉的绳子没有弹性、不可伸缩。
3. 假设排球和鼓面间的碰撞为完全弹性碰撞。
4. 牵拉绳子过程中，绳子的末端高度始终不变。

四、符号及变量说明

下本文中所使用的主要符号如下表所示：

表 1 符号说明

符号	表示含义	单位
m	排球的质量	g
M	鼓的质量	kg
g	重力加速度，取 $g = 10m/s^2$	m/s^2
R	鼓的半径	m
D	鼓身高度	m
F_f	排球受到的空气阻力	N
$a_{球}$	排球的加速度	m/s^2
$a_{鼓}$	鼓的加速度	m/s^2

v	排球的速度	m/s
V	鼓的速度	m/s
h	排球的位移	m
H	鼓的位移	m
θ	绳子与竖直方向的夹角	$^{\circ}$
$F_i, (i=1, 2, \dots, n, \text{且} n \geq 8)$	第 i 个人对鼓的拉力	N
S	排球离开鼓面的距离	m
s	鼓初始位置较绳子水平时距离	m
W	单次颠球过程团队对鼓所做总功	J
L	绳子长度	m
$v_{\text{前}}、v_{\text{后}}$	排球发生碰撞前、后的速度	m/s
$V_{\text{前}}、V_{\text{后}}$	鼓碰撞前、后的速度	m/s
α	角加速度	rad/s^2
β	鼓面倾角	$^{\circ}$

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：建立鼓与球运动的微分模型

在理想状态下，排球和鼓都将做周期性的上下往返运动。因此，分别对运动过程中的排球和鼓进行力学分析，对由排球和鼓组成的系统进行运动学分析。

鼓在竖直方向上运动所能达到的极限位置受绳子的限制，不考虑在两个极限位置上鼓的能量转化。同时，绳子只能在其自身达到水平状态之前的阶段内对鼓施加的向上的拉力。因此，仅考虑从初始位置到绳子呈水平状态之前的鼓的运动过程。

经分析，可分别将排球和鼓的运动分为三个阶段：

排球：下落阶段——与鼓碰撞阶段——上升阶段

鼓：绳未发力的静止阶段——受拉力上升阶段——与排球碰撞阶段

5.1.1 系统力学分析

1. 对排球的力学分析

项目所使用排球的质量为 270g，而标准排球的直径为 20.2~24.4cm^[1]。考虑到排球质量较小而体积较大，在运动过程中，空气阻力不可忽略。

球体在空气中运动所受升力^[2]：

$$F_f = C_L \rho d^3 f v \quad (1)$$

其中， C_L 为升力系数（取 1.23）

ρ 为空气密度（通常取 1.20 kg/m^3 ）

d 为排球直径

f 为旋转常量（取 10）

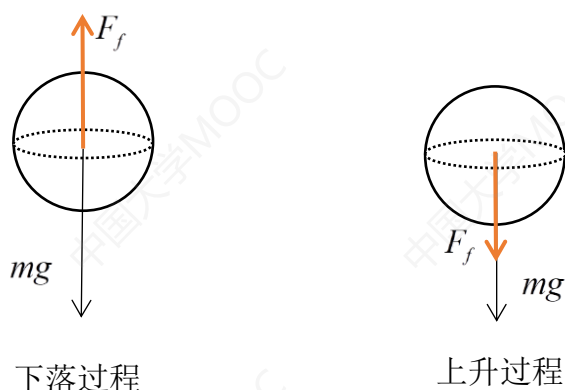


图 1 排球空中运动的受力图

在理想情况下，排球在上下运动的过程中仅在竖直方向受到重力和空气阻力，其合力为：

$$F = mg + F_f \quad (2)$$

由牛顿第二定律，排球的瞬时加速度：

$$a_{\text{球}} = \frac{F}{m} = \frac{mg + F_f}{m} \quad (3)$$

其中，下落过程中 F_f 取值为负，上升过程中 F_f 取值为正。

由于 F_f 与排球的运动速度有关，取时间微元 dt ，可得排球的瞬时速度和位移变化：

$$v = v_0 + \int a_{\text{球}} dt \quad (4)$$

$$h = h_0 + \int v dt \quad (5)$$

其中， v_0 为排球初始时刻速度， h_0 为排球初始时刻位移。

2. 对鼓的力学分析

由于鼓的密度较排球大很多，且鼓上下运动的幅度较小，为简化计算，忽略鼓运动时的空气阻力。

在理想状态下， n 名队员的站位沿圆周均匀分布，牵拉绳子使其在水平面上的投影均落在半径方向上。队员分别以 $F_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的力拉动绳子，且拉力 $F_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的大小、作用时机相同。

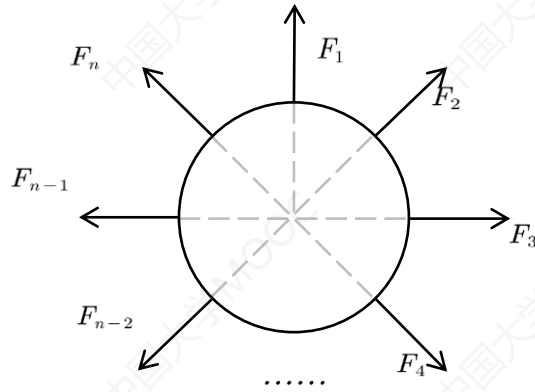


图 2 鼓受绳拉力的俯视图

绳子为柔性材料，对鼓的拉力作用在与鼓的连接点上，作用线沿绳子方向，指向背离鼓。鼓的受力情况如下图所示：

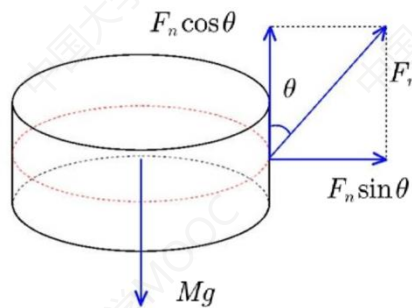


图 3 鼓的受力分析

绳子对鼓的拉力沿圆周均匀分布，在水平方向上，绳子的拉力相互抵消，即水平合力为0。因此，鼓仅在竖直方向上做上下往复运动，且这一过程中绳子与竖直方向的夹角 θ 随时间 t 变化。

$$\begin{aligned} F_{\perp} &= \sum_{i=1}^n F_i \cos \theta_t - Mg \\ F_{\parallel} &= \sum_{i=1}^n F_i \sin \theta_t = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\cos\theta_t = \frac{s-H}{L} \quad (7)$$

其中, F_{\perp} , F_{\parallel} 分别为鼓受到的竖直方向合力和水平方向合力。

鼓在竖直方向上的加速度、瞬时速度、位移为:

$$a_{\text{鼓}} = \frac{F_{\perp}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cos\theta_t - Mg}{M} \quad (8)$$

$$V = V_0 + \int a_{\text{鼓}} dt \quad (9)$$

$$H = H_0 + \int V dt \quad (10)$$

其中, v_0 为鼓初始时刻速度, H_0 为鼓初始时刻位移。

由图 3 可知, 鼓的运动过程关于水平状态的绳子对称。若当鼓运动到绳水平状态的上方, 绳仍对鼓有作用力, 绳对鼓的拉力将使鼓减速上升或加速下落。两种情况均阻碍鼓向上颠球并使其超过一定高度。

因此, 可以认为只在鼓运动到水平位置之前的时间段内, 绳子对鼓施加拉力; 一旦鼓运动到水平位置之上, 绳子的拉力为 0。则鼓向上运动的距离不大于鼓初始位置与绳水平高度的距离:

$$s - H_{\perp} \geq 0 \quad (11)$$

其中, H_{\perp} 为鼓上升的距离。

3. 对排球-鼓系统的运动学分析

将排球和鼓的碰撞视为完全弹性碰撞, 则在碰撞瞬间可认为系统不受外力作用。

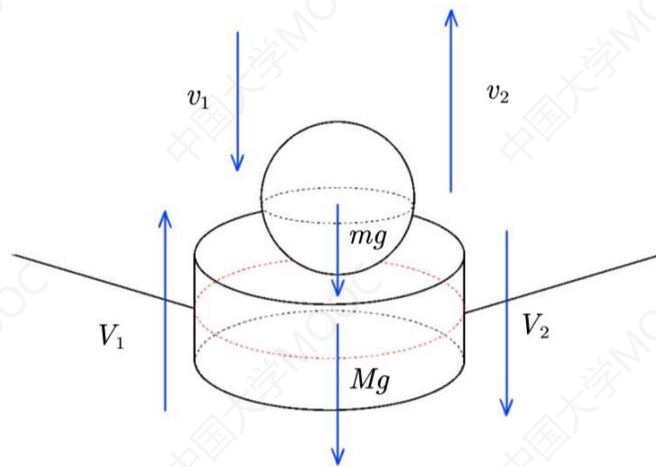


图 4 碰撞前后速度变化示意图

在碰撞瞬间的前后排球和鼓组成的系统满足动量守恒^[5]、能量守恒关系:

$$mv_{\text{前}} + MV_{\text{前}} = mv_{\text{后}} + MV_{\text{后}} \quad (12)$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{前}}^2 + \frac{1}{2}MV_{\text{前}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{后}}^2 + \frac{1}{2}MV_{\text{后}}^2 \quad (13)$$

其中， $v_{\text{前}}$ 、 $v_{\text{后}}$ 分别为排球碰撞前后的速度， $V_{\text{前}}$ 、 $V_{\text{后}}$ 分别为鼓碰撞前后的速度。

5.1.2 模型建立

考虑初始时排球和鼓面间的距离大小与排球直径相差不大，不能将排球视作质点，认为排球离开鼓面的距离 s 应为排球最低点与鼓面之间的距离。设鼓的初始位置较绳子水平时下降距离为 s 。

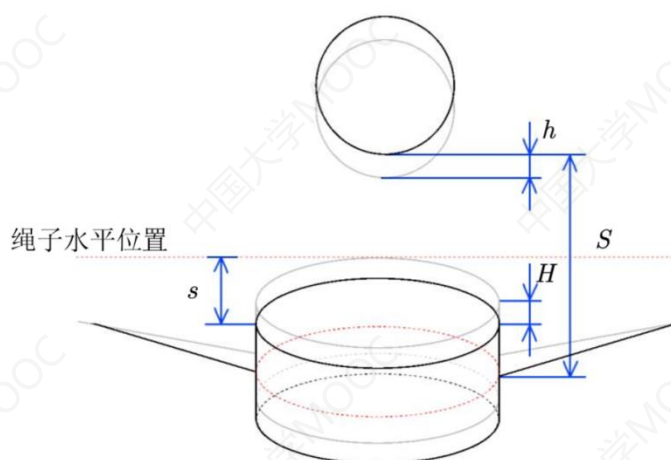


图 5 排球和鼓的位置关系

在理想状态下，为了使团队连续颠球的次数尽可能多，考虑团队协作过程中所有队员应尽可能花少的力气将排球颠起，达到规定高度。即，在单次颠球过程中，整个团队对鼓所做的功最小。而在上升过程中，团队对鼓所做的功全部都转化为鼓的机械能的增加量。因此，设置目标函数：鼓在上升阶段的机械能增加量最小。

$$\min W = \frac{1}{2}MV_{\text{前}}^2 + MgH \quad (14)$$

按项目规定，团队各成员之间的最小距离不少于 60cm，则所用绳长 L 应满足：

$$L \geq \sqrt{s^2 + \left(\frac{0.3}{\sin \frac{180^\circ}{n}} - R \right)^2} \quad (15)$$

在排球与鼓碰撞之后，根据系统动量守恒、动能守恒，鼓将向下加速运动或继续向上运动，但向上运动的速度必然小于排球向上运动的速度，即排球与鼓面仅在碰撞的瞬间接触。

因此，当排球与鼓面发生碰撞的瞬间，队员将停止向上拉动鼓面，不再对绳子施加拉力，即排球下落所需的时间等于鼓在初始位置静止的时间与施加拉力的时间之和。

$$t_0 + t_{\text{拉}} = t_{\text{下}} \quad (16)$$

其中， t_0 为鼓静止等待的时间， $t_{\text{拉}}$ 为施力时长， $t_{\text{下}}$ 为球下降时间。

第一次发生碰撞时，排球下落的距离与鼓上升的距离之和等于初始时刻排球与鼓的距离：

$$h_{\text{下}1} + H_{\text{上}1} = 0.4 \quad (17)$$

其中， $h_{\text{下}1}$ 为排球第一次下落的距离， $H_{\text{上}1}$ 为鼓第一次上升的距离。

排球在发生碰撞后，球颠起的高度与鼓面初始位置间的距离应不小于规定距离 S ，即单次内排球碰撞后上升的距离与鼓上升的距离之和应规定距离 S 。

$$h_{\text{上}} + H_{\text{上}} \geq S \quad (18)$$

其中， $h_{\text{上}}$ $H_{\text{上}}$ 分别为排球、鼓上升的距离。

综上，可建立鼓与球运动的微分模型：

$$\begin{aligned} \min W &= \frac{1}{2}MV_{\text{前}}^2 + MgH \\ s.t. \begin{cases} L \geq \sqrt{s^2 + \left(\frac{0.3}{\sin \frac{180^\circ}{n}} - R \right)^2} \\ t_0 + t_{\text{拉}} = t_{\text{下}} \\ h_{\text{下}1} + H_{\text{上}1} = 0.4 \\ h_{\text{上}} + H_{\text{上}} \geq S \\ h = h_0 + \int v dt \\ H = H_0 + \int V dt \\ s - H_{\text{上}} \geq 0 \\ mv_{\text{前}} + MV_{\text{前}} = mv_{\text{后}} + MV_{\text{后}} \\ \frac{1}{2}mv_{\text{前}}^2 + \frac{1}{2}MV_{\text{前}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{后}}^2 + \frac{1}{2}MV_{\text{后}}^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

5.1.2 模型求解

在运动过程中，由于鼓的位置随时间变动，绳与竖直方向的夹角也随之发生变化，导致鼓所受合力的大小改变；而排球所受的空气阻力与其速度 v 有关，从而影响排球所受合力的大小。即排球和鼓均在竖直方向做变加速/减速直线运动。

考虑到加速度 $a_{\text{球}}$ 、 $a_{\text{鼓}}$ 随时间变化，不利于计算求解。因此，利用微元法的思想^[4]，取小时间段 T ，假定在每一个小时间段 T 内，排球的加速度 $a_{\text{球}}$ 、鼓的加速度 $a_{\text{鼓}}$ 均不变。

因此，第 k 个时间段内，排球和鼓的速度分别为：

$$\begin{aligned} v^k &= v^{k-1} + a_{\text{球}}^{k-1}T \\ V^k &= V^{k-1} + a_{\text{鼓}}^{k-1}T \end{aligned} \quad (20)$$

可得排球和鼓的速度与位移变化之间的关系分别为：

$$\begin{aligned} h^k &= h^{k-1} + v^{k-1}T + \frac{1}{2}a_{\text{球}}^{k-1}T^2 \\ H^k &= H^{k-1} + V^{k-1}T + \frac{1}{2}a_{\text{鼓}}^{k-1}T^2 \end{aligned} \quad (21)$$

则，第 $k+1$ 个时间段内，绳与竖直方向的夹角：

$$\cos\theta^{k+1} = \frac{S - H^k}{L} \quad (22)$$

球和鼓的加速度分别为：

$$\begin{aligned} a_{\text{球}}^{k+1} &= \frac{mg + C_L \rho d^3 f v_{\text{球}}^k}{m} \\ a_{\text{鼓}}^{k+1} &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cos\theta^k - Mg}{M} \end{aligned} \quad (23)$$

在项目参加人数 $n=8$ ，鼓面初始位置较绳水平时下降的距离 $s=0.18$ ，规定颠球高度 $S=0.4$ 的情况下，分别改变绳长和单个队员的拉力大小，对模型进行求解：

表 2 绳长、拉力与团队做功之间的关系

拉力 /N 绳长/m	60	64	68	72	76	80	84	86	92	96	100
0.6	3.19	3.03	3.11	2.97	2.95	2.88	2.98	2.83	2.87	2.89	2.89
0.8	3.51	3.40	3.30	3.24	3.24	3.19	3.08	3.08	3.04	2.97	3.06
1.0	6.59	7.21	6.61	3.56	3.42	3.40	3.33	3.32	3.27	3.18	3.19

其中，做功 W 的单位：J

同时，可得到在绳长不同的情况下，各队员的施力时刻、施力时长与施力大小之间的关系，如下图所示：

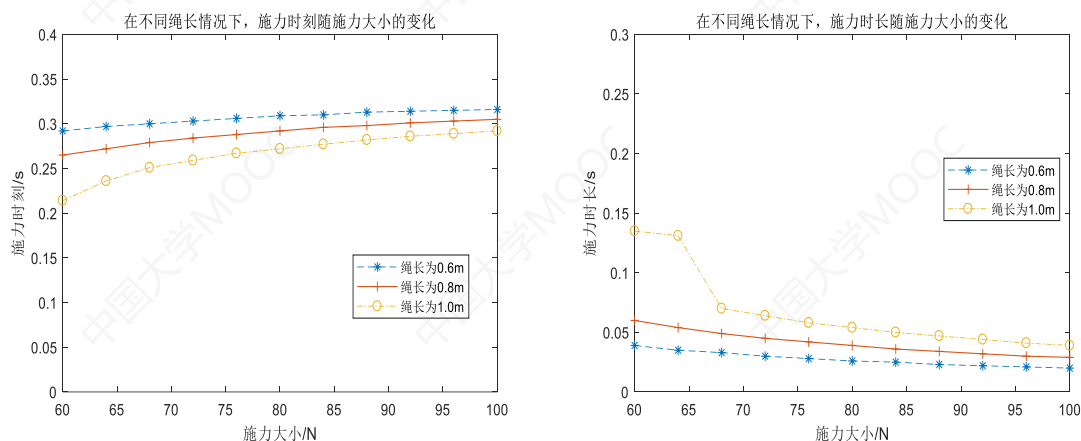


图 6 不同绳长下，施力时刻、施力时长与施力大小之间的关系

因绳长 L 与拉力在竖直方向分力 F_{\perp} 之间呈负相关，当绳长增长时，为使排球能上升至规定高度，拉力的大小与作用时间都将相应增加。

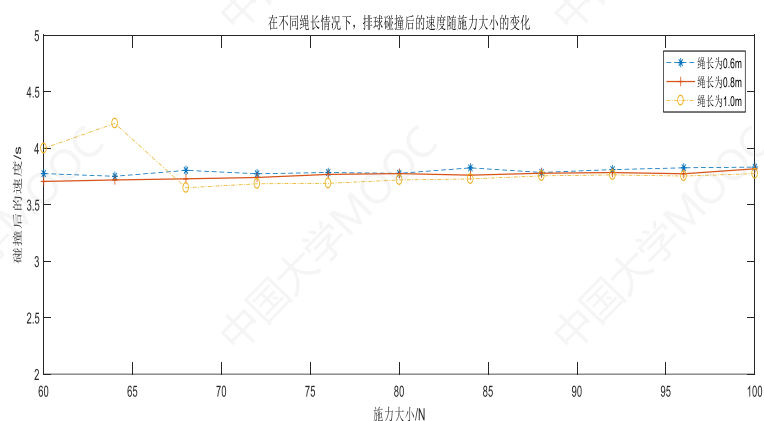


图 7 不同绳长下，排球碰撞后速度与施力大小之间的关系

在该情况下，绳长与施力大小对排球碰撞后的速度影响不大，结合图 6、7 可知，每次颠球上升的高度只在小范围内波动。

经计算可得，一段时间后，颠球高度将趋于一个定值，说明系统稳定。

表 3 不同绳长、拉力情况下，颠球的稳定高度

力/N 绳长/m	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
0.6	0.405	0.408	0.405	0.405	0.405	0.407	0.405	0.406	0.406	0.406
0.8	0.407	0.407	0.406	0.408	0.407	0.406	0.406	0.406	0.405	0.408
1.0	0.516	0.406	0.407	0.406	0.407	0.406	0.408	0.408	0.406	0.407

其中，稳定高度单位：m

5.2.2 问题二：建立鼓面倾角模型

5.2.1 模型建立

由于队员发力时机和力度大小的不同，鼓面在运动过程中因受力不平衡而出现倾斜。将鼓的倾斜看作是定轴转动，其转轴的方向沿鼓的直径方向，且通过鼓的中心。因此，将鼓所受到的拉力按转轴所在位置分作左右两组进行分析。设为组 1，组 2，其中组 1 中的力促进鼓绕轴旋转，组 2 中的力阻碍鼓绕轴旋转。

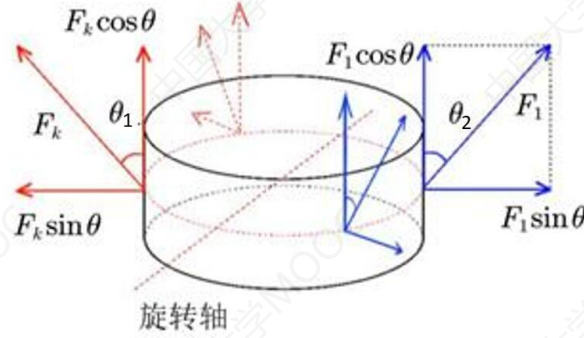


图 8 鼓所受的拉力按转轴位置分作两组（同色为一组）

经分析，旋转轴两侧的合力矩不平衡是导致鼓面旋转的主要原因。旋转轴两侧拉力的合力沿鼓母线方向分力为：

$$F_{\text{合}1} = \sum_{i=1}^m F_i \cos \theta_1 \quad (24)$$

$$F_{\text{合}2} = \sum_{i=m+1}^n F_i \cos \theta_2 \quad (25)$$

其中， θ_1 、 θ_2 分别表示旋转轴线两侧拉力与鼓母线间的夹角。

鼓可等效成为均质的空心圆柱体，转轴通过中心垂直于几何轴的圆柱体转动惯量^[4]：

$$J = \iiint_V \rho r^2 dV = \frac{M}{4} (R_{\text{内}}^2 + R_{\text{外}}^2) + \frac{M}{12} L^2 \quad (26)$$

由于鼓壁厚度很小，鼓的内径可近似等于外径，则式 (26) 可改写为：

$$J = \iiint_V \rho r^2 dV = \frac{M}{2} R^2 + \frac{M}{12} L^2 \quad (27)$$

根据力矩公式 $M = Fr \cos \theta = J\alpha$ （ θ 为力与竖直方向的夹角），可求得旋转轴两边合力对鼓转动的角加速度：

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{F_{\text{合}1}}{J} \\ \alpha_2 &= \frac{F_{\text{合}2}}{J}\end{aligned}\quad (28)$$

总角加速度:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (29)$$

由于角加速度随 θ_t 变化而变化, 则鼓的转动角速度为:

$$\omega = \int \alpha dt + \omega_0 \quad (30)$$

经过 t 时间, 鼓面的角度变化为:

$$\Delta\beta = \int_0^t \omega dt \quad (31)$$

5.2.2 模型求解

分析问题二所给的表格数据, 鼓面倾斜角的变化由两阶段组成:

第一阶段, 由于发力时机的不同导致倾角的变化, 且发力时机只有-0.1s、0s 两种情况。该阶段的初角速度为 0。

第二阶段, 由于鼓受力不均而导致鼓面倾角的变化。这一阶段的初角速度为第一阶段结束时角速度。

寻找鼓的一条直径, 使该直径过鼓面圆心的垂线两侧的合力矩相等, 则可知该直径所在方向即为旋转轴所在方向。

考虑到 α 随时间变化的, 难以通过微分方程求解, 所以利用微元的思想^[4]进行其进行近似求解。

第一阶段:

初始状态

$$\begin{aligned}\cos\theta_1^1 &= \cos\theta_2^1, \quad \omega^1 = 0, \quad \beta^1 = 0 \\ F_{\text{合}1}^1 &= \sum_{i=1}^m F_i \cos\theta_1^1 \\ F_{\text{合}2}^1 &= \sum_{i=m+1}^n F_i \cos\theta_2^1\end{aligned}\quad (32)$$

其中, θ_1^k, θ_2^k 分别第 k 个时刻为两组合力与鼓母线的夹角

n 为该阶段作用于鼓的拉力总数, m 为促使鼓转动的力的数量

$n - m$ 为阻碍鼓转动的力的数量

求得初始时刻角加速度：

$$\alpha^1 = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{F_{\text{合}1}^1}{J} - \frac{F_{\text{合}2}^1}{J} \quad (33)$$

则第 k 时刻两个合力分别与鼓母线夹角

$$\theta_1^k = \theta_1^{k-1} + (\omega^{k-1}T + \frac{1}{2}\alpha^{k-1}T^2) \quad (34)$$

$$\theta_2^k = \theta_2^{k-1} - (\omega^{k-1}T + \frac{1}{2}\alpha^{k-1}T^2) \quad (35)$$

可得第 k 时刻的角速度、角度：

$$\omega^k = \omega^{k-1} + \alpha^{k-1}T \quad (36)$$

$$\beta^k = \beta^{k-1} + \omega^{k-1}T + \frac{1}{2}\alpha^{k-1}T^2 \quad (37)$$

则第 $k+1$ 时刻平行于鼓母线方向的合力大小：

$$F_{\text{合}1}^{k+1} = \sum_{i=1}^m F_i \cos \theta_1^k \quad (38)$$

$$F_{\text{合}2}^{k+1} = \sum_{i=m+1}^n F_i \cos \theta_2^k$$

则总角加速度为：

$$\alpha^{k+1} = \alpha_1^{k+1} - \alpha_2^{k+1} = \frac{F_{\text{合}1}^{k+1}}{J} - \frac{F_{\text{合}2}^{k+1}}{J} \quad (39)$$

第二阶段：

初始状态

$$\theta_1^1 = \theta_1^{\frac{\tau}{T}}, \theta_2^1 = \theta_2^{\frac{\tau}{T}}, \omega^1 = \omega^{\frac{\tau}{T}}, \beta^1 = \beta^{\frac{\tau}{T}}$$

$$F_{\text{合}1}^1 = \sum_{i=1}^m F_i \cos \theta_1^1 \quad (40)$$

$$F_{\text{合}2}^1 = \sum_{i=m+1}^n F_i \cos \theta_2^1$$

其中， τ 表示第一阶段总时长

则初始时刻角加速度：

$$\alpha^1 = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{F_{\text{合}1}^1}{J} - \frac{F_{\text{合}2}^1}{J}$$

该阶段的第 K 时刻与第 $k+1$ 时刻时的角加速度计算方法与阶段一相同，不再赘述。

将数据带入上述模型求解：-0.1~0s 为第一阶段，0~0.1s 为第二阶段，取 $T=0.001s$ ，得到鼓面倾角如下表所示：

表 4 0.1s 时鼓面的倾斜角度

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8	鼓面倾角（度）
1	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3074
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
2	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.4196
	用力大小	90	90	80	80	80	80	80	80	
3	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2549
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
4	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	1.4096
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
5	发力时机	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0	2.7567
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
6	发力时机	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0	2.1584
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
7	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	1.4716
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
8	发力时机	0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	2.1227
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
9	发力时机	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1	2.6083
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	

注：发力时机（单位：s）和用力大小（单位：N）

5.3 问题三：

5.3.1 模型建立

在实际情况下，由于队员无法做到对发力时机和力度的精准控制，而使鼓面倾斜，导致排球碰撞后的运动轨迹偏离竖直方向。为了尽可能多的连续颠球，应让排球的运动轨迹沿竖直方向。因此需尽快调整鼓面，使排球再次下落与鼓面碰撞后，其运动方向恢复到竖直方向上。

开始时刻，排球从距离鼓面 40cm 的高度上竖直掉落，并与倾斜鼓面发生碰撞。根据问题二中模型，可以计算出第一次碰撞时鼓面的倾角 β 。

排球下落与鼓碰撞瞬间，排球的速度 v 与鼓速度 V 碰撞前后满足：

鼓与球组成的系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \quad (41)$$

鼓与球的竖直方向动量守恒：

$$mv_{\perp} + MV_{\perp} = mv'_{\perp} + MV'_{\perp} \quad (42)$$

鼓与球的水平方向动量守恒：

$$mv_{\parallel} + MV_{\parallel} = mv'_{\parallel} + MV'_{\parallel} \quad (43)$$

其中， v 、 v' 分别为球碰撞前后的速度， V 、 V' 分别为鼓碰撞前后的速度。

联立式(41)-(43)，取 $v_{\parallel}=0$ ，可计算出排球运动方向偏离竖直方向的夹角 γ 。

现取排球被颠起至最高点后，再次下落的时刻为起始点，研究排球第二次的下落过程。调整鼓面，使第二次碰撞之后，排球恢复沿竖直方向的运动状态。

由于再次碰撞后球运动方向变为竖直，则在碰撞后满足：

$$v'_{\parallel}=0 \quad (v \neq 0) \quad (44)$$

为方便计算设碰撞后鼓 $V'_{\parallel}=0$ ($V \neq 0$)

联立上式(41)-(44)，求得鼓的水平速度：

$$V_{\parallel} = -\frac{mv_{\parallel}}{M} \quad (45)$$

其中， v ， V 为矢量，取向向下为正

由于问题一模型是在理想状态下鼓和球的竖直计算速度，则在实际情况中

$$v = \frac{v_{\text{前}}}{\cos \gamma}, \quad V = \frac{V_{\text{前}}}{\cos \beta} \quad (46)$$

$$v_{\parallel} = v_{\text{前}} \tan \gamma, \quad V_{\parallel} = V_{\text{前}} \tan \beta$$

$$v_{\perp} = v_{\text{前}}, \quad V_{\perp} = V_{\text{前}}$$

联立式(41)-(46)，可求得实际情况下的鼓面倾斜角 β ，即，使球恢复竖直运动状态的鼓的倾斜角。

5.3.2 调整方案提出

结合问题二中关于发力时机和力度出现的不同情况，提出两种基本的调整方案。

方案 1：通过控制队员发力时机改变鼓面倾斜角

将调节角度的过程视为问题二模型的一、二阶段，根据上述计算出下一次碰撞时，球得倾斜角度，利用问题一模型计算出碰撞前球和鼓得速度，碰撞时根据(41)-(43)，设球碰撞后速度 $v'_{\parallel}=0$ 求解出此时鼓碰撞前的倾斜角度 β ，调节受力时刻，带入问题 2 模型求得此时模拟的倾斜角度 $\beta_{\text{模拟}}$ 。通过不断进行调节受力时刻，使的找到 $\min\{|\beta_{\text{模拟}} - \beta|\}$ 。

方案 2：通过控制队员发力力度改变鼓面倾斜角

首先与方案一相同，求得所需的鼓面倾角 β ，计算得到该旋转过程中的鼓的旋转轴。通过调整各个队员的拉力大小，使旋转轴两侧的合力最终满足 $\min\{|\beta_{\text{模拟}} - \beta|\}$ 。以达到使球竖直运动的目标。

5.4 问题四：协作策略的调整措施

5.4.1 模型三模型的改进

为了使球的运动状态重新调整为竖直状态跳动，需要调整碰撞时的鼓面的倾角，即调整理想情况下的团队协作策略方案，改变队员的发力时机和力度以更好适应实际情况。

根据题意，首先对球和鼓的进行分析：

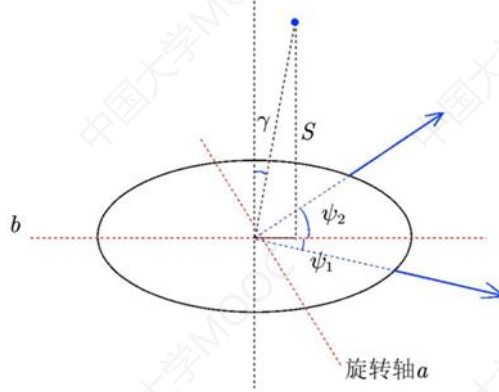


图 9 鼓面倾角调整示意图

设球的运动方向相对于竖直方向倾角为 γ ，且倾斜方向在水平方向上投影的延长线为 b 。倾斜方向落在两位队员之间，与他们的夹角分别为 ψ_1, ψ_2 ，且 $\psi_1: \psi_2 = \eta, n(\psi_1 + \psi_2) = 360^\circ$ 。

作直线 a ，使 $a \perp b$ ，则 a 所在位置即为调整鼓面倾角时鼓的旋转轴。

在问题三的模型基础上，加上球运动方向的限制，得到：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \\ mv + MV = mv' + MV' \\ v'_\parallel = 0 \quad (v \neq 0) \\ v = \frac{v_{\text{前}}}{\cos \gamma}, \quad V = \frac{V_{\text{前}}}{\cos \beta} \\ \psi_1: \psi_2 = \eta \\ n(\psi_1 + \psi_2) = 360^\circ \end{cases} \quad (47)$$

将计算结果 β 代入问题二的模型中，即可得到旋转轴两侧的拉力合力。

5.4.2 模型求解

在参与人数 $n = 10$ ，绳长 $L = 2m$ ，球距离鼓面高度 $S = 0.6m$ ，球运动方向与竖直方向夹角 $\gamma = 1^\circ$ ， $\psi_1: \psi_2 = \eta = 1:2$ 的情况下，对模型进行求解。现提供两种方案调节：

方案 1：控制队员的施力大小以调整鼓面倾角

方案 2: 改变队员的发力时机以调整鼓面倾角

下面应用方案 1 进行求解, 求解思路如下:

STEP 1: 将上述已知条件带入错误!未找到引用源。-错误!未找到引用源。 , 求得施力时长 $t_{拉}$, 球碰撞前速度 $v_{前}$, 施加拉力 F

STEP 2: 碰撞时, 根据功能动量守恒, 为使小球碰撞后竖直上升, 利用 (41) - (46) 解得, 碰撞时鼓面的倾斜角 β

STEP 3: 现根据问题一模型解得最优策略 F , 在合力方向上引入力 f , 使得鼓在 $F_{合} + f$ 作用下旋转, 运用遍历的思想使 f 从零增加, 每增加一次, 带入问题 2, 问题 1 模型, 判断此时球被弹回高度 $h_{上} > 0.6$, 以次类推, 直至得到最优 f 。

Step4: 通过调整队员用力情况, 队员拉力应满足: 对直线 b 两侧力 F_i 在直线 a 上进行分解, 合力 F_{ia} 需满足 $F_{ia} = 0$ 。

此时得队员用力情况带入问题 2 模型第一阶段 ($0 \sim t_{拉}$) 可求得碰撞时鼓面倾斜角度

改变拉力情况, 重复上述步骤, 求出满足目标 $\min\{|\Delta\theta - \beta|\}$ 的队员受力情况。

根据上述步骤, 用 matlab 进行编程求解, 为便于计算每个人受力情况, 认为合力是由球投影指向两名队员之间的队员的力 $f_{1, 2}$ 合成, 下面给出两种模拟情况:

表 5 鼓距水平距离 $s=0.28m$

发力 F	60	65	70	75	80	85	90	95
f_2	0.9200	0.9200	0.9300	0.9500	0.9600	2.0505	2.3600	2.6900
f_1	1.3295	1.3295	1.3440	1.3729	1.3873	2.9625	3.4105	3.8874
f	1.9589	1.9589	1.9802	2.0227	2.0440	4.3649	5.0249	5.7276

表 6 鼓距水平距离 $s=0.28m$

发力 F	60	65	70	75	80	85	90	95
f_2	0.8300	0.8500	0.8600	1.7700	2.0800	2.4800	2.8600	3.260
f_1	1.1995	1.2284	1.2428	2.5579	3.0059	3.5839	4.1331	4.7111
f	1.7672	1.8098	1.8311	3.7687	4.4287	5.2804	6.0895	6.9412

队员施力时间与增加的合力 f 之间的关系如下图所示：

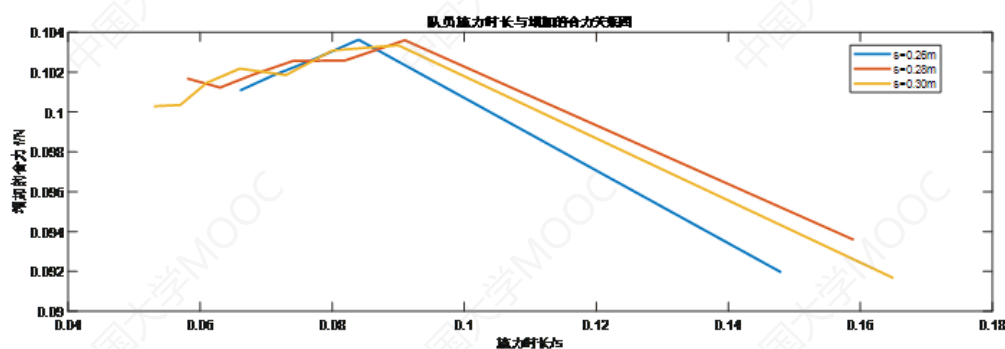


图 10 队员施力时间与增加的合力 f 之间的关系

图中可以看出当随着发力时间增加，发力大小总呈现下降局势。

六、灵敏度分析

本文利用微元的思想对模型进行近似求解，而在迭代中，时间 T 的步长取值可能对结果造成一定影响。因此选取问题二中，序号 4、5、6 的数据进行迭代步长的灵敏度分析。得到结果如下表所示

表 7 问题二的迭代步长灵敏度分析

步长	序号 4	序号 5	序号 6
0.0005	1.371	2.924	2.156
0.001	1.333	3.055	2.144
0.002	1.256	3.324	2.117
0.005	0.997	4.175	2.022
0.01	0.479	5.749	1.807

经分析，当步长取值较小时，改变步长对结果的影响较小。而当步长取值变大，与总时间长度（0.1s）接近是，结果出现较大的变化。说明步长的选择对迭代结果有较大的影响，为得到较为精确的近似解，应选取与总长度相差较大的步长进行求解。

七、模型的评价

7.1 模型的优点

问题 1：在排球掉落的时候，考虑了空气阻力，非常有效地减少了误差。在制定的最佳策略的要求下，采用了规划模型，约束条件符合题意，一些没有的参数先初步确定，最后结果显示该策略是可行和最佳的。

问题 2：运用了微元的思想，如果将 0.1s 内的拉力的方向看成不变的话，会带来很大的误差，题中以 0.001s 为步长，对过程的解析更加清晰，不会影响整体的结果。

问题 3: 为了使球重新回到竖直方向上, 本题提出了两种基本调整方案, 考虑的很全面, 既可以控制施力大小也可以控制发力时间, 方案不是单一的, 更具有实用性。

问题 4: 第四问是对第三问的具体分析, 在制定调整策略时, 设置基本的参数作调整, 接着在该基础上微调两个参数, 来慢慢满足要求的条件, 求得的结果比较准确。

7.2 模型的缺点

问题 1: 排球与同心鼓碰撞的时候, 有能量损失。但是题中将它考虑成完全弹性碰撞, 可能会带来一定的误差。

问题 2: 同心鼓在四周的力无规则变化的时候, 运动十分复杂, 旋转轴不一定在中心, 题中将旋转中心定为了圆柱体同心鼓的重心, 会带来误差。对各外力力矩分析的时候, 没有把重力矩考虑进来。

问题 3: 在鼓有倾角的情况下, 分析和计算过程将会十分复杂, 在调整策略的时候, 还有很多因素没有考虑进来, 理论上可行, 但是实际上可能有一定偏差。

问题 4: 在实际调整的过程中, 给出了调整结果, 但是调整的结果不止一种, 应该制定多种调整方案, 选出实施效果最好的策略。

八、模型的改进

该题中对于旋转体的力矩分析中, 默认旋转体的转轴在中心, 实际上转轴要偏离中心一些, 这里可以根据平衡原理来计算出转轴的位置, 但是计算十分复杂繁琐。同心鼓在四周施加拉力的时候, 它的旋转情况也需要更加深入的讨论, 翻转情况的速度加速度变化在每个时刻也是不一样的。第四问分析敏感性, 改变发力的情况, 鼓面弹性系数等多个因素对最终结果的影响。

九、模型的推广和应用

生活中旋转的物体非常多, 本模型可以运用于复杂的力学和力矩分析题中, 能够较好地解决生活、工业、农业等众多学科和领域问题。弹力分析, 转轴分析, 拉力分析, 不仅仅帮助我们掌握了同心鼓协作拓展项目的技巧, 还在我们日常生活中用到旋转的地方和工业设备运作有广泛的使用。

参考文献:

- [1] <https://baike.baidu.com/item/%E6%8E%92%E7%90%83/33349?fr=aladdin>
- [2] <https://max.book118.com/html/2017/0527/109581803.shtm>
- [3] 张金锋, 刘建军, 公丕锋, 袁五届, 张永兴. 基于均质圆柱壳刚体转动惯量的计算[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2015, 36(02): 84-86.
- [4] 童泳淇. 关于微元法在物理中的应用[J]. 科学技术创新, 2017(31): 46-47.
- [5] 肖云剑, 张伟. 浅议“验证动量守恒定律”的小球落点问题[J]. 物理通报, 2019(02): 127.

附录:

求解问题一的 matlab 代码

```
clc
clear
%k=1123*1120*0.4^3*10;%
%g=9.8; M=3.6;m=0.27;h=0.11;L=1.7;
%F=8*80;Hbd=0.4;dt=0.0001;cosc=h/L;
%a0=F/M*cosc-g;s0=0.5*a0*dt*dt;%0 时刻鼓加速度
%s=s0;v0=a0*dt;%鼓下一时刻速度
%flag=0;
for f=59:1:200
for t0=0:0.001:1%%开始施力时间（较球开始下落）
    % t0=0
    g=9.8; M=3.6;m=0.27;h=0.11;L=0.7;
    Hbd=0.4;dt=0.001;cosc=h/L;
    F=f*8;
    a0=(F/M)*cosc-g;s0=0.5*a0*dt*dt;%0 时刻鼓加速度
    s=s0;v0=a0*dt;%鼓下一时刻速度
    flag=0;
    for i=0.001:0.001:1%施力时长
        cosc=(h-s)/L;%h-s 鼓距水平面距离
        a=F/M*cosc-g;%鼓加速度
        s0=v0*dt+0.5*a*dt^2;%鼓单位时间上升高度
        v0=v0+a*dt;%单位时间速度变化
        s=s+s0;%鼓上升总高度
        if a<=0 || h-s<=0%控制加速度大于零。施力时间不超过水平位置
            flag=0;
            break%不满足 t0++
        end
        %vb=g*(i+t0);
```

```

[vb,H]=vq(1,i+t0,0);%计算此刻球下落距离...
if H+s>=0.4%判断两者之和是否 0.4
    v=(-(m-M)*vb+2*M*v0)/(m+M);%碰撞后速度
    [~,hh]=vq(2,i+t0,v);%碰撞后反弹高度
    if hh>=H&&hh<=1.05*H%判断高度是否达到下落时高度
        flag=1;
        Ht=hh+s;%第一次反弹后据鼓面高度
        c=[i t0 s H vb v Ht]

        % i 用力时长
        % t0 %=vpa(t0,7)%发力时机
        % s
        % H
        % vb
        % v
        v0
        break
    end
end
end

end
if flag==1
    break
end
end
if flag==1
    f
    break
end
end
end
%%

```

```

%第二次跳
if flag==1
for j=0:0.0001:1
    [vb,h] =vq(1,i+t0+j,0);
    if h+v0*j-0.5*g*j^2>=Ht-0.4+hh
        break
    end
end
vg=v0-g*j;
v=(-(m-M)*vb+2*M*vg)/(m+M);%%碰撞后速度
[~,hhh]=vq(2,0,v);%碰撞后反弹高度
Ht=hhh+v0*j-0.5*g*j^2+s%第二次高度
End
%%
%第二次跳
if flag==1
%function [vg,vq] = Gv(H0,v0,tb)%第一次反弹后据鼓高度，上次碰撞时鼓的速度，
%g=9.8;                %tb 上次碰撞时球运动的时间
for j=0:0.0001:1
    [vb,h] =vq(1,i+t0+j,0);
    % h+v0*j-0.5*g*j^2-H
    if h+v0*j-0.5*g*j^2+s>=hh+s-0.4+hh+s
        break
    end
end
end
vg=v0-g*j;
%[vg,vb] = Gv(hh+s,v0,i+t0);
%v=[v0,vb];
v=(-(m-M)*vb+2*M*vg)/(m+M);%%碰撞后速度
[~,hh]=vq(2,0,v);%碰撞后反弹高度

```



```

H2=hh+v0*j-0.5*g*j^2+s%第二次高度
end
%end
%%v=(-(m-M)*vb+2*M*v0)/(m+M)
%%[vb,H]=vq(0.001,1,i+t0,v0);
%[v,H]=vq(2,0.27,4.0368)
问题一的匿名函数
function [v,h]=vq(stat,t,v0)%最终速度（1，输入t，求得t时刻后速度，下落距
离% 2，输入v0，求得上升高度）h：下落高度
k=1.23*1.20*0.4^3*10;%排球阻力系数
m=0.27;
v=0;
g=9.8;
h=0;
dt=0.0001;
if stat==1
for i=0:0.0001:t
a=g-k*v/m;
h0=v*dt+0.5*a*dt^2;
h=h+h0;
v=v+a*dt;
end
elseif stat==2
for i=0:0.0001:2
a=g+k*v0/m;
h0=v0*dt-0.5*a*dt^2;
h=h+h0;
v0=v0-a*dt;
if v0<=0
v=v0;

```

```

        break
    end
end

end

求解问题二的 matlab 代码

clc
clear
%%
%1, 2, 3
J=0.0865;
r=0.2;4
F1=90;F2=80;%1
%F1=180*cosd(22.5);F2=160*cosd(22.5);%2
%F1=180*cosd(67.5);F2=160*cosd(67.5);%3
%F2=180*cosd(67.5);F1=160*cosd(67.5);%9
dt=0.0001;
ceta1=acos(11/170);
ceta2=ceta1;
%w0=0.7152*0.8;%8
%w0=0.7152;%9
w0=0;
af1=F1*r*cos(ceta1)./J;
af2=F2*r*cos(ceta2)./J;
af=af1-af2;
for i=0.0001:0.0001:0.1
    ceta1=ceta1+(w0*dt+0.5*af*dt^2);
    ceta1*180/pi;
    ceta2=ceta2-(w0*dt+0.5*af*dt^2);
    %ceta1*180/pi
    w0=w0+af*dt;

```

```

af=F1*r*cos(ceta1)/J-F2*r*cos(ceta2)/J
end
delta=vpa(abs(ceta1-acos(11/170))*(180/pi),5)

%%
%4,5,6
clc
clear
J=0.0865;
r=0.2;
dt=0.0001;
F=80;%4
%F=80*2*cosd(22.5);%5
%F=80*2*cosd(45*3/2);%6
ceta=acos(11/170);
ceta*180/pi
w0=0;
af=F*r*cos(ceta)/J;
ccc=ceta*180/pi
for i=0:0.0001:0.1
    ceta=ceta+(w0*dt+0.5*af*dt^2);
    %ccc=[ccc ceta*180/pi];
    ceta*180/pi
    w0=w0+af*dt;
    w0*180/pi
    af=F*r*cos(ceta)/J;
end

delta=abs(ceta-acos(11/170));
delta*180/pi

```

```

ceta1=acos(11/170)+delta;
ceta1*180/pi
ceta2=acos(11/170)-delta;
ceta2*180/pi
af1=F*r*cos(ceta1)/J;
af2=F*r*cos(ceta2)/J;
af=af1-af2;%角加速度为负
w=w0;
for i=0:0.0001:0.1

    ceta1=ceta1+(w*dt+0.5*af*dt^2);
    ceta1*180/pi
    ceta2=ceta2-(w*dt+0.5*af*dt^2);
    ceta2*180/pi
    w=w+af*dt;
    af1=F*r*cos(ceta1)/J;
    af2=F*r*cos(ceta2)/J;
    af=af1-af2;
end
delta=vpa(abs((ceta1-acos(11/170))*(180/pi)),9)

%%
clc
clear
%7,8,9
J=0.0865;
r=0.2;
dt=0.0001;
F1=90;F2=80;%7
w0=0;

```

```

ceta=acos(11/170);
af=F1*r*cos(ceta)/J;
for i=0.0001:0.0001:0.1
    ceta=ceta+(w0*dt+0.5*af*dt^2);
    ceta*180/pi
    w0=w0+af*dt;
    w0*180/pi
    af=F1*r*cos(ceta)/J;
end

delta=abs(ceta-acos(11/170));
ceta1=acos(11/170)+delta;
ceta1*180/pi
ceta2=acos(11/170)-delta;
ceta2*180/pi
af1=F1*r*cos(ceta1)/J;
af2=F2*r*cos(ceta2)/J;
af=af1-af2;
w=w0;
for i=0:0.0001:0.1
    ceta1=ceta1+(w*dt+0.5*af*dt^2);
    ceta2=ceta2-(w*dt+0.5*af*dt^2);
    w=w+af*dt;
    af1=F1*r*cos(ceta1)/J;
    af2=F2*r*cos(ceta2)/J;
    af=af1-af2;
    ceta1*180/pi;
end

delta=abs((ceta1-acos(11/170))*(180/pi))

```

求解问题四第一种策略的 matlab 代码

```

clc
clear

% for h=0.21:0.01:0.4
% for yyy=80:2:100
for t0=0:0.001:1%开始施力时间（较球开始下落）
    g=9.8; M=3.6;m=0.27;L=2;h=0.26;
    Hbd=0.6;dt=0.001;cosc=h/L;
    F=64*10;
    a0=(F/M)*cosc-g;s0=0.5*a0*dt*dt;%0时刻鼓加速度

    s=s0;v0=a0*dt;%鼓下一时刻速度
    flag=0;
    for i=0.001:0.001:1%施力时长
        cosc=(h-s)/L;%h-s 鼓距水平面距离
        a=F/M*cosc-g;%鼓加速度
        s0=v0*dt+0.5*a*dt^2;%鼓单位时间上升高度
        v0=v0+a*dt;%单位时间速度变化
        s=s+s0;%鼓上升总高度

        if a<=0 || h-s<=0%控制加速度大于零。施力时间不超过水平位置
            flag=0;
            break%不满足 t0++
        end
        %vb=g*(i+t0);

        [vb,H]=vq(1,i+t0,0);%计算此刻球下落距离....
        if H+s>=Hbd%判断两者之和是否 0.6
            v=(-(m-M)*vb+2*M*v0)/(m+M);%碰撞后速度
            [~,hh]=vq(2,i+t0,v);%碰撞后反弹高度
            if hh>=H&&hh<=1.05*H%判断高度是否达到下落时高度
                flag=1;

                c=[i t0 s H vb v hh+s v0]
            end
        end
    end
end

```

```

% i% 时长 时刻 鼓升 球落 碰前速度 碰后速度 距鼓高度 鼓碰前
% t0 %=vpa(t0,7)
% s
% H
% vb
% v
%hh+s 第一次反弹后高度
wc= vpa( atand(m*vb*tand(1)/(M*v0)),9)

break

end

end

if flag==1
break
end

end

if flag==1
break
end

end

J=0.0865;
r=0.2;
f0=F/10;%基础的力
t=i;%力作用时间
% wc=0.109325986;%要求偏转角度
for f2=0:0.01:100
f1=f2*sind(36)/sind(24);
F1=f0+f1*cosd(24)+f2*cosd(36);F2=f0;%1
%F1=180*cosd(22.5);F2=160*cosd(22.5);%2
%F1=180*cosd(67.5);F2=160*cosd(67.5);%3
%F2=180*cosd(67.5);F1=160*cosd(67.5);%9

```

```

dt=0.0001;
ceta1=acos(11/170);
ceta2=ceta1;
%w0=0.7152*0.8;%8
%w0=0.7152;%9
w0=0;
af1=F1*r*cos(ceta1)./J;
af2=F2*r*cos(ceta2)./J;
af=af1-af2;
for i=0.0001:0.0001:t
    ceta1=ceta1+(w0*dt+0.5*af*dt^2);
    ceta1*180/pi;
    ceta2=ceta2-(w0*dt+0.5*af*dt^2);
    %ceta1*180/pi
    w0=w0+af*dt;
    af=F1*r*cos(ceta1)/J-F2*r*cos(ceta2)/J;
end
if (ceta1-acos(11/170))*(180/pi)>= wc%角度
    (ceta1-acos(11/170))*(180/pi)
    f2
    f1
    F1-f0
    break
end
End
求解问题四的 matlab 代码
%%
%1, 2, 3
clc
clear

```



```

J=0.0865;
r=0.2;
f0=64;%基础的力
t=0.1660;%力作用时间
wc=0.109325986;%要求偏转角度
for f2=0:0.01:100
f1=f2*sind(36)/sind(24);
F1=f0+f1*cosd(24)+f2*cosd(36);F2=f0;%1
%F1=180*cosd(22.5);F2=160*cosd(22.5);%2
%F1=180*cosd(67.5);F2=160*cosd(67.5);%3
%F2=180*cosd(67.5);F1=160*cosd(67.5);%9
dt=0.0001;
ceta1=acos(11/170);
ceta2=ceta1;
%w0=0.7152*0.8;%8
%w0=0.7152;%9
w0=0;
af1=F1*r*cos(ceta1)./J;
af2=F2*r*cos(ceta2)./J;
af=af1-af2;
for i=0.0001:0.0001:t
    ceta1=ceta1+(w0*dt+0.5*af*dt^2);
    ceta1*180/pi;
    ceta2=ceta2-(w0*dt+0.5*af*dt^2);
    %ceta1*180/pi
    w0=w0+af*dt;
    af=F1*r*cos(ceta1)/J-F2*r*cos(ceta2)/J;
end
if (ceta1-acos(11/170))*(180/pi)>= wc%角度
    (ceta1-acos(11/170))*(180/pi)

```

```
f2
f1
F1-f0
break
end
End
```