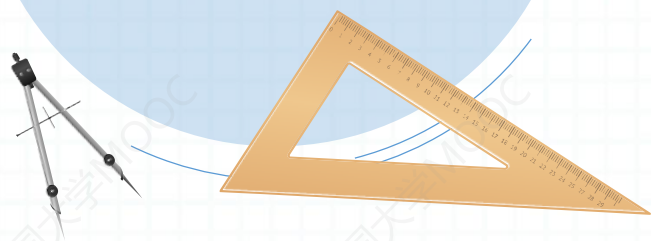


差分方程方法建模 差分方程稳定性建模



王宏洲

数学与统计学院，北京理工大学

An illustration featuring a blue compass on the left, a large blue question mark in the center, and an orange triangle on the right. A blue arc connects the compass to the question mark. The background is a light gray grid.

1.应用背景

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$k \rightarrow \infty$ 时会怎样?



田径项目年度世界纪录经常变化，长远趋势是怎样的？

- (1) $x(k) \rightarrow x^*$
- (2) $x(2k) \rightarrow x^*, x(2k+1) \rightarrow y^*$
- (3) $x(k)$ 无极限

2 平衡点及其稳定性



2. 平衡点及其稳定性



$$x(k+1) = f(x(k)) \quad \text{如果 } x(k) \rightarrow x^*,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x(k)) \rightarrow x^* = f(x^*)$$

>>>>

判断差分方程的稳定性:

- ① 求解方程 $x^* = f(x^*)$, 所得 x^* 称为平衡点;
- ② 判断 x^* 的稳定性.

3 平衡点稳定性判断准则





3.平衡点稳定性判断准则



»»»»

判断 $x(k+1)=f(x(k))$ 的稳定性:

- ① 求解方程 $x^*=f(x^*)$, 所得 x^* 称为**平衡点**;
- ② 判断 x^* 的稳定性。

差分方程	平衡点	稳定条件
$x(k+1) = ax(k) + b$	$\frac{b}{1-a}$	$ a < 1$
$x(k+1) = f(x(k))$	$x = f(x)$ 的解 x^*	$ f'(x^*) < 1$

二阶线性差分方程

$$x(k+2) + a_1x(k+1) + a_2x(k) = b$$

平衡点由 $x + a_1x + a_2x = b$ 推得: $x^* = \frac{b}{1+a_1+a_2}$

求解特征方程: $\beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0$ 得到 β_1, β_2

判断准则: $|\beta_1| < 1$ 且 $|\beta_2| < 1$ 时 x^* 稳定.

A stylized illustration featuring a blue compass on the left, a large blue question mark in the center, and an orange triangle on the right. A blue arc connects the compass to the question mark. The background is a light gray grid.

4.几个例子

差分方程	平衡点	稳定条件
$x(k+1) = ax(k) + b$	$\frac{b}{1-a}$	$ a < 1$

只考虑出生死亡的种群模型

$$x(n+1) - x(n) = rx(n) - dx(n)$$

$$x(n+1) = (1+r-d)x(n) \quad \text{平衡点为0}$$

$|1+r-d| < 1$ 时平衡点0稳定, 即 $r < d$ 时,
生育率小于死亡率, 种群终将灭亡。

差分方程	平衡点	稳定条件
$x(k+1) = f(x(k))$	$x = f(x)$ 的解 x^*	$ f'(x^*) < 1$

资源受限的种群模型

$$x(n+1) = (A - Bx(n))x(n)$$

$$f(x) = (A - Bx)x$$

$$\text{平衡点: } x_1 = 0, x_2 = \frac{A-1}{B}.$$

$$f'(x) = A - 2Bx$$

$$x_1 = 0 \text{ 的稳定条件: } |A| < 1.$$

$$x_2 = \frac{A-1}{B} \text{ 的稳定条件: } |2 - A| < 1, \text{ 即 } 1 < A < 3.$$

$$x(n+1) = (A - Bx(n))x(n)$$

$$x_2 = \frac{A-1}{B} \text{ 稳定条件: } 1 < A < 3.$$

