

“同心鼓”团队项目最佳协作设计策略

摘要

本文基于动力学模型，将颠球数量最多等效为其他目标，研究了“同心鼓”团队项目最佳协作策略设计问题。

针对问题一，本题将参与项目的人都看作理想的个体，因此颠球数量的多少仅与此状态下系统的稳定性有关。本文以项目的参与人数及每个参与者的出力大小为决策变量，以团队总拉力尽可能小为目标函数，利用动能定理和动量守恒，建立单目标规划模型，得到最佳设计策略是项目参与人数为8人时，每个人沿绳子方向出力15N，绳长为0.5839m，鼓的初始高度距离绳子水平是0.21m，在低于绳子拉直时的0.1886m时碰撞，碰撞前排球速度为3.3967m/s，回弹速度为3.4057m/s，反弹高度为0.5918m，团队的总拉力最小，为120N。

针对问题二，在给定参与人数，绳长，鼓的相关参数的前提下，针对不同的团队协作状态计算鼓面的倾斜角。首先利用刚体旋转，考虑转轴是垂直穿过鼓的侧面并经过鼓的中心的直线，且与力作用点与鼓中心的连线垂直，对鼓进行相应的受力分析及力矩分析，建立相应的微分方程，将每组数据代入微分方程当中分别求出时间0.1s时鼓面的倾斜角度，依次得到倾斜角度的数值为 $[0.4299^\circ, 0.7922^\circ, 0.3281^\circ, 0.4408^\circ, 0.8145^\circ, 0.3374^\circ, 1.2960^\circ, 0.6140^\circ, 0.0103^\circ]$ ，考虑转轴是固定的情况，对模型进行优化，其定轴应为大小相差最大的两力作用点连线的垂线并与鼓相切于较小力的作用点，同理可解得倾斜角度数值为 $[0.7641^\circ, 0.3248^\circ, 0.8994^\circ, 0.3344^\circ, 0.8145^\circ, 0.9236^\circ, 2.1619^\circ, 3.1354^\circ, 0.0792^\circ]$ 。

针对问题三，该题以现实状态为背景，考虑鼓面倾斜角，在问题一模型的基础上对模型进行补充调整。对排球与倾斜鼓面碰撞整体过程进行受力分析，根据动力学原理，建立了调整倾斜角与鼓面倾斜角的关系模型，考虑队员水平位移的不可控性高，通过判断排球落点与鼓面圆心距离采用不同的调整方案：当落点与鼓面圆心较近时参与队员不进行水平位移仅调整鼓的倾角来接球；当落点与鼓面圆心较远时需要参与队员在水平位移的基础上调整鼓的倾角来接球。利用问题一中的数据计算，得到鼓面倾角为 0.5° 时，调整后的倾角为 22.83° ；鼓面倾角为 1° 时，调整后的倾角为 23.09° ；鼓面倾角为 10° 时，调整后的倾角为 27.62° 。

针对问题四，本题在问题三模型的基础上对鼓面上的倾角进行计算，通过判断选择仅调整鼓的倾角不进行水平位移的方案。利用MATLAB逐步逼近数值法进行计算，得到调整倾角为 0.5389° 。以调整人数数量最少作为目标函数，对所有队员发力时间和时机进行控制，通过调整一名队员的发力大小和发力时机，得到一名队员发力50.12N，其余人为41N的调整策略。并对模型进行灵敏度分析，当调整人数在1至3之间变动时，分析其对应总力的变化情况。

最后，分析了模型的优缺点，并给出了模型改进方向。

关键词：动力学模型 目标规划模型 灵敏度分析

一、 问题的背景与重述

1.1 问题的背景

作为一项需要多人协作来完成的团队能力拓展项目，“同心鼓”具备着许多其他项目所不具有的优势，其对于锻炼团队的协作能力及加强队员间的默契程度有着显著效果。因此，探究“同心鼓”团队项目最佳协作设计策略对团队建设及团队能力拓展有着重要意义。

1.2 问题的重述

在“同心鼓”项目中采用的鼓重 3.6kg，高 22cm，鼓面直径为 40cm；使用的球为排球，重 270g。项目参与人数不得少于 8 人，参与项目两人间最小距离应大于等于 60cm。在项目开始时，排球从鼓面中心处上方 40cm 自由落体，要求球颠起的高度大于 40cm，低于 40cm 时项目结束，项目的目的是使连续颠球的次数尽可能的多。

在满足项目的要求下来完成下列四项问题：

问题 1：在所有人都可以完成对用力时机、方向及力度的精确控制下，找出对应的最佳团队协作策略，并求出相应的颠球高度；

问题 2：在队员没办法做到对用力时机、方向及力度的精确控制下，会出现能导致鼓面倾斜的误差。在参与人数为 8 人，绳长为 1.7m，鼓面在初始时刻是水平静止的且较绳子水平时高度下降 11cm 的情况下，建立可描述参与成员发力力度与时机与某特定时刻鼓面倾角关系的模型，根据表一求 0.1s 鼓面倾角；

问题 3：根据问题 2 模型基础，在现实的情况中，是否需要对问题 1 的策略进行调整？若需要，给出具体调整方案；

问题 4：当鼓面倾斜时，颠球方向不再与地面垂直，需要参与队员来调整拉绳策略。假设参与人员数量为 10，绳长 2m，颠球高度为 60cm，产生了与垂直方向相差 1 度的倾角，且倾斜方向水平投影指向两位参赛队员之间，与这两名参赛队员的夹角比为 1:2。求出精确控制下参与人员的发力力度及时机，使排球调整为竖直弹跳状态，并且对现实情形中该策略实施效果进行分析。

二、 问题的分析

2.1 问题的分析

针对问题 1：

在项目参与人员都是理想可控的个体的情况下，需找到影响系统稳定性的主要因素，以获得相应的目标函数，稳定性本题考虑前后两次的高度差。在团队协作策略下，以团队所付出的总拉力为目标函数，以参与人数及每个参与者给出的拉力作为决策变量，以文中动力学模型及题目信息作为约束条件，建立单目标规划模型，给出可行的算法。

针对问题 2：

现实生活中，项目参与人员往往做不到对发力时机及力度的精确控制，所以对实际问题来说，鼓并不是一个平行于地面的平面，而是一个旋转体，通过对鼓进行相应的受力分析及力矩分析，建立相应的微分方程，以鼓的受力及力矩分析为约束条件，得到鼓面倾斜角度的微分方程，并给出具体可行的算法。

针对问题 3:

根据问题二中的模型可以得知当项目参与人员无法做到对发力时机及力度的精确控制时,鼓面的倾角是我们必须考虑的问题,因此在问题一的策略上进行调整。根据鼓的有关物理性质,排球落点与鼓面圆心距离会影响到排球的反弹,其反弹程度不同会影响到项目参与人员的接球方式,将该改进引入到问题一模型中,得到的新模型即为模型一的改进模型。

针对问题 4:

根据问题三的模型,对倾角的调整进行计算,使排球保持竖直方向上的跳动,再根据已知条件相应求出碰撞后排球与水平与竖直方向的夹角及反弹时间,最后根据公式算出倾角使鼓的倾斜角度。以调整人数最少为目标,根据最终倾角,对不同人员的发力情况进行分析和控制,并得出最终结果。

三、模型的假设

3.1 模型的假设

- (1) 假设项目参与人员拉绳子的手是处于同一高度下的;
- (2) 假设排球与牛皮双面鼓的碰撞为弹性碰撞;
- (3) 假设空气阻力对排球的下落没有影响。
- (4) 假设绳在任意时刻保持拉直状态。
- (5) 假设绳子没有弹性。

四、符号说明

符号	表示含义	单位
C	空气阻力系数	—
g	重力加速度, 取值 $9.8m/s^2$	m/s^2
ρ	空气密度	kg/m^3
S	迎风面积	m^2
v	相对运动速度	m/s
s	排球下落的位移	m
v_{11}	考虑空气阻力情况下从 40cm 下落到水平面速度	m/s
v_{12}	不考虑空气阻力情况下从 40cm 下落到水平面速度	m/s
l	在理想状态下的绳子长度	cm
n	该项目的参与者人数, $n \geq 8$	个
T_j	参与项目的每个参与者所给绳子的拉力, $j = 1, 2, 3, \dots, n$	N
T_s	团队总拉力	N
F_0	问题二模型初始位置参与人员给鼓的初始拉力	N
θ	绳子与水平面所形成的夹角	$^\circ$
m	排球的质量	kg
M	牛皮双面鼓的质量	kg
R_1	牛皮双面鼓的内半径	cm

R_2	牛皮双面鼓的外半径	cm
J	牛皮双面鼓的转动惯量	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
L_r	排球落点与牛皮双面鼓圆心的距离	cm
z	调整倾角后鼓的倾斜角度	°
γ	鼓面与水平面的夹角	°
v_{jt}	调整倾角后，排球沿垂直斜面方向速度	m/s

五、模型的建立与求解

排球与牛皮双面鼓的运动过程主要包含了四个运动状态，分别是排球下落阶段、鼓的调节阶段、球鼓碰撞阶段及回弹阶段。基于这些相应的动力学模型结合含有微分方程的规划模型来对该项目进行策略研究，制定不同要求下相应的协作策略模型。

5.1 项目运动状态中动力学模型的建立

动力学模型是对该项目进行策略研究的基础，只有准确标准的建立题目所需要的动力学模型才能研究出对于该项目的合理有效的策略。基于对该项目进行深入了解及观看其视频资料后，本文将整体的运动状态分为了四部分，如图 1 所示：

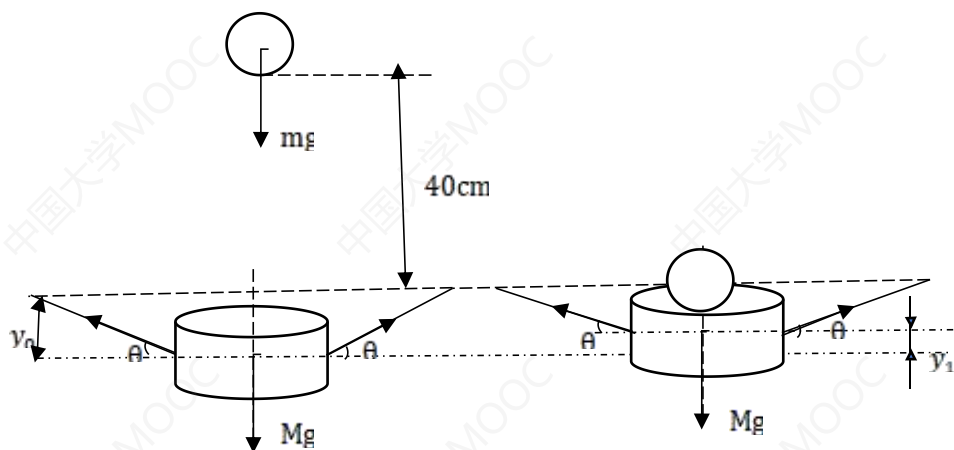


图 1 排球的碰撞过程

● 排球下落阶段

在排球下落阶段，排球从静止位置竖直下落，下落过程中排球受到空气阻力与重力的共同作用，为验证假设中忽略空气阻力的合理性，对有无空气阻力小球的运动状态进行分析。

(1) 考虑空气阻力

在考虑空气阻力的情况下，对排球的运动过程进行分析。其中空气阻力的大小与小球速度的关系为：

$$f = \frac{1}{2}kv^2 \quad (1)$$

$$k = \frac{1}{2}C\rho S \quad (2)$$

其中 C 为空气阻力系数, ρ 为空气密度, S 为迎风面积, v 为相对运动速度。因此根据动力学原理建立考虑空气阻力排球下落的微分方程, s 表示排球下落的位移:

$$g - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (3)$$

$$t = 0, s = 0, \frac{ds}{dt} = 0$$

当 s 为初始高度 40cm 时, 计算小球在下落到初始水平面的速度 v_{11} , 取排球的直径为 21.5cm, 利用 MATLAB 迭代计算可得:

$$v_{11} = 2.8085 \text{ m/s}$$

(2) 不考虑空气阻力

当不考虑下落过程的空气阻力时, 则小球在竖直下落过程做自由落体运动, 其满足动力学方程:

$$G = mg = m \frac{d^2s}{dt^2} \quad (4)$$

小球落到初始水平面的速度

$$v_{12} = \sqrt{2gs} \quad (5)$$

当 $s = 40 \text{ cm}$ 时, 计算得到

$$v_{12} = 2.800 \text{ m/s}$$

比较 v_{11} 与 v_{12} 可知, 排球下落到初始水平面的速度 $v_{11} \approx v_{12}$, 因此可忽略空气阻力的影响。

● 鼓的调节阶段

$$F_x = F \cdot \frac{y}{l} - Mg = M \frac{d(y_0 - y)}{dt} \quad (6)$$

$$v_{12} = \frac{d(y_0 - y)}{dt} \quad (7)$$

● 碰撞阶段

因为鼓的质量很大, 且鼓和小球的弹性都很好, 所以小球和鼓碰撞时可是视为静止, 在碰撞瞬间小球和鼓满足动量守恒和能量守恒。

动量守恒:

$$mv_{11} + Mv_{12} = mv_{21} + Mv_{22} \quad (8)$$

能量守恒:

$$\frac{1}{2}mv_{11}^2 + \frac{1}{2}Mv_{12}^2 = \frac{1}{2}mv_{21}^2 + \frac{1}{2}Mv_{22}^2 \quad (9)$$

联立可得

$$v_{21} = \frac{(m - M)v_{11} + 2Mv_{12}}{m + M} \quad (10)$$

$$v_{22} = \frac{(M - m)v_{12} + 2mv_{11}}{m + M} \quad (11)$$

● 反弹阶段

初速度为碰撞结束后小球的速度, 向上以 $-g$ 的加速度匀减速到 0, 上升高度为 s_2

$$s_2 = \frac{(v_{21})^2}{2g} \quad (11)$$

5.2 问题一模型

问题一实际为在将参与项目的人都看作成理想的个体，使用该理想情况以及结合在题目要求下得出的动力学模型来确定一个具体的目标，建立相应的规划模型，得出相应规划模型下目标函数的解。

5.2.1 问题一模型的建立

在题目给出的理想情况下，每个参与队员均可以完美的控制其出力大小，发力方向时机及方向，不会发生任何误差。

项目参与者的数量及每个参与者所给绳子的拉力是可以在协作策略的制定中可以发生变化的量，是该规划模型建立的变量：

$$n, F_j$$

其中 n 为该项目的参与者人数， $n \geq 8$ ；而 F_j 为参与项目的每个参与者所给绳子的拉力， $j=1,2,3,\dots,n$ 。

问题一所要求的不只题目主干提到的颠球的次数，题目一要求找出该理想情形下团队最佳的协作策略。题目要求求出团队最佳的协作策略，对于一个团队来说，团队整体统共付出的力的多少即体现了团队协作策略制定的优劣，所以在引入团队总拉力 T_s 作为该规划模型的目标函数：

$$\begin{aligned} \min F_s &= \sum_{j=1}^n F_j \\ T_i &= T_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

其次需要考虑到个人协同的问题，在尽可能使团队少付出的情况下，需要令每位参与队员之间的差异尽可能的小，例如每位参与者给绳子的拉力，方向，角度以及时机都是需要进行控制的方面，据此得到该单目标规划模型的部分约束条件，其余约束条件则来自动力学模型及对题目的分析。

综上所述，建立最佳团队协作策略的单目标规划模型如下：

决策变量为：

$$n, F_j$$

目标函数为：

$$\min F_s = \sum_{j=1}^n F_j \quad (13)$$

其中 l_1 是鼓上的绳长。

约束条件为：

(1) 绳子在鼓身上的固定点沿圆周呈均匀分布，即

$$F_i \approx F_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

(2) 项目的参与人数不少于 8 人，但出于实际考虑人数不大于 20 人，即

$$8 \leq n \leq 20$$

(3) 队员之间的最小距离不得小于 60cm，即

$$2(l+r) \sin\left(\frac{180}{n}\right) \leq 0.6 \quad (15)$$

(4) 为了使颠球尽量稳定，碰撞前后小球的速度大小要尽可能相等。

- 小球碰撞前的速度:

$$F_x = F * \frac{y}{l} - Mg = M \frac{d(y_0 - y)}{dt} \quad (16)$$

$$s = h - y = \frac{(v_{11})^2}{2g} \quad (17)$$

- 小球碰撞后的速度

$$v_{21} = \frac{(m - M)v_{11} + 2Mv_{12}}{m + M} \quad (18)$$

- 碰撞前后满足的条件

$$\begin{aligned} abs(y_0) &> abs(y_1) \\ v_{21} &\approx v_{11} \end{aligned} \quad (19)$$

- 综上所述:

$$\begin{aligned} \min l_1 \\ \min F_s = \sum_{j=1}^n F_j \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{cases} abs(y_0) > abs(y_1) \\ v_{21} \approx v_{11} \\ 2(l+r)\sin(\frac{180}{n}) \leq 0.6 \\ F_i \approx F_j \end{cases} \quad (21)$$

5.2.2 问题一模型的求解

对问题一所建立的模型进行求解,得到的是在允许范围内最短绳长所对应的团队总拉力的结果,该结果基于最佳团队协作策略的单目标规划模型,具体结果如下表所示

Step1: 对人数进行循环,得

$$8 \leq n \leq 20$$

Step2: a、由计算可得到,相同人数的情况下,绳子越长,每个人所需要的力越大,所以约束条件可变为

$$2(l+r)\sin(\frac{180}{n}) = 0.6 \quad (22)$$

b、直接代入第二题中绳子的长度

Step3: 对不同人数下的所需最小力进行循环

step4: 利用数值解对微分方程进行迭代求解,对鼓的运动时间及鼓的初始位置进行循环,得到碰撞的位置,小球和鼓碰撞前、后的速度

Step5: 比较小球碰撞前后的速度,当两者接近时,得出该中人数下最小所需要的力。

Step6: 比较每种人数下的总力,得出最小的总力。

表 1 不同绳长下团队总拉力与项目人数情况表

允许范围内最短绳长			绳长 1.7m		
人均拉力	项目参与人数	团队总拉力	人均拉力	项目参与人数	团队总拉力
15	8	120	43	8	344

16	9	144	38	9	342
16	10	160	35	10	350
16	11	176	31	11	341
17	12	204	29	12	348
17	13	221	27	13	351
18	14	252	25	14	350
17	15	255	23	15	345
17	16	272	22	16	352
17	17	289	21	17	357
18	18	324	19	18	342
18	19	342	18	19	342
18	20	360	18	20	360

对于该单目标规划模型来说，可以直接通过模型找到全局最优解，当项目参与人数为 8 人时，团队的总拉力最小，为 120N。

将绳子长确定为 1.7 米，以团队总拉力为目标函数对单目标规划模型进行求解，该单目标规划模型同样可以通过模型找到全局最优解，当项目参与人数为 11 人时，团队的总拉力最小，为 341N。

所以最佳策略应该是总力最小，在精确控制下，每个人的力的大小和出力时间一致，初次用力为，即在 8 个人每个人沿绳子方向出力 15N，绳长为 0.5839m，鼓的初始高度距离绳子拉直是 0.21m，在低于绳子拉直时的 0.1886m 时碰撞，碰撞前排球速度为 3.3967，弹回速度为 3.4057m，反弹高度为 0.5918。

5.3 问题二模型

5.3.1 问题二模型的建立

在队员参与人数以及绳子长度确定下，因队员发力时机和力度做不到精确控制，会导致鼓面倾斜，在此情况下将鼓看作旋转体，通过对鼓进行相应的受力分析以及力矩分析，来得到 9 次试验中鼓面的倾斜角。

由于人员站位及力的方向并没有确定，所以需要设计人员的站位以及相应力的方向，队员人数为 n ， $n \geq 8$ ，队员在以绳长 s 与鼓的半径 r 的和为半径的圆上均匀站位，队员的用力方向均为沿绳方向，每个队员的力为 $F_i(t)$, $i=1,2,3\dots n$ ，发力时刻为 t_i , $i=1,2,3\dots n$ ，每个队员的发力大小为 F_i , $i=1,2,3\dots n$ 。

在确定站位及力的方向后，考虑转轴是垂直穿过鼓的侧面并经过鼓的中心的直线，且与力作用点与鼓中心的连线垂直，如图，由题意可得出由受力分析及力矩分析为基础的微分方程。

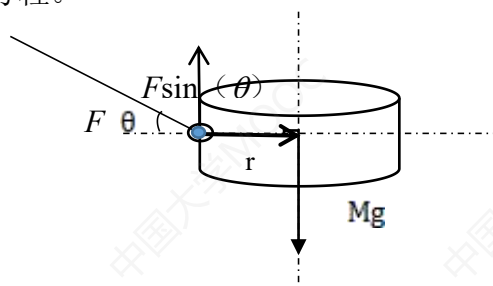


图 2 双面鼓转轴示意图

(1) 受力分析:

在初始状态下鼓面是水平静止的, 初始位置比绳子水平时低 p , 在场的每个参与人员都会给该鼓一个初始的拉力 F_0 , 使该鼓可以停留在要求的位置上。

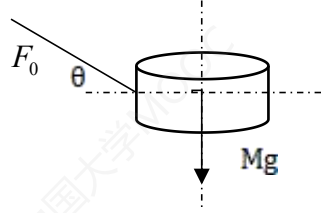


图 3 鼓的受力示意图

如图所示, 在初始位置时, 绳的方向与水平面的夹角为 θ ,

$$\theta = \arctan\left(\frac{p}{s}\right) \quad (23)$$

$$F_0 \cdot \sin \theta \cdot n = M \cdot g \quad (24)$$

$$F_0 = \frac{M \cdot g}{n \cdot \sin \theta} \quad (25)$$

对于水平方向上的合力为:

$$\sum_{i=1}^{i=8} F_0 \cos \theta = 0 \quad (26)$$

则可知队员的力与发力时刻存在下列关系:

当 $t < t_i$ 时, $F_i(t) = F_0$, 即队员在发力前以初始拉力使鼓停留在指定位置。

当 $t = t_i$ 时, $F_i(t_i) = F_i$, 即在发力时刻, 队员的力为其发力大小。

当 $t_i < t < T$ 时, $F_i(t) \in [F_0, F_i]$, 即在发力过后, 队员的力随时间在此区间内变化。

当 $t > T$ 时, $F_i(t) = F_0$, 即队员在发力后以初始拉力使鼓能回到指定位置。

(2) 如图, 对鼓上的每个力进行力矩分析:

$$\overrightarrow{M_i(t)} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F_i(t)} \quad (27)$$

其中 $M_i(t)$ 为每个队员在 t 时刻的力矩, $|\overrightarrow{r}| = R$ 。

$$\overrightarrow{M_T(t)} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{M_i(t)} = \overrightarrow{M_1(t)} + \overrightarrow{M_2(t)} + \dots + \overrightarrow{M_n(t)} \quad (28)$$

$$J = \frac{1}{4} \rho \pi (R_2^4 - R_1^4) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{1}{4} M (R_1^2 + R_2^2) + \frac{1}{12} M h^2 \quad (29)$$

此式^[2]为质量均匀分布的牛皮双面鼓的转动惯量表达式, 其中 R_1 、 R_2 分别为牛皮双面鼓的内外半径, 由于鼓壁较薄, 可以近似认为 $R = R_1 = R_2$, 则

$$J = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} M h^2 \quad (30)$$

(3) 微分方程:

基于以上对针对存在倾斜角的策略研究的受力分析及力矩分析可知, 发力大小和发力时机的选择均对鼓面倾斜角度产生影响, 所以鼓面倾斜角度的微分方程是以受力分析及力矩分析所得到方程为约束条件得到的微分方程。

则根据转动定理，可以得到鼓面倾斜角度与合力矩的微分方程：

$$M_T(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (31)$$

5.3.2 问题二模型的求解

由题可知，参与该项目的人数为 8 人，初始位置与绳水平的高度为 0.11m，且每根绳长都为 1.7m，根据 5.3.1 的式 (23) ~ (25) 可以得到初始力的大小为：

$$\theta = \arctan\left(\frac{p}{s}\right) = \arctan\left(\frac{0.11}{1.7}\right) = 3.7022^\circ \quad (32)$$

$$F_0 = \frac{M \cdot g}{n \cdot \sin \theta} = \frac{3.6 \times 9.8}{8 \times \sin(3.7)} N = 68.3N \quad (33)$$

由于时间为 0.1s，时间较短，为简化计算，可认为在 0.1s 内队员的力为其发力大小且发力方向不变。同时不考虑鼓的水平位移造成的倾角变化。以 5.3.1 的模型对其进行求解。在发力时机和发力大小不能精确控制时会出现如下三种情况：

(1) 不同队员发力时机相同，发力大小不同

在发力时机相同时，鼓仅从相同的发力时刻开始转动，则在 0.1s 内，计算每个人的力矩，并对其矢量求和求得其合力矩。结合转动定理建立微分方程对其求解，例如对于序号 2 情况的计算：

如图，对力矩进行合成得到

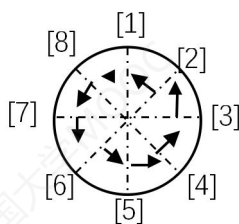


图 4 力矩合成图

$$\vec{M}_T = \sum_{i=1}^8 \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_8 = \vec{M}_1 - \vec{M}_5 + \vec{M}_2 - \vec{M}_4 \quad (34)$$

利用平行四边形法则和余弦定理，可得

$$M_{15} = \vec{M}_1 - \vec{M}_5 = (F_1 - F_5)r \sin \theta \quad (35)$$

$$M_{26} = \vec{M}_2 - \vec{M}_6 = (F_2 - F_6)r \sin \theta \quad (36)$$

$$M_T^2 = M_{15}^2 + M_{26}^2 - 2M_{15}M_{26}\cos \theta \quad (37)$$

带入数据计算得到此时的合力矩 $M_T = 0.2386N \cdot m$ ， $J = 0.0865kg \cdot m^2$ ，通过微分方程计算可得转动角度即鼓面倾角为 0.7922° 。

(2) 不同队员发力时机不同，发力大小相同

对于时机不同的发力，当部分队员提前发力时，其他队员保持初始力 F_0 ，即可认为在这一瞬间内不同人员的发力大小不同，因此在提前发力的这段时间内可将其转化为 (1) 中情况，计算出其偏转角度 α_1 ，由于角度变化，在所有队员发力大小相同时，垂直鼓方向的力会产生差异。因此将发力时机不同转化为发力大小不同进行计算。

例如对于序号 4 的情况，同理 (1) 的算法，对其分时间段进行求解可以得

到最终偏转角度为 0.4408°

(3) 不同队员发力时机，发力大小皆不同

当发力大小和时机皆不同时，同理(2)中的思路，将提前发力的情况转化为发力大小在同一瞬间不同的情况，计算偏转角 α_1 ，在此偏转角基础上考虑不同大小的力在垂直鼓面方向上的分力，同理进行计算。

例如对于序号7的情况，同理(1)的算法，在 $-0.1s \sim 0$ 这段时间内鼓偏转的角度为 0.8684° ，在偏转的基础上考虑所有队员垂直鼓面方向力的变化可以得到 $0 \sim 0.1s$ 内偏转的角度为 0.4276° ，则其总偏转角度为 1.2960°

因此通过对这三种情况的考虑，利用 MATLAB 编程计算得到如下表格的结果：

表 2 鼓面倾角表

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8	鼓面倾角(度)
1	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.4299
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
2	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7922
	用力大小	90	90	80	80	80	80	80	80	
3	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3281
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
4	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0.4408
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
5	发力时机	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0	0.8145
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
6	发力时机	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0	0.3374
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
7	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	1.2960
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
8	发力时机	0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0.6140
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
9	发力时机	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1	0.0103
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	

5.3.3 问题二模型的改进

在 5.3.1 中转轴是垂直穿过鼓的侧面并经过鼓的中心的直线，对于不同作用点的力有不同的转轴，其力臂均相等且等于鼓面的半径。现考虑当转轴固定时，对斜面倾角的计算。

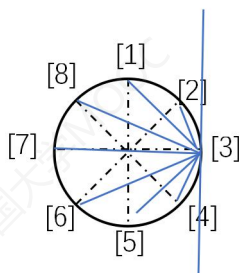


图 5 鼓的力臂示意图

分析可知，当考虑固定转轴时，其轴应为大小相差最大的两力作用点连线的垂线并与鼓相切于较小力的作用点，如图，不同队员的力臂为 $r_i, i=1,2,3\dots n$ ，则可得不同队员的力矩为

$$\overrightarrow{M_i(t)} = \vec{r}_i \times \overrightarrow{F_i(t)} \quad (38)$$

$$\overrightarrow{M_T(t)} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{M_i(t)} = \overrightarrow{M_1(t)} + \overrightarrow{M_2(t)} + \dots + \overrightarrow{M_n(t)} \quad (39)$$

根据平行轴定理可知，此时的转动惯量为

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 \quad (40)$$

$$J_z(t) = J + M_T(t)R^2 \quad (41)$$

其中 R 为鼓面的半径， h 为鼓的厚度。

则根据转动定理，建立微分方程：

$$M_T(t) = J_z(t) \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (42)$$

采用 5.3.2 中的求解思路对改进后的模型进行求解得到如下表格：

表 3 改进后鼓面倾角表

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8	鼓面倾角(度)
1	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7640
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
2	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3248
	用力大小	90	90	80	80	80	80	80	80	
3	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.8994
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
4	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0.3344
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
5	发力时机	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0	0.8145
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
6	发力时机	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0	0.9236
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
7	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	2.1619
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
8	发力时机	0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	3.1354
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
9	发力时机	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1	0.0792
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	

对改进模型的计算发现当转动轴固定时，斜面倾角将普遍增大，发力大小与发力时机出现不同的队员越靠近，倾角将越小，这与 5.3.2 中通过 5.3.1 模型计算的结果相反。

5.4 问题三模型

5.4.1 问题三模型的建立

在现实情形中，由于项目参与人员在项目进行时不可能每次都精确的控制发力大小，角度以及发力时机，而这些都会使项目中所使用的牛皮双面鼓产生对应的倾角，当倾角产生时，需要对其进行相应的调整，使球尽量保持竖直，以及球尽可能的落在鼓的中心，从而使项目进行过程中颠球数量尽可能多。为了使球尽量保持竖直以及尽可能使球落在鼓的中心，可以通过项目参与队员的水平位移完成接球，也可以不通过水平位移单单调整鼓的倾角来完成接球，不同方式适用于不同的情况，主要取决于落点半径与牛皮双面鼓圆心的距离。

根据查阅有关鼓的相关物理资料可知不同半径所对应的鼓面发生形变的难易程度及物理性质不相同，因此排球在鼓面上的落点会影响排球的反弹，所以本问假设在半径为 15cm 的鼓面内排球不会被弹飞，这时可以通过调整鼓的倾角来对排球进行调整；若排球落点在半径为 15cm 的鼓面外，排球会被弹飞，所以此时需要通过项目参与队员的水平位移完成接球。

考虑速度方向向上和向右为正方向，当排球竖直下落以速度 $-v_1$ 与竖直向上速度为 v_2 但存在斜面倾角 θ 的鼓发生碰撞时，对其进行受力分析，假设球的下落方向过鼓的中心，将球和鼓的速度向垂直鼓面与沿鼓面两个方向进行分解。

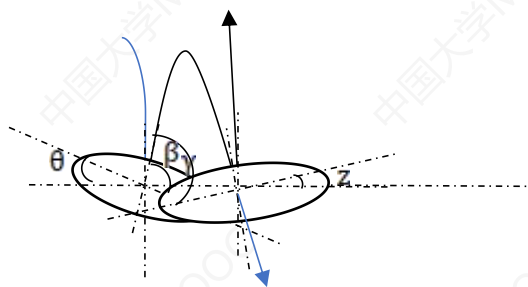


图 6 同心鼓的调整图

如图可知，在沿斜面方向，排球的速度为 $v_1 \sin \theta$ ，鼓的速度为 $v_2 \sin \theta$ ；在垂直斜面方向，排球的速度为 $v_1 \cos \theta$ ，鼓的速度为 $v_2 \cos \theta$ 。在垂直斜面方向上，考虑鼓与排球有良好的弹性，碰撞时间很短，排球和鼓满足完全弹性碰撞，碰撞后排球垂直鼓面的速度为：

$$v_j = \frac{(m-M)(-v_1) \cos \theta + 2Mv_2 \cos \theta}{m+M} \quad (43)$$

在沿斜面方向排球速度不发生改变，即

$$v_i = v_1 \cos \theta \quad (44)$$

则碰撞后排球的合速度为：

$$v_p = \sqrt{v_i^2 + v_j^2} \quad (45)$$

其合速度与斜面的夹角

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_j}{v_i}\right) \quad (46)$$

则合速度与水平线的夹角

$$\gamma = \beta - \theta \quad (47)$$

碰撞后排球水平速度 $v_x = v_p \cos \gamma$ ，竖直速度 $v_y = v_p \sin \gamma$

忽略空气阻力，由动力学模型可知，球达到最高点的时间为

$$t = \frac{v_p \sin \gamma}{g} \quad (48)$$

球的飞行时间

$$T = 2t = \frac{2v_p \sin \gamma}{g} \quad (49)$$

弹起高度

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \geq 40cm \quad (50)$$

则排球的水平位移

$$x = v_p T \cos \gamma \quad (51)$$

设落点半径与牛皮双面鼓圆心的距离为 L_r ， $L_r = x$ ，根据 L_r 的不同可以将问题分为两类：

①当 $0 < L_r \leq 15cm$ 时，参与队员不进行水平位移仅调整鼓的倾角来接球；

②当 $15cm < L_r$ 时，参与队员需要通过水平位移和倾角调整来接球。

● 鼓面倾角的调整

由于每个队员的发力大小，角度和时机无法精确控制，结合问题二的分析可

知鼓面会产生倾角，排球与鼓发生碰撞后排球的速度非竖直，因此需要调整鼓的倾角使球的速度尽量保持竖直，以达到颠球数量最多的目标。

为使碰撞后排球的速度恢复竖直方向，调整倾角使鼓的倾斜角度为 z 。

由于忽略空气阻力，则碰撞前排球的速度为 $-v_p$ ，与水平面的夹角为 γ ，鼓的速度仍为 v_2 。

同理上述分析将排球与鼓的速度向垂直鼓面和沿鼓面分解，在沿斜面方向，排球的速度为 $v_p \cos(\gamma + z)$ ，鼓的速度为 $v_2 \sin z$ ；在垂直斜面方向，排球的速度为 $v_p \sin(\gamma + z)$ ，鼓的速度为 $v_2 \cos z$ 。

则由动量定理与能量守恒定律可得在调整倾角时，碰撞后排球沿垂直斜面方向速度为

$$v_{jt} = \frac{(m - M)(-v_p) \sin(\gamma + z) + 2Mv_2 \cos z}{m + M} \quad (52)$$

在沿斜面方向排球速度不发生改变，即 $v_{it} = v_p \cos(\gamma + z)$

要使得碰撞后排球速度沿竖直方向，则需要满足下式：

$$\tan z = \frac{v_{it}}{v_{jt}} = \frac{v_p (m + M) \cos(\gamma + z)}{(m - M)(-v_p) \sin(\gamma + z) + 2Mv_2 \cos z} \quad (53)$$

对等式 (55) 进行求解可得需要调整的角度为 z 。

● 队员水平位移的计算

当 $15\text{cm} < L_r$ 时，参与队员需要通过水平位移使球能尽量落在鼓面中心后再进行倾角调整。由 (51) ~ (53) 计算可知其水平位移大小为：

$$x = v_p T \cos \gamma \quad (54)$$

$$T = 2t = \frac{2v_p \sin \gamma}{g} \quad (55)$$

通过水平位移使排球能尽量落在鼓面中心，以提高对球反弹角度的控制，但由于实际情况中，队员水平位移所要求的团队默契度和操作难度更大，因此在排球水平位移较小时，优先考虑仅调整鼓的方案。

5.4.2 问题三模型的求解

使用问题一的数据，碰撞前排球的速度为 $v_1 = 3.3967\text{m/s}$ ，鼓的速度为 $v_2 = 0.284\text{m/s}$ ，结合式 (45) ~ (49)，计算其碰撞后的合速度 v_p 及与合速度水平面的夹角 γ ，再通过式 (54) ~ (55) 联立计算，通过 MATLAB 编程计算，可得到鼓不同倾斜角度对应的调整角度，如下表 4：

表 4 鼓面倾角与调整后角度关系表

鼓面倾角 (度)	调整后角度 (度)
0.5	22.83
1	23.09
10	27.62

5.5 问题四模型建立与敏感度分析

5.5.1 问题四模型的建立

在问题三建立的模型上，对鼓面存在倾角的情况进行调整，使排球能够在调整后继续在竖直方向上跳动。由题目所给条件可知，碰撞后排球与竖直方向夹角为 1 度，则 $\gamma = 89^\circ$ 。

由反弹高度 60cm，结合式 (48) ~ (50)，可以计算得到在排球与倾斜鼓面碰撞后，其达到反弹高度 60cm 的时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.6}{9.8}} = 0.3499s$$

$$v_y = gt = 3.499m/s$$

$$v_x = v_y \tan 1^\circ = 0.0611m/s$$

$$v_p = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3.4995m/s$$

$$L_r = x = 2v_x t = 0.0428m < 0.15m$$

因此考虑 5.4 模型中的第①中方案，仅调整鼓的倾角不进行水平位移。则由式 (53)

$$\tan z = \frac{v_{it}}{v_{jt}} = \frac{v_p(m+M)\cos(\gamma+z)}{(m-M)(-v_p)\sin(\gamma+z) + 2Mv_2\cos z}$$

利用 MATLAB 逐步逼近数值法进行计算，得到

$$z = 0.0094rad = 0.5389^\circ$$

由于每个人可精确控制发力大小和角度，使得鼓面倾角达到 z 的方案有多种，其中包括控制队员间不同的发力大小和不同的发力时机。现以需要调整的人数最少为目标，对各个队员的发力大小和时机进行控制。

当仅调整一人时，对这名调整队员的发力时机与发力大小进行调整：

- 调整一名队员的发力大小

结合问题二的模型进行分析计算，其中 T 为排球在空中的飞行时间， $w(t)$ 为鼓旋转的角速度与时间的关系， $\alpha(t)$ 为鼓旋转的角加速度与时间的关系：

$$\begin{aligned} \int_0^T w(t)dt &= z \\ \int_0^T \alpha(t)dt &= w(t) \end{aligned} \quad (56)$$

可知此时所需要的平均角加速度 $\bar{\alpha} = 2.2008m/s^2$ ，平均力矩 $\bar{M} = 0.1904N \cdot m$ ，则此时要调整的队员需要多发的力为

$$F = \frac{\bar{M}}{R \sin \theta} = 9.1165N$$

则此时各个队员的发力情况为：

表 5 调整一名队员发力大小时所有队员的发力时机和力度

队员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
发力大小 (N)	50.12	41	41	41	41	41	41	41	41	41
发力时机 (s)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- 调整一名队员的发力时机

结合问题二中 5.3.2 的计算方法，将发力时机导致的旋转转化为发力大小导致的旋转，记提前发力时间为 t_a ，结合式 (53) ~ (56) 可得，

$$\begin{aligned} \int_0^{t_a} w(t)dt &= z \\ \int_0^{t_a} \alpha(t)dt &= w(t) \end{aligned}$$

当取提前发力时间为 0.3s 时，计算此时的平均角加速度 $\bar{\alpha} = 11.8622m/s^2$ ，

同理计算可得如下表格：

表 6 调整一名队员发力时机时所有队员的发力时机和力度

队员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
发力大小 (N)	82.9	82.9	82.9	82.9	82.9	82.9	82.9	82.9	82.9	82.9
发力时机 (s)	-0.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

结合现实情况分析，相对于控制发力大小，1s 以内的发力时机控制更为困难，因此在现实情形中，考虑调整发力大小的调整策略实施效果会更好。

5.5.2 调整人数对总用力的大小的敏感度分析

结合现实情况分析，考虑调整发力大小的调整策略，当需要调整的人数发生改变时，团队调整所做的总力大小将发生改变，因此在问题四已知条件的基础上，改变调整的人数，并计算其总力情况。

(1) 调整一人时

$$F = (50.12 + 41 \times 9)N = 419.12N$$

(2) 调整两人时

表 7 调整两名队员发力大小时所有队员的发力时机和力度

队员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
发力大小 (N)	45.79	45.79	41	41	41	41	41	41	41	41
发力时机 (s)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

队员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
发力大小 (N)	55.75	41	41	41	55.75	41	41	41	41	41
发力时机 (s)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$F_{\min} = (45.79 \times 2 + 41 \times 8)N = 419.58N$$

(3) 调整三人时

表 8 调整三名队员发力大小时所有队员的发力时机和力度

队员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
发力大小 (N)	44.48	44.48	44.48	41	41	41	41	41	41	41
发力时机 (s)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

队员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
发力大小 (N)	46.63	41	46.63	41	46.63	41	41	41	41	41
发力时机 (s)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$F_{\min} = (44.48 \times 3 + 41 \times 7)N = 420.44N$$

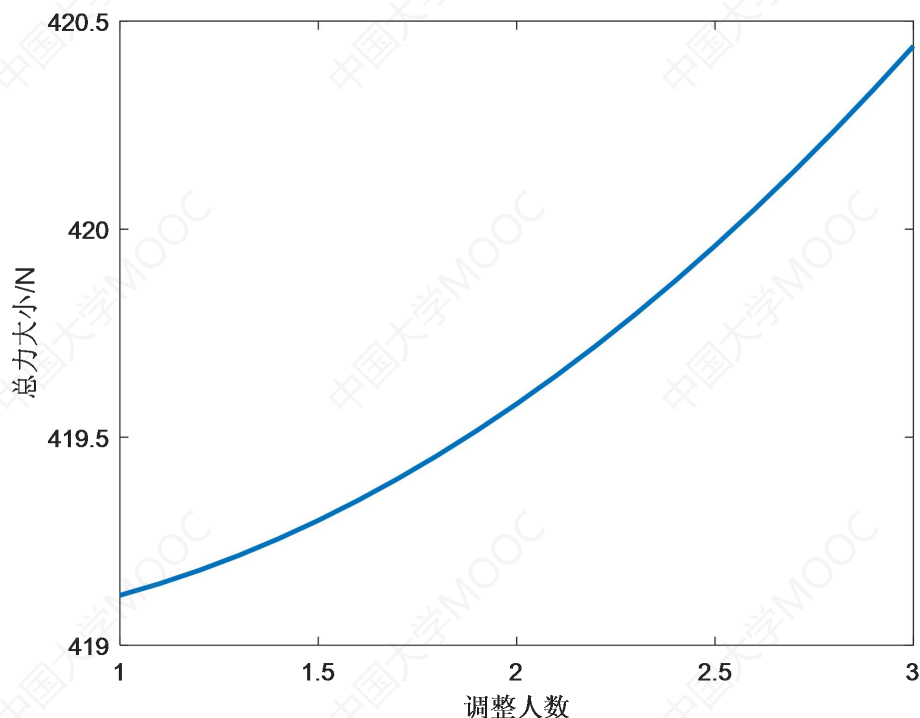


图 7 敏感度分析图

由图可知，当调整人数在 1 至 3 之间变动时，其对应总力变化并不明显，说明该模型是可靠的。

六、模型的评价与改进

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

(1) 本文采用大量的动力学模型对最佳团队协作策略过程进行描述，有着科学严谨的推导过程，且模型具有普适性。

(2) 本文在仿真模型的建立中，为了使研究方案更加方便，令程序的相应的模型及参数可随时进行调整，修改及补充，使得对各种可能性的仿真结果都有所涉及，也为模型的改进提供了方向。

6.1.2 模型的缺点

(1) 碰撞模型考虑的影响因素较少，问题处理上可能存在一些误差。

(2) 问题三中排球落点与牛皮双面鼓圆心的距离标准 15cm 并不是通过精确的数学计算得到的值，导致处理上会有一些误差。

6.1.3 模型的改进

本文采用机理结合的方法，通过规划模型求得最优策略，但在碰撞模型中考虑的因素较少，会对结果产生较大误差，因此，需要寻求更优的动力学模型及工程力学原理来对模型进行进一步的完善。

七、模型的应用与推广

本文主要应用动力学模型等相关知识及仿真迭代的求解方法，动力学模型在飞行模拟，碰撞模拟，汽车驾驶训练，安全模拟，军事训练等方面都有广泛的应用，该方法可以推广安全气囊及其他产生碰撞的场合，具有较强的推广意义。

八、参考文献

- [1]张金锋，刘建军. 基于均质圆柱壳刚体转动惯量的计算[J]. //吉林师范大学学报(自然科学版). 2015. 5
- [2]杨立军，吴晓. 重物撞击原板时的冲击力计算研究[J]. 动力学与控制学报，2005，3(2):71-74
- [3]王育桥. 鸡蛋跌落冲击特性研究[D]. 武汉：华中农业大学，2007. 6
- [4]李亚智，赵英美，万小鹏. 有限元法基础与程序设计[M]. 北京：科学出版社，2004

附录：
使用 MATLAB2016b
运动学模型带阻力代码：

```
function dy=fun(t,y)
dy=zeros(4,1);
    dy(1)=y(2);
    dy(3)=y(4);
    dy(2)=0;
    dy(4)=(-9.8+1/2*0.5*1.293*363/10000*y(4)^2/(270/1000));
end

for t0=0.01:0.01:1
[t,y]=ode23('fun',[0,t0],[0,0,0.4,0]);
if find(abs(y(:,3))<=0.01)
    t1=t(end);
    y1=y(end,3);
    break
end
end
plot(y(:,1),y(:,3),'-')
```

问题一模型代码：

```
function dy=fun0(t,y)
global F
global L
global n

dy=zeros(2,1);
    dy(1)=y(2);
    dy(2)=-n*F*sin(asin(y(1)/L))/3.6-9.8;
end

m1=3.6;
m2=0.27;
global F
global L
global n
f1=[];
%for n=8:1:20
    % flag=0;
    n=8;
    L=0.3/sind(180/n)-0.2;
    % L=1.7;
    for F=3:1:80
        if flag==3
            flag=4;
            F=F-1;
            break
        end
    end
    for t0=0.01:0.01:0.2
        if flag==2
            flag=3;
            t0=t0-0.01;
            break
        end
    end
```

```

        for y0=0.01:0.01:0.22
            if flag==1&abs(y1)<y0
                flag=2;
                y0=y0-0.01;
                f1=[f1;F,n];
                break
            end
            [t,y]=ode23('fun0',[0,t0],[-y0,0]);
            for i=1:length(y(:,1))
                v1=y(i,2);
                y1=y(i,1);
                v2=-sqrt((0.4-y1)*2*9.8);
                v22=(m2-m1)*v2+2*m1*v1/(m1+m2);

                if v22>=abs(v2)&&v22-abs(v2)<=0.01
                    flag=1;
                    break
                else
                    flag=0;
                end
            end

            end
            end
            end
        %end
        for i=1:length(f1(:,1))
            T(i)=f1(i,1)*f1(i,2);
        End
    End

```

问题二模型代码

```

(1) m=3.6;
L=0.22;
R=0.2;
F1=90;
F5=80;
A=asind(0.11/1.7);
J=1/2*m*R^2+1/12*m*L^2;
M=(F1-F5)*R*sind(A);
a=M/J;
B=dsolve('D2B-a=0','B(0)=0,DB(0)=0');
eval(subs(B,0.1))/3.14*180

```

```

(2)
m=3.6;
L=0.22;
R=0.2;
F1=90;
F2=90;
F5=80;
F6=80;
A=asind(0.11/1.7);
J=1/2*m*R^2+1/12*m*L^2;
M1=(F1-F5)*R*sind(A);
M2=(F2-F6)*R*sind(A);
M=M1*cosd(45/2)*2;

```

```

a=M/J;
B=dsolve('D2B-a=0','B(0)=0,DB(0)=0');
eval(subs(B,0.1))/3.14*180

```

(3)

```

m=3.6;
L=0.22;
R=0.2;
F1=90;
F4=90;
F5=80;
F8=80;
A=asind(0.11/1.7);
J=1/2*m*R^2+1/12*m*L^2;
M1=(F1-F5)*R*sind(A);
M4=(F4-F8)*R*sind(A);
M=M1*sind(45/2)*2;
a=M/J;
B=dsolve('D2B-a=0','B(0)=0,DB(0)=0');
eval(subs(B,0.1))/3.14*180

```

(4)

```

clear;
p=0.11;
h=0.22;
r=0.2;
s=1.7;
n=8;
theta0=atand(p/s);
M=3.6;
g=10;
J=0.5*M*r^2+1/12*M*h^2;
F0=M*g/(n*sind(theta0));
F=90;
Mz=2*r*(F-80)*sind(theta0);
%Mz=sqrt(2*(2*r*(F-F0)*sind(theta0)/cosd(22.5/2))^2-2*(r^2*(F-F0)*sind(theta0)/cosd(22.5/2))^2*cosd(22.5));

```

问题三模型代码:

```

clear;
m=0.27;
M=3.6;
r=0.2;
h=0.22;
g=10;
J=0.5*M*r^2+1/12*M*h^2;
v1=3.3967;
v2=0.284;
theta=0.5/180*pi;
vs=((m-M)*(-v1)*cos(theta)+2*M*v2*cos(theta))/(m+M);
beta=atan(vs/(v1*cos(theta)));
vp=sqrt(vs^2+(v1*cos(theta))^2);
gama=beta-theta;
eval(solve('tan(z)==vp*(m+M)*cos(gama+z)/((m-M)*(-vp)*sin(gama+z)+2*M*v2*cos(z))'))

```

问题四模型代码:

```

syms x y
y=3.4298*cos(89/180*pi+x)/((3.6-0.27)*3.4298*sin(89/180*pi+x))*(3.6+0.27)-tan(x);
%solve('3.4298*cos(89/180*pi+x)/((3.6-0.27)*3.4298*sin(89/180*pi+x))*(3.6+0.27)-tan(x)')
for x=0:0.0001:0.1
q=eval(subs(y,x));
if abs(q)<=0.00005
break
end
end

```

```

x=[1:3]
y=[419.12,419.58,420.44]
xx=[1:0.1:3]
yy=interp1(x,y,xx,'spline')
plot(xx,yy,'linewidth',2)
xlabel('调整人数')
ylabel('总力大小/N')

```