

# 同心鼓协作策略模型

## 摘要

本文我们研究的是在不同因素影响下同心鼓最优的协作策略问题，通过机理分析得到关于不同发力情况下颠球次数最多的最佳协作策略。

**针对问题一**，我们首先对排球与同心鼓的运动状态进行受力分析，因为二者碰撞时内力远远大于外力且只有动能间的交换，所以我们根据动量守恒，动能定理及牛顿定律建立同心鼓和排球的微分方程模型。最佳协作策略是使得系统具有周期性和稳定性，所以我们将颠球次数尽可能多的目标转化为拉力尽可能小，在达到目标的同时满足初始速度、弹起高度、最少人数的约束条件建立最佳协作模型，由于在运动过程中拉力与水平方向的夹角在不断变化，故我们选择将整个运动过程离散化，利用逐步迭代法求解最佳策略，得到的策略为：**8 位成员均用 83N 的拉力**，拉力的方向始终与绳子的方向一致，与水平面的**初始夹角  $2.975^\circ$** ，发力时机为排球下落后的 **0.1164s**，绳子长 **1.7m**，颠球高度为 **40.000276cm**。

**针对问题二**，结合实际中同心鼓的结构，我们将题目中的同心鼓视为一空心薄壁圆筒，同心鼓由于拉力的偏差发生倾斜，可以将同心鼓视为一个旋转体，其转轴通过中心且与几何轴垂直，求解得到该情况下同心鼓的转动惯量，结合角加速度的定义和刚体定轴转动定律得到某一时刻鼓面倾斜角模型。由于提前发力会对下一时刻的拉力方向产生影响，所以我们对有无提前发力两种情况分别进行讨论分析建立了两种倾斜角模型，依据以上两种倾斜角模型我们计算第一次至第九次试验的 **0.1s 鼓面倾斜角度依次为  $0.4285^\circ, 0.7918^\circ, 0.3280^\circ, 2.3582^\circ, 4.1387^\circ, 1.7122^\circ, 2.6487^\circ, 2.9516^\circ, 1.6753^\circ$** 。

**针对问题三**，现实情况中排球在与倾斜的鼓面碰撞后，速度会与竖直方向产生夹角，为了项目不停止我们考虑了三种调整方法，分别为只倾斜同心鼓面而水平方向不位移、通过成员移动和倾斜同心鼓将排球重新调整为竖直方向、依靠改变拉力大小和方向在水平方向移动同心鼓，其中第二种方法为最佳方法，既能让排球重新做竖直方向运动又使得需要的拉力最小。我们分析最佳方法的运动过程共有竖直下落、斜抛运动、调整、稳定四个阶段，对每一个阶段进行受力分析，以问题一的模型为基础增加倾斜角度的约束，按照人数最少优先，做功最小次要的原则求解出 **9 次试验下调整鼓面做需要的拉力大小和方向**。其中第一次试验需要调整位置 5，该位置上的拉力为 93N，持续时间为 0.1s，其余位置拉力为 83N，水平位移 0.023m，。

**针对问题四**，首先依据问题三中的模型，改变参数求解得到拉力大小为 65N，接下来根据题目所给的夹角比 1:2，利用正弦定理求得两个力大小之比，再根据角加速度定义和转动定律求解出两个力的大小，得到的调整策略为：十个人中有相邻两人的拉力在碰撞前发生偏差，**拉力大小为  $69.8558\text{N}$ ， $74.4994\text{N}$** ，其余 8 人拉力大小均为 **65N**。最后我们考虑现实情况中拉力无法精准控制，不断改变调整位置上的拉力大小来讨论现实中调整策略的实施效果。

最后我们对模型做灵敏度分析并作出评价，提出改进方向。

**关键词：**动量守恒；转动惯量；同心鼓；逐步迭代；

## 一、问题的背景与重述

### 1.1 问题的背景

同心鼓是一种趣味团队项目，可以展现出团队的协作能力。这种项目由一个双面牛皮鼓和均匀分布在鼓边缘的若干条拉绳组成，团队中的每个成员要求仅控制绳子末端，同心协力使鼓面上方的球有节奏的跳动。

### 1.2 问题的重述

现有一个重 3.6kg，高 22cm，直径大小为 40cm 的双面鼓以及一个重 270g 的排球，要求至少 8 个人参与项目且每个人间距不少于 60cm。排球从距鼓面 40cm 的高度落下，并且使得每次弹起高度距鼓面不小于 40cm，否则停止项目。该项目连续颠球的次数越多越好。据此解决下列几个问题：

1. 讨论在理想状态下，每个成员的发力时机，力度、方向都可以准确调控的条件下团队的最佳协作策略，并计算该策略下的球的弹跳高度。

2. 实际情况中由于每个人发力时机与力度的不同会导致鼓面倾斜，建立发力时机和力度与某一时刻鼓的倾斜角度的数学模型进行分析讨论。当人数为 8 人，绳子长 1.7m，鼓面初始时低于水平位置 11cm 且鼓面水平静止，根据题目给出的 9 组数据计算 0.1s 时鼓面的倾斜角度。

3. 结合实际及问题 2，对问题 1 建立的模型作出相应调整改进。

4. 当鼓面倾斜，球的跳动方向不再竖直，所以我们需要通过一定的调整使得排球重新竖直弹跳。现有 10 人参与项目，绳长 2m，排球颠起高度为 60cm，且与竖直方向呈 1 度的夹角，倾斜方向在水平上的投影在两人之间，夹角之比为 1:2，在所有成员发力方向与力度可以准确调控的条件下，计算将球调整为竖直弹跳的发力方向与力度，并作分析讨论。

## 二、问题的分析

### 2.1 问题分析

**针对问题一**，我们首先对排球和同心鼓分别受力分析，因为在碰撞瞬间内力远远大于外力并且此时只存在动能之间的转换，所以可以利用动量守恒与动能定理对同心鼓和排球的运动情况进行分析讨论得到两者在一个运动周期内的速度与时间，建立相应的微分方程。最佳协作策略受到成员间发力大小方向的差异大小以及每个运动周期内排球与同心鼓的节奏协同性等因素的影响，基于以上的机理分析讨论，模型的约束条件为初始及终止时刻的速度以及球弹起的高度到鼓面的距离不少于 40cm、成员人数不少于 8 人、成员与成员之间的间隔距离不少于 60cm，利用可行办法对其进行求解得到最终的策略及该策略下的颠球高度。

**针对问题二**，发力力度和发力时机两种偏差造成的同心鼓倾斜可以考虑将同心鼓看做一个旋转体，其转轴通过同心鼓的侧面中心，结合实际中同心鼓的结构，我们选择将同心鼓视为一薄壁圆筒，推导出其转动惯量，继续根据刚体定轴转动定律和角加速度定义等得出某一时刻下鼓面倾斜角度的模型。对于不同情况下拉力合外力的计算，我们考虑由于提前发力会对下一时刻的拉力方向产生影响，所以对有无提前发力两种情况分别进行讨论分析建立了两种倾斜角模型，通过受力和数学分析得到每个拉力在垂直于鼓面方向上的分力，从而得到拉力对同心鼓产生的合外力计算某一时刻同心鼓的倾斜角度。

**针对问题三**，鼓面发生倾斜导致竖直下落的排球经过鼓面反弹后的速度方向与竖直方向产生夹角，为了得到此情况下的最佳协作策略，需要将排球的速度方向重新调整为竖直方向，由此我们考虑了三种调整方法：第一种方法是仅通过发力大小和方向调整鼓面，同心鼓与成员在水平方向均不发生位移，在之后的反弹过程中让排球重新回归竖直下落和上升的状态，此时不要求排球每次都落在鼓面中心；第二种方法是通过成员与同心鼓一起水平位移调整鼓面的位置与方向，使排球在反弹过程中回归竖直状态，此时的排球落点要尽可能在鼓面中心；第三种方法为通过改变拉力的大小方向使同心鼓仅在水平方向上位移，成员不移动，使得排球可以周期性的在鼓面上跳动，此处考虑排球落点尽可能在鼓面中心。在三种方法中以做功最小为原则选择一种最佳方法，基于问题一中的模型得到倾斜鼓面的最佳协作策略模型，并利用可行办法求解 9 次试验的调整方案。

**针对问题四**，依据问题一中的模型，改变参数求解得到 0 时刻的拉力大小，接下来将鼓面视为一个圆面，按人数分为 10 等分，相邻两人间的夹角为 36 度，根据题目所给的夹角比利用正弦定理求得两个力大小之比，再根据角加速度定义和转动定律求解出两个力的合力大小，最后即可求得出现偏差的两个拉力大小。

### 三、模型的假设

#### 3.1 模型的假设

- (1) 假设不考虑排球在运动时自身的转动。
- (2) 假设不考虑空气阻力。
- (3) 假设所有人拉鼓的水平高度一致。
- (4) 假设鼓的质量分布均匀，可当作薄壁空心圆筒。

### 四、符号说明

符号	表示含义	单位
$m$	表示同心鼓的质量	$kg$
$m_1$	表示排球的质量	$kg$
$F$	表示作用在同心鼓上的拉力	$N$
$v, v'$	分别表示碰撞前后同心鼓的瞬时速度	$m/s$
$v_1, v'_1$	分别表示碰撞前后排球的瞬时速度	$m/s$
$a, a_1$	分别表示同心鼓和排球的加速度	$m/s^2$
$h, h'$	分别表示排球的下落高度和同心鼓的位移	$m$
$h_{\text{鼓}}$	表示同心鼓上升到碰撞线的位移	$m$
$R_{\text{鼓}}$	表示同心鼓鼓面半径	$m$
$l$	表示同心鼓的高度	$m$
$L$	表示绳子的长度	$m$
$\beta$	表示某一时刻同心鼓的倾斜角度	$^\circ$
$\alpha$	表示角加速度	$s^{-2}$
$M$	表示拉力产生的力矩	$N \cdot m$
$s$	表示同心鼓初始位置到绳子水平位置的距离	$m$

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 理想状态下最佳协作策略模型

在理想状态下，每一个成员的发力时机、发力力度、发力方向都是可以精确控制的，在这样的条件下我们根据运动定律求解最佳协作策略。

#### 5.1.1 理想状态下最佳协作策略模型的建立

##### （一）同心鼓与排球系统的受力分析

初始时刻排球在距离鼓面正上方 40cm 处，排球仅受重力作用做自由落体运动，同心鼓在若干条绳子的拉力和自身重力作用下，先做加速度增大的加速运动，再做加速度减小的加速运动，接着做加速度增大的减速运动，随后在碰撞线与排球碰撞，将排球重新弹起。排球所受的重力表示为  $P_1 = m_1 g$ ，同心鼓所受的重力表示为  $P = mg$ ，同心鼓受到与水平方向均呈  $\theta$  夹角的若干绳子拉力  $F$ ，其中排球初始位置距碰撞线为  $h$ 。

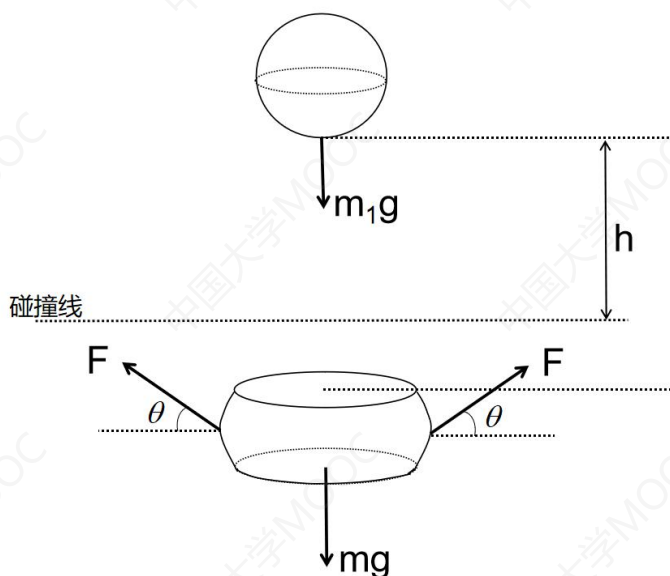


图 1 同心鼓和排球的受力分析

##### （二）最佳协作模型的建立

通过受力分析，首先根据动量定理对同心鼓列出式为

$$F \cdot t = mv \quad (1)$$

其中  $t$  表示同心鼓上升至碰撞线所用的时间，

$v$  表示同心鼓碰撞前的瞬时速率，方向向上。

又因为碰撞时内力远远大于外力，故系统动量守恒，有

$$m_1 v_1 + mv = m_1 v'_1 + mv' \quad (2)$$

其中  $v_1, v$  分别表示排球和同心鼓碰撞前的瞬时速率，方向分别向下和向上，

$v'_1, v'$  分别表示排球和同心鼓碰撞后的瞬时速率，方向分别向上和向下。

根据动能定理，碰撞时只有动能间相互转化，有

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m'_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m'v'^2 \quad (3)$$

根据牛顿定律可以得到排球下落高度和同心鼓上升所用时间为

$$h = \frac{v'^2_1}{2g} \quad (4)$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5)$$

其中  $h$  表示排球的下落高度。

根据牛顿第二定律，同心鼓在上升过程的加速度表示为

$$a = \frac{F \sin \theta - mg}{m} \quad (6)$$

排球下落过程的加速度为

$$a_1 = g \quad (7)$$

最佳协作即使排球与同心鼓系统尽可能的维持稳定，排球有节奏地在鼓面上跳动。要想达到最佳协作，每个成员发力的大小方向和发力时机尽可能相同以及各个成员所在位置尽量均匀，每一个运动周期内拉力的大小和方向尽可能相同，每一个运动周期内排球与同心鼓的运动节奏相同并且保证同心鼓尽量不发生水平位移，下图说明影响最佳协作的因素：

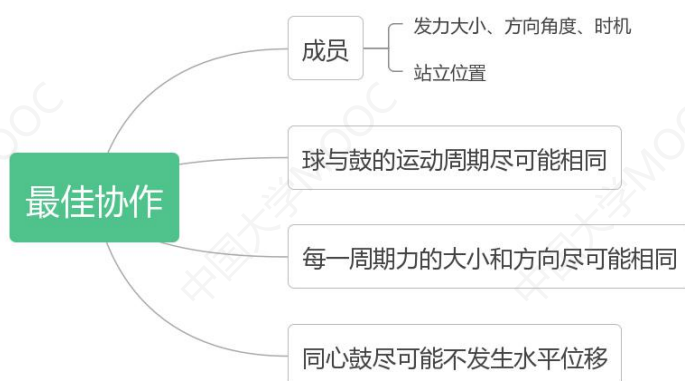


图 2 影响最佳协作策略的因素

此处我们考虑的最佳协作模式为在尽量短的时间内颠球次数越多，我们将颠球次数尽可能多转换为一定时间内位移尽量短，其实质即拉力大小尽量小，并且每一周期的颠球状态均与初始状态相同，即本次同心鼓的初位置与上一次同心鼓的初位置相同，使得整个系统做类似于机械式的运动。

根据以上的机理分析，我们建立最佳协作策略模型如下：

利用式 (6) (7) 列出同心鼓与排球运动微分方程分别为

$$\frac{d^2 h'}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F \sin \theta - mg}{m} \quad (8)$$

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt} = g \quad (9)$$

约束条件为

(1) 初始约束有

$$\left. \frac{dh'}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

(2) 终止约束有

$$\left. \frac{dh'}{dt} \right|_{t=t_{\text{碰}}} = v', \quad \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=t_{\text{碰}}} = v'_1$$

(3) 高度约束有:

对于高度约束我们考虑 40cm 的含义有两种: 一种是排球距离碰撞线不少于 40cm, 另一种是排球运动最高点距离鼓面不少于 40cm, 经过计算分析, 我们发现按后者处理得到的结果更加稳定。所以我们选择高度约束为:  $h + h_{\text{鼓}} \geq 0.4$

(4) 人数约束:  $N \geq 8$

(5) 成员间距约束:  $d \geq 0.6$

以满足拉力最小为目标:  $\min F$

### 5.1.2 理想状态下最佳协作策略模型及颠球高度的求解

首先我们讨论了成员人数的选择原则, 接着针对上述最佳协作策略的求解问题, 发现在同心鼓上升过程中拉力与水平方向的夹角不断变化, 所以我们考虑将整个运动过程离散化, 把整个过程按时间划分为  $n$  段, 进行逐步迭代找到最佳协作策略。

我们给出求解最佳协作策略的算法步骤:

Step1: 输入初始数据, 同心鼓质量、排球质量, 以及初始速度等, 并设置程序无限循环。

Step2: 若排球的下落时刻大于同心鼓的上升时刻, 则证明排球和同心鼓无法相碰, 此时更新记录同心鼓的末速度、拉力夹角、同心鼓的加速度以及同心鼓的上升机距离, 然后增加同心鼓的上升时刻, 否则记录排球的末速度。

Step3: 继续判断排球与同心鼓是否相碰即判断此时鼓的上升位移与排球位移之和是否达到 40cm, 若二者相碰则计算同心鼓与排球相碰后的速度, 并继续判断排球的弹起高度是否达到 40cm, 若达到最低要求高度, 则结束 Step1 中的无限循环, 否则跳出相碰判断。

Step4: 若 Step3 中相碰判断为不相碰, 则对每人的拉力大小加 1, 继续同心鼓上升时刻的循环, 直到二者相碰并满足最低高度要求。

对应的算法流程图如下:

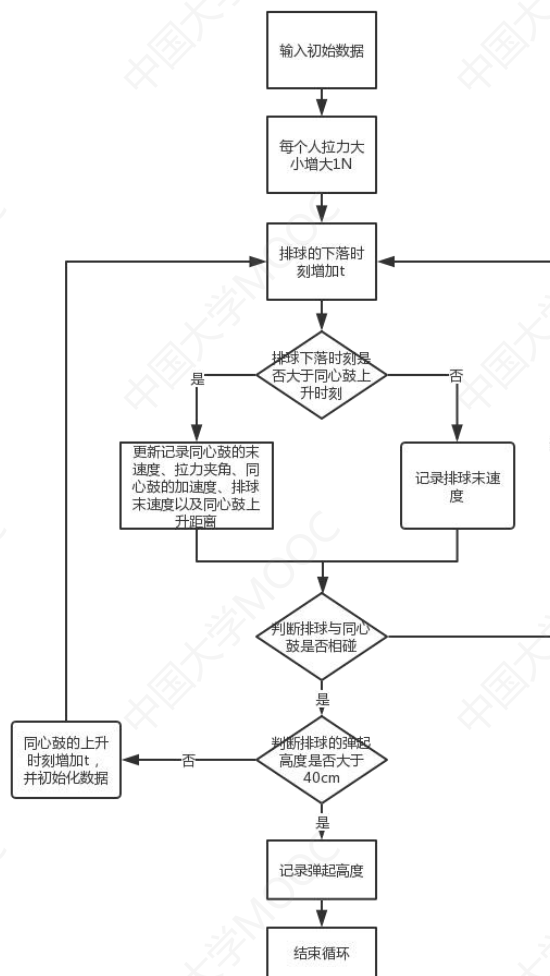


图 4 问题一求解算法流程图

### （一）最佳协作策略

根据迭代求解的结果，得到最佳协作策略的结果如下：

表 3 理想状态下最佳协作策略

因素	结果
发力方向（与水平方向夹角）	2.975°
发力时机（以小球下落时刻为 0 时刻）	0.1164 s
发力力度	83 N
人数	8 人
绳长	1.7 m
颠球高度	40 cm

### （二）逐步迭代分析拉力与最大弹起高度的影响

我们运用逐步迭代的方法，不断改变拉力  $F$  的大小，得到在不同拉力时对应的最大弹起高度关系图，如下图：

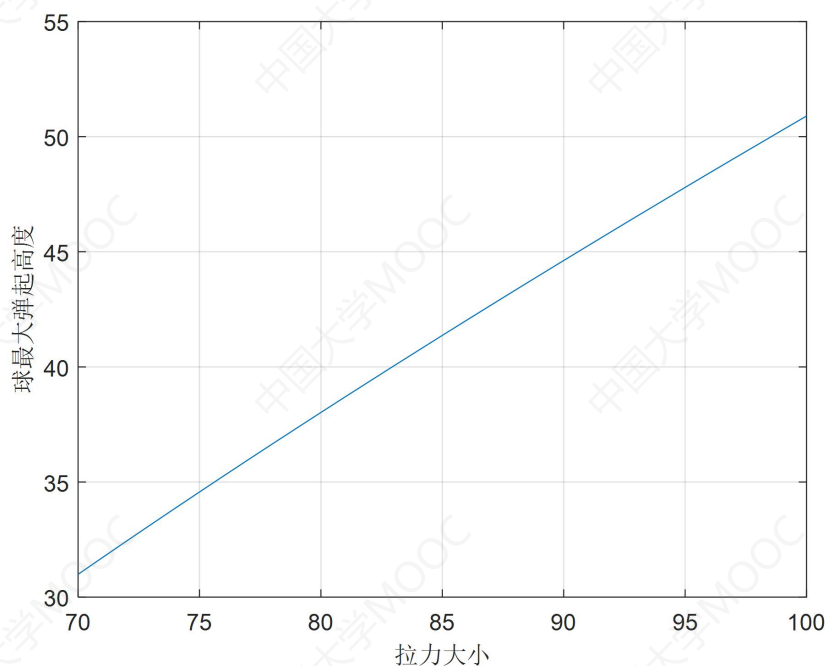


图 3 理想状态下拉力与最大弹起高度的关系图

同时我们给出改变拉力时的各种因素的数值变化结果，如下表：

表 2 不同拉力与各因素的数值变化表

拉力 $F$	最大弹起高度	球碰后速度	鼓上升时刻 (相对于球下落时刻)
76	0.352691394	2.585154233	0.1208
77	0.359642868	2.606192811	0.1209
78	0.366540655	2.627896052	0.1229
79	0.373398554	2.648291605	0.1226
80	0.380215897	2.669348378	0.1239
81	0.386994296	2.689110362	0.1233
82	0.393715566	2.709583084	0.1243
83	0.400413064	2.729750465	0.125
84	0.407061603	2.749641972	0.1256
85	0.413680544	2.770211633	0.1273
86	0.420256894	2.789570775	0.1276
87	0.42679906	2.808670574	0.1278
88	0.433309629	2.827511733	0.1279
89	0.439769871	2.847074317	0.1291
90	0.446209143	2.866375077	0.1301
91	0.452613341	2.884526909	0.13
92	0.458994744	2.902425544	0.1298
93	0.465346841	2.921999062	0.1315
94	0.471643408	2.940412861	0.1322
95	0.477950863	2.958610284	0.1327
96	0.484208902	2.976609228	0.1332



97	0.490434434	2.993502764	0.1328
98	0.496615215	3.012023942	0.1341
99	0.502803861	3.029442226	0.1344
100	0.508958036	3.048381578	0.1362

## 5.2 鼓面倾斜角度模型

因为发力时机与力度的偏差导致鼓面发生倾斜, 这种现象可以将同心鼓看做一旋转体, 运用转动规律进行求解分析。

### 5.2.1 发力时机和力度与某时刻鼓面倾斜角度模型

题目中发力力度和发力时机的变化导致鼓面与水平面出现夹角, 结合实际生活中鼓薄壁中空的结构特点, 我们可以将同心鼓看作为一个薄壁圆筒, 其转轴通过同心鼓的侧面中心, 力度的改变导致同心鼓绕  $z$  轴旋转, 产生夹角。坐标系  $x-y-z$  和旋转轴的示意图如下:

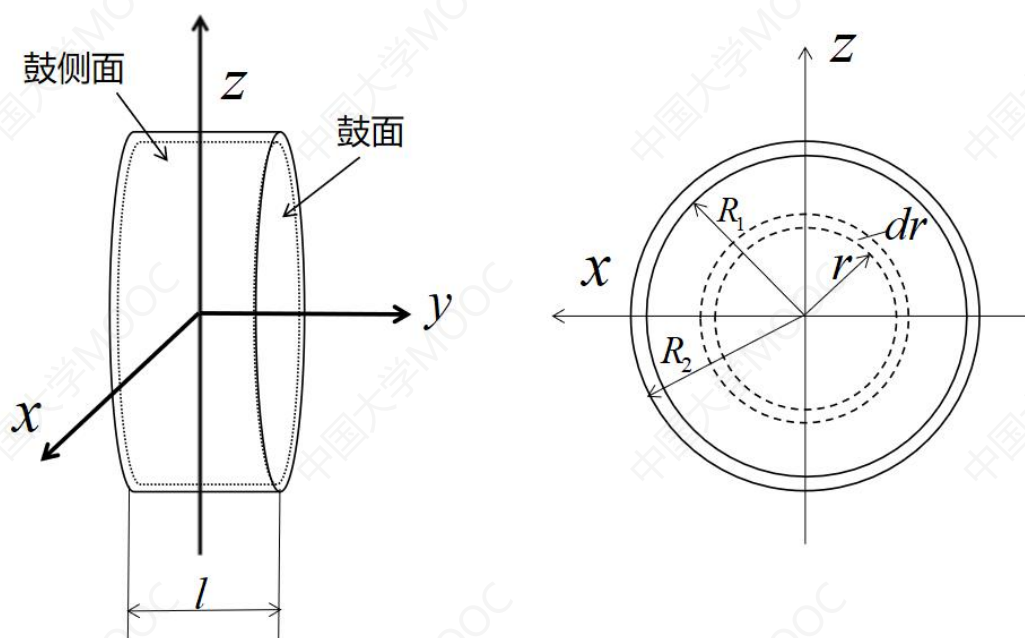


图 5 沿  $z$  轴旋转的同心鼓示意图

接下来根据牛顿定律对同心鼓的转动惯量进行推导:

设空心圆筒的内侧半径为  $R_1$ , 外侧半径为  $R_2$ , 在垂直于  $y$  的平面上取半径为  $r$ , 宽为  $dr$  的薄圆环(如图 5), 其质量为  $m$ , 那么有<sup>[2]</sup>:

$$dm = \rho dV = 2\pi r dr \cdot l \quad (10)$$

其中  $l$  表示同心鼓的高度。

则

$$m = \rho l \pi (R_2^2 - R_1^2) \quad (11)$$

因为转动惯量

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (12)$$

所以  $y$  轴方向上的转动惯量为

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int dI_y = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} 2\rho\pi r^3 dr \\
 &= \frac{1}{2}\rho l\pi(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

在式 (11) 中带入式 (13) 即得到  $y$  轴方向上的转动惯量为

$$I_y = \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2) \tag{14}$$

又因为  $I_x = I_z = I$  故有<sup>[1]</sup>

$$I_x + I_y + I_z = 2I + \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2) \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}
 2I &= 2\sum_i m_i r_i^2 \\
 &= 2\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy \int_{R_1}^{R_2} \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \cdot 2\pi r dr \cdot (r^2 + y^2) \\
 &= \frac{ml}{6} + \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

所以绕  $z$  轴旋转的空心圆筒的转动惯量为

$$I = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{4} + \frac{ml^2}{12} \tag{17}$$

对于本题中的同心鼓，我们可以将其视为  $R_1 = R_2$  的薄圆筒，那么，绕  $z$  轴旋转的同心鼓的转动惯量为

$$I = \frac{mR_{\text{鼓}}^2}{2} + \frac{ml^2}{12} \tag{18}$$

其中  $R_{\text{鼓}}$  表示同心鼓的半径。

每条绳子拉力产生的力矩为

$$M = \vec{F} \cdot \vec{r} \tag{19}$$

由角加速度定义

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\beta}}{dt^2} \tag{20}$$

可知

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{21}$$

又  $\alpha = \frac{M}{I}$ ，且将式 (21) (22) (24) 联立即得到某时刻鼓面倾斜模型：

$$\beta = \frac{6M_{\text{合}}}{m(6R_{\text{鼓}}^2 + l^2)} \cdot t^2 \tag{22}$$

其中  $M_{\text{合}}$  ——表示所有拉力对同心鼓所产生的合力矩；

$m$  ——表示同心鼓的质量；

$R_{\text{鼓}}$  ——表示同心鼓的半径；

$l$  ——表示同心鼓的高度；

$t$  ——表示某一时刻。

接下来我们对合力矩  $M_{\text{合}}$  进行分析讨论。

### （一）仅考虑发力力度与鼓面倾斜关系的合力矩

对于仅发力力度出现偏差是拉力合外力的计算我们考虑了两种方法：

第一种计算方法为先将两个变化的拉力按力的平行四边形原则合成，径向矢量为同心鼓的半径；第二种计算方法为将变化的力分别计算力矩，其径向矢量为力作用点到转轴的垂直距离，不对变化的拉力合成。画出示意图如图 6：

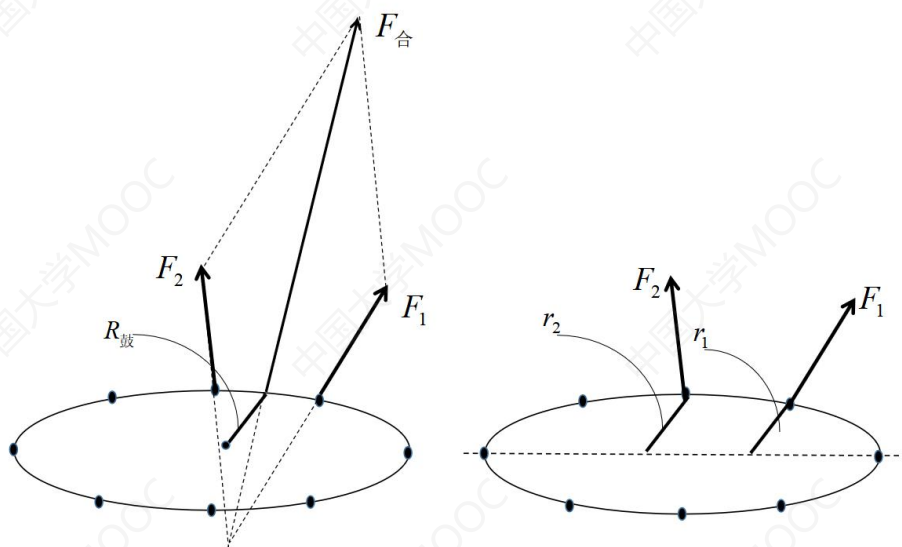


图 6 两种计算合力矩的方法示意图

最终我们得到仅有发力力度改变时拉力合力矩为

$$M_{\text{合}} = F_{\text{合}} \sin \theta \cdot r = F_{\text{合}} \cdot \frac{s}{L} \cdot r \quad (23)$$

其中  $s$  表示同心鼓初始位置到绳子水平位置的距离， $L$  表示绳子的长度

### （二）仅考虑发力时机与鼓面倾斜关系的合力矩

当只有发力时机改变，发力力度均相同时，我们重新考虑拉力对同心鼓产生合外力的计算：

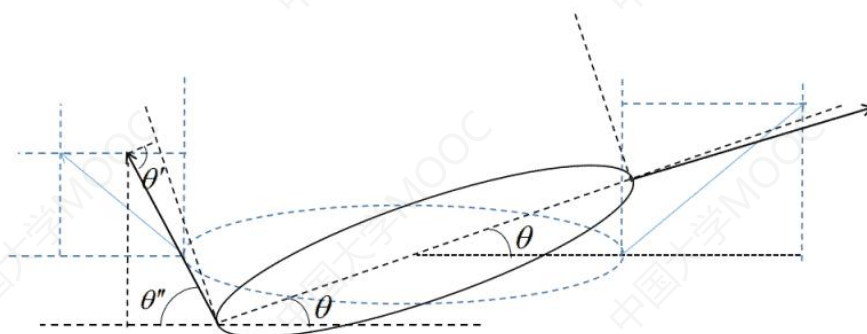


图 7 发力时机改变合外力的分析示意图

①在-0.1s 时某一位置开始发力，使得同心鼓提前发生了一定角度的倾斜，倾斜角度记为 $\theta$ ；

②到 0s 时，每个成员的拉力与鼓面的夹角都发生了变化；

③绳长为 $L$ ，根据图 5 可以得到关系式

$$s' = L \sin \theta'' = 0.11 + R_{\text{鼓}} \sin \theta \quad (24)$$

其中

图 7 左侧拉力的夹角 $\theta' = 180^\circ - \theta'' - \theta$ ， $s' = L \sin \theta'' = 0.11 + R_{\text{鼓}} \sin \theta$

图 7 右侧拉力的夹角为 $\theta' = \theta'' - \theta$ ， $s' = L \sin \theta'' = 0.11 - R_{\text{鼓}} \sin \theta$ 。

最终我们得到仅有发力时机改变时拉力合力矩为

$$M_{\text{合}} = \sum_i F_i \sin \theta_i'' \cdot r_i \quad (25)$$

### 5.2.2 模型的求解

根据模型（22）和式（23）（25）对第一次到第九次试验的鼓面倾斜角度计算，得到的结果如下：

表 4 九次试验不同发力大小和时机下的鼓面倾斜角

序号	合力 (-0.1s) ( $N \cdot m$ )	倾斜角度 (-0.1s) ( $^\circ$ )	合力矩 (0s) ( $N \cdot m$ )	倾斜角度 (0s) ( $^\circ$ )	最终倾斜角度 ( $^\circ$ )
1	-	-	0.1294	-	0.4285
2	-	-	0.2391	-	0.7918
3	-	-	0.099	-	0.3280
4	1.0353	3.428	0.3231	-1.0698	2.3582
5	1.9130	6.3341	0.6630	-2.1954	4.1387
6	0.7924	2.6237	0.2753	-0.9114	1.7122
7	1.1647	3.8565	0.3648	-1.2078	2.6487
8					2.9516
9	0.7924	2.6237	0.2864	-0.9483	1.6753

### 5.2.3 考虑人员站位的鼓面倾斜角度

上述的鼓面倾斜角度计算均为 8 位成员按顺时针或逆时针依次站位，但在实际情况中，编号 1-8 的成员站位是不确定的，站位的不同导致发生偏差的发力大小或发力时机对倾斜角度的影响不同，所以考虑人员站位是必要的。

## 5.3 加入倾斜因素后对问题一模型的改进

加入倾斜角度后，我们考虑多种情况下的最佳协作策略，在问题一模型的基础上进行补充改进。

### 5.3.1 只倾斜同心鼓面（水平方向不位移）

由于发力力度或发力时机的偏差，导致竖直下落的排球与倾斜的鼓面碰撞后的速度方向与竖直方向产生夹角，经过调整拉力的大小和方向使排球再经过一次反弹后回归竖直上升下落状态，排球的运动示意图如下：

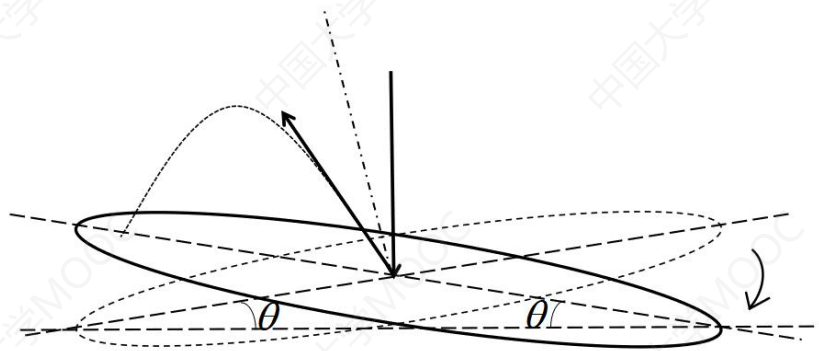


图 8 只倾斜鼓面排球运动示意图

### 5.3.2 通过成员移动和同心鼓移动将排球重新调整为竖直方向

#### (一) 该方法的分析说明

同样地，排球初始下落经倾斜鼓面反弹后的速度方向与竖直方向产生夹角，此时我们移动成员的位置并改变鼓的拉力大小方向，使得排球第二次反弹的速度方向回归竖直。排球的运动示意图如下：

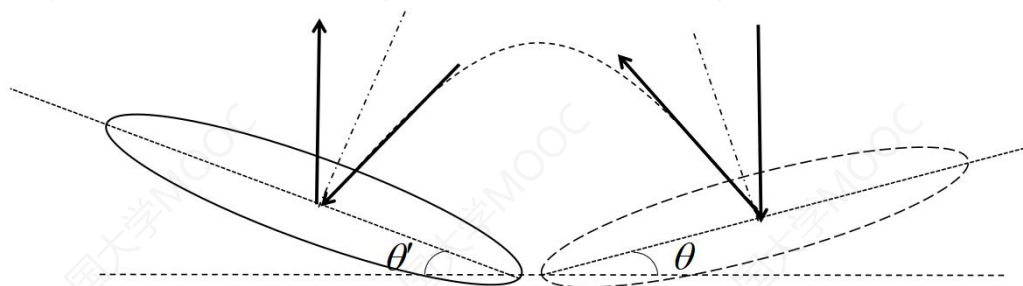


图 9 成员移动及鼓发力改变排球运动示意图

通过简要的分析，我们发现该方法与第一种只移动鼓不移动人的方法相比，该方法更能满足拉力最小原则，原因是第一种方法排球反弹后再到下一次鼓面的速度小，此时要想满足高度约束就需要增加拉力，而该方法第二次到达鼓面的速度与第一次反弹的速度大小相同，相较第一种方法拉力较小，所以我们认为人和鼓共同移动的调整方法为**最佳方法**。

#### (二) 最佳方法下的模型建立与求解

我们只对最佳方法作受力分析，建立运动学模型：

人和鼓共同移动调整方法下，排球调整到竖直状态的过程可以分为竖直下落、斜抛运动、调整、稳定四个阶段，分别对每一个阶段进行分析求解，最终得到相应地调整策略。

##### 第一阶段：排球竖直下落后反弹呈倾斜方向

排球下落到达倾斜鼓面与鼓面发生碰撞时内力远远大于外力，故可以利用竖直方向动量守恒，结合受力分析得到排球反弹后的速度：

依据竖直方向动量守恒有

$$m_1 v_1 + mv = m_1 v'_{1y} + mv' \quad (26)$$

又有动能定理

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m'_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 \quad (27)$$

又有速度关系

$$v'_{ly} = v' \cdot \cos 2\theta \quad (28)$$

联立式 (26) (27) 中利用 matlab 求解得到  $v'_1$ 。

## 第二阶段：排球作一斜抛运动到下一鼓面

排球在做斜抛运动时仅受重力作用，有速度关系

$$v'_{ly} = v_1 \cos 2\theta \quad (30)$$

$$v'_{lx} = v_1 \sin 2\theta \quad (31)$$

根据运动学定理得到

$$v'_{ly} \cos 2\theta - gt = 0 \quad (32)$$

由此求得排球作斜抛运动的时间和水平位移分别为

$$t_{\text{斜抛}} = 2t = \frac{2v'_{ly} \cos 2\theta}{g} \quad (33)$$

$$x_{\text{水平}} = v'_{lx} \cdot t_{\text{斜抛}} \quad (34)$$

## 第三阶段：调整鼓面使排球回归竖直上升下落状态

为了保证排球落在鼓面中心位置并且能尽快回归竖直运动状态，我们考虑鼓面调整的角度与鼓面初始状态的倾斜角度相等，从而使得两次排球的运动是对称的，那么调整角度

$$\beta' = \beta \quad (35)$$

根据转动定理和角加速度的定义有

$$\beta' = \frac{1}{2} \frac{M}{I} t^2 \quad (36)$$

其中  $M = F_y \cdot r$ 。（ $F_y$  为拉力竖直方向的分力）

根据式 (36) 求解得到拉力  $F$  的大小及方向。

## 第四阶段：鼓面水平，排球保持稳定的竖直运动状态

最后鼓面调整为水平，排球在鼓面上方作竖直方向的运动并保持一定节奏。

根据四个阶段的运动状态分析建立运动学模型：

约束条件为

①初始约束有

$$\left. \frac{dh'}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

②终止约束有

$$\left. \frac{dh'}{dt} \right|_{t=t_{\text{碰}}} = v', \quad \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=t_{\text{碰}}} = v'_1$$

③高度约束有： $h + h_{\text{鼓}} \geq 0.4$

④人数约束： $N \geq 8$

以满足做功最小为目标： $\min W = F \cdot h''$

其中  $h''$  表示拉力作用下鼓面抬起的高度。

### 5.3.3 依靠改变拉力大小和方向在水平方向移动同心鼓

除了考虑使排球回归竖直运动状态达到最佳协作效果，我们还考虑了使颠球次数最多达到最佳效果的方法即依靠改变拉力大小和方向在水平方向移动同心鼓。

首先考虑两个力若其竖直方向的分力大小方向相同，水平方向的分力大小方向不同，那么鼓面只会在水平方向上向分力较大的一侧位移，示意图如下：



图 10 仅使鼓发生水平位移的受力示意图

如图 10 所示， $F_2$  在水平方向上的分力大于  $F_1$ ， $F_1$  和  $F_2$  在竖直方向上的分力大小相同，那么同心鼓会向  $F_2$  方向即图中右侧平移移动，从而保证排球一直落在鼓心。

接下来我们做出示意图描述该情况下同心鼓与排球的碰撞过程：

由于初始鼓面发生倾斜导致排球碰撞后的速度方向不再竖直，随后鼓面恢复水平位置，作一斜抛运动后又与水平鼓面发生斜碰，接着再以相同的角度反射到下一位置的鼓心，重复此类运动。

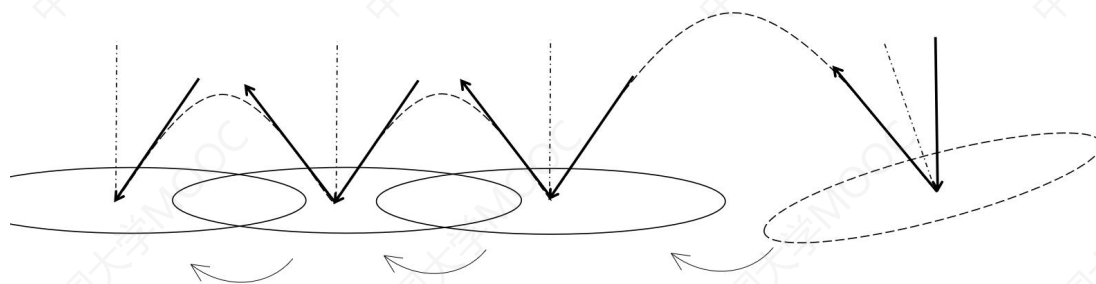


图 11 仅同心鼓位移的排球运动示意图

由于此种情况下排球没有回归到竖直运动状态，所以我们不做进一步分析。

### 5.3.4 调整后的最佳协作策略

在选择最佳调整策略时，我们依照先以人数最少为目标，当人数相当时再以拉力最小为目标选择调整的成员所在位置，例如图 11 中，若在站位 1, 3 的拉力出现偏差，那么可以选择调整位置 6 的拉力或调整位置 5, 6 的拉力，依据人数最少原则我们选择调整位置 6 的拉力；若在站位 2, 5 的拉力出现偏差，那么可以选择调整位置 1, 6 的拉力或调整位置 7, 8 的拉力，此时人数相等，我们考虑选择做工最少的位置 7, 8。



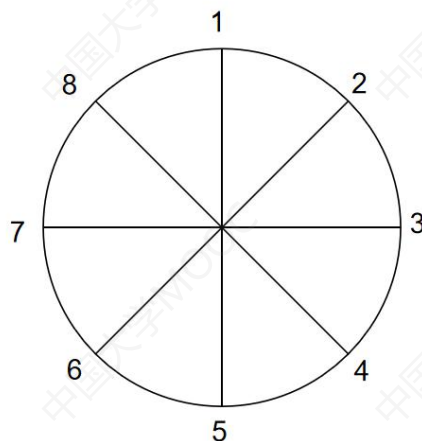


图 12 成员站位示意图

根据最佳方法的模型和调整位置的选择原则我们得到最佳调整策略如下表：

表 5 考虑倾斜角度的最佳协作策略

试验序号	调整位置	调整发力大小 (N)	其余位置发力大小 (N)	水平位移 (m)	鼓上升时刻 (s)
1	5	93 (0s)	83	0.023230522	0.006
2	5, 6	93 (0s)	83	0.042923276	0.006
3	6, 7	87.1421 (0s)	83	0.017782273	0.006
4	5	80 (-0.1s)	83	0.12849737	0.02
5	5, 6	80 (-0.1s)	84	0.226020526	0.013
6	6, 7	33.1371 (-0.1s)	84	0.093096946	0.001
7	3	90 (-0.1s)	84	0.143921662	0.001
8	1, 6	33.1371 (-0.1s)	84	0.1603	0.001
9	2, 3	28.995 (-0.1s)	84	0.091092438	0.001

0.1s 表示碰撞时刻；

## 5.4 基于问题三模型的实例分析求解

### 5.4.1 十个成员拉力的计算

首先，本问题中人数为 10 人，绳长增加到 2m，球距离鼓面的反弹高度为 60cm，按照问题一中的模型求解出 0 时刻发力大小为 65N。

接下来我们对提前作用的拉力进行分析：

鼓面的倾斜导致球反弹后的速度方向与竖直方向呈 1 度的夹角，将鼓面看做一个圆面，按人数分为 10 等分，那么两人之间的夹角均为  $36^\circ$ ，根据题目所给的夹角比，我们将  $36^\circ$  按照 1:2 的比例分为  $12^\circ$  和  $24^\circ$ ，做一平行四边形求解两个发生偏差的力的大小。

如图 13，根据正弦定理有

$$\frac{a}{\sin 12^\circ} = \frac{b}{\sin 24^\circ} = \frac{c}{\sin 144^\circ}$$

那么三力之比为

$$a:b:c = 1:1.96:2.83$$



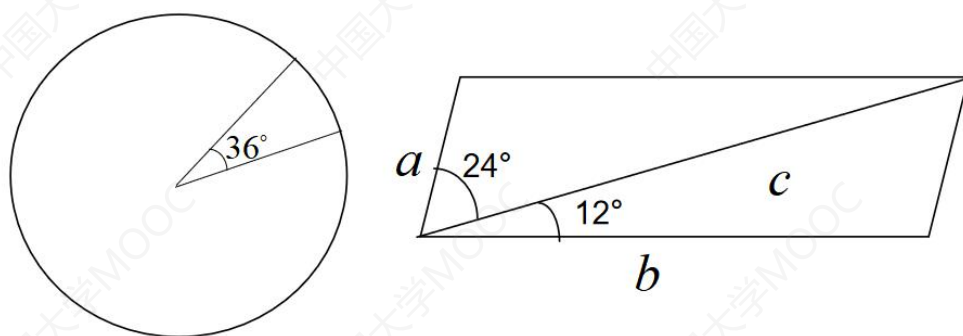


图 13 夹角比求解拉力示意图

接下来我们根据角加速度定义和转动定律求解合力

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{M}{I} t^2$$

其中  $\theta = 36^\circ$ ,  $M = F_c \cos(0.5^\circ) R_{\text{鼓}}$ ,  $t = 0.1$ 。

求解得到合力  $F_c$ , 然后就可以得到  $F_a$  和  $F_b$  的大小。

综上, 我们得到十个人同时发力, 拉力结果为: 有相邻两人拉力大小为 69.8558N, 74.4994N, 其余 8 人拉力大小均为 65N。

表 6 每个位置拉力的大小

位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
拉力 (N)	65	65	69.8558	74.4994	65	65	65	65	65	65

#### 5.4.2 基于现实情况对上述调整策略的效果分析

由于现实情况中无法精确地控制拉力数值, 所以我们以位置 3 的拉力为例, 不断减小拉力, 观察拉力减少时同心鼓上升时刻的变化, 得到的数据如下表:

表 7 基于现实情况拉力与上升时刻的变化

位置 3 拉力 (N)	提前拉绳的时间 (s)	鼓增加的倾斜角度 ( $^\circ$ )
69.8558	0	0
69.7558	0.028658437	0.028658437
69.6558	0.040559103	0.040559103
69.5558	0.049710605	0.049710605
69.4558	0.057442375	0.057442375
69.3558	0.064268949	0.064268949
69.2558	0.070454017	0.070454017
69.1558	0.076154114	0.076154114
69.0558	0.08147116	0.08147116
68.9558	0.086475901	0.086475901
68.8558	0.091219815	0.091219815

如表 7 结果所示, 当拉力逐渐减小, 发力时刻会逐渐推迟。现实情况无法控制拉力时, 会选择人为判断拉绳的时机来弥补缺失的拉力值, 同时, 现实情况下会因为如空气阻力作用有相应地能量损失, 导致拉力更加无法准确判断。

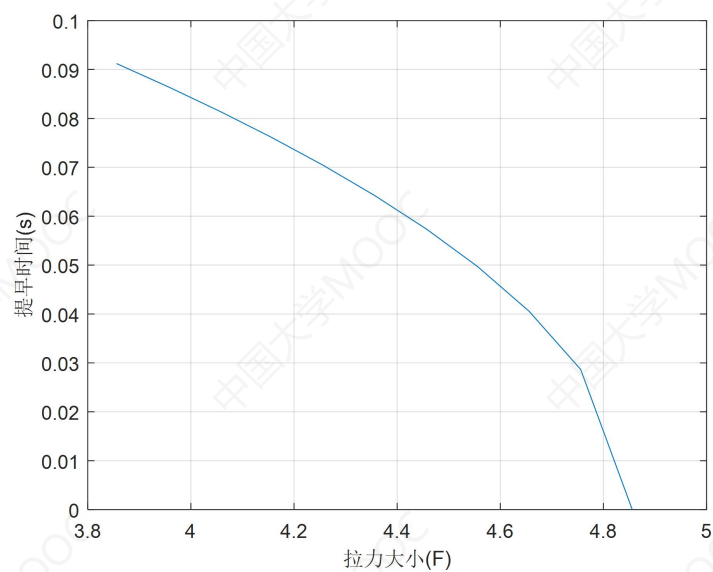


图 14 拉力与提早拉绳时间的变化图

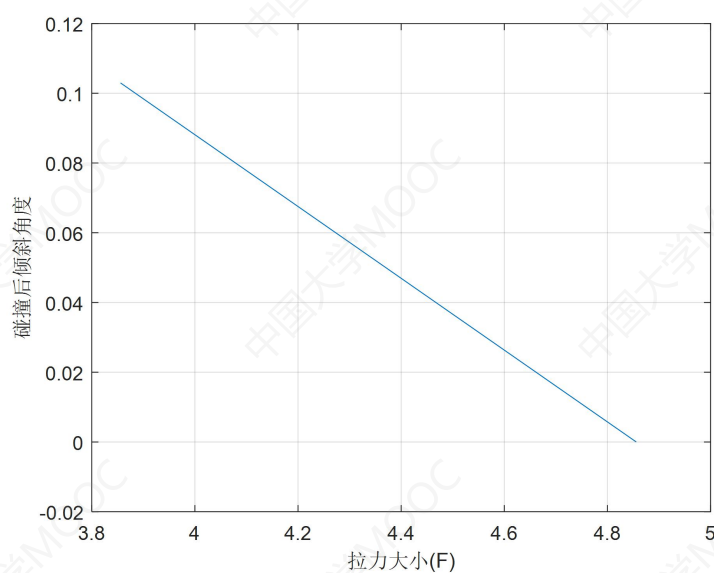


图 15 拉力大小与增加角度的变化图

## 六、灵敏度分析

为了达到最佳协作效果即使得拉力最小，人数、绳子长度、同心鼓初始时距离绳子水平面的距离与拉力的大小都有密切的关系，我们以问题一中的模型为例，通过改变上述三个因素的数值，观察拉力的变化。

在 matlab 中作图得到：

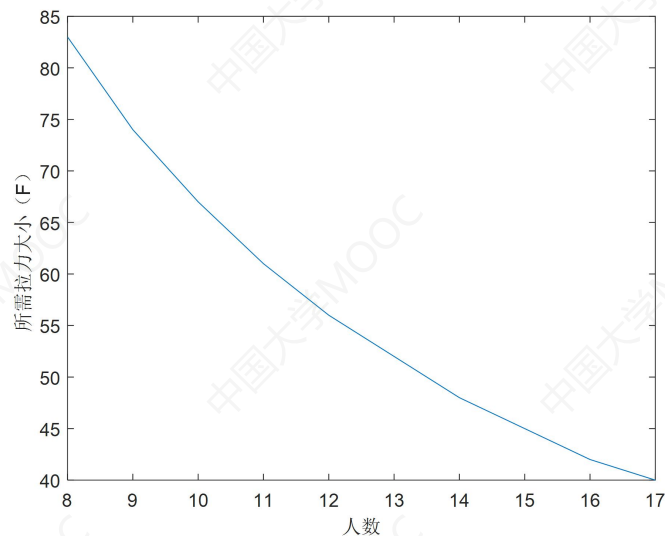


图 16 人数与拉力大小变化图

由图 16 可知，随着人数的增加，拉力大小逐渐变小，在保证间距的前提下，人数越多拉力越少则协作效果越好。又给出了数据结果：

表 8 人数与拉力的变化结果

人数	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
拉力	83	74	67	61	56	52	48	45	42	40

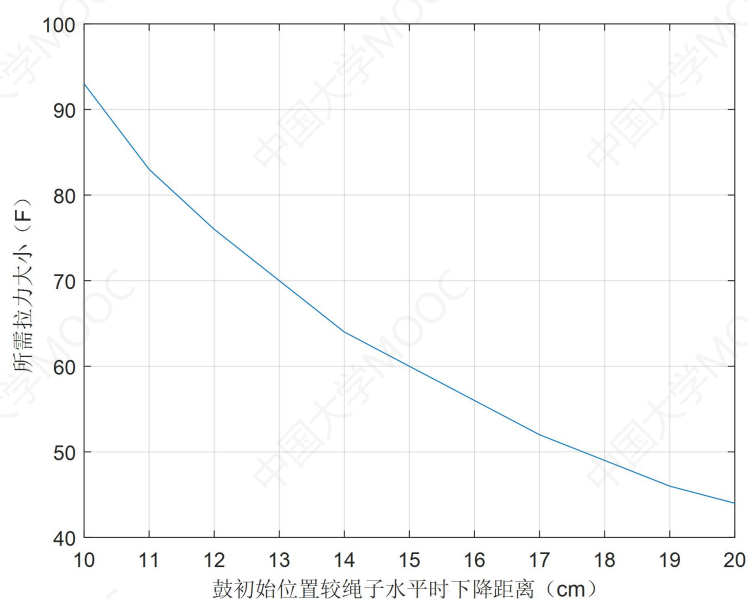


图 17 同心鼓初始时距离绳子水平面的距离与拉力的变化图

由图 17 所示，鼓初始时距离绳子水平面的距离即鼓下沉的距离越大，所需要的拉力越大，只有增大拉力才能保证同心鼓与排球相碰。下面给出数值结果：

表 9 距离与拉力的变化结果

距离	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.2
拉力	93	83	76	70	64	60	56	52	49	46	44

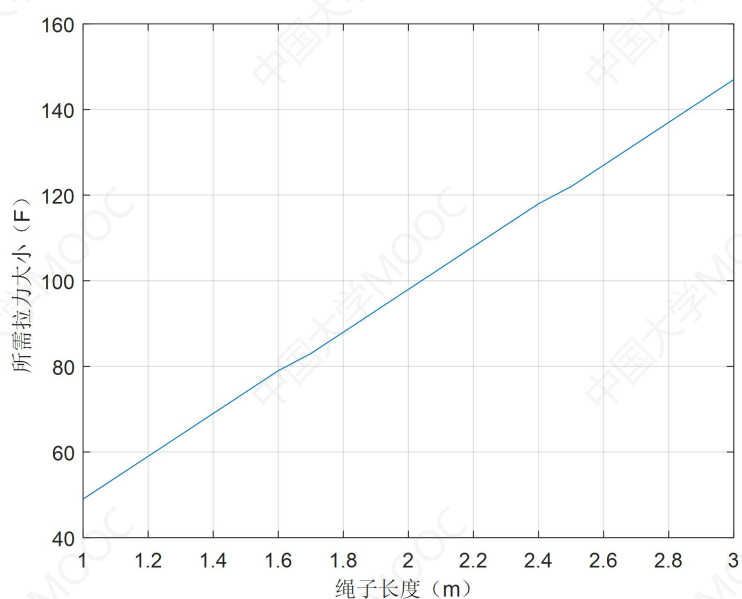


图 18 绳子长度与拉力的变化图

由图 18 所示，绳子长度增加，所需的拉力越大。下面给出数值结果：

表 10 绳长与拉力的

绳长	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1
拉力	49	54	59	64	69	74	79	83	88	93	98	103
绳长	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0			
拉力	108	113	118	122	127	132	137	142	147			

## 七、模型的评价与改进

### 7.1 模型的评价

#### 7.1.1 模型的优点

1. 本文采用详细的机理分析对排球与同心鼓的运动过程进行分析，具有严谨的推理过程，模型适用性较好。

2. 本文使用的仿真迭代法可以具体体现出最佳协作策略的选择，得到的结果符合实际情况，可以较为准确的反映模型的特点和模型结果。

3. 不同情况下的模型均都考虑全面，尽可能的符合现实规律得到可靠地分析结果。

#### 7.1.2 模型的缺点

1. 仿真迭代的次数较少，整体的规律无法全面体现出来。

2. 较为复杂的情况，该模型无法适用，求解过程太过复杂。

### 7.2 模型的改进

因为拉力在作用过程中夹角一直在变化，仿真迭代的方法只是近似求得了最佳协作策略，我们可以寻求更优的解法对模型求解。

## 八、模型的应用与推广

本文主要应用了运动学原理和转动定律建立模型，利用仿真迭代方法求解计算，建立的模型对于物体在不同复杂情况下的反弹状态。

## 九、参考文献

- [1] 李中伟, 于勉. 转动惯量定理  $I_x + I_y + I_z = 2 \sum_i (m_i r_i^2)$  及其应用[J]. 黑龙江科技信息, 2011 (21): 47.
- [2] 秦瑶. 常用均匀刚体的转动惯量的求法讨论[J]. 大学物理, 2002 (02): 39-41.

## 附录:

所有代码基于 Matlab R2016b

代码文件名与问题的对应关系

问题 1 拉力大小求解: timu1.m

问题 1 拉力大小对应高度求解: timu1\_1.m

问题第 2 第 1 次实验角度求解: timu2\_1.m

问题第 2 第 2 次实验角度求解: timu2\_2.m

问题第 2 第 3 次实验角度求解: timu2\_3.m

问题第 2 第 4 次实验角度求解: timu2\_4.m

问题第 2 第 5 次实验角度求解: timu2\_5.m

问题第 2 第 6 次实验角度求解: timu2\_6.m

问题第 2 第 7 次实验角度求解: timu2\_7.m

问题第 2 第 8 次实验角度求解: timu2\_8.m

问题第 2 第 9 次实验角度求解: timu2\_9.m

问题 3 碰撞速度关系求解: timu3.m

问题 3 对应 9 次实验调整求解: timu33.m

问题 4 情况拉力求解: timu4.m

问题 4 模型检验: timu44.m

对人数的灵敏度分析: modeltest1.m

对鼓高度的灵敏度分析: modeltest2.m

对绳长的灵敏度分析: modeltest3.m

问题 1 拉力大小求解:

```
clear; clc;
```

```
h=0.4; g=9.8; mg=3.6; mq=0.27;
```

```
ts=sqrt(2*h/g); %球下落时间
```

```
t=0.0001;
```

```
F=8*70; %初始每个人发力大小
```

```
while 1
```

```
for tt=t:t:ts %鼓上升时刻
```

```
    s1=0.11; s=0; v=0; l=1.7; vq1=0; vq2=0; %数据初始化
```

```
    for i=t:t:ts %球下落时刻
```

```
        if i>tt
```

```
            sinthi=(s1-s)/l; %角度更新
```

```
            a=(F*sinthi-mg*g)/mg; %加速度更新
```

```
            s=s+v*t+1/2*a*t^2; %鼓路程更新
```

```
            v=v+a*t; %鼓末速度更新
```

```
        end
```

```
        vq1=-g*i; %球末速度更新
```

```

        if (1/2*g*i^2+s) >= 0.4 %如果相碰了
            vq2=(vq1*(mq-mg)+2*mg*v)/(mg+mq); %计算球碰撞后速度
            vg2=(v*(mg-mq)+2*mq*vq1)/(mg+mq); %计算鼓碰撞后速度
            break %碰撞结束计算
        end
    end
    if vq2^2/(2*g) +s >= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
        break; %结束程序
    end
end
if vq2^2/(2*g) +s >= 0.40 %如果球高度大于 s10.4m
    break; %结束程序
end
F=F+8; %每个人发力大小+1
end
h=vq2^2/(2*g)+s;
F/8

```

问题 1 拉力大小对应高度求解:

```

clear; clc;
h=0.4; g=9.8; mg=3.6; mq=0.27;
ts=sqrt(2*h/g); %球下落时间
Rec=[];
for F=8*70:8:8*100
    s1=0.11; s=0; v=0; l=1.7; t=0.0001; %数据初始化
    Rec(end+1,1)=F/8; Rec(end,2)=0; Rec(end,3)=0; Rec(end,4)=0;
    %大力大小 对应球最大高度 碰撞后球速度 鼓上升时刻
    for tt=t:t:ts %鼓上升时刻
        s1=0.11; s=0; v=0; l=1.7; t=0.0001; %数据初始化
        for i=t:t:ts %球下落时刻
            if i>tt
                sinthi=(s1-s)/l; %角度更新
                a=(F*sinthi-mg*g)/mg; %加速度更新
                s=s+v*t+1/2*a*t^2; %鼓路程更新
                v=v+a*t; %鼓末速度更新
            end
            vq1=-g*i; %球末速度更新
            if (1/2*g*i^2+s) >= 0.4 %如果相碰了
                vq2=(vq1*(mq-mg)+2*mg*v)/(mg+mq); %计算球碰撞后速度
                vg2=(v*(mg-mq)+2*mq*vq1)/(mg+mq); %计算鼓碰撞后速度
                if vq2^2/(2*g) +s > Rec(end,2)
                    Rec(end,2)= vq2^2/(2*g) +s ;
                    Rec(end,3)= vq2;
                    Rec(end,4)= tt;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        end
        break %碰撞结束计算
    end
end
end
end
plot(Rec(:,1),Rec(:,2)*100); grid on;
xlabel('拉力大小(F)');ylabel('球最大弹起高度(cm)')

```

问题第2第1次实验角度求解:

```

clear; clc;
mg=3.6; long=0.22; h=1.7; l=0.11; r=0.2; F=90-80; t=0.1;
J=(mg*r^2)/2+(mg*long^2)/12;
bei=l/h;
M=F*r*bei
thi=1/2*M/J*t^2*180/pi

```

问题第2第2次实验角度求解:

```

clear; clc;
mg=3.6; long=0.22; h=1.7; l=0.11; r=0.2; F=90-80; t=0.1;
J=(mg*r^2)/2+(mg*long^2)/12;
bei=l/h;
M=2*F*r*sind(22.5+45)*bei
thi=1/2*M/J*t^2*180/pi

```

问题第2第3次实验角度求解:

```

clear; clc;
mg=3.6; long=0.22; h=1.7; l=0.11; r=0.2; F=90-80; t=0.1;
J=(mg*r^2)/2+(mg*long^2)/12;
bei=l/h;
M=2*F*r*sind(22.5)*bei
thi=1/2*M/J*t^2*180/pi

```

问题第2第4次实验角度求解:

```

clear; clc;
J=(3.6*0.2^2)/2+(3.6*0.22^2)/12;
bei=0.11/1.7;
M1=80*0.2*bei
thi1=1/2*M1/J*0.1^2*180/pi
F1=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)/2)/1.7)*180/pi+thi1);
F2=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)/4)/1.7)*180/pi+thi1);
F3=F2;
F4=80*sind(asin(0.11/1.7)*180/pi-thi1);
F5=F4;

```



```

F6=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/4)/1.7)*180/pi-thi1);
F7=F6;
F8=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/2)/1.7)*180/pi-thi1);
M2=((F1-F8)*0.2+2*(F2-F6)*0.2*sind(45))*bei
thi2=1/2*M2/J*0.1^2*180/pi
thi=thi1-thi2

```

问题第 2 第 5 次实验角度求解:

```

clear; clc;
J=(3.6*0.2^2)/2+(3.6*0.22^2)/12;
bei=0.11/1.7;
M1=2*80*0.2*sind(22.5+45)*bei
thi1=1/2*M1/J*0.1^2*180/pi
F1=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi+thi1);
F2=F1;
F3=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi+thi1);
F4=F3;
F5=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi-thi1);
F6=F5;
F7=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi-thi1);
F8=F7;
M2=(2*(F1-F8)*0.2*sind(45+22.5)+2*(F3-F6)*0.2*sind(22.5))*bei
thi2=1/2*M2/J*0.1^2*180/pi
thi=thi1-thi2

```

问题第 2 第 6 次实验角度求解:

```

clear; clc;
J=(3.6*0.2^2)/2+(3.6*0.22^2)/12;
bei=0.11/1.7;
M1=2*80*0.2*sind(22.5)*bei
thi1=1/2*M1/J*0.1^2*180/pi
F1=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi+thi1);
F2=F1;
F3=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi+thi1);
F4=F3;
F5=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi-thi1);
F6=F5;
F7=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi-thi1);
F8=F7;
M2=(2*(F1-F8)*0.2*sind(45+22.5)+2*(F3-F6)*0.2*sind(22.5))*bei
thi2=1/2*M2/J*0.1^2*180/pi
thi=thi1-thi2

```

问题第 2 第 7 次实验角度求解:

```

clear; clc;
J=(3.6*0.2^2)/2+(3.6*0.22^2)/12;
bei=0.11/1.7;
M1=90*0.2*bei
thi1=1/2*M1/J*0.1^2*180/pi
F1=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)/2)/1.7)*180/pi+thi1);
F2=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)/4)/1.7)*180/pi+thi1);
F3=F2;
F4=80*sind(asin((0.11)/1.7)*180/pi+thi1);
F5=F4;
F6=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/4)/1.7)*180/pi-thi1);
F7=F6;
F8=90*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/2)/1.7)*180/pi-thi1);
M2=((F1-F8)*0.2+2*(F2-F6)*0.2*sind(45))*bei
thi2=1/2*M2/J*0.1^2*180/pi
thi=thi1-thi2

```

问题第 2 第 8 次实验角度求解:

```

clear; clc;
J=(3.6*0.2^2)/2+(3.6*0.22^2)/12;
bei=0.11/1.7;
M1=0.2*68.8833*bei
thi=1/2*M1/J*0.1^2*180/pi
% F1=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi+thi1);
% F2=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi+thi1);
% F3=90*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*2/5)/1.7)*180/pi+thi1);
% F4=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*2/5)/1.7)*180/pi+thi1);
% F5=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi+thi1);
% F6=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi+thi1);
% F7=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*4/5)/1.7)*180/pi+thi1);
% F8=90*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*4/5)/1.7)*180/pi+thi1);
% M2=2*(F1-F8)*0.2*sind(45+22.5)+2*(F3-F6)*0.2*sind(22.5)
% thi2=1/2*M2/J*0.1^2*180/pi
% thi=thi1-thi2

```

问题第 2 第 9 次实验角度求解:

```

clear; clc;
J=(3.6*0.2^2)/2+(3.6*0.22^2)/12;
bei=0.11/1.7;
M1=2*80*0.2*sind(22.5)*bei
thi1=1/2*M1/J*0.1^2*180/pi
F1=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi+thi1);
F2=80*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi+thi1);
F3=90*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi+thi1);

```

```

F4=90*sind(asin((0.11+0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi+thi1);
F5=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi-thi1);
F6=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)/5)/1.7)*180/pi-thi1);
F7=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi-thi1);
F8=80*sind(asin((0.11-0.4*sind(thi1)*3/5)/1.7)*180/pi-thi1);
M2=(2*(F1-F8)*0.2*sind(45+22.5)+2*(F3-F6)*0.2*sind(22.5))*bei
thi2=1/2*M2/J*0.1^2*180/pi
thi=thi1-thi2

```

问题 3 碰撞速度关系求解:

```

syms m1 m2 v1 v2 v1p v2p b
[v1p,v2p]=solve('m1*v1+m2*v2=m1*v1p+m2*v2p*b','m1*v1^2/2+m2*v2^2/2=m1
*v1p^2/2+m2*v2p^2/2'...
,'v1p','v2p')

```

问题 3 对应 9 次实验调整求解:

```

clear; clc;
syms m1 m2 v1 v2 v1p v2p b
mg=3.6; long=0.22; h=1.7; l=0.11; r=0.2; F=10; t=0.1;
h=0.4; g=9.8; mg=3.6; mq=0.27;
thi=[0.4285,0.7918,0.328,2.3582,4.1387,1.7122,2.6487,2.9516,1.6753];
ts=sqrt(2*h/g); %球下落时间
F=8*83; %初始每个人发力大小
t=0.001; %数据初始化
Rec=[];
for j=1:9
while 1
    for tt=t:t:ts %鼓上升时刻
        s1=0.11; s=0; v=0; l=1.7; vq1=0; %数据初始化
        for i=t:t:ts %球下落时刻
            if i>tt
                sinthi=(s1-s)/l; %角度更新
                a=(F*sinthi-mg*g)/mg; %加速度更新
                s=s+v*t+1/2*a*t^2; %鼓路程更新
                v=v+a*t; %鼓末速度更新
            end
            vq1=-g*i; %球末速度更新
            if (1/2*g*(i+0.1)^2+s) >= 0.4 %如果相碰了
                vq1=-g*(i+0.1); %球末速度更新
                S1=((m1*(m1*v2^2 - m2*v2^2 + b^2*m1*v1^2 + b^2*m2*v2^2 -
                2*m1*v1*v2))^(1/2) + b*m1*v1 + b*m2*v2)/(m2*b^2 + m1);
                S2=(m1*v1 + m2*v2)/m1 - (b*m2*((m1*(m1*v2^2 - m2*v2^2 +
                b^2*m1*v1^2 + b^2*m2*v2^2 - 2*m1*v1*v2))^(1/2) + b*m1*v1 +
                b*m2*v2))/(m1*(m2*b^2 + m1));
            end
        end
    end
end

```

```

        vq2=
double(subs(S1, {b, m1, m2, v2, v1}, {cosd(2*thi(j)), mg, mq, vq1, v})); % 计算
球碰撞后速度

vg2=double(subs(S2, {'b', 'm1', 'm2', 'v2', 'v1'}, {cosd(2*thi(j)), mg, mq, vq
1, v})); %计算球碰撞后速度
        vq2y=vq2*cosd(2*thi(j)); vq2x=vq2*sind(2*thi(j));
        break;
    end
end
if vq2y^2/(2*g) +s >= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
    break; %结束程序
end
end
if vq2y^2/(2*g) +s>= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
    break; %结束程序
end
F=F+8; %每个人发力大小+1
end
Rec(end+1, 1)=F/8;
Rec(end, 2)=tt;
Rec(end, 3)=vq2y^2/(2*g)+s;
ted=2*sqrt(2*h/g);
Rec(end, 4)=vq2x*ted;
End

```

问题 4 情况拉力求解:

```

clear; clc;
syms m1 m2 v1 v2 vlp v2p b Fp F sinthi sinthip costhip xx dt
mg=3.6; long=0.22; s=2; l=0.11; r=0.2; t=0.1;
h=0.6; g=9.8; mg=3.6; mq=0.27;
ts=sqrt(2*h/g); %球下落时间
F=10*60; %初始每个人发力大小
t=0.0001; thi=0.5;
while 1
    for tt=t:t:ts %鼓上升时刻
        s1=0.11; s=0; v=0; l=2; vq1=0; %数据初始化
        for i=t:t:ts %球下落时刻
            if i>tt
                sinthi=(s1-s)/l; %角度更新
                a=(F*sinthi-mg*g)/mg; %加速度更新
                s=s+v*t+l/2*a*t^2; %鼓路程更新
            end
        end
    end
end

```

```

v=v+a*t; %鼓末速度更新
end
vq1=-g*i; %球末速度更新
if (1/2*g*i^2 + s) >= 0.6 %如果相碰了
    S1= ((m1*(m1*v2^2 - m2*v2^2 + b^2*m1*v1^2 + b^2*m2*v2^2 -
2*m1*v1*v2))^(1/2) + b*m1*v1 + b*m2*v2)/(m2*b^2 + m1);
    S2=(m1*v1 + m2*v2)/m1 - (b*m2*((m1*(m1*v2^2 - m2*v2^2 +
b^2*m1*v1^2 + b^2*m2*v2^2 - 2*m1*v1*v2))^(1/2) + b*m1*v1 +
b*m2*v2))/(m1*(m2*b^2 + m1));
    vq2=
double(subs(S1, {b, m1, m2, v2, v1}, {cosd(2*thi), mg, mq, vq1, v})); %计算球碰
撞后速度

vg2=double(subs(S2, {'b', 'm1', 'm2', 'v2', 'v1'}, {cosd(2*thi), mg, mq, vq1, v}
)); %计算球碰撞后速度
    vq2y=vq2*cosd(2*thi); vq2x=vq2*sind(2*thi);
    if vq2y^2/(2*g)+ s >= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
        return; %结束程序
    end
    break;
end
end

end

F=F+10; %每个人发力大小+1
end
F=F/10
tt
h=vq2y^2/(2*g)+s
ted=2*sqrt(2*h/g);
x=vq2x*ted

```

问题 4 模型检验:

```

clear ; clc ;
m=3.6;
xita=0.5;s=0.11;l=2;r=0.2;t=0.1;j=0.5*m*r^2+1/12*m*0.22^2;
F_x=4.8558;
T=[];
thi=[];
for i=0:0.1:1
    xita=(F_x-i)/(pi/180*2*j*l/(0.01*0.2*2.8271*s));
    xital=0.5-xita;
    t=sqrt((2*xital)*j/(2.8271*(F_x+65-i)*s*0.1));
    T=[T;t];

```

```

thi=[thi;xital];
end
plot(F_x:-0.1:F_x-1,T); grid on;
xlabel('拉力大小(F)');ylabel('提早时间(s)')
figure;
plot(F_x:-0.1:F_x-1,thi); grid on;
xlabel('拉力大小(F)');ylabel('碰撞后倾斜角度')

```

对人数的灵敏度分析:

```

clear; clc;
h=0.4; g=9.8; mg=3.6; mq=0.27;
ts=sqrt(2*h/g); %球下落时间
t=0.0001;
Rec=[];
for n=8:17
    F=n*30; %初始每个人发力大小
    while 1
        for tt=t:t:ts %鼓上升时刻
            s1=0.11; s=0; v=0; l=1.7; vq1=0; vq2=0; %数据初始化
            for i=t:t:ts %球下落时刻
                if i>tt
                    sinthi=(s1-s)/l; %角度更新
                    a=(F*sinthi-mg*g)/mg; %加速度更新
                    s=s+v*t+1/2*a*t^2; %鼓路程更新
                    v=v+a*t; %鼓末速度更新
                end
                vq1=-g*i; %球末速度更新
                if (1/2*g*i^2+s) >= 0.4 %如果相碰了
                    vq2=(vq1*(mq-mg)+2*mg*v)/(mg+mq); %计算球碰撞后速度
                    vg2=(v*(mg-mq)+2*mq*vq1)/(mg+mq); %计算鼓碰撞后速度
                    break %碰撞结束计算
                end
            end
            if vq2^2/(2*g) +s >= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
                break; %结束程序
            end
        end
        if vq2^2/(2*g) +s >= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
            break; %结束程序
        end
        F=F+n; %每个人发力大小+1
    end
    h=vq2^2/(2*g)+s;
    Rec=[Rec;F/n];

```

```

end
plot(8:17, Rec)
xlabel('人数'); ylabel('所需拉力大小 (F)')

对鼓高度的灵敏度分析:
clear; clc;
h=0.4; g=9.8; mg=3.6; mq=0.27;
ts=sqrt(2*h/g); %球下落时间
t=0.0001;
Rec=[];
for n=0.1:0.01:0.2
    F=8*30; %初始每个人发力大小
    while 1
        for tt=t:t:ts %鼓上升时刻
            s1=n; s=0; v=0; l=1.7; vq1=0; vq2=0; %数据初始化
            for i=t:t:ts %球下落时刻
                if i>tt
                    sinthi=(s1-s)/l; %角度更新
                    a=(F*sinthi-mg*g)/mg; %加速度更新
                    s=s+v*t+1/2*a*t^2; %鼓路程更新
                    v=v+a*t; %鼓末速度更新
                end
                vq1=-g*i; %球末速度更新
                if (1/2*g*i^2+s) >= 0.4 %如果相碰了
                    vq2=(vq1*(mq-mg)+2*mg*v)/(mg+mq); %计算球碰撞后速度
                    vg2=(v*(mg-mq)+2*mq*vq1)/(mg+mq); %计算鼓碰撞后速度
                    break %碰撞结束计算
                end
            end
            if vq2^2/(2*g) + s >= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
                break; %结束程序
            end
        end
        if vq2^2/(2*g) + s >= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
            break; %结束程序
        end
        F=F+8; %每个人发力大小+1
    end
    h=vq2^2/(2*g)+s;
    Rec=[Rec; F/8];
end
plot(10:1:20, Rec); grid on;
xlabel('鼓初始位置较绳子水平时下降距离 (cm)'); ylabel('所需拉力大小 (F)')
')

```

对绳长的灵敏度分析:

```
clear; clc;
h=0.4; g=9.8; mg=3.6; mq=0.27;
ts=sqrt(2*h/g); %球下落时间
t=0.0001;
Rec=[];
for n=1:0.1:3
    F=8*30; %初始每个人发力大小
    while 1
        for tt=t:t:ts %鼓上升时刻
            s1=0.11; s=0; v=0; l=n; vq1=0; vq2=0; %数据初始化
            for i=t:t:ts %球下落时刻
                if i>tt
                    sinthi=(s1-s)/l; %角度更新
                    a=(F*sinthi-mg*g)/mg; %加速度更新
                    s=s+v*t+l/2*a*t^2; %鼓路程更新
                    v=v+a*t; %鼓末速度更新
                end
                vq1=-g*i; %球末速度更新
                if (1/2*g*i^2+s) >= 0.4 %如果相碰了
                    vq2=(vq1*(mq-mg)+2*mg*v)/(mg+mq); %计算球碰撞后速度
                    vg2=(v*(mg-mq)+2*mq*vq1)/(mg+mq); %计算鼓碰撞后速度
                    break %碰撞结束计算
                end
            end
            if vq2^2/(2*g) +s >= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
                break; %结束程序
            end
        end
        if vq2^2/(2*g) +s >= 0.40 %如果球高度大于 0.4m
            break; %结束程序
        end
        F=F+8; %每个人发力大小+1
    end
    h=vq2^2/(2*g)+s;
    Rec=[Rec;F/8];
end
plot(1:0.1:3,Rec); grid on;
xlabel('绳子长度 (m)'); ylabel('所需拉力大小 (F)')
```