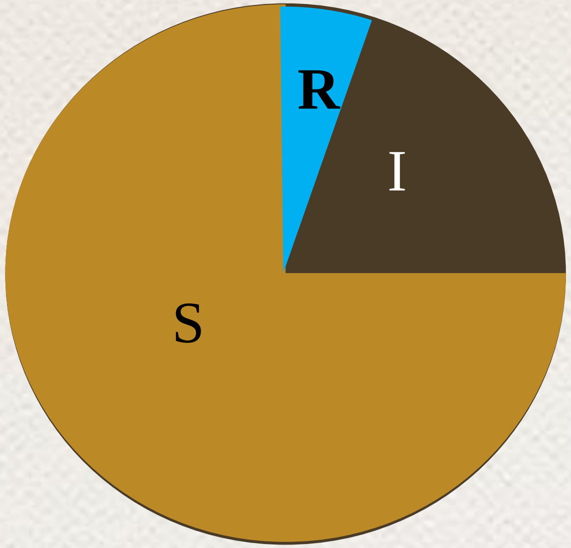
数学模型

传染病模型—SIR模型

北京科技大学

一、SIR传染病模型



回忆:

SI模型

$I + S = 1$ 得病后不会被治愈

结论：所有人都变成病人

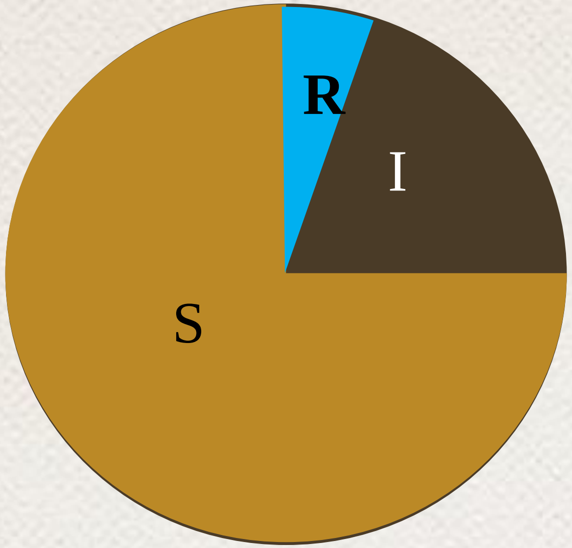
SIS模型

$I + S = 1$ 被治愈后又可能被感染

结论：所有病人最终都被治愈

1927年Kermack和Mckendrick提出了SIR仓室模型，是传染病模型中最经典、最基本的模型，为传染病动力学的研究做出了奠基性的贡献

一、SIR传染病模型



易感者：指未得病者，但是与感染者接触后容易感染

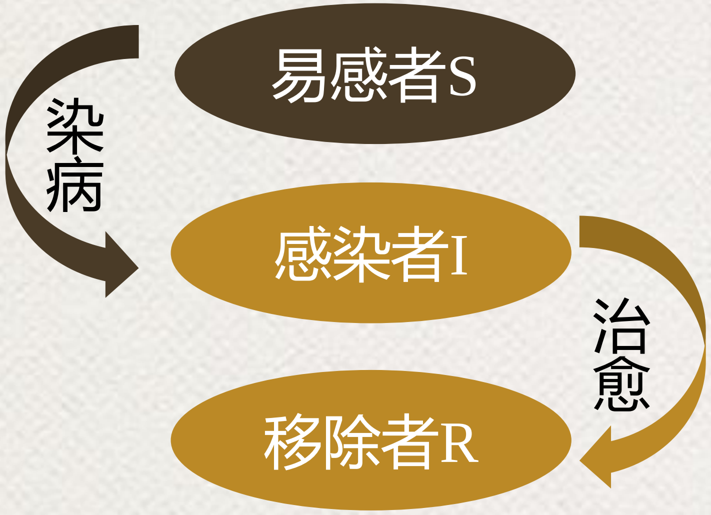
Susceptible

感染者：已经感染病毒的人

Infective

移除者：已经具有免疫能力的人

Removed



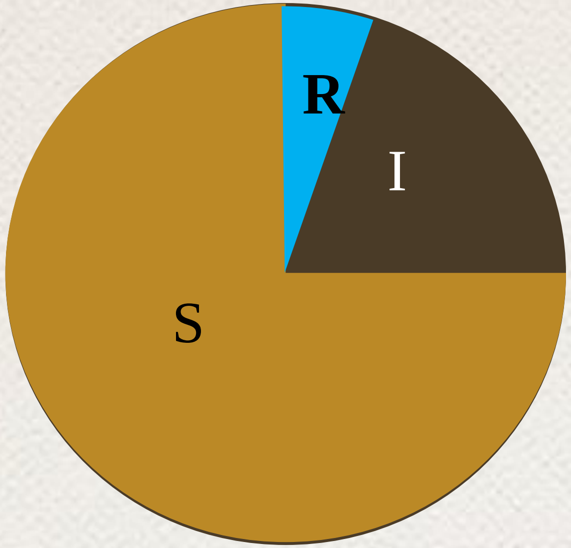
假设人口总数为 N，感染者、易感者和移除者的比例为 I，S，R

$$I + S + R = 1$$

感染率：每个病人每天有效的平均接触人数是 k

日治愈率：病人每天被治愈的占总病人的比率 μ

一、SIR传染病模型



分析：

假设人口总数为N，则 $I+S+R=1$

感染率：k　　　　治愈率：μ

假设t时刻的病人数是$I(t)$，根据Taylor公式

$$N\left(I(t+\Delta t)-I(t)\right)=N\frac{dI}{dt}\Delta t+o(\Delta t)$$

$$N\left(I(t+\Delta t)-I(t)\right)=\left(kS\,NI-\mu IN\right)\Delta t$$

$$\frac{dI}{dt}=kSI-\mu I \qquad \frac{dS}{dt}=-kSI$$

初始条件　$I(0)=I_0 \quad S(0)=S_0$

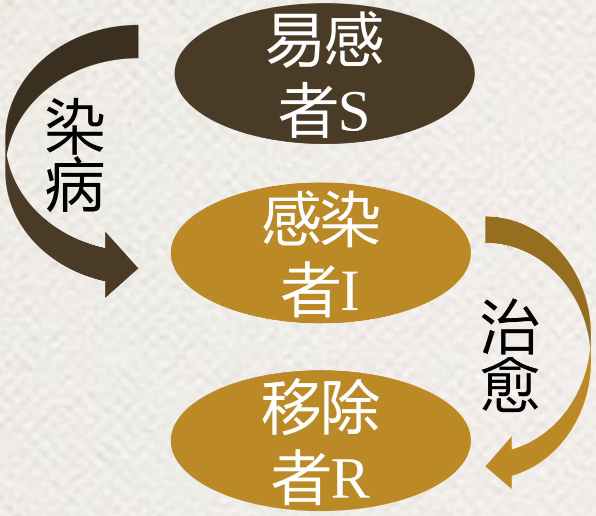
二、问题分析

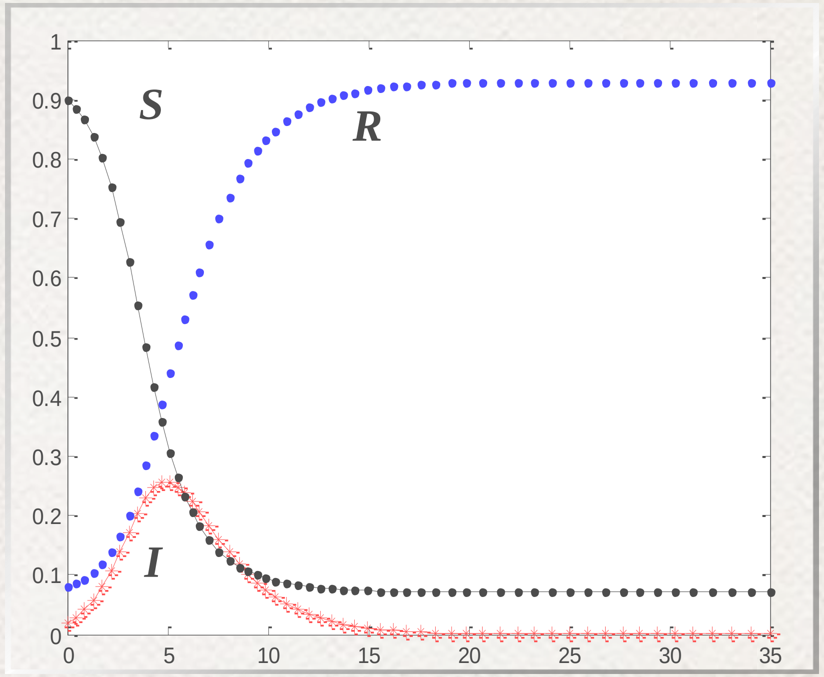
分析

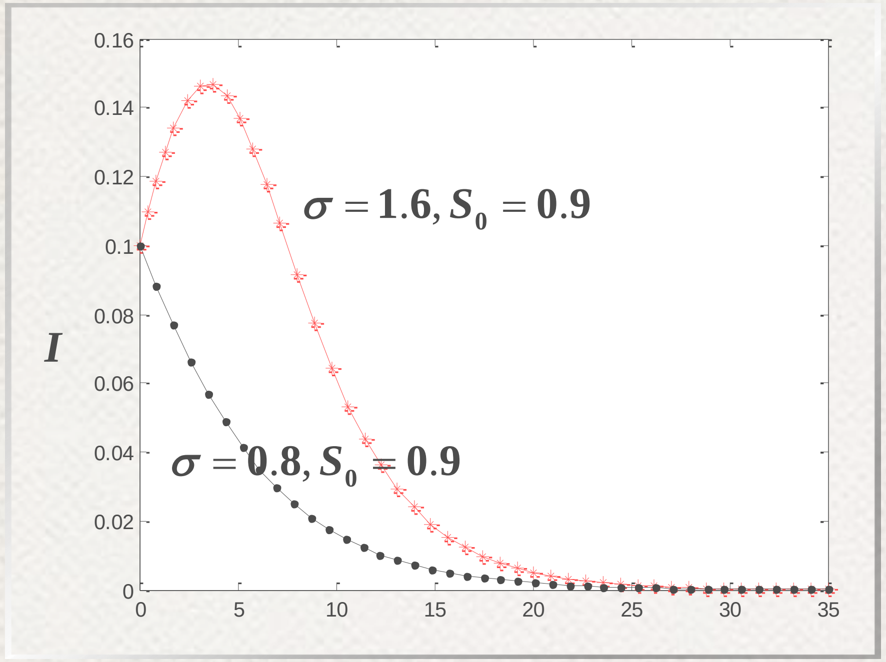
$$\sigma = \frac{k}{\mu}$$ 一个周期内一个病人有效的传染人数

$$\frac{dI}{dt} = kSI - \mu I \qquad \frac{dS}{dt} = -kSI$$

初始条件 $I(0) = I_0 \qquad S(0) = S_0$







二、问题分析

分析

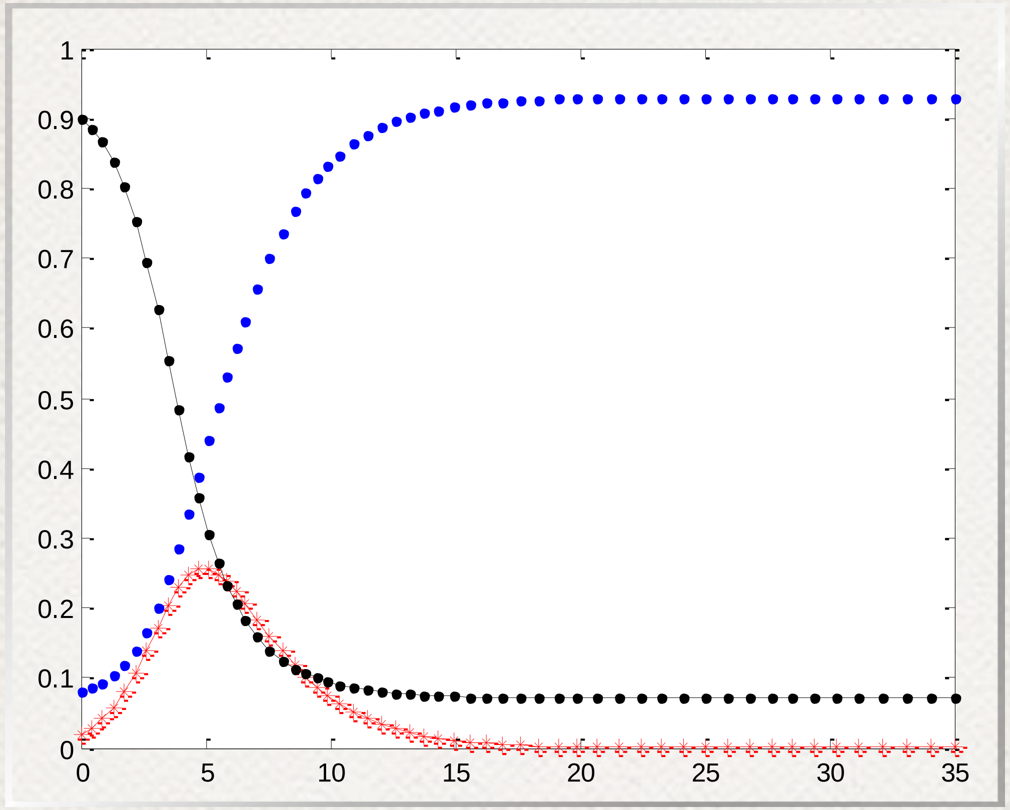
$$\frac{dI}{dt} = kSI - \mu I \qquad \frac{dR}{dt} = \mu I$$

初始条件 $I(0) = I_0$ $\quad S(0) = S_0$

易感者S

感染者I

移除者R



假设病人最终会趋向于一个固定的值 ε ，则

$\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = \varepsilon.$ 即 $\exists M > 0,$ 当 $t > M$ 时 $,I(t) > \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$R_\infty - R_M = \frac{dR}{dt}(t_\infty - t_M) = \mu I(t_\infty - t_M) > \mu\frac{\varepsilon}{2}(t_\infty - t_M)$$

矛盾，则最终病人趋向于零。

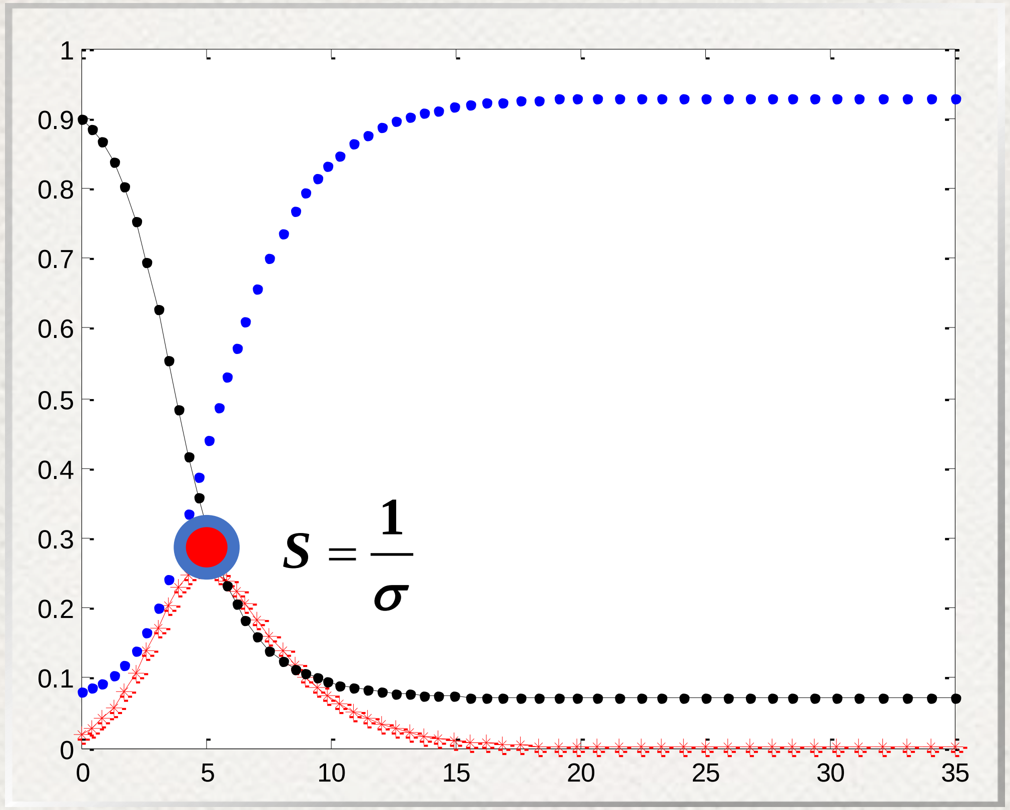
二、问题分析

分析

$$\frac{dI}{dt}=kSI-\mu I \qquad \frac{dR}{dt}=\mu I$$

初始条件

$$I(0)=I_0 \qquad S(0)=S_0$$



易感者S

感染者I

移除者R

$$\frac{dI}{dt}=kSI-\mu I \quad =kI(S-\frac{\mu}{k}) \quad =kI(S-\frac{1}{\sigma})$$

$S>\frac{1}{\sigma}$ 病人数单调递增

$S<\frac{1}{\sigma}$ 病人数单调递减

$S=\frac{1}{\sigma}$ 病人数达到最大值

三、问题推广

如何控制传染病？

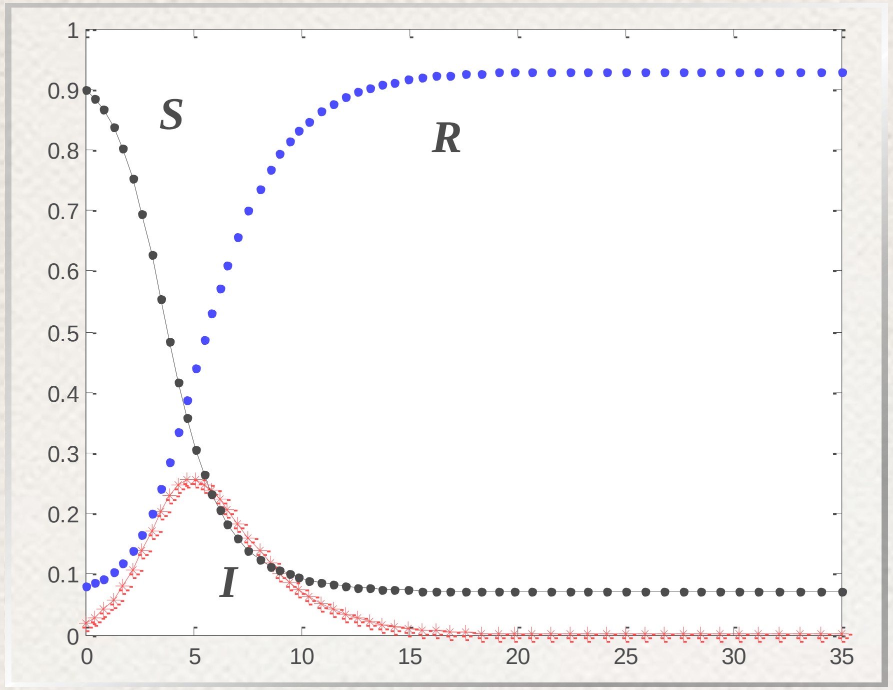
初始状态：$S_0 = 1 - R_0 - I_0 \le \dfrac{1}{\sigma}$

$$1 - R_0 \le \frac{1}{\sigma} \Rightarrow R_0 \ge 1 - \frac{1}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{k}{\mu}$$

群体免疫：增大 R_0

改善医疗条件、控制隔离：减小 k　增大 μ



三、问题推广

$$\frac{dI}{dt} = kSI - \mu I$$

$$\frac{dS}{dt} = -kSI$$

$$\frac{dI}{dS} = \frac{1}{S\sigma} - 1 = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{\sigma} - S\right)$$

初始条件

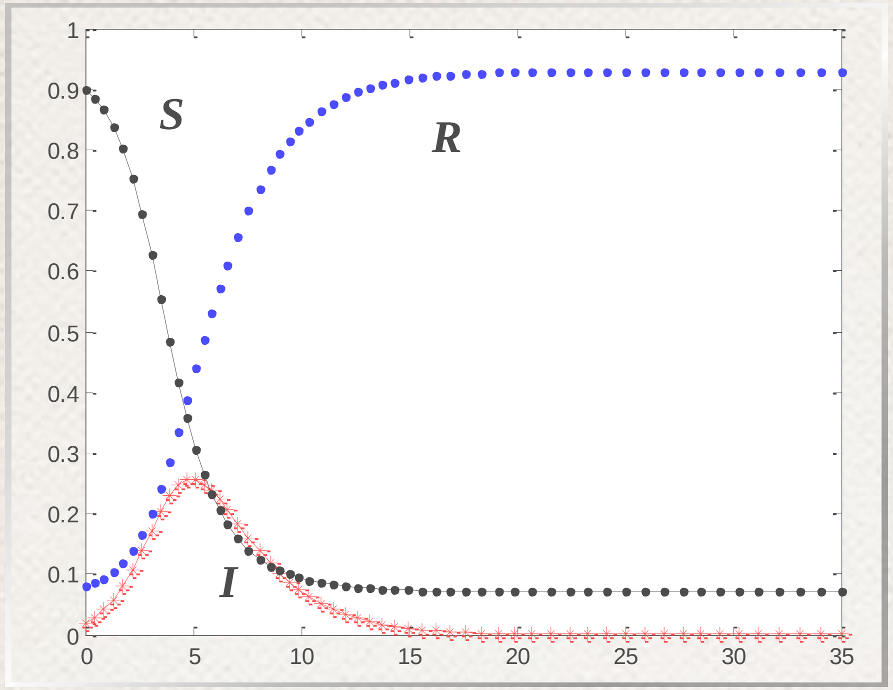
$$I(0) = I_0 \qquad S(0) = S_0$$

$$I(S_0) = I_0$$

$$I(S) = S_0 + I_0 - S + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{S}{S_0}$$

$$0 = S_0 + I_0 - S_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{S_\infty}{S_0}$$

$$\frac{S_0 + I_0 - S_\infty}{\ln S_0 - \ln S_\infty} = \frac{1}{\sigma}$$



$\frac{1}{\sigma} - S < 0$ I随着S减小而增大

$\frac{1}{\sigma} - S > 0$ I随着S减小而减小