

差分方程方法建模 种群增长模型2

王宏洲

数学与统计学院，北京理工大学

3 考虑年龄因素



3. 考虑年龄因素

第 n 周期种群总量 $x(n)$, 生育率 r ,
死亡率 d .

新增假设: 出生后 k 个周期才能生育。

从第 n 期到第 $n+1$ 期新增个体数量,
应由第 $n-k$ 个周期时的种群总量决定。

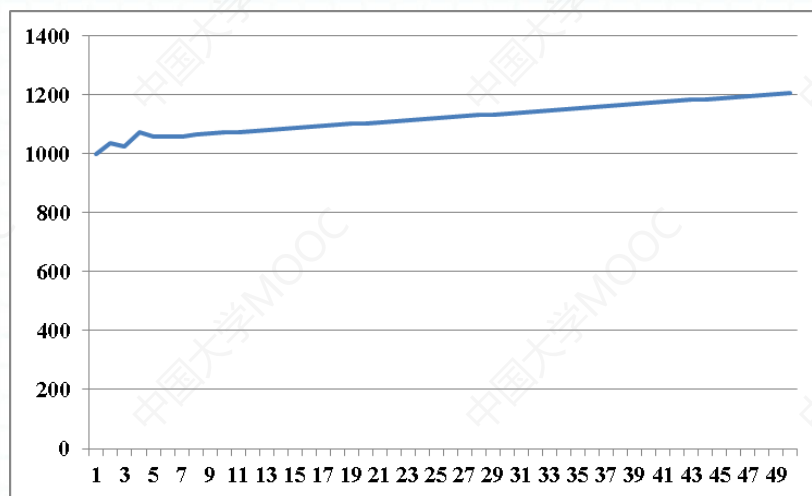
$$x(n+1) - x(n) = r(1-d)^k x(n-k) - dx(n)$$



$$x(n+1) - x(n) = r(1-d)^k x(n-k) - dx(n)$$

高阶线性差分方程，求解需要多个阶段的数据。

设 $k=4$, $x(1)=1000$, $x(2)=1035$, $x(3)=1025$, $x(4)=1075$.
 $r=0.5$, $d=0.2$.



4. 考虑性别因素

»»»»

第 n 周期种群总量 $x(n)$, 生育率 r ,
死亡率 d .

新增假设: 种群中雌性比例为 s .

»»»»

第 n 个周期到第 $n+1$ 个周期新增个体
数量, 由第 n 个周期雌性个体的数量
决定。



$$x(n+1) - x(n) = r \cdot s \cdot x(n) - dx(n)$$

$$x(n+1) - x(n) = r \cdot s \cdot x(n) - dx(n)$$

新增参数
可做调节

系统误差太大

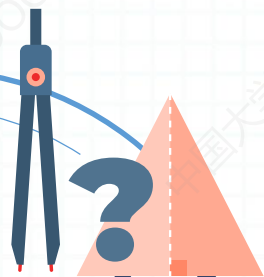
实际意义是生育率

指数增长模型: $x(n+1) - x(n) = r \cdot x(n) - dx(n)$

考虑雌性比例的意义: 增加可调节项, 更贴近现实

5

综合考虑年龄 和性别因素





5. 综合考虑年龄和性别因素



»»»»

第 n 周期种群总量 $x(n)$, 生育率 r , 死亡率 d .

假设: 出生后 k 个周期进入成年期; 种群中雌性比例为 s .

»»»»

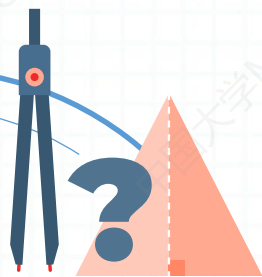
年龄: $x(n+1) - x(n) = r(1-d)^k x(n-k) - dx(n)$

性别: $x(n+1) - x(n) = s \cdot r \cdot x(n) - dx(n)$

$$x(n+1) - x(n) = r \cdot s(1-d)^k x(n-k) - dx(n)$$

6

考虑年龄结构的种群





6. 考虑年龄结构的种群



生物不同年龄层次的死亡率各有不同，而且产生下一代的作用也不同。以一种五年生河虾为例，成年虾直接孵化出幼虾，幼虾一年后即成年可以产卵，五龄虾产卵之后当年死亡。

第 n 年幼虾、一龄、二龄、三龄、四龄、五龄虾的数量分别为 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$, $E(n)$, $F(n)$;

- ①各年龄段活到下一段的比例 R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 ;
- ②一龄到五龄产生幼虾的个数 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ;
- ③不考虑虾的性别结构等。

第 n 年幼虾、一龄、二龄、三龄、四龄、五龄虾的数量分别为 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$, $E(n)$, $F(n)$;

- ①各年龄段活到下一段的比例 R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 ;
- ②一龄到五龄产生幼虾的个数 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ;
- ③不考虑虾的性别结构等。

$$A(n) = S_1 B(n-1) + S_2 C(n-1) + S_3 D(n-1) + S_4 E(n-1) + S_5 F(n-1),$$

$$B(n) = R_1 A(n-1),$$

$$C(n) = R_2 B(n-1),$$

$$D(n) = R_3 C(n-1),$$

$$E(n) = R_4 D(n-1),$$

$$F(n) = R_5 E(n-1).$$



$$A(n) = S_1 B(n-1) + S_2 C(n-1) + S_3 D(n-1) + S_4 E(n-1) + S_5 F(n-1),$$

$$B(n) = R_1 A(n-1),$$

$$C(n) = R_2 B(n-1),$$

$$D(n) = R_3 C(n-1),$$

$$E(n) = R_4 D(n-1),$$

$$F(n) = R_5 E(n-1).$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X(n) = \begin{pmatrix} A(n) \\ B(n) \\ C(n) \\ D(n) \\ E(n) \\ F(n) \end{pmatrix}$$

$$X(n) = M X(n-1)$$

多维的状态转移方程，又称为Leslie模型