

基于优化分析的“FAST”主索节点调节策略研究

摘要

本文研究的是 FAST 主动反射面的形变调节问题,建立了基于理想抛物面以及技术条件约束的主索节点调节优化模型,得到了使反射面尽量贴近理想抛物面的最优控制策略,并计算了调节前与调节后的信号接收比。

对于问题一,首先计算了基准球面的准确半径 $R = 300.4m$,以及各反射面板的三边长数据,发现均可近似视为边长 $11.3906m$ 的**等边三角形**;同时分析了初始坐标与节点分布的特征。随后根据馈源舱 P 、基准球面球心 C 与待观测天体 S 三点一线的位置关系确定理想抛物面焦点的坐标。其次,筛选出位于 300 米口径内的主索结点,即参与调节工作抛物面的工作节点。将节点 A_0 作为工作抛物面的顶点,以各工作节点径向伸缩距离为决策变量,最大的伸缩距离最小作为目标函数,各节点径向伸缩范围、相邻节点间距变化幅度作为约束条件,建立了**规划模型**。运用**贪心算法**确定顶点 A_0 的径向伸缩量 $\delta = -0.4567m$,理想抛物面表达式为 $x^2 + y^2 = 561.7724(z + 300.8567)$ 。

对于问题二,除了待观测天体 S 的位置不同,其余与问题一类似,因此本问中的理想抛物面可由问题一中的理想抛物面通过**坐标旋转**得到。首先利用天体的方位角与仰角确定由**欧拉角**导出的旋转矩阵,与基准球心 C 的连线不再与坐标轴重合,首先进行坐标系的旋转。使得旋转后的坐标系与问题一类似。基于问题一的优化模型确定了超限最小的理想抛物面,计算得其顶点坐标为 $(-49.393, -36.944, -294.460)$ 。随后引入了径向伸缩量的修正项改进优化模型,对超限的 229 个节点按照位置分组计算修正项,使得修正后满足变化幅度约束的同时总体修正幅度最小,即尽量贴合理想抛物面。最终得到顶点坐标径向变化幅度为 $-0.2150m$ 。最后将坐标系还原,得出在原坐标系中的调整坐标与节点分布。

对于问题三,我们采用问题二中旋转后的新坐标系进行求解,将从待测天体 S 发出的电磁波信号均看作是平行于 z 轴的向量。工作抛物面上不同位置的反射面板接收到的信号量与该反射面板在 xOy 平面上的投影面积大小成正比。我们考虑先针对单独的一个三角反射面板,计算其接收到的信号量以及成功被馈源舱有效区域接收的反射信号量,然后再汇总所有的三角反射面板计算总体信号接收比。对于单个三角反射面板接收比的计算,我们将反射面板进行**离散化**处理,计算出以三角反射面板上的离散点为信号电磁波入射点时反射信号与焦点所在平面的交点位置坐标,再根据交点与焦点的距离关系判断此信号是否被馈源舱接收。计算出能被馈源舱有效区域接收到反射信号的离散点个数,将馈源舱的总信号接收量除以信号总量,我们得到馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比为 1.34% ,与 300 米口径内基准反射球面的反射信号之比为 0.60% 。

最后,从馈源舱有效区域大小、焦径比和反射面板的离散点数对接收比的影响模型进行敏感性分析并对优缺点进行评价,同时提出改进的方向。

关键词: 理想抛物面 欧拉角 贪心算法 优化模型

一、问题的背景和重述

1.1 问题的背景

500 米口径球面射电望远镜 (Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope, 简称 FAST) 位于贵州省境内, 是我国自主设计的射电天文望远镜, 其单口径、灵敏性都处于世界最高水平, 习惯上也称为“中国天眼”。

1.2 问题的重述

问题一: 当待观测天体 S 的方位角 α 与仰角 β 分别为 0° 和 90° , 即待观测天体恰好位于基准球面正上方时, 结合考虑调节反射面板时的约束条件, 确定理想抛物面。

问题二: 当待观测天体 S 的方位角 α 与仰角 β 分别为 36.795° 和 78.169° 时, 确定出理想抛物面并建立反射面板调节模型, 确定出使得反射面板与理想抛物面尽可能贴合时相关促动器的调节量和主索结点位置坐标。

问题三: 在第二问反射面板调节方案的基础上, 计算馈源舱接收区域信号的有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比, 并与馈源舱有效区域接收到的反射信号与基准反射球面的反射信号之比作比较。

二、问题的分析

中国天眼 FAST, 是目前世界上单口径最大、灵敏度最高的射电望远镜。它的探测高灵敏度来源于优秀的主索节点调节方案, 在确定观测方向后能迅速调节主索节点位置贴合理想抛物面使该方向上的信号接收比大大提高。

对于问题一, 当待观测天体 S 恰好位于基准球面正上方时, 直线 CS 与坐标轴 z 轴重合, 可考虑直接采用题目所给定以基准球面球心 C 所处位置为原点的空间直角坐标系。首先根据馈源舱与基准球面球心 C 、待观测天体 S 三点一线的相对位置关系以及焦面的位置确定此时馈源舱的位置坐标, 即理想抛物面焦点坐标。其次, 由于照明区域的口径为 300m, 根据附件一中给出的主索结点坐标, 筛选出此时到直线 CS 距离小于 150m 的主索结点, 即参与调节工作抛物面的工作节点。最后, 观察附件一主索结点坐标, 发现此时节点 A_0 正好位于直线 CS 上, 考虑将节点 A_0 作为工作抛物面的顶点, 确定了顶点坐标和焦点坐标后抛物面的表达式即可确定。在节点 A_0 的 z 轴坐标上加一促动器伸缩量 $\delta \in [-0.6, 0.6]$, 遍历 300m 口径内所有的工作节点, 求出各个工作节点到工作抛物面上对应位置的径向距离的最大值和相邻工作节点之间距离的变化幅度, 综合考虑这两项指标, 确定出最合适的促动器伸缩量 δ , 进而确定出此时的理想抛物面。

对于问题二, 当待观测天体 S 位于 $\alpha=36.795^\circ$, $\beta=78.169^\circ$ 时, 直线 CS

为过坐标系原点一倾斜直线。为方便理想抛物面的计算，首先，考虑将题目原空间直角坐标系进行旋转，使新坐标系的 z 轴与直线 CS 重合。其次，将原坐标系中的主索结点坐标乘以欧拉角对应的旋转矩阵进行变换，得到新坐标系下各主索结点的坐标。此时已将问题二转化为问题一的情况，进而即可采用问题一的解法求得合适的理想抛物面。为了使反射面尽可能地贴近理想抛物面，我们以各个工作节点到工作抛物面上对应位置的径向距离平方和最小值为目标函数，以调节工作节点的促动器伸缩量为决策变量，以促动器径向伸缩范围和相邻节点间距离变化幅度等为约束条件，根据题意建立反射面板调节优化模型进行求解，最终得到经调节后各个工作节点的编号、位置坐标、促动器伸缩量等数据信息。

对于问题三，要计算馈源舱的信号接收比，我们考虑先针对单独的一个三角反射面板，计算其成功被馈源舱有效区域接收的反射信号量，然后再汇总所有的三角反射面板计算总体信号接收比。考虑采用问题二中旋转后的新坐标系进行解题，FAST 接收到的从待测天体发出的电磁波信号可近似看作为一组平行于 z 轴的向量。由于工作抛物面的口径 300m 为一定值，则整个工作抛物面接收到的信号总量也为一定值，工作抛物面上不同位置反射面板接收到的信号量与该反射面板在 xOy 平面上的投影面积大小有关。对于单个三角反射面板接收比的计算，考虑将反射面板进行离散化处理，计算出以离散化反射面板上的点为信号电磁波入射点时反射信号与焦点所在平面的交点位置坐标，再根据交点与焦点的距离关系判断此信号是否能被馈源舱接收。计算出能被馈源舱接收到反射信号的入射点个数，即可进而求得馈源舱的接收比。

三、 模型假设

- 1、假设主索节点的相邻节点对该节点的位置影响可忽略；
- 2、假设反射面板对信号全反射；
- 3、假设天体发出的电磁波信号到达地球时互相平行。

四、 符号及变量说明

符号	说明	单位
R	基准球面半径	m
p	焦准距	m
α	天体方位角	度
β	天体仰角	度
q	旋转抛物面顶点 z 轴坐标	m
δ	顶点径向伸缩量	m
R_k	馈源舱半径	m

五、 模型准备

5.1 数据的处理

5.1.1 基准球面半径的求解

为使模型的精确性更高，我们根据附件 1 中所给的主索节点坐标数据，计算各点到基准球面球心的距离，以获得准确的基准球面半径，结果如下表：

表 1 各主索节点至球心距离（部分）

节点编号	x 坐标（米）	y 坐标（米）	z 坐标（米）	到球心的距离（米）
A0	0	0	-300.4	300.4
B1	6.1078	8.407	-300.22	300.4
...
D442	-169.58	-176.991	173.657	300.3996
D422	-170.709	-167.974	-181.337	300.3996
...
E429	-175.262	173.878	-171.143	300.4004
E430	-168.969	181.996	-169.019	300.4005

分析计算结果，我们发现各个节点到基准球面球心的距离相对一致且集中，在 300.4m 左右偶有波动。计算其平均值恰为 300.4 米，所以在后续处理中我们取基准球面半径 $R = 300.4m$ 。

5.1.2 反射面板三角形形状的确定

根据附件 3 中反射面板对应的主索节点编号，得到主索节点间的相邻关系，结合附件 1 中主索节点的位置坐标求出相邻节点间的距离的平均值为 11.3906，标准差为 0.7278，所以我们可以认为反射面板均为近似的边长为 11.3906 的等边三角形。

5.2 坐标系的处理

5.2.1 初始坐标系

主动反射面处于基准态时，其形状为球面，且该球面的球心为坐标原点，主索节点与促动器的位置坐标都基于此导出。然而，材料及附件并未明确指出各坐标轴的指向。对此，我们默认 z 轴经过球心且竖直向上，空间坐标系为右手系。为直观了解原始坐标系的结构，作出基准态时各主索节点分布图如下：

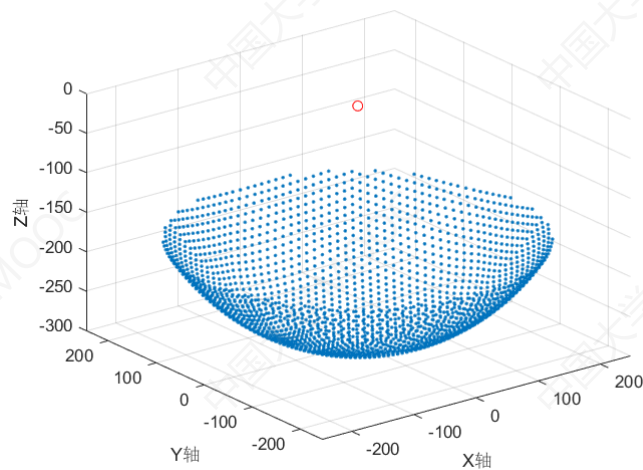


图1 基准态时主索节点位置

从图上看，基准态时各主索节点确为一球面，且该球面在坐标系中位置较为对称：x、y 轴方向的范围约为 $[-250, 250]$ ，z 轴方向范围在 $[-300, -150]$ 之间。为明确 z 轴以外两坐标轴的正方向，又作出底部节点的俯视图如下：

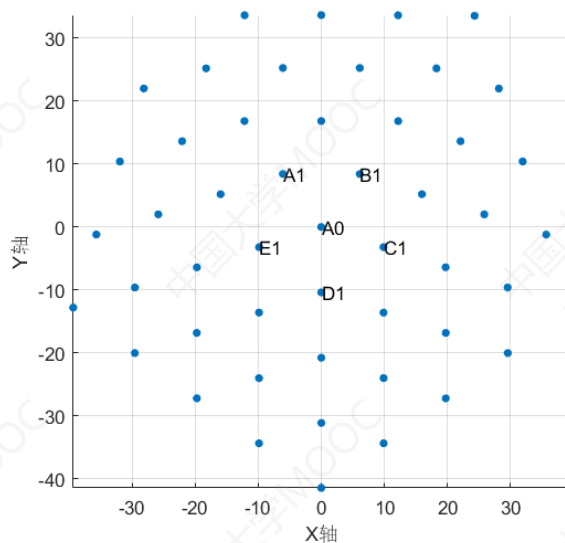


图2 基准态时底部主索节点（俯视）

观察上图可以得到，x 轴的正方向位于节点 B1、C1 之间，y 轴正方向位于节点 A1、B1 之间，且 D1 等一系列节点位于 yoz 平面的负方向上。

5.2.2 焦面与旋转抛物面

在抛物线中，平行其对称轴入射的光线最终都将反射汇集至其焦点。由于旋转抛物面可视为抛物线绕其轴周转而成，该性质保持一致。

FAST 观测天体时，会根据天体的方位调整馈源舱 P 的位置，使其始终位于理想抛物面的焦点处，以接收合适区域的反射信号。馈源舱 P 可移动的范围称为

焦面，它是基准球面的一个同心球面，两者的半径差 $F = 0.466R$ 。因此馈源舱接收不同天体信号时，虽然坐标有所不同，与基准球心的间距却是恒定的。

另外基于旋转抛物面的对称性，当其母线与任一坐标轴平行时，其形式较为简便，形如：

$$x^2 + y^2 = 2pz \quad (1)$$

上式即以 z 轴为母线的旋转抛物面，其中 p 为焦距。

考虑到(1)式的简洁性，当旋转抛物面的母线为不与坐标轴平行的倾斜直线时，可以考虑旋转坐标系，以简化建模与计算。

六、模型的建立和求解

6.1 问题一的求解

当待观测天体 S 方位角 $\alpha = 0^\circ$ ，仰角 $\beta = 90^\circ$ 时，待测天体 S 此时恰好位于 FAST 基准球面正上方时。此时情况较为特殊：天体 S 与球心 C 的连线与 z 轴重合，则馈源舱接收信号的有效区域位于球心正下方，关于 z 轴对称分布。则该区域中对应节点调节为工作抛物面之后，其母线亦与 z 轴重合。

6.1.1 抛物面模型的建立

依据抛物面的特性，当其焦点与顶点位置确定后，其方程便可唯一确定。而由题意可知，对于任意理想抛物面，焦点始终位于馈源舱 P 处。结合天体方位，此时焦点的位置为 $P(0,0,p)$ ，其 z 坐标值为：

$$p = -(R - F) = (0.466 - 1)R = -160.4136m$$

同时我们发现，基准球面底部恰有一节点 $A_0(0,0,-300.4)$ 位于 z 轴上，不妨另记其为 $Q(0,0,q)$ ，作为理想抛物面顶点的研究对象，基准状态时其 z 坐标值 $q_0 = -300.4$ 。由题意可知，基准球面上的主索节点均可进行径向伸缩，其变化范围 $\delta \in [-0.6, 0.6]$ ，故 Q 点坐标亦可表示为 $(0,0,q_0 + \delta)$ 。

焦点 P 与顶点 Q 的间距即为(1)式中焦距 p 的一半，故此时旋转抛物面可以表示为：

$$x^2 + y^2 = 4(p - q)(z - q) \quad (2)$$

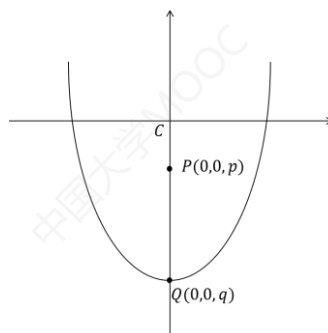


图3 抛物面模型

由于 p 值已经确定，要获得理想抛物面，只需求解出最合理的 q 值即可。

6.1.2 理想抛物面的优化方案

所谓“理想”与否，应当以合适的指标作量化分析。我们认为，理想的抛物面在满足技术条件约束时，各主索结点的径向位移应当尽量小，以降低其损耗等因素。因此，对于不同的顶点径向伸缩量 δ ，将其基准球面上各节点径向伸缩至理想抛物面时，径向伸缩的最大值记为 $\max \Delta r$ 。当该值最小时，可以认为总体的径向位移都相对最小，故目标函数为：

$$\min(\max \Delta r) \quad (3)$$

主索结点调节后，各相邻节点间距的变化幅度不能超过 0.07%：

$$\left| \frac{\Delta d_{ij}}{d_{ij}} \right| \leq 0.07\% \quad (4)$$

其中 d_{ij} 为相邻节点 i 、 j 位于基准球面时的初始间距； Δd_{ij} 表示进行径向伸缩后，节点 i 、 j 之间的间距变化量。假设此时 300m 口径范围内共有 n 个节点，则 $1 \leq i, j \leq n$ ，且 $i \neq j$ 。

在基准状态下，各主索节点存在径向伸缩范围限制：

$$-0.6 \leq \Delta r_i \leq 0.6 \quad (5)$$

其中 Δr_i 为第 i 个节点的径向伸缩量， $1 \leq i \leq n$ 。

同时，工作态下的反射面为口径 300m 的工作抛物面：

$$x_i^2 + y_i^2 \leq 150^2 \quad (6)$$

x_i, y_i 为第 i 个节点的 x 轴与 y 轴坐标；

综上，可建立如下优化模型：

$$\begin{aligned} & \min(\max \Delta r) \\ & s. t. \begin{cases} \left| \frac{\Delta d_{ij}}{d_{ij}} \right| \leq 0.07\% \\ -0.6 \leq \Delta r_i \leq 0.6 \\ x_i^2 + y_i^2 \leq 150^2 \\ 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

上述优化模型中，决策变量众多，直接求解相当困难。故使用贪心算法，逐步进行优化，再获得理想抛物面的方程。具体算法如下：

Step1 求出基准状态下各个节点到 z 轴的距离，筛选出口径 300m 内的节点，作为求解理想抛物面的节点集合；

Step2 选用合适的步长，遍历顶点 Q 的径向伸缩量 δ ，从而改变顶点位置，求出不同情况下各节点在抛物面上的对应坐标；

Step3 计算不同 δ 取值时各主索节点的径向伸缩量，找出符合约束条件(5)的 δ 范围；

Step4 在**Step3**确定的 δ 范围中，计算相邻节点的间距变化幅度，以确定满足约束条件(4)的 δ 取值，从而确定抛物面顶点，导出理想抛物面方程。

6.1.3 理想抛物面的求解

首先按照**Step1**，我们筛选出了 706 个 300m 口径内节点；之后**Step3**涉及到各个节点径向伸缩距离的计算。本问中可对坐标系进行一定简化，使求解过程更简明。对于工作口径内的任一节点，不妨直接研究其与 z 轴所在平面，从而将问题简化为二维。

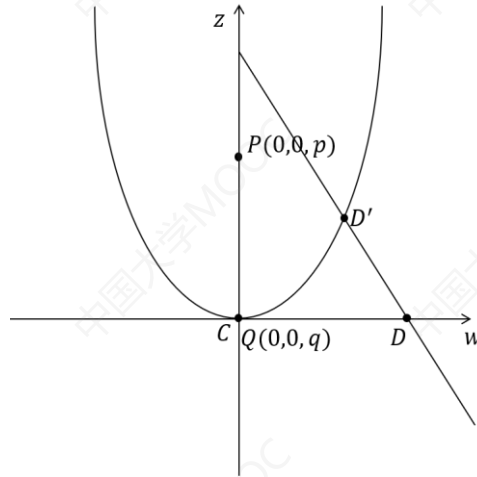


图 4 坐标轴的简化

在该平面内，利用节点基准状态坐标 (x_i, y_i, z_i) 导出该平面内坐标 (w_i, z_i) ，其中：

$$w_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad (8)$$

w_i 表示该节点与 z 轴的间距。

该节点与基准球心的连线方程为：

$$z = \frac{z_i}{w_i} w \quad (9)$$

根据式(2) (8)，该平面上对应的抛物面截线方程为：

$$w^2 = 4(p - q)(z - q) \quad (10)$$

联立(9) (10)，可以求出节点 (w_i, z_i) 在该坐标系下径向移动后对应抛物面上节点的坐标：

$$\begin{cases} w_i' = 2(p - q) \frac{z_i}{w_i} + 2 \sqrt{(p - q)^2 \frac{z_i^2}{w_i^2} - q(p - q)} \\ z_i' = \frac{z_i}{w_i} w_i' \end{cases} \quad (11)$$

按照式(11)可计算出各节点径向伸缩后的坐标，从而求出径向伸缩量 Δr_i 。

利用该简化坐标系与上节中算法，最终我们计算出底部节点 A0 的径向伸缩量 $\delta = -0.4567m$ 时可得到符合模型 (7) 的理想抛物面。此时抛物面顶点 $Q(0,0,-300.8567)$ ，由式 (2) 得到抛物面方程为：

$$x^2 + y^2 = 561.7724(z + 300.8567) \quad (12)$$

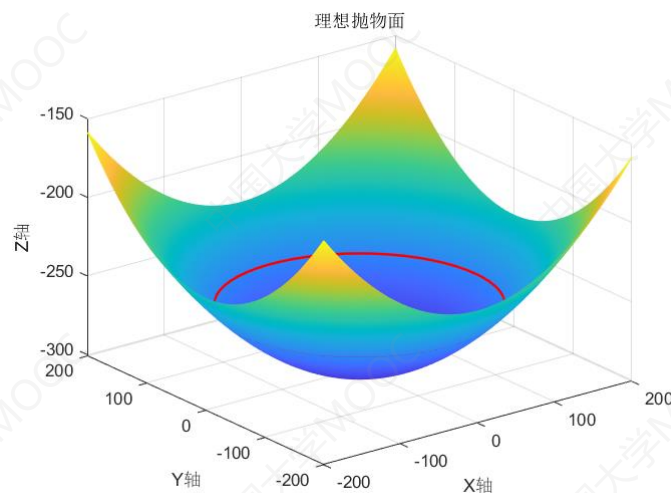


图 5 问题一中理想抛物面

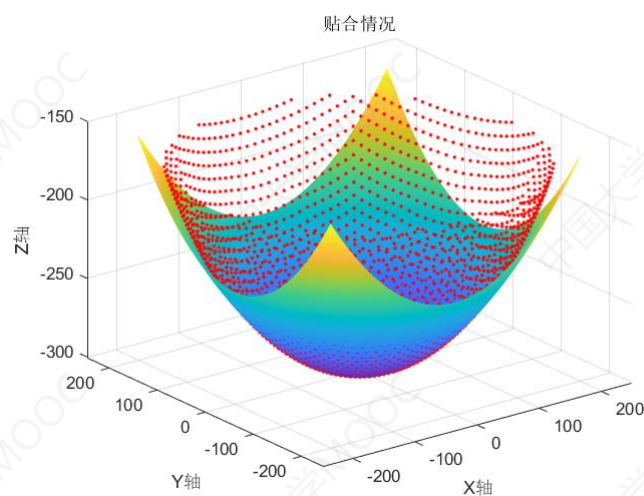


图 6 问题一中理想抛物面贴合情况

6.2 问题二的求解

当天体 S 位于 $\alpha = 36.795^\circ$, $\beta = 78.169^\circ$ 时，其与基准球心 C 的连线不再与 z 轴重合。这意味着工作抛物面的母线也不再具有特殊情况。此时若仍在初始坐标系中进行计算求解，则该抛物面为多值函数，其形式较为复杂。为了获得类似问题一中易于处理的坐标关系，考虑对原坐标系进行变换。

6.2.1 坐标系的旋转

在摄影、工程测量等领域，常常需要进行坐标转换，其中最关键的是旋转矩阵的构造。常用的构造方法有罗德里格矩阵、欧拉角与四元数法。通过了解和比较这三种方法的特点，我们发现在某些旋转角已知的情况下，欧拉角模型是较为合适的^[1]。故本问基于此方法进行坐标系旋转。

所谓欧拉角，是一组可用来确定定点转动刚体位置的独立角参量。若设定逆时针旋转的角度为正，则坐标系绕不同轴旋转对应的旋转矩阵如下：

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 θ 、 γ 、 φ 分别为逆时针绕轴旋转的角度。

有了旋转矩阵，就可以对坐标系进行旋转变换。例如，空间坐标系中有一点 D ，当坐标系绕 x 轴逆时针转过 θ 角度后， D 变为 D' ，两者的关系为：

$$D' = R_x^T \cdot D \quad (13)$$

有了上述旋转变换方法，我们就能调整 FAST 系统中 z 轴的指向，使之与待观测天体 S 、球心 C 的连线重合，从而使工作抛物面再次有易于处理、展现的形式。

鉴于我们已知天体 S 的方位角 α 、仰角 β ，具体的旋转方案不难获得。其过程如下图：图(a)为初始空间坐标系。首先，我们以 z 轴为基准轴，将 x 轴和 y 轴顺时针旋转 $\pi/2 - \alpha$ 度，得到如图(b)所示的坐标系，此时天体 S 已位于 $y'Cz$ 平面内；然后再以旋转后所得到的 x' 轴为基准轴，将 y' 轴和 z 轴顺时针旋转 $\pi/2 - \beta$ 度，得到如图(c)所示的 $C - x'y''z'$ 坐标系，此时 z' 轴已指向天体 S 。

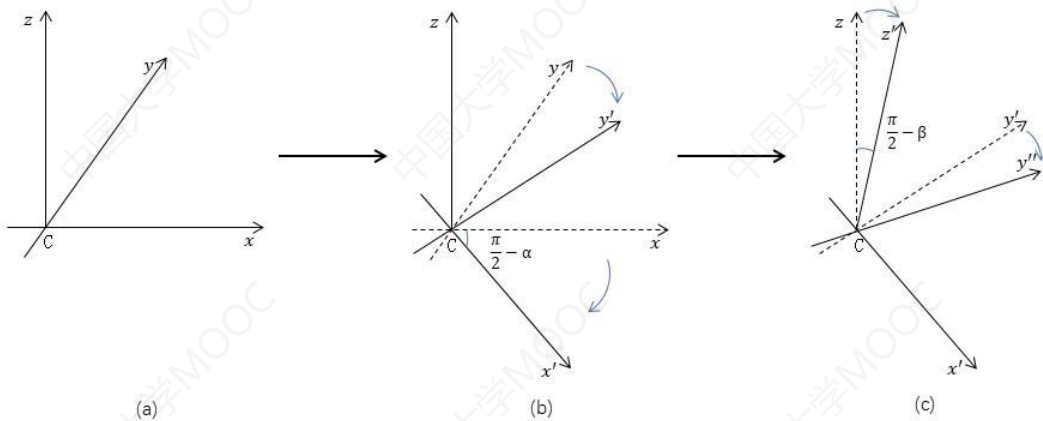


图7 坐标系旋转过程

综上所述，两次旋转对应的旋转矩阵为：

$$R_{x'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $\varphi = 3\pi/2 + \alpha$, $\theta = 3\pi/2 + \beta$ 。

于是在新坐标系中, 各点的坐标为:

$$D' = R_{x'}^T \cdot R_z^T \cdot D \quad (14)$$

6.2.2 理想抛物面的求解

在经过坐标系变换之后, 本问的情形与问题一已无不同。按照式(14)导出新坐标系下基准球面上各节点坐标后, 我们发现节点D27 几乎也位于 z' 轴负半轴上, 其位置也处于新坐标系的“底部”, 故将该点作为新的Q点, 用于研究抛物面顶点变化对理想抛物面的影响。后者的优化模型可沿用模型(7), 求解算法可类比问题一, 仍然采用贪心算法, 具体如下:

Step1 求出基准状态下各个节点到 z' 轴的距离, 筛选出口径300m内的节点, 作为求解理想抛物面的节点集合;

Step2 通过改变顶点Q的径向伸缩量 δ , 以改变顶点位置, 求出不同情况下各节点在抛物面上的对应坐标;

Step3 计算不同 δ 取值时各主索节点的径向伸缩量, 找出符合约束条件(5)的 δ 范围;

Step4 在Step3确定的 δ 范围中, 计算相邻节点的间距变化幅度, 以确定满足约束条件(4)的 δ 取值, 从而确定抛物面顶点, 导出理想抛物面方程;

Step5 如果不存在某一 δ , 使得约束条件(4)(5)同时被满足, 则在满足其中之一的情况下, 通过调整部分 Δr_i , 使得另一条件也能被满足。

利用 MATLAB 编程, 首先根据 300m 口径的要求, 我们筛选出了 692 个范围内节点。当我们通过Step2 – Step4进行顶点径向伸缩量 δ 的求解时, 我们发现此时约束条件(3)(4)确实无法同时满足。当在限定伸缩量内改变 δ 时, 始终存在部分相邻节点, 其间距变化幅度超过 0.07%。

对此, 我们先通过约束条件(4), 求出了满足各节点径向伸缩量不超过 $\pm 0.6m$ 时, δ 的范围为 $[-0.54, -0.06]$;在此范围内, 又计算出当 $\delta = -0.4540m$ 时, 超出 0.07%变化幅度约束的相邻节点个数最少, 为 393 条边、229 个点。

表2 各节点径向伸缩量与超限边数关系

δ/m	-0.6	-0.599	...	-0.456	-0.455	-0.454	-0.453
超限边数	732	731	...	399	395	393	399

这是在基准球面上的节点完全按照理想抛物面进行径向伸缩时, 所得的超出

约束条件最少的结果。此时理想抛物面的顶点 Q 为：

表 3 顶点 Q 的坐标

Q 点坐标	x/m	y/m	z/m
旋转后坐标系	0.0000698	0.0007598	-300.8512
初始坐标系	-49.393	-36.944	-294.460

利用新坐标系中 P、Q 两点的坐标，按照 (2) 式得出此时的理想抛物面为：

$$x^2 + y^2 = 561.7504(z + 300.8512) \quad (15)$$

作出其图像如图：

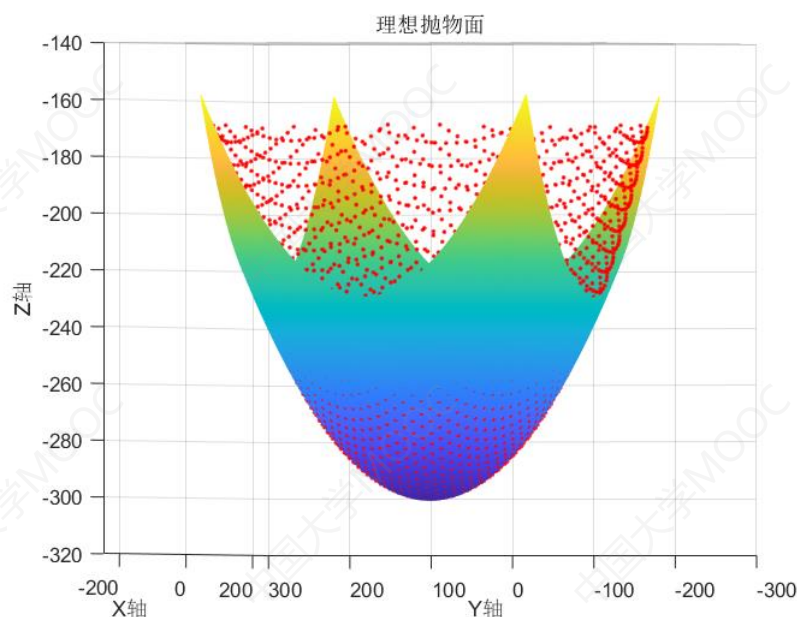


图 8 问题二理想抛物面

6.2.3 径向伸缩量的修正

在上一节中，我们发现节点径向伸缩量不加以修正时，无法完全满足优化模型。在部分最优的情况下，我们导出了理想抛物面。这说明，可能在许多情况下，完全贴合理想抛物面的径向伸缩方式并不符合技术条件约束，因此才有理想抛物面与工作抛物面的区别。

为了对超限节点进行优化，在新坐标系下，作出这部分点的分布图如图所示：

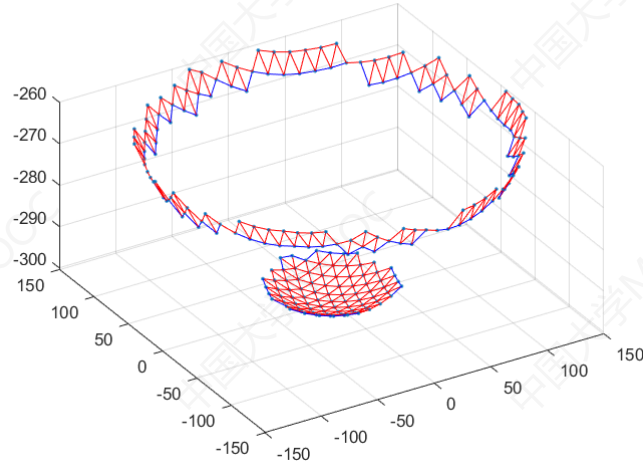


图9 超限节点分布

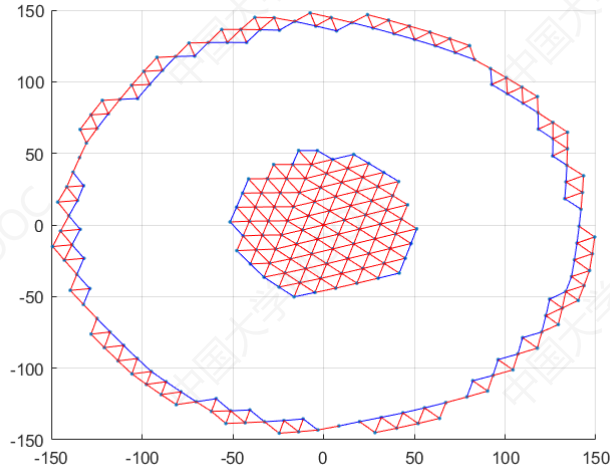


图10 超限节点分布（俯视）

观察上图我们不难发现，间距变化幅度超限的节点主要分布在两处：抛物面底部与抛物面最上侧一周。图中红线表示两节点间距变化幅度 $>0.07\%$ 。为使这部分节点不超过变化幅度约束，我们不得不对其径向伸缩量进行修正。

从图8中 $z < -260$ 部分的曲线可以大致看出，底部和上侧一周的倾斜较明显，说明理想抛物面上这两处径向侧伸缩距离偏大，为使其不超限，应当减小这两处的径向伸缩量。

记各节点径向偏离理想抛物面的距离为 Δd_i ，为使工作抛物面与理想抛物面尽量贴合， $\sum_{i=1}^n \Delta d_i^2$ 应当尽量小。由此，优化模型(7)可改进为：

$$\min[(\max \Delta r) + \sum_{i=1}^n \Delta d_i^2]$$

$$s. t. \begin{cases} \left| \frac{\Delta d_{ij}}{d_{ij}} \right| \leq 0.07\% \\ -0.6 \leq \Delta r_i \leq 0.6 \\ x_i^2 + y_i^2 \leq 150^2 \\ 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \end{cases} \quad (15)$$

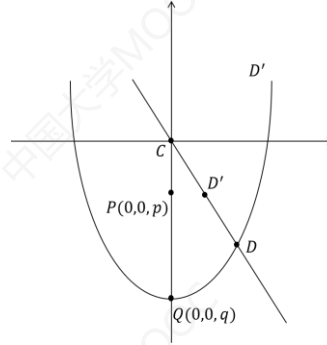


图 11 节点修正计算示意图

如上图所示，设待修正节点 D （位于理想抛物面上）坐标为 (a, b, c) ，若设其向球心修正 Δd 后变为 $D'(x_0, y_0, z_0)$ 。 D' 在直线 CD 上，则：

$$\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} \quad (16)$$

D 、 D' 之间距离为 Δd ，则：

$$\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2} = \Delta d \quad (17)$$

联立(16)(17)，可求得：

$$z_0 = c \left(1 \pm \frac{\Delta d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \quad (18)$$

由于 $c < 0$ ，且 D' 在 D 上方， z_0 应当取负根。代入(16)求得：

$$\begin{cases} z_0 = c \left(1 - \frac{\Delta d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \\ x_0 = a \left(1 - \frac{\Delta d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \\ y_0 = b \left(1 - \frac{\Delta d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \end{cases} \quad (19)$$

利用(19)的结果，确定了各节点径向偏离理想抛物面的距离 Δd_i 的值，就能求出修正后的坐标，并验证是否满足 0.07% 的变化幅度限制。其具体计算流程如下：

Step1 根据图 9、10，将待修正节点分为上下两部分，分别提取其坐标；

Step2 对两部分节点，分别设定不同的径向修正值 Δd_1 、 Δd_2 ；选取合适的步长，从 0 开始向上循环遍历，直到分别找出能使各节点满足变化幅度限制的 Δd_1 、 Δd_2 最小值。

Step3 若满足变化幅度限制，对于原本超限的节点，用修正后的坐标代替理想抛物面上的坐标，并在原伸缩量中加入修正值；

Step4 计算修正后的坐标与理想坐标的差值，判断是否足够贴合理想抛物面，并将最终修正汇总结果存入“result.xlsx”文件中。

利用 MATLAB 编程，按照上述算法对图 9 中分为两层的超限节点进行修正值计算。结果显示：对于下层 88 个节点，其径向修正距离为 0.2361m；对于下层 141 个节点，其径向修正距离为 0.2520m；

根据式(14)，在原坐标系中节点为：

$$D = (R_z^T)^{-1} \cdot (R_{x'}^T)^{-1} \cdot D' \quad (15)$$

根据上式，可计算出所有节点在原坐标系中的坐标数据，例如 B1 节点的坐标为(6.1076, 8.4067, -300.2089)，其余详见“result.xlsx”文件。

作出原坐标系中各节点修正后的位置图如下：

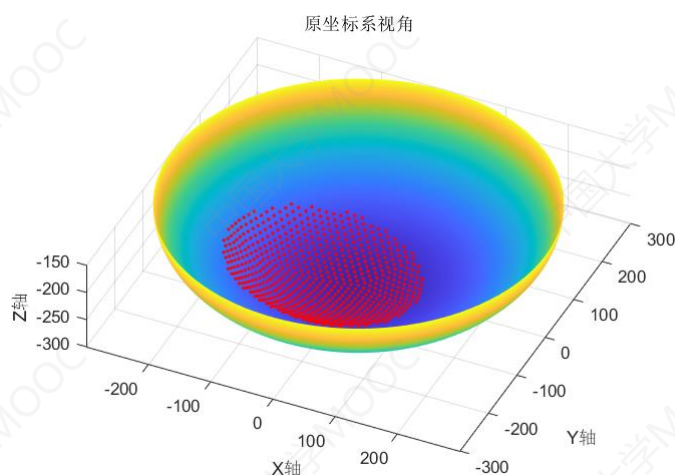


图 12 原坐标系视角

6.3 问题三

6.3.1 接收比模型的建立

要计算馈源舱的信号接收比，我们考虑先针对单独的一个三角反射面板，计算其成功被馈源舱有效区域接收的反射信号量，然后再汇总所有的三角反射面板计算总体信号接收比。

首先，需要确定单独一个三角反射面板能够接收到的信号量。由于待测天体 S 与地球间的距离足够遥远，FAST 接收到待测天体发出的电磁波信号时，可以将电磁波信号看作是一组面积密度为定值 σ 的与 z 轴相互平行的向量。三角反射面板能够接收到的信号量取决于其有效接收面积大小，即三角反射面板在平面 xCy 方向上的投影面积大小，如图：

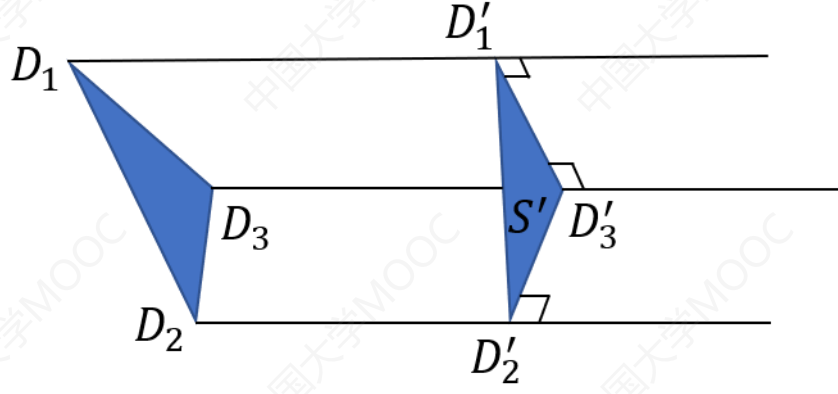


图 13 信号投影图

记三角反射面板在平面 xCy 方向上的投影面积大小为 S' ，则三角反射面板接收到的信号量为：

$$\Delta m = \sigma S' \quad (16)$$

其次需要考虑的是经三角反射面板反射后的信号有多少会被馈源舱有效区域接收。为方便考虑，我们将反射面板进行离散化处理，为使离散点能够均匀分布，我们采取做等间距平行线的方式取各平行线的交点作为离散点，如图：

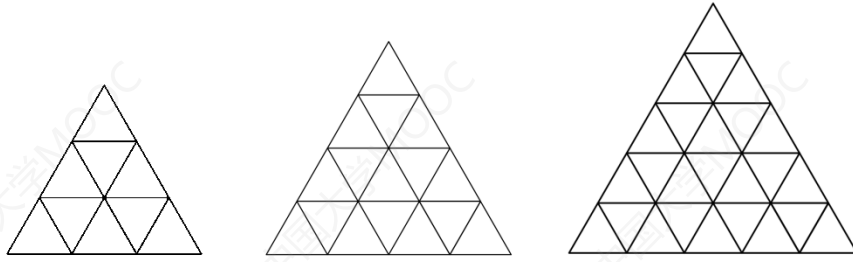


图 14 反射面板离散化示意图

对于任意反射面板，其三个主索节点 D_i 、 D_j 、 D_k 的坐标均已知，则根据位置关系可以求得其他平行线交点的坐标。对于离散成 N 个点的三角反射面板，其每一离散点接收到的信号量为：

$$\Delta m = \frac{\sigma S'}{N} \quad (17)$$

将离散点作为电磁波信号的入射点，结合三角反射面板的法向量，可计算出反射信号在馈源舱所处平面交点的位置，进而分析交点到馈源舱的距离即可判断出该反射信号能否被馈源舱有效区域接收。

统计出能被馈源舱有效区域接收的点接收到的信号总量即可得到馈源舱的接收比为：

$$\rho = \frac{\sum \Delta m}{\sigma S_0} \quad (18)$$

其中， S_0 为照明区域在 xCy 平面上的投影面积。

6. 3. 2 接收比模型的求解

Step1: 确定照明区域 300m 口径内的反射面板。根据问题二中得出的照明区域 300m 口径内 692 个工作节点可以确定出照明区域内的反射面板。判断依据为：当一反射面板的三个主索节点 D_i 、 D_j 、 D_k 都能在这 692 个工作节点构成的集合 D_0 中找到，即 $D_i, D_j, D_k \in D_0$ 时，我们认为该反射面板位于照明区域内。

Step2: 确定照明区域内每一反射面板的法向量。根据反射面板三个主索节点 D_i 、 D_j 、 D_k 的坐标我们可以得到其法向量 $\overrightarrow{n_{ijk}}$ ：

$$\overrightarrow{n_{ijk}} = \overrightarrow{D_i D_j} \times \overrightarrow{D_i D_k} = (m, n, t) \quad (19)$$

Step3: 确定反射信号在焦平面上的交点位置坐标。对照明区域中的任意反射面板 $D_i D_j D_k$ 上的任一离散点 d ，我们做电磁波信号反射图如下：

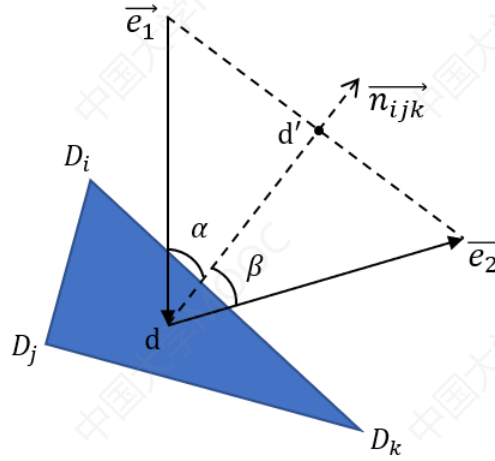


图 15 电磁波信号反射图

其中， $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 分别表示入射信号与出射信号方向的单位向量， α, β 分别表示电磁波信号的入射角和出射角。由光学知识可知，入射角与反射角相等，即 $\alpha = \beta$ 。

因此，不妨设：

$$\begin{cases} d(0,0,0) \\ \overrightarrow{e_1} = (0,0,1) \\ \overrightarrow{e_2} = (a,b,c) \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \end{cases} \quad (20)$$

则两单位向量端点连线与法向量的交点 d' 的坐标可表示为 $d'(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c+1}{2})$ ，又因为点 d' 位于法向量 $\overrightarrow{n_{ijk}} = (m, n, t)$ 上，所以点 d' 满足：

$$\frac{\frac{a}{2}}{m} = \frac{\frac{b}{2}}{n} = \frac{\frac{c+1}{2}}{t} = g \quad (21)$$

联立上式求解可得当点 d 坐标为 $d(x_d, y_d, z_d)$ 时, 出射信号与焦点 P 所在平面 $z = p$ 的交点 d'' 坐标为 $(\frac{a(g-z_d)}{c} + x_d, \frac{b(g-z_d)}{c} + y_d, p)$ 。

进而可以求得交点 d'' 与焦点 $P(0,0,p)$ 间的距离 Δd , 由于馈源舱接收信号的有效区域为直径 1m 的中心圆盘, 所以当 $\Delta d \leq 0.5$ 时, 即可认为入射点为 d 的电磁波信号能被馈源舱接收。

运用 Matlab 软件求解得到, 馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比为 1.34%, 馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内基准反射球面的反射信号之比为 0.60%

七、 灵敏度分析

7.1.1 考虑馈源舱半径不同对接收比的影响

我们注意到, 题目中馈源舱的半径 R_k 仅为 0.5 米, 因此我们考虑馈源舱半径 R_k 的大小对信号接收比的影响, 在 $R_k \in [0.5, 0.8]$ 区间中, 改变不同的馈源舱半径, 拟合曲线如下图所示:

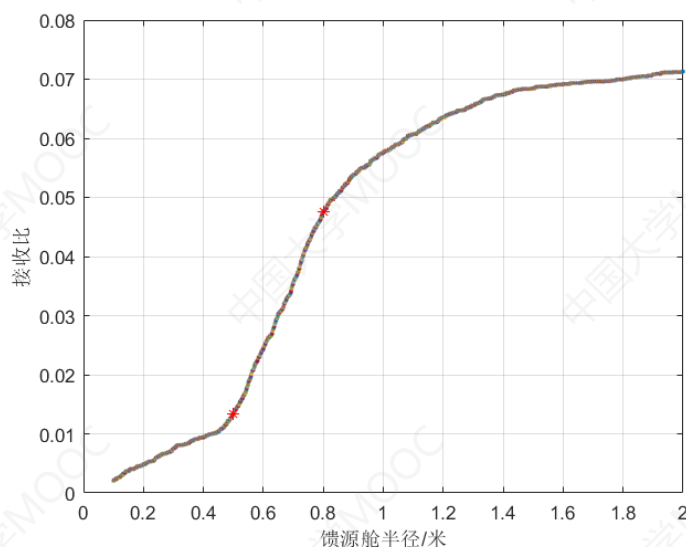


图 16 信号接受比随馈源舱半径变化图

对拟合曲线图进行分析, 我们发现, 在考虑馈源舱半径 R_k 的大小对信号接收比的影响后, 当馈源舱半径 $R_k \in [0.5, 0.8]$ 时, 对信号接收比的影响较明显, 即在此区间内, 馈源舱半径对信号接收比的影响是显著的。故在实际中可以考虑在成本允许的情况下适当增加馈源舱半径, 以此增大信号接收比, 提高观测质量。

7.1.2 考虑焦径比不同对接收比的影响

题目中工作抛物面的焦径比为 0.466, 因此我们考虑焦径比大小对信号接收比的影响, 我们选择在 $[0.4, 0.55]$ 区间内改变焦径比, 观察其对信号接收比的影响, 做出曲线如下图:

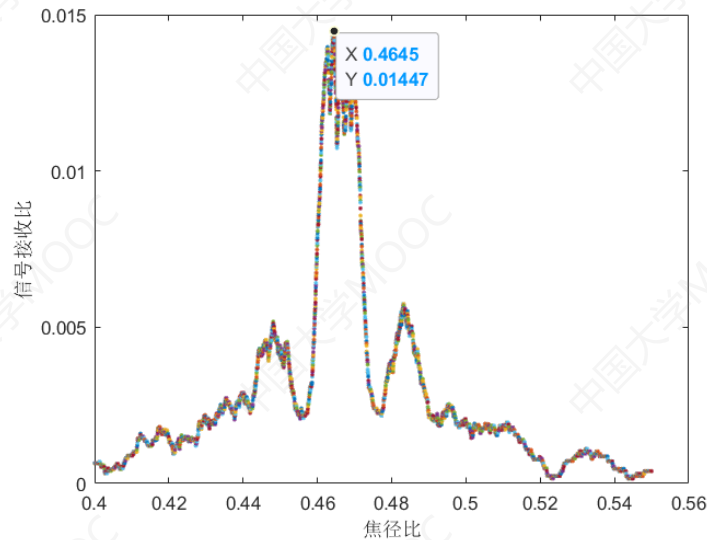


图 17 信号接受比随馈源舱半径变化图

对上图曲线进行分析,可以得出,焦距比在 $[0.4, 0.55]$ 的区间内进行变化时,焦距比的微小改变就可能造成信号接收比的巨大变化,因此可以得出,在这个区间范围内,焦距比对信号接收比的影响是显著的,且可以得知观测天体的最佳焦距比约为 $0.477^{[3]}$ 。

7.1.3 考虑反射面板上离散点个数不同对接收比的影响

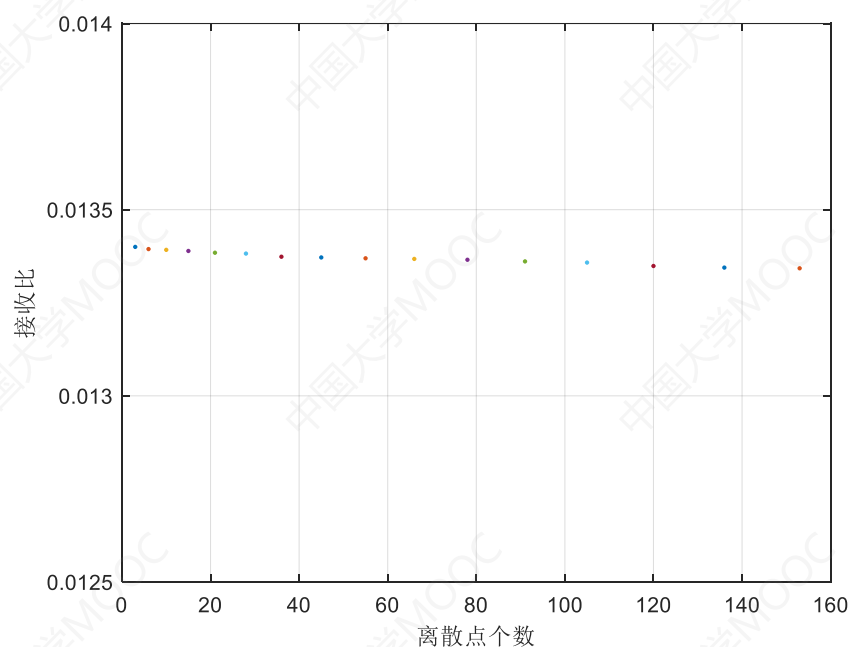


图 18 信号接受比离散点个数变化图

为探究离散点的数量对接收比的影响,我们做出了当 $N=3, 6, 10, 15, 21, \dots$ 时离散点个数和接收比的关系散点图,发现随着离散点个数的增加,接收比几乎不变,但是略有变小的趋势。经过分析,考虑是由于当离散点增多时,单个离散

点所接收到的信号量变少,而能被馈源舱接收到的离散点反射光线数目变化不大,带来的整体影响即为接收比出现下降趋势。

八、 模型的评价与改进

8.1 模型的评价

模型的**优点**:

本文所建立的主索节点调节优化模型可以较准确地求解出在待观测天体位于不同的位置时理想抛物面的方程,给出了各促动器的调节方案,且制定了优化策略,使得操作易于进行,对实际过程具有一定的指导意义。

模型的**缺点**:

1. 在确定抛物面之前,我们仅在基准球面上取了口径为 $300m$ 的主索节点和反射面板,而并未考虑基准球面变化后上述节点和反射面板是否还在 $300m$ 口径内,可能会造成一些误差;

2. 在问题二给出优化策略时,我们没有具体给出每个节点的调节策略,可能导致调节出的反射面不是最贴近理想抛物面的反射面。

8.2 模型的改进

1. 在调节基准圆面使其贴近理想抛物面时,应判断之前确定的 $300m$ 口径内的主索节点和反射面板在调节后是否仍然在 $300m$ 口径内;

2. 在问题二中调节相关促动器时,可以调整求解算法,找出具体每一个主索节点应该沿径向移动的距离,以此提高拟合优度。

3. 可以利用附件 2 中促动器下 endpoint 坐标和基准态时上端点的坐标判断调节过后的主索节点除了径向上的位移是否还有其他方向上的位移,使模型更加贴合实际情况。

九、 模型的应用与推广

本题主要运用到了规划模型和贪心算法进行优化,贪心算法在背包问题、活动安排问题以及各类优化问题中都有着广泛的应用,具有较强的推广意义。

参考文献:

- [1] 宋世泽, 郑勇, 王鼎蔚. 三种坐标转换模型的比较[J]. 全球定位系统, 2016, 41 (06): 110-114.
- [2] 南仁东. 500m 球反射面射电望远镜 FAST[J]. 中国科学 G 辑: 物理学、力学、天文学, 2005 (05): 3-20.
- [3] 钱宏亮, 范峰, 沈世钊, 王启明. FAST 反射面支承结构整体索网分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2005 (06): 750-752.

附录（使用 MATLAB 2018b 求解）：

附录一：画图 1、2 的 MATLAB 代码：

```
clear, clc;
posit=xlsread('附件 1.csv');
posit(:,4)=1:length(posit);
figure(1)
plot3(posit(:,1),posit(:,2),posit(:,3),'r'),hold on
scatter3(0,0,0,'r')
xlabel('X 轴'); ylabel('Y 轴'); zlabel('Z 轴');
grid on;
figure(2)
plot3(posit(1:50,1),posit(1:50,2),posit(1:50,3),'r','MarkerSize',15);
xlabel('X 轴'); ylabel('Y 轴'); zlabel('Z 轴'); grid on,axis equal
text(posit(1,1),posit(1,2),posit(1,3),'A0');
text(posit(2,1),posit(2,2),posit(2,3),'B1');
text(posit(3,1),posit(3,2),posit(3,3),'C1');
text(posit(4,1),posit(4,2),posit(4,3),'D1');
text(posit(5,1),posit(5,2),posit(5,3),'E1');
text(posit(6,1),posit(6,2),posit(6,3),'A1');
```

附录二：画图 5 的 MATLAB 代码

```
[X,Y]=meshgrid(-200:200);
Z=(X.^2+Y.^2)/561.7724-300.8567;
mesh(X,Y,Z);
hold on;
A=load('2.txt')
X=A(:,1);
Y=A(:,2);
Z=A(:,3);
plot3(X,Y,Z,'r');
hold on;
xlabel('X 轴'); ylabel('Y 轴'); zlabel('Z 轴');
title('贴合情况');
```

附录三：画图 6 的 MATLAB 代码

```
%% 抛物面
```

```
[X,Y]=meshgrid(-200:200);
```

```
Z=(X.^2+Y.^2)/561.2892-300.7359;
mesh(X,Y,Z);
hold on;
%% 点球面
```

```
A=load('2.txt')
X=A(:,1);
Y=A(:,2);
Z=A(:,3);
plot3(X,Y,Z,'r. ');
hold on;
```

附录四：求解问题一的 MATLAB 代码

```
clear, clc;
posit=xlsread('附件1.csv');
posit(:,4)=1:length(posit);
dist=sqrt(posit(:,1).^2+posit(:,2).^2); %计算各节点到z轴距离
p_use=posit(dist<=150,:);
p_adp=[dist(dist<=150),posit(dist<=150,3:4)]; %计算变换后的坐标
p=(0.466-1)*300.4; q0=-300.4; C=xlsread('相邻节点矩阵.xlsx','B2:CGQ2227');
```

```
for i=1:length(p_use)
    for j=1:length(p_use)
        CC(i,j)=C(p_use(i,4),p_use(j,4));
    end
end
```

```
k=1; dw=0.0001; Ch=[]; U=[];
stats(:,1)=-0.48:dw:-0.45;
%for i=-0.48:dw:-0.45
i=-0.4567;
q=q0+i;
p_q=p-q;
```

```
result(:,1)=2*p_q*p_adp(:,2)./p_adp(:,1)+2*sqrt(p_q^2*(p_adp(:,2)./p_adp(:,1)).^2-p_q*q); %求根
result(:,2)=result(:,1).^2/(4*p_q)+q;
result(1,1)=0; result(1,2)=q;
stats(k,2)=max(pdist(result,p_adp(:,1:2))); %计算移动距离最大值
stats(k,3)=sum(pdist(result,p_adp(:,1:2))<=0.6);
```

```
Zn=(2*p_q-2*sqrt(p_q^2-q*p_q*(p_use(:,1).^2+p_use(:,2).^2)./p_use(:,3).^2))./((p_use(:,1).^2+p_use(:,2).^2)./p_use(:,3).^2);
```

```

XnYnZn=[p_use(:,1)./p_use(:,3).*Zn p_use(:,2)./p_use(:,3).*Zn Zn
p_use(:,4)];k=k+1;
u=0;
for j=2:692
    for l=1:j-1

Chao(j,1)=CC(j,1)*(Q2dist(XnYnZn(j,1),XnYnZn(j,2),XnYnZn(j,3),XnYnZn(
1,1),XnYnZn(1,2),XnYnZn(1,3))-Q2dist(p_use(j,1),p_use(j,2),p_use(j,3)
,p_use(1,1),p_use(1,2),p_use(1,3)))/Q2dist(p_use(j,1),p_use(j,2),p_us
e(j,3),p_use(1,1),p_use(1,2),p_use(1,3));
        if Chao(j,1)>=0.0007||Chao(j,1)<=-0.0007
            Ch=[Ch;j,1];
            u=u+1;
        end
    end
end
U=[U;i u];
%end

```

附录五：求解问题二的 MATLAB 代码

```

clear;clc;
R=300.4;F=0.466*R;
posit=xlsread('附件 1.csv');C=xlsread('相邻节点矩
阵.xlsx','B2:CGQ2227');
xyz=posit';
posit(:,4)=1:length(posit);
alpha=36.795;beta=78.169;%天体方位角和仰角

Rz=[cosd(270+alpha) -sind(270+alpha) 0
    sind(270+alpha) cosd(270+alpha) 0
    0 0 1];
Rx=[1 0 0
    0 cosd(270+beta) -sind(270+beta)
    0 sind(270+beta) cosd(270+beta)];

XYZ=Rx.'*Rz.'*xyz;
D=[];%口径 300m 以内的节点
for i=1:length(XYZ)
    if XYZ(1,i)^2+XYZ(2,i)^2<=(R/2)^2
        D=[D,[XYZ(:,i);i]];
    end
end
%%
D=D';

```

```

for i=1:length(D)
    for j=1:length(D)
        CC(i,j)=C(D(i,4),D(j,4));
    end
end
%%

B(:,1)=sqrt(D(:,1).^2+D(:,2).^2);B(:,2:3)=D(:,3:4);
p=-(R-F);
q0=min(B(:,2));
dw=0.001;
k=1;XnYnZn=[];U=[];Chao=zeros(692);
stats(:,1)=-0.57:dw:-0.09;
%for i=-0.6:dw:0.6
i=-0.4540;
    Ch=[];
    q=q0+i;
    p_q=p-q;

result(:,1)=2*p_q*B(:,2)./B(:,1)+2*sqrt(p_q^2*(B(:,2)./B(:,1)).^2-p_q
*q); %求根
    result(:,2)=result(:,1).^2/(4*p_q)+q;
    weiyi=pdist(result,B(:,1:2));
    stats(k,2)=max(weiyi); %计算移动距离最大值
    stats(k,3)=sum(weiyi<=0.6);

Zn=(2*p_q-2*sqrt(p_q^2-q*p_q*(D(:,1).^2+D(:,2).^2)./D(:,3).^2))./(D(
(:,1).^2+D(:,2).^2)./D(:,3).^2);
    XnYnZn=[D(:,1)./D(:,3).*Zn D(:,2)./D(:,3).*Zn Zn D(:,4)];k=k+1; %
理想抛物面坐标
    u=0;
    for j=2:692
        for l=1:j-1

Chao(j,1)=CC(j,1)*(Q2dist(XnYnZn(j,1),XnYnZn(j,2),XnYnZn(j,3),XnYnZn(
1,1),XnYnZn(1,2),XnYnZn(1,3))-Q2dist(D(j,1),D(j,2),D(j,3),D(1,1),D(1,
2),D(1,3)))/Q2dist(D(j,1),D(j,2),D(j,3),D(1,1),D(1,2),D(1,3));
            if Chao(j,1)>=0.0007||Chao(j,1)<=-0.0007
                Ch=[Ch;j,1];
                u=u+1;
            end
        end
    end
end
U=[U;i u];

```



```

%end

%%
Ch=[Ch(:,1);Ch(:,2)];
ch=sort(Ch);

h=ch(1);sh=[]; %sh 为超出变化幅度约束的节点编号
for i=1:length(ch)
    if h~=ch(i)
        sh=[sh;h];
        h=ch(i);
    end
end
%plot3(posit(:,1),posit(:,2),posit(:,3),'');hold on
plot3(D(sh(:,1)),D(sh(:,2)),D(sh(:,3)),'');grid on
%text(D(sh(:,1)),D(sh(:,2)),D(sh(:,3)),num2str(D(sh(:,4))));
hold on
for j=1:length(sh)
    for l=1:length(sh)
        if CC(sh(j),sh(l))==1
            if Chao(sh(j),sh(l))>=0.0007

plot3(D([sh(j),sh(l)],1),D([sh(j),sh(l)],2),D([sh(j),sh(l)],3),'r');
                else

plot3(D([sh(j),sh(l)],1),D([sh(j),sh(l)],2),D([sh(j),sh(l)],3),'b');
            end
        end
    end
end

%% 底部升量求解
dr1=0.2361;
p_in=xlsread('inner.xlsx');
p_over1=[];
for i=1:length(p_in)
    p_over1=[p_over1;XnYnZn(XnYnZn(:,4)==p_in(i),:)];
end
p_adped1(:,1)=p_over1(:,1).*(1-dr1./sqrt(p_over1(:,1).^2+p_over1(:,2).^2+p_over1(:,3).^2));
p_adped1(:,2)=p_over1(:,2).*(1-dr1./sqrt(p_over1(:,1).^2+p_over1(:,2).^2+p_over1(:,3).^2));
p_adped1(:,3)=p_over1(:,3).*(1-dr1./sqrt(p_over1(:,1).^2+p_over1(:,2).^2+p_over1(:,3).^2));

```

```

.^2+p_over1(:,3).^2));
p_adped1(:,4)=p_in;

for i=1:length(p_in)
    for j=1:length(p_in)
        near_in(i,j)=C(p_in(i),p_in(j));
    end
end

u=0;Ch2=[];
D2=XYZ(:,p_in).';
for j=1:length(p_in)
    for l=1:length(p_in)

Chao2(j,l)=near_in(j,l)*(Q2dist(p_adped1(j,1),p_adped1(j,2),p_adped1(j,3),p_adped1(1,1),p_adped1(1,2),p_adped1(1,3))-Q2dist(D2(j,1),D2(j,2),D2(j,3),D2(1,1),D2(1,2),D2(1,3)))/Q2dist(D2(j,1),D2(j,2),D2(j,3),D2(1,1),D2(1,2),D2(1,3));
        if Chao2(j,l)>=0.0007 || Chao2(j,l)<=-0.0007
            Ch2=[Ch2;j,l];
            u=u+1;
        end
    end
end

%% 顶部升量求解
dr2=0.2520;
p_out=D(sh,4);
for i=1:length(p_in)
    p_out(p_out==p_in(i))=[];
end
p_over2=[];
for i=1:length(p_out)
    p_over2=[p_over2;XnYnZn(XnYnZn(:,4)==p_out(i),:)];
end
p_adped2(:,1)=p_over2(:,1).*(1-dr2./sqrt(p_over2(:,1).^2+p_over2(:,2).^2+p_over2(:,3).^2));
p_adped2(:,2)=p_over2(:,2).*(1-dr2./sqrt(p_over2(:,1).^2+p_over2(:,2).^2+p_over2(:,3).^2));
p_adped2(:,3)=p_over2(:,3).*(1-dr2./sqrt(p_over2(:,1).^2+p_over2(:,2).^2+p_over2(:,3).^2));
p_adped2(:,4)=p_out;

for i=1:length(p_out)

```

```

        for j=1:length(p_out)
            near_out(i,j)=C(p_out(i),p_out(j));
        end
    end

    u=0;Ch3=[];
    D3=XYZ(:,p_out).';
    for j=1:length(p_out)
        for l=1:length(p_out)

            Chao3(j,l)=near_out(j,l)*(Q2dist(p_adped2(j,1),p_adped2(j,2),p_adped2(j,3),p_adped2(1,1),p_adped2(1,2),p_adped2(1,3))-Q2dist(D3(j,1),D3(j,2),D3(j,3),D3(1,1),D3(1,2),D3(1,3)))/Q2dist(D3(j,1),D3(j,2),D3(j,3),D3(1,1),D3(1,2),D3(1,3));
            if Chao3(j,l)>=0.0007 || Chao3(j,l)<=-0.0007
                Ch3=[Ch3;j,l];
                u=u+1;
            end
        end
    end

    %% 调整后坐标汇总与绘图
    p_final=XnYnZn;
    for i=1:length(p_in)
        p_final(p_final(:,4)==p_in(i),:)=p_adped1(i,:);
    end
    for i=1:length(p_out)
        p_final(p_final(:,4)==p_out(i),:)=p_adped2(i,:);
    end
    p_pre=(Rz.').^(-1)*(Rx.').^(-1)*p_final(:,1:3).'; %调整后坐标
    figure(2)
    scatter3(p_pre(1,:),p_pre(2,:),p_pre(3,:), 'r. '), hold on;

    [fia,theta]=meshgrid([linspace(0,pi,100),pi]);
    x=300*sin(theta).*cos(fia);
    z=-150*sin(theta).*sin(fia)-150;
    y=300*cos(theta);
    surf(x,y,z)
    axis equal
    shading interp
    xlabel('X 轴'); ylabel('Y 轴'); zlabel('Z 轴');
    title('原坐标系视角');

```

```

%% 理想抛物面作图

```

```

figure(3)
scatter3(XnYnZn(:,1), XnYnZn(:,2), XnYnZn(:,3), 'r. '), hold on;
[fia, theta]=meshgrid([linspace(0, pi, 100), pi]);
x=300*sin(theta).*cos(fia);
z=-150*sin(theta).*sin(fia)-150;
y=300*cos(theta);
surf(x, y, z)
axis equal
shading interp
xlabel('X 轴'); ylabel('Y 轴'); zlabel('Z 轴');
title('原坐标系视角');

%% 计算径向伸缩量
dist0=sqrt(sum(D(:,1:3).^2,2));
dist1=sqrt(sum(p_pre.^2));
delta=dist0-dist1.';
judge=sum(abs(delta)>0.6) %判断超过 0.6 的节点个数
top=(Rz.').^(-1)*(Rx.').^(-1)*XnYnZn(132,1:3).'; %理想抛物面原系顶点

```

附录六：求解问题三的 MATLAB 代码

```

clear;clc;
R=300.4;
C=xlsread('相邻节点矩阵.xlsx','B2:CGQ2227');
delta=xlsread('反射面板顶点编号.xlsx');
D=xlsread('相关结果.xlsx',2);

san=[];%300m 内反射面板组数
for i=1:length(delta)
    if
sum(delta(i,1)==D(:,4))*sum(delta(i,2)==D(:,4))*sum(delta(i,3)==D(:,4))~=0
        san=[san;delta(i,:)];
    end
end

sanp=[];%300m 内反射面板三节点坐标
for i=1:length(san)
    sanp=[sanp;D(find(san(i,1)==D(:,4)),1:3)
D(find(san(i,2)==D(:,4)),1:3) D(find(san(i,3)==D(:,4)),1:3)];
end

fa=[];%反射面板法向量矩阵 fa
L=[sanp(:,1:3)-sanp(:,4:6) sanp(:,1:3)-sanp(:,7:9)];

```

```

for i=1:length(san)

fa=[fa;L(i,2).*L(i,6)-L(i,3).*L(i,5),L(i,3).*L(i,4)-L(i,1).*L(i,6),L(
i,1).*L(i,5)-L(i,2).*L(i,4)];
end

%反射面板三角形投影面积 S
bian=[sqrt(sum((sanp(:,1:2)-sanp(:,4:5)).^2,2))
sqrt(sum((sanp(:,1:2)-sanp(:,7:8)).^2,2))
sqrt(sum((sanp(:,7:8)-sanp(:,4:5)).^2,2))];
bz=sum(bian,2)/2;%半周长
S=sqrt(bz.*(bz-bian(:,1)).*(bz-bian(:,2)).*(bz-bian(:,3)));
%%
%for j=0.3:0.00001:0.7
F=0.466*R;
p=F-R;
SS=[];
for i=1:length(sanp)
sb=[sanp(i,1:3);sanp(i,4:6);sanp(i,7:9);

1/3*sanp(i,1)+2/3*sanp(i,4),1/3*sanp(i,2)+2/3*sanp(i,5),1/3*sanp(i,3)
+2/3*sanp(i,6);

1/3*sanp(i,1)+2/3*sanp(i,7),1/3*sanp(i,2)+2/3*sanp(i,8),1/3*sanp(i,3)
+2/3*sanp(i,9);

1/3*sanp(i,4)+2/3*sanp(i,7),1/3*sanp(i,5)+2/3*sanp(i,8),1/3*sanp(i,6)
+2/3*sanp(i,9);

1/3*sanp(i,7)+2/3*sanp(i,4),1/3*sanp(i,8)+2/3*sanp(i,5),1/3*sanp(i,9)
+2/3*sanp(i,6);

1/3*sanp(i,7)+2/3*sanp(i,1),1/3*sanp(i,8)+2/3*sanp(i,2),1/3*sanp(i,9)
+2/3*sanp(i,3);

1/3*sanp(i,4)+2/3*sanp(i,1),1/3*sanp(i,5)+2/3*sanp(i,2),1/3*sanp(i,6)
+2/3*sanp(i,3);
(sanp(i,1:3)+sanp(i,4:6)+sanp(i,7:9))/3;
];

t=2*fa(i,3)/sum(fa(i,:).^2,2);
a=fa(i,1)*t;b=fa(i,2)*t;c=fa(i,3)*t-1;

x=sb(:,1)+(p-sb(:,3)).*a./c;

```

```

y=sb(:,2)+(p-sb(:,3)).*b./c;

side=[sqrt((x(1)-x(2))^2+(y(1)-y(2))^2)
sqrt((x(1)-x(3))^2+(y(1)-y(3))^2) sqrt((x(3)-x(2))^2+(y(3)-y(2))^2)] ;
half=sum(side,2)/2;%半周长
SS=[SS;sqrt(half*(half-side(1))*(half-side(2))*(half-side(3)))];

r=sqrt(x.^2+y.^2);
signal(i)=sum(r<=0.5);
end

%sum(signal)

kjsb=0;
for i=1:length(sanp)
    if signal(i)==1
        kjsb=kjsb+signal(i)*S(i)/sum(S)*(0.5^2*pi)/SS(i)*7;
    end
end
% plot(j,kjsb,'.');hold on
%end

```

附录七：灵敏度分析一的 MATLAB 代码

```

clear;clc;
C=xlsread('相邻节点矩阵.xlsx','B2:CGQ2227');
delta=xlsread('反射面板顶点编号.xlsx');
D=xlsread('相关结果.xlsx',2);
san=[];%300m内反射面板组数
for i=1:length(delta)
    if
        sum(delta(i,1)==D(:,4))*sum(delta(i,2)==D(:,4))*sum(delta(i,3)==D(:,4))
    )~=0
        san=[san;delta(i,:)];
    end
end
sanp=[];%300m内反射面板三节点坐标
for i=1:length(san)
    sanp=[sanp;D(find(san(i,1)==D(:,4)),1:3) D(find(san(i,2)==D(:,4)),1:3)
D(find(san(i,3)==D(:,4)),1:3)];
end
fa=[];%反射面板法向量矩阵 fa
L=[sanp(:,1:3)-sanp(:,4:6) sanp(:,1:3)-sanp(:,7:9)];
for i=1:length(san)

```

```

fa=[fa;L(i,2).*L(i,6)-L(i,3).*L(i,5),L(i,3).*L(i,4)-L(i,1).*L(i,6),L(
i,1).*L(i,5)-L(i,2).*L(i,4)];
end
%反射面板三角形投影面积 S
bian=[sqrt(sum((sanp(:,1:2)-sanp(:,4:5)).^2,2))
sqrt(sum((sanp(:,1:2)-sanp(:,7:8)).^2,2))
sqrt(sum((sanp(:,7:8)-sanp(:,4:5)).^2,2))];
bz=sum(bian,2)/2;%半周长
S=sqrt(bz.*(bz-bian(:,1)).*(bz-bian(:,2)).*(bz-bian(:,3)));
for j=0.1:0.001:2
p=-160.4136;SS=[];
for i=1:length(sanp)
sb=[sanp(i,1:3);sanp(i,4:6);sanp(i,7:9);
1/3*sanp(i,1)+2/3*sanp(i,4),1/3*sanp(i,2)+2/3*sanp(i,5),1/3*sanp(i,3)
+2/3*sanp(i,6);
1/3*sanp(i,1)+2/3*sanp(i,7),1/3*sanp(i,2)+2/3*sanp(i,8),1/3*sanp(i,3)
+2/3*sanp(i,9);
1/3*sanp(i,4)+2/3*sanp(i,7),1/3*sanp(i,5)+2/3*sanp(i,8),1/3*sanp(i,6)
+2/3*sanp(i,9);
1/3*sanp(i,7)+2/3*sanp(i,4),1/3*sanp(i,8)+2/3*sanp(i,5),1/3*sanp(i,9)
+2/3*sanp(i,6);
1/3*sanp(i,7)+2/3*sanp(i,1),1/3*sanp(i,8)+2/3*sanp(i,2),1/3*sanp(i,9)
+2/3*sanp(i,3);
1/3*sanp(i,4)+2/3*sanp(i,1),1/3*sanp(i,5)+2/3*sanp(i,2),1/3*sanp(i,6)
+2/3*sanp(i,3);
(sanp(i,1:3)+sanp(i,4:6)+sanp(i,7:9))/3;
];
t=2*fa(i,3)/sum(fa(i,:).^2,2);
a=fa(i,1)*t;b=fa(i,2)*t;c=fa(i,3)*t-1;
x=sb(:,1)+(p-sb(:,3)).*a./c;
y=sb(:,2)+(p-sb(:,3)).*b./c;
side=[sqrt((x(1)-x(2))^2+(y(1)-y(2))^2)
sqrt((x(1)-x(3))^2+(y(1)-y(3))^2) sqrt((x(3)-x(2))^2+(y(3)-y(2))^2)];
half=sum(side,2)/2;%半周长
SS=[SS;sqrt(half*(half-side(1))*(half-side(2))*(half-side(3)))];
r=sqrt(x.^2+y.^2);
signal(i)=sum(r<=j);
end
%sum(signal)
kjsb=0;
for i=1:length(sanp)
if signal(i)==1
kjsb=kjsb+signal(i)*S(i)/sum(S)*(0.5^2*pi)/SS(i);
end

```

```

end
kjsb1=7*kjsb;
plot(j,kjsb1,'.');hold on
plot(0.5, 0.01343,'r*');
plot(0.8,0.0476,'r*')
xlabel('馈源舱半径/米')
ylabel('接收比')
end

```

附录八：灵敏度分析二的 MATLAB 代码

```

clear;clc;R=300.4;
C=xlsread('相邻节点矩阵.xlsx','B2:CGQ2227');
delta=xlsread('反射面板顶点编号.xlsx');
D=xlsread('相关结果.xlsx',2);
san=[];%300m 内反射面板组数
for i=1:length(delta)
if
sum(delta(i,1)==D(:,4))*sum(delta(i,2)==D(:,4))*sum(delta(i,3)==D(:,4))~=0
san=[san;delta(i,:)];
end
end
sanp=[];%300m 内反射面板三节点坐标
for i=1:length(san)
sanp=[sanp;D(find(san(i,1)==D(:,4)),1:3) D(find(san(i,2)==D(:,4)),1:3)
D(find(san(i,3)==D(:,4)),1:3)];
end
fa=[];%反射面板法向量矩阵 fa
L=[sanp(:,1:3)-sanp(:,4:6) sanp(:,1:3)-sanp(:,7:9)];
for i=1:length(san)
fa=[fa;L(i,2).*L(i,6)-L(i,3).*L(i,5),L(i,3).*L(i,4)-L(i,1).*L(i,6),L(
i,1).*L(i,5)-L(i,2).*L(i,4)];
end
%反射面板三角形投影面积 S
bian=[sqrt(sum((sanp(:,1:2)-sanp(:,4:5)).^2,2))
sqrt(sum((sanp(:,1:2)-sanp(:,7:8)).^2,2))
sqrt(sum((sanp(:,7:8)-sanp(:,4:5)).^2,2))];
bz=sum(bian,2)/2;%半周长
S=sqrt(bz.*(bz-bian(:,1)).*(bz-bian(:,2)).*(bz-bian(:,3)));
for j=0.4:0.00001:0.55
F=j*R;
p=F-R;
SS=[];

```



```

for i=1:length(sanp)
sb=[sanp(i,1:3);sanp(i,4:6);sanp(i,7:9);

1/3*sanp(i,1)+2/3*sanp(i,4),1/3*sanp(i,2)+2/3*sanp(i,5),1/3*sanp(i,3)
+2/3*sanp(i,6);

1/3*sanp(i,1)+2/3*sanp(i,7),1/3*sanp(i,2)+2/3*sanp(i,8),1/3*sanp(i,3)
+2/3*sanp(i,9);

1/3*sanp(i,4)+2/3*sanp(i,7),1/3*sanp(i,5)+2/3*sanp(i,8),1/3*sanp(i,6)
+2/3*sanp(i,9);

1/3*sanp(i,7)+2/3*sanp(i,4),1/3*sanp(i,8)+2/3*sanp(i,5),1/3*sanp(i,9)
+2/3*sanp(i,6);

1/3*sanp(i,7)+2/3*sanp(i,1),1/3*sanp(i,8)+2/3*sanp(i,2),1/3*sanp(i,9)
+2/3*sanp(i,3);

1/3*sanp(i,4)+2/3*sanp(i,1),1/3*sanp(i,5)+2/3*sanp(i,2),1/3*sanp(i,6)
+2/3*sanp(i,3);
(sanp(i,1:3)+sanp(i,4:6)+sanp(i,7:9))/3;
];

t=2*fa(i,3)/sum(fa(i,:).^2,2);
a=fa(i,1)*t;b=fa(i,2)*t;c=fa(i,3)*t-1;

x=sb(:,1)+(p-sb(:,3)).*a./c;
y=sb(:,2)+(p-sb(:,3)).*b./c;

side=[sqrt((x(1)-x(2))^2+(y(1)-y(2))^2)
sqrt((x(1)-x(3))^2+(y(1)-y(3))^2) sqrt((x(3)-x(2))^2+(y(3)-y(2))^2)];
half=sum(side,2)/2;%半周长
SS=[SS;sqrt(half*(half-side(1))*(half-side(2))*(half-side(3)))];

r=sqrt(x.^2+y.^2);
signal(i)=sum(r<=0.5);
end

%sum(signal)

kjsb=0;
for i=1:length(sanp)
if signal(i)==1
kjsb=kjsb+signal(i)*S(i)/sum(S)*(0.5^2*pi)/SS(i);

```

```
        end
    end
    kjsb1=7*kjsb;
    plot(j,kjsb1,'. ');hold on
    xlabel(' 焦径比')
    ylabel(' 信号接收比')
end
```