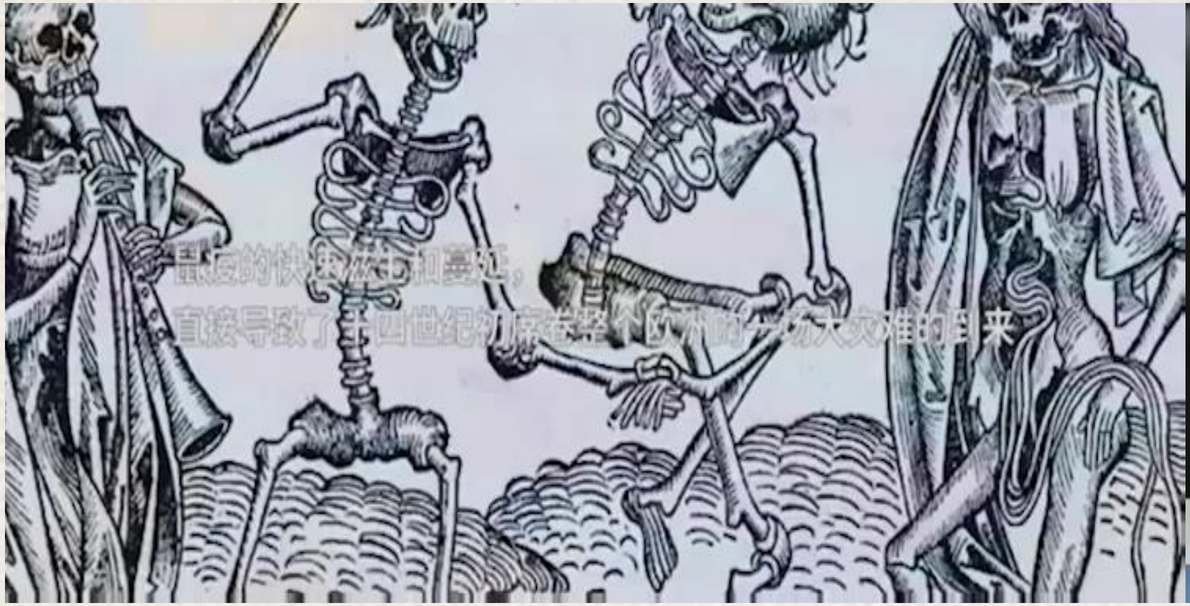
数学模型

传染病模型—SI模型

北京科技大学

传染病



很远：　天花、鼠疫

很近：　艾滋病、埃博拉病毒、禽流感

Daniel Bernoull
1700-1782

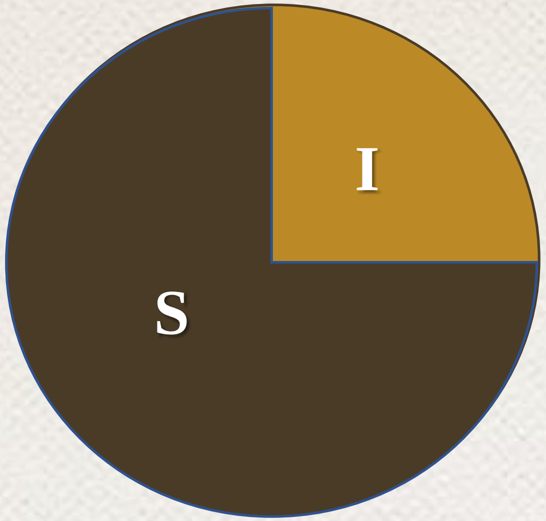
Edward Jenner
1749—1823

屠呦呦
1930-

东晋葛洪《肘后备急方》

青蒿一握，以水二升渍，绞取汁，尽服之。

一、SI传染病模型



易感者： 指未得病者，但是与感染者接触后容易感染

Susceptible

感染者：已经感染病毒的人

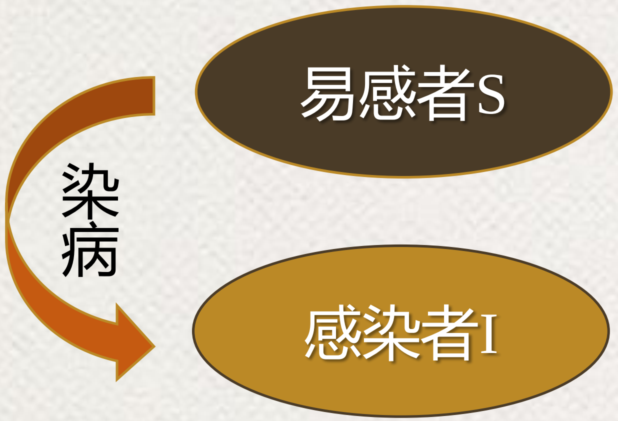
Infective

假设人口总数为N，则$I+S=N$

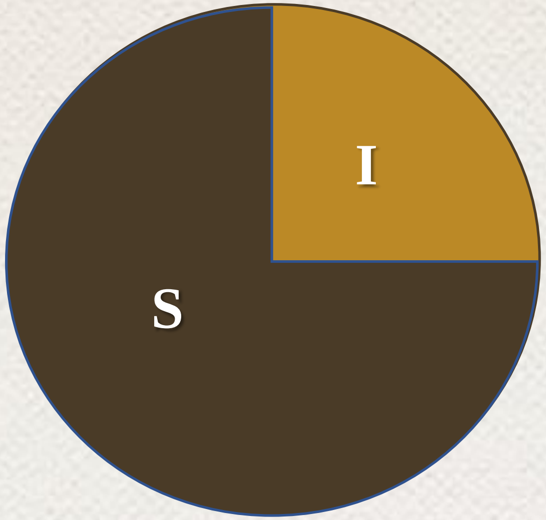
两类个体在人群中混合均匀

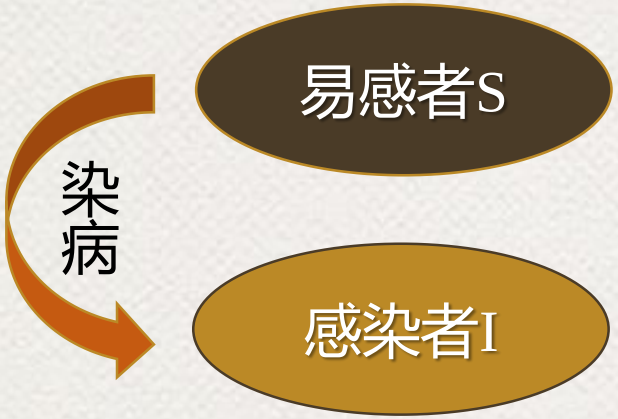
易感者染病的可能性与他接触的感病者的机会成正比

每个病人每天有效的（足以使人致病）平均接触人数是k



一、SI传染病模型





分析：

在 $[t, t+\Delta t]$ 这一段时间中的感染者的变化量为：

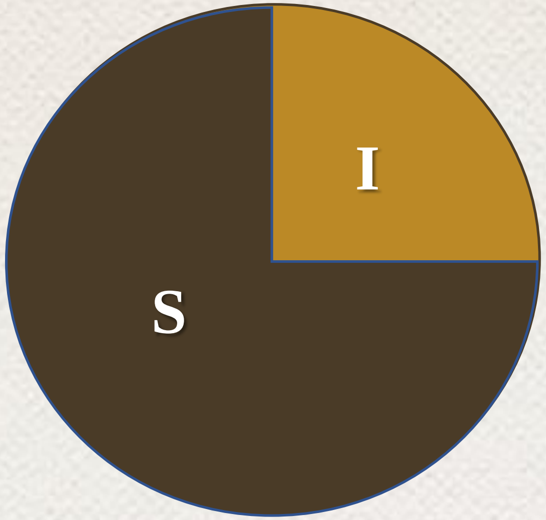
$$I(t+\Delta t) - I(t) = k\frac{S}{N} I\,\Delta t$$

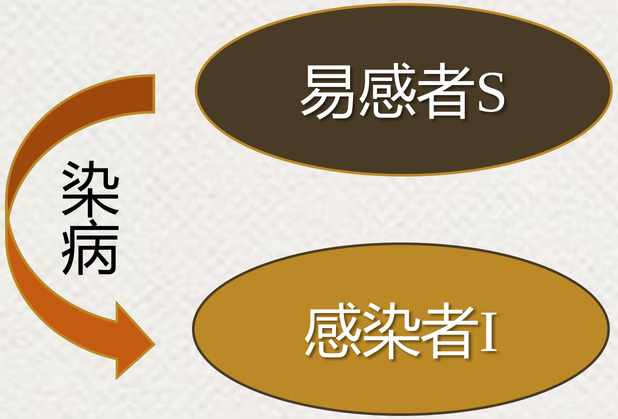
$I(t+\Delta t)$ 按 Taylor公式展开：

$$I(t+\Delta t) - I(t) = \frac{dI}{dt}\Delta t + o(\Delta t)$$

$$\frac{dI}{dt} = k\frac{S}{N} I$$

二、模型无量纲化





$$N\frac{dI}{dt}=kSI \xrightarrow{I+S=N} N\frac{dI}{dt}=k(N-I)I$$

$$I^*=\frac{I}{N}$$

$$N^2\frac{dI^*}{dt}=k(N-NI^*)NI^*$$

$$\frac{dI}{dt}=k(1-I)I$$

$$I(0)=I_0$$

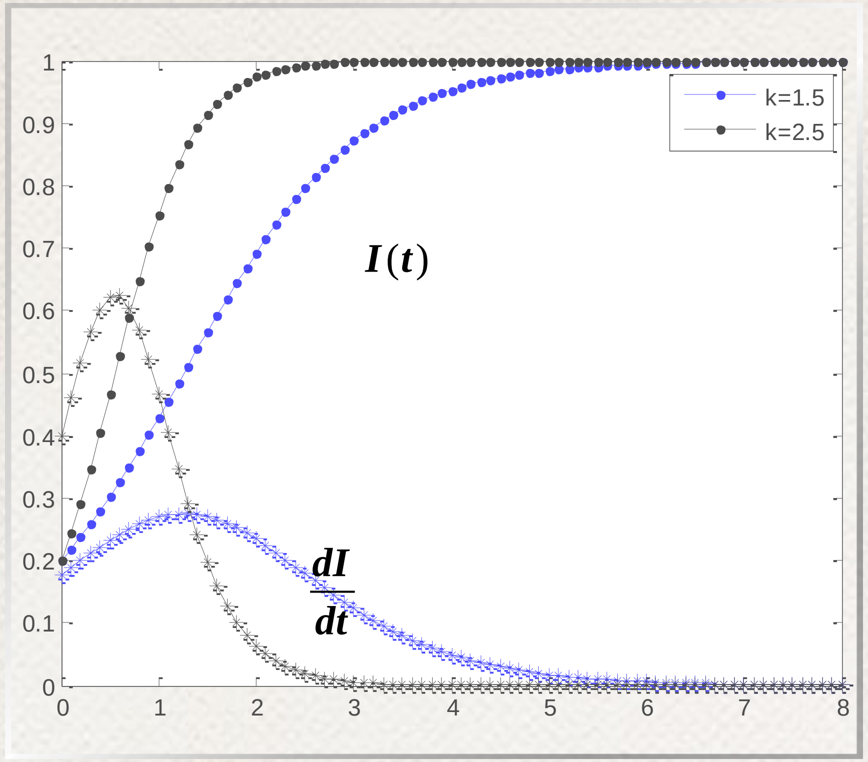
初始条件

三、问题分析

$$\frac{dI}{dt} = k(1-I)I$$

初始条件 $I(0) = I_0$

$$I(t) = \frac{1}{1+(I_0^{-1}-1)e^{-kt}}$$



传染率越小，说明卫生水平越高， 极大值点的最大值向右移动，传染高潮得以推迟。

三、问题分析

$$\frac{dI}{dt} = k(1-I)I$$

初始条件

$$I(0) = I_0$$

$$I(t) = \frac{1}{1+(I_0^{-1}-1)e^{-kt}}$$