О. В. Пак
Д. Ардақұлы

АЛГЕБРА

Учебник для учащихся 7 класса общеобразовательной школы

Содержание

ГЛАВА 4

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

ГЛАВА 5

ПРИБЛИЖЕННОЕ ЧИСЛО И ПРИБЛИЖЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ. АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Дорогие друзья!

Данный учебник началом курса «Алгебра, 7 класс». В рамках учебника 7 класса вы познакомитесь с преобразованиями, изучите свойства линейных и квадратичных функций и основные положения статистики. Все это важно не только потому, что вам предстоит сдавать выпускные и вступительные экзамены. Дело в том, что занятия математикой развивают в человеке качества, которые помогают ему стать по-настоящему успешной личностью в современном мире. Вот только некоторые из них:

- способность к абстрактному мышлению;
- умение логически анализировать какие-бы то ни было условия;
- умение отличать главное от второстепенного, причину от следствия;
- способность лаконично, доступно и аргументированно излагать собственную точку зрения, способность понимать партнера по диалогу;
- изобретательность как способность находить оптимальные решения проблем любого содержания.

Учебник написан в расчете на вдумчивую самостоятельную работу. Почти каждый параграф учебника содержит гораздо больше материала, чем может рассказать учитель за урок. Помимо традиционных примеров, теоретическая часть содержит упражнения. Работа над упражнениями способствует более глубокому усвоению новой темы. Несмотря на то, что к каждому упражнению приведено подробное решение, упражнения необходимо сначала пытаться выполнить самостоятельно. Не стоит расстраиваться в случае неудачи. Предварительные попытки найти решение, даже неудачные, и последующий разбор решения в несколько раз эффективнее пассивного чтения математического текста.

Наборы задач разделены на две аналогичные по содержанию части. Кроме того, в конце каждой второй части приведены задачи на повторение и задачи на развитие логического и критического мышления. Автор надеется, что последние покажутся вам особенно интересными.

Серии на повторение

Серия 1

1. Найти отношение $\frac{x}{y}$ из выражения $\frac{7}{12}y:\frac{7}{50}=50x:4\frac{4}{5}$.

2. Дархан, Дидар и Данияр втроем решили 152 задач. Соотношение количества задач, которые они решили, относятся как 4:3:1. По сколько каждый из них решили задач.

3. Известно , что 5 арбузов весят меньше 27 кг, а 3 арбуза весят больше 14 кг. Найти весь одного арбуза, если весь арбуза целое число.

4. Учитель дал одному ученику 3 ореха, а все остальным по 5. Если бы он всем дал по 4 ореха, то у него осталось бы 15 орехов. Найдите число орехов которое было вначале у учителя.

5. Бак автомобиля вместимостью 40 л заполнили бензином на 80%. Во время поездки израсходовали 25% бензина. Сколько литров бензина осталось после поездки?

6.Теплоход шел 4 ч против течения реки и 3 ч по течению реки. Какой путь прошел теплоход за эти 7 ч, если собственная скорость теплохода 20 км/ч, а скорость течения реки 5 км/ч?

7. На 3 станках с одинаковой производительностью за 3 минуты изготавливаются 18 колец. За сколько минут на таких же 6 станках будут изготовлены 48 кольца?

8. Смешали 4 л 15%-ного раствора соли с 5 л 20%-ного соли к смеси добавли 1 л чистой воды. Какова концентрация полученной смеси?

9.Для нумерации страниц словаря потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц заключал в себе этот словарь?

10. Есть 6 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Используя их, можно составить два трехзначных числа, например, 645 и 321. Ерасыл составил эти числа так, что их разность оказалась самой маленькой из всех возможных. Эта разность равна

Серия 2.

1. Зная, что $\frac{m}{n}=3\frac{3}{4}$, найдите значение выражения $\frac{m+3n}{m}$.

2.Молоко содержит 7% сливок. Сколько нужно взять молока, чтобы получить 21,7 кг сливки.

3. Две трети от двух третьих числа равны двум третьим. Какое это число?

4. На путь от деревни до города велосипедист потратил 4 часа, а ехал со скоростью 12 км/ч. Сколько времени велосипедист потратит на обратный путь, если скорость увеличит на 4 км/ч?

5.Среднее арифметическое двух чисел равно 22,49. Второе число больше первого в 1,6 раза. Чему равно первое число?

6. На скотном дворе гуляли гуси и овцы. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30, а затем он сосчитал количество ног, их оказалось 84. сколько гусей и сколько овец было во дворе?

7. Токарь, делая по 110 деталей в час, изготовил все детали за 5 ч. Если он будет делать по 50 деталей в час, то за сколько часов изготовит все детали?

8. При каких значениях переменной $\boldsymbol{x}$ значения выражения $5\boldsymbol{x}-12$ положительно, изначения выражение $7\boldsymbol{x}-25$ отрицательно.

9. Сколько килограммов олова нужно добавить к куску бронзы массой 4 кг и содержащему 15% олова, чтобы повысить содержание в нем олова до 25% от общей массы?

10.Будет ли сумма чисел 1 + 2 + 3 + ……+ 2005 + 2006 + 2007 делиться на 2007?
Ответ обоснуйте.

Серия 3

1. Найдите сумму корней уравнений:

$5\cdot(4-3\boldsymbol{x})-4\cdot(7-4\boldsymbol{x})=1{,}3$ **и** $-27\boldsymbol{x}+220=-5\boldsymbol{x}$.

2. От ленты длиной 1120 см последовательно отрезали куски длиной 80 см. Сколько было сделано разрезов?

3.Если от числа x вычест 4, затем разделить на 6, затем прибавим 10 то получим половину исходного числа. Найдите исходного числа.

4. Найдите сумму натуральных решений неравенства: $5{,}4\boldsymbol{x}-8{,}5\le 3{,}8+2{,}4\boldsymbol{x}$.

5. Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да». Что ответил третий?

6С двух станций, расстояние между которыми 720 км, одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Скорость первого – 75 км/ч, а второго – на 10 км/ч больше. Какое расстояние будет между поездами через 4 часа?

7. Вдоль дороги через каждые 45 м стоят столбы. Их решили заменить другими, увеличив расстояние между столбами до 60 м. На каком ближайшем расстоянии от первого столба установят новый столб на то же место, где стоял старый?

8. Фотоаппарат стоил 25 тысяч тенге. Его цена сначала повысилась на 20%, а затем понизилась на 20%. Сколько стал стоить фотоаппарат после понижения?

9.Найдите $f(-1)$, если $f(2)=9$ и $f(-3)=-16$.

10. Старые часы отстают на 20 секунд в час. Сколько времени они покажут через сутки после того, как стрелки установили на 12 часов?

Серия 4

1.Найдите сумму корней уравнения: $\dfrac{|\boldsymbol{x}+2|}{-2{,}3}=\dfrac{-5{,}1}{1{,}7}$.

2.Сколько существует двузначных чисел кратных 11, но не кратных 33?

3. На одном складе было в 3 раза больше телевизоров, чем на другом. После того, как с первого склада взяли 20 телевизоров, а на другой привезли 14, телевизоров на обоих складах стало поровну. Сколько телевизоров было на каждом складе первоначально?
4.Разность двух чисел на 17 меньше уменьшаемого и на 9 больше вычитаемого.
Найдите уменьшаемое и вычитаемое.

5. В ящике лежат шары: 5 красных, 7 синих и 1 зелёный. Сколько шаров надо вынуть, чтобы достать два шара одного цвета?

6.Из пункта А в пункт В выехал автобус. Через 2 часа вслед за ним выехал автомобиль. На каком расстоянии от пункта А автомобиль догонит автобус, если скорость автомобиля равна 80 км/ч, а скорость автобуса — 40 км/ч?

7. После вступления в Евразийский союз цены на автомобили снизились на 20%. Через месяц в условиях жесткой конкуренции дилерам автосалонов пришлось еще снизить на 20%. На сколько процентов в итоге снизилась цена на автомобили по сравнению первоначальной ценой.

8. Имеются двое песочных часов: на 3 минуты и на 7 минут. Яйцо варится 11 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

9. Сколько килограммов олова нужно добавить к куску бронзы массой 4 кг и содержащему 15% олова, чтобы повысить содержание в нем олова до 25% от общей массы?

10.Если сумма 2000 положительных целых чисел равна 2001, то их произведение равно

Серия 5

1.Сравните значения выражений:
$M = |-15|-7$, $N = 13-|-12|$, $N = \|17-|-40|+|-19|\|$.

2.Известно что $f(7)=22$, $f(4)=13$ и $f(a)=-5$. Найдите a.

3.9. Имеем дробь в которой, знаменатель больше числителя на 3. Если прибавить числителю 1, а знаменателю 6 то получим $\frac{1}{2}$. Найдите знаменатель исходной дроби.

4. Сумма двух чисел равна 36, и их разность равна 12. Найдите произведение этих чисел .

5.Произведение 2001 положительного целого числа равно 105, а их сумма равна 2021.Чему равно самое большое из этих чисел?

6.В цистерне имеется дизельное топливо. Данное топливо хватало бы трактору на 6 часов, комбайну на 3 часа, эксковатору на 2 часа. На сколько часов хватит данное топливо если бы трактор, комбайн и эксковатор расходовали бы одновременно.

7.Найдите сумму всех возможных двузначных чисел, составленных из цифр 0; 2; 4. Цифры могут повторяться.

8.Девять осликов за 3 дня съедают 27 мешков корма. Сколько корма надо пяти осликам на 5 дней?

9.Группа туристов отправилась в поход. В первый день они прошли 1/3 пути, в второй - 1/3 остатка, в третий - 1/3 нового остатка. В результате им осталось пройти 32 км. Сколько километров был маршрут туристов?

10.Жандос открыл книгу и обнаружил, что сумма номеров левой и правой страниц – 25. Чему равно произведение этих номеров?

Серия 6

1.Первый день путешествия турист прошел 20% всего день. Во второй 75% оставшегося пути. В третьи он прошел 20 км. В какой день турист прошел больше расстояние, и какие дни прошел одинаковое?

2.В автобусе имеются одноместные и двуместные сиденья. Кондуктор заметил, что когда автобусе сидело 13 человек, то 9 сидений были полностью свободными, а когда сидело 10 человек, то свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?

3.Из села на станцию одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Через 2 часа велосипедист опережал пешехода на 12 км. Найти скорость пешехода, если скорость велосипедиста 10 км/ч.

4.В трех гаражах 460 машин. Число машин в первом гараже составляет 75% числа машин во втором гараже, а в третьем гараже в 1,5 раза больше машин, чем в первом. Сколько машин помещается в каждом гараже?

5.Сплав меди и олова массой 10 кг содержит 70% олова. К этому сплаву добавили 8 кг меди. Сколько нужно добавить килограмм олова, чтобы его концентрация стала в 3 раза больше, чем концентрация меди?

6.Сумма четырех последовательных целых чисел равна 2. Найдите эти числа.

7. Сумма двух чисел – 177. При делении большего из них на меньшее в частном получается 3 и в остатке 9. Найдите эти числа.

8. Расстояние между городами A и B равно 450 км. Из A в B вышла грузовая автомашина. Спустя 2 ч, навстречу ей из B вышла легковая автомашина. Скорость грузовой атвомашины 60 км/ч, а скорость легковой в $1\frac{1}{2}$ раза больше. Постройте графики движения обеих автомашин. Через сколько часов после своего выхода легковая автомашина встретит грузовую.?

9. За первый год было построено $\frac{8}{27}$ дороги от аула к автомагистрали, за следующий год построили $\frac{4}{9}$, а за третий год – остальные $5\frac{1}{4}$. Какой длины дорога?

10.Ужасный вирус пожирает память компьютера. За первую секунду он управился с половиной памяти, за вторую секунду – с одной третью оставшейся части, за третью секунду – с четвертью того, что еще сохранилось, за четвертую – с одной пятой остатка. И тут его настиг могучий Антивирус. Какая часть памяти уцелела?

Глава 1

Степень с натуральным и целым показателем

§1 Степень с натуральным показателем

Упражнение 1. «Легенда о создании шахмат»

Существует много версий легенды о создании шахмат. Различаясь в деталях, все они заканчиваются одинаково. Правителю страны настолько понравилась игра, что он позволил изобретателю попросить любую награду. Изобретатель занумеровал клетки доски номерами с 1-го по 64-ый. За первую клетку доски он попросил одно зернышко пшеницы, за вторую – 2 зернышка, за третью – 4 зернышка и т.д., удваивая количество зерен при переходе на каждую следующую клетку. То есть за каждую клетку – в два раза больше зерен, чем за предыдущую. Правитель обиделся, посчитав, что мудрец недооценивает его щедрость. Он вызвал своего казначея и приказал отсыпать этому несчастному мешок пшеницы.

a) *Вычислите количество зерен, причитающихся изобретателю за все клетки первого ряда.*
b) *Вычислите количество зерен, причитающихся изобретателю за 8-ую клетку; за 10-ую клетку; за 16-ую клетку.*
c) *Используя калькулятор, определите количество зерен за 64-ую клетку.*
d) *Считая массу одного зерна пшеницы равной 0,065 грамм, определить массу зерна, причитающегося изобретателю только за последнюю клетку.*

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}			

рис. 1

Нам будет удобнее обсуждать упражнение 1, если мы заново перенумеруем клетки шахматной доски номерами от 0 до 63. Будем также считать, что на каждой клетке лежит то количество зерен, которое причитается изобретателю шахмат за данную клетку. Тогда на клетке под номером 0 лежит 1 зерно, на клетке под номером 1 лежит 2 зерна, на клетке под номером 2 лежит $2 \cdot 2$ зерна, на клетке под номером три – $2 \cdot 2 \cdot 2$ зерна, под номером четыре – $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ зерна, и т.д.. Очевидно, например, что на клетке под номером 32 лежит $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{32\ \text{раза}}$ зернышка. Вычисления на калькуляторе показывают, что $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{32\ \text{раза}} = 4294967296$. Таким образом, для числа зерен, лежащих на 32-ой клетке, у нас есть пока две формы записи: $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{32\ \text{раза}}$ или 4294967296. Первая форма неудобна из-за своей длины и громоздкости.Вторая форма записи никак не отражает тот замечательный факт, что число 4294967296 на самом деле есть произведение тридцати двух двоек. Французский математик, философ, механик, физик и физиолог Рене Декарт с помощью обозначений, которые он рассматривает в своей книге «Геометрия» (1637 год), записал бы это число как 2^{32} («два в степени тридцать два» или «два в тридцать второй степени»). Такая форма для записи произведения нескольких одинаковых чисел используется и в современной математике. Отсюда следует, что на клетке под номером 63 лежит 2^{63} («два в степени 63») зернышка. На клетке под номером 3 лежит $2^3 = 8$ зернышек;

$2^2=4$ зернышка лежит на клетке под номером 2, $2^1=2$ зернышка лежит на клетке под номером 1. Продолжая этот ряд, естественно считать, что на клетке под номером 0 лежит $2^0=1$ зерно (рис. 1).

Аналогично, например, $7^4=7\cdot7\cdot7\cdot7$,

$$10^0=1,$$

$$10^{2014}=\underbrace{10\cdot10\cdot\ldots\cdot10}_{2014\text{ раз}},$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Определение.***Пусть заданы число*** a ***и натуральное число*** n. ***Тогда*** n***-ой степенью числа*** a ***называется произведение*** n ***множителей, каждое из которых равно*** a***:***

$$\boxed{a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}}}$$

Упражнение 2. «Особенные степени».

a) Пользуясь определением, выясните, чему равно значение 0^n для любого натурального числа n.

b) Пользуясь определением, выясните, чему равно значение 1^n для любого натурального числа n.

c) Пользуясь определением, выясните, чему равно значение $(-1)^n$ для малых значений числа n, т.е. для $n=1$, $n=2$, $n=3$ и т.д. Основываясь на наблюдениях, сделайте общий вывод. Чему равно значение $(-1)^m$, если m – год объявления Независимости Республики Казахстан?

Замечание. *Для любого числа* a, *если только* $a\neq0$, *считается, что* $a^0=1$. *Выражение* 0^0 *считается неопределенным, то есть ноль «нельзя» возводить в степень ноль.*

Замечание. *Выражение* a^n *читается как «а в степени эн». Число* a *называется* ***основанием*** *степени* a^n, *число* n *называется* ***показателем*** *степени* a^n. *Так как площадь квадрата со стороной* a *равна* a^2, *то выражение* a^2 *читается также как «а в квадрате»; так как объем куба с ребром длины* a *равен* a^3, *то выражение* a^3 *читается также как «а в кубе».*

Упражнение 3. «Кубики в кубе».

На какое количество кубиков с размерами $1\times1\times1$ *можно разрезать куб с размерами:*

a) $2\times2\times2$;

b) $5\times5\times5$;

c) $m\times m\times m$, *если* m – *натуральное число?*

Упражнение 4. «Наряд для Барби».

Старший брат подарил на день рождения сестрёнке Айсулукуклу Барби и набор одежды для куклы, состоящий из 4-х платьев, 4-х пар туфелек, 4-х шляпок и 4-х сумочек. Сколькими способами Айсулу может составить наряд для своей куклы?

!!!В выражениях типа $5\cdot6^7$ сначала 6 возводится в степень 7, а затем результат умножается на 5, таким образом $5\cdot6^7\neq(5\cdot6)^7$. В общем случае $k\cdot a^n\neq(ka)^n$.!!!

Пример. «Десятичная система счисления».

Каждое натуральное число можно представить в виде суммы степеней числа 10, умноженных на соответствующие **цифры** данного числа. Например,

$385=300+80+5=3\cdot100+8\cdot10+5=3\cdot10^2+8\cdot10^1+5\cdot10^0$,

$2016=2\cdot1000+0\cdot100+1\cdot10+6=2\cdot10^3+0\cdot10^2+1\cdot10^1+6\cdot10^0$.

четырехзначное число $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$.

Упражнение 5. «Перебор конечного числа случаев».

Если от некоторого трехзначного натурального числа отнять число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получится 198. Найдите это число, если сумма его цифр равна 5.

Решение упражнения 2, с).Для четных значений n имеет место равенство $(-1)^n = 1$, для нечетных значений n имеет место равенство $(-1)^n = -1$.

Решение упражнения 3, b).В «нижнем горизонтальном» слое толщины 1 имеется 5 рядов по 5 кубиков в каждом – всего $5\cdot5=25$ кубиков. Весь куб состоит из 5 таких слоев. Следовательно, общее число кубиков равно $5\cdot5\cdot5=5^3=125$.

Решение упражнения 4. Для каждого из 4-х платьев имеется 4 варианта надеть туфельки, всего $4\cdot4$ возможных комбинаций «платье-туфельки». Для каждой из таких комбинаций существует 4 варианта выбрать шляпку. Следовательно, количество возможных комбинаций «платье-туфельки-шляпка» равно $4\cdot4\cdot4$. Примеряя к каждой из таких комбинаций одну из четырех сумочек, получаем всего $4\cdot4\cdot4\cdot4=4^4=256$ нарядов.

Решение упражнения 5.Задачу можно решить так: выписать сначала все трехзначные числа, сумма цифр которых равна 5, и затем проверить оставшееся условие задачи для каждого из них. Однако перебор можно сократить с помощь следующих соображений. Трехзначное число будем искать в виде $\overline{abc}=100a+10b+c$, где a – цифра сотен, b – цифра десятков, c – цифра единиц. Число, записанное в обратном порядке, имеет вид $\overline{cba}=100c+10b+a$. Разность чисел равна $\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-(100c+10b+a)=99a-99c$. Но по условию эта же разность равна 198. Отсюда следует, что $99a-99c=198$, $99a-99c=99\cdot2$, $a-c=2$. Следовательно, цифра a на 2 больше чем c. Кроме того, из условия понятно, что $a\neq0$ и $c\neq0$. Найденные ограничения на цифры a и c существенно сокращают перебор: достаточно рассмотреть все значения a от 1 до 5, причем c на 2 меньше, чем a. Ответ: 311.

Задачи

Часть 1

1. Бактерии размножаются делением – за одну минуту из одной бактерии получается две точно таких же. Однажды на дно банки положили бактерию и ровно через 24 часа банка стала полной. За какое время заполнится банка, если сначала на ее дно положить 2 бактерии?
2. Деревянный куб размера $4\times4\times4$ покрасили, а затем распилили на кубики размера $1\times1\times1$.
   а) Во сколько раз количество кубиков, у которых окрашена хотя бы одна грань, больше количества кубиков, у которых не окрашена ни одна грань?
   б) Сколько кубиков имеют в точности одну окрашенную грань?

§2 Степень с целым показателем

Упражнение 1. «Волшебная стрела».

Волшебная стрела, выпущенная из точки A, летит по прямой в точку B. Расстояние между A и B равно 1. В первую секунду стрела преодолевает ровно половину расстояния от A до B. За каждую следующую секунду стрела преодолевает расстояние, ровно в 2 раза меньшее, чем за предыдущую. Чему равно расстояние от стрелы до пункта B через n секунд после начала полета? Ответить на вопрос задачи сначала для малых значений $n=0$, $n=1$, $n=2$ и т.д. Ответить на вопрос задачи при $n=10$.

Решение упражнения 1.Заметим,что $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Поэтому через одну секунду расстояние от стрелы до B будет равно $\frac{1}{2}$. Заметим также, что $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Это значит, что через две секунды расстояние от стрелы до B равно $\frac{1}{4}$. Аналогично, из равенства $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ получаем, что через 3 секунды расстояние от стрелы до B равно $\frac{1}{8}$ (рис. 2).

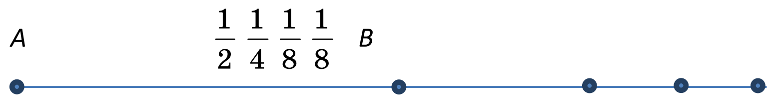

Рис. 2

Составим таблицу наших результатов:

n	0	1	2	3	4	5
Расстояние до B .	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		

Нетрудно заметить, что каждое число во второй строке таблицы меньше предыдущего в два раза. Заметим также, что в знаменателях дробей второй строки стоят степени числа 2, а именно: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$, $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$. Очевидно, что процесс разложения единицы в сумму дробей можно продолжить и дальше, например, $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$, причем $\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$. Из всего сказанного следует, что через 4, 5, 6 и т.д. секунд расстояние от стрелы до B будет равно $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^5}$, $\frac{1}{2^6}$ и т.д. соответственно. В общем случае через n секунд искомое расстояние равно $\frac{1}{2^n}$; в частности при $n=10$ имеем расстояние, равное $\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$. Упражнение рассмотрено полностью. Но вот вам вопрос на размышление: достигнет ли когда-нибудь волшебная стрела точки B ?

Числа, о которых говорится в упражнении 1, могут быть обозначены иначе:

$$\frac{1}{2}=2^{-1},\ \frac{1}{2^2}=2^{-2},\ \frac{1}{2^3}=2^{-3},\ \frac{1}{2^4}=2^{-4},\ \frac{1}{2^{10}}=2^{-10}.$$

В общем случае имеет место следующее обозначение:

$$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$$

В последующих параграфах, используя свойства степеней, мы докажем, что

$$\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^{-n}=\left(\frac{q}{p}\right)^{n}}$$

Приведем несколько примеров.

Пример 1. $7^{-1}=\frac{1}{7}$, $7^{-2}=\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}$, $7^{-3}=\frac{1}{7^3}=\frac{1}{343}$.

Пример 2. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{4}$, $(0,25)^{-2}=\left(\frac{25}{100}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{1}\right)^{2}=4^2=16$.

Пример 3. «Отрицательные степени числа 10».

$$10^0=1,\ 10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1,\ 10^{-2}=\frac{1}{100}=0{,}01,\ 10^{-3}=\frac{1}{1000}=0{,}001,$$

$$10^{-4}=\frac{1}{10000}=0{,}0001,\ 10^{-2015}=\frac{1}{10^{2015}}=0{,}\underbrace{00.....01}_{2015\text{ знаков}}.$$

Пример 4. «Десятичная система счисления».

Для записи чисел мы обычно пользуемся десятью символами, которые называются цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. А почему их ровно десять? Фактически, потому, что числа мы представляем в виде сумм степеней с основанием 10. Например:

$759 = 7\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0$;

$7{,}59 = 7 + 0{,}5 + 0{,}09 = 7\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2}$;

$107{,}509 = 1\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-1} + 0\cdot 10^{-2} + 9\cdot 10^{-3}$.

При делении 1 на 3 «уголком» выясняется, что число $\frac{1}{3}$ представимо в виде бесконечной **десятичной** дроби $0{,}3333333333\ldots = 0{,}(3)$. Это значит, что $\frac{1}{3} = 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{-4} + 3\cdot 10^{-5} + \ldots$.

Описанный способ представления чисел называется **десятичной системой счисления.** Существуют другие системы счисления.

§3 Умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями

Упражнение 1. «Умножение натуральных степеней с одинаковыми основаниями»

a) *Произведение семи множителей, каждый из которых равен 3, умножили на произведение четырех множителей, каждый из которых равен 3. Произведение скольких множителей, равных 3, получили?*

b) *Произведение семидесяти множителей, каждый из которых равен 5, умножили на произведение четырехсот множителей, каждый из которых равен 5. Произведение скольких множителей, равных 5, получили?*

c) *Попытайтесь объяснить, почему следующие равенства верны для любого положительного числа* p *:*

$$p^{10} = p^9 \cdot p = p^8 \cdot p^2 = p^7 \cdot p^3 = p^6 \cdot p^4 = p^5 \cdot p^5 = p^4 \cdot p^6 .$$

d) *Попытайтесь упростить выражения:* $7^4 \cdot 7^5 \cdot 7^6$, $q^{119} \cdot q^{245} \cdot q^{455} \cdot q^{281}$.

e) *Основываясь на наблюдениях, сделанных в пунктах a) – d) данного упражнения, попытайтесь сформулировать: правило умножения двух натуральных степеней с одинаковыми основаниями, правило умножения нескольких натуральных степеней с одинаковыми основаниями.*

f) *Для любых чисел* a, b *и* c *имеют место равенства* $ab = ba$ *(переместительный закон умножения), и* $a(bc) = (ab)c = abc$ *(сочетательный закон умножения). Из этих законов следует, что в любом произведении множители можно произвольным образом переставлять местами и умножать в произвольном порядке – результат от этого не изменяется. Опираясь на это замечание, попытайтесь доказать, что правила, сформулированные вами в пункте e), является верным.*

Упражнение 2. «Деление натуральных степеней с одинаковыми основаниями»

a) *Установите, являются ли верными следующие цепочки равенств.*

$$2^8 : 2^3 = \frac{2^8}{2^3} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^5,$$

$$2^3 : 2^8 = \frac{2^3}{2^8} = \frac{\cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}.$$

b) *Произведение семидесяти множителей, каждый из которых равен 3, разделили на произведение сорока множителей, каждый из которых равен 3. Произведение скольких множителей, равных 3, получили?*

c) *Опираясь на наблюдения и результаты в пунктах a) и b), постарайтесь сформулировать правило деления натуральных степеней с одинаковыми основаниями.*

d) *Постарайтесь обосновать сформулированное правило.*

Упражнение 3. «Умножение целых степеней с одинаковыми основаниями»

a) *Вычислите значения следующих выражений. Ответ представить в виде степени с основанием 2:*
$2^8\cdot 2^{-6}$, $2^{-8}\cdot 2^6$, $2^{-7}\cdot 2^{10}$, $2^{-7}\cdot 2^{-10}$, $2^{-10}\cdot 2^{60}\cdot 2^{-50}$.

b) *Как вы знаете, разность $m-k$ можно рассматривать как сумму $m+(-k)$. Обобщается ли сформулированное вами правило умножения степеней с натуральными показателями (упражнение 1, пункт e)) на случай умножения степеней с произвольными целыми показателями? Свой ответ постарайтесь обосновать.*

Упражнение 4. «Деление целых степеней с одинаковыми основаниями»

a) *Используя преобразование $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, вычислите значения следующих выражений. Ответ представьте в виде степени с основанием 3:*
$3^8:3^{-6}$, $3^{-8}:3^6$, $3^{-7}:3^{10}$, $3^{-10}:3^{60}:3^{-50}$.

b) *Обобщается ли сформулированное вами правило деления степеней с натуральными показателями (упражнение 2, пункт c)) на случай деления степеней с произвольными целыми показателями? Свой ответ постарайтесь обосновать.*

Решение упражнения 1. Рассмотрим пример из упражнения 1, a). Речь идет о произведении $3^7\cdot 3^4$. заметим, что

$$3^7\cdot 3^4=(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)\cdot(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)=\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{7\text{ множителей}}\cdot\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{4\text{ множителя}}=\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{(7+4)\text{ множителей}}=3^{7+4}.$$

Наблюдения подсказывают, что правило умножения натуральных степеней выглядит следующим образом:

$$\boxed{a^m\cdot a^k=a^{m+k}}$$

Иначе говоря:

- **произведениедвух степеней** с одинаковыми основаниями тождественно равно степени с тем же основанием, и показателем, равным **суммепоказателей**исходных степеней;
- при умножении двух степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют без изменения, а показатели складывают.

Действительно,

$$a^m\cdot a^k=\underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{m\text{ множителей}}\cdot\underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{k\text{ множителей}}=\underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ множителей}}\cdot\underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{k\text{ множителей}}=\underbrace{aa\cdot\ldots\cdot aa}_{m+k\text{ множителей}}=a^{m+k}.$$

Решение упражнения 2. Рассмотрим пример из упражнения 2, b).Деление произведения семидесяти множителей, каждый из которых равен 3, на произведение сорока множителей, каждый из которых равен 3, запишем в виде дроби. Тогда по сорок множителей в числителе и знаменателе сократятся, и останется $70-40=30$ множителей в числителе и единица в знаменателе. Таким образом,

$$3^{70}:3^{40}=\frac{3^{70}}{3^{40}}=3^{70-40}.$$

Нетрудно видеть, что если в данном рассуждении число 3 заменить на любое другое, например, a, то сам ход рассуждений не изменится. Если заменить числа 70 и 40 на любые другие числа m и k, ($m\geq k$), то аналогичные рассуждения приводят нас к формуле:

$$\boxed{a^m:a^k=\frac{a^m}{a^k}=a^{m-k}}$$

Справедливость этой формулы легко проверить. Ведь равенство $x:y=z$ равносильно равенству $x=z\cdot y$. В данном случае достаточно проверить, что $a^m=a^{m-k}\cdot a^k$. Но по правилу умножения степеней с одинаковыми основаниями, (упражнение 1), имеем

$a^{m-k} \cdot a^k = a^{m-k+k} = a^m$. Заметим также, что все приведенные рассуждения верны, если только $a \neq 0$.

Полученное правило можно сформулировать следующим образом:

- **частное двух степеней** с одинаковыми основаниями тождественно равно степени с тем же основанием, и показателем, равным **разностипоказателей** исходных степеней;
- при делении одной степени на другую с одинаковыми основаниями основание оставляют таким же, а показатели отнимают.

В пункте а) данного упражнения вы получили, что $2^3 : 2^8 = 2^{-5}$. Равенство $3-8=-5$, а также то, **как** вы получили равенство $2^3 : 2^8 = 2^{-5}$, подсказывают, что сформулированное правило для деления степеней остается справедливым также и для случая $m<k$. Догадки нужно обосновывать. Действительно, пусть требуется разделить a^m на a^k, причем $m<k$. Деление $a^m : a^k$ запишем в виде дроби $\frac{a^m}{a^k}$. В числителе имеем m множителей, в знаменателе имеем k множителей. Так как $m<k$, то по m множителей сократятся, в числителе останется единица, в знаменателе останутся $k-m$ множителей, т.е. получится дробь $\frac{1}{a^{k-m}}$. Остается заметить, что $\frac{1}{a^{k-m}} = a^{-(k-m)} = a^{m-k}$.

Решение упражнения 3. Остается ли правило $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ верным, если m и k – не обязательно натуральные, а, быть может, отрицательные числа? Давайте понаблюдаем:

$2^8 \cdot 2^{-6} = 2^8 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{2^8}{2^6} = 2^{8-6} = 2^{8+(-6)}$, здесь $m=8$, $k=-6$;

$2^{-7} \cdot 2^{10} = \frac{1}{2^7} \cdot 2^{10} = \frac{2^{10}}{2^7} = 2^{10-7} = 2^{-7+10}$, здесь $m=-7$, $k=10$;

$2^{-7} \cdot 2^{-10} = \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^{10} \cdot 2^7} = \frac{1}{2^{10+7}} = 2^{-(7+10)} = 2^{-7+(-10)}$, здесь $m=-7$, $k=-10$.

Мы видим, что по крайней мере в данных примерах формула $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ остается верной. На самом деле, при $a>0$ формула $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ верна вообще для любых чисел m и k, не обязательно целых. Но разговор об этом мы будем вести в 11 классе. Обоснование этой формулы для **целых** значений можно провести, рассматривая по очереди все случаи для знаков чисел m и k. Преобразования аналогичны тем, которые были проведены при рассмотрении примеров из пункта а) данного упражнения. Сделайте это, пожалуйста, самостоятельно.

Справедливость формулы $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ для всех целых значений m и k оказывается особенно полезной в случаях, когда требуется упростить произведение нескольких степеней. Например,

$$p^{-7} \cdot p^{10} \cdot p^{-16} \cdot p^{13} = p^{-7+10-16+13} = p^0 = 1.$$

Решение упражнения 4. Наша цель – выяснить, справедливо ли правило $a^m : a^k = \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$ в случае, если среди чисел m и k есть отрицательные целые. Рассмотрим несколько примеров:

$3^8 : 3^{-6} = \frac{3^8}{3^{-6}} = 3^8 \cdot 3^6 = 3^{8+6} = 3^{8-(-6)}$, здесь $m=8$, $k=-6$;

$3^{-8} : 3^6 = \frac{3^{-8}}{3^6} = 3^{-8} \cdot 3^{-6} = 3^{-8-6}$, здесь $m=-8$, $k=6$;

$3^{-7} : 3^{10} = 3^{-7} \cdot \frac{1}{3^{10}} = 3^{-7} \cdot 3^{-10} = 3^{-7-10}$, здесь $m=-7$, $k=10$.

Аналогичные рассуждения в общем случае показывают, что формула $a^m : a^k = \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$ остается верной для всех возможных целых значений m и k.

§4 Возведение степени, произведения и дроби в степень

Упражнение 1. «Как возводить степень в степень?»

a) Пусть $A = 777^3$, $B = A^2$. Представьте число B как степень с основанием 777. Подсказка: $A^2 = A \cdot A$, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$.

b) Пусть $A = 5^{30}$, $B = A^{10}$. Представьте число B как степень с основанием 5. Подсказка: $A^{10} = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{10 множителей}}$, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$.

c) По определению степени для положительных чисел a и натуральных k выражение $\left(a^m\right)^k$ равно произведению k множителей, каждый из которых равен a^m. Постарайтесь получить правило возведения степени в степень.

d) Используя полученное правило, вычислите значение выражения

$$\frac{\left(\left(2^4\right)^5\right)^6 \cdot \left(\left(2^{-3}\right)^{10}\right)^4 \cdot \left(\left(2^6\right)^3\right)^2}{\left(2^7\right)^5}.$$

Упражнение 2. «Как возводить произведение в степень?»

a) Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел, не превосходящих числа n. Факториал числа n обозначается как $n!$. Например, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Чему равна разность $10! - 6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5$? Какие из трех законов – переместительный, сочетательный , распределительный – вы фактически использовали при решении?

b) Верно ли, что $2^{2015} \cdot 3^{2015} = 6^{4030}$?

c) Обосновать тождество $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

d) Используя тождество $a^m \cdot b^m = (ab)^m$, упростить выражение $2^3 \cdot 5^8 \cdot 2^{-13} \cdot 2^7 \cdot 5^{-5} \cdot 2^6$.

Упражнение 3. «Кофе с молоком».

Лолита любит кофе с молоком. Однажды ей по ошибке налили полную чашку чистого кофе. Лолита выпила $\frac{1}{3}$ *содержимого чашки и долила молоко так, что чашка стала полной. Тщательно перемешав, она снова выпила* $\frac{1}{3}$ *содержимого чашки и долила молоко так, чтобы чашка стала полной. Далее она снова и снова повторяла данную последовательность: тщательно перемешивала, выпивала треть содержимого и доливала чашку молоком до полной. Считая объем чашки равным 1, постарайтесь ответить на следующие вопросы.*

a) Чему равно количество кофе после первого доливания?

b) Чему равно количество кофе после второго доливания?

c) Чему равно количество кофе после третьего доливания?

d) Чему равно количество кофе после 10-го доливания?

Упражнение 4. «Как возводить дробь в степень».

В упражнении 3 мы представили $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ *в виде дроби* $\frac{1024}{59049}$*, т.е. возвели число* $\frac{2}{3}$ *в степень 10. Нетрудно понять, что умение возводить дроби в степени может пригодиться во многих задачах. Постарайтесь корректно сформулировать правило возведения дроби в степень и обосновать его.*

Решение упражнения 1. Рассмотрим сначала пункт а).Так как $A = 777^3$, то

$$B = A^2 = \left(777^3\right)^2 = 777^3 \cdot 777^3 = 777^{3+3} = 777^{3 \cdot 2} = 777^6.$$

Аналогично рассматривается b). Так как $A = 5^{30}$, то

$$B = A^{10} = \left(5^{30}\right)^{10} = \underbrace{5^{30} \cdot 5^{30} \cdot \ldots \cdot 5^{30} \cdot 5^{30}}_{\text{10 множителей}} = 5^{\overbrace{30+30+\ldots+30}^{\text{10 слагаемых}}} = 5^{30 \cdot 10} = 5^{300}.$$

Теперь легко понять, что

$$\left(a^m\right)^k = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m \cdot a^m}_{k\text{ множителей}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{k\text{ слагаемых}}} = a^{mk}.$$

Таким образом, имеет место следующее правило возведения степени в степень:

$$\boxed{\boldsymbol{\left(a^m\right)^k = a^{mk}}}$$

Иначе говоря,

- степень степени равна степени с тем же основанием и показателем, равным произведению показателей;
- при возведении степени в степень показатели перемножаются.

Для нас в преобразованиях важно будет «видеть» эту формулу также и «справа налево». Например, важно понимать, что b^6 можно представить как куб, так и квадрат: $b^6 = \left(b^2\right)^3 = \left(b^3\right)^2$.

Переходим к d).Заметим сначала, что

$$\left(\left(2^4\right)^5\right)^6 = \left(2^{4\cdot5}\right)^6 = 2^{4\cdot5\cdot6} = 2^{120}.$$

Аналогично,

$$\left(\left(2^{-3}\right)^{10}\right)^4 = 2^{-3\cdot10\cdot4} = 2^{-120}.$$

Все выражение упрощается следующим способом:

$$\frac{\left(\left(2^4\right)^5\right)^6 \cdot \left(\left(2^{-3}\right)^{10}\right)^4 \cdot \left(\left(2^6\right)^3\right)^2}{\left(2^7\right)^5} = \frac{2^{4\cdot5\cdot6} \cdot 2^{-3\cdot10\cdot4} \cdot 2^{6\cdot3\cdot2}}{2^{7\cdot5}} = \frac{2^{120} \cdot 2^{-120} \cdot 2^{36}}{2^{35}} = 2^{120-120+36-35} = 2.$$

Решение упражнения 2. Сочетательный закон позволяет произвольным образом объединять множители в группы. Переместительный закон позволяет переставлять группы местами. Нетрудно понять, что такими операциями можно за несколько шагов из произведения $6\cdot3\cdot1\cdot10\cdot4\cdot7\cdot8\cdot2\cdot9\cdot5$ получить равное ему $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$. Поэтому $10! - 6\cdot3\cdot1\cdot10\cdot4\cdot7\cdot8\cdot2\cdot9\cdot5 = 0$.

Приведенный пример применения переместительного и сочетательного законов позволяет понять, что

$$2^{2015}\cdot3^{2015} = \underbrace{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot2}_{2015\text{ множителей}} \cdot \underbrace{3\cdot3\cdot\ldots\cdot3\cdot3}_{2015\text{ множителей}} =$$

$$= \underbrace{(2\cdot3)(2\cdot3)\cdot\ldots\cdot(2\cdot3)(2\cdot3)}_{2015\text{ множителей вида }(2\cdot3)} = \underbrace{6\cdot6\cdot\ldots\cdot6\cdot6}_{2015\text{ множителей}} = 6^{2015}.$$

В общем случае имеет место тождество

$$\boxed{\boldsymbol{a^m \cdot b^m = (ab)^m}}$$

доказательство которого ничем не отличается от только что приведенных рассуждений:

$$a^m\cdot b^m = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}_{m\text{ множителей}} \cdot \underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b\cdot b}_{m\text{ множителей}} = \underbrace{(ab)(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)(ab)}_{m\text{ множителей вида }(ab)} = (ab)^m.$$

Произведение степеней с одинаковыми показателями равно степени произведения оснований с тем же показателем.

Эта формула применяется на последнем этапе упрощения выражения из пункта d):

$$2^3\cdot5^{10}\cdot2^{-13}\cdot2^9\cdot5^{-5}\cdot2^6 = 2^{3-13+7+6}\cdot5^{8-5} = 2^5\cdot5^5 = 10^5 = 100000.$$

Решение упражнения 3. Содержимое чашки каждый раз тщательно перемешивается. Поскольку выпивается треть всего содержимого, то фактически выпивается треть **каждого** из компонентов, содержавшихся в чашке. В частности, выпивается треть количества кофе, содержавшегося в чашке. Следовательно, каждый раз **остается** $\frac{2}{3}$ количества кофе, которое было в чашке во время перемешивания, т.е. остается $\frac{2}{3}$ того количества кофе, которое осталось после прошлого раза. Так как в начале объем кофе был равен единице, то после первого цикла «перемешала-выпила-долила» объем кофе стал равен $\frac{2}{3}$. После второго цикла объем оставшегося кофе равен $\frac{2}{3}$ от того, что осталось после первого цикла, т.е. $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$. После третьего цикла осталось $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$. И так далее. Становится ясным, что после доливания под номером n количество оставшегося кофе равно $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. В частности, после 10-го доливания осталось $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}_{10\text{ множителей}}=\frac{2^{10}}{3^{10}}=\frac{1024}{59049}\approx 0{,}0173$ кофе.

Решение упражнения 4. Произведение двух дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)}_{m\text{ множителей}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}^{m\text{ множителей}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b\cdot b}_{m\text{ множителей}}}=\frac{a^m}{b^m}.$$

Мы доказали тождество

$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$
$\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$

Частное степеней с одинаковыми показателями равно степени частного оснований с тем же показателем.

§5 Множества на координатной плоскости

Каждая точка на координатной плоскости имеет две координаты – абсциссу x и ординату y. **Абсциссу** x мы будем также называть **первой** координатой точки, а **ординату** y соответственно **второй** координатой.

Упражнение 1. «Самые простые множества – 1».

a) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек, у которых координата x равна 2. Попробуйте указать и описать **все** такие точки, у которых координата x равна 2.*
b) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек, у которых координата x больше чем 2. Попробуйте указать и описать **все** такие точки, у которых координата x больше чем 2.*
c) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек, у которых координата x **не больше** чем 2. Попробуйте указать и описать **все** такие точки, у которых координата x **не больше** чем 2.*

Упражнение 2. «Самые простые множества – 2».

a) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек, у которых координата y равна -3. Попробуйте указать и описать **все** такие точки, у которых координата y равна -3.*

b) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек $(x;y)$, для которых выполняется неравенство $y<-3$. Попробуйте указать и описать **все** такие точки $(x;y)$, для которых $y<-3$.*

c) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек $(x;y)$, для которых выполняются неравенства $y\ge -3$* и одновременно $x\le 2$. *Укажите множество **всех** точек $(x;y)$, для которых $y\ge -3$* и $x\le 2$.

Упражнение 3. «Не самые, но простые множества – 1».

a) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек, у которых координата y равнакоординате x. Попробуйте указать и описать **все** такие точки, у которых первая и вторая координаты равны между собой.*

b) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек $(x;y)$, для которых координата y большекоординаты x. Попробуйте указать и описать **все** такие точки $(x;y)$, для которых выполняется условие $y>x$.*

c) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек $(x;y)$, для которых выполняется неравенство $y\le x$. Укажите множество **всех** точек $(x;y)$, для которых $y\le x$*

.

Упражнение 4. «Не самые, но простые множества – 2».

a) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек, у которых сумма координат равна 4. Попробуйте указать и описать **все** такие точки, у которых сумма координат равна 4. Какому уравнению удовлетворяют координаты таких точек?*

b) *Отметьте на координатной плоскости 5 различных точек $(x;y)$, для которых сумма координат больше чем 4, но меньше чем 6. Попробуйте указать и описать **все** такие точки $(x;y)$, для которых выполняется условие $4<y+x\le 6$.*

c) *Отметьте на координатной плоскости множество **всех** точек $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} 4\le x+y\le 6; \\ y\le x; \\ y\ge 0. \end{cases}$$

Решение упражнения 1.

a) Все точки, первая координата которых равна 2, образуют прямую, параллельную оси Oy и проходящую через точку $(2;0)$ на оси Ox, рисунок 1. Говорят, что такая прямая имеет уравнение $x=2$.

b) **Все** такие точки, у которых координата x больше чем 2, образуют полуплоскость «справа» от прямой $x=2$ (рис. 2). Сама прямая $x=2$ не входит в данное множество.

c) **Все** такие точки, у которых координата x не больше чем 2, образуют полуплоскость «слева» от прямой $x=2$ (рис. 3). Прямая $x=2$ называется границей данного множества. Прямая $x=2$ входит в данное множество, поскольку слова « x не больше чем 2» означают, что значение x может быть меньше чем 2 или **равно** 2.

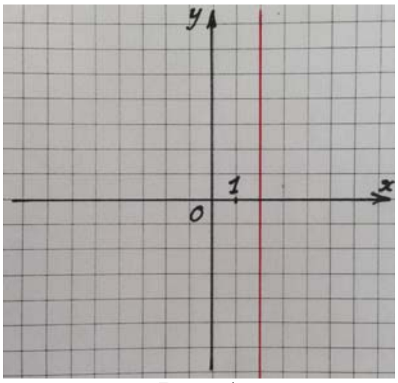

Рис. 1

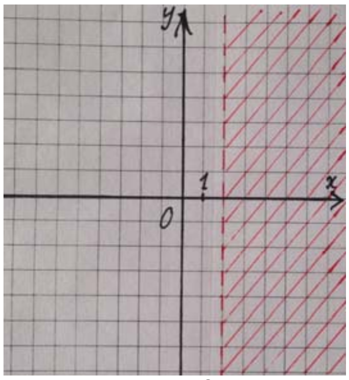

Рис. 2

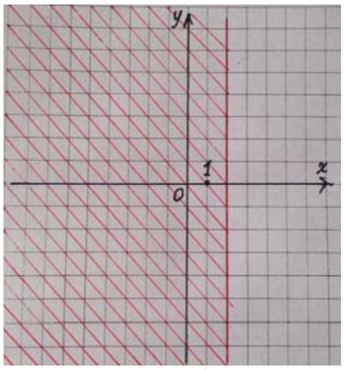

Рис. 3

Решение упражнения 2.

a) Любая точка прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку $(0;-3)$ на оси Oy, имеет вторую координату, равную -3 (рис. 4).

b) Все такие точки $(x;y)$, для которых выполняется условие $y<-3$, лежат «ниже» прямой $y=-3$. Искомое множество точек образуют «нижнюю» полуплоскость относительно своей **границы** $y=-3$, не включая самой границы (рис. 5).

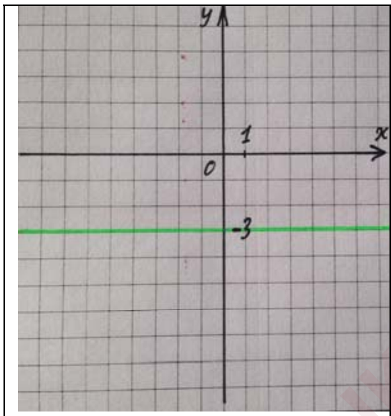

Рис. 4

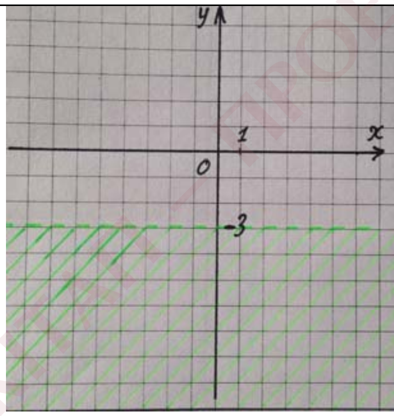

Рис. 5

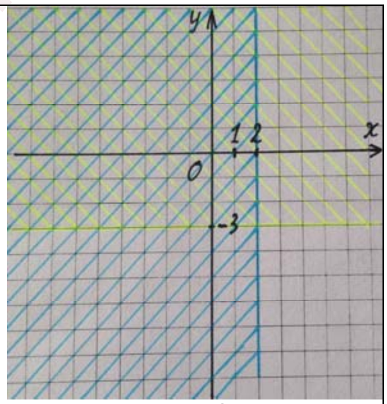

Рис. 6

c) Если наложить желтый цвет на голубой, то получится зеленый.

Множество точек, для которых $y\geq-3$ – это «верхняя» полуплоскость относительно прямой $y=-3$. Прямая $y=-3$ является границей данного множества. Так как рассматривается множество точек, для которых выполняется **нестрогое** неравенство $y\geq-3$, то **граница** данного множества, прямая $y=-3$, также принадлежит данному множеству. Закрасим это множество желтым цветом.

Аналогично, множество точек, для которых $x\leq2$, есть полуплоскость «слева» от своей границы $x=2$ вместе со своей границей. Закрасим это множество голубым цветом.

Множество **всех** точек $(x;y)$, для которых $y\geq-3$ и $x\leq2$, есть все точки, лежащие одновременно в двух закрашенных областях. Такое множество называется **пересечением** двух данных множеств. Накладывая голубой цвет второй области на желтый цвет первой, получаем область, закрашенную зеленым (рис. 6).

Решение упражнения 3. Множество точек $(x;y)$, у которых координаты равны между собой, описывается уравнением $y=x$. Все такие точки образуют прямую, которая является биссектрисой первого и второго координатных углов (рис. 7). Множества, о которых говорится в пунктах b) и c), изображены соответственно на рисунках 8 и 9.

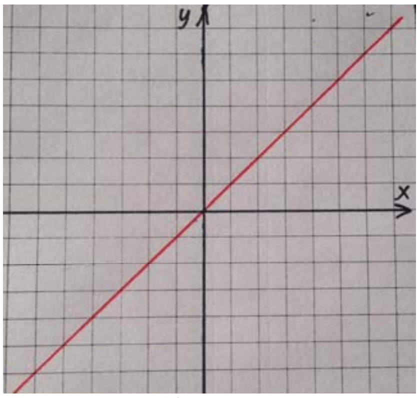

Рис. 7

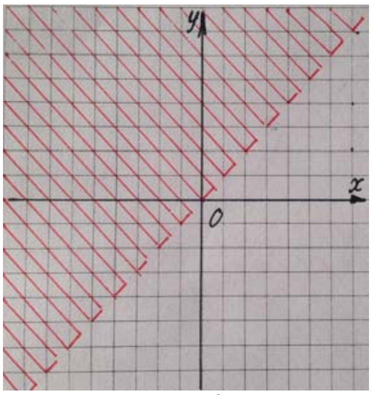

Рис. 8

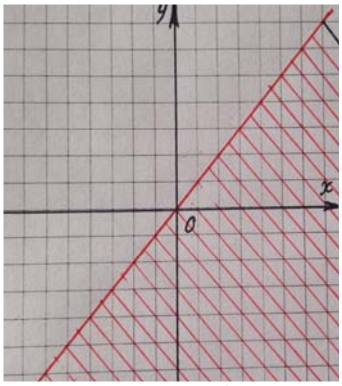

Рис. 9

Решение упражнения 4.

a) Условие «сумма координат точки равна 4» можно записать в виде уравнения $x+y=4$, или, что то же самое, $y=4-x$. Уравнение $y=4-x$, как вы знаете, задает прямую (рис. 10).

b) Множество точек, о которых говорится в пунктеb), изображенона рисунке 11. Поясним, из каких соображений получен рисунок 11. Множество точек, удовлетворяющих условию $x+y=6$ есть прямая $y=6-x$. Точки, удовлетворяющие условию $4<x+y$ заполняют «верхнюю» полуплоскость относительно прямой $x+y=4$. Точки, удовлетворяющие условию $x+y\le 6$, заполняют «нижнюю» полуплоскость относительно прямой $x+y=6$. Точки, удовлетворяющие двойному неравенству $4<y+x\le 6$, удовлетворяют и неравенству $4<x+y$, и неравенству $x+y\le 6$ одновременно.Следовательно,точки, удовлетворяющие двойному неравенству $4<y+x\le 6$, должны лежать в обоих полуплоскостях одновременно. Искомое множество состоит из всех общих точек полуплоскостей. Получается полоса между прямыми, причем прямая $x+y=4$ не входит в данное множество, а прямая $x+y=6$ входит в данное множество. (Подумайте, почему.)

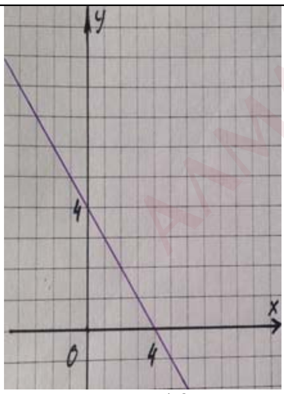

Рис. 10

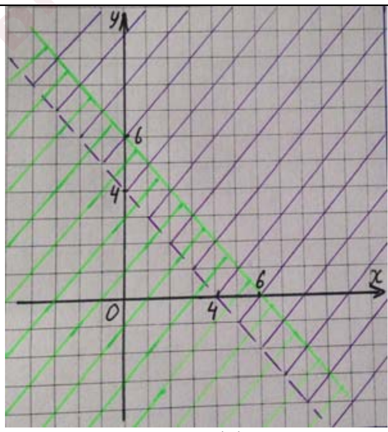

Рис. 11

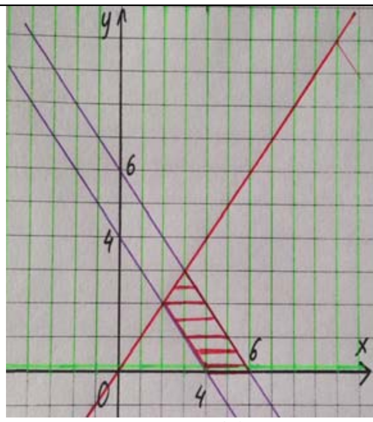

Рис. 12

c) Последовательно находим (изображаем) множества, удовлетворяющие первому, второму и третьему условиям системы. Ответом является пересечение всех трех множеств, т.е. множество, состоящее из точек, лежащих в каждом из трех множеств (рис. 12). Результат обведен и заштрихован красным.

Задачи

Часть 1

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, первая координата которых
   а) равна -4;

б) больше чем -4;
в) не превосходит -4.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, вторая координата которых
а) равна -4;
б) меньше чем -4;
в) не меньше, чем -4.
3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, у которых вторая координата равна удвоенной первой.
4. Изобразите на координатной плоскости множество точек $(x;y)$, для которых выполняется условие
а) $y=0,5x-4$;
б) $y>0,5x-4$
5. Изобразите на координатной плоскости множество точек, для которых разность ординаты и абсциссы
а) равна -2;
б) меньше чем -2;
в) не меньше, чем -2.
6. а) Изобразите множество точек на координатной плоскости, для которых выполняется условие $-2<x\le 3$;
б) Изобразите множество точек на координатной плоскости, для которых выполняется условие $1<y\le 7$;
в) Фигура на плоскости задается системой условий $\begin{cases}-2\le x\le 3,\\ 1\le y\le 7.\end{cases}$
Найдите площадь данной фигуры.
7. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $0<x-y\le 5$.
8. Рассматривается множество всех прямоугольников, периметр которых равен 16. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $(x;y)$, для каждой из которых $x-$ длина, а $y-$ ширина одного из таких прямоугольников.

Часть 2

9. Изобразите на координатной плоскости множество точек, первая координата которых
а) равна 3;
б) меньше чем 3;
в) не меньше чем 3.
10. Изобразите на координатной плоскости множество точек, вторая координата которых
а) равна -5;
б) больше чем -5;
в) не больше чем -5.
11. Изобразите на координатной плоскости множество точек, у которых первая координата равна удвоенной второй.
12. Изобразите на координатной плоскости множество точек $(x;y)$, для которых выполняется условие
а) $y=2x+3$;
б) $y\le 2x+3$.
13. Изобразите на координатной плоскости множество точек, для которых сумма ординаты и абсциссы
а) равна -5;
б) больше чем -5;
в) не превосходит -5.
14. а) Изобразите множество точек на координатной плоскости, для которых выполняется условие $2<x\le 5,5$;

б) Изобразите множество точек на координатной плоскости, для которых выполняется условие $-3 \le y < 9$;

в) Фигура на плоскости задается системой условий $\begin{cases} 2 \le x \le 5,5, \\ 1 \le y \le 7. \end{cases}$

Найдите площадь данной фигуры.

15. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $-4 \le 2x - 3y \le 10$.

16. Рассматривается множество всех треугольников со сторонами x, y и 7, периметр которых равен 17. Изобразите множество всех точек $(x;y)$ координатной плоскости, для которых x и y могут быть сторонами такого треугольника. Учтите при этом, что в любом треугольнике любая сторона должна быть строго меньше суммы двух других.

§6 Функция $y = ax^2$, ее свойства и график

Наша ближайшая цель – определить на координатной плоскости множество точек $(x;y)$, для которых y – это площадь квадрата со стороной x.

Обратимся к рисунку 13. На нем изображен график некоторой функции, состоящий из двух частей. Будем постепенно увеличивать значение переменной x от 1 до 3 и следить за соответствующими изменениями значения функции y. Заметим, что если x приблизительно равен 2, причем $x < 2$, то значение y приблизительно равно -4. Если $x = 2$, то $y = -4$. **Каким бы малым ни было дальнейшее увеличение переменной x, значение y резко, скачком перемещается в район числа3.** Если x приблизительно равен 2, но $x > 2$, то значение y функции примерно равно 3. **Математики в таких случаях говорят, что для данной функции в точке $x = 2$ имеет место разрыв.**

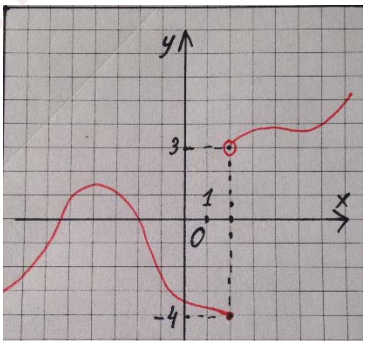

Рис. 13

Или представьте такую ситуацию. Вы сидите у себя в комнате. У вас очень скучное задание – следить за изменением температуры воздуха T по термометру. В каждый момент времени термометр не может показывать две разных температуры. Поэтому зависимость температуры T от времени t является функцией. Ровно в 18.00 вы ***моргнули****. Закрывали глаза – температура была еще 20 градусов ТЕПЛА, а открываете – уже 15 градусов МОРОЗА. Вот вам и разрыв! Вот вам и скачок функции T* в момент времени $t = 18.00$!

Вы можете сказать: «Фи-и-и… Такого не бывает!» Хорошо. Вот вам реальный пример. Единицей измерения освещённости в Международной системе единиц служит **люкс** *(лк). Например, летом в облачную погоду в полдень освещенность равна приблизительно 12000 лк, ночью в полнолуние освещенность равна 0,2 лк. Нормой в жилом помещении при искусственном освещении считается освещённость 400-500 лк. Так вот, каждый раз, когда вы пользуетесь вечером выключателем, вы создаете скачек освещённости.*

Если при изменении значения переменной на некотором промежутке функция не имеет разрывов, то функция называется *непрерывной* на данном промежутке. Графиком такой функции является непрерывная линия, линия без разрывов.

Зависимость площади y квадрата от стороны x является функцией. Действительно, для каждого из значений x существует только одно значение площади $y = x^2$.

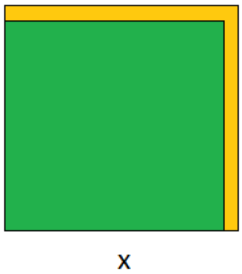

Рис. 14

Очень малые изменения величины x приводят к очень малым изменениям площади y. Это значит, что при постепенном увеличении x площадь y тоже увеличивается постепенно, величина y не может измениться скачком. Отсюда делаем вывод, что графиком функции $y = x^2$ является плавная повышающаяся линия без разрывов. Построим таблицу для нескольких значений x, отметим все полученные точки на координатной плоскости и соединим их непрерывной линией (рис. 15). Все. График готов.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16

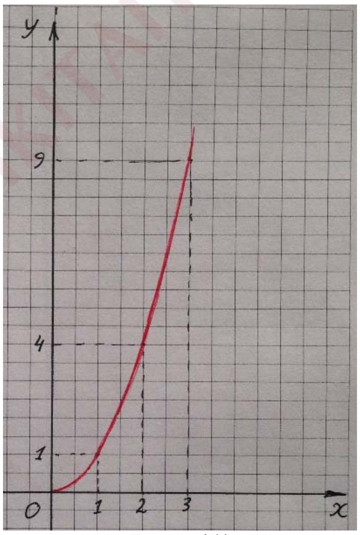

Рис. 15

Замечание. *На самом деле, на рисунке 15 мы видим не сам график, а* ***приблизительное*** *изображение его* ***малой*** *части.* ***Приблизительное*** *хотя бы потому, что сам график – это геометрическая линия, не имеющая толщины.* ***Малой*** *потому, что, как вы понимаете, мы не в состоянии изобразить* ***весь*** *график.*

Рассмотрим теперь числовую функцию $y = x^2$, где x принимает не только неотрицательные, но и отрицательные значения, то есть $x \in (-\infty; +\infty)$. Заметим, что, например, точка $(3;9)$ лежит на графике данной функции. Но тогда и точка с координатами $(-3;9)$ также лежит на графике, поскольку $(-3)^2 = 3^2 = 9$. Заметим также, что точки $(-3;9)$ и $(3;9)$ симметричны друг другу относительно оси Oy, т.е. отрезок, их соединяющий, перпендикулярен оси Oy и делится ею пополам (рис.16).

В общем случае, если какая-то точка с координатами $(a;b)$ при $a>0$ лежит на графике $y=x^2$, то и симметричная ей относительно оси Oy точка с координатами $(-a;b)$ также лежит на графике. Сделанные наблюдения позволяют построить график функции $y=x^2$ на множестве $x<0$ простым отражением (как в зеркале) уже построенной части графика при $x>0$ (рис.16).

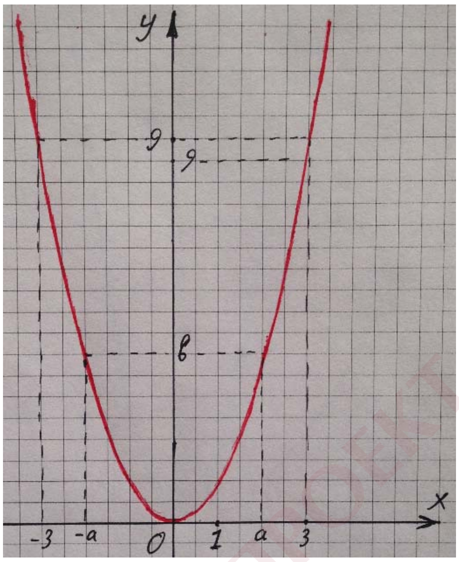

Рис. 16

При $x\geq 0$ функцию $y=-2x^2$ можно рассматривать как зависимость площади прямоугольника со сторонами x и $2x$ от величины x, взятой со знаком минус. Отсюда следует непрерывность функции $y=-2x^2$ и возможность построения ее графика по нескольким точкам. Пусть теперь $x\in(-\infty;+\infty)$. Рассуждения, аналогичные приведенным для функции $y=x^2$, показывают, что график функции $y=-2x^2$ также симметричен сам себе относительно оси Oy.

На рисунке 17 изображены графики функций $y=ax^2$ для различных значений коэффициента $a>0$.

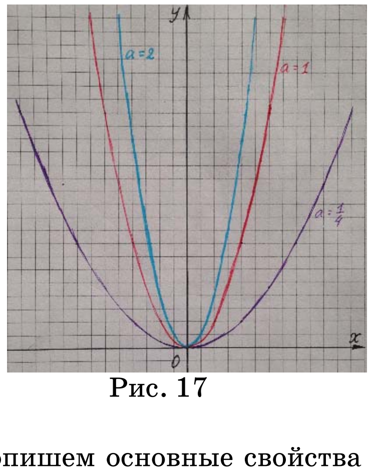

Рис. 17

Пользуясь рисунком 17, опишем основные свойства функций вида $y=ax^2$ при условии $a>0$.

1) Так как значение выражения ax^2 мы можем посчитать **для любого значения** x, тообластью определения функции $y=ax^2$ является множество всех чисел $x\in(-\infty;+\infty)$.
2) На множестве $x\in(-\infty;0)$ функция убывает, на множестве $x\in(0;+\infty)$ функция возрастает.

Совместим кончик карандаша с одной из точек графика ***слева*** *от оси* Oy*, то есть в области* $x<0$*. Далее перемещаем кончик карандаша* ***вдоль линии графика*** *так, чтобы он при этом перемещался вправо. Очевидно, что во время такого движения кончик карандаша вынужден перемещаться еще и вниз. Что происходит со значениями* x *и* y*? Пока* $x<0$*, значение переменной* x *увеличивается, в то время как значение* y *функции уменьшается. Это значит, что* ***функция убывает на множестве*** $x<0$ *или* $x\in(-\infty;0)$*. Так происходит до тех пор, пока кончик карандаша не совпадет с вершиной параболы, в данном случае, с началом координат. При дальнейшем движении вправо по параболе (в области* $x>0$ *) кончик карандаша вынужден двигаться еще и вверх. Значение переменной* x *увеличивается, и при этом значение* y *функции также увеличивается. . Это значит, что* ***функция возрастает на множестве*** $x>0$ *или* $x\in(0;+\infty)$*.*

Замечание. Не будет ошибкой сказать, что функция убывает на множестве $x\in(-\infty;0]$ и возрастает на множестве $x\in[0;+\infty)$. Это следует из строгого определения множества возрастания и множества убывания функции, которое будет рассмотрено позже.

3) Наименьшее значение функции равно 0. Наименьшее значение достигается при $x=0$.
4) Множество значений функции состоит из всех неотрицательных чисел: $y\in[0;+\infty)$.

На рисунке 18 изображены графики функций $y=ax^2$ для различных значений коэффициента $a<0$.

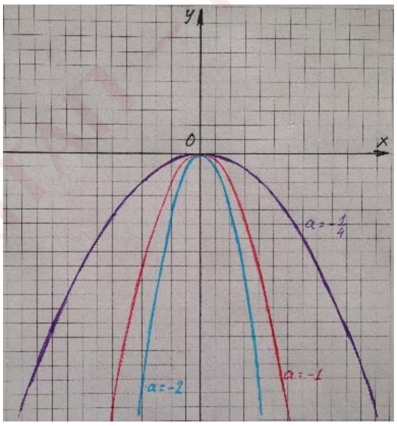

Рис. 18

Упражнение. *Пользуясь рисунком 18, опишите свойства функций вида* $y=ax^2$ *при условии* $a<0$*.*

Для каждого из значений $a\neq 0$ графиком функции $y=ax^2$ является бесконечная геометрическая фигура, которая называется параболой. Парабола обладаем очень многими интересными геометрическими свойствами. Приведем только одно из них. Если заставить вращаться параболу вокруг своей оси, то получится поверхность, которая называется параболоидом. Все лучи, параллельные оси, отражаясь от поверхности параболоида, собираются в одной точке внутри параболоида. Эта точка называется его фокусом (рис. 19).

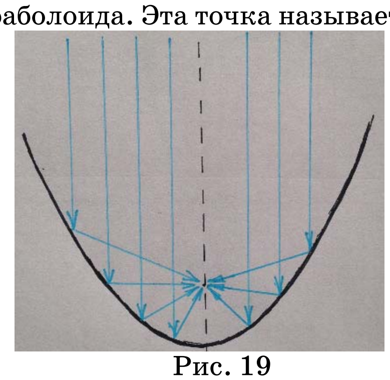
Рис. 19

Пример. На графике функции $y=2x^2$ даны две точки A и B, абсциссы которых равны -1 и 3 соответственно. Найти уравнение прямой AB.

Решение. Для любой точки $(x;y)$ на параболе $y=2x^2$ выполняется соотношение $y=2x^2$ (извините за тавтологию). Это значит, что ордината y любой точки на параболе равна удвоенному квадрату абсциссы x данной точки. Отсюда следует, что ордината точки B с абсциссой 3 равна $2\cdot 3^2=18$, т.е. точка B имеет координаты $(3;18)$. Аналогично определяем координаты точки A. Точка A имеет координаты $(-1;2)$.

Уравнение прямой AB ищем в виде $y=kx+m$, где k и m – некоторые числа. Так как точка $B(3;18)$ лежит на прямой AB, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой. Это значит, что при подстановке $x=3$ и $y=18$ в уравнение $y=kx+m$ мы получаем верное равенство: $18=k\cdot 3+m$. Аналогично, из условия принадлежности точки $A(-1;2)$ прямой AB получаем равенство $2=k\cdot(-1)+m$. Равенства $18=3k+m$ и $2=-k+m$ образуют систему уравнений:

$$\begin{cases}18=3k+m,\\ 2=-k+m.\end{cases}$$

Решением системы является пара чисел $k=4$ и $m=6$.

Ответ: $y=4x+6$.

Задачи

Часть 1

1. Даны точки $A(-1;3)$, $B(2;12{,}07)$, $C(500;750000)$, $D(-20;12000)$. Какие из данных точек лежат на параболе $y=3x^2$?
2. При каком значении параметра p точка M принадлежит параболе, если:
   а) парабола имеет уравнение $y=px^2$, а точка M имеет координаты $(-11;605)$;
   б) парабола имеет уравнение $y=(3p-16)x^2$, а точка M имеет координаты $(12;-144)$.
3. Рассмотрим график функции $y=2x^2$. Айдана выбирает любое число x на отрезке $[-3;1]$ и возводит его в квадрат. Какой наибольший и какой наименьший результат может получиться у Айданы?
4. а) Про число x известно, что $x^2\le 0$. Что вы можете сказать о числе x?
   б) Известно, что $(s+8)^2\le 0$. Что вы можете сказать о числе s?
   в) Известно, что $(a+5)^2+(b-a)^2=0$. Что вы можете сказать о числах a и b?
5. Рассмотрим график функции $y=x^2$. О числах p и q известно, что $p^2=q^2$. Следует ли из этого, что $p=q$? Что вы можете сказать о числах p и q?
6. Рассмотрим график функции $y=x^2$.
   а) В каких пределах изменяется значение функции y, если переменная x изменяет свое значение в пределах от 2 до 4?
   б) Переменная x принимает произвольные значения из отрезка от -2 до 4. Какое наибольшее значение может принимать при этом функция? Какое наименьшее значение может принимать при этом функция.
   Тот же вопрос можно сформулировать по другому: найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2$ на отрезке $[-2;4]$.
7. Рассмотрим график функции $y=x^2$.
   а) Верно ли, что если $a>7$, то $a^2>7^2$?
   б) Верно ли, что если $a>-7$, то $a^2>(-7)^2$?

в) Верно ли, что если $a^2 > 7^2$, то $a > 7$?

8. а) Про число x известно, что $x^2 \le 4$. Что вы можете сказать о числе x?

   б) Про число z известно, что $z < -6$. Что вы можете сказать о числе z^2?

9. Изобразить на координатной плоскости множество точек, для которых выполняется условие:

   а) $y + x^2 = 0$;

   б) $y + x^2 \le 0$.

10. а) Изобразить на координатной плоскости множество точек $(x; y)$, для которых выполняется система условий $\begin{cases} y \ge 0,5x^2, \\ y + x - 4 \le 0. \end{cases}$

    б) Для каких значений переменной x существует хотя бы одно значение y такое, что выполняется система условий $\begin{cases} y \ge 0,5x^2, \\ y + x - 4 \le 0. \end{cases}$

11. На графике функции $y = -x^2$ даны две точки A и B, абсциссы которых равны -2 и 4 соответственно. Найти уравнение прямой AB.

12. Сторону квадрата увеличили в 4 раза. Во сколько раз при этом увеличилась его площадь?

13. Площадь S поверхности сферы радиуса r вычисляется по формуле $S = 4\pi r^2$. На сколько процентов увеличится площадь сферы, если ее радиус увеличить на 10%?

Часть 2

14. Даны точки $A\left(2; \frac{4}{27}\right)$, $B(54; -108)$, $C\left(-3^{11}; 3^{19}\right)$, $D\left(3^k; 3^{2k-3}\right)$. Какие из данных точек лежат на параболе $y = -\frac{1}{27}x^2$?

15. При каком значении параметра q точка M принадлежит параболе, если:

    а) парабола имеет уравнение $y = -qx^2$, а точка M имеет координаты $(-10; -300)$;

    б) парабола имеет уравнение $y = \left(\frac{2q}{3} - 4\right)x^2$, а точка M имеет координаты $(13; 338)$.

16. Рассмотрим график функции $y = -2x^2$. Айтуар выбирает любое число x на отрезке $[-7; 5]$ и возводит его в квадрат. Какой наибольший и какой наименьший результат может получиться у Айтуара?

17. Известно, что $(2x - 5y - 7)^2 + (-3x + 2y + 5)^2 = 0$. Найдите числа x и y.

18. Рассмотрим график функции $y = x^2$. О числе p известно, что $p^2 = 9$. Следует ли из этого, что $p = 3$? Что вы можете сказать о числе p?

19. Рассмотрим график функции $y = -2x^2$.

    а) В каких пределах изменяется значение функции y, если переменная x изменяет свое значение в пределах от -10 до -4?

    б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^2$ на отрезке $[-10; 4]$.

20. Рассмотрим график функции $y = x^2$.

    а) Верно ли, что если $a > b$, то $a^2 > b^2$?

    б) Верно ли, что если $a < -5$, то $a^2 > (-5)^2$?

    в) Верно ли, что если $a^2 > b^2$, то $a > b$?

21. а) Про число x известно, что $x^2 \ge 121$. Что вы можете сказать о числе x?

б) Про число z известно, что $z > -4$. Что вы можете сказать о числе z^2?

22. Изобразить на координатной плоскости множество точек, для которых выполняется условие:
а) $y - 0,5x^2 = 0$;
б) $y - 0,5x^2 \geq 0$.

23. а) Изобразить на координатной плоскости множество точек $(x;y)$, для которых выполняется система условий $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y - x \leq 2. \end{cases}$
б) Для каких значений переменной y существует хотя бы одно значение x такое, что выполняется система условий $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y - x \leq 2. \end{cases}$

24. На графике функции $y = 0,2x^2$ даны две точки A и B, абсциссы которых равны -5 и 10 соответственно. Найти уравнение прямой AB.

25. Радиус круга уменьшили на 50%. На сколько процентов уменьшилась его площадь?

§7 Функция $y = ax^3$, ее свойства и график

Упражнение 1. *Изобразите на координатной плоскости 9 различных точек с координатами $(x;y)$, для которых выполняется равенство $y = x^3$, т.е. вторая координата равна третьей степени первой координаты. Четыре из отмеченных точек должны иметь отрицательные координаты.*

Упражнение 2. *Используя калькулятор, заполните таблицу значений функции $y = x^3$:*

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1	$1,5$	2
y													

Упражнение 3. *Точки, координаты которых соответствуют парам чисел $(x;y)$ из таблицы упражнения 2, изобразите на координатной плоскости. Соединяя последовательно полученные изображения точек плавной линией, получите изображение графика функции $y = x^3$ на множестве $x \in [-2;+2]$.*

Упражнение 4. *Попытайтесь представить себе, каким образом выглядит график функции $y = x^3$, если*

a) *значения переменной x изменяются от -3 до 3, т.е. $x \in [-3;+3]$;*
b) *значения переменной x изменяются от -10 до 10, т.е. $x \in [-10;+10]$;*
c) *значения переменной x изменяются от $-\infty$ до $+\infty$, т.е. $x \in [-\infty;+\infty]$;*

Пара графиков $y = x^3$ и $y = -x^3$ изображена на рисунке 20 соответственно красным и зеленым цветами.

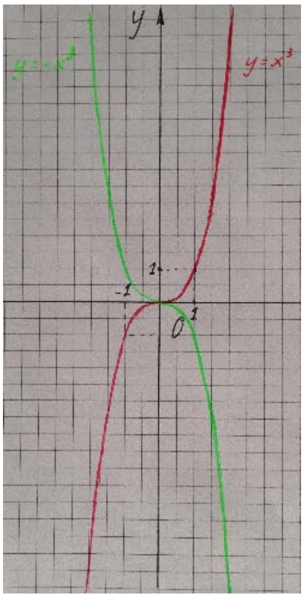

Рис. 20

Несколько графиков $y=ax^3$ при различных **положительных** значениях коэффициента a изображено на рисунке 21.

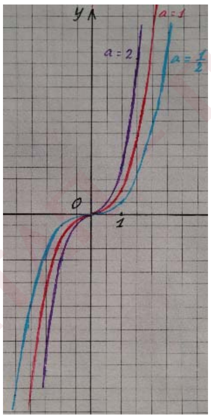

Рис. 21

Перечислим некоторые свойства функций $y=ax^3$ при $a>0$.

1) Так как значение выражения ax^3 мы можем посчитать **для любого значения** x, тообластью определения функции $y=ax^3$ является множество всех чисел $x\in(-\infty;+\infty)$.
2) Функция возрастает на всей области определения. Это значит, что если значение переменной x увеличивается, то соответствующее значение выражения ax^3 увеличивается. Геометрически это выражается в том, что любой участок графика является поднимающейся слева направо линией.
3) Множеством значений функции $y=ax^3$ при $a>0$ является множество всех чисел от $-\infty$ до $+\infty$.

Что это значит? Это значит, что ***какое бы*** *число* y *ни назвал Азамат, его друг Ермек всегда может указать число* x *такое, что выполняется равенство* $y=ax^3$. *Наиболее вдумчивые из вас могут привести следующее возражение:*

«Например, рассмотрим функцию $y=x^3$*, т.е.* $a=1$*. Если Азамат называет число* $y=1$*, то Ермек, само собой, указывает число* $x=1$*. Молодец, Ермек – ведь* $1=1^3$*! Если Азамат называет число* $y=8$*, то Ермек указывает на число* $x=2$*. И он прав – ведь действительно имеет место равенство* $8=2^3$*. А если Азамат назовет число 5?»*

Ответим на это возражение. Действительно, Ермек не сможет указать такое ***целое*** *число* x*, что* $5=x^3$*. Однако такое число существует. Рассмотрим куб, длина ребра которого равна 1. Его объем равен* 1^3*. Если теперь начать постепенно увеличивать длину* *его ребра, то его объем также начнет постепенно увеличиваться. Как только длина ребра куба станет равна 2, его объем примет значение* $2^3 = 8$. *Очевидно, что постепенное увеличение длины ребра куба от 1 до 2 привело к постепенному увеличению объема куба от 1 до 8. Это значит, что в какой-то момент времени объем куба был равен 5. Длина ребра такого куба – реально существующая величина. Итак, если Азамат называет число 5, то Ермек может ответить так: «Число, выражающее длину ребра куба, объем которого равен 5». Однако эту величину, это число, невозможно записать в виде десятичной или обыкновенной дроби. Но, как мы теперь понимаем, такое число существует. Оно обозначается как* $\sqrt[3]{5}$ *и произносится как «корень третьей степени из пяти». Подробнее о таких числах мы будем разговаривать в старших классах. По графику* $y = x^3$ *на рисунке 10 можно понять, что* $\sqrt[3]{5}$ *приблизительно равен* $1{,}7$ *, т.е.* $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}7$.

А если Азамат назовет число -5? В этом случае *Ермек может ответить так: «Число, выражающее длину ребра куба, объем которого равен 5, взятое со знаком «минус»».*

Несколько графиков $y = ax^3$ при различных **отрицательных** значениях коэффициента a изображено на рисунке 22.

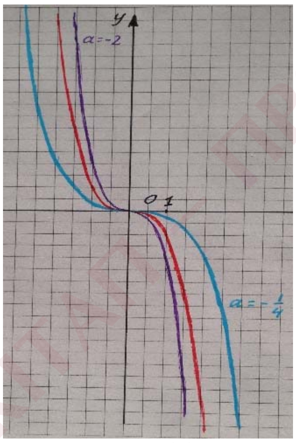

Рис. 22

Упражнение 5. *Перечислите некоторые свойства функций* $y = ax^3$ *при* $a < 0$.

Пример. При каких значениях параметров a и b прямая $y = ax + b$ проходит через точку $P(2;-24)$ на графике функции $y = ax^3$?

Решение. Так как точка $P(2;-24)$ принадлежит графику функции $y = ax^3$, то ее координаты удовлетворяют равенству $y = ax^3$. Это значит, что при подстановке $x = 2$ и $y = -24$ в уравнение $y = ax^3$ мы получаем верное равенство $-24 = a \cdot 2^3$, которое теперь можно рассматривать как уравнение относительно переменной a . Получается, что $a = -8$. С другой стороны, точка $P(2;-24)$ принадлежит прямой $y = ax + b$. Это значит, что при подстановке $x = 2$ и $y = -24$ в уравнение $y = ax + b$ также получается верное равенство: $-24 = a \cdot 2 + b$. При этом уже известно, что $a = -8$. Следовательно, $-24 = -8 \cdot 2 + b$, откуда немедленно следует, что $b = -8$.

Ответ: $a = -8$ и $b = -8$.

Задачи
Часть 1

1. Даны точки $A(-1;2)$, $B(2;-16{,}1)$, $C(7;686)$, $D(-0{,}2;0{,}016)$. Какие из данных точек лежат на кубическойпараболе $y = -2x^3$?
2. При каком значении параметра p точка M принадлежит кубической параболе, если:

   а) парабола имеет уравнение $y = px^3$, а точка M имеет координаты $(10;-2000)$;

б) парабола имеет уравнение $y=\left(\frac{3-p}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3$, а точка M имеет координаты $(-2;-16)$.

3. Рассмотрим график функции $y=-x^3$. Айдана выбирает любое число x на отрезке $[-3;1]$ и возводит в куб противоположное ему число. Какой наибольший и какой наименьший результат может получиться у Айданы?
4. Даны точки $A(-2;-8)$, $B(-1;-1)$, $C(-3;-7)$, $D(2;8)$. Какие из них принадлежат как прямой $y=3x+2$, так и графику функции $y=x^3$.
5. Рассмотрим график функции $y=x^3$. О числах p и q известно, что $p^3=q^3$. Следует ли из этого, что $p=q$?
6. Изобразить множество точек $(x;y)$ координатной плоскости, для которых выполняется система условий $\begin{cases} y\le x, \\ y\ge x^3. \end{cases}$
7. При каких значениях параметров a и b прямая $y=ax+b$ проходит через точку $P(1;3)$ на графике функции $y=ax^3$?
8. а) Ребро куба увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличился объем куба?
   б) Ребро куба уменьшили на 25%. На сколько процентов уменьшился объем куба?

Часть 2

9. Даны точки $A(2;3)$, $B(-2;-3)$, $C(6;83)$, $D\left(-\frac{4}{3};\frac{8}{9}\right)$. Какие из данных точек лежат на кубической параболе $y=\frac{3}{8}x^3$?
10. При каком значении параметра p точка M принадлежит кубической параболе, если:

    а) парабола имеет уравнение $y=\frac{p}{5}x^3$, а точка M имеет координаты $(-5;75)$;

    б) парабола имеет уравнение $y=\left(\frac{1}{2}+\frac{p+1}{3}\right)x^3$, а точка M имеет координаты $(4;224)$.
11. Рассмотрим график функции $y=3x^3$. Айтуар выбирает любое число x на отрезке $[-4;2]$ и умножает его куб на 3. Какой наибольший и какой наименьший результат может получиться у Айтуара?
12. Даны точки $A(10;-200)$, $B(5;-25)$, $C(1;-65)$, $D(-5;25)$. Какие из них являются общими точками графиков функций $y=-15x-50$ и $y=-0,2x^3$.
13. Изобразить множество точек $(x;y)$ координатной плоскости, для которых выполняется система условий $\begin{cases} y\ge -x, \\ y\ge -x^3. \end{cases}$
14. При каких значениях параметров a и b прямая $y=\frac{a}{3}x+b$ проходит через точку $P(3;-54)$ на графике функции $y=bx^3$?
15. Объем V шара радиуса r вычисляется по формуле $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

    А) Во сколько раз уменьшится объем шара, если его радиус уменьшить в полтора раза?
    Б) На сколько процентов увеличится объем шара, если его радиус увеличить на $33\frac{1}{3}\%$?

§8 Функция $y=\frac{k}{x}$, ее свойства и график

Упражнение 1. Приведите примеры длины x и высоты y десяти различных прямоугольников, площадь каждого из которых равна 6. Точки с соответствующими координатами $(x;y)$ отметьте на координатной плоскости.

Упражнение 2.

a) Пусть длина x прямоугольника площади 6 равна 60. Чему равна его высота y? Где на координатной плоскости расположена соответствующая точка с координатами $(x;y)$?

b) Если, начиная со значения $x=60$, увеличивать длину x прямоугольника без изменения его площади, что будет происходить с его высотой y? Постарайтесь описать, каким образом на координатной плоскости расположены соответствующие точки с координатами $(x;y)$?

c) Пусть длина x прямоугольника площади 6 равна $0{,}01$. Чему равна его высота y? Где на координатной плоскости расположена соответствующая точка с координатами $(x;y)$?

d) Если, начиная со значения $x=0{,}01$, уменьшать длину x прямоугольника без изменения его площади, что будет происходить с его высотой y? Постарайтесь описать, каким образом на координатной плоскости расположены соответствующие точки с координатами $(x;y)$?

Рассмотрим функцию $y=\frac{6}{x}$. Наша ближайшая цель – построить ее график. Если значение x положительно, то числа x и y можно трактовать, как соответственно длину и высоту прямоугольника с площадью 6. Следовательно, для положительных значений переменной x функция $y=\frac{6}{x}$ выражает зависимость высоты от длины. Постепенное изменение длины x прямоугольника приводит к постепенному изменению величины y. Это значит, что графиком функции $y=\frac{6}{x}$ на множестве $x>0$ является линия без разрывов. Результаты упражнений 1 и 2 позволяют нам без труда изобразить эту линию (рисунок 23).

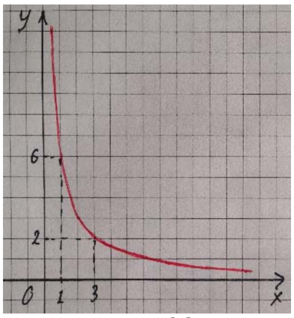

Рис. 23

Каким же образом выглядит график функции $y=\frac{6}{x}$ в области отрицательных значений переменной x? Заметим, что равенство $3=\frac{6}{2}$ равносильно равенству $-3=\frac{6}{-2}$. Это значит, что вместе с точкой $A(2;3)$ на графике данной функции точка с координатами $A'(-2;-3)$ также лежит на графике. Но точки $A(2;3)$ и $A'(-2;-3)$ расположены на координатной плоскости таким образом, что начало координат $O(0;0)$ является в точности серединой отрезка AA' (рис. 24).

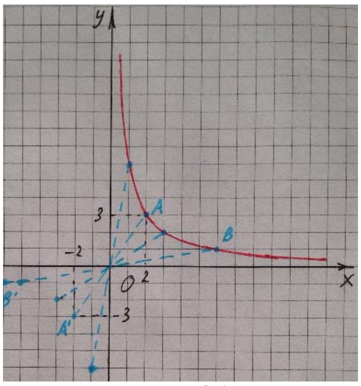

Рис. 24

В таком случае говорят, что точки A и A' симметричны друг другу относительно точки O. Точка A' симметрична точке A относительно точки O. В общем случае, пусть некоторая точка $B(x_0;y_0)$ принадлежит графику функции $y=\dfrac{6}{x}$. Это значит, что выполняется равенство $y_0=\dfrac{6}{x_0}$. Но это равенство равносильно равенству $-y_0=\dfrac{6}{-x_0}$, откуда, в свою очередь следует, что точка $B'(-x_0;-y_0)$ также принадлежит графику той же функции. Точка $B'(-x_0;-y_0)$ симметрична точке $B(x_0;y_0)$ относительно начала координат (рис. 24, рис. 25). Вывод: для любой точки графика $y=\dfrac{6}{x}$ с положительной абсциссой найдется симметричная ей относительно начала координат точка с отрицательной координатой. И наоборот. В общем, часть графика в области $x<0$ получается как симметричное отражение части графика в области $x>0$ относительно начала координат $O(0;0)$ (рис. 25).

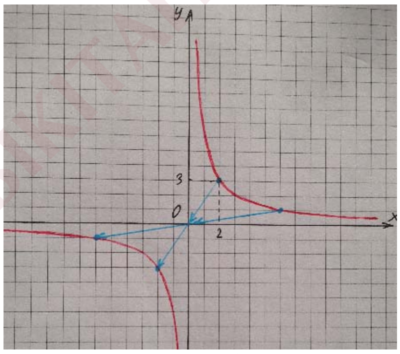

Рис. 25

В общем случае **любая функция вида $y=\dfrac{k}{x}$, называется обратной пропорциональностью.**

Предполагается, что $k-$ не равное нулю число. Если $k>0$, то график функции $y=\dfrac{k}{x}$ имеет такой же вид, что и при $k=6$. Графики обратных пропорциональностей для различных **положительных** значений k показаны на рисунке 26. Графиком любой обратной пропорциональности является **геометрическая фигура**, которая называется **гиперболой.** Получается, что гипербола состоит из двух симметричных частей, которые называются **ветвями гиперболы.**

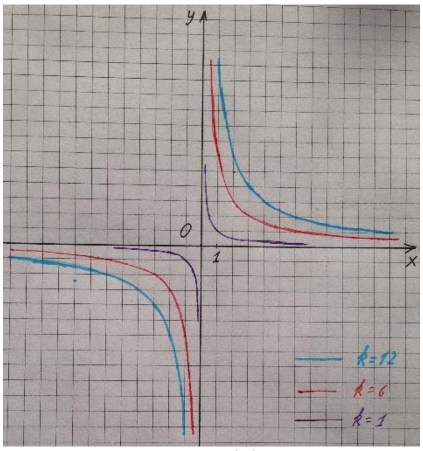

Рис. 26

Перечислим некоторые из свойств функций $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$.

1) Значение выражения $\frac{k}{x}$ мы можем вычислить для любого значения переменной x, кроме случая $x=0$. Это значит, что областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ является множество всех чисел, кроме нуля, $x\neq 0$ или, что то же самое, $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
2) Функция убывает на множествах $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(0;+\infty)$.
3) Множество значений функции состоит также из всех чисел, кроме 0. Действительно, для любого k мы не можем подобрать такое x, чтобы выполнялось равенство $0=\frac{k}{x}$. Это также хорошо видно на графиках.
4) Если рассматривать очень большие положительные значения переменной x, то соответствующие значения y оказываются очень маленькими положительными числами. Графически это выражается в том, что график «прижимается» к оси Ox «сверху» (рис. 26). Аналогичное «прижимание» к оси Ox «снизу» наблюдается, если переменная x принимает очень большие по модулю отрицательные значения. В таких случаях говорят, что **прямая Ox является горизонтальной асимптотой графика.** При малых значениях переменной x наблюдается «прижимание» ветвей гиперболы к оси Oy. В таких случаях говорят, что прямая Oy является **вертикальной асимптотой графика.**

На рисунке 27 изображены графики обратных пропорциональностей для различных **отрицательных** значений k.

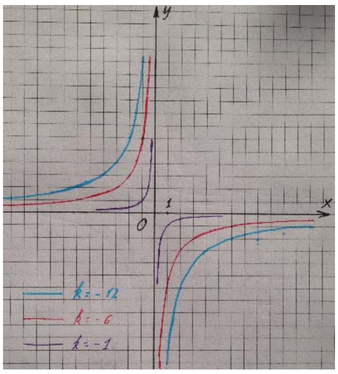

Рис. 27

Упражнение 3. Используя рисунок 27, описать свойства функций $y=\frac{k}{x}$ при $k<0$.

Предлагаем один из способов быстрого построения графика обратной пропорциональности. Заметим, что если точка $B(x_0;y_0)$ принадлежит гиперболе $y=\frac{k}{x}$, то точки $B'(-x_0;-y_0)$, $B''(y_0;x_0)$ и $B'''(-y_0;-x_0)$ также принадлежат гиперболе.Например, требуется построить график $y=-\dfrac{2}{x}$. Подставляя $x=2$, получаем точку $B(2;-1)$, лежащую на графике $y=-\dfrac{2}{x}$. Меняя знаки координат точки $B(2;-1)$ на противоположные, получаем и отмечаем точку $B'(-2;1)$. Меняя местами координаты точки $B(2;-1)$, получаем и отмечаем точку $B''(-1;2)$. Меняя местами координаты точки $B'(-2;1)$, получаем и отмечаем точку $B'''(1;-2)$. На самом деле, точки B', B'' и B''' легче строить, используя свойства симметрии: точка B' симметрична точке B относительно начала координат, а точки B'' и B''' симметричны точкам B и B' соответственно относительно прямой $y=x$ (рис. 28).Через полученные точки строим ветви гиперболы, прижимающиеся к осям координат (рис. 29).

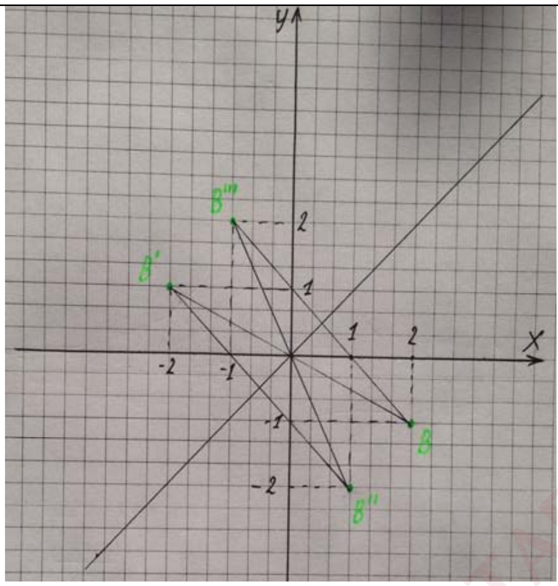

Рис. 28

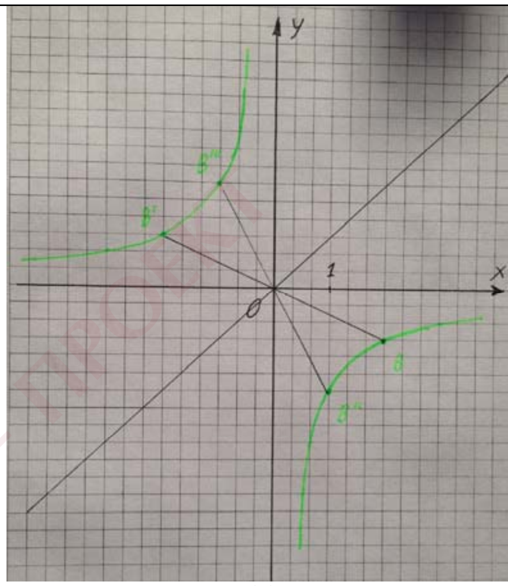

Рис. 29

Задачи
Часть 1

1. Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y=\dfrac{8}{x}$ и $y=-\dfrac{8}{x}$, выделив их разными цветами.
2. Найдите значение функции $y=-\dfrac{32}{x}$ в точке $x=2^7$.
3. Точка с координатами $(m;l)$ лежит на графике функции $y=\dfrac{125}{x}$. Найдите значение:

   а) координаты l, если $m=5^5$;
   б) величины m, если $l=5^5$.

Часть 2

4. Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y=\dfrac{10}{x}$ и $y=-\dfrac{10}{x}$, выделив их разными цветами.
5. Найдите значение функции $y=\dfrac{3^{65}}{x}$ в точке $x=3^{62}$.
6. Точка с координатами $(m;l)$ лежит на графике функции $y=\dfrac{10000}{x}$. Найдите значение:

   а) координаты l, если $m=2^4\cdot5^5$;
   б) величины m, если $l=2^6\cdot5^4$.

Глава 2

Одночлены и многочлены

§1 Одночлены и многочлены

Рассмотрим следующее утверждение: «*Для любых неотрицательных значений* x *и* y *выполняется неравенство* $x^3y^3-12x^2y^2+8x^3+8y^3\geq 0$.» Смысл данного утверждения в том, что какие бы конкретные неотрицательные числа мы ни подставляли вместо x и y, значение левой части не может оказаться отрицательным. Величины x и y могут принимать различные значения. Именно поэтому эти величины называются **переменными**. Левая часть неравенства $x^3y^3-12x^2y^2+8x^3+8y^3\geq 0$ представляет собой сумму нескольких слагаемых, каждое из которых есть произведение числа и степеней переменных и является **одночленом**. Выражение $x^3y^3-12x^2y^2+8x^3+8y^3$ является **многочленом**.

Определение. ***Произведение неотрицательных степеней переменных и нескольких чисел называется одночленом.***

Например, выражения x^3y^3, $-12x^2y^2$, $8x^3$, $8y^3$ являются одночленами. Вот еще несколько примеров: $-t^5u^{99}v$, $x^2a^7\cdot 5\cdot x^4$, $100k^3l\cdot 0{,}3m^8kn^0$, -58, $\frac{7}{43}x$, $f\cdot h\cdot f\cdot h\cdot 12\cdot f\cdot(-2)$, $x^4\cdot\frac{3}{100}\cdot x^3\cdot\frac{3}{10}\cdot x^2\cdot 9\cdot x$.

Определение. ***Сумма показателей переменных, входящих в одночлен, называется степенью одночлена. Любое число рассматривается как одночлен степени ноль.***

Определение. ***Произведение чисел, входящих в одночлен, называется коэффициентом одночлена. Коэффициентом одночлена, не содержащего числовых множителей, считается число 1 или −1 в зависимости от знака.***

Определение. ***Привести одночлен к стандартному виду − это значит перемножить степени переменных с одинаковыми основаниями и первым множителем записать его коэффициент.***

Изучите следующую таблицу и сделайте выводы.

Одночлен	Степень	Коэффициент	Стандартный вид
x^3y^3	6	1	x^3y^3
$-12x^2y^2$	4	-12	$-12x^2y^2$
$8x^3$	3	8	$8x^3$
$-t^5u^{99}v$	105	-1	$-t^5u^{99}v$
$x^2a^7\cdot 5\cdot x^4$	13	1	$5x^6a^7$
$100k^3l\cdot 0{,}3m^8kn^0$	13	30	$30k^4lm^8$
-58	0	-58	-58
$f\cdot h\cdot f\cdot h\cdot 12\cdot f\cdot(-2)$	5	-24	$-24f^3h^2$
$\frac{7}{43}x$	1	$\frac{7}{43}$	$\frac{7}{43}x$
$x^4\cdot\frac{3}{100}\cdot x^3\cdot\frac{3}{10}\cdot x^2\cdot 9\cdot x$	10	0,081	$0{,}081x^{10}$

Замечание. *Произведение любых одночленов есть снова одночлен.*

Определение. ***Сумма нескольких одночленов называется многочленом. Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен, есть степень многочлена.***

Пример 1. **«Сумасшедший многочлен».** Если сложить все одночлены первого столбца таблицы, то получится многочлен

$$P(x,y,t,u,v,a,f,h,k,l,m,n,)=$$
$$=x^3y^3-12x^2y^2+8x^3-t^5u^{99}v+x^2a^7\cdot 5x^4+100k^3l\cdot 0{,}3m^8kn^0-58+$$
$$+f\cdot h\cdot f\cdot h\cdot 12\cdot f\cdot(-2)+\frac{7}{43}x+x^4\cdot\frac{3}{100}\cdot x^3\cdot\frac{3}{10}\cdot x^2\cdot 9\cdot x\ .$$

Запись $P(x,y,t,u,v,a,f,h,k,l,m,n,)$ означает, что в записи одночленов данного многочлена участвуют переменные x, y, t, u, v, a, f, h, k, l, m, n. **Степень данного многочлена равна наибольшей из степеней среди всех одночленов, а именно 105.** Мы назвали этот многочлен сумасшедшим, так как такие искусственно составленные многочлены редко используются на практике.

Пример 2. «Однородные многочлены». **Если все одночлены многочлена имеют одинаковую степень r, то многочлен называется однородным степени r.** Например, многочлен $G(x,y)=3x-10y$ является однородным степени 1. Многочлен $F(x,y)=x^2-y^2+8xy$ является однородным степени 2.

Любой одночлен можно рассматривать как многочлен, состоящий из одного слагаемого. Отсюда следует также, что любое число можно рассматривать как многочлен степени 0. Многочлен, являющийся суммой двух одночленов, называют также **двучленом**. Многочлен, являющийся суммой трех одночленов, называют также **трехчленом**.

Пример 2. «Симметрические многочлены» В трехчлене x^2-xy+y^2 поменяем местами переменные x и y. Получим многочлен y^2-yx+x^2. От перестановки мест слагаемых сумма не изменяется. От перестанови мест множителей произведение не изменяется. Следовательно, первоначальный многочлен x^2-xy+y^2 и полученный y^2-yx+x^2 не отличаются друг от друга. **Если при замене любых двух переменных друг на друга многочлен не изменяется, то он называется *симметрическим*.** Вот еще несколько примеров симметрических многочленов:

$$P(a,b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\ ,$$
$$Q(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz\ ,$$
$$F(p,q,r)=p^4+q^4+r^4-5p^3q^3r-5q^3r^3p-5p^3r^3q\ .$$

Заметим также, что многочлены $P(a,b)$ и $Q(x,y,z)$ являются однородными степени 3.

Определение. ***Значением многочлена при данных числовых значениях его переменных называется результат подстановки этих значений вместо переменных.***

Например, значением многочлена $P(a,b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ при $a=1$ и $b=-2$ является число $P(1,-2)=1^3+3\cdot 1^2\cdot(-2)+3\cdot 1\cdot(-2)^2+(-2)^3=-1$.

Одним из наиболее важных типов многочленов являются многочлены от одной переменной.

Пример 3. «Линейные функции – многочлены». Выражения $3x-78$, $-453x$, $6x+3$, $-2x+5$ являются многочленами первой степени. Как вы уже знаете, такие многочлены называются еще линейными функциями. В общем случае многочлены первой степени имеют вид $P(x)=kx+m$, где k и m – некоторые числа, причем $k\neq 0$.

Пример 4. «Квадратный трехчлен – самая важная функция школьной математики». Многочлены второй степени, содержащие в своей записи только одну переменную, называются **квадратными трехчленами**. Иначе говоря, квадратные трехчлены имеют вид $Q(x)=ax^2+bx+c$, где a, b и с – некоторые числа, причем $a\neq 0$. (Почему $a\neq 0$?) Например,

$$Q_1(x)=2x^2+5x+6\ ,\ a=2\ ,\ b=5\ ,\ c=6\ ;$$
$$Q_2(x)=x^2-3x\ ,\ a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=0\ ;$$
$$Q_3(x)=-x^2+777\ ,\ a=-1\ ,\ b=0\ ,\ c=777\ ;$$
$$Q_4(x)=-7x^2\ ,\qquad a=-7\ ,\ b=0\ ,\ c=0\ .$$

Коэффициент a называется старшим коэффициентом, число c называется свободным членом.

В общем случае многочленом от одной переменной степени n называется функция вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

где a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 есть некоторые числа, $a_n \neq 0$, n – неотрицательное целое. Число a_n называется **старшим коэффициентом** многочлена, число a_0 называется его **свободным членом**. Например, $P(x) = 3x^5 - 11x^3 - x^2 + x + 7$ есть многочлен 5-ой степени со старшим коэффициентом $a_5 = 3$ и свободным членом $a_0 = 7$. Заметим также, что для данного многочлена $a_4 = 0$, $a_3 = -11$, $a_2 = -1$, $a_1 = 1$.

Часть 1

1. Определите степень одночлена:

а) 5; **в)** $13xy$; **д)** $34x^2yxt$;

б) $8x$; **г)** $21xyz$; **е)** $55xy^2z^3t^4$.

2. Выполните умножение:

а) $2x \cdot 19x$; в) $\frac{5}{7}a^2b^3 \cdot \frac{21}{45}a^4b^5$; д) $15m^4n^{14} \cdot \left(-1{,}5m^7n^{17}\right)$;

б) $-3x \cdot 17y$; г) $70c^5d^{10} \cdot 0{,}1c^{15}d^{10}$; е) $-\frac{1}{17}p^3q^{11}r^{18} \cdot \left(-340p^{17}q^9r^2\right)$.

3. Возведите в степень:

а) $\left(a^2\right)^4$; д) $\left(\left(cd\right)^2\right)^2$; и) $\left(-\left(e^2\right)^2\right)^2$;

б) $\left(a^4b^5\right)^3$; е) $\left(\left(-cd\right)^3\right)^3$; к) $\left(-3\left(-f^3\right)^3\right)^3$;

в) $\left(2a^{10}b^{15}\right)^4$; ж) $\left(4\left(-cd\right)^5\right)^2$; л) $\left(-\left(-e^4f^5\right)^6\right)^7$;

г) $\left(3\frac{1}{2}a^{25}b^{35}\right)^2$; з) $\left(-2\frac{1}{2}\left(c^2d^3\right)^5\right)^3$; м) $-\left(-\left(-e^4f^5\right)^6\right)^7$.

4. Представьте следующие выражения в виде n-ой степени одночлена:

а) x^2y^4, $n=2$; б) x^5y^{55}, $n=5$; в) $x^4y^{16}z^{20}$, $n=4$;

г) $256x^8y^{16}z^{24}$, $n=8$; д) $343x^{21}y^{27}z^{33}$, $n=3$; е) $1024x^{10}y^{20}z^{50}t^{60}$, $n=10$.

5. Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $x \cdot x^{99}$; ж) $\left(\frac{1}{7}x^3\right)^2$;

б) $\frac{1}{5}x^2 \cdot 2x^{198}$; з) $3x^5\left(\frac{1}{2}x^4\right)^3$;

в) $\left(-x^{19}\right)\cdot\left(-x^{81}\right)$; и) $\left(\frac{1}{5}x^8\right)^4 \cdot \left(5x^{11}\right)^3$;

г) $\left(2x^2\right)^2 \cdot \left(3x^3\right)^3$; к) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}x^5\right)^4 \cdot \left(9x^7\right)^3$;

д) $25\left(-\frac{1}{5}x^6\right)^2 \cdot \left(-x^4\right)^3$; л) $15^4 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}x^4\right)^4$;

е) $-36\left(-x^{10}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{12}x^{15}\right)^2$; м) $\left(16x^7\right)^2\left(-\frac{1}{4}x\right)^8\left(-2x^5\right)^4$;

6. Представьте одночлен в стандартном виде:

а) $a \cdot (ab)$; ж) $5abc \cdot \left(4a^2b^3c^4\right)^2$;

б) $(ab)\cdot(ac)$;

в) $(3ab)\cdot(abc)$;

г) $(4abc)\cdot(5bcd)$;

д) $3\cdot(4abc)\cdot(5abcd^2)$;

е) $\frac{1}{72}a\cdot(3abc)^2\cdot(2bcd^2)^4$;

з) $(6a^4b^5c^6)^2\cdot\left(\frac{1}{3}a^7b^8c^9\right)^3$;

и) $7(2a^3b^5c^{10}d)^6\cdot\left(\frac{1}{2}a^5b^3c^2d\right)^5$;

к) $100\cdot\left(\frac{1}{4}a^4bc\right)\cdot\left(\frac{1}{5}bcd\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}a^4d^5c^6\right)$.

л) $256\cdot(ab^2c^3)\cdot\left(\frac{1}{4}b^3c^4d^5\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}c^4d^5e^6\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}a^5b^6e^7\right)^4$.

м) $(-abc)^2\cdot\left(-(abc)^2\right)^3\cdot\left((-a^2b^2c^2)^3\right)^2\cdot\left(-(-a^3b^3c^3)^4\right)^5$.

7. Найти числовое значение одночлена:

а) $8a^3$ при $a=\frac{1}{2}$;

б) $125a^4b^2$ при $a=\frac{1}{5}$ и $b=-10$;

в) $192ab^2c^3$ при $a=18$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{4}$;

г) $ab^2c^3d^4$ при $a=100$, $b=50$, $c=\frac{1}{25}$, $d=\frac{1}{5}$.

8. Ширина прямоугольника равна a, а его длина больше ширины в 7 раз. Найдите площадь прямоугольника.

9. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если увеличить стороны в:
а) 2 раза; б) 5 раз; в) 10 раз; г) n раз.

10. Как изменится площадь прямоугольника если увеличить ширину в n, а длину m раз:
а) $n=2$, $m=3$; б) $n=5$, $m=10$; в) $n=1{,}5$, $m=8$; г) $n=4{,}5$, $m=12$.

11. Ширина прямоугольного паралеллепипеда равна n, а его длина 5 раз больше ширины, а его высота 6 раз больше длины. Найдите его обьем.

12. Как изменится обьем куба если:
а) стороны увеличатся 4 раза;
б) стороны уменьшатся в 3 раза;
в) стороны увеличатся 7 раз;
г) стороны уменьшатся в 8 раз.

Часть 2

1. Определите степень одночлена:

а) 0; **б)** $7x^ny$; **в)** $-16x^2y$; **г)** $-25x^2y^3z^3$; **д)** $41x^2y^3x^5t^6$; **е)** $-65x^{15}y^{25}z^{35}t^{45}$; **ж)** $9x^ny^n$ **з)** $-19x^{2n+3}y^nz^{n-3}$.

2. Выполните умножение:

а) $\frac{1}{512}x^{n+1}\cdot 2^{10}x^{n-1}$;

б) $-0{,}5x^{n-2}\cdot 20x^2y^n$;

в) $\frac{7}{25}a^2b^3\cdot\frac{125}{343}a^nb^m$;

г) $\frac{1}{25}c^{5n-6}d^{3m+5}\cdot 100c^6d^{2m-5}$;

д) $-35a^{5n+3m}b^{10}\cdot\left(-3{,}5a^{n-4m}b^{n-10}\right)$;

е) $-\frac{1}{27}p^{2n-1}q^{2m-3}r^{2k-4}\cdot\left(-243pq^3r^4\right)$.

3. Возведите в степень:

а) $(a^n)^4$;

б) $(a^{2n}b^{5m})^4$;

в) $(3^na^{m+1,5}b^{k-2,5})^8$;

г) $\left(4\frac{1}{3}a^{12-n}b^{17-6m}\right)^3$;

д) $\left((cd^2)^n\right)^m$;

е) $\left(-(-c^3d)^{2n}\right)^7$;

ж) $\left(-5(-c^4d^5)^{6n}\right)^4$;

з) $\left(-1\frac{1}{4}(-c^3d^4)^4\right)^4$;

и) $\left(-(-2e^n)^2\right)^2$;

к) $\left(4(f^3)^m\right)^{3n}$;

л) $\left(-(e^mf^n)^p\right)^{2q}$;

м) $-\left(-(-e^4f^5)^{8n}\right)^9$.

4. Представьте следующие выражения в виде n-ой степени одночлена:

а) x^6y^{8n}, $n=2$;

б) $x^{16n}y^{32m}z^{48p}$, $n=8$;

в) $-3125x^{10}y^{50n}$, $n=5$;

г) $727x^{18m+6}y^{9n-3}z^{30p+12}$, $n=3$;

д) $1296x^{16m-4}y^{28n+8}z^{32p+36}$, $n=4$;

е) $1024x^{10m-10}y^{20n+40}z^{50p-30}t^{80q+120}$, $n=10$.

5. Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $x^{101}\cdot x^{199}$;

б) $\frac{1}{35}x^{6}\cdot 7x^{154}$;

в) $-\left(-x^{21}\right)\cdot\left(-x^{79}\right)$;

г) $\left(4x^{3}\right)^{4}\cdot\left(-x^{5}\right)^{6}$;

д) $-36\left(-\frac{1}{18}x^{11}\right)^{2}\cdot\left(-x^{8}\right)^{7}$;

е) $-34\left(-x^{12}\right)^{4}\cdot\left(-\frac{1}{17}x^{25}\right)^{2}$;

ж) $\left(\frac{1}{12}x^{13}\right)^{2}$;

з) $81x^{10}\left(\frac{1}{27}x^{5}\right)^{2}$;

и) $\left(\frac{1}{16}x^{9}\right)^{4}\cdot\left(4x^{17}\right)^{8}$;

к) $\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}x^{7}\right)^{6}\cdot\left(9x^{7}\right)^{7}$;

л) $34^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}x^{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{17}x^{3}\right)^{4}$;

м) $\left(35x^{7}\right)^{2}\left(-\frac{1}{7}x^{3}\right)^{2}\left(-\frac{1}{5}x^{6}\right)^{3}$.

6. Представьте одночлен в стандартном виде:

а) $a^{2}\cdot\left(ab^{3}\right)$;

б) $\left(a^{3}b^{4}\right)\cdot\left(ac^{4}\right)$;

в) $\left(-2a^{2}b^{3}\right)\cdot\left(-abc^{5}\right)$;

г) $\left(-\frac{1}{6}a^{2}b^{2}c^{3}\right)\cdot\left(18bcd^{5}\right)$;

д) $-2\cdot\left(-1{,}5a^{2}b^{3}c^{6}\right)\cdot\left(6a^{3}b^{2}d^{6}\right)$;

е) $100a\cdot\left(0{,}1a^{2}b^{4}c^{6}\right)^{2}\cdot\left(20bcd^{13}\right)$;

ж) $3a^{2}b^{5}c^{8}\cdot\left(3a^{3}b^{4}c^{5}\right)^{3}$;

з) $\left(-a^{3}b^{4}c^{5}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}a^{8}b^{9}c^{10}\right)^{4}$;

и) $2^{6}\left(5a^{n}b^{m}c^{p}d\right)^{6}\cdot\left(\frac{1}{10}a^{p}b^{n}c^{m}d\right)^{5}$;

к) $2^{10}\cdot\left(a^{m-2}b^{n+2}c^{p-8}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}b^{2}c^{4}d^{8}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{512}a^{2}d^{0}c^{2}\right)$;

л) $169\cdot(abc)\cdot\left(\frac{1}{14}b^{13}c^{14}d^{15}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{13}c^{7}d^{8}e^{9}\right)^{2}\cdot\left(a^{5}b^{6}e^{7}\right)^{3}$;

м) $(-abc)^{3}\cdot\left(-(-abc)^{3}\right)^{2}\cdot\left(\left(-a^{8}b^{18}c^{28}\right)^{3}\right)^{0}\cdot\left(-\left(-a^{7}b^{7}c^{7}\right)^{2}\right)^{2}$.

7. Найти числовое значение одночлена:

а) $512a^{10}$ при $a=-\frac{1}{2}$;

б) $144a^{2}b^{3}$ при $a=\frac{1}{6}$ и $b=-5$;

в) $289ab^{5}c^{2}$ при $a=4$, $b=3$, $c=\frac{1}{34}$;

г) $ab^{2}c^{3}d^{4}$ при $a=1000$, $b=0{,}1$, $c=\frac{1}{2}$, $d=4$.

8. Ширина прямоугольника равна $2a$, а его длина больше ширины в 9 раз. Найдите площадь прямоугольника.

9. Во сколько раз уменьшится площадь квадрата, если уменьшить стороны в:

а) 3 раза; б) 4 раз; в) 6 раза; г) n раз.

10. Как изменится площадь прямоугольника если уменьшить ширину в n, а длину m раз:

а) $n=2{,}5$, $m=4$; б) $n=1{,}5$, $m=6$; в) $n=8$, $m=10$; г) $n=5{,}5$, $m=2$.

11. Ширина прямоугольного паралеллепипеда равна n, а его длина 7 раз больше ширины, а его высота 3 раз меньше длины. Найдите его обьем.

12. Как изменится обьем куба если:

а) стороны увеличатся 3 раза;

б) стороны увеличатся 5 раз;

в) стороны уменьшатся в 9 раза;

г) стороны уменьшатся в 10 раз.

Ответы

Часть 1

1. а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 5; е) 10;

2. а) $38x^{2}$; б) $-51xy$; в) $\frac{1}{3}a^{6}b^{8}$; г) $7c^{20}d^{20}$; д) $-22{,}5m^{11}n^{31}$; е) $20p^{20}q^{20}r^{20}$.

3. а) a^{8}; б) $a^{12}b^{15}$; в) $16a^{40}b^{60}$; г) $12\frac{1}{4}a^{50}b^{70}$; д) $c^{4}d^{4}$; е) $-c^{9}d^{9}$; ж) $16c^{10}d^{10}$; з) $-6\frac{1}{4}c^{30}d^{45}$;

и) e^{8}; к) $27f^{27}$; л) $-e^{168}f^{210}$; м) $-e^{168}f^{210}$.

4. а) $\left(xy^2\right)^2$; б) $\left(xy^{11}\right)^5$; в) $\left(xy^4z^5\right)^4$; г) $\left(2xy^2z^3\right)^8$; д) $\left(7x^{21}y^{27}z^{33}\right)^3$; е) $\left(2xy^2z^5t^6\right)^{10}$.

5. а) x^{100}; б) $\frac{2}{5}x^{200}$; в) x^{100}; г) $108x^{13}$; д) $-x^{24}$; е) $\frac{1}{4}x^{60}$; ж) $\frac{1}{49}x^6$; з) $\frac{3}{8}x^{17}$; и) $\frac{1}{5}x^{65}$; к) $3x^{41}$;
л) $3x^{25}$; м) $16x^{42}$.

6. а) a^2b; б) a^2bc; в) $3a^2b^2c$; г) $20ab^2c^2d$; д) $60a^2b^2c^2d^2$; е) $2a^3b^6c^6d^8$; ж) $80a^5b^7c^9$; з) $\frac{4}{3}a^{29}b^{34}c^{39}$;
и) $14a^{43}b^{45}c^{70}d^{11}$; к) $\frac{1}{3}a^8b^3c^9d^7$; л) $\frac{1}{27}a^{21}b^{32}c^{23}d^{25}e^{56}$; м) $a^{80}b^{80}c^{80}$. 7. а) 1; б) 20; в) 6; г) $\frac{16}{625}$.

8. а) $7a^2$. 9. а) 4 раза; б) 25 раз; в) 100 раз; г) n^2 раз. 10. а) 6 раз; б) 50 раз; в) 12 раз;
г)54 раза; 11. $150n^3$. 12. а) 64 раза; б) 27 раза; в) 343 раз; г) 512 раза.

Часть 2

1. а) 0; б) $n+1$; в) 3; г) 8; д) 16; е) 120; ж) $2n$; з) $4n$;

2. а) x^{2n}; б) $-10x^ny^n$; в) $\frac{5}{49}a^{n+2}b^{m+3}$; г) $4c^{5n}d^{5m}$; д) $122{,}5a^{6n-m}b^n$; е) $9p^{2n}q^{2m}r^{2k}$.

3. а) a^{4n}; б) $a^{8n}b^{20m}$; в) $3^{8n}a^{8m+12}b^{8k-20}$; г) $18\frac{7}{9}a^{36-3m}b^{51-18m}$; д) $c^{mn}d^{2mn}$; е) $-c^{42n}d^{14n}$; ж) $3125c^{96n}d^{120n}$;
з) $39\frac{1}{16}c^{48}d^{64}$; и) $16e^{4n}$; к) $4^{3n}f^{9mn}$; л) $e^{2mpq}f^{2npq}$; м) $e^{288n}f^{360n}$.

4. а) $\left(x^3y^{4n}\right)^2$; б) $\left(x^{2n}y^{4m}z^{6p}\right)^8$; в) $\left(-5x^2y^{10m}\right)^5$; г) $\left(9x^{6m+2}y^{3n-1}z^{10p+4}\right)^3$; д) $\left(6x^{4m-1}y^{7n+2}z^{8p+9}\right)^4$;
е) $\left(2x^{m-1}y^{2n+4}z^{5p-3}t^{8q+12}\right)^{10}$.

5. а) x^{300}; б) $\frac{1}{5}x^{160}$; в) $-x^{100}$; г) $256x^{42}$; д) $\frac{1}{9}x^{78}$; е) $-\frac{2}{17}x^{98}$; ж) $\frac{1}{144}x^{26}$; з) $\frac{1}{9}x^{20}$; и) x^{172}; к) x^{91};
л) $34x^{20}$; м) $-\frac{1}{5}x^{38}$.

6. а) a^3b^3; б) $a^4b^4c^4$; в) $2a^3b^4c^5$; г) $-3a^2b^3c^4d^5$; д) $18a^5b^5c^6d^6$; е) $20a^5b^9c^{13}d^{13}$;

7. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{4}{125}$; в) 243; г) 320. 8. $32a^2$. 9. а) 9 раз; б) 16 раз; в) 36 раз; г) n^2 раз.

10. а) 10 раз уменьшится; б) 9 раз уменьшится; в) 80 раз уменьшится;
г) 11 раз уменьшится. 11. $147n^3$. 12. а) 27 раз увеличится; б) 125 раз увеличится;
в) 729 раз уменьшится; г) 1000 раз уменьшится.

§ 2 Подобные слагаемые и стандартный вид многочлена.

Произведение только степеней одночлена (без его коэффициента) называется его **буквенной частью.** Например, буквенные части одночленов $4zy^5$, $-y^5x^4$, $-3x^4y^5z$ равны соответственно zy^5, y^5x^4, x^4y^5z.

Рассмотрим одночлены $5zy^5x^4$, $-3x^4y^5z$, y^5zx^4. Так как от перестановки множителей произведение не меняется, то буквенные части данных одночленов равны между собой: $zy^5x^4=x^4y^5z=y^5x^4z$. Если быть более точным, то **при любых значениях переменных** x, y и z значения выражений zy^5x^4, x^4y^5z и y^5x^4z равны между собой. Следовательно, в дальнейшем можно говорить, что одночлены $5zy^5x^4$, $-3x^4y^5z$, y^5zx^4 имеют одинаковые буквенные части.

Определение. ***Одночлены, имеющие одинаковые буквенные части, называются подобными.***

Распределительный закон $ab+ac=a(b+c)$ и переместительный закон $ab=ba$ обеспечивают возможность складывать и отнимать подобные слагаемые. Например, $6x+5x=x\cdot 6+x\cdot 5=x(6+5)=x\cdot 11=11x$. Однако нет необходимости каждый раз производить такие длинные преобразования. Достаточно понять, что при сложении или отнимании подобных одночленов буквенная часть может быть вынесена за скобки, внутри которых останется соответствующая сумма или разность коэффициентов. Отсюда следует, что подобные слагаемые можно складывать или отнимать, складывая или отнимая их коэффициенты. Например:

$$6x+5x=11x\ ;$$
$$3xa-2xa=1xa=xa\ ;$$
$$7nt+3tn=10nt\ ;$$
$$-7d^2c+3cd^2=-4d^2c\ ;$$
$$5zy^5x^4-\left(-3x^4y^5z\right)+y^5zx^4=\left(5+3+1\right)y^5x^4z=9y^5x^4z\ .$$

Коэффициенты 1 или -1 не пишутся перед одночленами, но подразумеваются при выполнении арифметических операций. Например:

$$3ab-ba=2ab\ ;$$
$$pq^2-7q^2p-2pq^2=\underbrace{\left(1-7-2\right)}_{устно}q^2p=8q^2p\ .$$

Как вы уже знаете, сумма нескольких одночленов есть многочлен. Среди одночленов суммы могут оказаться подобные. Если сложить все подобные между собой слагаемые, то полученная сумма окажется проще исходной. Например, пусть дан многочлен

$$\underline{12xy}-\underline{\underline{14x^2}}-\underline{5yx}+\overline{3y^2}\underline{\underline{-x^2}}+\overline{\overline{5}}+\overline{7y^2}-\overline{\overline{7}}+\underline{\underline{15x^2}}\ .$$

Подобные между собой слагаемые подчеркнуты одинаково сверху или снизу. Так как $12xy-5yx=7xy$, $-14x^2-x^2+15x^2=0$, $3y^2+7y^2=10y^2$, $5-7=-2$, то

$$12xy-14x^2-5yx+3y^2-x^2+5+7y^2-7+15x^2=7xy+10y^2-2\ .$$

Описанный процесс называется **приведением подобных** слагаемых.

Для того, чтобы не применять много различных типов подчеркивания или выделения, предлагается следующий алгоритм приведения подобных слагаемых.
1-ый шаг. Подчеркиваем первый слева не подчеркнутый член и, двигаясь слева направо, подчеркиваем все подобные ему, одновременно подсчитывая сумму коэффициентов. Записываем результат.
2-ой шаг. Повторяем 1-ый шаг до тех пор, пока остаются еще не подчеркнутые члены.
Приведем пример.

Запись после 1-го этапа	$\underline{12xy}-14x^2\underline{-5yx}+3y^2-x^2+5+7y^2-7+15x^2=7xy$
Запись после 2-го этапа	$\underline{12xy}\underline{-14x^2}\underline{-5yx}+3y^2\underline{-x^2}+5+7y^2-7+\underline{15x^2}=7xy$
Запись после 3-го этапа	$\underline{12xy}\underline{-14x^2}\underline{-5yx}+\underline{3y^2}\underline{-x^2}+5+\underline{7y^2}-7+\underline{15x^2}=7xy+10y^2$
Запись после 4-го этапа	$\underline{12xy}\underline{-14x^2}\underline{-5yx}+\underline{3y^2}\underline{-x^2}+\underline{5}+\underline{7y^2}\underline{-7}+\underline{15x^2}=7xy+10y^2-2$

Что получится, если к 6 яблокам прибавить еще 5 яблок? Ну конечно, 11 яблок. Точно также и сумма $6x+5x$ означает, что к шести иксам добавили еще пять иксов и, конечно же, получили 11 иксов. А что получится, если к скорости грузовика 60 км/ч прибавить 50 апельсинов? Вот также и слагаемые, которые не являются подобными – не складываются.

Определение. ***Многочленом стандартного вида называется многочлен, в котором все одночлены приведены к стандартному виду и приведены все подобные слагаемые.***
Из данного определения следует, что нужно сделать, чтобы привести многочлен к стандартному виду. Во-первых, преобразовать все одночлены к стандартному виду. Во-вторых, привести подобные слагаемые.

Задачи
Часть 1
1. Определите, какие из многочленов являются квадртными трехчленами:
а) $F(x)=3x^2+5x+2$; $G(x)=-2+8x+10x^2$; $H(x)=2x+5$.
б) $F(x)=-7+x^2$; $G(x)=45x+10x^2$; $H(x)=17x^2$.
в) $F(x)=5$; $G(x)=5x-6x^2$; $H(x)=22-16x^2$.

г) $F(x)=x^3+26x^2+5x-17$; $G(x)=2x^4+26x^3+5x-1$; $H(x)=-x^5+x^2$.

2. Число a - старший коээфициент многочлена , а число b свободный член, n степень многочлена. Тогда:

а) Найдите $a+b+n$, если $P(x)=8x^4+7x-9$;

б) Найдите abn , если $P(x)=301x^{302}-9x$;

в) Найдите $(a+b)^n$, если $P(x)=-123x^{120}+45x^{100}+122$;

г) Найдите $(an)^b$, если $P(x)=101x^{101}-55x^{11}+x^3-x^2+x$.

3. Определите, какие из следующих многочленов являются однородными:

а) $F(x,y)=2x^2+5xy+y^2$; $G(x,y)=x^3+2x^2y+3xy^2+4y^3$; $H(x)=x^2+31x$.

б) $F(x,y)=2x^2y^2+10x^2y+y^3$; $G(x,y)=5x^5+22x^6y-12xy^7-14y^{10}$; $H(x)=2x+5$.

4. Представьте многочлен в стандартном виде:

а) $P(x)=10x^{10}-x^5+x^3-x^2+12x^{10}+7x^5+6x^3+40x^2+13x+6$;

б) $Q(x,y)=11x^2+17xy+23y^2-25x^2-37xy-40y^2$;

в) $U(x,y)=x^2-70xy^2+7x^2y+45y^2-18x^2+2yx^2-45y^2+40y^2x$;

г) $R(x,y)=x^2\left(xy^2\right)^2+x^2y+y^2x-x^4y^4$.

5. Найдите значение многочлена:

а) a^2+ab+b^2 при $a=-3$, $b=7$;

б) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ при $a=8$, $b=-9$, $c=2$;

в) $a^3+b^3+c^3+3abc$, при $a=2$, $b=3$, $c=4$;

г) $abc+bcd+dac$ при $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$, $d=4$;

6. Найдите значение многочлена:

а) $ax^2+3bx-5ax^2+b^2$ при $a=0,25$, $b=4$, $x=5$;

б) $xy^2-x^2+y^2+5y^2x+y^2x$ при $x=-4$, $y=5$;

в) $x^3+y^3+z^3+3x^2yz-3zyx^2$ при $x=0,1$; $y=0,2$; $z=0,3$;

г) $5ax^2-7x^2+9x^2+4x^2a$ при $a=-6$, $x=3$.

Часть 2

1. Определите, какие из многочленов являются квадртными трехчленами:

а) $F(x)=-13x^2+4x-7$; $G(x)=-12+63x-x^2$; $H(x)=x-11$.

б) $F(x)=17-5x^2$; $G(x)=10x^2-8$; $H(x)=-87+x^2$.

в) $F(x)=4x$; $G(x)=15x+5x^2$; $H(x)=12-21x^2+x$.

г) $F(x)=-8x^3-90x^2+15x+28$; $G(x)=-3x^4+2+5x$; $H(x)=-8x^8+88x^3$.

2. Число a - старший коээфициент многочлена , а число b свободный член, n степень многочлена. Тогда:

а) Найдите $a-b-n$, если $P(x)=-9x^7+7x+11$;

б) Найдите $\dfrac{bn}{a}$, если $P(x)=120x^{60}-9x+2$;

в) Найдите $(a-b)^n$, если $P(x)=123x^{112}-21x^{75}+124$;

г) Найдите $\left(\dfrac{a}{n}\right)^b$, если $P(x)=11x^{111}-28x^{19}+x$.

3. Определите, какие из следующих многочленов являются однородными:

а) $F(x,y)=-x^2+7xy+9y^2$; $G(x,y)=8x^3-4x^2y++11xy^2-18y^3$; $H(x,y)=x^2-31xy$.

б) $F(x,y)=-9x^2y^2+12x^2y+27y^3+y^4$; $G(x,y)=60x^{11}+22x^{10}y+25xy^{11}-y^{12}$; $H(x,y)=0,5x+2y$.

4. Представьте многочлен в стандартном виде:

а) $P(x)=12x^{12}-5x^5+2x^3+5x^2-12x^{12}+17x^5-16x^3+30x^3-5x^2+9$;

б) $Q(x,y)=-23x^2+30xy+13y^2+25x^2-29xy+17y^2$;

в) $U(x,y)=5x^2+40xy^2-8x^2y+13y^2+28x^2-25yx^2+20y^2-73y^2x$;

г) $R(x,y)=x^6(xy^3)^3-5xy^2+6y^2x-x^9y^9$.

5. Найдите значение многочлена:

а) a^2-ab-b^2 при $a=-4$, $b=8$;

б) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ при $a=22$, $b=-24$, $c=2$;

в) $a^3+b^3+c^3-3abc$, при $a=-1$, $b=2$, $c=-3$;

г) $abc-bcd-dac$ при $a=-4$, $b=-3$, $c=-5$, $d=0{,}5$;

6. Найдите значение многочлена:

а) $-ax^2+2bx+6ax^2-7b^2$ при $a=3$, $b=-1$, $x=2$;

б) $xy^2+x^2-y^2+6yx-y^2x$ при $x=-2$, $y=6$;

в) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ при $x=-2$; $y=-3$; $z=4$;

г) $3ax^2-8x^2+7x^2-4x^2a$ при $a=-5$, $x=-9$.

Ответы:

Часть 1

1. а) F , G ; б) F , G , H ; в) G , H ; г) ни одна из многочленов.

2. а) 3 ; б) 0 ; в) 1 ; г) 1 . 3. а) F , G ; б) все не однородные.

4. а) $22x^{10}+6x^5+7x^3+39x^2+13x+6$; б) $-14x^2-20xy-17y^2$; в) $-17x^2+9x^2y-30xy^2$; г) x^2y+xy^2 ;

5. а) 57 ; б) 1 ; в) 171 ; г) 26 . 6. а) -509 ; б) -691 ; в) $0{,}036$; г) -468 .

Часть 2

1. а) F , G ; б) F , G , H ; в) G , H ; г) ни одна из многочленов.

2. а) -27 ; б) 1 ; в) 1 ; г) 1 . 3. а) F , G , H ; б) H .

4. а) $12x^5+16x^3+5x^2+9$; б) $2x^2+xy+20y^2$; в) $33x^2+33y^2-33x^2y-33xy^2$; г) xy^2 ;

5. а) -16 ; б) 0 ; в) -126 ; г) $-77{,}5$. 6. а) 49 ; б) -104 ; в) -43 ; г) -126 .

§ 3 Умножение одночлена на многочлен

Распределительный закон гласит, что для любых чисел a , b и c выполняется тождество

$$a(b+c)=ab+ac .$$

Из распределительного закона и переместительного закона сложения следует, что

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad .$$

Действительно,

$$a(b+c+d)=a((b+c)+d)=a(b+c)+ad=ab+ac+ad .$$

Аналогично можно доказать, что для любых значений переменных

$$a(b+c+d+e+f+\ldots)=ab+ac+ad+ae+af+\ldots$$

Мы получили правило произведения одночлена на многочлен:

Произведение одночлена на многочлен равно сумме произведений одночлена на каждый из членов многочлена.

Процедура умножения одночлена на многочлен называется еще ***раскрытием скобок.***

Упражнение 1.«Какой способ лучше?». *Вычислить двумя способами значение каждого из выражений и сравнить между собой сложность вычислений:*

а) $\frac{24}{17}\left(\frac{17}{12}+\frac{51}{8}\right)$;

b) $\frac{4}{5}\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{8}\right)$.

Упражнение 2. «Один на всех». *Применяя распределительный закон* $a(b+c)=ab+ac$ *, умножьте одночлен на многочлен:*

а) $2(b+c)$;

b) $4(1-x)$;

c) $a^3(3-a+a^2)$.

Упражнение 3. «Все на одного». *Переместительный закон умножения гласит, что от перестановки множителей произведение не изменяется. Например, $(b+c)a=a(b+c)$. Применяя переместительный закон умножения и правило умножения одночлена на многочлен, раскройте скобки:*

a) $(5+c)x$;

b) $(f+h-fh)fh$;

c) $x^2(y-x)y^2$.

Упражнение 4. «Умножение на минус». *Под знаком «минус» перед суммой в скобках подразумевается множитель (-1). Например, $-(x-y)=-x-(-y)=-x+y=y-x$. Представьте в виде многочлена:*

a) $-4(3c-5)$;

b) $-4m(-3m-5m^2)$;

c) $-(-u+v)-v(-1-u)-(uv-3u)$.

Упражнение 5. «Приводим подобные слагаемые». *Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:*

a) $2x(x-5)-x(2x-7)+3x$;

b) $3a(4b+ab)-5b(2a+a^2)-2ab(1-5a)$;

c) $-5p^2(-3p+5x-1)(-2x^3)-6x(x^2p^2-x^3p^2+p^3x^2)$.

Решение упражнения 1. *Для каждого из числовых выражений существует два способа вычисления. Первый заключается в выполнении действия сначала в скобках, а затем выполнения умножения. Второй состоит в применении распределительного закона. Для примера пункта a) более удобен второй способ:*

$$\frac{24}{17}\left(\frac{17}{12}+\frac{51}{8}\right)=\frac{24}{17}\cdot\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\cdot\frac{51}{8}=2+9=11.$$

Для примера пункта b) более удобен первый способ:

$$\frac{4}{5}\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{8}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{16-21}{56}=-\frac{1}{14}.$$

Решение упражнения 2.

a) $2(b+c)=2b+2c$;

b) $4(1-x)=4-4x$;

c) $a^3(3-a+a^2)=3a^3-a^4+a^5$.

Решение упражнения 3.

a) $(5+c)x=x(5+c)=5x+cx$. *Заметим, что переместительный закон на первом шаге можно было не применять. Можно было сразу умножить каждый из членов суммы $(5+c)$ на x. Так и поступим в следующем примере.*

b) $(f+h-fh)fh=f\cdot fh+h\cdot fh-fh\cdot fh=f^2h+h^2f-f^2h^2$.

c) $x^2(y-x)y^2$. *В данном примере лучше последний из множителей «перенести в начало»:* $x^2(y-x)y^2=x^2y^2(y-x)=x^2y^3-x^3y^2$.

Решение упражнения 4.

a) *При умножении одночлена* -4 на каждый из членов разности $(3c-5)$ пользуемся **правилом умножения знаков: минус на плюс дают минус, минус на минус дают плюс:** $-4(3c-5)=-12c+20$.

b) *Поступаем аналогично:* $-4m\left(-3m-5m^2\right)=12m^2+20m^3$.

c) *Аналогично:* $-(-u+v)-v(-1-u)-(uv-3u)=u-v+v+vu-uv+3u=4u$.

Решение упражнения 5.*Аккуратно раскрываем скобки, внимательно следя за знаками.*

a) $2x(x-5)-x(2x-7)+3x=2x^2-10x-2x^2+7x+3x=0$;

b) $3a(4b+ab)-5b\left(2a+a^2\right)-2ab(1-5a)=12ab+3a^2b-10ba-5ba^2-2ab+10a^2b=8a^2b$;

c) $-5p^2(-3p+5x-1)\left(-2x^3\right)-6x\left(x^2p^2-x^3p^2+p^3x^2\right)=$.

$=10p^2x^3(-3p+5x-1)-6x\left(x^2p^2-x^3p^2+p^3x^2\right)=$

$=-30p^3x^3-50p^2x^4-10p^2x^3-6x^3p^2+6x^4p^2-6x^3p^3=$

$=-36p^3x^3-44x^4p^2-16x^3p^2$.

Задачи
Часть 1

1. Выполните действие:

а) $4(x+y)$; д) $a(x-y)$; и) $4b(c-12d)$;

б) $5(x-3y)$; е) $a\left(x^2+a\right)$; к) $8c^2(6c+14cd)$;

в) $6\left(x^2+y^2-9\right)$; ж) $a^2\left(y^2+ay+a^2\right)$; л) $c^4d\left(11c^2-13cd\right)$;

г) $7(2ax-3ay+4)$; з) $a^3\left(13z^3+17az^4-19a^2\right)$; м) $2bcd(15bc+17cd+19bd)$.

2. Раскройте скобки:

а) $-(m+n)$; г) $-(m-n)$; ж) $-(-m+n)$; к) $-(-m-n)$;

б) $-2(p+2q)$; д) $-3(2p-3q)$; з) $-4(-3p+4q)$; л) $-5(-4p-5q)$;

в) $-17\left(x^2+2xy+y^2\right)$; е) $-16\left(x^2-2xy+y^2\right)$; и) $-15\left(-x^2-3xy+2y^2\right)$; м) $-14\left(-x^2-xy-y^2\right)$.

3. Выполните умножение:

а) $-a(b+c)$; д) $-2y(3z+4t)$; и) $-x^2\left(x^2+y^2\right)$;

б) $-a(b-c)$; е) $-3y(4z-5t)$; к) $-x^4\left(x^2-xy\right)$;

в) $-a(-b+c)$; ж) $-4y(-5z+6t)$; л) $-2x^3\left(-x^7+x^2y^5\right)$;

г) $-a(-b-c)$; з) $-5y(-6z-7t)$; м) $-7x^5\left(-2x^5-5x^5y^{10}\right)$;

4. Представьте многочлен в стандартном виде, предварительно раскрыв скобки:

а) $2(x+5)-3(3x-10)$; д) $xy+y^2-x(x-y)+x^2$;

б) $-7(11x+15)-2(-8x+9)+x+5$; е) $5xy(2x-5y)-8xy(7x-8y)+46x^2y-39xy^2$;

в) $12(-13x-18)-3(19x+29)-(-216x-303)$; ж) $6x^2(-x-y-1)-9x^2(-5x-6y)+6x^2$;

г) $7(-9x-11)-4(13x-17)-(15-10x)+105x+25$; з) $7xy(xy-xy)-10xy\left(xy+y^2\right)+9xy\left(xy+y^2\right)$.

5. Решите уравнение:

а) $2x=4$; ж) $-0,5x=6$;

б) $3x-9=0$; з) $-0,3x-2,1=0$;

в) $7(x+1)=0$; и) $0,7(x-4)+0,3x=0$;

г) $9(x-3)=18$; к) $0,8(30-x)+3\left(-\frac{1}{3}-0,5x\right)=0$;

д) $17(x+1)-34=0$; л) $7,7(x+10)-61x=3,7(x-10)$;

е) $8(x+5)=7(x-7)$; м) $5(1{,}5x+20{,}8)-3(-8x+7)+4{,}5(2x+4)=0$.

Часть 2

1. Выполните действие:

а) $0{,}5(x-y)$; д) $a(x+y-z)$; и) $4ab(c+2{,}5cd)$;

б) $3{,}5(x+4y)$; е) $a(x^2-a^2)$; к) $8c^2(4{,}5c-22cd^3)$;

в) $1{,}6(x^2-y^2+10)$; ж) $a^2(ay+a^2y-5a^8)$; л) $c^5d^6(17c+19c^2d)$;

г) $17(0{,}5ax-5ay-5)$; з) $a^7(z^7-9az^8-13a+1)$; м) $3bcd(21bc-29bcd+37bd)$.

2. Упростите выражение:

а) $-(3m+n)+4m$; г) $-(3m-n)+4m$; ж) $-(-2m+5n)+5n$; к) $-(-3m-9n)+6m$;

б) $-2(4p-5q)-2q$; д) $-9(6p-5q)+55p-44q$; з) $-9(-9p+7q)-80p+62q$ л) $-7(-3p-q)-14p$;

в) $-2(x^2+xy+y^2)+2x^2+2xy$; е) $-10(x^2-xy-y^2)+10x^2$; и) $-2(-x^2-xy-y^2)-4x^2$; м) $-2(x^2+6xy-5y^2)-10y^2$.

3. Выполните умножение:

а) $-a(2b+c)+ab$; д) $-3y(2z+t)+3yz$; и) $-x(x^3+y^3)+x^4$;

б) $-a(b-3c)-2ac$; е) $-4y(3z-t)+8yz$; к) $-x^2(x^4-xy)-x^3y$;

в) $-a(-5b+c)-4ab$; ж) $-5y(-4z+t)-15yz$; л) $-2x^3(-x^7+5x^5y^8)+10x^8y^8$;

г) $-a(-b-6c)-6ac$; з) $-6y(-5z-t)-24zy$; м) $-2x^5(-5x^5-2x^5y^{10})-4x^{10}y^{10}$;

4. Представьте многочлен в стандартном виде, предварительно раскрыв скобки:

а) $-2(-4x-6)+9(5x+20)-53x-190$; д) $2xy+y^2-y(x+y)-x^2$;

б) $-17(10x-5)+12(-7x-21)+255x+167$; е) $5xy(-3x+7y)-6xy(-9x-11y)$;

в) $11(9x+28)+2(27x-33)-(152x+242)$; ж) $-4x^2(-2x+3y-5)+5x^2(-13x-14y)-20x^2$;

г) $10(-91x+10)+8(-x+60)-(23+19x)+937x-607$; з) $6xy(-xy+xy)-19xy(-xy-y^2)-19xy(xy+y^2)$.

5. Решите уравнение:

а) $-0{,}5x=-3$; ж) $1\frac{1}{2}x=9$;

б) $-1{,}5x-6=0$; з) $-0{,}7x+2{,}8=0$;

в) $-0{,}2(-0{,}3x-3)=0$; и) $0{,}9(x-5)-0{,}8x=0$;

г) $-16(x+2{,}5)=32$; к) $0{,}4(20+x)+6(10+0{,}1x)=0$;

д) $42(x+0{,}7)+21=0$; л) $5{,}5(x+10)-15x=5{,}5(x-20)$;

е) $0{,}5(x-9)=0{,}4(x+11)$; м) $6(-2{,}5x-14)+3(-6x-5)+3{,}5(2x-8)=-101$.

Ответы:

Часть 1

1. а) $4x+4y$; б) $5x-15y$; в) $6x^2+6y^2-54$; г) $14ax-21ay+28$; д) $ax-ay$; е) ax^2+a^2; ж) $a^4+a^3y+a^2y^2$; з) $13a^3z^3+17a^4z^4-19a^5$; и) $4bc-48bd$; к) $48c^3+112c^3d$; л) $11c^6d-13c^5d^2$; м) $30b^2c^2d+34bc^2d^2+38b^2cd^2$.
2. а) $-m-n$; б) $-2p-4q$; в) $-17x^2-34xy-17y^2$; г) $n-m$; д) $9q-6p$; е) $-16x^2+32xy-16y^2$; ж) $m-n$; з) $12p-16q$; и) $15x^2+45xy-30y^2$; к) $m+n$; л) $20p+25q$; м) $14x^2+14xy+14y^2$.
3. а) $-ab-ac$; б) $ac-ab$; в) $ab-ac$; г) $ab+ac$; д) $-6yz-8yt$; е) $-12yz+15yt$; ж) $20yz-24yt$; з) $30yz+35yt$; и) $-x^4-x^2y^2$; к) $-x^6+x^5y$; л) $2x^{10}-2x^5y^5$; м) $14x^{10}+35x^{10}y^{10}$.

4. а) $-7x+40$; б) $-60x-100$; в) $3x-3$; г) 1 ; д) y^2+2xy ; е) 0 ; ж) $39x^3+48x^2y$; з) $-x^2y^2-xy^3$.

5. а) $0,5$; б) 3 ; в) -1 ; г) 5 ; д) 1 ; е) -89 ; ж) -12 ; з) -7 ; и) 7 ; к) 10 ; л) 2 ; м) -2 .

Часть 2

1. а) $0,5x-0,5y$; б) $3,5x+14y$; в) $1,6x^2-1,6y^2+16$; г) $8,5ax-85ay-85$; д) $ax+ay-az$; е) ax^2-a^3 ; ж) $a^3y+a^4y-5a^9$; з) $a^7z^7-9a^8z^8-13a^8+a^7$; и) $4abc+10abcd$; к) $36c^3-176c^3d^3$; л) $17c^6d^6+19c^7d^7$; м) $63b^2c^2d-87bc^2d^2+111b^2cd^2$.

2. а) $m-n$; б) $8q-8p$; в) $-2y^2$; г) $m+n$; д) $p+q$; е) $10xy+10y^2$; ж) $2m$; з) $p-q$; и) $-2x^2+2xy+2y^2$; к) $9m+9n$; л) $7p+7q$; м) $-2x^2-12xy$.

3. а) $-ab-ac$; б) $ac-ab$; в) $ab-ac$; г) ab ; д) $-3yz-3yt$; е) $-4yz+4yt$; ж) $5yz-5yt$; з) $6yz+6yt$; и) $-xy^3$; к) $-x^6$; л) $2x^{10}$; м) $10x^{10}$.

4. а) 2 ; б) $x+1$; в) x ; г) 0 ; д) $xy-x^2$; е) $39x^2y+101xy^2$; ж) $-57x^3-82x^2y$; з) 0 .

5. а) 6 ; б) -4 ; в) -10 ; г) $-4,5$; д) $-1,2$; е) 49 ; ж) 6 ; з) 4 ; и) 45 ; к) -68 ; л) 11 ; м) -1 .

§ 4 Сложение, вычитание и умножение многочленов

Сложение многочленов. Сумма многочленов есть снова многочлен. Сложение многочленов производится сложением их соответствующих подобных слагаемых.

Пример 1. Найти сумму многочленов $-2a+2b-4c+5d$ и $2c-3b+5d-3f$.

Решение. Сумма: $(-2a+2b-4c+5d)+(2c-3b+5d-3f)=$

$=-2a+2b-4c+5d+2c-3b+5d-3f=$

$=-2a-b-2c+10d-3f$.

Пример 2. Найти сумму многочленов $P(x,y,z)=x^3+2y^3-3z^3-5x^2y-5y^2z+3z^2x$ и $Q(x,y,z)=-x^3+2y^3+4z^3+5x^2y-5y^2z+2z^2x$.

Решение. $P(x,y,z)+Q(x,y,z)=$

$$=x^3+2y^3-3z^3-5x^2y-4y^2z+3z^2x+\left(-x^3+2y^3+4z^3+5x^2y-5y^2z+2z^2x\right)=$$

$$=x^3+2y^3-3z^3-5x^2y-4y^2z+3z^2x-x^3+2y^3+4z^3+5x^2y-5y^2z+2z^2x=$$

$$=4y^3+z^3-9y^2z+5z^2x .$$

Разность многочленов. Разность многочленов есть снова многочлен. Сложение многочленов производится в два этапа. Во-первых, раскрываем скобки у вычитаемого, изменяя знаки его членов на противоположный. Во-вторых, приводим подобные слагаемые в получившейся сумме.

Пример 3. Найти разность многочленов $-2a+2b-4c+5d$ и $2c-3b+5d-3f$.

Решение. Разность: $(-2a+2b-4c+5d)-(2c-3b+5d-3f)=$

$=-2a+2b-4c+5d-2c+3b-5d+3f=$

$=-2a+5b-6c+3f$.

Пример 4. Найти разность многочленов $P(x,y,z)=x^3+2y^3-3z^3-5x^2y-5y^2z+3z^2x$ и $Q(x,y,z)=-x^3+2y^3+4z^3+5x^2y-5y^2z+2z^2x$.

Решение. $P(x,y,z)-Q(x,y,z)=$

$$=x^3+2y^3-3z^3-5x^2y-4y^2z+3z^2x-\left(-x^3+2y^3+4z^3+5x^2y-5y^2z+2z^2x\right)=$$

$$=x^3+2y^3-3z^3-5x^2y-4y^2z+3z^2x+x^3-2y^3-4z^3-5x^2y+5y^2z-2z^2x=$$

$$=2x^3-5z^3-10x^2y+y^2z+z^2x .$$

Произведение многочленов. Еще раз вернемся к распределительному закону:

$$a(b+c)=ab+ac .$$

Так как от перестановки мест множителей результат произведения не изменяется (переместительный закон), то распределительный закон можно переписать в виде:

$$(b+c)a=ba+ca\,.$$

Распределительный закон является универсальным тождеством: вместо a, b и c можно подставлять не только различные числа, но и любые комбинации символов, связанных арифметическими операциями. Например, вместо a можно подставить $x+y$. Получится снова тождество:

$$(b+c)(x+y)=b(x+y)+c(x+y)\,.$$

Преобразования можно продолжить:

$$(b+c)(x+y)=b(x+y)+c(x+y)=bx+by+cx+cy\,.$$

Окончательно получаем тождество

$$\boxed{(b+c)(x+y)=bx+by+cx+cy}$$

Смысл данного тождества можно выразить следующим утверждением.

Произведение двух двучленов тождественно равно сумме всех возможных попарных произведений одночленов первого двучлена на одночлены второго двучлена.

То же самое, но другими словами:

Чтобы преобразовать произведение двучленов в многочлен, нужно каждый член первого двучлена умножить на каждый член второго двучлена.

Аналогичным образом произведение $(b+c)(x+y+z)$ можно преобразовать в многочлен:

$$(b+c)(x+y+z)=b(x+y+z)+c(x+y+z)=bx+by+bz+cx+cy+cz\,.$$

Нетрудно видеть, что имеет место следующее утверждение.

Произведение двух многочленов тождественно равно сумме всех возможных попарных произведений одночленов первого многочлена на одночлены второго многочлена.
Или так:

чтобы преобразовать произведение многочленов в многочлен, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена.

Пример 5. Преобразовать в многочлен $(2a-b)(b-a+1)$.

Решение. $(2a-b)(b-a+1)=2ab-2a^2+2a-b^2+ba-b=3ab-2a^2-b^2+2a-b$.

Постараемся объяснить данное правило немного по-другому.
Предположим, нужно одну сумму умножить на другую.

- *Берем первое слагаемое первой суммы и умножаем по порядку на каждое из слагаемых второй суммы. При умножении следим за знаками.*
- *Берем второе слагаемое первой суммы и также умножаем по порядку на каждое из слагаемых второй суммы. При умножении следим за знаками.*
- *И так далее, пока не кончатся слагаемые первой суммы.*
- *Приводим подобные слагаемые (если таковые найдутся).*

Упражнение 1. *Преобразовать в многочлен:*

a) $(x-y)(x+y)$, $(5c-2d)(5c+2d)$;

b) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$, $(3x^2+z^2)(9x^4-3x^2z^2+z^4)$;

c) $(a+b)^2$, $(a+b-c)^2$.

Упражнение 2. *Преобразовать в многочлен выражение*

$$(p^2-q^2)(2p^3+q-3pq)-(p^2+q^2)(2p^3-q+3pq)\,.$$

Решение упражнения 1.

a) Имеем $(x-y)(x+y)=x^2+\underline{xy}-\underline{yx}-y^2=x^2-y^2$.

Аналогично: $(5c-2d)(5c+2d)=25c^2+\underline{10cd}-\underline{10dc}-4c^2=25c^2-4c^2$.

b) Имеем $\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=x^3+\underline{x^2y}+\underline{\underline{xy^2}}-\underline{yx^2}-\underline{\underline{xy^2}}-y^3=x^3-y^3$.

Аналогично:

$$\left(3x^2+z^2\right)\left(9x^4-3x^2z^2+z^4\right)=27x^6-\underline{9x^4z^2}+\underline{\underline{3x^2z^4}}+\underline{9z^2x^4}-\underline{\underline{3x^2z^4}}+z^6=27x^6+z^6 .$$

c) Квадрат числа – это произведение числа на само себя. Поэтому $\left(a+b\right)^2=\left(a+b\right)\left(a+b\right)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$. Аналогично для $\left(a+b-c\right)^2$ имеем

$$\left(a+b-c\right)^2=\left(a+b-c\right)\left(a+b-c\right)=$$
$$=a^2+ab-ac+ba+b^2-bc-ca-cb+c^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca .$$

Решение упражнения 2. Предварительно по-отдельности преобразуем выражения $\left(p^2-q^2\right)\left(2p^3+q-3pq\right)$ и $\left(p^2+q^2\right)\left(2p^3-q+3pq\right)$. Имеем

$$\left(p^2-q^2\right)\left(2p^3+q-3pq\right)=p^2\left(2p^3+q-3pq\right)-q^2\left(2p^3+q-3pq\right)=$$
$$=2p^5+p^2q-3p^3q-2p^3q^2-q^3+3pq^3 .$$

Аналогично $\left(p^2+q^2\right)\left(2p^3-q+3pq\right)=2p^5-p^2q+3p^3q+2p^3q^2-q^3+3pq^3$.

Всё вместе:

$$\left(p^2-q^2\right)\left(2p^3+q-3pq\right)-\left(p^2+q^2\right)\left(2p^3-q+3pq\right)=$$
$$=\left(2p^5+p^2q-3p^3q-2p^3q^2-q^3+3pq^3\right)-\left(2p^5-p^2q+3p^3q+2p^3q^2-q^3+3pq^3\right)=$$
$$=\underline{2p^5}+p^2q-3p^3q-2p^3q^2-q^3+\underline{\underline{3pq^3}}-\underline{2p^5}+p^2q-3p^3q-2p^3q^2+q^3-\underline{\underline{3pq^3}}=$$
$$=2p^2q-6p^3q-4p^3q^2 .$$

Задачи
Часть 1

1. Найти сумму двух выражений:

а) $2a-3b+7c$ и $5a-8b-9c$;
б) $-7a+13b-9c+4d$ и $6a-2b-5c-10d$;
в) $-40a+50b-6c+17d-21e$ и $-60a+50b-94c+83d-79e$
г) $45b-23a-49d+12c-52e+8f$ и $-7f+53e-44b+24a-11c+50d$.

2. Найдите сумму многочленов $P\left(x,y,z\right)$ и $Q\left(x,y,z\right)$:

а) $P\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$, $Q\left(x,y,z\right)=-x^2-2y^2+z^2-2yx-2zy-2xz$;

б) $P\left(x,y,z\right)=x^2y+xy^2+xz^2+3xy+4yz+2zx-3xyz$,
$Q\left(x,y,z\right)=-5yx^2-2xy^2+4xz^2-6yx-4zy-2xz+3xyz$;

в) $P\left(x,y,z\right)=2x^3-5y^3+4z^3+3x^2y-4y^2z+5z^2x-17xyz$,
$Q\left(x,y,z\right)=-2x^3+5y^3+4z^3-3x^2y+4y^2z+5z^2x+17xyz$;

г) $P\left(x,y,z\right)=7xyz^2+17xy^2z-21x^2yz+5x^4-8y^4+9z^4$,
$Q\left(x,y,z\right)=-7z^4+21x^2yz-17xy^2z-6x^4-7xyz^2+10y^4$.

3. Найти разность двух выражений:

а) $6a-7b-10c$ и $5a-8b-9c$;
б) $7a-3b-9c+4d$ и $6a-2b-8c+5d$;
в) $-47a+58b-26c+81d-29e$ и $-45a+56b-24c+79d-27e$
г) $54b+32a+94d-21c+25e-8f$ и $-5f+22e+51b+29a-18c+91d$.

4. Найдите разность многочленов $P\left(x,y,z\right)$ и $Q\left(x,y,z\right)$:

а) $P\left(x,y,z\right)=-3x^2-2y^2+3z^2+8xy+9yz+16zx$, $Q\left(x,y,z\right)=-4x^2-3y^2+4z^2+8yx+9zy+16xz$;

б) $P\left(x,y,z\right)=3xyz^2+17xy^2z-21x^2yz+5x^4-8y^4+9z^4$,
$Q\left(x,y,z\right)=9z^4+9x^2yz-13xy^2z+5x^4-27xyz^2-8y^4$;

в) $P(x,y,z) = -x^2y + xy^2 - xz^2 - 6xy - 8yz - 4zx + 9xyz$,

$Q(x,y,z) = -2x^2y + xy^2 - xz^2 - 6xy - 8yz - 5zx + 9xyz$;

г) $P(x,y,z) = 21x^3 - 5y^3 + 4z^3 - 3x^2y + 4y^2z - 5z^2x - 7xyz$,

$Q(x,y,z) = x^3 + 15y^3 + 4z^3 - 3x^2y + 4y^2z - 5z^2x - 7xyz$.

5. Преобразуйте в многочлен:

а) $(a-b)(a+b)$;

б) $(a-2b)(a+2b)$;

в) $(2a-3b)(2a+3b)$;

г) $(3a-4b)(3a+4b)$;

д) $(4a-5b)(4a+5b)$;

е) $(5a-6b)(5a+6b)$;

ж) $(0,2c-0,7d)(0,7d+0,2c)$;

з) $(-0,8c-0,9d)(0,9d-0,8c)$;

и) $(-0,5c+0,4d)(0,4d+0,5c)$;

к) $(0,1c+0,3d)(-0,3d+0,1c)$;

л) $(0,7c+1,3d)(-1,3d+0,7c)$;

м) $(1,7c-1,6d)(-1,6d-1,7c)$.

6. Раскройте скобки:

а) $(m-n)(m^2+mn+n^2)$;

б) $(p+q)(p^2-pq+q^2)$;

в) $(s^n-t^m)(s^{2n}+s^nt^m+t^{2m})$;

г) $(m-3n)(m^2+3mn+9n^2)$;

д) $(p+4q^2)(p^2-4pq^2+16q^4)$;

е) $(m^2-5n^3)(m^4+5m^2n^3+25n^6)$;

ж) $(4p^3+6q^4)(16p^6-24p^3q^4+36q^8)$;

з) $\left(\frac{2}{3}s^{2n}-\frac{1}{4}t^{4m}\right)\left(\frac{4}{9}s^{4n}+\frac{1}{6}s^{2n}t^{4m}+\frac{1}{16}t^{8m}\right)$.

7. Преобразуйте в многочлен:

а) $(a+b)(c+d)$;

б) $(c+d)(c+2d)$;

в) $(c-2d)(c-4d)$;

г) $(c-5d)(c+6d)$;

д) $(c-9d)(c+8d)$;

е) $(2c-d)(7c+11d)$;

ж) $(a-2b)^2$;

з) $(a+5b)^2$;

и) $(2a-8b)^2$;

к) $(10a+3b)^2$;

л) $\left(\frac{a}{2}-2b\right)^2$;

м) $\left(\frac{3a}{2}-\frac{2}{3}b\right)^2$.

8. Умножте многочлены:

а) $(x+y-z)(x+y+z)$;

б) $(x-y-z)(x-y+z)$;

в) $(x+2y-z)(x+2y+z)$;

г) $(2x-5y-z)(2x-5y+z)$;

д) $(3x+7y-5z)(3x+7y+5z)$;

е) $(x+9y^2-z^3)(z^3+x+9y^2)$;

ж) $(-3x^2-7y^3-z^4)(z^4-3x^2-7y^3)$;

з) $(xy+5z-6t)(xy+5z+6t)$.

9. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(x^2-2y^{10})(x^4+2x^2y^{10}+4y^{20})-x^6$;

б) $(x^3+7y^{12})(x^6-7x^3y^{12}+49y^{24})+(x^3-7y^{12})(x^6+7x^3y^{12}+49y^{24})$;

в) $(2x^5-8y^{15})(4x^{10}+16x^5y^{15}+64y^{30})-(2x^5+8y^{15})(4x^{10}-16x^5y^{15}+64y^{30})$;

г) $(4x^2y+5zy^5)(16x^4y^2-20x^2y^6z+25z^2y^{10})+(4x^2y+5zy^5)(16x^4y^2-20x^2y^6z+25z^2y^{10})-127x^6y^3$.

Часть 2

1. Найти сумму двух выражений:

а) $7a-11b+13c$ и $-17a+21b-3c$;

б) $-19a-24b+45c-17d$ и $-a+4b-25c-3d$;

в) $53a-65b+16c-19d-33e$ и $-23a+35b+14c-11d+3e$

г) $87b+55a-98d+49c+97e+60f$ и $-20f-57e-47b-15a-9c+58d$.

2. Найдите сумму многочленов $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$:

а) $P(x,y,z)=3x^2-4y^2+5z^2-10xy+12yz-14zx$, $Q(x,y,z)=-3x^2+4y^2-5z^2+9yx-11zy+13xz$;

б) $P(x,y,z)=3x^2y-9xy^2+17xz^2-23xy+80yz-55zx+73xyz$,

$Q(x,y,z)=-3yx^2+10xy^2-18xz^2+24yx-81zy+56xz-73xyz$;

в) $P(x,y,z)=7x^3-15y^3+14z^3-33x^2y+44y^2z-35z^2x+90xyz$,

$Q(x,y,z)=-7x^3+15y^3-14z^3+33x^2y-44y^2z+35z^2x-89xyz$;

г) $P(x,y,z)=31xyz^2-71xy^2z+89x^2yz-56x^4+89y^4-19z^4$,

$Q(x,y,z)=18z^4-90x^2yz+72xy^2z+57x^4-32xyz^2-90y^4$.

3. Найти разность двух выражений:

а) $25a-15b+35c$ и $24a-16b+34c$;

б) $-25a+36b-49c+64d$ и $144a-133b+120c-105d$;

в) $-4a+5b-96c+71d-12e$ и $66a-55b+46c+11d+82e$

г) $54b-32a+94d+11c+25e-98f$ и $-98f+25e-34b-45a+110c-17d$.

4. Найдите разность многочленов $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$:

а) $P(x,y,z)=-43x^2-102y^2+83z^2-38xy+39yz-76zx$,

$Q(x,y,z)=-44x^2-102y^2+83z^2-38yx+40zy-76xz$;

б) $P(x,y,z)=31xyz^2-71xy^2z+85x^2yz-55x^4-117y^4-99z^4$,

$Q(x,y,z)=-100z^4+86x^2yz-72xy^2z-56x^4+32xyz^2-118y^4$;

в) $P(x,y,z)=-101x^2y-103xy^2+105xz^2-166xy-168yz-411zx+119xyz$,

$Q(x,y,z)=-101x^2y-103xy^2+105xz^2-166xy-178yz-411zx+120xyz$;

г) $P(x,y,z)=121x^3-127y^3+189z^3-173x^2y+184y^2z-159z^2x-171xyz$,

$Q(x,y,z)=120x^3-129y^3+192z^3-177x^2y+189y^2z-159z^2x-171xyz$.

5. Преобразуйте в многочлен:

а) $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)\left(a+\dfrac{b}{2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{a}{2}-2b\right)\left(\dfrac{a}{2}+2b\right)$;

в) $\left(\dfrac{2}{3}a-\dfrac{3}{4}b\right)\left(\dfrac{2}{3}a+\dfrac{3}{4}b\right)$;

г) $\left(0,3a-\dfrac{b}{5}\right)\left(0,3a+\dfrac{b}{5}\right)$;

д) $\left(\dfrac{8}{9}a-\dfrac{b}{15}\right)\left(\dfrac{8}{9}a+\dfrac{b}{15}\right)$;

е) $(15a-16b)(15a+16b)$;

ж) $(1,2c-1,7d)(1,7d+1,2c)$;

з) $(-1,8c-1,9d)(1,9d-1,8c)$;

и) $(-1,5c+1,4d)(1,4d+1,5c)$;

к) $(1,1c+2,3d)(-2,3d+1,1c)$;

м) $(2,7c+3,3d)(-3,3d+2,7c)$;

н) $(1,9c-2,9d)(-2,9d-1,9c)$.

6. Раскройте скобки:

а) $(m-0,1n)(m^2+0,1mn+0,01n^2)$;

б) $(0,1p+0,2q)(0,01p^2-0,02pq+0,04q^2)$;

в) $(s^{3n}-t^{2m})(s^{6n}+s^{3n}t^{2m}+t^{4m})$;

г) $\left(\dfrac{m}{2}-\dfrac{n}{3}\right)\left(\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{mn}{6}+\dfrac{q^2}{9}\right)$;

д) $(0,5p+0,6q^5)(0,25p^2-0,3pq^5+0,36q^{10})$;

е) $\left(\dfrac{m^4}{6}-\dfrac{n^6}{5}\right)\left(\dfrac{m^8}{36}+\dfrac{m^4n^6}{30}+\dfrac{n^{12}}{25}\right)$;

ж) $(0,4p^3+0,8q^4)(0,16p^6-0,32p^3q^4+0,64q^8)$;

з) $\left(\dfrac{3}{4}s^{2n}-\dfrac{1}{5}t^{4m}\right)\left(\dfrac{9}{16}s^{4n}+\dfrac{1}{20}s^{2n}t^{4m}+\dfrac{1}{20}t^{8m}\right)$.

7. Преобразуйте в многочлен:

а) $(a+ab)(c+ad)$;

ж) $\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{8}\right)^2$;

б) $(2c+cd)(c+5cd)$;

в) $(4cd-d)(cd-3d)$;

г) $(cd-7d)(cd+11d)$;

д) $(c-10cd)(c+13cd)$;

е) $(2cd-d)(7c+11cd)$;

з) $\left(6a+\dfrac{5b}{6}\right)^2$;

и) $\left(\dfrac{2a}{3}-\dfrac{6b}{7}\right)^2$;

к) $\left(\dfrac{a}{3}+6b\right)^2$;

л) $\left(\dfrac{a}{4}-8b\right)^2$;

м) $\left(\dfrac{5a}{9}-\dfrac{18}{25}b\right)^2$.

8. Выполните действие:

а) $(x+y-3z)(x+y+3z)+10z^2-2xy$;

б) $(x-y-4z)(x-y+4z)+15z^2+2xy$;

в) $(x+2y-z)(x+2y+z)-3xy-3y^2$;

г) $(3x-7y-2z)(3x-7y+2z)+4z^2+42xy$;

д) $(x+6y-8z)(x+6y+8z)+65z^2-12xy$;

е) $(x+7y^2-z^3)(z^3+x+7y^2)+z^6-15xy^2$;

ж) $(-x^2-10y^3-z^4)(z^4-x^2-10y^3)+2z^8-20x^2y^3$;

з) $(xy+2z-12t)(xy+2z+12t)+145t^2-4xyz$.

9. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(x^2-0{,}5y^{10})(x^4+0{,}5x^2y^{10}+0{,}25y^{20})+0{,}125y^{30}$;

б) $(x^{15}+8y^{25})(x^{15}-8x^{15}y^{25}+64y^{50})+(x^{15}-8y^{25})(x^{15}+8x^{15}y^{25}+64y^{50})-2x^{45}$;

в) $(3x^7-7y^{17})(9x^{14}+21x^7y^{17}+49y^{34})-(3x^7+7y^{17})(9x^{14}-21x^7y^{17}+49y^{34})+686y^{51}$;

г) $(0{,}5x^2y+2zy^5)(0{,}25x^4y^2-x^2y^6z+4z^2y^{10})+(0{,}5x^2y-2zy^5)(0{,}25x^4y^2+x^2y^6z+4z^2y^{10})-0{,}12x^6y^3$.

Ответы

Часть 1

1. а) $7a-11b-2c$; б) $-a+11b-14c-6d$; в) $-100a+100b-100c+100d-100e$; г) $a+b+c+d+e+f$;

2. а) $-y^2+2z^2$; б) $-4x^2y-xy^2+5xz^2$; в) $8z^3+10z^2x$; г) $-x^4+2y^4+2z^4$.

3. а) $a+b-c$; б) $a-b-c-d$; в) $-2a+2b-2c+2d-2e$; г) $3a+3b-3c+3d+3e-3f$.

4. а) $x^2+y^2-z^2$; б) $30xyz^2+30xy^2z-30x^2yz$; в) x^2y+xz; г) $20x^3-20y^3$.

5. а) a^2-b^2; б) a^2-4b^2; в) $4a^2-9b^2$; г) $9a^2-16b^2$; д) $16a^2-25b^2$; е) $25a^2-36b^2$; ж) $0{,}04c^2-0{,}49d^2$; з) $0{,}64c^2-0{,}81d^2$; и) $0{,}16d^2-0{,}25c^2$; к) $0{,}01c^2-0{,}09d^2$; л) $0{,}49c^2-1{,}69d^2$; м) $2{,}56d^2-2{,}89c^2$.

6. а) m^3-n^3; б) p^3+q^3; в) $s^{3n}-t^{3m}$; г) m^3-27n^3; д) p^3+64q^6; е) m^6-125n^9; ж) $64p^9+216q^{12}$; з) $\dfrac{8}{27}s^{6n}-\dfrac{1}{64}t^{12m}$.

7. а) $ac+bc+ad+bd$; б) $c^2+3cd+2d^2$; в) $c^2-6cd+8d^2$; г) $c^2+cd-30d^2$; д) $c^2-cd-72d^2$; е) $14c^2+15cd-11d^2$; ж) $a^2-4ab+4b^2$; з) $a^2+10ab+25b^2$; и) $4a^2-32ab+64b^2$; к) $100a^2+60ab+9b^2$; л) $4a^2-32ab+64b^2$; м) $\dfrac{9a^2}{4}-2ab+\dfrac{4b^2}{9}$.

8. а) $x^2+2xy+y^2-z^2$; б) $x^2-2xy+y^2-z^2$; в) $x^2+4xy+4y^2-z^2$; г) $4x^2-20xy+25y^2-z^2$; д) $9x^2+42xy+49y^2-25z^2$; е) $x^2+18xy^2+81y^4-z^6$; ж) $9x^4+42x^2y^3+49y^6-z^8$; з) $x^2y^2+10xyz+25z^2-36t^2$. 9. а) $-8y^{30}$; б) $2x^9$; в) $-1024y^{45}$; г) x^6y^3.

Часть 2

1. а) $-10a+10b+10c$; б) $-20a-20b+20c-20d$; в) $30a-30b+30c-30d-30e$; г) $40a+40b+40c-40d+40e+40f$.

2. а) $-xy+yz-xz$; б) $xy^2-xz^2+xy+yz+xz$; в) xyz; г) $x^4-y^4-z^4+xy^2z-x^2yz$.

3. а) $a+b+c$; б) $-169a+169b-169c+169d$; в) $-70a+60b-50c+60d+70e$; г) $77a+88b-99c+111d$.

4. а) $-xy$; б) $x^4+y^4+z^4-xyz^2-x^2yz+xy^2z$; в) $-xyz$; г) $x^3+2y^3-3z^3+4x^2y-5y^2z$.

5. а) $a^2-\frac{b^2}{4}$; б) $\frac{a^2}{4}-4b^2$; в) $\frac{4a^2}{9}-\frac{9b^2}{16}$; г) $0,09a^2-\frac{b}{25}^{2}$; д) $\frac{64a^2}{81}-\frac{b}{225}^{2}$; е) $225a^2-256b^2$;
ж) $1,44c^2-2,89d^2$; з) $3,24c^2-3,61d^2$; и) $1,96d^2-2,25c^2$; к) $1,21c^2-5,29d^2$; л) $7,29c^2-10,89d^2$;
м) $8,41d^2-3,61c^2$.

6. а) $m^3-0,001n^3$; б) $0,01p^3+0,008q^3$; в) $s^{3n}-t^{6m}$; г) $\frac{m^3}{8}-\frac{n^3}{27}$; д) $0,125p^3+0,216q^{15}$;
е) $\frac{m^{12}}{216}-\frac{n^{18}}{125}$; ж) $0,064p^9+0,512q^{12}$; з) $\frac{27s^{6n}}{64}-\frac{t^{12m}}{125}$.

7. а) $ac+abc+a^2d+a^2bd$; б) $2c^2+c^2d+10c^2d+5c^2d$; в) $4c^2d^2-7cd^2+3d^2$; г) $c^2d^2+4cd^2-77d^2$;
д) $c^2+3c^2d-13c^2d^2$; е) $14c^2d-7cd+22c^2d^2-11cd^2$; ж) $\frac{a^2}{4}-\frac{ab}{8}+\frac{b^2}{64}$; з) $36a^2+10ab+\frac{25b^2}{36}$;
и) $\frac{4a^2}{9}-\frac{12ab}{7}+\frac{36b^2}{49}$; к) $\frac{a^2}{9}+4ab+36b^2$; л) $\frac{a^2}{16}-4ab+64b^2$; м) $\frac{25a^2}{81}-\frac{4ab}{5}+\frac{324b^2}{625}$.

8. а) $x^2+y^2+z^2$; б) $x^2+y^2-z^2$; в) $x^2+xy+y^2-z^2$; г) $9x^2+49y^2$; д) $x^2+36y^2+z^2$; е) $x^2-xy^2+49y^4$;
ж) $x^2+100y^6+z^8$; з) $x^2y^2+4z^2+t^2$.

9. а) x^6 ; б) 0 ; в) 0 ; г) $0,05x^6y^3$.

§ 5 Разложение многочлена на множители вынесением общего множителя за скобки.

Упражнение 1.«Отличница и чудовище». *Отличница Аружан получила от учителя карточку по теме «Умножение одночлена на многочлен» и выполнила все задания на доске. Двоечнику и хулигану Алижану удалось отвлечь внимание учителя, стереть некоторые буквы с доски, поставить вместо них многоточия и съесть карточку. Помогите Аружан восстановить записи, дописав вместо многоточий нужные одночлены. Вот то, что осталось на доске:*

a) $\ldots(x+y)=ax+ay$;

b) $\ldots(x-\ldots)=2x-6z$;

c) $\ldots(\ldots+3b)=2p^2+6pb$;

d) $\ldots(m-k)=m^2k-mk^2$;

e) $\ldots(-x^3+5q^2)=x^4-\ldots$;

f) $\ldots(\ldots-\ldots+3m)=3x^2m-6xm+9xm^2$.

Эффективность применения распределительного закона объясняется не только его универсальностью. Дело в том, что распределительный закон преобразует произведение $a(b+c)$ в сумму $ab+ac$ и обратно, сумму $ab+ac$ в произведение $a(b+c)$. В рамках данного параграфа распределительный закон нас будет интересовать именно в следующем виде:

$$ab+ac=a(b+c)\,.$$

Что, собственно, происходит? Левая часть равенства представляет собой сумму двух одночленов ab и ac, имеющих общий множитель a. Правая часть равенства представляет собой произведение, в котором общий множитель a умножается на сумму «оставшихся» множителей b и c. Это преобразование является, как вы понимаете, обратным к тому, что мы называем «раскрытием скобок», и поэтому его естественно назвать «вынесением за скобки» общего множителя. Технически операция вынесения за скобки немного сложнее, чем раскрытие скобок. При этом наиболее часто допускаются ошибки со знаками. Рекомендуется делать проверку.

Например, требуется разложить на множители многочлен $-15x^3t+10t^2x-5xt$. Нетрудно видеть, что все одночлены данного многочлена имеют общий множитель $5xt$. Тогда

$$-15x^3t+10t^2x-5xt=5xt\cdot\left(-3x^2\right)+5xt\cdot 2t-5xt\cdot 1=5xt\left(-3x^2+2t-1\right).$$

Иногда требуется вынести общий множитель со знаком «минус». Например:

$$-15x^3t+10t^2x-5xt=-5xt\cdot 3x^2-5xt\cdot(-2t)-5xt\cdot 1=-5xt\left(3x^2-2t+1\right).$$

Обязательно (можно «в уме») делаем проверку, раскрывая скобки в полученном произведении. В проверке особое внимание уделяем знакам. **Проверка позволяет не только выявить ошибки, но и эффективно исправить их.**

После вынесения общего множителя необходимо проанализировать одночлены, оставшиеся в скобках. Может так получиться, что они содержат общий множитель, который мы не заметили ранее. В таком случае выносим этот множитель дополнительно. Например, требуется разложить на множители многочлен $4qs^4-8q^2s^3-12qs^5$. Сразу видно, что за скобки можно вынести множитель $4q$. Имеем $4qs^4-8q^2s^3-12qs^5=4q\left(s^4-2qs^3-3s^5\right)$. Анализ выражения в скобках показывает, что все слагаемые имеют еще один общий множитель s^3. Ничего страшного – просто продолжаем преобразования: $4qs^4-8q^2s^3-12qs^5=4q\left(s^4-2qs^3-3s^5\right)=4qs^3\left(s-2q-3s^2\right)$. На этот раз одночлены в скобках не имеют общих множителей. Раскрывая скобки, делаем проверку: $4qs^3\left(s-2q-3s^2\right)=4qs^4-8q^2s^3-12qs^5$. Задание выполнено.

Упражнение 2. *Разложите на множители вынесением общего множителя за скобки. Сделайте проверку.*

a) $5m-5n$, $5mn-5n$;

b) $27p^5+18p^{25}$, $27p^n-18p^{20+n}$;

c) $x^2y-xy+y^2x$, $x^{12}y^4-2x^3y^6-y^{12}x^{15}$, $x^{n+1}y^n-2x^ny^n-y^{n-1}x^{n+2}$.

Упражнение 3. *Разложите на множители вынесением общего множителя за скобки. Сделайте проверку.*

a) $am-an$, $(k-b)m-(k-b)n$, $(k-b)m+(b-k)n$;

b) m^2+xm, $(u-3v)^2+x(u-3v)$, $(u-3v)^2-2v(3v-u)$.

Решение упражнения 2.

a) $5m-5n=5(m-n)$, $5mn-5n=5n(m-1)$;

b) В многочлене $27p^5+18p^{25}$ выносим за скобки наибольший общий множитель числовых коэффициентов 27 и 18, а также наименьшую из степеней переменной p. Получаем

$$27p^5+18p^{25}=9p^5\left(3+2p^{20}\right).$$

Двучлен $27p^n-18p^{20+n}$ раскладывается аналогично с учетом, что $p^{20+n}=p^{20}\cdot p^n$. Имеем

$$27p^n-18p^{20+n}=27p^n-18p^{20}\cdot p^n=9p^n\left(3-2p^{20}\right).$$

c) В трехчлене $x^2y-xy+y^2x$ за скобки выносим произведение наименьших степеней, входящих в каждый из одночленов:

$$x^2y-xy+y^2x=xy(x-1+y)=xy(x+y-1).$$

Аналогично поступаем с трехчленом $x^{12}y^4-2x^3y^6-y^{12}x^{15}$:

$$x^{12}y^4-2x^3y^6-y^{12}x^{15}=x^3y^4\left(x^8-2y^2-x^{12}y^8\right).$$

Многочлен $x^{n+1}y^n-2x^ny^n-y^{n-1}x^{n+2}$ раскладываем на множители, учитывая, что $x^{n+1}=x^nx$, $x^{n+2}=x^nx^2$, $y^n=y^{n-1}y$:

Решение упражнения 3.

a) Очевидно, что $am-an=a(m-n)$. Если в разности $(k-b)m-(k-b)n$ принять $(k-b)$ за переменную a в предыдущем примере, то ясно, что

$$(k-b)m-(k-b)n=(k-b)(m-n).$$

Для разложения на множители выражения $(k-b)m+(b-k)n$ достаточно заметить, что $(b-k)=-(k-b)$. Тогда

$$(k-b)m+(b-k)n=(k-b)m-(k-b)n=(k-b)(m-n).$$

b) Легко видеть, что $m^2+xm=m(m+x)$. Очевидно, что выражение $(u-3v)^2+x(u-3v)$ получается из выражения m^2+xm заменой m на $(u-3v)$. Поэтому разложение на множители достигается вынесением за скобки общего множителя $(u-3v)$:

$$(u-3v)^2+x(u-3v)=(u-3v)(u-3v+x).$$

Рассмотрим теперь выражение $(u-3v)^2-2v(3v-u)$. Заметим, что $2v(3v-u)=-2v(u-3v)$. Следовательно,

$$(u-3v)^2-2v(3v-u)=(u-3v)^2+2v(u-3v)=(u-3v)(u-3v+2v)=(u-3v)(u-v).$$

Задачи

Часть 1

1. Восстановите запись, дописав вместо многоточий нужные одночлены:

а) $\ldots(m-n)=m^2-\ldots$;

б) $\ldots(p+\ldots)=6p+12q$;

в) $\ldots(\ldots-8x)=7y-8xy$;

г) $5xy(\ldots+\ldots)=5x^2y+15xy^2$;

д) $xy(\ldots-t)=xyz-\ldots$;

е) $ax(y+z)=\ldots+\ldots$;

ж) $ax(x+y+\ldots)=\ldots+\ldots+axz$;

з) $\ldots(x-2y-\ldots)=8x^2-\ldots+24xz$.

2. Разложите на множители вынесение общего множителя за скобки:

а) $2x-2y$;

б) $3x+6y$;

в) $ax+x^2$;

г) $ax-bx$;

д) ax^2+a^2x;

е) $3x^2-6xy$;

ж) $4x-8xy+12x^2$;

з) $10p^{10}q^{10}+20q^{20}$;

и) $5p^{n+5}-25p^nq^5$;

к) $6p^{n+7}q^7-216p^nq^{n+7}$.

л) $21x^2y+28xy^2-49x^2y^2$;

м) $11x^{n+2}y^m-22x^ny^{m+4}+33x^{n+1}y^{m+1}$.

3. Разложите на множители:

а) $a(x-y)+b(x-y)$;

б) $a(x-y)+b(y-x)$;

в) $m(x+y)-n(x+y)+p(x+y)$;

г) $2x^2(a+b)-3xy(a+b)+4y^2(a+b)$.

4. Разложите на множители:

а) $ax+bx+ay+by$;

б) $2ax-3ay+2bx-3by$;

в) $ax-2ay-bx+2by$;

г) $2ax+5ay+2bx+5by$.

Часть 2

1. Восстановите запись, дописав вместо многоточий нужные одночлены:

а) $\ldots(m+n)=m^3+\ldots$;

б) $\ldots(p-\ldots)=-2pq+14q$;

в) $\ldots(\ldots-8x)=4y^2-32xy$;

г) $5xy(\ldots-\ldots)=15xy-25x^2y^2$;

д) $xy(\ldots+t^2)=xyz^2+\ldots$;

е) $ax(ay-az)=\ldots-\ldots$;

ж) $\ldots(x+y+\ldots)=\ldots-ay-a^2$;

з) $\ldots(x-2y-\ldots)=-3x^2+\ldots+30xz$.

2. Разложите на множители вынесение общего множителя за скобки:

а) $7x^2-14xy$;

б) $9xyz+18xyzt$;

в) $0{,}1axy-0{,}2x^2y$;

г) $a^2xy+abxy$;

д) $ax^3-a^2x^2$;

е) $13x^2y^2z^3-26x^2y^3z^2$;

ж) $11xy-22xy^2+33xy^3$;

з) $0{,}5p^7q^8-1{,}5p^8q^7$;

и) $36p^{n+5}q^{n+6}+144p^{n+6}q^{n+5}$;

к) $15p^{n+11}q^{12}-225p^{12}q^{n+11}$.

л) $42x^2yz-84xy^2z-420xyz^2$;

м) $65x^{n+1}y^mz^p-130x^ny^{m+2}z^p+260x^ny^mz^{p+3}$.

3. Разложите на множители:

а) $a(x+y)-b(x+y)$;

в) $m(x-y)-n(y-x)+p(y-x)$;

б) $a(x+y)+b(-x-y)$; г) $xy(a-b)-yz(b-a)+xz(b-a)$.

4. Разложите на множители:

а) $ax+bx+cx+ay+by+cy$; в) $a^2x+a^2y-b^2x-b^2y$;

б) $8ax-12ay+10bx-5by$; г) $2ax+2ay+2az+7bx+7by+7bz$.

Ответы:

Часть 1

1. а) $m(m-n)=m^2-mn$; б) $6(p+2q)=6p+12q$; в) $y(7-8x)=7y-8xy$; г) $5xy(x+3y)=5x^2y+15xy^2$;

д) $xy(z-t)=xyz-xyt$; е) $ax(y+z)=axy+axz$; ж) $ax(x+y+z)=ax^2+axy+axz$;

з) $8x(x-2y+3z)=8x^2-16xy+24xz$;

2. а) $2(x-y)$; б) $3(x+2y)$; в) $ax(1+x)$; г) $x(a-b)$; д) $ax(x+a)$; е) $3x(x-2y)$; ж) $4x(1-2y+3x)$;

з) $10q^{10}\left(p^{10}+2q^{10}\right)$; и) $5p^n\left(p^5-5q^5\right)$; к) $6p^nq^7\left(p^7-36q^n\right)$; л) $7xy(3x+4y-7xy)$; м) $11x^ny^m\left(x^2-2y^4+3xy\right)$.

3. а) $(x-y)(a+b)$; б) $(x-y)(a-b)$; в) $(x+y)(m-n+p)$; г) $(a+b)\left(2x^2-3xy+4y^2\right)$.

4. а) $(a+b)(x+y)$; б) $(a+b)(2x-3y)$; в) $(a-b)(x-2y)$; г) $(a+b)(2x+5y)$.

Часть 2

1. а) $m^2(m+n)=m^3+m^2n$; б) $-2q(p-7)=-2pq+14q$; в) $4y(y-8x)=4y^2-32xy$; г) $5xy(3-5xy)=15xy-25x^2y^2$;

д) $xy\left(z^2+t^2\right)=xyz^2+xyt^2$; е) $ax(ay-az)=a^2xy-a^2xz$; ж) $-a(x+y+a)=-ax-ay-a^2$;

з) $-3x(x-2y-10z)=3x^2+6xy+30xz$.

2. а) $2x(x-7y)$; б) $9xyz(1+2t)$; в) $0{,}1xy(a+2x)$; г) $axy(a+b)$; д) $ax^2(x-a)$; е) $13x^2y^2z^2(z-2y)$;

ж) $11xy\left(1-2y+3y^2\right)$; з) $0{,}5p^7q^7(q-3p)$; и) $36p^{n+5}y^{n+5}(q+4p)$; к) $15p^{11}y^{11}\left(p^nq-15pq^n\right)$; л) $42xyz(x-2y-10z)$;ы

м) $65x^ny^mz^p\left(x-2y^2+4z^3\right)$.

3. а) $(x+y)(a+b)$; б) $(x+y)(a-b)$; в) $(x-y)(m+n-p)$; г) $(a-b)(xy+zy-xz)$.

4. а) $(a+b+c)(x+y)$; б) $(4a+5b)(2x-3y)$; в) $\left(a^2-b^2\right)(x+y)$; г) $(2a+7b)(x+y+z)$.

§ 6 Разложение многочлена на множители методом группировки.

Рассмотрим выражение $(k-b)m-(k-b)n$ из упражнения 3 предыдущего параграфа. Мы имеем возможность преобразовать его как в произведение, так и многочлен. В произведение преобразуем, вынося общий множитель $(k-b)$ за скобку:

$$(k-b)m-(k-b)n=(k-b)(m-n).$$

В многочлен преобразуем, раскрывая скобки в каждом из слагаемых:

$$(k-b)m-(k-b)n=km-bm-nk+bn.$$

Но это значит, что многочлен $km-bm-nk+bn$ можно преобразовать в произведение:

$$km-bm-nk+bn=(k-b)m-(k-b)n=(k-b)(m-n).$$

Заметим, что преобразование произведения в многочлен легко реализуется по алгоритму, приведенному в параграфе 4. Обратная задача представления многочлена в виде произведения многочленов ненулевой степени является более сложной хотя бы потому, что такое представление не всегда возможно.

Приведем еще несколько примеров.

Пример 1. Разложить на множители многочлен $a^2-6b-3ab+2a$.

Поиск решения.

Нашапервая цель – разбить 4 слагаемых на 2 пары (группы) так, что хотя бы в одной паре нашелся общий множитель. В каждой паре общий множитель выносим за скобки. Пробуем сначала первое слагаемое объединить со вторым, а третье – с четвертым: $\underline{a^2}-\underline{6b}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{\underline{2a}}$. Легко видеть, что ни в одной из пар не существует общего множителя. . Ничего страшного. Пробуем теперь первое объединить с третьим, а второе с четвертым: $\underline{a^2}-\underline{\underline{6b}}-\underline{3ab}+\underline{\underline{2a}}=\underline{a^2-3ab}\underline{\underline{-6b+2a}}=a(a-3b)+2(-3b+a)$. .

Наша вторая цель – понять, какая из ситуаций имеет место:

1) **выражения в скобках равны друг другу;**
2) **выражения в скобках противоположными друг другу;**
3) **не выполняется ни первое, ни второе.**

Если имеет место третья ситуация, то возвращаемся к первой цели и пробуем оставшиеся возможности объединить слагаемые в группы.

В примере, который мы рассматриваем, имеет место первая ситуация: $a-3b=-3b+a$. Следовательно, выражение $a-3b$ можно вынести за скобку: $a(a-3b)+2(-3b+a)=(a-3b)(a+2)$.

Решение. Имеем $\underline{a^2}-\underline{\underline{6b}}-\underline{3ab}+\underline{\underline{2a}}=\underline{a^2-3ab}\underline{\underline{-6b+2a}}=a(a-3b)+2(-3b+a)=(a-3b)(a+2)$.

Замечание. В примере 1 к успеху приводит также и группировка первого слагаемого с последним, а второго – с третьим:

$$\underline{a^2}-\underline{\underline{6b}}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{2a}=a(a+2)-3b(2+a)=(a+2)(a-3b).$$

Пример 2. Разложить на множители многочлен $x^3-xy+y^2-x^2y$.

Поиск решения. Первая же попытка:объединить первое слагаемое со вторым, а третье – с четвертым, приводит нас к достижению первой цели. В каждой паре можно вынести за скобки общий множитель: $\underline{x^3}-\underline{xy}+\underline{\underline{y^2}}-\underline{\underline{x^2y}}=x(x^2-y)+y(y-x^2)$.

Выражения в скобках (x^2-y) и $(y-x^2)$ представляют собой разности, в которых уменьшаемое и вычитаемое меняются местами. Это значит, что они противоположны: $(y-x^2)=-(x^2-y)$, т.е. имеет место вторая ситуация, описанная в предыдущем примере. Отсюда следуют преобразования: $x(x^2-y)+y(y-x^2)=x(x^2-y)-y(x^2-y)=(x^2-y)(x-y)$.

Решение. Имеем $\underline{x^3}-\underline{xy}+\underline{\underline{y^2}}-\underline{\underline{x^2y}}=x(x^2-y)+y(y-x^2)=x(x^2-y)-y(x^2-y)=(x^2-y)(x-y)$.

Замечание. Многочлен примера 2 можно разложить на множители, группируя первое слагаемое с последним и второго с третьим:

$$\underline{x^3}-xy+y^2-\underline{x^2y}=x^2(x-y)-y(x-y)=(x-y)(x^2-y).$$

Пример 3. Разложить на множители многочлен $pq+1-p-q$.

Решение. В первую пару объединим слагаемые с множителем p. Получаем

$$\underline{pq}+1-\underline{p}-q=p(q-1)+(1-q)=p(q-1)-(q-1)=(q-1)(p-1).$$

Пример 4. Разложить на множители многочлен $m^3-m^2+n^2-n+mn+m^2n$.

Поиск решения.

Нашапервая цель – разбить 6 слагаемых на 2 группы по 3 в каждой или на 3 группы по 2 в каждой так, что хотя бы в одной группе нашелся общий множитель. В каждой группе общий множитель выносим за скобки. Попробуем сначала разбить на 2 группы по 3 в каждой. Первая попытка: $\underline{m^3}-\underline{m^2}+\underline{n^2}-\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{mn}}+\underline{\underline{m^2n}}=(m^3-m^2+n^2)-n(1+m+m^2)$. Выражения $(m^3-m^2+n^2)$ и $(1+m+m^2)$ не являются равными, и не являются противоположными, т.е. имеет место третья ситуация, описанная в примере 1. . Возвращаемся к попыткам достигнуть первой цели. Вторая попытка: $\underline{m^3}-\underline{m^2}+\underline{\underline{n^2}}-\underline{\underline{n}}+\underline{mn}+\underline{\underline{m^2n}}=m(m^2-m+n)+n(n-1+m^2)$. Анализируем выражения

$\left(m^2-m+n\right)$ и $\left(n-1+m^2\right)$, и приходим к выводу, что опять имеет место третья ситуация. Ничего страшного не происходит, , ищем дальше. В третьей попытке попытаемся собрать в первой группе все слагаемые с большими степенями переменной m. Третья попытка: $\underline{m^3}-\underline{m^2}+\underline{\underline{n^2}}-\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{mn}}+\underline{m^2n}=m^2\left(m-1+n\right)+n\left(n-1+m\right)$. Наконец-то! Выражения $\left(m-1+n\right)$ и $\left(n-1+m\right)$ равны! . Можно продолжить преобразования:

$m^2\left(m-1+n\right)+n\left(n-1+m\right)=\left(m-1+n\right)\left(m^2+n\right)$.

Решение. Разбиваем 6 слагаемых на 2 группы по 3 в каждой:

$$\underline{m^3}-\underline{m^2}+\underline{\underline{n^2}}-\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{mn}}+\underline{m^2n}=m^2\left(m-1+n\right)+n\left(n-1+m\right)=\left(m-1+n\right)\left(m^2+n\right).$$

Замечание. Многочлен примера 4 можно разложить на множители, подобрав разбиение шести слагаемых на 3 группы по 2 в каждой:

$\underline{m^3}-\underline{\underline{m^2}}+n^2-\underline{\underline{n}}+\underline{mn}+m^2n=m^3+mn-m^2-n+n^2+m^2n=$

$=m\left(m^2+n\right)-\left(m^2+n\right)+n\left(m^2+n\right)=$

$=\left(m^2+n\right)\left(m-1+n\right)$.

Задачи

Часть 1

1. а) x^2-2x+1;
   б) $x^2+2xy+y^2$;
   в) x^2-3x+2;
   г) $x^2+4xy+3y^2$;
   д) x^2-x-2;
   е) $x^2+2xy-3y^2$;
   ж) x^2-3x-4;
   з) $x^2+2xy-8y^2$.

Часть 2.

1. а) $a^2-ab-12b^2$;
   б) $a^2+ab-20b^2$;
   в) $a^2-ab-30b^2$;
   г) $a^2+ab-42b^2$;
   д) $a^2-2ab-15b^2$;
   е) $a^2+2ab-24b^2$;
   ж) $a^2-2ab-35b^2$;
   з) $a^2+2ab-48b^2$.

Ответы:

Часть 1

1. а) $\left(x-1\right)^2$; б) $\left(x+y\right)^2$; в) $\left(x-1\right)\left(x-2\right)$; г) $\left(x+y\right)\left(x+3y\right)$; д) $\left(x-2\right)\left(x+1\right)$; е) $\left(x+3y\right)\left(x-y\right)$; ж) $\left(x-4\right)\left(x+1\right)$;
   з) $\left(x+4y\right)\left(x-2y\right)$.

Часть 2

1. а) $\left(a-4b\right)\left(a+3b\right)$; б) $\left(a+5b\right)\left(a-4b\right)$; в) $\left(a-6b\right)\left(a+5b\right)$; г) $\left(a+7b\right)\left(a-6b\right)$; д) $\left(a-5b\right)\left(a+3b\right)$; е) $\left(a+6b\right)\left(a-4b\right)$;
   ж) $\left(a-7b\right)\left(a+5b\right)$; з) $\left(a+8b\right)\left(a-6b\right)$.

Глава 3. Формулы сокращенного умножения

§ 1 Формула разности квадратов двух выражений

Упражнение 1. «Наблюдаем»

Используя правило умножения многочленов, преобразуйте следующие выражения:

a) $(a-b)(a+b)$;

b) $(x+y)(x-y)$;

c) $(p-3)(p+3)$;

d) $(4c-m)(4c+2m)$;

e) $(3p-a)(a+3p)$;

f) $(m+5c)(5c-m)$.

Какой из примеров является «лишним»? Что объединяет остальные примеры?

Упражнение 2. «Обобщаем»

Не выполняя преобразований, но опираясь на наблюдения, сделанные в упражнении 1, постарайтесь «предсказать» результат раскрытия скобок в выражении $(2y-3z)(3z+2y)$. *Анализируя результаты преобразований из упражнения 1, постарайтесь выявить какую-нибудь закономерность, сформулировать ее в виде утверждения и записать в виде тождества.*

Упражнение 3. «Применяем»

Применяя формулу, полученную в упражнении 2, найти ***все*** *целые значения переменных* x *и* y, *для которых выполняется равенство* $9x^2-y^2=11$.

Решение упражнения 1. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в пункте f):

$$(m+5c)(5c-m)=(5c+m)(5c-m)=(5c)^2\underline{-5cm}+\underline{5cm}-m^2=25c^2-m^2$$

Во всех примерах упражнения 1, кроме d), имеют место следующие особенности:

- Выражения, которые требовалось преобразовать, являются произведениями разности двух выражений на сумму таких же выражений.
- После раскрытия скобок и взаимного уничтожения подобных слагаемых остается разность между квадратом первого выражения и квадратом второго. *Догадайтесь, какое из выражений называется первым, а какое – вторым?*

Решение упражнения 2. Выражение $(2y-3z)(3z+2y)$ является произведением разности одночленов $2y$ и $3z$ на их сумму. Заметим также, что $3z+2y=2y+3z$, однако $2y-3z\neq 3z-2y$. Судя по наблюдениям, сделанным по упражнению 1, такое произведение равно разности квадрата одночлена $2y$ и квадрата одночлена $3z$, а именно:

$$(2y-3z)(3z+2y)=(2y)^2-(3z)^2=4y^2-9z^2.$$

В общем случае можно сформулировать такое правило:
произведение разности двух выражений на их сумму тождественно равно разности квадратов этих выражений.
Сформулированное правило записывается в виде формулы:

$$\boxed{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}$$

Данная формула верна для любых значений a и b. Мы уверены, что вы ее уже доказали (упражнение1, пункт a)). Заметим только, что получить эту формулу «слева направо» легко, однако «увидеть» разложение на множители в разности a^2-b^2 гораздо сложнее. Поэтому более актуально запомнить данное тождество в следующем виде:

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности данных выражений на их сумму.

Решение упражнения 3. Применяя формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ для $a=3x$ и $b=y$, получаем разложение на множители $9x^2-y^2=(3x-y)(3x+y)$. Уравнение $9x^2-y^2=11$ принимает вид $(3x-y)(3x+y)=11$. Так как по условию числа x и y являются целыми, то и значения выражений $3x-y$ и $3x+y$ также являются целыми. Число 11 может быть представлено в виде произведения двух целых чисел только четырьмя способами: $11=1\cdot 11=11\cdot 1=(-1)(-11)=(-11)(-1)$. Следовательно, имеем 4 возможности:

$$\begin{cases}3x-y=1,\\3x+y=11;\end{cases}\quad\begin{cases}3x-y=11,\\3x+y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}3x-y=-1,\\3x+y=-11;\end{cases}\quad\begin{cases}3x-y=-11,\\3x+y=-1.\end{cases}$$

Решая каждую из систем по отдельности, получаем четыре пары целых решений

$$(x;y)=(2;5),\ (2;-5),\ (-2;-5),\ (-2;5).$$

Пример 1. Разложить на множители $(p-3q)^2-(q-2p)^2$.

Решение. Применяем формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, подставляя вместо a выражение $p-3q$ и вместо b выражение $q-2p$. Получаем

$$(p-3q)^2-(q-2p)^2=\big(p-3q-(q-2p)\big)\big(p-3q+(q-2p)\big).$$

На этом этапе применение формулы разности квадратов закончено. Остается привести подобные слагаемые и поработать со знаками:

$$\big(p-3q-(q-2p)\big)\big(p-3q+(q-2p)\big)=(p-3q-q+2p)(p-3q+q-2p)=$$
$$=(3p-4q)(-p-2q)=(4q-3p)(p+2q).$$

Пример 2. «Два – это иногда не просто два. Иногда два – это один плюс один». Разложить на множители многочлен $b^2+ab-2a^2-b+a$.

Поиск решения. В данном многочлене 5 одночленов. Пять слагаемых невозможно разбить на две или три одинаковых по количеству слагаемых групп. Мы привыкли иметь дело с многочленами, содержащими 4 или 6 слагаемых. Что делать? Коэффициент 2 в одночлене $2a^2$ подсказывает, что можно представить $2a^2$ как a^2+a^2. Тогда получается 6 слагаемых: $b^2+ab-2a^2-b+a=b^2+ab-a^2-a^2-b+a$. Попытки сгруппировать 6 слагаемых в две группы

по три слагаемых в каждой не приводят к успеху. Кто не верит – можете попробовать! . Далее необходимо постараться разбить 6 слагаемых на 3 пары так, чтобы в каждой паре нашелся одинаковый множитель. Одночлен b^2 естественно сгруппировать с $(-a^2)$, так как разность b^2-a^2 раскладывается на множители $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$. Имеем: $\underline{b^2}+ab\underline{-a^2}-a^2-b+a=(b-a)(b+a)+ab-a^2-b+a$. Оставшиеся 4 члена стараемся группировать так, чтобы в каждой паре получился множитель $(b-a)$ или $(b+a)$. Окончательное решение получаем в следующем виде.

Решение. Следующие преобразования представляют многочлен в виде произведения:

$$b^2+ab-2a^2-b+a=\underline{b^2}+ab\underline{-a^2}-a^2-b+a=$$
$$=(b-a)(b+a)+\underline{ab}-\underline{a^2}-b+a=(b-a)(b+a)+a(b-a)-(b-a)=$$
$$=(b-a)(b+a+a-1)=(b-a)(b+2a-1).$$

Пример 3. Решить уравнение $\left(\dfrac{x}{3}-3\right)^2-(3-2x)^2=0$.

Решение. Левая часть уравнения раскладывается на множители по формуле $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Уравнение принимает вид

$$\left(\frac{x}{3}-3-(3-2x)\right)\left(\frac{x}{3}-3+(3-2x)\right)=0,$$

$$\left(\frac{x}{3}-3-3+2x\right)\left(\frac{x}{3}-3+3-2x\right)=0,$$

$$\left(\frac{7x}{3}-6\right)\left(-\frac{5x}{3}\right)=0.$$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из равен нулю. Следовательно, $\left(\frac{7x}{3}-6\right)\left(-\frac{5x}{3}\right)=0$ если $\frac{7x}{3}-6=0$ или $-\frac{5x}{3}=0$.

Соответственно, $x=\frac{18}{7}$ или $x=0$.

Ответ: $x=2\frac{4}{7}$ или $x=0$.

Задачи

Часть 1

1. Выполните умножение многочленов:

а) $(x+y)(x-y)$; б) $(z-7)(z+7)$; в) $(2t-5)(2t+5)$; г) $(3x-4y)(3x+4y)$;

д) $(-a+b)(a+b)$; е) $(-8+p)(p+8)$; ж) $(-10+6q)(6q+10)$; з) $(-11a+4b)(4b+11a)$;

и) $(z-t)(t+z)$; к) $(u-4)(4+u)$; л) $(3u-12)(12+3u)$; м) $(10z-9t)(9t+10z)$.

2. Представьте произведение в виде многочлена:

а) $\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)$; и) $\left(z^{15}-t^{20}\right)\left(t^{20}+z^{15}\right)$;

б) $\left(\frac{z^4}{2}-15\right)\left(\frac{z^4}{2}+15\right)$; ж) $\left(-0,3+\frac{5}{4}q^{10}\right)\left(\frac{5}{4}q^{10}+0,3\right)$;

в) $\left(p^{16}-0,7\right)\left(p^{16}+0,7\right)$; з) $\left(0,1t^5-0,2\right)\left(0,1x^5+0,2\right)$;

г) $\left(\frac{3}{4}x^6-\frac{5}{6}y^7\right)\left(\frac{3}{4}x^6+\frac{5}{6}y^7\right)$; к) $\left(-0,4a^{-3}+\frac{2}{9}b^{12}\right)\left(\frac{2}{9}b^{12}+0,4a^{-3}\right)$;

д) $\left(-a^{-1}+b^{-2}\right)\left(a^{-1}+b^{-2}\right)$; л) $\left(0,8q^{-4}-\frac{8}{9}\right)\left(0,8q^{-4}+\frac{8}{9}\right)$;

е) $\left(-0,5+\frac{p^{-8}}{4}\right)\left(\frac{p^{-8}}{4}+0,5\right)$; м) $\left(\frac{0,6}{z^3}-\frac{t^{21}}{10}\right)\left(\frac{t^{21}}{10}+0,6z^{-3}\right)$.

3. Впишите вместо знаков $*$, $\otimes$ одночлен так, чтобы получилось тождество:

а) $(3a-*)(3a+*)=9a^2-25b^4$; б) $\left(*-9y^6\right)\left(*+9y^6\right)=225x^8-\otimes$;

в) $\left(\otimes-\frac{1,5}{q}\right)\left(1,5q^{-1}+\otimes\right)=289p^{-6}-*$; г) $(3\cdot\otimes-*)(3\cdot\otimes+*)=36u^{10}-1,69v^{100}$.

4. Разложите на множители:

а) x^2-y^2; б) z^2-361; в) $289-t^2$; г) $-441+a^2$;

д) b^4-c^4; е) p^4-16; ж) $-625+m^8$; з) q^8-256;

5. Разложите на множители:

а) $5x^2-20y^2$; б) $6-216z^2$; в) $147-27t^2$; г) $-175a^2+343$;

д) $2b^4-162c^4$; е) $5p^4-3125$ ж) $q^{16}-10000$; з) $-\frac{1}{27}+3m^{12}$.

и) $0,09d^2-\frac{f^2}{25}$; к) $0,64m^6-\frac{49}{256}n^{16}$; л) $2,25x^{202}-1\frac{13}{36}y^{300}$; м) $-2,42t^2+7,22z^{250}$;

6. Найдите значение выражения:

а) $(90-1)(90+1)$; б) $(70-4)(70+4)$; в) $57(60+3)$; г) $47(40-7)$;

д) $39\cdot41$; е) $202\cdot198$; ж) $117\cdot83$; з) $103\cdot97$;

и) $6,1\cdot5,9$; к) $4,6\cdot5,4$; л) $1,06\cdot0,94$; м) $90,5\cdot89,5$.

7. Вычислите:

а) 27^2-23^2; б) 57^2-43^2; в) 66^2-34^2; г) 88^2-12^2;

д) 113^2-112^2 е) 127^2-123^2; ж) 104^2-96^2 з) 156^2-144^2.

8. Разложите на множители:

а) $(a+b)^2-b^2$; д) $(c-d)^2-d^2$; и) $(x+y)^2-z^2$; н) $(z+t)^2-(z-t)^2$;

б) $(a+2b)^2-4b^2$; е) $(c-3d)^2-9d^2$; к) $(x+4y)^2-16z^2$; о) $(z+6t)^2-(z-6t)^2$;

в) $(2a+3b)^2-25b^2$; ж) $(-4d+7c)^2-9d^2$; л) $(-15x-6y)^2-49z^2$; п) $(-7z-2t)^2-(7z-2t)^2$;

г) $100b^2-(3a+5b)^2$; з) $121d^2-(8c-3d)^2$; м) $169z^2-(11x+2y)^2$; р) $(13z-9t)^2-(9z+13t)^2$

9. Решите уравнение:

а) $x^2-1=0$; д) $(x-1)^2-4=0$; и) $(x+5)^2-81=0$; н) $(x+3)^2-(x-3)^2=0$;

б) $4x^2-9=0$; е) $(x-7)^2-81=0$; к) $(x+7)^2-144=0$; о) $(x+5)^2-(x-7)^2=0$;

в) $9x^2-25=0$; ж) $(4x-9)^2-25x^2=0$; л) $(17x+11)^2-256x^2=0$; п) $(8x+9)^2-(7x-10)^2=0$;

г) $36x^2=121$; з) $64x^2-(10x-6)^2=0$; м) $289x^2-(11x+28)^2=0$; р) $(9x-7)^2-(10x+8)^2=0$.

Часть 2

1. Представьте в виде многочлена:

а) $(x+2y)(x-2y)+4y^2$; д) $(-2a+3b)(2a+3b)+b^2+14a^2$; и) $(4z-5t)(5t+4z)+9t^2$;

б) $(z-9)(z+9)+80$; е) $(-13+p)(p+13)+170$; к) $(2u-4)(4+2u)+20$;

в) $(5t-2)(5t+2)-24t^2+5$; ж) $(-6+10q)(10q+6)-96q^2+40$; л) $(6v-9)(9+6v)+4v^2+41$;

г) $(4x-3y)(4x+3y)-15x^2+10y^2$; з) $(-4a+11b)(11b+4a)-120b^2+17a^2$; м) $(3z-7t)(7t+3z)+z^2-t^2$.

2. Представьте произведение в виде многочлена:

а) $(x^3+y^3)(x^3-y^3)+y^3$; ж) $\left(1\frac{1}{3}q^{-2}-2\frac{2}{5}\right)\left(1\frac{1}{3}q^{-2}+2\frac{2}{5}\right)$;

б) $\left(\frac{p^7}{7}-3,5\right)\left(\frac{p^7}{7}+3,5\right)+0,25$; з) $\left(-1,2a^{-7}+\frac{1}{25}b^{22}\right)\left(\frac{1}{25}b^{22}+1,2a^{-7}\right)+\frac{624b^{44}}{625}+\frac{1,44}{a^{14}}$;

в) $(12z^{12}-13t^{13})(12t^{12}+13z^{13})$; и) $(0,4t^{2z}-0,7)(0,4t^{2z}+0,7)+0,14t^{4z}-0,01$;

г) $\left(\frac{z^t}{3}-14\right)\left(\frac{z^t}{3}+14\right)+\frac{8z^{2t}}{9}-4$; к) $\left(\frac{7}{9}x^{16}-\frac{4}{11}y^{27}\right)\left(\frac{7}{9}x^{16}+\frac{4}{11}y^{27}\right)+\frac{16y^{54}}{121}$;

д) $(-a^3+b^{-5})(a^3+b^{-5})$; л) $\left(-1,3+\frac{3}{7}q^{3a}\right)\left(\frac{3}{7}q^{3a}+1,3\right)+1,7+\frac{40q^{6a}}{49}$;

е) $\left(-2,5+\frac{1,5}{p^3}\right)\left(\frac{1,5}{p^3}+2,5\right)$; м) $\left(\frac{19}{z^{5a}}-\frac{t^{6a}}{15}\right)\left(\frac{t^{6a}}{15}+\frac{19}{z^{5a}}\right)$.

3. Впишите вместо знаков $*$, $\otimes$ одночлен так, чтобы получилось тождество:

а) $(4a^2-*)(4a^2+*)=\otimes-49b^{10}$; б) $(*-11y^6)(*+11y^6)=0,04x^{14}-\otimes$;

в) $\left(\otimes-1\frac{4}{7}q^{-3}\right)\left(1\frac{4}{7}q^{-3}+\otimes\right)=\frac{324}{p^2}-*$; г) $(5\cdot\otimes-*)(5\cdot\otimes+*)=100u^{16}-1,96v^{120}$.

4. Разложите на множители:

а) $zx^2-zy^2+tx^2-ty^2$; б) $z^{2n}-400$; в) $484-t^{4m}$; г) $-529+a^{20}$;

д) $\frac{b^8}{81}-\frac{c^8}{256}$; е) $6p^2-486$; ж) q^4-p^{16}; з) $-n^8p^{12}+m^4$;

5. Разложите на множители:

а) $6x^2-54y^4$; б) $7-343z^4$; в) $\frac{xyz^3t}{16}-\frac{xyt^5}{25}$; г) $-243a^3x^2+192a$;

д) $27b^5c-75c^7b$; е) $64p^9-196p$; ж) $0,3q^{11}-0,027q$; з) $-405m+5m^9$.

и) $1\frac{32}{49}d^4-1\frac{40}{81}f^6$; к) $1\frac{48}{121}m^{2a}-1\frac{64}{225}n^{4a}$; л) $6,25x^{201}y-1\frac{72}{289}y^{101}x$; м) $-3,38t^{12}+4,5z^{24}$;

6. Найдите значение выражения:

а) $(100-10)(100+10)$; б) $(80-5)(80+5)$; в) $75(60+5)$; г) $56(50-6)$;

д) $33\cdot 47$; е) $208\cdot 192$; ж) $127\cdot 93$; з) $155\cdot 125$;

и) $7,1\cdot 6,9$; к) $6,4\cdot 5,6$; л) $1,05\cdot 0,95$; м) $80,7\cdot 79,3$.

7. Вычислите:

а) 72^2-28^2 ; б) 75^2-25^2 ; в) 63^2-37^2 ; г) 81^2-19^2 ;

д) 132^2-118^2 е) 129^2-121^2 ; ж) 118^2-82^2 з) 166^2-134^2 .

8. Разложите на множители:

а) $(a+0,5b)^2-0,25b^2$; д) $(-4c-2,5d)^2-6,25d^2$; и) $(4x+4y-z)^2-9z^2$; н) $(2z+6t)^2-(7z-9t)^2$;

б) $(0,4a+0,7b)^2-0,09b^2$; е) $(-1,9d+4c)^2-4,41d^2$; к) $(8x+8y+4z)^2-16z^2$; о) $(-19z-18t)^2-(-17z+16t)^2$;

в) $(0,2a+0,6b)^2-0,16b^2$; ж) $3,61d^2-(-5c-3,1d)^2$; л) $(12x+24y-5z)^2-49z^2$; п) $(6z-9t)^2-(-12z-17t)^2$;

г) $0,04a^2-(0,8a+0,6b)^2$; з) $5,29d^2-(-0,4c+2,7d)^2$; м) $100z^2-(19x+19z-38y)^2$; р) $(7z-13t)^2-(5z+9t)^2$.

9. Решите уравнение:

а) $4x^2-1=0$; д) $(x+2)^2-9=0$; и) $(-x-0,9)^2-0,01=0$; н) $(-x+0,45)^2-(0,55-x)^2=0$;

б) $3x^2-\frac{1}{3}=0$; е) $(x+12)^2-100=0$; к) $(x+0,8)^2-0,64=0$; о) $(12x+4)^2-(-x-15)^2=0$;

в) $5x^2-\frac{1}{5}=0$; ж) $(7x+10)^2-36x^2=0$; л) $(1,8x-1,1)^2-0,49x^2=0$; п) $(-4,5x-2,7)^2-(-1,3+0,5x)^2=0$;

г) $\frac{49}{9}x^2=9$; з) $121x^2-(9x+8)^2=0$; м) $3,24x^2-(1,2x-3)^2=0$; р) $(2,9x-7,3)^2-(0,1x+4,3)^2=0$.

Ответы

Часть 1

1. а) x^2-y^2 ; б) z^2-49 ; в) $2t^2-25$; г) $9x^2-16y^2$; д) b^2-a^2 ; е) p^2-64 ; ж) $36q^2-100$; з) $16b^2-121a^2$; и) z^2-t^2 ; к) u^2-16 ; л) $9u^2-16$; м) $100z^2-81t^2$;

2. а) x^4-y^4 ; б) $\frac{z^4}{4}-225$; в) $0,01t^{10}-0,04$; г) $\frac{9}{16}x^{12}-\frac{25}{36}y^{14}$; д) $\frac{1}{b^4}-\frac{1}{a^2}$; е) $\frac{1}{16p^{16}}-\frac{1}{4}$; ж) $1\frac{9}{16}q^{20}-0,09$; з) $\frac{4}{81}b^{24}-0,16a^{-6}$; и) $z^{30}-t^{40}$; к) $p^{32}-0,49$; л) $0,64q^{-8}-\frac{64}{81}$; м) $\frac{9}{25z^6}-\frac{t^{42}}{100}$.

3. а) $5b^2$; б) $15x^4$, $81y^{12}$; в) $\frac{17}{p^3}$, $\frac{9}{4q^2}$; г) $2u^5$, $1,3v^{50}$.

4. а) $(x-y)(x+y)$; б) $(z-19)(z+19)$; в) $(17-t)(17+t)$; г) $(a-21)(a+21)$; д) $(b-c)(b+c)(b^2+c^2)$;

е) $(p-2)(p+2)(p^2+4)$; ж) $(m^2-5)(m^2+5)(m^4+25)$; з) $(q-2)(q+2)(q^2+4)(q^4+16)$;

5. а) $5(x+2y)(x-2y)$; б) $6(1-6z)(1+6z)$; в) $3(7-3t)(7-3t)$; г) $5(7-5a)(7+5a)$;

д) $2(b-3c)(b+3c)(b^2+9c^2)$; е) $5(p-5)(p+5)(p^2+25)$; ж) $(q^4-10)(q^4-10)(q^8+100)$;

з) $3\left(m^3-\frac{1}{3}\right)\left(m^3+\frac{1}{3}\right)\left(m^6+\frac{1}{9}\right)$; и) $\left(0,3d-\frac{f}{5}\right)\left(0,3d+\frac{f}{5}\right)$; к) $\left(\frac{4}{5}m^3-\frac{7}{16}n^8\right)\left(\frac{4}{5}m^3+\frac{7}{16}n^8\right)$;

л) $\left(1\frac{3}{2}x^{101}-1\frac{1}{6}y^{150}\right)\left(1\frac{3}{2}x^{101}+1\frac{1}{6}y^{150}\right)$; м) $2(1,9z^{125}-1,1t)(1,9z^{125}+1,1t)$.

6. а) 8099; б) 4736; в) 3591; г) 1521; д) 1599; е) 39996; ж) 9711; з) 9991; и) 35,99; к) 24,54; л) 0,9964; м)8099,25;

7. а) 200; б) 1400; в) 3200; г) 7600; д) 225; е) 1000; ж) 1600; з) 3200.

8. а) $a(a+2b)$; б) $a(a+6b)$; в) $4(a-b)(a+4b)$; г) $3(5b-3a)(5b+a)$; д) $c(c-2d)$; е) $c(c-6d)$; ж) $7(d-c)(d-7c)$; з) $3(5b-3a)(5b+a)$; и) $(x+y+z)(x+y-z)$; к) $(x+y+4z)(x+y-4z)$; л) $(15x+6y+7z)(15x+6y-7z)$; м) $(13z+11x+2y)(13z-11x-2y)$; н) $4zt$; о) $24zt$; п) $56zt$; р) $4(2z-11t)(11z+2t)$.

9. а) ±1; б) $\pm1\frac{1}{2}$; в) $\pm1\frac{2}{3}$; г) $\pm1\frac{5}{6}$; д) -1; 3; е) -2; 16; ж) -9; 1; з) $\frac{1}{3}$; 3; и) -14; 4; к) -19; 5; л) -11; $-\frac{1}{3}$; м) -1; $3\frac{2}{3}$; н) 0; о) 1; п) -19; $\frac{1}{17}$; р) -15; $-\frac{1}{19}$.

Часть 2

1. а) x^2; б) z^2-1; в) t^2+1; г) x^2+y^2; д) $10b^2+10a^2$; е) p^2+1; ж) $4q^2+4$; з) a^2+b^2; и) $16z^2-16t^2$; к) $4u^2+4-16t^2$; л) $4u^2+4-16t^2$; м) $10z^2-50t^2$.

2. а) x^6; б) $\frac{p^{14}}{49}-12$; в) $144z^{24}-169t^{26}$; г) $z^{2t}-200$; д) $\frac{1}{b^{10}}-\frac{1}{a^6}$; е) $\frac{9}{4p^6}-6\frac{1}{4}$; ж) $\frac{16}{9q^4}-5\frac{19}{25}$; з) b^{44}; и) $0,3t^{2z}-0,5$; к) $\frac{49x^{32}}{81}$; л) $q^{6a}+0,01$; м) $\frac{361}{z^{10a}}-\frac{t^{12a}}{225}$.

3. а) $7b^5$ и $16a^4$; б) $0,2x^7$ и $121y^{12}$; в) $\frac{18}{p}$ и $\frac{121}{49q^6}$; г) $4u^8$ и $1,4v^{60}$.

4. а) $(x-y)(x+y)(z+t)$; б) $(z^n-20)(z^n+20)$; в) $(22-t^{2m})(22+t^{2m})$; г) $(a^{10}-23)(a^{10}+23)$; д) $\left(\frac{b^2}{3}-\frac{c^2}{4}\right)\left(\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{4}\right)\left(\frac{b^4}{9}+\frac{c^2}{16}\right)$; е) $6(p-9)(p+9)$; ж) $(q-p^4)(q+p^4)(q^2+p^8)$; з) $(m-n^2p^3)(m+n^2p^3)(m^2+n^4p^6)$.

5. а) $6(x-y^2)(x+y^2)$; б) $7(1-7z^2)(1+7z^2)$; в) $xyt\left(\frac{z}{4}-\frac{t^2}{5}\right)\left(\frac{z}{4}+\frac{t^2}{5}\right)$; г) $3a(8-9ax)(8+9ax)$;

д) $3bc(3b^2-5c^3)(3b^2+5c^3)$; е) $4p(4p^4-7)(4p^4+7)$; ж) $0,3q(q^5-0,3)(q^5+0,3)$;

з) $5m(m^2-3)(m^2+3)(m^4+9)$; и) $\left(1\frac{2}{7}d^2-1\frac{2}{9}f^3\right)\left(1\frac{2}{7}d^2+1\frac{2}{9}f^3\right)$;

к) $\left(1\frac{2}{11}m^a-1\frac{2}{15}n^{2a}\right)\left(1\frac{2}{11}m^a-1\frac{2}{15}n^{2a}\right)$; л) $xy\left(2,5x^{100}-1\frac{2}{17}y^{50}\right)\left(2,5x^{100}+1\frac{2}{17}y^{50}\right)$;

м) $2(1,5z^{12}-1,3t^6)(1,5z^{12}+1,3t^6)$.

6. а) 9900; б) 6375; в) 4875; г) 2464; д) 1551; е) 39936; ж) 11811; з) 19375; и) $48,99$; к) $35,84$; л) $0,9975$; м) $6399,51$.

7. а) 4400; б) 5000; в) 3600; г) 6200; д) 3500; е) 2000; ж) 7200; з) 6400.

8. а) $a(a+b)$; б) $0,4(a+b)(0,4a+b)$; в) $0,2(a+b)(0,2a+b)$; г) $-0,6(a+b)(a+0,6b)$;

д) $4c(4c+5d)$; е) $4(c-d)(4c+0,2d)$; ж) $5(c+d)(5c-1,2d)$; з) $0,4(c-d)(5d-0,4c)$;

и) $8(x+y-z)(2x+2y+z)$; к) $64(x+y)(x+y+z)$; л) $24(x+2y-z)(6x+12y+z)$;

м) $19(x-2y+z)(z-19x+38y)$; н) $15(3z-t)(3t-z)$; о) $4(z+17t)(t+18z)$;

п) $-2(3z+13t)(8t+15z)$; р) $8(3z-t)(z-11t)$.

9. а) $\pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{1}{3}$; в) $\pm\frac{1}{5}$; г) $\pm1\frac{2}{7}$; д) -5; 1. е) -22; -2. ж) -10; $-\frac{10}{13}$; з) $-\frac{2}{5}$; 4. и) -1; $-0{,}8$.
к) $-1{,}6$; 0. л) $\frac{11}{25}$. м) -5; 1. н) $0{,}5$; о) $-1\frac{6}{13}$; 1. п) $-\frac{7}{25}$; 1. р) 1; $4\frac{1}{7}$.

§ 2 Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

Упражнение 1. «Наблюдаем»
Преобразуйте квадрат двучлена в многочлен по следующему образцу:

$$
\begin{aligned}
&(2x+3y)^2 = \\
&=(2x+3y)(2x+3y)= \\
&=(2x)^2+2x\cdot3y+3y\cdot2x+(3y)^2= \\
&=4x^2+6xy+6yx+9y^2= \\
&=4x^2+12xy+9y^2.
\end{aligned}
$$

a) $(a-b)^2$;

b) $(x+y)^2$;

c) $(p-3)^2$;

d) $(c^2+2m)^2$;

e) $(3p-a^3)^2$;

f) $(3m+5c)^2$.

Упражнение 2. «Обобщаем»

В каждом из пунктов a) – f) внимательно проанализируйте и сравните первую строчку и последнюю.Не выполняя преобразований, но опираясь на наблюдения, сделанные в упражнении 1, постарайтесь «предсказать» результат преобразования в многочлен выражений $(5y-z)^2$ *и* $(10a+7b)^2$. *Анализируя результаты преобразований из упражнения 1, постарайтесь выявить какую-нибудь закономерность, сформулировать ее в виде утверждения и записать в виде тождества.*

Упражнение 3. «В обратную сторону»
Мы очень надеемся, что вы уловили, каким образом квадрат двучлена преобразуется в многочлен. Поэтому даем следующее задание.Все следующие многочлены являются результатами возведения соответствующих двучленов в квадрат. Попытайтесь догадаться, какие именно двучлены возводились в квадрат в каждом из случаев.

a) $p^2+2pq+q^2$;

b) a^2+b^2+2ab;

c) p^2-2p+1;

d) $x^2+4xy+4y^2$;

e) $16x^2-24xy+9y^2$;

f) m^4+9+6m^2.

Решение упражнений 1 и 2. Заметим, что каждый из двучленов из упражнения 1 является либо суммой, либо разностью двух одночленов. Остановимся сначала на квадрате суммы. Мы почти уверены, что у вас уже сформировалась гипотеза. ***В результате преобразования квадрата суммыдвух выражений получаем три слагаемых: квадрат первого выражения, удвоенное произведение первого и второго, и квадрат второго выражения.***

$$(c^2+2m)^2=c^4+4c^2m+4m^2.$$

Если данная гипотеза верна, то

$$(10a+7b)^2=(10a)^2+2\cdot10a\cdot7b+(7b)^2=100a^2+140ab+49b^2.$$

Аналогичная ситуация имеет место для квадрата разности. ***В результате преобразования квадрата разности двух выражений получаем три слагаемых: квадрат первого выражения, удвоенное произведение первого и второго со знаком минус, и квадрат второго выражения.*** Например,

$$(p-3)^2 = p^2-6p+9\ ;$$

$$\left(3p-a^3\right)^2 = 9p^2-6pa^3+a^6\ .$$

Если сформулированная гипотеза верна, то

$$(5y-z)^2 = (5y)^2-2\cdot 5y\cdot z+z^2 = 25y^2-10yz+z^2\ .$$

Остается понять, что преобразования, которые вы сделали в пунктах a) и b), на самом деле являются доказательствами сформулированных гипотез. Итак, имеют место формулы сокращенного умножения для квадрата суммы и квадрата разности:

$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{xy}+\boldsymbol{y}^2$
$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{xy}+\boldsymbol{y}^2$

Удивительно, но некоторые ученики думают, что верны формулы $(x+y)^2=x^2+y^2$ *и* $(x-y)^2=x^2-y^2$. *А некоторые вообще ничего не думают, но «автоматически» делают такое, например, преобразование:* $(2b-3)^2=4b^2-9$, *т.е. фактически применяют формулу* $(x-y)^2=x^2-y^2$. *А может быть действительно есть такая замечательная формула, но злые учителя тщательно ее от вас скрывают?* . *Давайте порассуждаем хладнокровно. Если равенство* $(x-y)^2=x^2-y^2$ *является формулой, т.е. тождеством, то оно должно выполняться* ***для любых*** *значений* x *и* y. *Следовательно для ее опровержения достаточно найти* ***хотя бы одну пару конкретных*** *значений* x *и* y, *для которых равенство не выполняется. Математики говорят в таких случаях: привести контрпример. В данном случае контрпримеров можно найти сколько угодно. Например, при* $x=5$ *и* $y=1$ *левая часть равенства* $(x-y)^2=x^2-y^2$ *равна* $(5-1)^2=4^2=16$, *а правая равна* $5^2-1^2=24$. *Следовательно, формула* $(x-y)^2=x^2-y^2$ *«не работает». Также, как и формула* $(x+y)^2=x^2+y^2$. ***Нельзя при возведении многочлена в квадрат просто возвести каждый одночлен в квадрат.***

Решение упражнения 3. Можно догадаться, что:

$$p^2+2pq+q^2=(p+q)^2\ ;$$

$$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2\ ;$$

$$p^2-2p+1=(p-1)^2\ ;$$

$$x^2+4xy+4y^2=(x+2y)^2\ ;$$

$$16x^2-24xy+9y^2=(4x-3y)^2\ ;$$

$$m^4+9+6m^2=\left(m^2+3\right)^2\ .$$

Преобразовать квадрат суммы или разности в многочлен легко. Например, для преобразования выражения $\left(\frac{h^3}{4}+2\right)^2$ *в квадрат достаточно подставить* $x=\frac{h^3}{4}$ *и* $y=2$ *в формулу* $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ *и получить*

$$\left(\frac{h^3}{4}+2\right)^2=\left(\frac{h^3}{4}\right)^2+2\cdot\frac{h^3}{4}\cdot 2+2^2=\frac{h^6}{16}+h^3+4\ .$$

Или, называя $\frac{h^3}{4}$ *первым выражением и число 2 вторым выражением, применить правило, сформулированное выше:* ***квадрат суммы двух выражений равен сумме трех слагаемых: квадрата первого выражения, удвоенного произведения первого и второго, и квадрата второго выражения.*** *Гораздо труднее «распознать» в трехчлене квадрат суммы или разности. Например, требуются определенные усилия, чтобы в выражении* $4p^2-2pq+\frac{q^2}{4}$ *увидеть квадрат разности:* $4p^2-2pq+\frac{q^2}{4}=\left(2p-\frac{q}{2}\right)^2$. *Требуется внимательность или, если таковой не имеется, , проверка, чтобы не «промахнуться» и не принять выражение* $16m^2+6mn+9n^2$ *за полный квадрат* $(4m+3n)^2$.

Анализируя результаты выполнения упражнения 3, можно сформулировать следующее правило.

Сумма квадратов двух одночленов является квадратом только в том случае, если дополнена удвоенным произведением этих одночленов со знаком плюс или минус.

Пример 1. Какие из следующих выражений являются полными квадратами двучленов?

a) $x^2-x+0{,}25$;

b) $16p^2-4pq+q^2$;

c) $0{,}36y^2+0{,}04x^2-1{,}2yx$.

Решение.

a) В трехчлене $x^2-x+0{,}25$ первое и третье слагаемые являются квадратами одночленов x и $0{,}5$ соответственно. Удвоенное произведение этих одночленов равно $2x\cdot 0{,}5=x-$ это как раз второе слагаемое суммы $x^2-x+0{,}25$ со знаком «–». Следовательно, $x^2-x+0{,}25=(x-0{,}5)^2$.

b) В трехчлене $16p^2-4pq+q^2$ первое и третье слагаемые являются квадратами одночленов $4p$ и q соответственно. Удвоенное произведение этих одночленов равно $2\cdot 4pq=8pq-$ это не равно второму слагаемому суммы $16p^2-4pq+q^2$ ни со знаком «+», ни со знаком «–». Следовательно, $16p^2-4pq+q^2$ не представляется в виде квадрата разности.

c) В трехчлене $0{,}36y^2+0{,}04x^2-2{,}4yx$ первое и второе слагаемые являются квадратами одночленов $0{,}6y$ и $0{,}2x$ соответственно. Удвоенное произведение этих одночленов равно $2\cdot 0{,}6y\cdot 0{,}2x=0{,}24yx$ – это не равно третьему слагаемому суммы $0{,}36y^2+0{,}04x^2-2{,}4yx$ ни со знаком «+», ни со знаком «–». Следовательно, $0{,}36y^2+0{,}04x^2-2{,}4yx$ не представляется в виде квадрата разности.

Пример 2. Раскрыть скобки, применяя формулы квадрата суммы или разности двучленов:

a) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2$;

b) $\left(a^{10}-a^{-11}\right)^2$.

Решение.

a) Применяем формулу $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, подставляя $y=\frac{2}{x}$:

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{2}{x}+\left(\frac{2}{x}\right)^2=x^2+4+\frac{4}{x^2}.$$

b) Применяем формулу $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$, подставляя $x=a^{10}$ и $y=a^{-11}$:

$$\left(a^{10}-a^{-11}\right)^2=\left(a^{10}\right)^2-2a^{10}\cdot a^{-11}+\left(a^{-11}\right)^2=a^{20}-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^{22}}.$$

Задачи

Часть 1

1. Представьте в виде многочлена:

а) $(a+x)^2$; б) $(y-7)^2$; в) $(-x-y)^2$;

г) $(-y+2z)^2$; д) $(5y-7)^2$; е) $(3z+4x)^2$;

ж) $(5z+6t)^2-(5z-6t)^2$; з) $(10a+z)^2-z^2$; и) $\frac{1}{4}(2x+8y)^2$;

к) $\left(x^3+8y^2\right)^2$; л) $\left(x^4-7y^3\right)^2$; м) $\left(x^3-6y^5\right)^2-\left(x^3+6y^5\right)^2$

2. Представьте в виде многочлена:

а) $\left(a+\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}$; б) $\left(3a-\frac{b}{12}\right)^2+\frac{ab}{2}+\frac{143b^2}{144}$;

в) $\left(\frac{a}{5}+\frac{x}{6}\right)^2-\left(\frac{a}{5}-\frac{x}{6}\right)^2$;

г) $\left(a+\frac{7x}{4}\right)^2-\frac{7ax}{2}-\frac{49x^2}{16}$; д) $\left(6a-\frac{5x}{9}\right)^2+\frac{23ax}{3}-\frac{16x^2}{9}$;

е) $\left(\frac{a}{22}+\frac{11x}{12}\right)^2+\frac{483a^2}{484}+\frac{11ax}{12}+\frac{23x^2}{144}$; ж) $\left(\frac{3a}{7}-\frac{7x}{3}\right)^2-\frac{9a^2}{49}-\frac{49x^2}{9}$;

3. Представьте в виде степени:

а) a^2+4a+4; б) x^2-6x+9;

в) $4y^2+16y+16$; г) $25z^2-30z+9$:

д) $16x^2+48xy+36y^2$; е) $25x^2+64y^2+80xy$;

ж) $(x-10y)^2+40xy$; з) $(2z+7t)^2-56zt$;

и) $\left(x^2+5\right)^2-x^4+15x^2-25$; к) $\left(x^5-16\right)^2-x^{10}-256$;

л) $\frac{x^2}{9}+4xy+36y^2$; м) $\frac{x^2}{25}-\frac{2xy}{35}+\frac{y^2}{49}$.

4. Вычислите значение выражения:

а) $49a^2+84ab+36b^2$, при $a=\frac{1}{7}$ и $b=\frac{1}{3}$;

б) $625a^2-650ab+169b^2$, при $a=\frac{1}{5}$ и $b=\frac{1}{13}$;

в) $324a^2+\frac{4ab}{3}+\frac{b^2}{729}$, при $a=\frac{1}{18}$ и $b=54$;

г) $\frac{a^2}{289}-\frac{2ab}{187}+\frac{b^2}{121}$, при $a=17$ и $b=22$.

5. Представьте в виде суммы:

а) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^2-\left(x-\frac{1}{y}\right)^2$; б) $\left(x-\frac{9}{y}\right)^2+\left(x+\frac{9}{y}\right)^2-\frac{162}{y^2}$;

в) $\left(x+\frac{1}{5y}\right)^2-\frac{2x}{5y}-\frac{1}{25y^2}$; г) $\left(2z-\frac{1}{t}\right)^2+\frac{4z}{t}-\frac{1}{t^2}$;

д) $\left(2a+\frac{1}{4b}\right)^2+\frac{15}{16b^2}$; е) $\left(2x-\frac{3}{z}\right)^2+\frac{12x}{z}$;

ж) $\left(\frac{x}{6}+\frac{3}{y}\right)^2-xy$; з) $\left(\frac{3x}{2}-\frac{2}{9y}\right)^2-\left(\frac{3x}{2}+\frac{2}{9y}\right)^2$;

и) $\left(\frac{4x}{5}+\frac{5}{4y}\right)^2+\frac{9x^2}{25}-\frac{x}{y}-\frac{9}{16y^2}$.

6. Представьте в виде суммы:

а) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$; б) $\left(y-\frac{2}{y}\right)^2+4$; в) $\left(19z+\frac{1}{z}\right)^2-360z^2-37$;

г) $\left(21t-\frac{3}{t}\right)^2+126$; д) $\left(\frac{a}{18}+\frac{27}{a}\right)^2+\frac{323a^2}{324}-2-\frac{728}{a^2}$;

е) $\left(5b-\frac{3}{4b}\right)^2-\left(5b+\frac{4}{3b}\right)^2$; ж) $\left(\frac{7x}{3}+\frac{9}{14x}\right)^2-3$;

з) $\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{2x}\right)^2+\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}\right)^2$; и) $16a^2x^2\cdot\left(\frac{4x}{a}+\frac{a}{4x}\right)^2$.

7. Найдите $x^2+\frac{1}{x^2}$, если $x+\frac{1}{x}=a$.

8. Найдите $\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}$, если $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=3$.

9. Представьте в виде суммы:

а) $(ax+2y)^2$; б) $(-2ax-3y)^2$; в) $(ax-9zt)^2$;

г) $(8xyz+t)^2$; д) $(5xyz-6yzt)^2$; е) $\left(xt+\frac{yt}{2}\right)^2-\frac{y^2t^2}{4}$;

ж) $\left(2-\frac{xyzt}{4}\right)^2-\frac{x^2y^2z^2t^2}{16}$; з) $\left(11xyzt+\frac{1}{22}\right)^2-120x^2y^2z^2t^2-\frac{1}{484}$;

и) $\left(\frac{3ax}{2}-\frac{4xy}{3}\right)^2-\frac{9a^2x^2}{4}-\frac{16x^2y^2}{9}$.

10. Представьте в виде суммы:

а) $\left(\frac{2x}{y}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}-\frac{3x^2}{y^2}$; б) $\left(\frac{x}{2y}-z\right)^2+\frac{3x^2}{4y^2}$; в) $\left(5xy+\frac{1}{3z}\right)^2-\frac{10xy}{3z}+\frac{8}{9z^2}$;

г) $\left(7x-\frac{1}{6yz}\right)^2-48x^2+\frac{4x}{3yz}+\frac{35}{36y^2z^2}$; д) $t^2y^2\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{y}\right)^2-x^2y^2-t^4$;

е) $z^2\left(7x-\frac{11y}{z}\right)^2$; ж) $9\cdot\left(\frac{xt}{3}+\frac{3}{zt}\right)^2-17-\frac{80}{z^2t^2}$;

з) $\frac{1}{100}\left(\frac{xt}{2}+\frac{50}{xt}\right)^2-\frac{1}{100}\left(\frac{xt}{2}-\frac{50}{xt}\right)^2$; и) $\frac{3}{4}\left(\frac{7xt}{y}-\frac{y}{21xt}\right)^2-\frac{3}{4}\left(\frac{7xt}{y}+\frac{y}{21xt}\right)^2$.

11. Вычислите используя формулы сокращенного умножения:

а) $64^2+128\cdot 36+36^2$; б) $48^2-100\cdot 48+2500$;

в) $27^2+27\cdot 46+529$; г) $38^2-76\cdot 32+1024$;

д) 99^2; е) 199^2;

ж) $(7{,}5)^2$; з) $(11{,}1)^2$.

12. Решите уравнение:

а) $x^2-18x+81=0$; б) $x^2+22x+121=0$;

в) $(x-7)^2=(x+13)^2$; г) $(2x+9)^2=(2x-11)^2$;

д) $(3x-4)^2-5(x+2)^2=(2x-1)^2$; е) $(x+7)^2+5(x-2)^2=6(x-1)^2$.

Часть 2

1.Представьте в виде многочлена:

а) $(2a-7x)^2$; б) $(y+19)^2$; в) $(-x+y)^2$;

г) $(-2y-11z)^2$; д) $(13z-14x)^2$; е) $(6y+17)^2$;

ж) $(7z-3t)^2-(7z+3t)^2$; з) $(11a-z)^2-120a^2$; и) $\frac{1}{9}(3x-6y)^2$;

к) $(x^5-21y^6)^2$; л) $(2x^7+13y^7)^2$; м) $(x^5-10y^{10})^2+(x^5+10y^{10})^2$;

2. Представьте в виде многочлена:

а) $\left(a-\frac{x}{3}\right)^2-\frac{x^2}{9}$; б) $\left(4a+\frac{b}{8}\right)^2-ab+\frac{63b^2}{64}$;

в) $\left(\frac{a}{7}-\frac{x}{8}\right)^2+\left(\frac{a}{7}+\frac{x}{8}\right)^2$; г) $\left(a+\frac{4x}{7}\right)^2-\frac{15ax}{7}-\frac{16x^2}{49}$;

д) $\left(6a-\frac{5x}{9}\right)^2+\frac{23ax}{3}+\frac{56x^2}{81}$; е) $\left(\frac{a}{15}+\frac{5x}{2}\right)^2+\frac{224a^2}{225}+\frac{2ax}{3}-\frac{21x^2}{4}$;

ж) $\left(\frac{16a}{15}-\frac{15x}{16}\right)^2-\frac{256a^2}{225}-\frac{225x^2}{256}$;

3. Представьте в виде степени:

а) $a^2+14a+49$; б) $x^2-36x+324$;

в) $9y^2+42y+49$; г) $36z^2-108z+81$;

д) $16x^2+88xy+121y^2$; е) $64x^2+81y^2+144xy$;

ж) $(x-13y)^2+52xy$; з) $(3z+8t)^2-96zt$;

и) $(x^3+6)^2-x^6+15x^3-36$; к) $(x^7-13)^2-x^{14}-169+154x^7$;

л) $\frac{x^2}{25}+2xy+25y^2$; м) $\frac{x^2}{36}-\frac{xy}{21}+\frac{y^2}{49}$.

4. Вычислите значение выражения:

а) $121a^2+132ab+36b^2$, при $a=\frac{2}{11}$ и $b=\frac{5}{6}$;

б) $81a^2-216ab+144b^2$, при $a=\frac{1}{6}$ и $b=\frac{1}{8}$;

в) $361a^2+342ab+81b^2$, при $a=\frac{1}{38}$ и $b=\frac{1}{18}$;

г) $\frac{a^2}{529}-\frac{ab}{23}+\frac{b^2}{4}$, при $a=46$ и $b=2$.

5. Представьте в виде суммы:

а) $\left(3x+\frac{2}{y}\right)^2-\left(3x-\frac{2}{y}\right)^2$; б) $\left(x+\frac{11}{y}\right)^2+\left(x-\frac{11}{y}\right)^2-\frac{241}{y^2}$;

в) $\left(x-\frac{1}{6y}\right)^2-\frac{x}{3y}-\frac{1}{36y^2}$; г) $\left(3z-\frac{1}{2t}\right)^2+\frac{3z}{t}-\frac{1}{4t^2}$;

д) $\left(3a-\frac{1}{6b}\right)^2+\frac{35}{36b^2}$; е) $\left(7x+\frac{4}{z}\right)^2-\frac{56x}{z}$;

ж) $\left(\frac{x}{9}+\frac{6}{y}\right)^2-\frac{4xy}{3}$; з) $\left(\frac{5x}{7}-\frac{7}{5y}\right)^2-\left(\frac{5x}{7}+\frac{7}{5y}\right)^2$;

и) $\left(\frac{12x}{13}-\frac{13}{12y}\right)^2+\frac{25x^2}{169}+\frac{x}{y}-\frac{25}{144y^2}$.

6. Представьте в виде суммы:

а) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2x}\right)^2$; б) $\left(y+\frac{6}{y}\right)^2-12$; в) $\left(21z+\frac{1}{z}\right)^2-440z^2-41$;

г) $\left(25t+\frac{4}{t}\right)^2-200$;   д) $\left(\frac{a}{24}+\frac{12}{a}\right)^2+\frac{575a^2}{576}-1-\frac{144}{a^2}$;

е) $\left(4b-\frac{6}{5b}\right)^2-\left(4b+\frac{6}{5b}\right)^2$;   ж) $\left(\frac{5x}{9}+\frac{9}{10x}\right)^2-1$;

з) $\left(\frac{2x}{a}+\frac{a}{3x}\right)^2+\left(\frac{2x}{a}-\frac{a}{3x}\right)^2$;   и) $a^2x^2\cdot\left(\frac{7x}{a}-\frac{a}{7x}\right)^2$.

7. Найдите значение выражения $\frac{x^2}{4}+\frac{25}{x^2}$, если $\frac{x}{2}+\frac{5}{x}=a$.

8. Найдите значение выражения $x^2+\frac{36}{x^2}$, если $\frac{x}{3}+\frac{2}{x}=3$.

9. Представьте в виде суммы:

а) $(ax-7y)^2$;   б) $(-4ax-5y)^2$;   в) $(ax-17zt)^2$;

г) $(10xyz+t)^2$;   д) $(9xyz-8yzt)^2$;   е) $\left(xt-\frac{yt}{12}\right)^2$;

ж) $\left(3+\frac{xyzt}{8}\right)^2$;   з) $\left(5xyzt-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{100}$; и) $\left(\frac{7ax}{8}-\frac{4xy}{7}\right)^2+\frac{15a^2x^2}{64}+\frac{33x^2y^2}{49}$.

10. Представьте в виде суммы:

а) $\left(\frac{12x}{y}-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}$;   б) $\left(\frac{x}{10y}+5z\right)^2$;   в) $\left(13xy-\frac{1}{15z}\right)^2$;

г) $\left(17x+\frac{1}{34yz}\right)^2$;   д) $4t^2y^2\left(\frac{x}{2t}-\frac{2t}{y}\right)^2-x^2y^2-15t^4$;

е) $z^2\left(11x+\frac{5y}{2z}\right)^2$;   ж) $4\cdot\left(\frac{xt}{4}-\frac{2}{zt}\right)^2$;

з) $15x^2t^2\left(\frac{xt}{5}+\frac{6}{xt}\right)^2$;   и) $2x^2y^2t^2\left(\frac{3xt}{y}-\frac{y}{12xt}\right)^2$.

11. Вычислите используя формулы сокращенного умножения:

а) $17^2+86\cdot17+43^2$;   б) $38^2-56\cdot38+28^2$;

в) $77^2+46\cdot77+529$;   г) $31^2-31\cdot42+441$.

д) 101^2;   е) 105^2;

ж) $(5,7)^2$;   з) $(10,7)^2$.

12. Решите уравнение:

а) $x^2-30x+225=0$;   б) $x^2+24x+144=0$;

в) $(x-5)^2=(x+12)^2$;   г) $(3x+11)^2=(3x-13)^2$;

д) $2(x-6)^2+5(x+1)^2=7(x-3)^2$;   е) $9(x+1)^2+3(x+2)^2=12(x+3)^2$.

Ответы

Часть 1

1. а) $a^2+2ax+x^2$; б) $y^2-14y+49$; в) $x^2+2xy+y^2$; г) $y^2-4yz+4z^2$; д) $25y^2-70y+49$; е) $9z^2+24zx+16x^2$; ж) $120zt$; з) $100a^2+20az$; и) $x^2+8xy+16$; к) $x^6+16x^3y^2+64y^4$; л) $x^8-14x^4y^3+49y^6$; м) $-24x^3y^5$.

2. а) a^2+ax; б) $9a^2+b^2$; в) $\frac{2ax}{15}$; г) a^2; д) $36a^2+ax+x^2$; е) a^2+ax+x^2; ж) $-2ax$.

3. а) $(a+2)^2$; б) $(x-3)^2$; в) $(2y+4)^2$; г) $(5z-3)^2$; д) $(4x+6y)^2$; е) $(5x+8y)^2$; ж) $(x+10y)^2$; з) $(2z-7t)^2$; и) $(5x)^2$; к) $(-2x)^5$; л) $\left(\frac{x}{3}+6y\right)^2$; м) $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{7}\right)^2$.

4. а) 9; б) 16; в) 9; г) 1.

5. а) $\frac{4x}{y}$; б) $2x^2$; в) x^2; г) $4z^2$; д) $4a^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}$; е) $4x^2+\frac{9}{z^2}$; ж) $\frac{x^2}{36}+\frac{9}{y^2}$; з) $-\frac{4x}{3y}$; и) $x^2+\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$.

6. а) 4; б) $y^2+\frac{4}{y^2}$; в) $z^2+1+\frac{1}{z^2}$; г) $44t^2+\frac{9}{t^2}$; д) $a^2+1+\frac{1}{a^2}$; е) -15; ж) $\frac{49x^2}{9}+\frac{81}{196x^2}$;

з) $\frac{2x^2}{a^2}+\frac{a^2}{2x^2}$; и) $256x^4+32x^2a^2+a^4$.

7. a^2-2. 8. 7.

9. а) $a^2x^2+4axy+4y^2$; б) $4a^2x^2+12axy+9y^2$; в) $a^2x^2-18axzt+81z^2t^2$;

г) $64x^2y^2z^2+16xyzt+t^2$; д) $25x^2y^2z^2-60xy^2z^2t+36y^2z^2t^2$; е) $x^2t^2+xyt^2$; ж) $4-xyzt$;

з) $x^2y^2z^2t^2+xyzt$; и) $-4ax^2y$.

10. а) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}+1$; б) $\frac{x^2}{y^2}-\frac{xz}{y}+z^2$; в) $25x^2y^2+\frac{1}{z^2}$; г) $x^2-\frac{x}{yz}+\frac{1}{y^2z^2}$; д) $\frac{2x}{y}$;

е) $49x^2z^2-154xyz+121y^2$; ж) $x^2t^2+1+\frac{1}{x^2t^2}$; з) 1; и) -1.

11. а) 10000; б) 4; в) 2500; г) 36; д) 9801; е) 39601; ж) 56,25; з) 123,21.

12. а) 9; б) -11; в) -3; г) 0,5; д) $-\frac{1}{8}$; е) $-\frac{7}{3}$.

Часть 2

1. а) $4a^2-28ax+49x^2$; б) $y^2+38y+361$; в) $x^2-2xy+y^2$; г) $4y^2+44yz+121z^2$;

д) $169z^2-364zx+196x^2$; е) $36y^2+204y+289$; ж) $-84zt$; з) $a^2-22az+z^2$; и) $x^2-4xy+4y^2$;

к) $x^{10}-42x^5y^6+441y^{12}$; л) $4x^{14}+52x^7y^7+169y^{14}$; м) $2x^{10}+200y^{20}$.

2. а) $a^2-\frac{2ax}{3}$; б) $16a^2+b^2$; в) $\frac{2a^2}{49}+\frac{x^2}{32}$; г) a^2-ax; д) $36a^2+ax+x^2$; е) a^2+ax+x^2; ж) $-2ax$.

3. а) $(a+7)^2$; б) $(x-18)^2$; в) $(3y+7)^2$; г) $(6z-9)^2$; д) $(4x+11y)^2$; е) $(8x+9y)^2$; ж) $(x+13y)^2$;

з) $(3z-8t)^2$; и) $(3x)^3$; к) $(2x)^7$; л) $\left(\frac{x}{5}+5y\right)^2$; м) $\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{7}\right)^2$.

4. а) 49; б) 0; в) 1; г) 1;

5. а) $\frac{24x}{y}$; б) $2x^2+\frac{1}{y^2}$; в) x^2; г) $9z^2$; д) $a^2-ab+\frac{1}{b^2}$; е) $49x^2+\frac{16}{z^2}$; ж) $x^2-\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$;

6. а) 2; б) $y^2+\frac{36}{y^2}$; в) $z^2+1+\frac{1}{z^2}$; г) $625t^2+\frac{16}{t^2}$; д) a^2; е) $-19{,}2$; ж) $49x^4-2a^2x^2+\frac{a^4}{49}$;

з) $\frac{8x^2}{a^2}+\frac{2a^2}{9x^2}$.

7. a^2-5; 8. 69;

9. а) $a^2x^2-14axy+49y^2$; б) $16a^2x^2+40axy+25y^2$; в) $a^2z^2-34axzt+289z^2t^2$;

г) $100x^2y^2z^2+200xyzt+t^2$; д) $81x^2y^2z^2-144xy^2z^2t+64y^2z^2t^2$; е) $x^2t^2-\frac{xyt^2}{6}+\frac{y^2t^2}{144}$;

ж) $9+\frac{3xyzt}{4}+\frac{x^2y^2z^2t^2}{64}$; з) $25x^2y^2z^2t^2-xyzt$; и) $a^2x^2-ayx^2+x^2y^2$.

11. а) 3600; б) 100; в) 10000; г) 100; д) 10201; е) 11025; ж) 32,49; з) 114,49.

12. а)15; б) -12; в) -3,5; г) $\frac{1}{3}$; д) -0,5; е) -14,5.

§ 3 Выделение полного квадрата и разложение на множители

Упражнение 1. « Мостик».

a) *Используя формулу квадрата суммы, представить выражение* $(2x+3)^2-16$ *в виде многочлена.*

b) *Используя формулу разности квадратов, представить выражение* $(2x+3)^2-16$ *в виде произведения.*

c) *Сравнивая результаты пунктов a) и b), постарайтесь разложить на множители выражения* $4x^2-12x-7$, $p^2+2p-24$, $9z^2-6z-8$.

Упражнение 2.«Как разложить квадратный трехчлен на множители». *Многочлены вида* ax^2+bx+c, *где* a, b *и* c *– некоторые числа,* $a\neq 0$, *называются* ***квадратными трехчленами от переменной*** x. *Например,* $P(x)=4x^2-12x-7$, $Q(p)=p^2+2p-24$, $R(z)=9z^2-6z-8$ *являются квадратными трехчленами.*

a) *Опираясь на наблюдения и результаты упражнения 1, постарайтесь* ***сформулировать общий принцип*** *разложения квадратных трехчленов на множители.*

b) *Возможно ли применить сформулированный вами принцип к трехчленам* $P_1(x)=x^2+6x+5$, $P_2(x)=-x^2+6x+7$, $P_3(x)=x^2+6x+17$, $P_4(x)=3x^2+5x-8$.

Упражнение 3. «Зри в корень!». ***Корнями квадратного трехчлена*** ax^2+bx+c *называются значения переменной* x, *при которых значение трехчлена равно нулю. Например, трехчлен* $P(x)=-x^2+5x$ *имеет корни* $x=0$ *и* $x=5$, *так как* $P(0)=-0^2+5\cdot 0$ *и* $P(5)=-5^2+5\cdot 5=-25+25=0$. *Из определения следует, что найти эти корни можно было, приравняв* $-x^2+5x$ *к нулю. Полученное равенство* $-x^2+5x=0$ *является уравнением. Решить данное уравнение можно, раскладывая левую часть на множители:*

$$-x^2+5x=0,\ -x(x-5)=0.$$

Произведение двух множителей равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0. Следовательно, $-x=0$ *или* $x-5=0$, *т.е.* $x=0$ *или* $x=5$. *Опираясь на результаты упражнений 1 и 2, найдите корни квадратных трехчленов* $P(x)=4x^2-12x-7$, $Q(p)=p^2+2p-24$, $R(z)=9z^2-6z-8$ *и* $P_3(x)=x^2+6x+17$.

Упражнение 4. «Полезные разложения». *Разложите на множители следующие выражения:*

a) a^4+4;

b) a^4+a^2+1.

Решение упражнения 1. С одной стороны,

$$(2x+3)^2-16=4x^2+12x+9-16=4x^2+12x-7.$$

С другой стороны,

$$(2x+3)^2-16=(2x+3-4)(2x+3+4)=(2x-1)(2x+7).$$

Следовательно, имеет место разложение на множители

$$4x^2+12x-7=(2x-1)(2x+7).$$

Попробуем теперь разложить на множители трехчлен $4x^2-12x-7$, который отличается от $4x^2+12x-7$ только знаком второго слагаемого.

$$\begin{aligned}4x^2-12x-7&=4x^2-12x+9-16=\\&=(2x-3)^2-4^2=\\&=(2x-3-4)(2x-3+4)=\\&=(2x-7)(2x+1).\end{aligned}$$

Ключевым моментом обоих полученных разложений служит выделение квадрата двучлена $(2x+3)^2$ или $(2x-3)^2$.

Рассмотрим выражение $p^2+2p-24$. Сумма первых двух слагаемых «подсказывает» применить тождество $p^2+2p+1=(p+1)^2$. Получаем:

$$p^2+2p-24=p^2+2p+1-1-24=(p+1)^2-25=(p+1-5)(p+1+5)=(p-4)(p+6).$$

Аналогично в трехчлене $9z^2-6z-8$ применяем тождество $9z^2-6z+1=(3z-1)^2$. Имеем: $9z^2-6z-8=9z^2-6z+1-1-8=(3z-1)^2-3^2=(3z-1-3)(3z-1+3)=(3z-4)(3z+2)$. Упражнение 1 выполнено.

Допустим, в некотором многочлене можно прибавить и одновременно отнять определенное выражение таким образом, чтобы некоторая группа слагаемых образовала квадрат двучлена. Такое преобразование, как вы уже догадались, называется **выделением полного квадрата или дополнением до полного квадрата**.

Решение упражнения 2.Общий принцип состоит в выделении полного квадрата и представлении квадратного трехчлена в виде разности квадратов. Например,

$$P_1(x)=x^2+6x+5=x^2+6x+9-9+5=(x+3)^2-2^2=(x+1)(x+5).$$

Для разложения следующего многочлена знак « – » предварительно вынесем за скобки:

$$P_2(x)=-x^2+6x+7=-\left(x^2-6x\right)+7=-\left(x^2-6x+9\right)+9+7=$$

$$=16-(x-3)^2=(4-x+3)(4+x-3)=(7-x)(1+x).$$

Разложение трехчлена $P_3(x)=x^2+6x+17$ невозможно (по крайней мере – с помощью выделения квадрата):

$$P_3(x)=x^2+6x+17=x^2+6x+9+8=(x+3)^2+8.$$

Старший коэффициент многочлена $P_4(x)=3x^2+5x-8$, число 3, не является квадратом. Вынесем его за скобки:

$$P_4(x)=3x^2+5x-8=3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}\right)=3\left(x^2+2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{8}{3}\right)=$$

$$=3\left(\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{121}{36}\right)=3\left(x+\frac{5}{6}-\frac{11}{6}\right)\left(x+\frac{5}{6}+\frac{11}{6}\right)=3(x-1)\left(x+\frac{8}{3}\right)=(x-1)(3x+8).$$

Решение упражнения 3.В упражнении 1 мы нашли разложение на множители: $P(x)=4x^2-12x-7=(2x-7)(2x+1)$. Следовательно, $P(x)=0$ тогда и только тогда, когда $(2x-7)(2x+1)=0$. Отсюда $2x-7=0$ или $2x+1=0$, т.е. $x=\frac{7}{2}$ или $x=-\frac{1}{2}$. Корнями трехчлена $P(x)=4x^2-12x-7$ являются числа $x=\frac{7}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}$. Аналогично находятся корни трехчленов $Q(p)=p^2+2p-24$ и $R(z)=9z^2-6z-8$.

Обратимся теперь к трехчлену $P_3(x)=x^2+6x+17$. Выделение полного квадрата приводит к тому, что $P_3(x)=x^2+6x+17=x^2+6x+9+8=(x+3)^2+8$. Так как $8>0$ и для любого x имеет место неравенство $(x+3)^2\ge 0$, то трехчлен $P_3(x)=x^2+6x+17$ не может быть равен 0 ни при каких значениях x. Трехчлен $P_3(x)$ не имеет корней.

Решение упражнения 4.Выделяем полный квадрат:

$$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=\left(a^2+2\right)^2-(2a)^2=\left(a^2-2a+2\right)\left(a^2+2a+2\right).$$

Аналогично

$$a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=\left(a^2+1\right)^2-a^2=\left(a^2-a+1\right)\left(a^2+a+1\right).$$

Задачи

Часть 1

1. Выделите полный квадрат:

а) x^2+2x+2;　　　　　　е) $x^2+14x-1$;

б) x^2-4x+6;
в) $x^2+6x+12$;
г) $x^2-8x+20$;
д) $x^2-10x-5$;
ж) $4x^2-12x$;
з) $16x^2+40x$;
и) $30x-25x^2$;
к) $-28x-49x^2$.

2. Разложите на множители:

а) x^2+2x-3;
б) x^2-2x-8;
в) $x^2+2x-15$;
г) $x^2-2x-24$;
д) x^2-4x-5;
е) $x^2+4x-12$;
ж) $x^2-4x-21$;
з) $x^2+4x-32$;
и) $4x^2-8x-21$;
к) $4x^2+4x-35$;
л) $9x^2-42x+45$;
м) $9x^2+60x+99$.

Часть 2

1. Выделите полный квадрат:

а) $x^2-24x+145$;
б) $x^2+26x+170$;
в) $x^2-28x+200$;
г) $x^2-20x-35$;
д) $x^2+30x-100$;
е) $4x^2-20x$;
ж) $16x^2+96x$;
з) $60x-36x^2$;
и) $-32x-64x^2$;
к) $a^2+b^2+c^2-8(a+b+c)+77-2a-4b$;

2. Разложите на множители:

а) x^2+6x-7;
б) $x^2-6x-16$;
в) $x^2+6x-27$;
г) $x^2-6x-40$;
д) $x^2+8x-20$;
е) $x^2-8x-33$;
ж) $x^2+8x-48$;
з) $x^2-8x-65$;
и) $15x^2+2x-1$;
к) $35x^2+12x+1$;
л) $63x^2+2x-1$;
м) $99x^2+20x+1$.

Ответы:
Часть 1

1. а) $(x+1)^2+1$; б) $(x-2)^2+2$; в) $(x+3)^2+3$; г) $(x-4)^2+4$; д) $(x-5)^2-30$; е) $(x+7)^2-50$; ж) $(2x-3)^2-9$; з) $(4x+5)^2-25$; и) $9-(5x-3)^2$; к) $4-(7x+2)^2$;

2. а) $(x+3)(x-1)$; б) $(x-4)(x+2)$; в) $(x+5)(x-3)$; г) $(x-6)(x+4)$; д) $(x-5)(x+1)$; е) $(x+6)(x-2)$;
ж) $(x-7)(x+3)$; з) $(x+8)(x-4)$; и) $(2x+3)(2x-7)$; к) $(2x+7)(2x-5)$; л) $(3x+5)(2x+9)$; м) $(3x+11)(3x+9)$.

Часть 2

1. а) $(x-12)^2+1$; б) $(x+13)^2+1$; в) $(x-14)^2+4$; г) $(x-10)^2-135$; д) $(x+15)^2-325$; е) $(2x-5)^2-25$; ж) $(4x+12)^2-144$; з) $-(6x-5)^2+25$; и) $-(8x+2)^2-4$; к) _______

2. а) $(x+7)(x-1)$; б) $(x-8)(x+2)$; в) $(x+9)(x-3)$; г) $(x-10)(x+4)$; д) $(x+10)(x-2)$; е) $(x-11)(x+3)$;
ж) $(x+12)(x-4)$; з) $(x-13)(x+5)$; и) $(5x-1)(3x+1)$; к) $(7x+1)(5x+1)$; л) $(9x-1)(7x+1)$; м) $(9x+1)(11x+1)$.

§ 4 Выделение полного квадрата и неравенства

Квадрат любого выражения обладает замечательным свойством – его значение не может быть отрицательным. Это свойство оказывается чрезвычайно полезным при нахождении наибольших или наименьших значений многочленов, а также при доказательстве различных неравенств.

Упражнение 1. «Наименьшее значение». *Нетрудно видеть, что функция* $y=x^2$ *является частным случаем квадратного трехчлена* ax^2+bx+c *при* $a=1$, $b=c=0$. *Мы уже знаем, что множеством значений функции* $y=x^2$ *является множество неотрицательных чисел.*

a) *Подберите хотя бы одно такое значение переменной* x, *при котором трехчлен* $P(x)=4x^2-4x+1$ *принимает отрицательное значение.* .

b) *Какое наименьшее значение может принимать квадратный трехчлен* $P(x)=4x^2-4x+1$? *При каком значении переменной* x *достигается это наименьшее значение?*

c) *Какое наименьшее значение может принимать квадратный трехчлен* $P_1(x)=4x^2-4x+7$? *Ответ обоснуйте.*

Упражнение 2. «Наибольшее значение».

a) *Какое наибольшее значение может принимать трехчлен* $f(x)=-x^2-6x-9$? *При каком значении переменной* x *достигается это наибольшее значение?*

b) *Какое наибольшее значение может принимать трехчлен* $g(x)=-x^2-6x+5$? *При каком значении переменной* x *достигается это наибольшее значение?*

Упражнение 3. «Задача про камень».

В момент времени $t=0$ *от поверхности земли с помощью катапульты запускают камень. Пусть* $h(t)$ *– это величина (в метрах), обозначающая высоту, на которой находится камень в момент времени* t. *Известно, что зависимость высоты* $h(t)$ *от времени* t *выражается функцией* $h(t)=-5t^2+60t$. *Например, в момент времени* $t=2$ *камень находится на высоте* $h(2)=-5\cdot 2^2+20\cdot 2=20$ *метров. На какую наибольшую высоту и в какой момент времени поднимется камень?*

Упражнение 4. *Какое наименьшее значение может принимать многочлен* $F(a;b)=a^2+b^2+2a-4b+2015$?

Решение упражнения 1. Так как $P(x)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$, то трехчлен $P(x)$ является полным квадратом, и при любом значении переменной x значение трехчлена **неотрицательно.** Наименьшее значение выражения $(2x-1)^2$ равно 0. Очевидно также $(2x-1)^2=0$ при условии $2x-1=0$, т.е. при $x=\frac{1}{2}$. Рассмотрим теперь трехчлен $P_1(x)=4x^2-4x+7$. Выделяя полный квадрат, получаем

$$4x^2-4x+7=4x^2-4x+1+6=(2x-1)^2+6\,.$$

Так как наименьшим значением выражения $(2x-1)^2$ является число 0, то наименьшим значением выражения $(2x-1)^2+6$ является число 6, и достигается оно при $x=\frac{1}{2}$. Итак, наименьшее значение трехчлена $P_1(x)=4x^2-4x+7$ равно $P_1\left(\frac{1}{2}\right)=6$.

Решение упражнения 2. Заметим, что $f(x)=-x^2-6x-9=-(x+3)^2$. Так как для любого значения x значение полного квадрата $(x+3)^2$ является неотрицательным числом, то для любого x значение выражения $-(x+3)^2$ является неположительным числом. Для любого x имеет место неравенство $f(x)\le 0$, причем $f(x)=0$ при условии $x+3=0$, т.е. $x=-3$. Итак, наибольшим значением трехчлена $f(x)=-x^2-6x-9$ является число 0, и достигается оно при $x=-3$. Перейдем к рассмотрению трехчлена $g(x)=-x^2-6x+5$. Заметим, что $g(x)=-x^2-6x+5=-x^2-6x-9+9+5=-(x+3)^2+14=14-(x+3)^2$. Так как наименьшим значением квадрата $(x+3)^2$ является число 0, то наибольшим значением выражения $-(x+3)^2+14$ является число 14.

Немного поясним. Получается, что $g(x)=14-(x+3)^2$. *Для любого* x *значение квадрата* $(x+3)^2$ *неотрицательно, т.е. либо положительно, либо равно нулю. Если* $(x+3)^2$ *положительно, то* $14-(x+3)^2$ *меньше чем 14; если* $(x+3)^2$ *равно нулю, то* $14-(x+3)^2$ *равно 14.*

Наибольшее значение квадратного трехчлена $g(x)=-x^2-6x+5$ равно $g(-3)=14$.

Решение упражнения 3. В функции $h(t)=-5t^2+60t$ нетрудно увидеть квадратный трехчлен от переменной t, причем $t\geq 0$. Из условия следует, что необходимо определить наибольшее значение трехчлена $h(t)=-5t^2+60t$ на множестве $t\in[0;+\infty)$. Так как число 5 не является полным квадратом, то перед выделением полного квадрата в выражении $-5t^2+60t$ число -5 вынесем за скобки:

$$-5(t^2-12t)=-5(t^2-2\cdot 6t+36-36)=-5(t-6)^2+180.$$

Так как для любого t выполняется неравенство $-5(t-6)^2\leq 0$, то $-5(t-6)^2+180\leq 180$, причем равенство достигается при $t=6$. Отсюда следует ответ к рассматриваемой задаче. Наибольшая высота, на которую поднимется камень, равна 180 метров, и случится это ровно через 6 секунд после начала полета.

Решение упражнения 4. *Постараемся найти наименьшее значение многочлена* $F(a;b)=a^2+b^2+2a-4b+2015$. *На первый взгляд кажется, что ситуация осложняется двумя переменными вместо одной. Но, как говорится, глаза боятся, а голова работает.* . *Пары слагаемых* a^2 *и* $2a$, b^2 *и* $-4b$ *подсказывают, что можно попробовать выделить полные квадраты* $a^2+2a+1=(a+1)^2$ *и* $b^2-4b+4=(b-2)^2$.

Выделим полные квадраты:

$$a^2+b^2+2a-4b+2015=a^2+2a+1+b^2-4b+4+2010=(a+1)^2+(b-2)^2+2010.$$

Наименьшее значение каждого из квадратов $(a+1)^2$ и $(b-2)^2$ равно нулю. Наименьшие значения достигаются при $a=-1$ и $b=2$ соответственно. Следовательно, наименьшее значение выражения $(a+1)^2+(b-2)^2+2010$ равно 2010, причем достигается оно при $a=-1$ и $b=2$.

Пример. «Очень известное неравенство». Доказать, что для любых значений a, b и c выполняется неравенство $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

Поиск решения. Попробуем перенести все влево: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$. Что получилось? Слева – многочлен от трех переменных $F(a;b;c)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$. Что теперь требуется доказать? Требуется доказать, что наименьшее значение этого многочлена больше чем 0 или равно 0. Попробуем применить испытанный прием – выделение полного квадрата:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=a^2+2ab+b^2+c^2-3ab-bc-ca=(a+b)^2+c^2-3ab-bc-ca.$$

Кажется, фокус не удался. . Попробуем дополнить не до квадрата суммы, а до квадрата разности:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=a^2-2ab+b^2+c^2+ab-bc-ca=(a-b)^2+c^2+ab-bc-ca.$$

Уже лучше. Так как $(a-b)^2\geq 0$, то можно попробовать доказать, что $c^2+ab-bc-ca\geq 0$. Левая часть последнего неравенства раскладывается на множители: $(c-a)(c-b)\geq 0$. Однако может так случиться, что $(c-a)<0$, $(c-b)>0$ и произведение $(c-a)(c-b)$ отрицательно. Опять неудача. . В чем ее причина? Дополняя до полного квадрата разности сумму a^2+b^2, мы уже не имеем возможности «справиться» с отрицательными членами $-bc-ca$, для которых c является общим множителем. Одночлены bc и ca имеют место в тожествах $(b-c)^2=b^2-2bc+c^2$ и $(a-c)^2=a^2-2ac+c^2$, причем с коэффициентом 2.

Коэффициент 2 мы можем получить, умножив обе части неравенства $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$ на 2:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0.$$

Помните? Иногда 2 – это не просто 2, иногда 2 – это $1+1$.

Решение. Требуется доказать, что для любых значений a, b и c выполняется неравенство $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$. Умножим обе части неравенства на 2:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0,$$

и перегруппируем слагаемые. Получим

$$\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right)\ge 0,$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0.$$

Последнее неравенство очевидно, так как каждое из слагаемых слева является полным квадратом и не может принимать отрицательное значение. Равенство достигается при условии $a=b=c$. Неравенство доказано.

Задачи

Часть 1

1. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^2-12x+37$; б) $x^2+14x-1$;

в) x^2+20x; г) $25x^2-60x$;

2. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $-x^2-18x-81$; б) $-x^2+22x-120$;

в) $-x^2+20x$; г) $-25x^2+30x$;

3. Найдите произведение двух чисел, если квадрат их суммы равен 225, а сумма их квадратов равна 113.

4. Площадь прямоугольника равна 48, а его периметр равен 28. Найдите сумму квадратов его сторон.

5. Если увеличить сторону квадрата на 3, то площадь увеличиться на 33. Найдите периметр квадрата.

6. Известно, что $a+b+c=12$ и $ab+bc+ca=-15$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

7. Докажите, что при любом значении a, b и c выполняется следующее неравенство: $a^2+b^2+c^2\ge 8(a+b+c)-77+2a+4b$.

Часть 2

1. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^2-14x+50$; б) $x^2+18x-99$;

в) x^2+60x; г) $81x^2-36x$;

2. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $-x^2-24x-150$; б) $-x^2+32x-260$;

в) $-x^2+44x$; г) $-25x^2+80x$;

3. Найдите сумму двух чисел, если квадрат разности этих чисел равен 16, а их произведение равно 77.

4. Найдите периметр прямоугольника , если его площадь равна 42, а сумма площадей квадратов, построенных на его двух разных сторонах, равна 85.

5. Из круга радиуса R, вырезали круг, радиус которого меньше R на 5.Площадь оставшегося кольца равна 314. Найти R $(\pi\approx 3{,}14)$.

6. Известно, что $a-b+c=8$ и $a^2+b^2+c^2=110$. Найдите $ac-ab-bc$.

7. Найдите при каких значениях a, b и c выполняется следующее равенство: $a^2+2b^2+5c^2=2ab+4bc+6c-9$.

Ответы

Часть 1

1. а) 1;б) -50; в) -100; г) -36.**2.** а) 0; б) -1; в) -100; 9. **3.** 56;**4.** 100;**5.** 16;**6.** 174;

Часть 2

1. а) 1; б) -180; в) -900; г) -4.

2. а) -6; б) -4; в) 484; г) 64. **3.** 18; **4.** 13; 5. 12,5; **6.** -23; **7.** $a=6$, $b=6$, $c=3$.

§ 5 Куб суммы и куб разности двух выражений

В алгебраических преобразованиях часто возникает необходимость рассматривать вторую, третью, четвертую, пятую и т.д. степени двучлена. Мы уже знаем, как вторая степень двучлена представляется в виде многочлена: $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$. Было бы удобно получить аналогичные формулы для других степеней двучленов. На самом деле, существует формула для представления в виде многочлена **любой натуральной степени двучлена.** Такая формула называется **биномом Ньютона.** Но в рамках данного параграфа нас будет интересовать более скромная цель: мы постараемся вывести формулы для куба суммы и куба разности и постараемся научиться применять их.

Упражнение 1. «Куб суммы».Используя определение степени и правила умножения многочлена на многочлен, представить $(x+y)^3$ в виде многочлена.Полученное тождество сформулируйте в виде правила.

Упражнение 2. «Куб разности». Условие упражнения 1, но для $(x-y)^3$.

Упражнение 3. Используя тождества или правила, полученные вами в упражнениях 1 и 2, преобразовать в многочлены:

a) $(x+1)^3$;

b) $(2-y)^3$;

c) $(2a+b)^3$;

d) $\left(3p-\frac{1}{3}q\right)^3$;

e) $\left(\frac{z}{2}+\frac{2}{z}\right)^3$.

Упражнение 4. Ребро некоторого куба равно q. На сколько увеличится объем куба, если его ребро увеличить на 3?

Решение упражнения 1. Так как для любого числа a выполняется равенство $a^3 = aa^2$, то

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 =$$
$$= (x+y)\left(x^2+2xy+y^2\right) =$$
$$= x^3 + \underline{2x^2y} + \underline{\underline{xy^2}} + \underline{yx^2} + \underline{\underline{2xy^2}} + y^3 =$$
$$= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого на второе плюс утроенное произведение первого на квадрат второго плюс куб второго:

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$$

Решение упражнения 2. Упражнение 2 выполняется аналогично упражнению 1.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения *минус* утроенное произведение квадрата первого на второе *плюс* утроенное произведение первого на квадрат второго *минус* куб второго:

$$\boxed{(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$$

Решение упражнения 3.

a) Для преобразования $(x+1)^3$ в многочлен пользуемся формулой $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, аккуратно подставляя вместо y единицу: $(x+1)^3 = x^3+3x^2\cdot 1+3x\cdot 1^2+1^3 = x^3+3x^2+3x+1$.

b) Подставляя 2 вместо x в формулу $(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$, имеем:

$(2-y)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2 y + 3\cdot 2y^2 - y^3 = 8 - 12y + 6y^2 - y^3$.

c) Пользуемся формулой $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, подставляя $x = 2a$ и $y = b$:

$(2a+b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 b + 3(2a)b^2 + b^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$.

d) Пользуемся формулой $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, подставляя $x = 3p$ и $y = \dfrac{1}{3}q$:

$$\left(3p - \frac{1}{3}q\right)^3 = (3p)^3 - 3(3p)^2\left(\frac{1}{3}q\right) + 3(3p)\left(\frac{1}{3}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}q\right)^3 = 27p^3 - 9p^2q + pq - \frac{q^3}{27}.$$

e) Пользуемся формулой $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, подставляя $x = \dfrac{z}{2}$ и $y = \dfrac{2}{z}$:

$$\left(\frac{z}{2} + \frac{2}{z}\right)^3 = \left(\frac{z}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{z}{2}\right)^2\left(\frac{2}{z}\right) + 3\left(\frac{z}{2}\right)\left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^3 = \frac{z^3}{8} + \frac{3z}{2} + \frac{6}{z} + \frac{8}{z^3}.$$

Решение упражнения 4. Объем куба равен q^3. Если его ребро увеличить на 3, то его объем станет равным $(q+3)^3 = q^3 + 9q^2 + 27q + 27$. Разность объемов равна $9q^2 + 27q + 27$. Это и есть ответ.

Тождество $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ иногда удобнее использовать в следующем виде:

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)}$$

Аналогично, формула $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ может быть использована в виде:

$$\boxed{(x-y)^3 = x^3 - y^3 + 3xy(x-y)}$$

Пример. Известно, что $p - q = 1$ и $pq = 17$. Найти $p^3 - q^3$.

Решение. Имеет место тождество $(p-q)^3 = p^3 - q^3 + 3pq(p-q)$. Подставляя в это тождество $p - q = 1$ и $pq = 17$, получаем равенство $(1)^3 = p^3 - q^3 + 3\cdot 17\cdot 1$. Отсюда немедленно следует, что $p^3 - q^3 = -50$.

Задачи

Часть 1

1.Представьте в виде многочлена:

а) $(x+2)^3$; е) $\left(\dfrac{z}{2} - 2t\right)^3$; л) $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^3$;

б) $(2x-1)^3$; ж) $\left(3z + \dfrac{t}{9}\right)^3$; м) $\left(2x - \dfrac{1}{2x}\right)^3$;

в) $(3x+2)^3$; з) $\left(4z - \dfrac{t}{2}\right)^3$ н) $\left(3x + \dfrac{1}{3x}\right)^3$;

г) $(4x-3)^3$; и) $\left(2z + \dfrac{t}{6}\right)^3$; о) $\left(6x - \dfrac{1}{2x}\right)^3$;

д) $(5x+6)^3$; к) $\left(8z - \dfrac{t}{4}\right)^3$; п) $\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{3}{2x}\right)^3$.

Часть 2

1. Упростите выражение:

а) $(x+2)^3 - (x-2)^3$; е) $\left(\dfrac{z}{2} - 2t\right)^3 + \left(\dfrac{z}{2} + 2t\right)^3$; л) $\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^3 - x^3 + \dfrac{8}{x^3}$;

б) $(2x-1)^3 + (2x+1)^3$; ж) $\left(3z + \dfrac{t}{9}\right)^3 - \left(3z - \dfrac{t}{9}\right)^3$; м) $\left(2x + \dfrac{1}{2x}\right)^3 - 8x^3 - \dfrac{1}{8x^3}$;

в) $(3x+2)^3-(3x-2)^3$; з) $\left(4z-\frac{t}{2}\right)^3+\left(4z+\frac{t}{2}\right)^3$ н) $\left(3x-\frac{1}{3x}\right)^3-27x^3+\frac{1}{27x^3}$;

г) $(4x-3)^3+(4x+3)^3$; и) $\left(2z+\frac{t}{6}\right)^3-\left(2z-\frac{t}{6}\right)^3$; о) $\left(6x+\frac{1}{2x}\right)^3-216x^3-\frac{1}{8x^3}$;

д) $(5x+6)^3-(5x-6)^3$; к) $\left(8z-\frac{t}{4}\right)^3+\left(8z+\frac{t}{4}\right)^3$; п) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2x}\right)^3+2x-\frac{9}{2x}$.

Ответы:
Часть 1

1. а) $x^3+6x^2+12x+8$; б) $8x^3-12x^2+6x-1$; в) $27x^3+54x^2+36x+8$; г) $64x^3-144x^2+108x-27$; д) $125x^3+450x^2+540x+216$; е) $\frac{z^3}{8}-\frac{3z^2t}{2}+6zt^2+8t^3$; ж) $27z^3+3z^2t+\frac{zt^2}{9}+\frac{t^3}{729}$;

з) $64z^3-24z^2t+3zt^2-\frac{t^3}{8}$; и) $8z^3+2z^2t+\frac{zt^2}{6}+\frac{t^3}{216}$; к) $512z^3-48z^2t+\frac{3zt^2}{2}+\frac{t^3}{64}$; л) $x^3+6x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^3}$;

м) $8x^3-6x+\frac{3}{2x}-\frac{1}{8x^3}$; н) $27x^3+9x+\frac{1}{x}+\frac{1}{27x^3}$; о) $216x^3-54x+\frac{9}{2x}-\frac{1}{8x^3}$; п) $\frac{8x^3}{27}+2x+\frac{9x}{2}+\frac{27}{8x^3}$.

Часть 2

1. а) $12x^2+16$; б) $16x^3+12x$; в) $108x^2+16$; г) $128x^3+216x$; д) $900x^2+432$; е) $\frac{z^3}{4}+12zt^2$;

ж) $3z^2t+\frac{2t^3}{729}$; з) $128z^3+6zt^2$; и) $2z^2t+\frac{t^2}{108}$; к) $1024z^3+3zt^2$; л) $-6x+\frac{12}{x}$; м) $6x+\frac{3}{2x}$; н) $-9x+\frac{1}{x}$;

о) $54x+\frac{3}{x}$; п) $-2x+\frac{9}{2x}$.

§ 6 Сумма кубов и разность кубов двух выражений

Имеют место очень важные тождества, приводящие к разложению на множители сумму кубов и разность кубов.

$\boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)}$
$\boldsymbol{x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

Трехчлен x^2-xy+y^2 называется **неполным квадратом разности.** Трехчлен x^2+xy+y^2 называется **неполным квадратом суммы.**

Упражнение 1. *Доказать тождества:*

a) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$;

b) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

Упражнение 2. *Разложить на множители:*

a) x^3+27;

b) $8-y^3$;

c) $\frac{a^3}{64}+8b^3$;

d) $(3p+1)^3-8p^3$.

Решение упражнения 1. Используя правила умножения многочленов, получаем:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3\underline{-x^2y}+\underline{\underline{xy^2}}+\underline{yx^2}-\underline{\underline{xy^2}}+y^3=x^3+y^3,$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3\underline{+x^2y}+\underline{\underline{xy^2}}-\underline{yx^2}-\underline{\underline{xy^2}}-y^3=x^3-y^3.$$

Тождество $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ можно сформулировать следующим образом:

сумма кубов двух выражений равна произведению их суммы на неполный квадрат разности.

Аналогично формулируется тождество $x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$:

разность кубов двух выражений равна произведению их разности на неполный квадрат суммы.

Решение упражнения 2.

a) Для разложения на множители выражения x^3+27 пользуемся формулой $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$, подставляя $y=3$:

$$x^3+27=x^3+3^3=(x+3)\left(x^2-x\cdot 3+3^2\right)=(x+3)\left(x^2-3x+9\right).$$

b) Так как $8=2^3$, то для разложения на множители выражения $8-y^3$ пользуемся формулой $x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$, причем подставляем $x=2$:

$$8-y^3=2^3-y^3=(2-y)\left(4+2y+y^2\right).$$

c) Так как $\dfrac{a^3}{64}=\left(\dfrac{a}{4}\right)^3$ и $8b^3=(2b)^3$, то для разложения на множители выражения $\dfrac{a^3}{64}+8b^3$ пользуемся формулой $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$, где $x=\dfrac{a}{4}$ и $y=2b$:

$$\frac{a^3}{64}+8b^3=\left(\frac{a}{4}\right)^3+(2b)^3=\left(\frac{a}{4}+2b\right)\left(\left(\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a}{4}\cdot 2b+(2b)^2\right)=\left(\frac{a}{4}+2b\right)\left(\frac{a^2}{16}-\frac{ab}{2}+4b^2\right).$$

d) Для разложения на множители выражения $(3p+1)^3-8p^3$ применяем формулу $x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$, считая, что $x=3p+1$ и $y=2p$:

$$\underbrace{(3p+1)^3}_{x^3}-\underbrace{8p^3}_{y^3}=\Big(\underbrace{3p+1}_{x}-\underbrace{2p}_{y}\Big)\Big(\underbrace{(3p+1)^2}_{x^2}+\underbrace{(3p+1)\cdot 2p}_{xy}+\underbrace{(2p)^2}_{y^2}\Big)=$$

$$=(p+1)\left(9p^2+6p+1+6p^2+2p+4p^2\right)=(p+1)\left(19p^2+8p+1\right).$$

Задачи

Часть 1

1. Раскройте скобки:

а) $(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$; д) $(2x+3)\left(4x^2-6x+9\right)$; и) $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3y}{4}\right)\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3xy}{8}+\dfrac{9y^2}{16}\right)$;

б) $(x-3)\left(x^2+3x+9\right)$; е) $(3x-4)\left(9x^2+12x+16\right)$; к) $\left(0{,}1x^2-0{,}2y^3\right)\left(0{,}01x^4+0{,}02x^2y^3+0{,}04y^6\right)$;

в) $(x+4)\left(x^2-4x+16\right)$; ж) $(4x+5)\left(16x^2-20x+25\right)$; л) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

г) $(x-5)\left(x^2+5x+25\right)$; з) $(6x-7)\left(36x^2+42x+49\right)$; м) $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)\left(4x^2+2+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2. Разложите на множители:

а) x^3-8y^3; д) $8x^3-125y^3$; и) $\dfrac{x^{6s}}{729}-\dfrac{y^{9s}}{1000}$;

б) $8x^3+64y^3$; е) $64x^3+216y^6$; к) $x^{33}-\dfrac{1}{x^{33}}$;

в) $27x^3-125y^3$; ж) $\dfrac{x^{15}}{27}-512y^9$; л) $x^{45}+\dfrac{1}{x^{45}}$;

г) $x^{3n}+y^{3m}$; з) $0,125x^{18}+2\frac{10}{27}y^{21}$; м) $216x^{21}-\frac{1}{27x^{21}}$.

Часть 2

1. Выполните действие:

а) $(3x+2)(9x^2-6x+4)-8$;

б) $(4x-3)(16x^2+12x+9)+27$;

в) $(5x+4)(25x^2-20x+16)-64$;

г) $(6x-5)(36x^2+30x+25)+25$;

д) $(7x^2+3)(49x^4-21x^2+9)-343x^6$;

е) $(8x^3-4)(64x^6+32x^3+16)-512x^9$;

ж) $(9x^4+5)(81x^8-45x^4+25)-728x^{12}-124$;

з) $(xy-7)(x^2y^2+7xy+49)+343$;

и) $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{4}\right)\left(\frac{x^2}{25}+\frac{xy}{20}+\frac{y^2}{16}\right)+\frac{y^3}{64}$;

к) $(0,1x^2+0,3y^3)(0,01x^4-0,03x^2y^3+0,09y^6)-0,026y^9$;

л) $\left(8x+\frac{1}{2x}\right)\left(64x^2-4+\frac{1}{4x^2}\right)-\frac{1}{8x^3}$;

м) $\left(2x-\frac{1}{y}\right)\left(4x^2+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{y^3}$.

2. Разложите на множители:

а) $2x^3+\frac{y^3}{4}$; д) $128x^3-54y^3$; и) $\frac{x^{12s}}{450}-\frac{y^{3s}}{128}$;

б) $4x^3-500y^3$; е) $\frac{x^3}{32}+250y^6$; к) $8x^3+\frac{27}{x^3}$;

в) $3x^3-\frac{y^3}{9}$; ж) $\frac{x^{18}}{9}-2187y^{21}$; л) $64x^6-\frac{1}{729x^6}$;

г) $\frac{x^{3m}}{25}+5y^{3n}$; з) $0,729x^{30}+1\frac{61}{64}y^{36}$; м) $2048x^3+\frac{1}{16x^3}$.

Ответы:

Часть 1

1. а) x^3+8; б) x^3-27; в) x^3+64; г) x^3-125; д) $8x^3+27$; е) $27x^3-64$; ж) $64x^3+125$; з) $216x^3-343$; и) $\frac{x^3}{8}-\frac{27y^3}{64}$;
к) $0,001x^6-0,008y^9$; л) $x^3+\frac{1}{x^3}$; м) $8x^3-\frac{1}{x^3}$.

2. а) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$; б) $8(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$; в) $(3x-5y)(9x^2+15xy+25y^2)$;
г) $(x^n+y^m)(x^{2n}-x^ny^m+y^{2m})$; д) $(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$; е) $8(2x+3y^2)(4x^2-6xy^2+9y^4)$;
ж) $\left(\frac{x^5}{3}-8y^3\right)\left(\frac{x^{10}}{9}+\frac{8}{3}x^5y^3+64y^6\right)$; з) $\left(0,5x^6+1\frac{1}{3}y^3\right)\left(0,25x^{12}-\frac{2}{3}x^6y^7+1\frac{7}{9}y^{14}\right)$; и) $\left(\frac{x^{2s}}{9}-\frac{y^{3s}}{10}\right)\left(\frac{x^{4s}}{81}+\frac{x^{2s}y^{3s}}{90}+\frac{y^{6s}}{100}\right)$;
к) $\left(x^{11}-\frac{1}{x^{11}}\right)\left(x^{22}+1+\frac{1}{x^{22}}\right)$; л) $\left(x^{15}+\frac{1}{x^{15}}\right)\left(x^{30}-1+\frac{1}{x^{30}}\right)$; м) $\left(8x^7-\frac{1}{3x^7}\right)\left(64x^{14}+2\frac{2}{3}+\frac{1}{9x^{14}}\right)$.

Часть 2

1. а) $27x^3$; б) $64x^3$; в) $125x^3$; г) $216x^3$; д) 27; е) -64; ж) $x^{12}+1$; з) x^3y^3; и) $\frac{x^3}{125}$; к) $0,001x^6-0,001y^9$; л) $512x^3$;
м) $8x^3$.

2. а) $2\left(x+\frac{y}{2}\right)\left(x^2-\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{4}\right)$; б) $4(x-5y)(x^2+5xy+25y^2)$; в) $3\left(x-\frac{y}{3}\right)\left(x^2+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}\right)$;

г) $5\left(\frac{x^m}{5}-y^n\right)\left(\frac{x^{2m}}{25}-\frac{x^m y^n}{5}+y^{2n}\right)$; д) $2(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$; е) $2\left(\frac{x}{4}+5y^2\right)\left(\frac{x^2}{16}-\frac{5xy^2}{5}+25y^4\right)$
;

ж) $3\left(\frac{x^6}{3}-9y^7\right)\left(\frac{x^{12}}{9}+3x^6y^7+81y^{14}\right)$; з) $\left(0,9x^{10}+1\frac{1}{4}y^{12}\right)\left(0,81x^{20}-1\frac{1}{8}x^{10}y^{12}+1\frac{9}{16}y^{24}\right)$;

и) $\frac{1}{2}\left(\frac{x^{4s}}{5}-\frac{y^s}{4}\right)\left(\frac{x^{8s}}{25}+\frac{x^{4s}y^s}{20}+\frac{y^{2s}}{16}\right)$; к) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)\left(4x^2-6+\frac{9}{x^2}\right)$;

л) $\left(2x-\frac{1}{3x}\right)\left(2x+\frac{1}{3x}\right)\left(4x^2-\frac{2}{3}+\frac{1}{9x^2}\right)\left(4x^2+\frac{2}{3}+\frac{1}{9x^2}\right)$; м)

Глава 4

Рациональные дроби и действия над ними

§ 1 Целые и дробные выражения

Определение. ***Целыми выражениями называются выражения, составленные из одночленов при помощи операций сложения, вычитания, умножения. Целые выражения также могут содержать в своей записи скобки и деление на число, не равное нулю.***

Замечание 1. Из определения следует, что любое число или одночлен являются целыми выражениями.

Замечание 2. Из определения следует, что выражение, содержащие деление на выражение с переменными не может являться целым.

Определение. Дробными выражениями называются выражения, составленные из одночленов при помощи операций сложения, вычитания, умножения и деления. Дробные выражения также могут содержать в своей записи скобки.

Упражнение 1. *В следующем списке выражений определите, какие из них являются целыми, а какие – дробными:*

a) -4; b) $13a$; c) $\dfrac{13a}{a-b}$; e) $(2y-3z)(3z+2y)$; f) $\dfrac{(2y-3z)(3z+2y)}{57}$;

g) $\dfrac{z^3}{8}+\dfrac{3z}{2}+\dfrac{6}{z}+\dfrac{8}{z^3}$; h) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2$; i) $(3p)^3-3(3p)^2\left(\dfrac{1}{3}q\right)+3(3p)\left(\dfrac{1}{3}q\right)^2$; j) $\dfrac{y^3-x^4}{y+x}$;

k) $\dfrac{q^3\cdot q^2\cdot 13x^4}{12}$; l) $-5(t-6)^2+180$.

Определение. ***Целые и дробные выражения называются рациональными выражениями.***

Рассмотрим дробное выражение $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}$. Если $a=2$ и $b=1$, то выражение принимает значение 7, так как $\dfrac{2^3-1^3}{2-1}=7$. Число 7 называется **числовым значением или значением выражения** $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}$ при $a=2$ и $b=1$. Если $a=2$ и $b=2$, то при подстановке этих значений получаем $\dfrac{2^3-2^3}{2-2}$, знаменатель равен нулю. Но на ноль делить нельзя! В таких случаях мы будем говорить, что **выражение не определено при данных значениях переменных.**

Кстати, а почему на ноль делить нельзя? Дело в том, что сначала определяется, что такое умножение. При этом естественно считать, что умножение любого числа на ноль дает в результате ноль. После этого операция деления определяется через умножение. Почему $15:3=5$? Потому, что $15=5\cdot 3$. Результатом деления числа a на b называется число c только в том случае, если произведение c и b равно a, т.е. $a:b=c$ равносильно $a=c\cdot b$. Пусть, например, $a=15$, $b=0$ и при делении числа 15 на ноль получилось какое-нибудь вполне определенное число c, т.е. $15:0=c$. Но тогда это значило бы, что $15=c\cdot 0=0$.  *. Противоречие!*

Как видите, дробное выражение отличается от целого тем, что целое выражение имеет смысл при любых значениях своих переменных, в то время как дробное при некоторых значениях переменных может не иметь смысла. А именно: дробное выражение теряет смысл при тех значениях переменных, при которых его знаменатели (делители) обращаются в ноль. **Упражнение 2.** *Определите условия, при которых выражения* ***не имеют*** *смысла, т.е.* ***не определены:***

a) $\dfrac{3-a}{3}$; b) $\dfrac{3}{3-a}$; c) $\dfrac{3x}{x+y}$; d) $\dfrac{234p+q^2}{5+p-q}$; e) $\dfrac{-11m-n}{m^2+5}$; f) $\dfrac{-11m-n}{m^2+(n-1)^2}$.

Определение. Множество всех значений переменных, при которых выражение определено (имеет смысл), называется областьюдопустимых значений переменных или ОДЗ.

Замечание 3.Множество значений переменных, при которых выражение определено, часто определяется через те значения переменных, при которых выражение не определено. Рассмотрим, например, выражение $\frac{a^4+4}{a^2-b^2}$. Данное выражение **не определено** при условии равенства нулю его знаменателя. Знаменатель a^2-b^2 обращается в ноль при условии $(a-b)(a+b)=0$, т.е. $a=\pm b$. Следовательно,данное выражение определено во всех остальных случаях, а именно при $a\neq\pm b$.

Упражнение 3.*Определите условия, при которых выражения **имеют** смысл, т.е. **определены:***

$$\text{a) } \frac{3-a}{3};\ \text{b) } \frac{3}{3-a};\ \text{c) } \frac{3x}{x+y};\ \text{d) } \frac{234p+q^2}{5+p-q};\ \text{e) } \frac{-11m-n}{m^2+5};\ \text{f) } \frac{-11m-n}{m^2+(n-1)^2}.$$

Алгебраические выражения чрезвычайно полезны при описании зависимости величин друг от друга в общем виде. Такое описание, записанное в виде уравнения или системы уравнений, делает возможным изучение различных явлений или ситуаций, и называется **математической моделью.** Рассмотрим пример.

Пример 1.«Что такое средняя скорость?» Если весь пройденный путь разделить на время, затраченное на его преодоление, то мы получаем **среднюю скорость**. Расстояние от дома Пятачка до дома Винни-Пуха равно 960 метрам. Однажды Пятачок пошел в гости к своему другу. Первую половину пути он прошел со скоростью 80 метров в минуту, а вторую половину пути – со скоростью 120 метров в минуту. Чему равна средняя скорость Пятачка?

Первый ответ, который приходит в голову, – это 100 метров в минуту. Это – неправильный ответ. Не надо путать среднее арифметическое скоростей со средней скоростью.

Поиск решения. Средняя скорость равна отношению пройденного расстояния на затраченное время. Все расстояние нам известно. Это 960 метров. Следовательно, требуется найти все затраченное время. Из чего складывается все время? Все время равно сумме времен, которые он затратил на первую половину и на вторую половину. А сколько времени Пятачок затратил на первую половину? Первая половина, 480 метров, пройдена со скоростью 80 метров в минуту. Значит на первую половину потрачено $\frac{480}{80}=6$ минут. Аналогично, на вторую половину потрачено $\frac{480}{120}=4$ минуты.

Решение. Так как каждая из половин пройденного пути равна 480 метров, то на первую половину затрачено $\frac{480}{80}=6$ минут, а на вторую – $\frac{480}{120}=4$ минуты. Получается, что на весь путь 960 метров ушло 10 минут времени. Средняя скорость равна $\frac{960}{10}=96$ метров в минуту.

Ответ: 96 метров в минуту.

Пример 2. «Что такое средняя скорость-2» Тело прошло путь длины $2S$метров, причем первую половину пути оно двигалось со скоростью uметров в минуту, а вторую половину пути со скоростью v метров в минуту. Какова средняя скорость тела на всем пути?

Решение. Так как каждая из половин пройденного пути равна S метров, то на первую половину затрачено $\frac{S}{u}$ минут, а на вторую – $\frac{S}{v}$ минут. Получается, что на весь путь $2S$ метров ушло $\frac{S}{u}+\frac{S}{v}$ минут времени. Так как средняя скорость равна отношению пройденного расстояния на затраченное время, то в данном случае средняя скорость равна $\frac{2S}{\frac{S}{u}+\frac{S}{v}}$ метров в минуту: $v_{cp}=\frac{2S}{\frac{S}{u}+\frac{S}{v}}=\frac{2S}{S\cdot\frac{1}{u}+S\cdot\frac{1}{v}}=\frac{2S}{S\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)}=\frac{2}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}$.

Ответ: $v_{ср}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}}$.

Давайте обсудим, чем отличается пример 2 от примера 1. В примере 2 ситуация рассматривается в общем виде. Формула для средней скорости дает возможность получить ответ для любых конкретных значений u и v уже без промежуточных вычислений и рассуждений. Достаточно неожиданным является тот факт, что формула $v_{ср}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}}$ не содержит величины S. Это значит, что в условиях, которые рассматриваются в задаче, средняя скорость на всем пути не зависит от его длины.

Или представьте другую ситуацию: нам известны скорость v на второй половине пути и средняя скорость $v_{ср}$ на всем пути. Можем ли мы определить скорость на первой половине? Пусть, например, $v=6$ и $v_{ср}=4$. Подставим эти значения в формулу $v_{ср}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}}$.

Получаем $4=\dfrac{2}{\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{6}}$. Так как $4=2:\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{6}\right)$, то $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{6}=2:4$, $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{3}$, $u=3$.
Оказывается, можем.

Или такой вопрос: *может ли получиться так, что в условиях задачи примера 2 среднее арифметическое скоростейменьше средней скорости, т.е.* $\dfrac{u+v}{2}<\dfrac{2}{\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}}$*?*В условиях примера 1 имеем $u=80$, $v=120$, $\dfrac{u+v}{2}=\dfrac{80+120}{2}=100$, $v_{ср}=96$, $100>96$. Допустим, мы подставимтысячу других**конкретных** положительных значенийвместоu и v, и тысячу раз получим, что левая часть неравенства $\dfrac{u+v}{2}<\dfrac{2}{\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}}$ наоборот, больше правой. Будет ли это служить доказательством того, что на самом деле **для любых** положительных u и v имеет место другое неравенство: $\dfrac{u+v}{2}\geq\dfrac{2}{\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}}$? Нет, не будет.**Все возможные значения для**u **и** v **подставить невозможно.** Однако средствами алгебры, которые вы изучите в следующих параграфах данной главы, можно доказать , что неравенство $\dfrac{u+v}{2}\geq\dfrac{2}{\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}}$ является верным **для любых** положительных u и v .

Имеется много других интересных, полезных и неожиданных применений небольшой математической модели, которую мы построили на основе примера 2. В математике величина $\dfrac{2}{\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}}$ называется **средним гармоническим** положительных величин u и v. Как видите, алгебраические выражения действительно чрезвычайно полезны при описании зависимости величин друг от друга.

Задачи

Часть 1

1.Определите условия, при которых выражения не имеют смысла, т.е **не определены:**

а) $\dfrac{a+5}{7}$; д) $\dfrac{4-x}{2x}$; и) $\dfrac{4+p-q}{p-q-20}$; н) $\dfrac{15mn+21n+23m}{2m^2+13}$;

б) $\dfrac{9}{a-8}$; в) $\dfrac{11}{-a-13}$; г) $\dfrac{17}{-2a+18}$;

е) $\dfrac{21x}{x-y}$; ж) $\dfrac{19x+5y}{-3x-12y}$; з) $\dfrac{x+y}{-5x+25y}$;

к) $\dfrac{18pq}{-p+3q+41}$; л) $\dfrac{p+q}{-4p-16q-48}$; м) $\dfrac{pq-q}{-5p+35q+70}$;

о) $\dfrac{4m+7n}{m^2-16}$; п) $\dfrac{n^2-9}{-5m^2+125}$; р) $\dfrac{-n^2+64}{-2m^2+(n-3)^2}$.

2. Определите условия, при которых выражения имеют смысла, т.е **определены:**

а) $\dfrac{2a-9}{8a}$; б) $\dfrac{9a}{2a+9}$; в) $\dfrac{15}{-2a-14}$; г) $\dfrac{17}{-3a+24}$;

д) $\dfrac{12-6x}{x^2}$; е) $\dfrac{21+3x}{x-2y}$; ж) $\dfrac{17x-34y}{11x+22y}$; з) $\dfrac{x^2-xy}{-7x+343y}$;

и) $\dfrac{8+2p-3q}{-p+q+30}$; к) $\dfrac{41p-37q}{-3p+9q-81}$; л) $\dfrac{7p-13q}{-16p-32q-64}$; м) $\dfrac{16p-6q}{-15p+45q+90}$;

н) $\dfrac{-mn+11n-13m}{2m^2}$; о) $\dfrac{56m+28n}{5m^2-320}$; п) $\dfrac{3n^2-19}{-6m^2+216}$; р) $\dfrac{-n^2-121}{4m^2-(n-6)^2}$.

Часть 2

1.Определите условия, при которых выражения не имеют смысла, т.е **не определены:**

а) $\dfrac{5a-5}{16}$; б) $\dfrac{29}{21a-441}$; в) $\dfrac{21}{-12a-144}$; г) $\dfrac{37}{-3a+51}$;

д) $\dfrac{10-2x}{9x}$; е) $\dfrac{31x}{2x-3y}$; ж) $\dfrac{39x+15y}{-7x-42y}$; з) $\dfrac{2x+30y}{-13x+65y}$;

и) $\dfrac{14-p+q}{2p-4q-50}$; к) $\dfrac{18pq}{-33p+66q+99}$; л) $\dfrac{8p+16q}{-14p-28q-196}$; м) $\dfrac{4pq-2q}{-25p+75q+300}$;

н) $\dfrac{75mn+51n+33m}{4m^2+16}$; о) $\dfrac{23m+46n}{2m^2-128}$; п) $\dfrac{29n^2-19}{-2m^2+242}$; р) $\dfrac{-11n^2+6}{(m+5)^2+(3n-15)^2}$.

2. Определите условия, при которых выражения имеют смысла, т.е **определены:**

а) $\dfrac{22a+29}{15a}$; б) $\dfrac{a+0,5}{9a+2}$; в) $\dfrac{55}{-81a-27}$; г) $\dfrac{17}{-6a+84}$;

д) $\dfrac{68-34x}{(-x-6)^2}$; е) $\dfrac{56+2x}{3x-33y}$; ж) $\dfrac{71x-43y}{55x+110y}$; з) $\dfrac{x^2-6xy+6}{-25x+625y}$;

и) $\dfrac{61-99p-101q}{-4p+12q+120}$; к) $\dfrac{81p-82q}{-27p+81q-243}$; л) $\dfrac{17p-34q}{-19p-76q-95}$; м) $\dfrac{15p-5q}{-75p+150q+225}$;

н) $\dfrac{-m+n+11mn}{9m^2}$; о) $\dfrac{99m+199n}{5m^2-405}$; п) $\dfrac{93n^2-119}{-5m^2+500}$; р) $\dfrac{-2n^2-21}{4(m+6)^2-9(n+12)^2}$.

Ответы:

Часть 1

1. а)При никаких значении a ; б) $a=8$; в) $a=-13$; г) $a=9$; д) $x=0$; е) $x=y$; ж) $x=-4y$; з) $x=5y$;
и) $p=q+20$; к) $p=3q+41$; л) $p=-4q-12$; м) $p=7q+14$; н)при никаких значении m,n ; о) $m=\pm 4$;
п) $m=\pm 5$; р) $m=0$ и $n=3$.

2. а) $a\neq 0$;б) $a\neq -4,5$; в) $a\neq -7$; г) $a\neq 8$; д) $x\neq 0$; е) $x\neq 2y$; ж) $x\neq -2y$; з) $x\neq 49y$; и) $p\neq q+9$; к) $p\neq 3q-27$;
л) $p\neq -2q-4$; м) $p\neq 3q+6$; н) $m\neq 0$; о) $m\neq \pm 8$; п) $m\neq \pm 6$; р) $n\neq 6\pm 2m$.

Часть 2

1. а) Таких a не существуют ; б) $a=21$; в) $a=-12$; г) $a=17$; д) $x=0$; е) $x=\dfrac{2y}{3}$; ж) $x=-6y$; з) $x=5y$;

и) $p=2q+25$; к) $p=2q+3$; л) $p=-2q-14$; м) $p=3q+12$; н)Таких m,n не существуют; о) $m=\pm 8$;

п) $m=\pm 11$; р) $m=-5$ и $n=5$.

2. а) $a\neq 0$;б) $a\neq -\dfrac{2}{9}$; в) $a\neq -\dfrac{1}{3}$; г) $a\neq 14$; д) $x\neq -6$; е) $x\neq 11y$; ж) $x\neq -2y$; з) $x\neq 25y$; и) $p\neq 3q+30$;

к) $p\neq 3q-9$; л) $p\neq -4q-5$; м) $p\neq 2q+3$; н) $m\neq 0$; о) $m\neq \pm 9$; п) $m\neq \pm 10$; р) $m\neq 1{,}5m+12$, $m\neq -1{,}5n-24$.

§ 2 Основное свойство алгебраической дроби

Имеет место основное свойство числовых дробей.
Если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же число, не равное нулю, то значение дроби от этого не изменится.Если числитель и знаменатель дроби разделить на одно и то же число, не равное нулю, то значение дроби от этого не изменится.

Например, $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{100}{300}=\dfrac{5}{15}$. Возникает вопрос: остается ли основное свойство верным для рациональных (алгебраических) дробей? Давайте рассмотрим дробь $\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Числитель и знаменатель данной дроби раскладывается на множители: $\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}$. **Для любого** конкретного числового значения переменной x числовые значения выражений $(x-3)$ в числителе и в знаменателе равны между собой. Таким образом, исходя из основного свойства для числовых дробей, мы можем сократить множители $(x-3)$ в числителе и знаменателе во всех случаях кроме $x=3$:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x}.$$

Заметим также, что если $x=3$ или $x=0$, то дробь $\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ вообще не имеет никакого числового значения. Это значит, что областью допустимых значений (ОДЗ) переменной x для выражения $\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ являются все числа, кроме $x=3$ или $x=0$. ОДЗ переменной x для выражения $\dfrac{x+3}{x}$ являются все числа, кроме $x=0$. Таким образом, равенство $\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\dfrac{x+3}{x}$ **реализуется при всех значениях** x, кроме $x=3$ или $x=0$.

Определение. ***Два алгебраических выражения будем считать тождественно равными, если их числовые значения совпадают при всех значениях переменных, принадлежащих ОДЗ каждого из выражений.***
Замечание. Здесь и всюду далее под ОДЗ алгебраического выражения мы будем подразумевать не значение самого выражения, а область допустимых значений переменных, входящих в выражение.
Определение. ***Преобразование, которое переводит одно выражение в тождественно ему равное, мы будем называть тождественным преобразованием.***

Из данных определений следует, что сокращение алгебраической дроби на один и тот же множитель является тождественным преобразованием.В то же время, как показывает приведенный пример, тождественные преобразования могут изменять ОДЗ выражений. Сразу договоримся о двух вещах.

1) Если в задании речь идет об упрощении выражения с помощью тождественных преобразований, то находить ОДЗ выражения мы не будем.
2) Если в задании речь идет о решении уравнения, и тождественные преобразования применялись для упрощения данного уравнения, то находить ОДЗ выражений, входящих в **исходное** уравнение, ОБЯЗАТЕЛЬНО.

Пример. «Уравнение без корней.» Решить уравнение $\frac{x^2-9}{2x-6}=3$.

Решение. ОДЗ левой части уравнения определяется условием $2x-6\neq 0$, т.е. $x\neq 3$. Уравнение преобразуется к виду $\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}=3$, $\frac{x+3}{2}=3$, $x+3=6$, $x=3$. Но $x=3$ не принадлежит ОДЗ левой части исходного уравнения. Следовательно, уравнение не имеет решения.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Сокращение алгебраических дробей ведет к их упрощению.

Упражнение 1. *Сократить следующие дроби:*

a) $\frac{5a^2b^2}{10ab^5}$; b) $\frac{15(a-x)^2(b+y)^2}{10(b+y)^5(a-x)}$; c) $\frac{x-y}{y-x}$; d) $\frac{(x-y)^{n+2}}{(y-x)^n}$.

Упражнение 2. *Сократить следующие дроби:*

a) $\frac{a^2+ab-a-b}{3a^2-6a+3}$; b) $\frac{p^2q^2-p^2-q^2+1}{(1-p)(q+1)}$; c) $\frac{x^6-y^9}{x^4+x^2y^3+y^6}$; d) $\frac{x^2+6x-7}{9-x^2-8x}$.

Решение упражнения 1.

a) $\frac{5a^2b^2}{10ab^5}=\frac{a}{2b^3}$;

b) $\frac{15(a-x)^2(b+y)^2}{10(b+y)^5(a-x)}=\frac{3(a-x)}{2(b+y)^3}$;

c) $\frac{x-y}{y-x}=\frac{-(y-x)}{y-x}=-1$;

d) $\frac{(x-y)^{n+2}}{(y-x)^n}=\frac{(x-y)^n(x-y)^2}{(y-x)^n}$. Заметим, что если n – четное число, то $(x-y)^n=(y-x)^n$ и $\frac{(x-y)^{n+2}}{(y-x)^n}=\frac{(x-y)^n(x-y)^2}{(y-x)^n}=(x-y)^2$. Если же n – нечетное число, то $(x-y)^n=-(y-x)^n$ и $\frac{(x-y)^{n+2}}{(y-x)^n}=\frac{(x-y)^n(x-y)^2}{(y-x)^n}=-(x-y)^2$.

Решение упражнения 2.

a) $\frac{a^2+ab-a-b}{3a^2-6a+3}=\frac{a(a+b)-(a+b)}{3(a^2-2a+1)}=\frac{(a+b)(a-1)}{3(a-1)^2}=\frac{a+b}{3(a-1)}$;

b) $\frac{p^2q^2-p^2-q^2+1}{(1-p)(q+1)}=\frac{p^2(q^2-1)-(q^2-1)}{(1-p)(q+1)}=\frac{(q^2-1)(q^2-1)}{(1-p)(q+1)}=$
$=\frac{(q-1)(q+1)(p-1)(p+1)}{(1-p)(q+1)}=-(q-1)(p+1)=(1-q)(p+1)$;

c) $\frac{x^6-y^9}{x^4+x^2y^3+y^6}=\frac{(x^2)^3-(y^3)^3}{x^4+x^2y^3+y^6}=\frac{(x^2-y^3)(x^4+x^2y^3+y^6)}{x^4+x^2y^3+y^6}=x^2-y^3$;

d) $\dfrac{x^2+6x-7}{9-x^2-8x}=-\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+8x-9}=-\dfrac{x^2+6x+9-9-7}{x^2+8x+16-16-9}=$

$=-\dfrac{(x+3)^2-4^2}{(x+4)^2-5^2}=-\dfrac{(x+3-4)(x+3+4)}{(x+4-5)(x+4+5)}=-\dfrac{(x-1)(x+7)}{(x-1)(x+9)}=-\dfrac{x+7}{x+9}$.

Задачи

Часть 1

1.Скоратите следующие дроби:

а) $\dfrac{10a^3b^2}{15a^2b^3}$; д) $\dfrac{12(x+y)^3(x-y)^4}{18(x+y)^2(x-y)^3}$; и) $\dfrac{z+t}{-z-t}$; н) $\dfrac{(p+q)^{n+2}}{(p+q)^2}$;

б) $\dfrac{21a^4b^3c^2}{42a^3b^2c}$; е) $\dfrac{24(x+y)^4(x-y)^4}{27(x^2-y^2)^3}$; к) $\dfrac{2z+2t}{-3z-3t}$; о) $\dfrac{(p-q)^{n+3}}{(p-q)^n}$;

в) $\dfrac{37a^5b^6c^7}{111a^6b^7c^8}$; ж) $\dfrac{33(x^2-y^2)^6}{99(x+y)^{12}}$; л) $\dfrac{5z-10t}{20t-10z}$; п) $\dfrac{(p+q)^{n+k}}{(p+q)^n}$;

г) $\dfrac{24a^7b^6c^7}{96a^7b^5c^8}$; з) $\dfrac{25(x^2-y^2)^4(x-y)^4}{35(x+y)^{12}}$; м) $\dfrac{-15z-18t}{35z+42t}$; р) $\dfrac{(p-q)^n}{(p-q)^{n+k}}$.

2.Сократите следующие дроби:

а) $\dfrac{ab+a^2+a+b}{2a+2b}$; д) $\dfrac{x^4-y^4}{x^4-2x^2y^2+y^4}$; и) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$;

б) $\dfrac{ax+bx-ay-by}{x^2-y^2}$; е) $\dfrac{x^{12}-y^{12}}{x^8+x^4y^4+y^8}$; к) $\dfrac{-x^2+20x+21}{x^2+31x+30}$;

в) $\dfrac{ax^2+bx^2+ay^2+by^2}{5a^2+10a+5}$; ж) $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2+xy+y^2}$; л) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$;

г) $\dfrac{ax^2+bx^2+cx^2-ay-by-cy}{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$; з) $\dfrac{x^8+x^4y^4+y^8}{x^4-x^2y^2+y^4}$; м) $\dfrac{x^2-x-72}{x^2-2x-63}$.

Часть 2

1.Скоратите следующие дроби:

а) $\dfrac{13a^5b^4}{52a^6b^5}$; д) $\dfrac{120(x+y)^5(x-y)^{16}}{144(x+y)^{10}(x-y)^8}$; и) $\dfrac{az+at}{-bz-bt}$; н) $\dfrac{(p+q)^{n-2}}{(p+q)^n}$;

б) $\dfrac{48a^5b^6c^7}{64a^7b^8c^9}$; е) $\dfrac{32(x+y)^5(x-y)^5}{72(x^2-y^2)^5}$; к) $\dfrac{2az+2at}{-3bz-3bt}$; о) $\dfrac{(p-q)^{n+4}}{(p-q)^{n+5}}$;

в) $\dfrac{39a^5b^6c^7}{123a^{10}b^{11}c^{12}}$; ж) $\dfrac{44(x+y)^{10}}{132(x^2-y^2)^{10}}$; л) $\dfrac{13z-26t}{92t-46z}$; п) $\dfrac{(p+q)^{n-k}}{(p+q)^n}$;

г) $\dfrac{45a^{n+5}b^{n+6}c^{n+7}}{135a^{n+3}b^{n+2}c^{n+1}}$; з) $\dfrac{45(x^2-y^2)^6(x+y)^{10}}{75(x+y)^{16}}$; м) $\dfrac{-105az-210at}{44bz+88bt}$; р) $\dfrac{(p-q)^{n-k}}{(p-q)^{n+k}}$.

2.Сократите следующие дроби:

а) $\dfrac{a^2b+a^2+b+1}{2+2b}$; д) $\dfrac{x^6-y^6}{x^6-2x^3y^3+y^6}$; и) $\dfrac{6x^2-5x+1}{12x^2-7x+1}$;

б) $\dfrac{ax^2+bx^2-ay^2-by^2}{x^4-y^4}$; е) $\dfrac{x^5-y^5}{x-y}$; к) $\dfrac{5x^2+4x-1}{6x^2+5x-1}$;

в) $\dfrac{ax^2-bx^2-ay^2+by^2}{4x^2-8xy+4y^2}$; ж) $\dfrac{x^7-y^7}{x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6}$; л) $\dfrac{30x^2-x-1}{25x^2-1}$;

г) $\dfrac{ax^2+bx^2+cx^2-ay^2-by^2-cy^2}{x^3-y^3}$; з) $\dfrac{x^{12}+x^6y^6+y^{12}}{x^6-x^3y^3+y^6}$; м) $\dfrac{36x^2-1}{36x^2-12x+1}$.

Ответы:
Часть 1

1. а) $\dfrac{2a}{3b}$; б) $\dfrac{abc}{2}$; в) $\dfrac{1}{3abc}$; г) $\dfrac{b}{4c}$; д) $\dfrac{2(x^2-y^2)}{3}$; е) $\dfrac{8(x^2-y^2)}{9}$; ж) $\dfrac{(x-y)^6}{9(x+y)^6}$; з) $\dfrac{5(x-y)^8}{7(x+y)^8}$; и) -1; к) $-\dfrac{2}{3}$; л) $-\dfrac{1}{2}$; м) $-\dfrac{3}{7}$; н) $(p+q)^n$; о) $(p-q)^3$; п) $(p+q)^k$; р) $\dfrac{1}{(p-q)^k}$.

2. а) $\dfrac{a+b+1}{2}$; б) $\dfrac{a+b}{x+y}$; в) $\dfrac{x^2+y^2}{5(a+b)}$; г) $\dfrac{x^2-y}{a+b+c}$; д) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; е) x^4-y^4; ж) x^2-xy+y^2; з) $x^4+x^2y^2+y^4$; и) $\dfrac{x-2}{x-3}$; к) $\dfrac{21-x}{x+30}$; л) $\dfrac{x-4}{x-5}$; м) $\dfrac{x+8}{x+7}$.

Часть 2

1. а) $\dfrac{1}{4ab}$; б) $\dfrac{3}{4abc}$; в) $\dfrac{13}{41a^5b^5c^5}$; г) $\dfrac{a^2b^4c^6}{3}$; д) $\dfrac{5(x-y)^8}{6(x+y)^5}$; е) $\dfrac{4}{9}$; ж) $\dfrac{1}{9(x-y)^{10}}$; з) $\dfrac{3(x-y)^6}{5}$; и) $-\dfrac{a}{b}$; к) $-\dfrac{2a}{3b}$; л) $-\dfrac{13}{46}$; м) $-\dfrac{105a}{46}$; н) $\dfrac{1}{(p+q)^2}$; о) $\dfrac{1}{p-q}$; п) $\dfrac{1}{(p+q)^k}$; р) $\dfrac{1}{(p-q)^{2k}}$.

2. а) $\dfrac{a^2+1}{2}$; б) $\dfrac{a+b}{x^2+y^2}$; в) $\dfrac{(x+y)(a-b)}{4(x-y)}$; г) $\dfrac{(a+b+c)(x+y)}{x^2+xy+y^2}$; д) $\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$; е) $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$; ж) $x-y$; з) $x^6+x^3y^3+y^6$; и) $\dfrac{2x-1}{4x-1}$; к) $\dfrac{5x-1}{6x-1}$; л) $\dfrac{6x+1}{5x+1}$; м) $\dfrac{6x+1}{6x-1}$.

§ 3 Умножение и деление дробей

Пусть, например, нам необходимо найти произведение дробей $\dfrac{2a-p}{3x^4}\cdot\dfrac{9x^2}{(2a-p)^3}$.

Из курса математики 5-6 классов вам известно правило умножения дробей. **Произведение числовых дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей исходных дробей.**

Например, $\dfrac{15}{18}\cdot\dfrac{9}{25}=\dfrac{15\cdot 9}{18\cdot 25}$. Так как для любых конкретных значений переменных буквенные выражения принимают **числовые** значения, то сформулированное правило распространяется и на алгебраические дроби:

$$\frac{2a-p}{3x^4}\cdot\frac{9x^2}{(2a-p)^3}=\frac{(2a-p)\cdot 9x^2}{3x^4(2a-p)^3}.$$

Далее можно сокращать полученную дробь так, как мы это делали в предыдущем параграфе:

$$\frac{2a-p}{3x^4}\cdot\frac{9x^2}{(2a-p)^3}=\frac{(2a-p)\cdot 9x^2}{3x^4(2a-p)^3}=\frac{3}{x^2(2a-p)^2}.$$

Заметим также, что по правилу умножения дробей числители дробей становятся множителями числителя, а знаменатели дробей становятся множителями знаменателя. Поэтому сокращения можно производить еще до перемножения дробей, **сокращая множители числителя одной дроби с множителями знаменателя другой дроби.** Например,

$$\frac{2a-p}{3x^4}\cdot\frac{9x^2}{(2a-p)^3}=\frac{1}{3x^2}\cdot\frac{9}{(2a-p)^2}=\frac{3}{x^2(2a-p)^2}.$$

Другой пример. Требуется упростить выражение: $\frac{x^3-y^3}{6b^3(x-y)^2}\cdot\frac{15b^7}{(q-p)^2}\cdot\frac{p^2-q^2}{20(x^2+xy+y^2)}$.

Поскольку мы собираемся упрощать с помощью сокращения, необходимо попробовать разложить на множители все, что еще можно разложить. Торопиться применять правило умножения не будем. Иначе все сольется в одну кучу, в которой трудно будет разобраться. Будем пользоваться тем, что при умножении дробей можно числитель одной дроби сокращать со знаменателем другой дроби.

$$\frac{x^3-y^3}{6b^3(x-y)^2}\cdot\frac{15b^7}{(q-p)^2}\cdot\frac{p^2-q^2}{20(x^2+xy+y^2)}=$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{6b^3(x-y)^2}\cdot\frac{15b^7}{(q-p)^2}\cdot\frac{(p-q)(p+q)}{20(x^2+xy+y^2)}=$$

$$=\frac{(x^2+xy+y^2)}{6(x-y)}\cdot\frac{15b^4}{(p-q)^2}\cdot\frac{(p-q)(p+q)}{20(x^2+xy+y^2)}=$$

$$=\frac{(x^2+xy+y^2)}{2(x-y)}\cdot\frac{b^4}{(p-q)}\cdot\frac{(p+q)}{4(x^2+xy+y^2)}=$$

$$=\frac{1}{2(x-y)}\cdot\frac{b^4}{(p-q)}\cdot\frac{(p+q)}{4}=$$

$$=\frac{b^4(p+q)}{8(x-y)(p-q)}.$$

Иногда требуется умножить некоторое выражение на рациональную дробь. Обратимся за примерами к числовым дробям. Значения выражений $30\cdot\frac{4}{25}$, $\frac{30\cdot4}{25}$, $\frac{30}{25}\cdot4$ равны между собой. Это значит, что при умножении 30 на $\frac{4}{25}$ числа 30 и 25 можно сократить на 5 заранее, не перенося предварительно 30 в числитель: $30\cdot\frac{4}{25}=6\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$. Аналогично, при умножении выражения на рациональную дробь

Задачи

Часть 1

1. Выполните умножение дробей:

а) $\frac{ax+ay}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{bx-by}$;

б) $\frac{2x+3y}{4x+4y}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2}{4x^2+12xy+9y^2}$;

в) $\frac{6x+12y}{7x-14y}\cdot\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+4xy+4y^2}$;

г) $\frac{5x+15y}{10x-20y}\cdot\frac{x^2-4y^2}{x^2-9y^2}$;

д) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2+8x+7}{x^2-3x+2}$;

е) $\frac{x^2-4}{x^2+6x+8}\cdot\frac{x^2+8x+16}{x^2-6x+8}$;

ж) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^2-x-6}{x^2+x-6}$;

з) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+10x+21}{x^2-8x+15}$.

2. Выполните деление дробей:

а) $\frac{ax^2+axy}{bx-by}:\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$;

б) $\frac{5x-20y}{7a+14b}:\frac{x^2-16y^2}{a^3+8b^3}$;

в) $\frac{6x^2-36xy}{11xy+33y^2}:\frac{x^2-36y^2}{x^2-9y^2}$;

д) $\frac{x^2-x-110}{x^2+x-110}:\frac{x^2-121}{x^2-100}$;

е) $\frac{x^2-8x-20}{x^2+8x-20}:\frac{x^2-100}{x^2-4}$;

ж) $\frac{x^2-6x-27}{x^2+6x-27}:\frac{x^2-81}{x^2-9}$;

г) $\dfrac{8x+16y+24z}{4a+8b+16c}:\dfrac{(x+2y+3z)^2}{(a+2b+4c)^2}$;

з) $\dfrac{x^2-3x-40}{x^2+3x-40}:\dfrac{x^2-64}{x^2-25}$.

Часть 2

1.Выполните умножение дробей:

а) $\dfrac{(x-y)^2}{ax}\cdot\dfrac{bx}{(y-x)^2}$;

б) $\dfrac{x^2-y^2}{ax+bx}\cdot\dfrac{a^2+2ab+b^2}{x^2-2xy+y^2}$;

в) $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\cdot\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$;

г) $\dfrac{ax+bx+cx}{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}\cdot\dfrac{ay+by+cy}{x^2}$;

д) $\dfrac{2xy-y^2}{xyz+y^2z}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{y^2-4xy+4x^2}$;

е) $\dfrac{ax+bx}{a^3-b^3}\cdot\dfrac{ay-by}{(a+b)^3}$;

ж) $\dfrac{18x^2y^3}{(x-2y)^2}\cdot\dfrac{16y^4-x^4}{72x^3y^2}$;

з) $\dfrac{54x^4y-16xy^4}{a^4-ab^3}\cdot\dfrac{a^6-b^6}{135x^3-40y^3}$.

2. Выполните деление дробей:

а) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-28}:\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-35}$;

б) $\dfrac{x^2-3x-54}{x^2-x-42}:\dfrac{x^2-16x+63}{x^2-14x+49}$;

в) $\dfrac{x^2-20x+96}{x^2-8x-48}:\dfrac{x^2-14x+48}{x^2-2x-24}$;

г) $\dfrac{x^2-13x+22}{x^2-10x+16}:\dfrac{x^2-16x+55}{x^2-13x+40}$;

д) $\dfrac{x^2-25}{x^2-36}:\dfrac{x^2+10x+25}{x^2-12x+36}$;

е) $\dfrac{x^3-8}{x^3-27}:\dfrac{x-2}{x-3}$;

ж) $\dfrac{x^3-64}{x^3+125}:\dfrac{x^2+4x+16}{x^2-5x+25}$;

з) $\dfrac{x^3+216}{x^3-343}:\dfrac{x^2-36}{x^2+7x+49}$.

Ответы:

Часть 1

1. а) $\dfrac{a}{b}$; б) $\dfrac{x+y}{4(2x+3y)}$; в) $\dfrac{6(x-2y)}{7(x+2y)}$; г) $\dfrac{x+2y}{2(x-3y)}$; д) $\dfrac{x+7}{x-2}$; е) $\dfrac{x+4}{x-4}$; ж) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-3}$; з) $\dfrac{x+7}{x-5}$;

2. а) $\dfrac{ax}{b}$; б) $\dfrac{5(a^2-2ab+4b^2)}{7(x+4y)}$; в) $\dfrac{6x(x-3y)}{11y(x+6y)}$; г) $\dfrac{2a+4b+8c}{x+2y+3z}$; д) $\left(\dfrac{x+10}{x+11}\right)^2$; е) $\left(\dfrac{x+2}{x+10}\right)^2$; ж) $\left(\dfrac{x+3}{x+9}\right)^2$;

з) $\left(\dfrac{x+5}{x+8}\right)^2$.

Часть 2

1. а) $\dfrac{b}{a}$; б) $\dfrac{x+y}{x(x-y)}$; в) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$; г) $\dfrac{y}{x}$; д) $\dfrac{x-y}{z(2x-y)}$; е) $\dfrac{xy}{(a+b)^2(a^2+ab+b^2)}$; ж) $\dfrac{y(2y+x)(4y^2+x^2)}{x(2y-x)}$;

з) $\dfrac{2x(a^3+b^3)}{5a}$.

2. а) $\dfrac{(x+5)(x-3)}{(x-4)(x+3)}$; б) 1; в) 1; г) 1; д) $\dfrac{(x-5)(x-6)}{(x+5)(x+6)}$; е) $\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+3x+9}$; ж) $\dfrac{x-4}{x+5}$; з) $\dfrac{x^2-6x+36}{(x-7)(x-6)}$.

§ 4 Сложение рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Как вы уже знаете, для того, чтобы сложить числовые дроби с одинаковым знаменателем, надо знаменатель оставить тем же, а числители сложить. Аналогично, для того, чтобы найти разность двух дробей с одинаковыми знаменателями, нужно знаменатель оставить тем же, а числители отнять друг от друга. Так как для любого набора конкретных значений переменных рациональные дроби принимают числовые значения, то сформулированные правила справедливы и для рациональных дробей. Для большего количества дробей действуют аналогичные правила. Приведем примеры.

Пример 1. Сложить дроби:

a) $\frac{a}{5}+\frac{b}{5}-\frac{c}{5}$; b) $\frac{1}{x}+\frac{7x}{x^2}-\frac{24}{3x}$; c) $\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}+\frac{2ab}{b-a}$.

Решение.

a) По правилу сложения дробей имеем $\frac{a}{5}+\frac{b}{5}-\frac{c}{5}=\frac{a+b-c}{5}$.

b) Сначала произведем сокращение в тех дробях, для которых это возможно. Затем воспользуемся правилом сложения дробей:

$$\frac{1}{x}+\frac{7x}{x^2}-\frac{24}{3x}=\frac{1}{x}+\frac{7}{x}-\frac{8}{x}=\frac{1+7-8}{x}=\frac{0}{x}=0.$$

c) Третья дробь в выражении имеет знаменатель $b-a$, в то время как другие дроби имеют знаменатель $a-b$. Но нам известно, что $b-a=-(a-b)$. Отсюда преобразования:

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}+\frac{2ab}{b-a}=\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}-\frac{2ab}{a-b}=\frac{a^2+b^2-2ab}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}=a-b.$$

К случаю сложения дробей с одинаковыми знаменателями сводится сложение дроби и другого выражения, которое может быть одночленом или многочленом. Например,

$$\frac{p^2}{q+p}+q-p=\frac{p^2}{q+p}+\frac{q-p}{1}=\frac{p^2}{q+p}+\frac{(q-p)(q+p)}{1(q+p)}=\frac{p^2+(q^2-p^2)}{q+p}=\frac{q^2}{q+p}.$$

Давайте разберемся, что произошло. На первом шаге двучлен $q-p$ представлен в виде дроби $\frac{q-p}{1}$. На втором шаге и числитель, и знаменатель дроби $\frac{q-p}{1}$ умножены на знаменатель первой дроби $q+p$. Получилось $q-p=\frac{q-p}{1}=\frac{(q-p)(q+p)}{1(q+p)}=\frac{(q-p)(q+p)}{(q+p)}$.

Рассмотренный пример подсказывает, как можно поступить в более общем случае. Пусть A, B и C − некоторые выражения. Тогда имеет место следующая цепочка преобразований:

$$\frac{A}{B}+C=\frac{A}{B}+\frac{C}{1}=\frac{A}{B}+\frac{CB}{B}=\frac{A+CB}{B}.$$

Аналогично для разности:

$$\frac{A}{B}-C=\frac{A}{B}-\frac{C}{1}=\frac{A}{B}-\frac{CB}{B}=\frac{A-CB}{B}.$$

Можно сразу иметь в виду, что

$$\boxed{\frac{A}{B}+C=\frac{A+CB}{B}}$$

$$\boxed{\frac{A}{B}-C=\frac{A-CB}{B}}$$

Замечание. Рассмотренные преобразования являются частными случаями алгоритма сложения рациональных дробей с разными знаменателями, о котором мы поговорим в следующем параграфе.

Упражнение 1. *Выполнить действия:*

а) $\dfrac{1-3x}{x}+3$; b) $\dfrac{a^2}{a^2-b^2}+\dfrac{ab}{b^2-a^2}$; c) $\dfrac{q^3-2q}{q-3}-q^2+2$.

Упражнение 2. *Выполнить действия*:

а) $\dfrac{2xa-2x}{a-1}-\dfrac{n-m}{nx-mx}$; b) $4m-1+\dfrac{1+4m}{16m^2-1}$; c) $\dfrac{c^3+2c^2b}{c^4-8cb^3}-\dfrac{4b^2}{8b^3-c^3}$.

Решение упражнения 1.

а) $\dfrac{1-3x}{x}+3=\dfrac{1-3x}{x}+\dfrac{3}{1}=\dfrac{1-3x}{x}+\dfrac{3x}{x}=\dfrac{1-3x+3x}{x}=\dfrac{1}{x}$;

b) $\dfrac{a^2}{a^2-b^2}+\dfrac{ab}{b^2-a^2}=\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2-ab}{a^2-b^2}=\dfrac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{a}{a+b}$;

c) $\dfrac{q^3-2q}{q-3}-q^2+2=\dfrac{q^3-2q}{q-3}-\dfrac{q^2(q-3)}{q-3}+\dfrac{2(q-3)}{q-3}=\dfrac{q^3-2q-q^2(q-3)+2(q-3)}{q-3}=$

$=\dfrac{q^3-2q-q^2(q-3)+2(q-3)}{q-3}=\dfrac{q^3-2q-q^3+3q^2+2q-6}{q-3}=\dfrac{3q^2-6}{q-3}$.

Решение упражнения 2.

а) $\dfrac{2xa-2x}{a-1}-\dfrac{n-m}{nx-mx}=\dfrac{2x(a-1)}{a-1}-\dfrac{n-m}{x(n-m)}=\dfrac{2x}{1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$;

b) $4m-1-\dfrac{1-4m}{16m^2-1}=4m-1-\dfrac{1-4m}{(4m-1)(4m+1)}=$

$=4m-1+\dfrac{1}{4m+1}=\dfrac{(4m-1)(4m+1)+1}{4m+1}=$

$=\dfrac{16m^2-1+1}{4m+1}=\dfrac{16m^2}{4m+1}$;

c) $\dfrac{c^3+2c^2b}{c^4-8cb^3}-\dfrac{4b^2}{8b^3-c^3}=\dfrac{c\left(c^2+2cb\right)}{c\left(c^3-8b^3\right)}-\dfrac{4b^2}{8b^3-c^3}=$

$=\dfrac{c^2+2cb}{c^3-8b^3}+\dfrac{4b^2}{c^3-8b^3}=\dfrac{c^2+2cb+4b^2}{c^3-8b^3}=$

$=\dfrac{c^2+2cb+4b^2}{(c-2b)\left(c^2+2cb+4b^2\right)}=\dfrac{1}{c-2b}$.

Замечание. «Очень важное». *Перед тем, как производить какие бы то ни было операции между алгебраическими дробями, предварительно пытайтесь сократить каждую из дробей. Если этого не сделать, то дальнейшие преобразования могут привести к непреодолимым вычислительным трудностям.*

Задачи

Часть 1

1. Сложите дроби:

а) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}$;

б) $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x+y}$;

в) $\dfrac{ax}{x+y}+\dfrac{ay}{x+y}$;

г) $\dfrac{2x+y}{x+y}+\dfrac{x+2y}{x+y}$;

д) $\dfrac{a-b}{a}+\dfrac{b}{a}$;

е) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{b}{a}$;

ж) $\dfrac{2a+3b}{a}-\dfrac{a+3b}{a}$;

з) $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{a+b}+\dfrac{2ab}{a+b}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{a-b}{a}+\frac{b}{a}$;

б) $\frac{x^3-xy}{x^2+2y}+\frac{3xy}{x^2+2y}$;

в) $\frac{x^2}{x^3+y^3}+\frac{y^2}{x^3+y^3}-\frac{xy}{x^3+y^3}$;

г) $\frac{ax^2}{x^4+x^2y^2+y^4}+\frac{ay^2}{x^4+x^2y^2+y^4}+\frac{axy}{x^4+x^2y^2+y^4}$;

д) $\frac{(a+b)^2}{a^4-b^4}+\frac{(a-b)^2}{a^4-b^4}$;

е) $\frac{(x-2y)^2}{y^2}-\frac{(x+2y)^2}{y^2}$;

ж) $\frac{(x+1)^3}{2x+3}+\frac{(x+2)^3}{2x+3}$;

з) $\frac{(x+1)^4}{x^2+12}+\frac{(x-1)^4}{x^2+12}-\frac{2}{x^2+12}$.

Часть 2

1. Сложите дроби:

а) $\frac{5}{x}-\frac{6}{x}$;

б) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-x}$;

в) $\frac{ax-y}{x-y}-\frac{ay-y}{x-y}$;

г) $\frac{2x+y}{x-y}-\frac{x+2y}{x-y}$;

д) $\frac{a-b}{a}-\frac{a+b}{a}$;

е) $\frac{a+b}{a}-\frac{b-a}{a}$;

ж) $\frac{2a+3b}{ab}-\frac{2a-3b}{ab}$;

з) $\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}+\frac{2ab}{b-a}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{(2a+b)^2}{8ab}-\frac{(2a-b)^2}{8ab}$;

б) $\frac{x^2+5axy}{x+ay}-\frac{4axy}{x+ay}$;

в) $\frac{(x+y)^2}{x^3-y^3}-\frac{xy}{x^3-y^3}$;

г) $\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}-\frac{2x^2y^2+2y^4}{x^2-y^2}$;

д) $\frac{(a-2b)^2}{a^6+64b^6}+\frac{(a+2b)^2}{a^6+64b^6}$;

е) $\frac{(2x+5y)^2}{10x^2}-\frac{(2x-5y)^2}{10x^2}$;

ж) $\frac{(x+2)^3}{2x+5}+\frac{(x+3)^3}{2x+5}$;

з) $\frac{(x+2)^4}{x^2+24}+\frac{(x+2)^4}{x^2+24}-\frac{32}{x^2+24}$.

Ответы:

Часть 1

1. а) $\frac{3}{x}$; б) 1; в) a; г) 1; д) 1; е) 1; ж) 1; з) $a+b$.

2. а) 1; б) x; в) $\frac{1}{x+y}$; г) $\frac{a}{x^2-xy+y^2}$; д) $\frac{2}{a^2-b^2}$; е) $-\frac{8x}{y}$; ж) x^2+3x+3; з) $2x^2$.

Часть 2

1. а) $-\frac{1}{x}$; б) 1; в) a; г) 1; д) $-\frac{2b}{a}$; е) 2; ж) $\frac{6}{a}$; з) $a-b$.

2. а) 1; б) x; в) $\frac{1}{x-y}$; г) x^2+y^2; д) $\frac{2}{a^4-4a^2b^2+16b^2}$; е) $\frac{40y}{x}$; ж) x^2+5x+7; з) $2x^2$.

§ 5 Приведение к общему знаменателю и сложение дробей

Для того, чтобы сложить две числовые дроби, сначала их необходимо **привести к общему знаменателю.** Общим знаменателем может служить любое число, которое делится на каждый из знаменателей исходных дробей. Например, складываем числа $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{18}$. Общим знаменателем здесь может служить любое число, для которого числа 12 и 18 являются делителями. Это может быть число $12\cdot 18$:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18+7\cdot 12}{12\cdot 18}=\frac{174}{12\cdot 18}=\frac{87}{6\cdot 18}=\frac{29}{36}.$$

Это может быть число 36:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 3+7\cdot 2}{36}=\frac{29}{36}.$$

Ясно, что во втором случае вычисления намного проще, чем в первом. Дело в том, что 36 – это **наименьшее** число, которое делится и на 12, и на 18: так называемое **наименьшее общее кратное, НОК чисел 12 и 18.**Вы знакомы с понятием наименьшего общего кратного с 5-го класса. Напомним один из алгоритмов нахождения НОК двух натуральных чисел.

Шаг 1. Раскладываем каждое из чисел в произведение степеней простых множителей.

Шаг 2. НОК записываем как произведение наибольших степеней простых множителей, входящих в разложение хотя бы одного из чисел.

Пример. Найти НОК чисел 264 и 450.

Решение. Выполняя шаг 1, получаем $264=2^3\cdot 3\cdot 11$, $450=2\cdot 3^2\cdot 5^2$. Выполняем шаг 2. Выписываем произведение всех простых множителей, входящих в разложение хотя бы одного из чисел, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$, а затем над каждым записываем наибольшую степень, с которой данные числа входят в разложение: $2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11^1$. Это число и есть наименьшее общее кратное для чисел 264 и 450.

При сложении двух алгебраических дробей также сначала находят общий знаменатель. Аналогично случаю числовых дробей, общим знаменателем может служить произведение любых алгебраических выражений, содержащее каждый из знаменателей в виде своего делителя. Однако оптимальными преобразования окажутся только в том случае, если общий знаменатель будет иметь наименьшее возможное количество делителей.

Пример 1. «Параллельные преобразования».

a) Найти сумму $\frac{5}{264}+\frac{7}{450}$;

b) Сложить $\frac{5}{x^3yz}+\frac{7}{xy^2t}$.

Решение.

a) Общим знаменателем для дробей $\frac{5}{2^3\cdot 3\cdot 11}$ и $\frac{7}{2\cdot 3^2\cdot 5^2}$ выбираем произведение наибольших степеней множителей из знаменателей: $2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11^1$.
На что нужно домножить знаменатель первой дроби, чтобы получить общий знаменатель? На $3\cdot 5^2$. Следовательно, число $3\cdot 5^2$ есть дополнительный множитель для числителя первой дроби.
На что нужно домножить знаменатель второй дроби, чтобы получить общий знаменатель? На $2^2\cdot 11$. Следовательно, число $2^2\cdot 11$ есть дополнительный множитель для числителя второй дроби.
Отсюда вычисления: $\frac{5}{2^3\cdot 3\cdot 11}+\frac{7}{2\cdot 3^2\cdot 5^2}=\frac{5\cdot 3\cdot 5^2+7\cdot 2^2\cdot 11}{2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11^1}$ и т.д.

b) Общим знаменателем для дробей $\frac{5}{x^3yz}$ и $\frac{7}{xy^2t^2}$ выбираем произведение наибольших степеней множителей из знаменателей: $x^3\cdot y^2\cdot t^2\cdot z^1$.
На что нужно домножить знаменатель первой дроби, чтобы получить общий знаменатель? На yt^2. Следовательно, произведение yt^2 есть дополнительный множитель для числителя первой дроби.

На что нужно домножить знаменатель второй дроби, чтобы получить общий знаменатель? На x^2z. Следовательно, произведение x^2z есть дополнительный множитель для числителя второй дроби.

Отсюда преобразования: $\dfrac{5}{x^3yz}+\dfrac{7}{xy^2t}=\dfrac{5yt^2+7x^2z}{x^3y^2t^2z^1}$.

Сформулируем алгоритм сложения алгебраических дробей.

Шаг 1. «Сокращаем». Раскладываем, если это возможно, на множители знаменатели каждой из дробей. Сокращаем, если это возможно, каждую из дробей.

Шаг 2. «Находим общий знаменатель». Находим НОК числовых множителей в знаменателях. Находим произведение наибольших степеней буквенных множителей, содержащихся во всех знаменателях. Умножая НОК на найденное произведение, получаем общий знаменатель.

Шаг 3. «Находим дополнительные множители». Задаем себе вопрос: на что нужно умножить знаменатель первой дроби, чтобы получился общий знаменатель? Ответ на этот вопрос есть дополнительный множитель для числителя первой дроби.
Аналогично для второй дроби: на что нужно умножить знаменатель второй дроби, чтобы получился общий знаменатель? Ответ на этот вопрос есть дополнительный множитель для числителя второй дроби.

Шаг 4. «Завершаем преобразования». Находим сумму произведений числителей на дополнительные множители и результат делим на общий множитель. Далее пытаемся упростить полученную дробь.

Пример 2. Сложите дроби:

a) $\dfrac{m}{12m^3a}-\dfrac{6}{27a^2m}$;

b) $\dfrac{(x-y)^2}{4(x^2-y^2)}-\dfrac{x^6}{8(x^2y+x^3)^2}$.

Решение.

a) $\dfrac{m}{12m^3a}-\dfrac{6}{27a^2m}=\dfrac{1}{12m^2a}-\dfrac{2}{9a^2m}=\dfrac{1\cdot 3a-2\cdot 4m}{36m^2a^2}=\dfrac{3a-8m}{36m^2a^2}$;

b) $\dfrac{(x-y)^2}{4(x^2-y^2)}-\dfrac{x^6}{8(x^2y+x^3)^2}=\dfrac{(x-y)^2}{4(x-y)(x+y)}-\dfrac{x^6}{8(x^2(y+x))^2}=$

$=\dfrac{(x-y)}{4(x+y)}-\dfrac{x^2}{8(x+y)^2}=\dfrac{2(x-y)(x+y)-x^2}{8(x+y)^2}=\dfrac{2x^2-2y^2-x^2}{8(x+y)^2}=\dfrac{x^2-2y^2}{8(x+y)^2}$.

Упражнение 1. *Выполните действия:*

a) $\dfrac{20}{24a}-\dfrac{15}{40a}$; b) $\dfrac{12}{18a}+\dfrac{b}{b^2}$; c) $\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}$.

Упражнение 2. *Выполните действия:*

a) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$; b) $\dfrac{(z-2)^2}{(z-2)^3}-\dfrac{z-2}{z^2+2z+4}$; c) $\dfrac{p-1}{3p-2p^2}+\dfrac{p}{4p^2-9}+\dfrac{1}{3+2p}$.

Решение упражнения 1.

a) $\dfrac{20}{24a}-\dfrac{15}{40a}=\dfrac{5}{6a}-\dfrac{3}{8a}=\dfrac{5\cdot 4-3\cdot 3}{24a}=\dfrac{11}{24a}$;

b) $\dfrac{12}{18a}+\dfrac{b}{b^2}=\dfrac{2}{3a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2b+3a}{3ab}$;

c) $\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1\cdot(x-y)-1\cdot(x+y)}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{x-y-x-y}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{-2y}{x^2-y^2}=\dfrac{2y}{y^2-x^2}$.

Решение упражнения 2.

a) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1\cdot(x+1)-1\cdot x}{x(x+1)}=\dfrac{x+1-x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}$;

b) $\dfrac{(z-2)^2}{(z-2)^3}-\dfrac{z-2}{z^2+2z+4}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{z-2}{z^2+2z+4}=\dfrac{1\cdot(z^2+2z+4)-(z-2)^2}{(z-2)(z^2+2z+4)}=\dfrac{6z}{z^3-8}$;

c) $\dfrac{p-1}{3p-2p^2}+\dfrac{p}{4p^2-9}+\dfrac{1}{3+2p}=\dfrac{p-1}{p(3-2p)}+\dfrac{p}{(2p-3)(2p+3)}+\dfrac{1}{3+2p}=$

$=\dfrac{p-1}{p(3-2p)}-\dfrac{p}{(3-2p)(2p+3)}+\dfrac{1}{3+2p}=\dfrac{(p-1)(3+2p)-p^2+p(3-2p)}{p(3-2p)(3+2p)}=$

$=\dfrac{3p+2p^2-3-2p-p^2+3p-2p^2}{p(3-2p)(3+2p)}=\dfrac{p^2-4p+3}{p(2p-3)(3+2p)}$.

Задачи

Часть 1

1. Сложите дроби:

а) $\dfrac{3}{7x}+\dfrac{5}{14x}$;

б) $\dfrac{11}{12x}+\dfrac{3}{8x}$;

в) $\dfrac{13}{17x}+\dfrac{9}{34x}$;

г) $\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{2(x-1)}$;

д) $\dfrac{2}{3a}+\dfrac{4}{5b}$;

е) $\dfrac{5}{9ab}+\dfrac{1}{6b^2}$;

ж) $\dfrac{3}{25a^2b^2}+\dfrac{7}{15ab}$;

з) $\dfrac{11}{36a^2b}+\dfrac{19}{24ab^2}$;

2.Сложите дроби:

а) $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}$;

б) $\dfrac{y}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{x+y}$;

в) $\dfrac{x}{y^2-x^2}+\dfrac{1}{x-y}$;

г) $\dfrac{1}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}$;

д) $\dfrac{1}{y(x-y)}-\dfrac{1}{x(x-y)}$;

е) $\dfrac{2}{(x^2+y^2)(x+y)^2}+\dfrac{1}{xy(x+y)^2}$;

ж) $\dfrac{4xy}{(x^2-y^2)^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}$;

з) $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}-\dfrac{3xy}{x^3+y^3}$.

Часть 2

1. Сложите дроби:

а) $\dfrac{19}{21x^2}+\dfrac{17}{35x}$;

б) $\dfrac{1}{18x^2}-\dfrac{3+x}{16x}$;

в) $\dfrac{5x+3}{2x+2}+\dfrac{1}{x+1}$;

г) $\dfrac{1}{3x+2}-\dfrac{1}{6x+4}$;

д) $\dfrac{13}{18abc}+\dfrac{5}{9ab}$;

е) $\dfrac{2}{3a^2b}-\dfrac{1}{2b^3}$;

ж) $\dfrac{1}{48a^2b^2}+\dfrac{1}{12ab^3}$;

з) $\dfrac{13}{54a^2b^3}-\dfrac{12}{27a^3b^2}$;

2.Сложите дроби:

а) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}$;

б) $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}$;

д) $\dfrac{x}{(x+y)^2(x-y)}+\dfrac{y}{(x-y)^2(x+y)}$;

е) $\dfrac{x^3}{x^3+y^3}+\dfrac{y^3}{x^3-y^3}$;

в) $\dfrac{1}{2x^2\left(x^2-y^2\right)}+\dfrac{1}{2x^2\left(x^2+y^2\right)}$;   ж) $\dfrac{x^2+y^2}{x^4+x^2y^2+y^4}-\dfrac{1}{x^2+xy+y^2}$;

г) $\dfrac{x-y}{x^3+xy^2+x^2y+y^3}+\dfrac{1}{(x+y)^2}$;   з) $\dfrac{1}{x^2-xy+y^2}+\dfrac{1}{x^2+xy+y^2}-\dfrac{2xy}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

Ответы:

Часть 1

1.а) $\dfrac{11}{14x}$; б) $\dfrac{31}{24x}$; в) $\dfrac{35}{34x}$; г) $\dfrac{x}{x^2-1}$; д) $\dfrac{22}{15ab}$; е) $\dfrac{3a+10b}{8ab^2}$; ж) $\dfrac{9+35ab}{75a^2b^2}$; з) $\dfrac{57a+22b}{72a^2b^2}$.

2.а) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}$; б) $\dfrac{x}{x^2-y^2}$; в) $\dfrac{y}{x^2-y^2}$; г) $\dfrac{2x}{(x+y)^2(x-y)}$; д) $\dfrac{1}{xy}$; е) $\dfrac{1}{xy\left(x^2+y^2\right)}$; ж) $\dfrac{1}{(x-y)^2}$; з) $\dfrac{1}{x+y}$.

Часть 2

1.а) $\dfrac{51x+95}{105x^2}$; б) $\dfrac{8-27x-9x^2}{144x^2}$; в) $\dfrac{5}{2}$; г) $\dfrac{1}{6x+4}$; д) $\dfrac{10c+13}{18abc}$; е) $\dfrac{4b^2-3a^2}{4a^2b^3}$; ж) $\dfrac{b+4a}{4a^2b^3}$; з) $\dfrac{13a-24b}{54a^3b^3}$.

2.а) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; б) $\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}$; в) $\dfrac{1}{x^4-y^4}$; г) $\dfrac{2x^2}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}$; д) $\dfrac{x^2+y^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}$; е) $\dfrac{x^6+y^6}{x^6-y^6}$; ж) $\dfrac{xy}{x^4+x^2y^2+y^4}$; з) $\dfrac{2}{x^2+xy+y^2}$.

§ 6 Упрощение сложных алгебраических выражений

Данный параграф не содержит каких-либо новых теоретических сведений. Во всех заданиях нужно будет постараться упростить то или иное выражение. Отличие состоит в том, что выражения, которые мы будем упрощать, содержат большее, чем обычно, число арифметических операций. Приобрести навыки работы с такими выражениями необходимо потому, что в дальнейшем эти навыки пригодятся вам для решения сложных алгебраических, геометрических или физических задач. Обычным приемом работы со сложными проблемами (не только в математике, но и в жизни) является их разбиение на более мелкие проблемы. С мелкими проблемами можно «разобраться» по очереди. Так и при упрощении сложных алгебраических выражений: определяем порядок действий и выполняем каждое по-отдельности.

Пример. Упростить выражение $\left(1+\dfrac{a^2+4b^2}{4b^2-a^2}\right):\left(\dfrac{2}{2b-a}+\dfrac{6a}{a^2-4b^2}-\dfrac{4}{2b+a}\right)$.

Решение. Сначала выполним действия в каждой из скобок по-отдельности, а затем выполним деление.

1) $$1+\frac{a^2+4b^2}{4b^2-a^2}=\frac{1}{1}+\frac{a^2+4b^2}{4b^2-a^2}=\frac{4b^2-a^2+a^2+4b^2}{4b^2-a^2}=\frac{8b^2}{4b^2-a^2};$$

2) $$\frac{2}{2b-a}+\frac{6a}{a^2-4b^2}-\frac{4}{2b+a}=\frac{2}{2b-a}-\frac{6a}{4b^2-a^2}-\frac{4}{2b+a}=$$
$$=\frac{2}{2b-a}-\frac{6a}{(2b-a)(2b+a)}-\frac{4}{2b+a}=\frac{2(2b+a)-6a-4(2b-a)}{(2b-a)(2b+a)}=$$
$$=\frac{4b+2a-6a-8b+4a}{(2b-a)(2b+a)}=-\frac{4b}{(2b-a)(2b+a)}.$$

3) $$\frac{8b^2}{4b^2-a^2}:\frac{-4b}{(2b-a)(2b+a)}=\frac{8b^2}{(2b-a)(2b+a)}\cdot\frac{(2b-a)(2b+a)}{-4b}=-2b.$$

Упражнение 1. *Упростить выражение* $\left(\dfrac{z}{8z+1}+1\right)\cdot\dfrac{1-64z^2}{81z^2-1}-\dfrac{8z}{1-9z}$.

Упражнение 2. *Упростить выражение* $\left(\frac{p-2q}{p^3+q^3}+\frac{q}{p^3-p^2q+pq^2}\right):\frac{p^2+q^2}{p^3-pq^2}+\frac{2q^2}{p^3+p^2q+q^2p+q^3}$.

Упражнение 3. *Упростить выражение* $\frac{1}{x^2-xz-xy+yz}+\frac{2}{y^2-xy-yz+xz}+\frac{1}{z^2-xz-yz+xy}$.

Решение упражнения 1.

1) $\frac{z}{8z+1}+1=\frac{z+8z+1}{8z+1}=\frac{9z+1}{8z+1}$;

2) $\frac{9z+1}{8z+1}\cdot\frac{1-64z^2}{81z^2-1}=\frac{9z+1}{8z+1}\cdot\frac{(1-8z)(1+8z)}{(9z-1)(9z+1)}=\frac{1-8z}{9z-1}$;

3) $\frac{1-8z}{9z-1}-\frac{8z}{1-9z}=\frac{1-8z}{9z-1}+\frac{8z}{9z-1}=\frac{1}{9z}$.

Решение упражнения 2.

1) $$\frac{p-2q}{p^3+q^3}+\frac{q}{p^3-p^2q+pq^2}=\frac{p-2q}{(p+q)\left(p^2-pq+q^2\right)}+\frac{q}{p\left(p^2-pq+q^2\right)}=$$
$$=\frac{p(p-2q)+q(p+q)}{p(p+q)\left(p^2-pq+q^2\right)}=\frac{p^2-2pq+qp+p^2}{p(p+q)\left(p^2-pq+q^2\right)}=$$
$$=\frac{p^2-pq+p^2}{p(p+q)\left(p^2-pq+q^2\right)}=\frac{1}{p(p+q)}.$$

2) $$\frac{1}{p(p+q)}:\frac{p^2+q^2}{p^3-pq^2}=\frac{1}{p(p+q)}\cdot\frac{p^3-pq^2}{p^2+q^2}=\frac{1}{p(p+q)}\cdot\frac{p\left(p^2-q^2\right)}{p^2+q^2}=$$
$$=\frac{1}{p+q}\cdot\frac{(p-q)(p+q)}{p^2+q^2}=\frac{p-q}{p^2+q^2};$$

3) $$\frac{p-q}{p^2+q^2}+\frac{2q^2}{p^3+p^2q+q^2p+q^3}=\frac{p-q}{p^2+q^2}+\frac{2q^2}{p^2(p+q)+q^2(p+q)}=$$
$$=\frac{p-q}{p^2+q^2}+\frac{2q^2}{(p+q)\left(p^2+q^2\right)}=\frac{(p+q)(p-q)+2q^2}{(p+q)\left(p^2+q^2\right)}=$$
$$=\frac{p^2-q^2+2q^2}{(p+q)\left(p^2+q^2\right)}=\frac{1}{p+q}.$$

Решение упражнения 3. Попытаемся разложить на множители знаменатель первой дроби: $x^2-xz-xy+yz=x(x-z)-y(x-z)=(x-z)(x-y)$. Аналогично раскладываются на множители остальные знаменатели: $y^2-xy-yz+xz=(y-z)(y-x)$, $z^2-xz-yz+xy=(z-y)(z-x)$. Выражение, которое необходимо упростить, принимает следующий вид:

$$\frac{1}{(x-z)(x-y)}+\frac{2}{(y-z)(y-x)}+\frac{1}{(z-y)(z-x)}.$$

Заметим, что $\frac{2}{(y-z)(y-x)}=-\frac{2}{(y-z)(x-y)}$ и $\frac{1}{(z-y)(z-x)}=\frac{1}{(y-z)(x-z)}$. Следовательно,

$$\frac{1}{(x-z)(x-y)}+\frac{2}{(y-z)(y-x)}+\frac{1}{(z-y)(z-x)}=$$
$$=\frac{1}{(x-z)(x-y)}-\frac{2}{(y-z)(x-y)}+\frac{1}{(y-z)(x-z)}=$$
$$=\frac{1\cdot(y-z)-2\cdot(x-z)+1\cdot(x-y)}{(x-z)(x-y)(y-z)}=\frac{y-z-2x+2z+x-y}{(x-z)(x-y)(y-z)}=$$

$$=\frac{z-x}{(x-z)(x-y)(y-z)}=\frac{1}{(y-x)(y-z)}.$$

Задачи

Часть 1

1. $\frac{x+y}{(y-z)(z-x)}+\frac{y+z}{(z-x)(x-y)}+\frac{z+x}{(x-y)(y-z)}$

Часть 1

1. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{x}{8x+1}+1\right)\cdot\frac{1-64x^2}{81x^2-1}-\frac{8x}{1-9x}$;

б) $\left(\frac{5}{3-x}-4x\right):\frac{4x^2-12x+5}{x^2-6x+9}$;

в) $\left(4x+1-\frac{1}{1-4x}\right):\left(4x-\frac{16x^2}{4x-1}\right)$;

г) $\frac{a+18}{a^2-36}-\frac{1}{a^2-36}\cdot\frac{(a+6)^2}{a}$;

д) $\left(\frac{a+b}{a^2+ab}-\frac{1}{a^2-b^2}:\frac{a+b}{(b-a)^2}\right)\cdot\frac{(a+b)^2}{2b^2}$;

е) $\left(\frac{9a+c}{a^2-9ac}+\frac{9a-c}{a^2+9ac}\right)\cdot\frac{a^2-81c^2}{a^2+c^2}$;

ж) $\left(\frac{a^3-27b^3}{a-3b}+3ab\right)\cdot\left(\frac{a-3b}{a^2-9b^2}\right)^2$;

з) $\left(\frac{2xy}{y^2-16x^2}-\frac{x}{y-4x}\right):\frac{x^2}{y^2+4xy}$;

и) $\left(\frac{a+3b}{a-3b}+\frac{a-3b}{a+3b}-\frac{a^2+9b^2}{a^2-9b^2}\right)\cdot\frac{5a^2-45b^2}{a^2+9b^2}$

к) $\frac{1}{x+y}\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)-\frac{x-y}{xy}$;

л) $xy+\frac{xy}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}-x-y\right)$;

м) $\left(\frac{8a-8b}{a^3+b^3}-\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}\right):\frac{8-a-b}{a^3+b^3}$.

2. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2ax+b}{2a+b}-\frac{bx-2a}{b-2a}\right)\cdot\left(\frac{4a^2-b^2}{x^2-1}:\frac{4a^2+b^2}{x+1}\right)$;

б) $\left(\frac{x+y}{y}-\frac{x}{x+y}\right):\left(\frac{x+y}{x}-\frac{y}{x+y}\right)$;

в) $\frac{4n^2-81m^2}{154n}\cdot\left(\frac{2m-9n}{9m^2-2mn}-\frac{2m+9n}{9m^2+2mn}\right)$;

г) $\left(\left(\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right):\frac{(x+y)^2-4xy}{1-\frac{y}{x}}$;

д) $\frac{b+3}{b-12}:\left(\frac{b^2+81}{b^2-144}+\frac{6}{b+12}\right)$;

е) $\left(a+\frac{b^2}{a+b}\right)\cdot\left(1+\frac{b^3}{a^3-b^3}\right)\cdot(a-b)$;

ж) $\frac{a-8}{a+8}-\frac{a^2+192}{a^2-64}$;

з) $\frac{a^2-24}{a^2-9}-\frac{a-8}{a-3}$;

и) $\left(2+3x+\frac{1}{2-3x}\right):\left(1+\frac{1}{4-9x^2}\right)$;

к) $\left(9x^2+1+\frac{1}{9x^2-1}\right):\left(9x^2+\frac{81x^4}{1-9x^2}\right)$;

л) $\left(\frac{b}{9a-a^3}-\frac{1}{a^2+3a}+\frac{3}{a^2b-9b}\right):\frac{b^2-6b+9}{a^3b-9ab}$;

м) $\left(1-\frac{1}{1-x}\right)^2:\left(1-\frac{1-2x^2}{1-x}+x\right)$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(1+\frac{x^{-n}+y^{-n}}{x^{-n}-y^{-n}}\right)^{-2}$;

б) $\frac{7-2a}{ab-a^2}-\frac{7-2(a+b)}{b^2-a^2}$;

в) $\left(\frac{a-5}{a^2-5a+25}-\frac{ab-5b}{a^3+125}\right):\frac{a-b+5}{a^3b+125b}$;

г) $\left(\frac{x^2}{x-2}-8\right):\frac{4-x}{4-x^2}+4-x$;

д) $\left(\frac{3}{a}-\frac{6}{a+3}\right)\cdot\left(3+\frac{a^2+9}{a-3}\right)$;

е) $\frac{a^2-4b^2}{a-2b}-\frac{a^3-8b^3}{a^2-4b^2}$;

ж) $\frac{x^2+x-xy-y}{x^2+x+xy+y}:\frac{x^2-x-xy+y}{x^2-x+xy-y}$;

з) $\frac{x^6+x^{13}}{x^{-6}+x^{-13}}$;

и) $\frac{(2x+2y)^9-(2x+2y)^8}{4(-x-y)^9+2(-x-y)^8}$;

к) $(x^{-9}-7x^{-6}+16x^{-3}):x^{-3}-(x^{-3}-4)^2$;

л) $\frac{9a+35}{9a^2-49}+\frac{2}{3a+7}+\frac{4}{7-3a}$;

м) $\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{a-b}\right)$.

4. Упростите рациональные выражения:

а) $\left(x-\frac{x+y}{x-y}+y\right):\left(1-\frac{2y+1}{x^2-y^2}\right)$;

б) $\left(\frac{5a+b}{a^2-25b^2}-5a-b\right)\cdot\frac{3a+15b}{5a+b}-\frac{3}{a-5b}$;

в) $\frac{a-5}{4+3a}:\left(\frac{a^2-4a+17}{16-9a^2}+\frac{2}{4+3a}\right)$;

г) $\left(\frac{a+8b}{4b}-\frac{12b}{8b-a}\right)\cdot\left(1-\frac{a^2-4ab+16b^2}{a^2-16b^2}\right)$;

д) $\left(\frac{11y-3y^2}{(y-3)^2}+y\right):\left(y-\frac{7y-27}{(y-3)^2}-3\right)$;

е) $\left(3m-\frac{5}{m+n}\right)\cdot\left(3m+\frac{5}{m+n}\right)+\frac{25}{(m+n)^2}$;

ж) $\left(1+\frac{2y^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\right)\cdot\left(\frac{8x}{3x-y}-\frac{3x+y}{x}\right)$;

з) $\frac{b}{x-b}-\frac{ab}{x-a}\cdot\left(\frac{x+a}{ax-ab}+\frac{x+b}{b^2-bx}+\frac{x}{ab}\right)$;

и) $\frac{5}{a+b}-\frac{5a-5b}{2a-5b}\cdot\left(\frac{2a-5b}{a^2-b^2}-2a+5b\right)$;

к) $\left(\frac{a-x}{a^2+ax+x^2}-\frac{1}{a-x}\right)\cdot\left(\frac{2x+a}{a}+\frac{2a+x}{x}\right)$;

л) $\left(1-\frac{7a+b}{a-b}\right)\cdot\left(1-\frac{4a}{a+3b}\right):\left(1+\frac{8a^2+8b^2}{a^2-9b^2}\right)$;

м) $\left(\frac{a^2-ab}{b^2+ab}-ab+a^2\right)\cdot\frac{b}{b-a}+\frac{a}{a+b}$.

Часть 2

5. Упростите рациональные выражения:

а) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b-b^3}\right)^2$;

б) $\frac{a+12}{a-13}:\left(\frac{a^2+23a+157}{a^2-169}+\frac{1}{a+13}\right)$;

в) $\left(\frac{9(a+2)}{a^3+8}-\frac{a+4}{a^2-2a+4}\right)\cdot\frac{6a-3a^2-12}{5-a}$;

г) $\frac{1}{a^2-6ax}+\frac{a+12x}{a(6ax+36x^2)}+\frac{2}{36x^2-a^2}$;

д) $\left(\frac{x+4}{2x}-\frac{5}{x-4}-\frac{x-44}{2x^2-8x}\right):\frac{x+9}{8x}\cdot\frac{1}{x-7}$;

е) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\cdot\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)$;

ж) $\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a-n}-\frac{a}{a^2-n^2}\right)$;

з)

$\frac{14n+1}{(n^2-4)(n-2)}+\frac{2}{n+2}+\frac{n+3}{n^2-4}-\frac{3n+1}{n^2-4n+4}$;

и) $\frac{3a+2}{8a-7}\cdot\left(\frac{3a^2+2a}{9a^2+12a+4}-\frac{2a+3}{3a+2}\right)+\frac{9a-4}{8a-7}-\frac{a-5}{a}$;

к) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)$;

л) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a-3}{2a+2}\right):\frac{3a+2}{3}$;

м) $\left(\frac{1}{x-y}-\frac{y^2}{xy^2-x^3}\right):\left(\frac{x+y}{x^2-xy}-\frac{x}{y^2-xy}\right)-\frac{x}{x-y}$.

6. Упростите рациональные выражения:

а) $\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}+\frac{6}{1-a}$; б) $\frac{2a}{2a-b}+\frac{16a^2b-2ab^2}{b^3-8a^3}+\frac{b^2+6ab}{4a^2+2ab+b^2}$;

в) $\frac{5x-2}{4-3x}-\frac{4+7x}{4+3x}+\frac{24-2x+9x^2}{9x^2-16}$; г) $\frac{2}{x-3}+\frac{3}{2x-6}-\frac{2x-6}{2x^2-12x+18}$;

д) $\frac{8}{m}-\frac{5}{2m-3n}-\frac{10m+15n}{9n^2-4m^2}$; е) $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right):\frac{(a+b)^2}{ab}$;

ж) $\frac{2-a}{a^2+1-2a}-\frac{1-a(1-a)}{1-a}\cdot\frac{a}{a^3+1}$; з) $\left(\frac{a+3b}{(a-b)^2}+\frac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$;

и) $\frac{(x^2-2xy+y^2)^3}{(x^2+xy)^3}\cdot\frac{(x^2(x+y))^3}{((y-x)^3)^2}$; к) $\frac{a^2-4}{a^2+2a}\cdot\left(a+\frac{2a}{a-2}\right)-\frac{a^3-8}{a+2}\cdot\left(2+\frac{a^2}{a+2}\right)^{-1}$;

л) $\left(\frac{6}{x^2+5x+4}-\frac{2}{(x+1)(x+2)}+\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right)^2\cdot\frac{x^2+4x+4}{2}$;

м) $\left(\frac{a}{a^2-1}-\frac{4}{a^2+a}\right)\cdot\frac{a^2-a}{2-a}+\frac{2a^2-3a-1}{(a+1)^2}$.

7. Упростите рационалные выражения:

а) $\left(\left(\frac{x}{x+y}\right)^{-2}+\frac{(x-y)^2+4xy}{y^2+xy}\right)\cdot\frac{x^6}{x^3y^3-y^6}$;

б) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3c}{ab}\right)\cdot(a+b-3c):\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{9c^2}{a^2b^2}\right)$;

в) $\left(\frac{5}{7a}-\frac{5}{a-b}\left(\frac{a-b}{7a}-a+b\right)\right):\frac{a+b}{2a}$; г) $\left(\frac{a^2}{3b^2}-6+\frac{27b^2}{a^2}\right):\left(\frac{a}{3b}-\frac{3b}{a}\right)$;

д) $\frac{49m^2-14m+1}{21m^2+33m}\cdot\left(\frac{6m}{1-7m}+\frac{5m}{7m+1}\right)+\frac{1}{3}$; е) $\frac{26xy}{x^2-y^2}:\left(\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{1}{x^2-2xy+y^2}\right)$;

ж) $\left(\frac{x^2+3}{3x-2}+\frac{x^2+3}{x+2}\right):\frac{x^3+3x}{2-3x}+\frac{x^2-8x-16}{x+2}$; з) $\left(\frac{x-8}{5x-6}-\frac{x-8}{x-6}\right)\cdot\frac{5x-6}{16x-2x^2}+\frac{x^2-34}{6-x}$;

и) $\left(\frac{x+6}{x^2-64}+\frac{x+10}{x^2-16x+64}\right):\left(\frac{x+4}{x-8}\right)^2+\frac{6+x}{8+x}$;

к) $\frac{x}{mx-3m^2}-\frac{3}{x^2+x-3mx-3m}\cdot\left(1+\frac{8x+x^2}{8+x}\right)$;

л) $\left(\frac{1}{3+9x}-\frac{1-x}{27x^3+1}:\frac{1-3x}{9x^2-3x+1}\right)\cdot\frac{9x+3}{3x-1}$; м) $\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$.

8. Упростите рациональные выражения:

а) $\frac{5a+42}{a+8}-\left(\frac{a-8}{a+4}\right)^2\cdot\left(\frac{a+10}{64-16a+a^2}-\frac{a+6}{64-a^2}\right)$; б) $\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}-\frac{1-a^2}{ab}$;

в) $\frac{5(x+5)}{x^2+5x+25}+\frac{x^3-5x^2}{(x+5)^2}\cdot\left(\frac{5x}{x^3-125}+\frac{1}{x-5}\right)$;

г) $\left(\frac{2+x}{(2-x)^2}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{2-x}{(2+x)^2}\right):\frac{16x^2}{16-x^4}+\frac{x^2}{x^2-4}$;

д) $\left(\frac{x}{a+x}+a\right)\cdot\left(\frac{a}{a-x}-x\right)-\left(\frac{a}{a+x}+x\right)\cdot\left(\frac{x}{a-x}-a\right)$; е) $\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right):\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\right)$;

ж) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{2x^3}{x^4-1}$; з) $\dfrac{x+x^2+\ldots+x^{2010}+x^{2011}}{x^{-1}+x^{-2}+\ldots+x^{-2010}+x^{-2011}}$.

Ответы:

Часть 1

1.а) $\dfrac{1}{9x-1}$; б) $3-x$; в) $-4x$; г) $\dfrac{6}{a(a+6)}$; д) $\dfrac{3a+b}{2ab}$; е) $\dfrac{18}{a}$; ж) 1; з) $\dfrac{y}{x}$; и) 5; к) 0; л) $\dfrac{xy}{x-y}$; м) $a-b$.

2. а) 1; б) $\dfrac{y}{x}$; в) 1; г) $\dfrac{1}{xy}$; д) $\dfrac{b+12}{b+3}$; е) $\dfrac{a^3}{a+b}$; ж) $\dfrac{16}{8-a}$; з) $\dfrac{5a}{a^2-9}$; и) $2+3x$; к) $-9x^2$; л) $\dfrac{a+b}{3-b}$; м) $\dfrac{1}{1-x}$.

3.а) $\dfrac{1}{4}\left(1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^n\right)^2$; б) $\dfrac{7b}{a\left(b^2-a^2\right)}$; в) $b(a-5)$; г) $(x-4)(x+1)$; д) -3; е) $\dfrac{2ab}{a+2b}$; ж) 1; з) x^{19}; и) -128; к) x^{-3}; л) $\dfrac{1}{3a+7}$; м) 1. 4. а) $\dfrac{(x+y)^2}{x+y+1}$; б) $-3(a+5b)$; в) $\dfrac{4-3a}{a-5}$; г) 1; д) 1; е) $9m^2$; ж) -1; з) -1; и) $5(a-b)$; к) $\dfrac{6}{x-a}$; л) $\dfrac{6(a-3b)}{3a-b}$; м) $-ab$.

Часть 2

5. а) a^2-b^2; б) $\dfrac{a+13}{a+12}$; в) -3; г) $\dfrac{1}{6ax}$; д) $\dfrac{4}{x+9}$; е) 1; ж) $\dfrac{a-n}{a+n}$; з) $\dfrac{1}{(n+2)(n-2)^2}$; и) $\dfrac{5}{a}$; к) $\dfrac{1}{a+b}$; л) $\dfrac{3}{a^2-1}$; м) $\dfrac{y^2+x^2}{y^2-x^2}$. 6.а) $\dfrac{12a}{1-a^3}$; б) 1; в) -3; г) $\dfrac{5}{2(x-3)}$; д) $\dfrac{8}{m}$; е) $\dfrac{1}{ab}$; ж) $\dfrac{2}{(a-1)^2(a+1)}$; з) $\dfrac{2}{a+b}$; и) x^3; к) 2; л) $0{,}5$; м) $\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2$. 7. а) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^4\cdot\dfrac{x+y}{x-y}$; б) ab; в) $\dfrac{10a}{a+b}$; г) $\dfrac{a^2-9b^2}{ab}$; д) $\dfrac{2}{3(7m+1)}$; е) $13y(x-y)$; ж) $x-10$; з) $-(x+6)$; и) 1; к) $\dfrac{1}{m}$; л) $\dfrac{2}{(3x-1)^2}$; м) $\dfrac{a(b-a)}{b+a}$.

8. а) 5; б) $\dfrac{a}{b}$; в) 1; г) $\dfrac{4}{4-x^2}$; д) $2a$; е) $\dfrac{a+1}{a-1}$; ж) $\dfrac{x}{x^2-1}$; з) x^{2012}.

Глава 5

§1 Приближенное число и приближенное значение. Абсолютная погрешность.

Упражнение 1. *Используя линейку, измерьте длину парты или стола, за которым сидите. Как вы думаете, насколько точный результат получился?*

Упражнение 2. *Постарайтесь придумать способ найти среднюю длину своего обычного шага. Как можно улучшить точность измерения? Как можно потом использовать полученный результат?*

Упражнение 3. *«Сами находим число π». Числом π называется число, выражающее отношение длины окружности к ее диаметру. Представьте, что вы забыли значение числа π. (Если действительно забыли – еще лучше!) Используя доступные вам на данный момент предметы (ненужный CD или DVD диск или что-то похожее, линейку, ручку, маркеры, калькулятор, бумагу, нитки и т.д. и т.п.), постарайтесь как можно точнее определить, во сколько раз длина окружности больше ее диаметра. Одинаковое ли значение получается для различных окружностей?*

Упражнение 4. *Подумайте над смыслом словосочетаний:*

a) « точное значение величины»;

b) «приближенное значение величины».

Предположим, из металлических листов необходимо изготовить куб, объем которого равен 5 кубических метров. Если считать толщину листов несущественной, то каковы должны быть размеры такого куба? Объем V любого куба связан с длиной a его ребра соотношением $V = a^3$, рисунок 1. Если $V = 5$, то длина ребра куба должна быть такой, что $5 = a^3$. В параграфе 6 главы 1 мы уже говорили о том, что такое число a существует, но его невозможно записать в виде **конечной** десятичной дроби. Число a записывается как $\sqrt[3]{5}$.

Если мы действительно, на практике, намерены изготовить такой куб, последовательно возникает несколько проблем. Проблемы будем решать по мере их возникновения.

Проблема 1. *Ни на одном инструменте для измерения длин нет такого деления: $\sqrt[3]{5}$. Как число $\sqrt[3]{5}$ выражается в виде десятичной дроби?*

Решение. Калькулятор показывает, что $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}70997594667666969\ldots$

Проблема 2. *Ясно, что куб мы будем собирать из квадратных листов. Если в руках – рулетка, линейка или строительный метр, то какую длину реально будем отмерять при вырезании квадратных листов?*

Решение. На большинстве инструментов для измерения длины наименьшее расстояние между соседними отметками равно 1 мм. Так как в одном метре содержится 1000 мм, то $1{,}70997594667666969\ м \approx 1710\ мм = 171\ см$. Решаем отмерять длину стороны квадрата $1710\ мм = 171\ см$. Точнее измерить все равно не получится из-за того, что, как уже упоминалось, большинство инструментов имеют миллиметровые деления.

Проблема 3. *Если отмерять по $1710\ мм = 171\ см$, то насколько объем получившегося куба может отличаться от требуемых 5 кубических метров?*

Решение. Достаточно возвести $1710\ мм = 171\ см = 1{,}71\ м$ в куб: $1{,}71^3 = 5{,}000211\ м^3$. Нетрудно видеть, что разница приблизительно равна 0,2 литра (примерно 1 стакан). Эта величина во много раз меньше, чем требуемые 5 кубометров. Будем считать, что такая разниц допустима для наших нужд.

В приведенном примере $\sqrt[3]{5}\ м$ является **точным значением** длины ребра куба, объем которого равен 5 $м^3$. Число $1{,}71\ м$ является **приближенным значением** длины ребра куба, объем которого равен 5 $м^3$. Модуль разности $\left|\sqrt[3]{5} - 1{,}71\right|$ называется абсолютной погрешностью приближенного значения 1,71 относительно точного значения $\sqrt[3]{5}$.

Точные значения обычно возникают во время теоретических расчетов. На практике при измерении расстояний, углов, промежутков времени, если только речь не идет о количествах предметов, которые выражаются натуральными числами, мы ***всегда***

***пользуемся приближенными значениями.** Так происходит в основном по двум причинам. Во-первых, в большинстве случаев для практических нужд достаточно применять приближенные значения. Во-вторых, абсолютно точно отмерить какое-либо расстояние очень трудно, если принять во внимание атомное строение вещества и размеры атомов. В-третьих, если бы кто-то и захотел точно измерить какую-либо физическую величину, то просто не смог бы. Это следует из **принципа неопределенности,** открытого в 1927 году Вернером Гейзенбергом. Согласно принципу неопределенности, **невозможно точно определить положение элементарной частицы в пространстве и времени.** Мы можем говорить только о **вероятности,** с которой данная частица будет находиться в некоторый момент времени в некоторой области пространства.*

Определение. Абсолютной погрешностью некоторой величины называется модуль разности между приближенным значением величины и ее точным значением.

Пример 1. Число $56,3582$ заменили его приближенным значением $56,36$. Найдите абсолютную погрешность этого приближенного значения.

Решение. Абсолютная погрешность приближенного значения равна модулю разности $|56,36-56,3582|=0,0018$.

Пример 2. Первая прямая проходит через точки с координатами $(-4;0)$ и $(0;3)$. Вторая прямая проходит через точки с координатами $(6;0)$ и $(0;5)$.

a) Изобразите на координатной плоскости эти прямые и приближенно определите координаты точки пересечения прямых.
b) Найдите точные координаты пересечения прямых.
c) Найдите абсолютные погрешности каждой из координат пересечения, найденных по графикам.

Решение.

a)

Данное изображение позволяет определить координаты точки пересечения как $(1,3;4)$, т.е. $x\approx 1,3$ и $y\approx 4$.

b) Уравнение прямой, проходящей через точки с координатами $(-4;0)$ и $(0;3)$, ищем в виде $y=kx+m$. Так как точки $(-4;0)$ и $(0;3)$ лежат на этой прямой, то их координаты при подстановке в уравнение прямой дают верные равенства, которые можно рассматривать как систему уравнений относительно переменных k и m:

$$\begin{cases} 0=k\cdot(-4)+m, \\ 3=k\cdot(0)+m. \end{cases}$$

Отсюда $m=3$ и $k=\frac{3}{4}$, т.е. уравнение первой прямой имеет вид $y=\frac{3}{4}x+3$.

Аналогично можно получить уравнение второй прямой: $y=-\frac{5}{6}x+5$.

Так как точка пересечения принадлежит обеим прямым, то ее координаты удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Следовательно, координаты точки пересечения можно найти, как решение системы уравнений данных прямых:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x+3; \\ y=-\frac{5}{6}x+5. \end{cases}$$

Решая систему, получаем координаты пересечения $x=1\frac{5}{19}$ и $y=3\frac{18}{19}$.

c) Абсолютные погрешности находим по определению. Абсолютная погрешность приближенного значения абсциссы равна $\delta_x=\left|1\frac{5}{19}-1,3\right|=\frac{7}{190}$. Абсолютная погрешность приближенного значения ординаты равна $\delta_y=\left|3\frac{18}{19}-4\right|=\frac{1}{19}$.

Обсудим результаты пункта c). Абсолютные погрешности, выраженные в виде обыкновенных дробей, неудобны для восприятия и применения. Заметим, что

$\frac{7}{190} \approx 0,036842... < 0,1$ и $\frac{1}{19} \approx 0,0526315... < 0,1$. В таких случаях говорят, что **приближенные значения определены с точностью до** $0,1$. Вообще, абсолютные погрешности принято **оценивать сверху** степенями числа 10: $..., 1000$, 100, 10, $1, 0,1$, $0,01$, $0,001...$. Это особенно удобно в случаях, когда точное значение невозможно записать в виде десятичной или обыкновенной дроби. Таким является, например, число π. Для большинства практических целей достаточно считать, что число π равно $3,14$. На самом деле, $\pi \approx 3,14159265$.Заметим, что тогда $\pi - 3,14 \approx 3,14159265 - 3,14 = 0,00159265 < 0,01$, т.е. абсолютная погрешность приближения числа π числом $3,14$ не превосходит $0,01$.

Легко оценивать погрешность приближения, если точное значение, выраженное в виде десятичной дроби, заменяют на приближенное с помощью округления по известным вам правилам. Например, если точное значение $75,28536$ заменять на приближенное значение:

- $75,3$ (округление до десятых), то абсолютная погрешность не превосходит $0,1$;
- $75,29$ (округление до сотых), то абсолютная погрешность не превосходит $0,01$;
- $75,285$ (округление до тысячных), то абсолютная погрешность не превосходит $0,001$;
- $75,2854$ (округление до десятитысячных), то абсолютная погрешность не превосходит $0,0001$.

Замечание. На самом деле, можно доказать, что в каждом из четырех приведенных примеров абсолютная погрешность не превосходит в 2 раза меньших чисел. Например, округление числа $75,28536$ до $75,3$ дает абсолютную погрешность приближения, не превосходящую $0,05$.

Большие по абсолютной величине числа тоже иногда заменяют на приближенные. Например, число 100860 является приближенным значением числа 100859. Если стоимость некоторого товара, например, составляет 99900 тенге, то мы говорим, что товар стоит приблизительно 100 тыс. тенге. Абсолютные погрешности вычисляются и оцениваются аналогично.

Задачи

Часть 1.

1. Округлите дроби $21,84$ и $7,56$ сначала до десятых, затем до единиц и найдите абсолютную погрешность каждого приближения.

2. Вычислите абсолютную погрешность приближенного значения, полученного при округлении дроби: а) $0,385$ до десятых; б) $1,044$ до сотых; в) $25,62$ до единиц; г) $761,3$ до десятков.

3. Запишите числа $\frac{5}{6}$ и $\frac{25}{12}$ в виде десятичных дробей. Округлите дроби до десятых и найдите абсолютные погрешности приближенных значений.

4. Представьте число $\frac{100}{3}$ в виде десятичной дроби и округлите дробь до единиц, десятых и сотых. Найдите абсолютную погрешность каждого приближенного значения.

5. Найдите по графику функции $y = x^2$ приближенные значения y при $x =$ $0,8; 1,3; 2,5$. Вычислите абсолютную погрешность каждого приближенного значения.

6. За одну поездку израсходовали бензина более 3л и менее 4л. Укажите точность приближенного значения израсходованного бензина, если приближенное

значение принять: а)3л; б)4л; среднее арифметическое 3л и 4л.

7. На митинге присутствовало более 20 тыс. и менее 30 тыс. человек. Какое число является более точным приближенным значением числа людей, присутствовавших на митинге? Укажите точность этого приближенного значения.

Часть 2.

8. Округлите дроби $17{,}32$ и $9{,}68$ сначала до десятых, затем до единиц и найдите абсолютную погрешность каждого приближения.

9. Вычислите абсолютную погрешность приближенного значения, полученного при округлении дроби: а) $0{,}476$ до десятых; б) $3{,}143$ до сотых; в) $13{,}74$ до единиц; г) $542{,}2$ до десятков.

10. Запишите числа $\frac{2}{3}$ и $\frac{13}{6}$ в виде десятичных дробей. Округлите дроби до десятых и найдите абсолютные погрешности приближенных значений.

11. Представьте число $\frac{100}{9}$ в виде десятичной дроби и округлите дробь до единиц, десятых и сотых. Найдите абсолютную погрешность каждого приближенного значения.

12. Найдите по графику функции $y=-x^2$ приближенные значения y при $x=$ $0{,}4; 1{,}6; 2{,}7.$ Вычислите абсолютную погрешность каждого приближенного значения.

13. За одну поездку проехали более 5 км и менее 6 км. Укажите точность приближенного значения израсходованного бензина, если приближенное значение принять: а)5 км; б)6 км; среднее арифметическое 5 км и 6 км.

14. На уроке присутствовало более 20 и менее 30 человек. Какое число является более точным приближенным значением числа людей, присутствовавших на уроке? Укажите точность этого приближенного значения.

Ответы:

1. $21{,}8$, $0{,}04$; 22, $0{,}2$; $7{,}6$, $0{,}04$; 8, $0{,}4$.

2. а) $0{,}015$; б) $0{,}004$; в) $0{,}38$; г) $1{,}3$.

3. $0{,}8(3)$ и $2{,}0(8)$. $0{,}8$ и $2{,}1$. А.П. $0{,}0(3)$ и $0{,}0(2)$.

4. $33{,}(3)$; 33; $33{,}3$; $33{,}33$. А.П. $0{,}(3)$; $0{,}0(3)$; $0{,}00(3)$.

5. $0{,}6$; $1{,}7$; $6{,}3$. А.П. $0{,}04$; $0{,}01$; $0{,}05$.

6. а) 1; б) 1; в) $0{,}5$.

7. 5 тыс.

8. $17{,}3$; 17; $9{,}7$; 10.

9. а) $0{,}024$; б) $0{,}003$; в) $0{,}26$; г) $2{,}2$.

10. $0{,}(6)$ и $2{,}1(6)$. $0{,}6$ и $2{,}2$. А.П. $0{,}0(6)$ и $0{,}0(4)$.

11. $11{,}(1)$. 11; $11{,}1$; $11{,}11$. А.П. $0{,}(1)$; $0{,}0(1)$; $0{,}00(1)$.

12. $0{,}2$; $2{,}6$; $7{,}3$. А.П. $0{,}04$; $0{,}04$; $0{,}01$.

13. $1; 1; 0{,}5$.

14. $25; 5$.

§2 Относительная погрешность

Начнем с примера.

Пример 1.Двоечнику Дархану поручили измерить длину школьного забора, а отличнику Асану поручили измерить диаметр шара из школьной лаборатории. Дархан сообщил, что длина школьного забора равна 400 метров, Асан посчитал, что диаметр шара равен 20 сантиметров. На самом деле, длина школьного забора составляет 420 метров, а диаметр шара равен 18 сантиметров. Как вы думаете, кто из двоих выполнил свое задание более качественно?

Решение.Заметим, что Дархан ошибся на 20 метров, а Асан – на 2 сантиметра. Однако **отношение** абсолютной погрешности Дархана к результатам его измерений равно $\frac{20}{400}=\frac{1}{20}$, а **отношение** абсолютной погрешности Асана к результатам его измерений равно $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$. Иными словами, величина, на которую ошибся двоечник, приблизительно в 20 раз меньше, чем результат его измерения. В то же время величина, на которую ошибся отличник, в 10 раз меньше результатов его измерения. Следовательно, двоечник на этот раз оказался точнее, и результаты именно его измерения следует признать более качественными.

Для оценки качества измеренийпользуются понятием, которое называется относительной погрешностью. Относительная погрешность используется также для оценки, насколько точным является приближенное значение величины по отношению к точному значению.

Определение.***Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности приближенного значения величины к модулю приближенного значения данной величины. Для удобства относительную погрешность часто выражают в процентах.***

Таким образом, в приведенном примере 1 относительная погрешность приближенного значения, которое предоставил Дархан, равна $\frac{1}{20}$ или 5%. Относительная погрешность измерения Асана равна $0{,}1$ или 10%. Очевидно, что **чем меньше относительная погрешность, тем выше считается качество измерения.**

В каком-то смысле логичнее было бы относительную погрешность считать как отношение абсолютной погрешности к точному значению. Проблема в следующем. Абсолютно точно мы можем **измерить** только те величины, которые обозначают количества предметов или отношения количеств, выраженных натуральными числами. Никакое расстояние или промежуток времени не может быть измерен абсолютно точно. Об этом мы говорили в предыдущем параграфе. Поэтому применяют обычно не саму абсолютную погрешность, а ее оценку. Об этом мы тоже говорили в предыдущем параграфе. При этом считается, что измерения проводятся достаточно точно, и замена в знаменателе точного значения на приближенное в определении относительной погрешности на результат влияет незначительно.

В большинстве практических случаев мы имеем дело не с самой абсолютной погрешностью, а с ее оценкой. В таких случаях мы также получаем не саму относительную погрешность, а ее оценку. Приведем пример.

Пример 2. Вместо числа π применили его приближенное значение $3{,}14$. Оцените относительную погрешность такого приближения?

Решение. Оценим сначала абсолютную погрешность такого приближения. Так как $\pi \approx 3{,}14159265$, то $\pi - 3{,}14 \approx 3{,}14159265 - 3{,}14 = 0{,}00159265 < 0{,}01$, т.е. абсолютная погрешность приближения числа π числом $3{,}14$ не превосходит $0{,}01$. Следовательно, относительная погрешность такого приближения не превосходит дроби $\frac{0{,}01}{3{,}14}=\frac{1}{314}$. При помощи калькулятора определяем, что $\frac{1}{314} \approx 0{,}003184713$. Заметим, что $0{,}003184713 < 0{,}0032$. Т. е. относительная погрешность не превосходит $0{,}0032$, что составляет $0{,}32\%$.

Задачи

Часть 1.

15. Каждую из десятичных дробей $0,45; 2,53; 31,98$ округлите до десятых и вычислите абсолютную и относительную погрешности приближенных значений.
16. Запишите $2\frac{12}{25}$ в виде десятичной дроби, округлите получившуюся дробь до единиц и до десятых. Вычислите для каждого приближенного значения абсолютную и относительную погрешности.
17. Найдите по графику функции $y = x^2 - 1$ приближенные значения y при $x = 1,8; -1,5$. Вычислите относительную погрешность каждого из приближенных значений.
18. Рост человека приближенно равен 175см. с точностью до 1 см. Оцените относительную погрешность.
19. Площадь Белого моря приближенно равна 90 тыс. $км^2$ (с точностью до 500 $км^2$). Оцените относительную погрешность приближенного значения.
20. Измерили толщину проволоки Lи расстояние lот Земли до Луны. Получили результаты: $L \approx 2,4мм$ с точностью до 0,1 мм; $l \approx 384400км$ с точностью до 50 км. Сравните точности измерений, оценив относительные погрешности.

Часть 2.

21. Каждую из десятичных дробей $0,37; 3,84; 52,97$ округлите до десятых и вычислите абсолютную и относительную погрешности приближенных значений.
22. Запишите $4\frac{5}{8}$ в виде десятичной дроби, округлите получившуюся дробь до единиц и до десятых. Вычислите для каждого приближенного значения абсолютную и относительную погрешности.
23. Найдите по графику функции $y = x^2 + 2$ приближенные значения y при $x = 2,1; -2,7$. Вычислите относительную погрешность каждого из приближенных значений.
24. Рост человека приближенно равен 180 см. с точностью до 1 см. Оцените относительную погрешность.
25. Площадь Чёрного моря приближенно равна 450 тыс. $км^2$ (с точностью до 500 $км^2$). Оцените относительную погрешность приближенного значения.
26. Измерили толщину проволоки Lи расстояние lот Земли до Луны. Получили результаты: $L \approx 2,4753мм$ с точностью до 0,0001 мм; $l \approx 384000км$ с точностью до 100 км. Сравните точности измерений, оценив относительные погрешности.

Ответы:

1. $0,5$; $2,5$; $32,0$. А.П. $0,05$; $0,03$; $0,02$. О.П. 10%; $1,2\%$; $0,06\%$.
2. $2,48$; 2; $2,5$. А.П. $0,48$; $0,02$. О.П. 24%; $0,08\%$.
3. $2,25$; $1,3$. А.П. $0,01$; $0,05$. О.П. $0,4\%$; $3,85\%$.
4. $\approx 0,57\%$.
5. $\approx 0,6\%$.
6. Точность измерения расстояния до Луны выше.
7. $0,4; 3,8; 53,0$. А.П. $0,03; 0,04; 0,03$. О.П. $7,5\%; 1,1\%; 0,06\%$.
8. $4,625$. 5; $4,6$. А.П. $0,375$; $0,025$. О.П. $7,5\%$; $0,54\%$.
9. $6,4$; $9,3$. А.П. $0,01$; $0,01$. О.П. $0,16\%$; $0,1\%$.
10. $\approx 0,56\%$
11. $\approx 0,(1)\%$
12. Точность измерения толщины проволоки выше.

§3 Действия над приближенными значениями

Предположим, даны приближенные значения двух величин a и b. Естественным образом возникает вопрос: каким образом производить арифметические операции над ними?

Пусть $a \approx 3{,}847516$ и $b \approx 60{,}733$. Число a дано с точностью до шестого знака после запятой, т.е. до миллионных. Число b дано с точностью до третьего знака после запятой, т.е. до тысячных. Рассмотрим сумму $a+b \approx 3{,}847516+60{,}733=64{,}580516$. Мы не знаем, какие цифры стоят на четвертом, пятом и т.д. местах после запятой в точном значении величины b. Поэтому мы не знаем, являются ли цифры верными на четвертом, пятом и т.д. местах в числе $64{,}580516$. Следовательно, результат $64{,}580516$ требуется округлить до третьей цифры после запятой:

$$a+b \approx 3{,}847516+60{,}733=64{,}580516 \approx 64{,}581.$$

Аналогично поступают во всех случаях, когда требуется найти сумму или разность двух приближенных величин, заданных в виде десятичных дробей.

Правило сложения приближенных значений. ***При сложении или вычитании приближенных значений результат округляют таким же образом, каким было получено менее точное приближенное значение.***

Например, $b-a \approx 60{,}73-3{,}847516=56{,}882484 \approx 56{,}88$.

Для умножения или деления приближенных значений приведем алгоритм.

1) Представляем каждое из чисел в стандартном виде.
2) Умножаем приближенные значения или делим их друг на друга. Это можно сделать с помощью калькулятора.
3) Результат представляем в стандартном виде и округляем его значащую часть, ориентируясь на менее точную значащую часть множителей.

   Приведем пример. Пусть $x \approx 57{,}5$ и $y \approx 0{,}003434$. Найдем произведение приближенных значений, следуя алгоритму.

1) Заметим, что $x \approx 57{,}5=5{,}75 \cdot 10^1$, $y \approx 0{,}003434=3{,}434 \cdot 10^{-3}$. Менее точную значащую часть имеет первое число, причем имеет место округление этой значащей части с точностью до **второго** знака после запятой.
2) Умножая на калькуляторе приближенные значения, получаем
   $$xy \approx 57{,}5 \cdot 0{,}003434=0{,}197455.$$
3) Представляем результат умножения в стандартном виде. Учитывая замечание из пункта 1), значащую часть округляем до **второго** знака после запятой. Окончательно имеем
   $$xy \approx 57{,}5 \cdot 0{,}003434=0{,}197455=1{,}97455 \cdot 10^{-1} \approx 1{,}97 \cdot 10^{-1}=0{,}197.$$

Аналогично выполняется деление:

$$xy \approx 57{,}5:0{,}003434 \approx 16744{,}32149097=1{,}674432149097 \cdot 10^4 \approx 1{,}67 \cdot 10^4=16700.$$

Ключевым моментом является округление значащей части $1{,}674432149097$ числа $1{,}674432149097 \cdot 10^4$ до **второго** знака после запятой.

Пример. Винни-Пух решил измерить длину своей комнаты. Под рукой оказалась только палочка длиной 20 см с делениями через 1 см. Винни решил измерять, последовательно делая отметки на полу через каждые 20 см. У него получилось $4{,}56$ м. Потом прибежал Пятачок со школьной линейкой, имеющей миллиметровые деления. Пятачок тоже измерил длину комнаты и у него получилось $4{,}487$ м. Медвежонок начал уже спорить – он считал, что его результат более правильный. Пятачок предложил принять за длину комнаты среднее арифметическое полученных результатов. Винни понравилось предложение друга. Какой результат у них получился?

Решение. Каждое из значений, полученных друзьями, является приближенным. Сложим результаты Винни и Пятачка: $4{,}56+4{,}487=9{,}047$. Так как измерение медвежонка содержит всего две цифры после запятой, а измерение Пятачка содержит три, то результат сложения нужно округлить до второй цифры после запятой: $4{,}56+4{,}487=9{,}047 \approx 9{,}05$. Среднее арифметическое двух чисел есть их полусумма. Разделим $9{,}05$ на 2. Получим $4{,}525$. Так как приближенное значение $9{,}05$ уже записано в стандартном виде и содержит две значащие цифры после запятой, то результат его деления на 2 требуется также округлить до сотых. Окончательный ответ: $4{,}53$.

Задачи

Часть 1.

1. Найдите приближенное значение суммы $x+y$, если :а) $x\approx 0{,}745, y\approx 18{,}9$; б) $x\approx 1{,}308, y\approx 0{,}4756$; в) $x\approx 5{,}78, y\approx 3{,}516$; г) $x\approx 4{,}21, y\approx 32$.
2. Чему равно приближенное значение разности $x-y$, если : а) $x\approx 6{,}56, y\approx 4{,}333$; б) $x\approx 0{,}9876, y\approx 0{,}12$; в) $x\approx 1{,}315, y\approx 0{,}2$; г) $x\approx 43, y\approx 24{,}389$.
3. Найдите приближенные значения выражений $a+b+c$ и $a-b-c$, если: а) $a\approx 9{,}037, b\approx 6{,}49, c\approx 1{,}38$; б) $a\approx 0{,}6, b\approx 0{,}32, c\approx 0{,}016$.
4. Найдите приближенное значение произведения xy , если: а) $x\approx 1374\cdot 10^3, y\approx 4{,}72\cdot 10^4$; б) $x\approx 2{,}2\cdot 10^5, y\approx 3{,}601\cdot 10^{-3}$; в) $x\approx 6{,}76\cdot 10^2, y\approx 2{,}103\cdot 10^3$; г) $x\approx 12{,}608\cdot 10^{-3}, y\approx 10{,}5\cdot 10^{-1}$.
5. Вычислите приближенное значение частного $\dfrac{x}{y}$, если: а) $x\approx 8{,}0315\cdot 10^7, y\approx 1{,}02\cdot 10^5$; б) $x\approx 2{,}86\cdot 10^2, y\approx 2{,}08\cdot 10^{-1}$; в) $x\approx 4{,}326\cdot 10^{-2}, y\approx 6{,}25\cdot 10^2$; г) $x\approx 1{,}4\cdot 10^{-3}, y\approx 1{,}23\cdot 10^{-4}$.
6. Найдите приближенные значения выражений xy и $\dfrac{x}{y}$, если: а) $x\approx 7{,}305\cdot 10^3, y\approx 2{,}2\cdot 10^2$; б $x\approx 3{,}66\cdot 10^{-2}, y\approx 8{,}6\cdot 10^{-5}$.
7. Для вычисления объема V шара используется формула $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$, где R -радиус шара. Найдите значение V , если $R\approx 27{,}32$ дм.

Часть 2.

8. Найдите приближенное значение суммы $x+y$, если :а) $x\approx 0{,}535, y\approx 16{,}3$; б) $x\approx 2{,}154, y\approx 0{,}2154$; в) $x\approx 7{,}68, y\approx 2{,}347$; г) $x\approx 3{,}58, y\approx 24$.
9. Чему равно приближенное значение разности $x-y$, если : а) $x\approx 7{,}47, y\approx 6{,}666$; б) $x\approx 0{,}9753, y\approx 0{,}32$; в) $x\approx 2{,}432, y\approx 0{,}7$; г) $x\approx 37, y\approx 15{,}481$.
10. Найдите приближенные значения выражений $a+b+c$ и $a-b-c$, если: а) $a\approx 13{,}072, b\approx 7{,}82, c\approx 2{,}51$; б) $a\approx 0{,}8, b\approx 0{,}64, c\approx 0{,}032$.
11. Найдите приближенное значение произведения xy , если: а) $x\approx 1156\cdot 10^3, y\approx 34{,}68\cdot 10^2$; б) $x\approx 3{,}6\cdot 10^4, y\approx 2{,}513\cdot 10^{-3}$; в) $x\approx 5{,}76\cdot 10^3, y\approx 3{,}202\cdot 10^2$; г) $x\approx 7{,}84\cdot 10, y\approx 1{,}247\cdot 10^5$.
12. Вычислите приближенное значение частного $\dfrac{x}{y}$, если: а) $x\approx 7{,}2041\cdot 10^4, y\approx 3{,}43\cdot 10^2$; б) $x\approx 2{,}53\cdot 10^2, y\approx 2{,}34\cdot 10^{-1}$; в) $x\approx 3{,}427\cdot 10^{-3}, y\approx 6{,}25\cdot 10$; г) $x\approx 1{,}6\cdot 10^{-4}, y\approx 1{,}13\cdot 10^{-3}$.
13. Найдите приближенные значения выражений xy и $\dfrac{x}{y}$, если: а) $x\approx 5{,}216\cdot 10^4, y\approx 3{,}5\cdot 10^2$; б) $x\approx 4{,}33\cdot 10^{-3}, y\approx 9{,}2\cdot 10^{-2}$.
14. Для вычисления объема V цилиндра используется формула $V=h\pi R^2$, где R - радиус основания и h - высота цилиндра. Найдите значение V , если $R\approx 16{,}28$ см

и $h \approx 11,3 см$.

Ответы:

1.а) $19,6$; б) $1,784$; в) $9,3$; г) 36.

2.а) $2,23$; б) $0,87$; в) $1,1$; г) 19.

3.а) $16,91; 1,17$; б) $0,9; 0,3$.

4.а) $6485\cdot10^{7}$; б) $7,9\cdot10^{2}$; в) $14,22\cdot10^{5}$; г) $132,4\cdot10^{-4}$.

5.а) $7,87\cdot10^{2}$; б) $1,38\cdot10^{3}$; в) $0,69\cdot10^{-4}$; г) $1,1\cdot10$.

6.а) $16,1\cdot10^{5}; 3,3\cdot10$; б) $31,5\cdot10^{-7}; 0,4\cdot10^{3}$.

7. $27188,22\pi дм^{3}$

8.а) $16,8$; б) $2,369$; в) $10,03$; г) 28.

9.а) $0,80$; б) $0,66$; в) $1,7$; г) 22.

10.а) $23,40; 2,74$; б) $1,5; 0,1$.

11.а) $40090\cdot10^{5}$; б) $9,0\cdot10$; в) $18,44\cdot10^{5}$; г) $9,78\cdot10^{6}$.

12.а) $2,10\cdot10^{2}$; б) $1,08\cdot10^{3}$; в) $0,55\cdot10^{-4}$; г) $1,1\cdot10^{-1}$.

13.а) $18,3\cdot10^{6}; 1,5\cdot10^{2}$; б) $39,8\cdot10^{-5}; 0,5\cdot10^{-1}$.

14. $2994,9\pi см^{3}$

Серии для повторения

Серия 1

1. Найдите сумму всех целых чисел от -15 до 24;
2. Верно ли, что если $a>0$ и $b>0$, то $ab>0$;
3. Вычислите : а) $(1,25\cdot1,7\cdot0,8-1,7)\cdot3,45$; б) $3,947\cdot(3,6-2,6\cdot4\cdot0,25)$;
4. Какова область определения функции заданной формулой:
   а) $\dfrac{8}{x^2+4}$; б) $\dfrac{7}{x^2-4}$;
5. Докажите, что выражение $26^7+15^5-11^9$ кратно 10
6. Представьте число в виде суммы степеней числа 2
   а)6; б)18; в)63; г)42;
7. Найдутся ли такие целые значения x, при которых значение многочлена будет чётным?
   а) $2x^2+6x+3$; б) x^2+x+2;
8. Упростите выражение:
   а) $(1-x+4x^2-8x^3)+(2x^3+x^2-6x-3)-(5x^3+8x^2)$; б) $5(4x^2-2x+1)-2(10x^2-6x-1)$;
   в) $a(3b-1)-b(a-3)-2(ab-a+b)$;
9. Докажите, что если в уравнении $ax+by=81$, коэффициенты a и b - целые числа, то пара чисел $(15;40)$ не может быть решением этого уравнения;
10. Представьте в виде многочлена:
    а) $(2-b)(1+2b)+(1+b)(b^3-3b)$; б) $(a^2-7)(a+2)-(2a-1)(a-14)$.

Ответы: 1. 180. 2. Да. 3. а) 0; б) 3,947

4. а) $x\in(-\infty;+\infty)$; б) $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$;

6. а) 2^2+2; б) 2^4+2; в $2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0$); г) 2^5+2^3+2;

7. а)Нет; Да;

8. а) $-(11x^3+3x^2+7x+2)$; б) $2x+7$; в) $a+b$.

10. а) $b^4+b^3-5b^2+2$; б) $a^3+22a-28$;

Серия 2

1. Найдите сумму всех целых чисел от 5 до 15;
2. Верно ли, что если $ab>0$, то $a>0$ и $b>0$;
3. Вычислите: а) $5,9\cdot 2,6+5,9\cdot 3,2+5,8\cdot 4,1$; б) $6,8\cdot 8,4-1,6\cdot 8,4+5,2\cdot 1,6$;
4. Является линейной функция, заданная формулой:

   а); $x(6-x)$ б) $x(9-x)+x^2$; в) $\dfrac{4x-7}{2}$;
5. Докажите, что при любом натуральном n значение дроби является натуральным числом:

   а) $\dfrac{10^n-1}{9}$; б) $\dfrac{10^n+8}{9}$;в) $\dfrac{10^n-4}{3}$;
6. Представьте число, в виде суммы степеней числа 3:
   а) 31; б) 109; в) 12;
7. Докажите, что уравнение $x^4+3x^3+2x^2+x+6$ не имеет положительных корней;
8. Упростите выражение:

   а) $(p-q)(p+3q)-(p^2+3q^2)$; б) $2x^2-(x-2y)(2x+y)$; в) $(m-3n)(m+2n)-m(m-n)$;
9. В книге Леонарда Эйлера используется тождество:

   $(p^2+cq^2)(r^2+cs^2)=(pr+cqs)^2+c(ps-qr)^2$. Докажите его;
10. Разложите на множители: а) $70a-84b+20ab-24b^2$; б) $30a^3-18a^2b-72b+120a$; в) $21bc^2-6c-3c^3+42b$.

Ответы: 1. 110. 2. Нет. 3. а) 58; б) 52.
4.а) Нет; б) Нет; в) Да;
6.а) $3^3+3^1+3^0$; б) $3^4+3^3+3^0$; в) 3^2+3 ;
8.а) $2q(p-3q)$; б) $y(3x-2y)$; в) $-6n^2$;
10.а) $2(7-2b)(5a-6b)$; б) $6(a^2+4)(5a-3b)$; в) $3(c^2+2)(7b-c)$;

Серия 3

1. Упростите выражение: $2x(2x+3y)-(x+y)^2$
2. Решите систему уравнений : $\begin{cases} 4x-y=9; \\ 3x+7y=-1. \end{cases}$
3. а) Постройте график функции $y=2x+2$.
   б) Определите, проходит ли график функции через точку $A(-10;-18)$.
4. Разложите на множители: а) $3a^2-9ab$; б) x^3-25x
5. По электронной почте послано три сообщения объемом 600 килобайт. Объем первого сообщения на 300 килобайт меньше объема третьего сообщения и в 3 раза меньше объема второго. Найдите объем каждого сообщения.
6. Вычислите:

   $$\frac{0,2\cdot 1,8+0,8\cdot 1,8}{1,3^2-0,5^2}+\frac{0,1^2-0,5^2}{0,4\cdot 0,12+0,88\cdot 0,4}$$
7. Упростите выражение: $(5y^6):(y^4\cdot y^3)$
8. Решите уравнение:а) $18-(6x+5)=4-7x$; б) $0,2\cdot(3x-5)-0,3\cdot(x-1)=-0,7$;
9. Постройте график функции $y=0,4x+1$. Проходит ли график через точку $A\ (100;41)$?
10. Решите задачу: Дачник шел от дачи до магазина проселочной дорогой со скоростью 5 км/ч, а возвращался обратно лесной дорогой со скоростью 3 км/ч, причем на обратный путь он затратил на 8 мин меньше. Найдите путь, пройденный дачником до магазина и обратно, если лесная дорога на 2 км короче проселочной.

Ответы: 1. $3x^2+4xy-y^2$; 2. $(2;-1)$

3. б) Да; 4. а) $3a(a-3b)$; б) $x(x-5)(x+5)$;

5. $60;180;360$; 6. $0,65$;

7. $\frac{5}{y}$; 8.а) $x=-9$; б) $x=\frac{7}{3}$;

9.Да; 10. 6км.

Серия 4

1. Упростите выражение: $(a+3)\cdot 2-a+17-a$;
2. Решите систему уравнений: $4x-y=18, 3x+5y=2$;
3. Постройте график функции $y=2x-3$. Проходит ли этот график через точку $A(9,5;16)$?
4. Разложите на множители: а) $2a^3-32a$; б) $3a-b^2-ab+3b$;
5. Машинистка предполагала перепечатать рукопись за 20 дней. Однако она печатала на 5 страниц в день больше, чем планировала, и затратила на перепечатку на 5 дней меньше. Сколько страниц было в рукописи?
6. Решите уравнение: $16x^2-x^3=0$.
7. Найдите значение выражения: $\frac{x^3}{4}+3y^2$, при $x=-2$ и $y=-1$;
8. Разложите на множители: $a(x-2)+b(x-2)$;
9. Найдите значение углового коэффициента k для функции $y=kx-4$, если график проходит через точку $B(-3;8)$.
10. Упростите выражение: $(-3m^2)^4\cdot 2m^5n^6\cdot(n^3)^3$.

Ответы: 1.23; 2. $x=\frac{120}{383}$; $y=-\frac{286}{383}$;

3. Да; 4. а) $2a(a-4)(a+4)$; б) $(a+b)(3-b)$;

5. 300; 6. $x_1=0; x_2=16$; 7. 1;

8. $(x-2)(a+b)$; 9. $k=-4$; 10. $162m^{13}n^{15}$;

Серия 5

1. Упростите:а) $2\left(a^2-1\right)^2-\left(a^2+3\right)\left(a^2-3\right)-\frac{\left(a^2+a-4\right)\left(2a^2+3\right)}{2}$;

   б) $4\left(m^3-3\right)^2-\left(m^2-63\right)\left(m^2+6\right)-9\left(8-m+m^2\right)(1-m)$;
2. Докажите, что многочлен всегда положителен: а) $x^2+2x+10+6y+y^2$;

   б) $x^2-4xy+y^2+x^2y^2+1$;
3. Постройте график функции $y=3x-2$. Проходит ли этот график через точку $A(6;13)$?
4. Разложите на множители: а) $3a^3-3a$; б) $6a-2b^2-2ab+6b$;
5. Машинистка предполагала перепечатать рукопись за 15 дней. Однако она печатала на 3 страниц в день больше, чем планировала, и затратила на перепечатку на 5 дней меньше. Сколько страниц было в рукописи?
6. Решите уравнение: $11x^2-x^3=0$.
7. Найдите значение выражения: $\frac{x^2}{5}+4y$, при $x=-2$ и $y=-1$;
8. Разложите на множители: $a(2-x)+b(x-2)$;

9. Найдите значение углового коэффициента k для функции $y = kx - 2$, если график проходит через точку $B(-4;6)$.

10. Упростите выражение: $(2m^2)^3 \cdot 3m^5n^2 \cdot (n^3)^3$.

Ответы: 1.а) $\dfrac{61 - a^3 - (a+3)^3}{2}$. 3.Нет;

4.а) $3a(a-1)(a+1)$; б) $2(a+b)(3-b)$;

5. 90 стр.; 6. $x = 0; x = 11$;

7. $-3{,}2$; 8. $(b-a)\cdot(x-2)$;

9. $k = -2$; 10. $24m^{11}n^{11}$.

Серия 6.

1. Упростите выражение: $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x - 3y = 4; \\ 3x + 4y = -5. \end{cases}$
3. а) Постройте график функции $y = 3x - 1$.
   б) Определите, проходит ли график функции через точку $A(-5;-16)$.
4. Разложите на множители: а) $2x^2 - 6xy$;
   б) $x^4 - 27x$
5. По электронной почте послано три сообщения объемом 1000 килобайт. Объем первого сообщения на 250 килобайт меньше объема третьего сообщения и в 3 раза меньше объема второго. Найдите объем каждого сообщения.
6. Вычислите:
   $\dfrac{1{,}2 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 \cdot 1{,}5}{2{,}5^2 - 1{,}5^2} + \dfrac{0{,}7^2 - 0{,}3^2}{0{,}4 \cdot 0{,}12 + 0{,}88 \cdot 0{,}4}$
7. Упростите выражение: $(8y^4) : (y^2 \cdot y^3)$
8. Решите уравнение:а) $18 - (6x+5) = 4 - 7x$; б) $0{,}2 \cdot (3x-5) - 0{,}3 \cdot (x-2) = -0{,}7$;
9. Постройте график функции $y = 0{,}3x + 2$. Проходит ли график через точку $A\ (100;32)$?
10. Решите задачу: Дачник шел от дачи до магазина проселочной дорогой со скоростью 6 км/ч, а возвращался обратно лесной дорогой со скоростью 3 км/ч, причем на обратный путь он затратил на 15 мин меньше. Найдите путь, пройденный дачником до магазина и обратно, если лесная дорога на 4 км короче проселочной.

Ответы: 1. $(2a+b)^3$; 2. $\left(\dfrac{67}{17}; \dfrac{22}{17}\right)$;

3. Да. 4. а) $2x(x-3y)$; б) $x(x-3)(x^2+3x+9)$.

5. 150, 400 и 450 кб. 6. $\dfrac{3}{4}$.

7. $\dfrac{8}{y}$. 8. а) $x = -9$; б) $x = 1$.

9. Да. 10. 6,5 км.

Серия 7.

1. Найдите сумму всех целых чисел от -10 до 17;
2. Верно ли, что если $a \le 0$ и $b > 0$, то $ab < 0$;
3. Вычислите: а) $(2{,}5 \cdot 3{,}2 \cdot 0{,}4 - 3{,}2) \cdot 2{,}25$; б) $3{,}947 \cdot (2{,}9 - 1{,}9 \cdot 4 \cdot 0{,}25)$;

4. Какова область определения функции заданной формулой:

а) $\dfrac{3}{x^2+1}$; б) $\dfrac{4}{x^2-9}$;

5. Докажите, что выражение $16^5+5^7-19^4$ кратно 10
6. Представьте число в виде суммы степеней числа 2

а)7; б)15; в)71; г)24;

7. Найдутся ли такие целые значения x, при которых значение многочлена будет чётным?

а) $2x^2+4x+7$; б) x^2+x+6;

8. Упростите выражение:

а) $\left(1-x+4x^2-8x^3\right)+\left(2x^3+x^2-6x-3\right)-\left(5x^3+8x^2\right)$; б) $5\left(4x^2-2x+1\right)-2\left(10x^2-6x-1\right)$;

в) $a(3b-1)-b(a-3)-2(ab-a+b)$;

9. Докажите, что если в уравнении $ax+by=121$, коэффициенты a и b - целые числа, то пара чисел $(15;40)$ не может быть решением этого уравнения;
10. Представьте в виде многочлена:

а) $(2-b)(1+2b)+(1+b)\left(b^3-3b\right)$; б) $\left(a^2-7\right)(a+2)-(2a-1)(a-14)$.

Ответы: 1.28

2. Нет.

3. а) 0; б)3,947

4. а) $x\in(-\infty;+\infty)$; б) $x\in(-3;3)$.

6. а) 2^2+2+2^0; б) $2^3+2^2+2+2^0$; в) $2^6+2^2+2+2^0$; г) 2^4+2^3.

7. а) Нет; б) Да.

8. а) $-\left(11x^3+3x^2+7x+2\right)$; б) $2x+7$; в) $a+b$.

10. а) $b^4+b^3-5b^2+2$; б) $a^3+22a-28$.

Серия 8.

1. В цехе 60 рабочих, из 36 фрезеровщиков. Сколько процентов всех рабочих составляют фрезеровщики?
2. При помощи цифр 4,6,8 составьте все возможные двузначные числа. Сколько процентов составляют двузначные числа с этими цифрами от всех двузначных чисел?
3. Сколько простых чисел между числами от -10 до 20?
4. Сравните значение выражений: а) $\left(-5a^4\right)^{2015}$ и $\left(2a^2\right)^{2015}$; б) $\left(-2a^3\right)^2$ и $\left(2a^2\right)^3$
5. Упростите выражение: а) $(a+1)\cdot\left(a^2-a+1\right)$; б) $(a+1)(a+2)(a+3)$; в) $(4a-1)\cdot(6b+1)-3a(8b+2)$.
6. При каких значениях параметра a равносильны уравнения: $\dfrac{1}{2}(x-4)-15=-8x$ и $4(3x-a)-27=ax+15$
7. Докажите неравенство: а) $a^2+b^2\ge 2ab$; б) $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$; в) $(2a+3)\cdot(2a-3)-(2a-1)^2<4a$; г) $m^2+n^2+2\ge 2(m+n)$.
8. Постройте график функции $x^2+y^2=0$
9. Найдите значение выражения $\dfrac{x+y}{10}$, если известно, что $x^3+y^3=10$ и $3x^2y+3xy^2=17$
10. Какова степень многочлена $x^4+2x^5+x^3-2x\left(1+x^4\right)-5-x^4$?

Ответы: 1. 60%;

2. 10%;

3. 7;

4. а) $\left(2a^2\right)^{2015}$ больше; $\left(2a^2\right)^3$ больше;

5. а) a^3-1; б) $a^3+6a^2+11a+6$; в) $1-2a-6b$.

6. $a=3$;

9. $\frac{3}{10}$;

10. 3.

Серия 9.

1. Упростите выражение: $\left(-\frac{2}{3}pq^4\right)\cdot\left(-27p^5q\right)$
2. График функции ax^2 проходит через точку $(2;-8)$. Найдите значение a
3. Матери 50 лет, а дочери 28 лет. Сколько лет тому назад дочь была в два раза младше матери?
4. При выпаривании 8кг рассола получили 2кг соли с 10%-ной влажностью, т.е. в составе соли 10% составляет вода. Сколько процентов рассола составляет вода?
5. Докажите тождество Диофанта: $(a+b)^2\cdot(c+d)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$
6. Первая цифра шестизначного числа 1. Если эту цифру переставить на последнее место, то данное число уменьшится в 3 раза. Найдите первоначальное число.
7. Туристы шли пешком со скоростью 4,5 км/ч, а затем ехали на автобусе со скоростью в 10 раз больше. Расстояние, которое они проехали на автобусе, было в 6 раз больше, чем расстояние, которое они прошли пешком. Найдите длину маршрута туристов, если известно, что весь маршрут занял 3ч 12 мин.
8. Докажите, что $\frac{a+c}{b+a}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+b}{b+c}=4$, если $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{b+c}=1$.
9. На базу привезли 96т. капусты. Сколько капусты осталось на базе, если 25% капусты испортилось, а 20% остатка отвезли в магазины?
10. Упростите: а) $\frac{a^2+4a+4}{16-b^2}\cdot\frac{4+b}{4-a^2}$; б) $\frac{a^3-b^3}{7a+7b}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$; в) $\frac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b}\cdot\frac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}$; г) $\frac{n^2-n^4+n^6}{1-n}\cdot\frac{n^2-1}{n^5-n^3+n}$.

Ответы: 1. $18p^6q^5$;

2. $a=-2$;

3. 6;

4. 77,5%;

6. 142857

7. 63км;

9. 57,6т.

10. а) $\frac{a+2}{(4-b)\cdot(2-a)}$; б) $\frac{a^2-b^2}{7}$; в) $\frac{1}{6(a+b)}$; г) $n(n+1)$.