模糊数学

- ***模糊数学***：把客观世界中的***模糊性现象***作为***研究对象***，用***精确的数学方法***作为***研究方法***的一门新的数学分支。理论基础是模糊集合论。

模糊集合vs 经典集合

- **经典集合**：具有一定性质的事物的全体。（Cantor提出）
  用值域为 $\{0,1\}$ 的特征函数描述。
  集合元素与集合的关系：$\in$，$\overline{\in}$。
  集合边界是清晰的。画一个圈作为边界，圈之内的点为集合中元素，圈之外的点不为集合中的元素。表现出非此即彼性。
  用精确集合描述精确概念的外延。
  例子：身高1.8以上的人。成绩90分以上的学生。
- **模糊集合**：用值域为 $[0,1]$ 的隶属函数描述。
  集合元素与集合的关系：$[0,1]$ 上的数代表元素以多大程度属于一个集合。0代表不属于，1代表属于，$(0,1)$ 代表属于的程度。
  集合的边界不清晰，无法画一个圈表示集合。
  用模糊集合描述模糊概念的外延。
  例子：身高高的人。成绩优秀的学生。

模糊数学—模糊集合的基本概念

乔瑞

模糊集合

ERROR: undefinedfilename
OFFENDING COMMAND: findfont

STACK:

/
/BKZTCG+

模糊集合vs 经典集合

- **经典集合**：具有一定性质的事物的全体。（Cantor提出）
  用值域为 $\{0,1\}$ 的特征函数描述。
  集合元素与集合的关系：$\in$，$\overline{\in}$。
  集合边界是清晰的。画一个圈作为边界，圈之内的点为集合中元素，圈之外的点不为集合中的元素。表现出非此即彼性。
  用精确集合描述精确概念的外延。
  例子：身高1.8以上的人。成绩90分以上的学生。
- **模糊集合**：用值域为 $[0,1]$ 的隶属函数描述。
  集合元素与集合的关系：$[0,1]$ 上的数代表元素以多大程度属于一个集合。0代表不属于，1代表属于，$(0,1)$ 代表属于的程度。
  集合的边界不清晰，无法画一个圈表示集合。
  用模糊集合描述模糊概念的外延。
  例子：身高高的人。成绩优秀的学生。

模糊数学—模糊集合的基本概念

乔瑞

模糊集合的定义思路

设论域为 U，普通集合 A 用特征函数 $A(u)$ 来表示。

$$A(u)=\begin{cases}1 & u\in A\\ 0 & u\bar{\in}A\end{cases}$$

$$\begin{array}{lcr} U\rightarrow\{0,1\} & \Rightarrow & U\rightarrow[0,1]\\ A & \Rightarrow & \underline{A}\end{array}$$

模糊子集

- 论域 U
- 映射
  $\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1] \quad u| \to \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$
- 称 μ 确定了 U 上的一个***模糊子集***，记为 $\underset{\sim}{A}$。
- $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 称为模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的***隶属函数***。
- $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 在点 $u \in U$ 处的值 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 称为 u 对 $\underset{\sim}{A}$ 的***隶属度***.
- 为简便，将模糊子集简称为模糊集，且把 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 与 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 均简记为 $\underset{\sim}{A}(u)$。

模糊子集的几点说明

- 模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 完全由其隶属函数所描述，即只要给定隶属函数 $\underset{\sim}{A}(u)$，那么模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 也就完全确定了。
- 不同的隶属函数确定着不同的模糊集。同一个论域 U 上可以有多个模糊集。
- 模糊集与普通集的本质区别：对 $\forall u \in U$ 及 U 上的模糊集 $\underset{\sim}{A}$，一般不能说 u 是否隶属于 $\underset{\sim}{A}$，只能说 u 在多大程度上隶属于 $\underset{\sim}{A}$。
- 普通子集是模糊子集的特殊形态:
  普通子集的特征函数 $A(u)$ 的值只取 $[0,1]$ 的两个端点，即 $0,1$ 两个值。
- 两个特殊模糊集： $\emptyset : \forall u \in U, \underset{\sim}{A}(u) = 0$
  $U : \forall u \in U, \underset{\sim}{A}(u) = 1$

模糊集的表示方法

U 为有限集。

(1)Zadeh 表示法

$\underset{\sim}{A} = \frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1} + \frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2} + ... + \frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}$

(2)序偶表示法

$\underset{\sim}{A} = \{(\underset{\sim}{A}(u_1), u_1)..., (\underset{\sim}{A}(u_n), u_n)\}$

(3)向量表示法

$\underset{\sim}{A} = (\underset{\sim}{A}(u_1), ..., \underset{\sim}{A}(u_n))$

(4)Zadeh 与向量式的结合表示法

$\underset{\sim}{A} = (\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1}, \frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2}, ..., \frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n})$

(5)Zadeh 与序偶结合表示法

$\underset{\sim}{A} = \{\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1}, \frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2}, ..., \frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}\}$

模糊集的表示方法

U 为无限可列集。

(1)Zadeh 表示法

$\underset{\sim}{A}=\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1}+\frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2}+...+\frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}+...$

(2)序偶表示法

$\underset{\sim}{A}=\{(\underset{\sim}{A}(u_1),u_1)...,(\underset{\sim}{A}(u_n),u_n)...\}$

(3)向量表示法

$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}(u_1),...,\underset{\sim}{A}(u_n)...)$

(4)Zadeh 与向量式的结合表示法

$\underset{\sim}{A}=(\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1},\frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2},...,\frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}...)$

(5)Zadeh 与序偶结合表示法

$\underset{\sim}{A}=\{\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1},\frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2},...,\frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}...\}$

U 为无限不可列集。

$\underset{\sim}{A}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(u)}{u}$

此表示法适用于 U 的各种情况。

模糊集的运算及其性质

- $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$: 对于 $\forall u \in U$，都有 $\underset{\sim}{A}(u) \leq \underset{\sim}{B}(u)$ 成立。
  $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$: 对于 $\forall u \in U$，都有 $\underset{\sim}{A}(u) \leq \underset{\sim}{B}(u)$ 成立。且 $\exists u \in U$，使 $\underset{\sim}{A}(u) < \underset{\sim}{B}(u)$。
- $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$: 对于 $\forall u \in U$，都有 $\underset{\sim}{A}(u) = \underset{\sim}{B}(u)$ 成立。
  $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$ 且 $\underset{\sim}{A} \supseteq \underset{\sim}{B}$。
- $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$:对于 $\forall u \in U$，有 $\underset{\sim}{C}(u) = \underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u)$。
- $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$:对于 $\forall u \in U$，有 $\underset{\sim}{C}(u) = \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u)$。
- $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}^c$:对于 $\forall u \in U$，有 $\underset{\sim}{B}(u) = 1 - \underset{\sim}{A}(u)$。

模糊幂集

模糊幂集 设 U 为给定的论域， U 上的模糊子集的全体称为模糊幂集，记为 $\mathcal{F}(U)$，即
$\mathcal{F}(U)=\{\underset{\sim}{A}|\underset{\sim}{A}(u):U\rightarrow[0,1]\}$

模糊数学—模糊关系

乔瑞

经典关系

从 X 到 Y 上的经典二元关系为 $X \times Y$ 上的一个经典子集。所以关系为一个特殊的集合，这里的集合为笛卡尔积。

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R \Leftrightarrow R(x, y) = 1$

模糊关系

具有程度上差异的关系叫做**模糊关系**。
普通关系：可用“有”或“无”来回答。
模糊关系：不可用“有”或“无”来回答。

模糊关系

直积 $U \times V$ 的一个模糊子集称为从 U 到 V 的一个**模糊关系**，记为

$$U \xrightarrow{\underset{\sim}{R}} V$$

而隶属度 $\underset{\sim}{R}(u,v)$ 则称为 $(u,v) \in U \times V$ 关于 $\underset{\sim}{R}$ 的**相关程度**。

经典关系的合成

- 设 $Q \in \mathcal{P}(U \times V)$, $R \in \mathcal{P}(V \times W)$, Q 对 R 的**合成**，是指从 U 到 W 的一个模糊关系，记作 $Q \circ R$。满足 $(u, w) \in Q \circ R \Leftrightarrow \exists v \in V, (u, v) \in Q, (v, w) \in R$
- $Q \circ R$ 具有特征函数 $(Q \circ R)(u, w) = \bigvee\limits_{v \in V} (Q(u, v) \wedge R(v, w))$，其中 $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$。
- $Q \circ R(u, w) = 1 \Leftrightarrow \exists v \in V, R(u, v) \wedge S(v, w) = 1 \Leftrightarrow \bigvee\limits_{v \in V} (R(u, v) \wedge S(v, w)) = 1$

模糊关系的合成

设 $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{F}(U \times V)$, $\underset{\sim}{R} \in \mathcal{F}(V \times W)$,
$\underset{\sim}{Q}$ 对 $\underset{\sim}{R}$ 的**合成**，是指从 U 到 W 的一个模糊关系，记作 $Q \circ R$。
它具有隶属函数 $(Q \circ R)(u,w) = \bigvee\limits_{v \in V} (\underset{\sim}{Q}(u,v) \wedge \underset{\sim}{R}(v,w))$, 其中 $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$。

模糊变换

设 U, V 为非空集合，若存在一个法则 $\underset{\sim}{T}$，通过它对于 U 中的任意一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，都有 V 中唯一确定的模糊子集 $\underset{\sim}{B}$ 与之对应，则 $\underset{\sim}{T}$ 称为从 U 到 V 的**模糊变换**，记为
$\underset{\sim}{T}: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$