《磁力摆》实验报告

PB20061372 朱云沁 510 组

实验题目：磁力摆

实验目的：

研究小磁针在地磁场中的运动特征；测量局域地磁场水平分量、小磁针的磁矩和转动惯量；研究两个相同磁针的耦合运动规律。

实验原理：

将小磁针用细线悬挂于匀强磁场中，令其偏离平衡位置，角位移θ小于$5°$，忽略阻尼影响，则小磁针在磁力矩作用下作简谐振动，构成磁力摆。设磁力摆的磁矩为M，转动惯量为J，水平方向磁感应强度为B，列写运动方程，求得一级近似下振动周期T为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB}} \tag{①}$$

亥姆霍兹线圈是一对彼此平行且连通的共轴圆形线圈组，若通以方向一致、大小为I的电流，可以证明，两线圈轴线中点的磁感应强度B_I为

$$B_I = kI \tag{②}$$

对$B_I - I$曲线作线性拟合，从而求出k。

地球本身及其周围空间存在磁场。为测量局域地磁场水平分量B_0，将小磁针置于地磁场和亥姆霍兹线圈磁场的叠加中，当亥姆霍兹线圈磁场与地磁场水平方向相同（相反）时，轴线上磁场的水平分量为$B = B_0 + B_I$（$B = |B_0 - B_I|$）。以$B_0 < B_I$且方向相反的情况为例，由①②式，有

$$\frac{1}{T^2} = \frac{Mk}{4\pi^2 J}(I - \frac{B_0}{k}) \tag{③}$$

对$\frac{1}{T^2} - I$曲线作线性拟合，得到横截距，从而求出B_0。

为测量小磁针的转动惯量和磁矩，在其两端安装相同质量m的配重螺帽。将配重螺帽视为质点，设其到质心的距离为r，则小磁针和两个配重螺帽构成的系统的转动惯量为$J + 2mr^2$。设未加配重时磁力摆的周期为T_0，加配重后磁力摆的周期为T'，由①式得

$$J = 2mr^2\sqrt{\frac{T_0^2}{T'^2 - T_0^2}} \tag{④}$$

代入数据求出J，进而根据③式斜率求出M。

将两枚相同的小磁针沿地磁场水平方向共线放置，构成耦合振动系统。设其同相位共同运动的圆频率为ω，反相位共同运动的圆频率为ω^*，两个磁针之间的距离为L，则耦合系数$k' = \alpha\frac{M^2}{L^\beta} = \frac{1}{2}|\omega^2 - \omega^{*2}|$。为确定$\alpha$和$\beta$的值，对该式取对数得

$$\ln k' = -\beta\ln L + \ln\alpha M^2 \tag{⑤}$$

对$\ln k' - \ln L$曲线作线性拟合，得到斜率与纵截距，从而求出α和β。

实验器材：

高灵敏度特斯拉计（量程$0\sim3000mT$，分辨率$0.01mT$），亥姆霍兹线圈，磁力摆 2 个，直流电源，配重螺帽 2 个（$m = 0.62g$），米尺，秒表。

实验步骤：

1、 将亥姆霍兹线圈通电，用特斯拉计测量亥姆霍兹线圈轴线中点的磁场B_I，改变电流大小I，记录 8 组数据。
2、 将小磁针置于亥姆霍兹线圈中央，使亥姆霍兹线圈磁场与地磁场水平方向相反，用秒表测量磁力摆周期T，改变电流大小I，记录 8 组数据。
3、 测量磁力摆在地磁场中的周期T_0，安装配重螺帽，再次测量周期T'。
4、 令两个磁力摆构成耦合振动系统，测量同相位运动的圆频率ω，反相位运动的圆频率ω^*，改变两个磁针之间的距离L，记录 6 组数据。
5、 数据处理。

实验数据：

I/A	0.09952	0.19933	0.29912	0.39889	0.49871	0.59852	0.69826	0.79807
B_I/mT	0.48	0.98	1.49	1.99	2.49	2.99	3.49	3.99

表 1 亥姆霍兹线圈磁场与电流大小的关系-原始数据

I/A	0.00979	0.01977	0.02966	0.03969	0.04962	0.05959	0.06955	0.07955
n	40	60	70	70	70	70	70	70
t/s	60.41	53.32	48.19	40.42	35.52	32.64	29.08	27.52
T/s	1.5103	0.8887	0.6884	0.5774	0.5074	0.4663	0.4154	0.3931
$\frac{1}{T^2}/\mathrm{s}^{-2}$	0.44	1.27	2.11	3.00	3.88	4.60	5.79	6.47

表 2 局域地磁场的测量-原始数据

	无配重	有配重
n	40	30
t/s	58.77	58.72
$2r/\mathrm{cm}$	6.15	
m/g	0.62	

表 3 小磁针转动惯量和磁矩的测量-原始数据

L/cm	16.71	19.02	23.75	29.80	32.50	36.48
n	50	50	40	40	40	40
t/s	41.95	46.34	42.12	49.86	51.56	54.43
t^*/s	56.32	59.96	52.46	55.37	57.12	56.90

表 4 地磁场中耦合磁针运动的测量-原始数据

数据处理：

根据表 1 数据，作出$B_I - I$散点图并线性拟合，结果如图 1 所示。

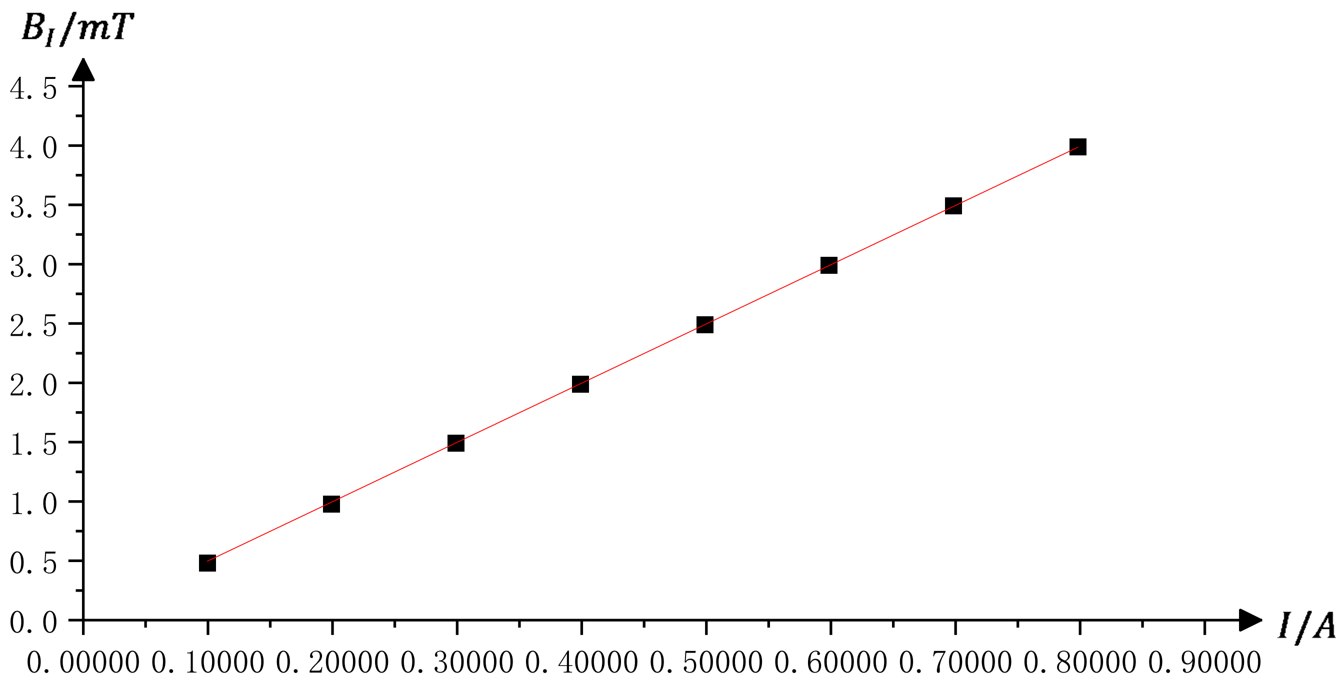

图 1 $B_I - I$散点图及其线性拟合

使用最小二乘法计算，结合②式，斜率k为

$$k=\frac{\overline{IB_I}-\bar{I}\cdot\overline{B_I}}{\overline{I^2}-\bar{I}^2}=4.99359\mathrm{mT/A}$$

故亥姆霍兹线圈轴线中点的磁场B_I与电流大小I的关系为

$$B_I=4.99\times10^{-3}\cdot I\ (\mathrm{T})$$

由于$t=nT$，计算出表 2 各组T和$\frac{1}{T^2}$的值，记录在其中。根据表 2 数据，作出$\frac{1}{T^2}-I$散点图并做线性拟合，结果如图 2 所示。

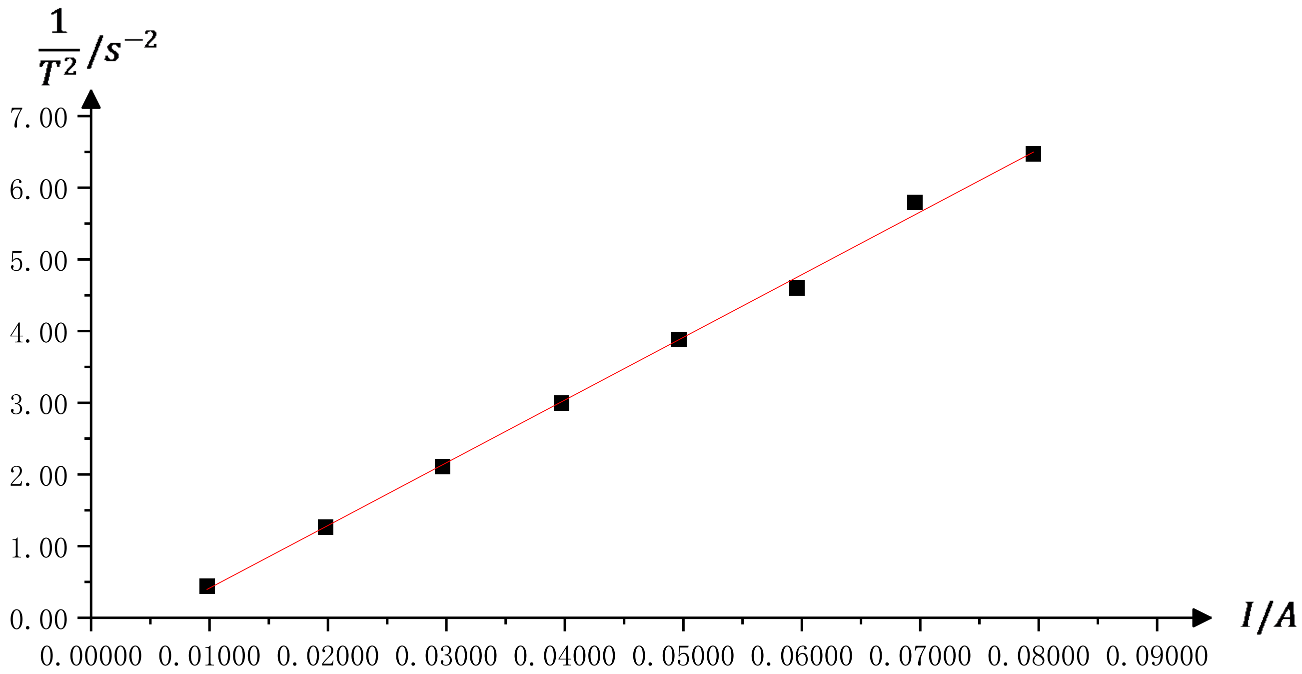

图 2 $\frac{1}{T^2}-I$散点图及其线性拟合

使用最小二乘法计算，结合③式，斜率$\frac{Mk}{4\pi^2J}$和横截距$\frac{B_0}{k}$分别为

$$\frac{Mk}{4\pi^2J}=\frac{\overline{I\frac{1}{T^2}}-\bar{I}\cdot\overline{\frac{1}{T^2}}}{\overline{I^2}-\bar{I}^2}=87.47773\mathrm{A^{-1}\cdot s^{-2}}$$

$$\frac{B_0}{k}=\bar{I}-\frac{\overline{\frac{1}{T^2}}}{\frac{Mk}{4\pi^2J}}=0.005269\mathrm{A}$$

进而得B_0为

$$B_0=\frac{B_0}{k}\cdot k=0.005269\cdot4.99359\mathrm{mT}=0.02631\mathrm{mT}$$

故局域地磁场水平分量B_0的测量结果为

$$B_0=2.6\times10^{-5}T$$

根据表 3 数据，计算出未加配重时磁力摆的周期T_0、加配重后磁力摆的周期T'、配重到质心的距离r分别为

$$T_0=\frac{58.77}{40}\mathrm{s}=1.46925\mathrm{s},\qquad T'=\frac{58.72}{30}\mathrm{s}=1.95733\mathrm{s},\qquad r=\frac{6.15}{2}\mathrm{cm}=3.075\mathrm{cm}$$

代入④式，求得J为

$$J=2mr^2\sqrt{\frac{T_0^2}{T'^2-T_0^2}}=2\times0.62\times10^{-3}\times(3.075\times10^{-2})^2\times\sqrt{\frac{1.46925^2}{1.95733^2-1.46925^2}}\mathrm{kg\cdot m^2}=1.3312\times10^{-6}\mathrm{kg\cdot m^2}$$

故磁力摆转动惯量J的测量结果为

$$J = 1.33 \times 10^{-6}\mathrm{kg \cdot m^2}$$

进而得M为

$$M = \frac{\frac{Mk}{4\pi^2 J} \cdot 4\pi^2 \cdot J}{k} = \frac{87.47773 \times 4\pi^2 \times 1.3312 \times 10^{-6}}{4.99359 \times 10^{-3}}\mathrm{A \cdot m^2} = 0.92062\mathrm{A \cdot m^2}$$

故磁力摆磁矩M的测量结果为

$$M = 0.92\mathrm{A \cdot m^2}$$

由于$k' = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{2\pi n}{t}\right)^2 - \left(\frac{2\pi n}{t^*}\right)^2\right|$，计算出表 4 各组$lnL$和$lnk'$的值，记录在下表中。

$\ln L$	-1.7892	-1.6597	-1.4376	-1.2107	-1.1239	-1.0084
$\ln k'$	2.5245	2.2251	1.8450	0.8776	0.7884	-0.0958

作出$\ln L - \ln k'$散点图并做线性拟合，结果如图 3 所示。

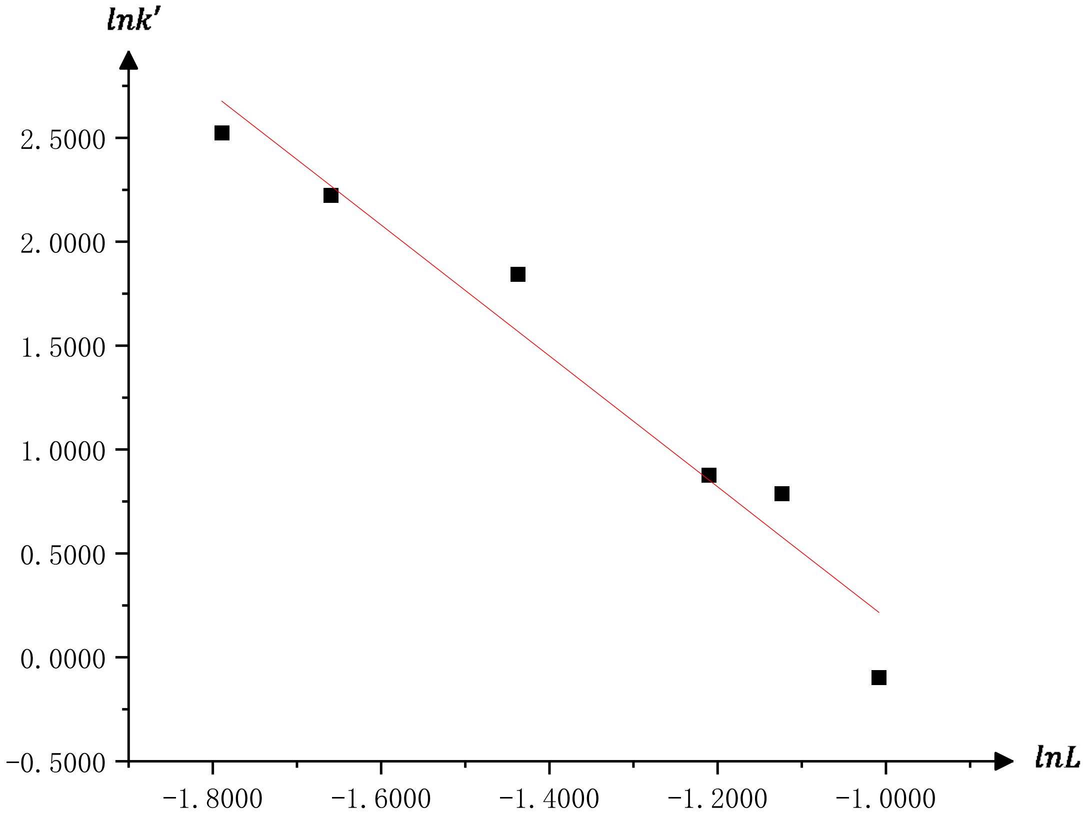

图 3 $\ln L - \ln k'$散点图及其线性拟合

使用最小二乘法计算，结合⑤式，斜率$-\beta$和截距$\ln\alpha M^2$分别为

$$-\beta = \frac{\overline{\ln L \cdot \ln k'} - \overline{\ln L} \cdot \overline{\ln k'}}{\overline{\ln L^2} - \overline{\ln L}^2} = -3.15151$$

$$\ln\alpha M^2 = \overline{\ln k'} - (-\beta) \cdot \overline{\ln L} = -2.96173$$

进而求得α、β分别为

$$\alpha = \frac{e^{\ln\alpha M^2}}{M^2} = \frac{e^{-2.96173}}{0.92062} = 0.06103$$

$$\beta = -(-\beta) = -(-3.15151) = 3.15151$$

故α、β的测量结果分别为

$$\alpha = 0.06$$

$$\beta = 3.15$$

思考题：

1、 如何利用作图法或最小二乘法求得局域地磁场的水平分量？
答：首先，选取适当电流范围和正整数n，测量不同电流I下磁力摆的n个周期T，计算得出各组$\frac{1}{T^2}$。然后，以$\frac{1}{T^2}$为纵坐标，电流I为横坐标作图，利用外推计算$\frac{1}{T^2}\to 0$时的电流I_0，此时线圈磁场与局域磁场水平分量完全抵消，故有$B_0 = kI_0$；若利用最小二乘法，根据③式，有$\frac{4\pi^2 Mk}{J} = \frac{\overline{I\frac{1}{T^2}}-\bar{I}\cdot\overline{\frac{1}{T^2}}}{\overline{I^2}-\bar{I}^2}$，$\frac{B_0}{k} = \bar{I} - \frac{\overline{\frac{1}{T^2}}}{\frac{4\pi^2 Mk}{J}}$，计算得$B_0$。

2、 说明两小磁针耦合运动“拍频”与哪些物理量有关？

答：将磁针视作磁偶极子，设两小磁针磁矩方向与外磁场水平方向的夹角分别为θ_1、θ_2，，列写耦合振动系统的运动方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{\mu_0 M^2}{4\pi J L^3}(2\theta_1+\theta_2) - \dfrac{MB_0}{J}\theta_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{\mu_0 M^2}{4\pi J L^3}(2\theta_2+\theta_1) - \dfrac{MB_0}{J}\theta_2\end{cases}$$

同相位振动时，方程组的解为$\omega = \sqrt{\frac{MB_0}{J}+\frac{3\mu_0 M^2}{4\pi J L^3}}$，反相位振动时，方程组的解为$\omega^* = \sqrt{\frac{MB_0}{J}+\frac{\mu_0 M^2}{4\pi J L^3}}$。则拍频的表达式为

$$f = \frac{\sqrt{\dfrac{MB_0}{J}+\dfrac{3\mu_0 M^2}{4\pi J L^3}} - \sqrt{\dfrac{MB_0}{J}+\dfrac{\mu_0 M^2}{4\pi J L^3}}}{2\pi}$$

故拍频f与磁针的磁矩M、磁针的转动惯量J、外磁场水平分量B_0、两磁针间的距离L有关。

3、 实验内容中出现的问题：

1) 如何判断线圈附加磁场与局域磁场是反向还是同向。
答：若线圈附加磁场与局域磁场同向，则此时磁针振动频率大于无附加磁场时的频率，亥姆霍兹线圈电流越大，频率越大；若线圈附加磁场与局域磁场反向，则频率先随电流增大而减小，而后小磁针指向翻转，频率随电流增大而增大（本实验中仅后半过程）。

2) 请比较ω、ω^*、ω_0的大小。
答：$\omega > \omega^* > \omega_0$。

3) 改变两个磁针之间的距离，观察拍频随L的增加如何变化？
答：变小。