

Homework 6

1. (1) $G(s)$ 的幅值与相位分别为

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 100}},$$
$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{10}\right).$$

将数据带入得

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
1	0.100	-5.711°
2	0.098	-11.310°
5	0.089	-26.565°
10	0.071	-45.000°
20	0.045	-63.435°
50	0.020	-78.690°
100	0.010	-84.289°

(2) 传递函数的 Bode 形式为

$$G(j\omega) = 0.1 \cdot \frac{1}{j\omega/10 + 1}$$

- 幅频对数特性曲线

$0 < \omega < 10$, 水平渐近线的值为 0.1;
 $\omega = 10$, 实际幅值约为 $0.1/0.707 = 0.0707$;
 $\omega > 10$, 渐近线斜率为 -1.

如图 1(a) 所示.

- 相频特性曲线

$0 \leq \omega < 2$, 水平渐近线的值为 0° ;
 $\omega = 2$, 实际相位约为 $0^\circ - 11^\circ = -11^\circ$;
 $\omega \approx 10$, 近似过 $(2, 0^\circ), (50, -90^\circ)$ 的直线;
 $\omega = 50$, 实际相位约为 $-90^\circ + 11^\circ = -79^\circ$;
 $\omega > 50$, 水平渐近线的值为 -90° ;

如图 1(b) 所示.

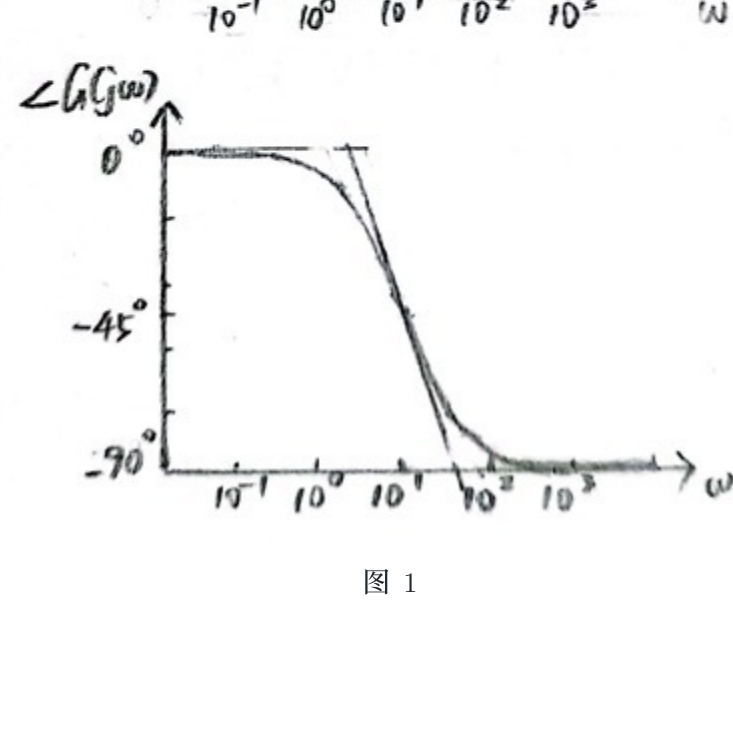


图 1

与 (1) 中计算结果相符.

2. 传递函数的 Bode 形式为

$$G(j\omega) = 0.375(j\omega)^{-2} \cdot \frac{j\omega/3 + 1}{j\omega/8 + 1}.$$

- 幅频对数特性曲线

$0 < \omega < 3$, 渐近线的斜率为 -2, 过点 $(1, 0.375)$;
 $\omega = 3$, 实际幅值约为 $0.0417 \times 1.4 = 0.0584$;
 $3 < \omega < 8$, 渐近线斜率为 -1;
 $\omega = 8$, 实际幅值约为 $0.0156 \times 0.707 = 0.0110$;
 $\omega > 8$, 渐近线斜率为 -2.

如图 2(a) 所示.

- 相频特性曲线

$0 < \omega < 3$, 水平渐近线的值为 -180° ;
 $\omega \approx 3$, 一阶项 $j\omega/3 + 1$ 的相位曲线近似过 $(0.6, -90^\circ), (15, 0^\circ)$ 的直线;
 $3 < \omega < 8$, 水平渐近线的值为 -90° ;
 $\omega \approx 8$, 一阶项 $(j\omega/8 + 1)^{-1}$ 的相位曲线近似过 $(1.6, 0^\circ), (40, -90^\circ)$ 的直线;
 $\omega > 8$, 水平渐近线的值为 -180° ;

如图 2(b) 所示.

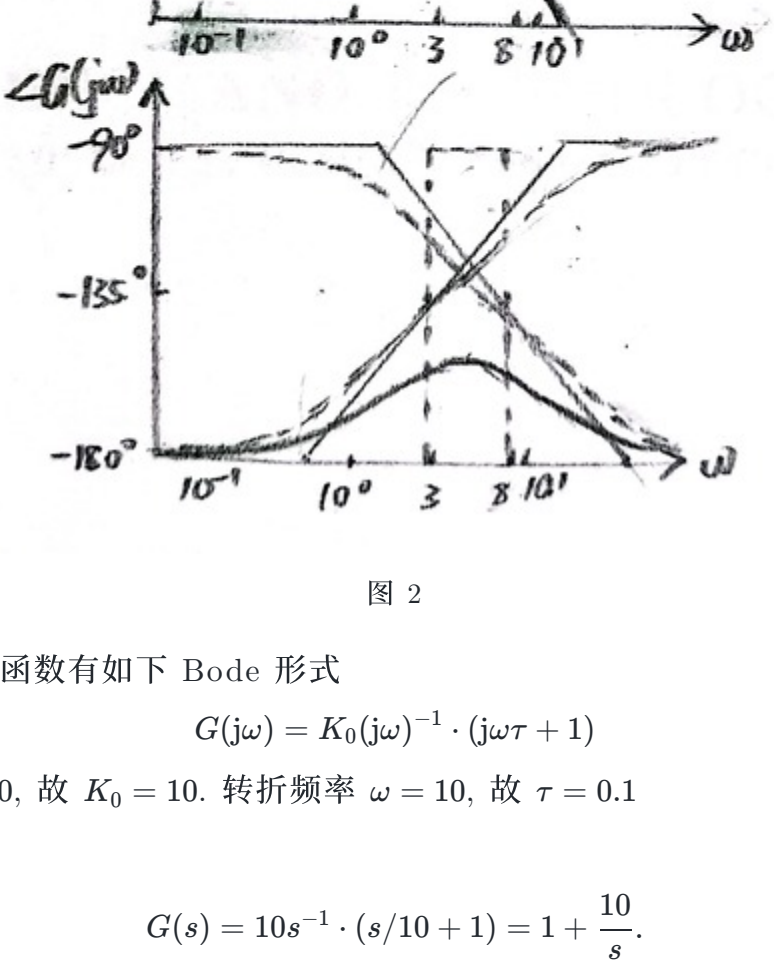


图 2

3. 由渐近线的斜率变化知, 传递函数有如下 Bode 形式

$$G(j\omega) = K_0(j\omega)^{-1} \cdot (j\omega\tau + 1)$$

当 $\omega = 1$ 时, 渐近线的值为 10, 故 $K_0 = 10$. 转折频率 $\omega = 10$, 故 $\tau = 0.1$

传递函数为

$$G(s) = 10s^{-1} \cdot (s/10 + 1) = 1 + \frac{10}{s}.$$

4. (1) 开环传递函数的 Bode 形式为

$$G(j\omega) = K(j\omega)^{-1} \cdot \frac{1}{j\omega + 1} \cdot \frac{1}{(j\omega/5)^2 + 0.4(j\omega/5) + 1}$$

当 $K = 1$ 时,

- 幅频对数特性曲线

$0 < \omega < 1$, 渐近线的斜率为 -1, 过点 $(1, 1)$;
 $\omega = 1$, 实际幅值约为 $1 \times 0.707 = 0.707$;
 $1 < \omega < 5$, 渐近线斜率为 -2;
 $\omega = 5$, 谐振峰值略小于 $0.1 \times \frac{1}{2 \times 0.4} = 0.125$;
 $\omega > 5$, 渐近线斜率为 -4.

如图 3(a) 所示.

- 相频特性曲线

$0 < \omega < 1$, 水平渐近线的值为 -90° ;
 $\omega \approx 1$, 一阶项 $(j\omega + 1)^{-1}$ 的相位曲线近似过 $(0.2, -90^\circ), (5, -180^\circ)$ 的直线;
 $1 < \omega < 5$, 水平渐近线的值为 -180° ;
 $\omega = 5$, 实际相位略大于 -270° ;
 $\omega > 5$, 水平渐近线的值为 -360° ;

如图 3(b) 所示.

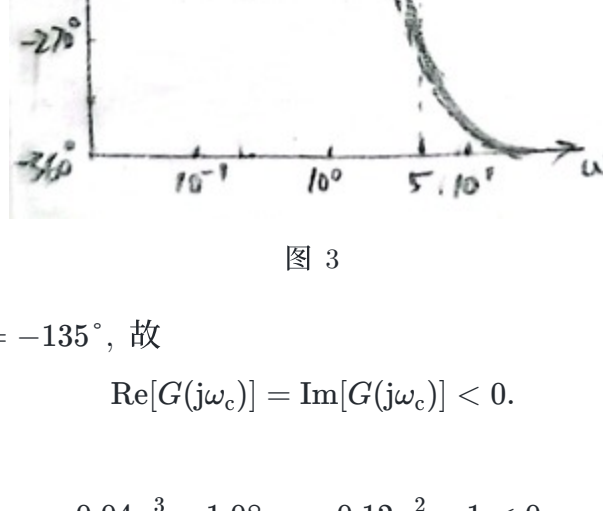


图 3

(2) 注意到 $\angle G(j\omega_c) = -180^\circ + \text{PM} = -135^\circ$, 故

$$\text{Re}[G(j\omega_c)] = \text{Im}[G(j\omega_c)] < 0.$$

化简得

$$0.04\omega_c^3 - 1.08\omega_c = 0.12\omega_c^2 - 1 < 0.$$

解得 $\omega_c \approx 0.8665$. 代入 $|G(j\omega_c)| = 1$, 得 $K \approx 1.1151$

令 $\text{Im}[G(j\omega_{\text{crit}})] = 0$, $\text{Re}[G(j\omega_{\text{crit}})] < 0$, 得

$$0.12\omega_{\text{crit}}^2 - 1 = 0, \quad 0.04\omega_{\text{crit}}^3 - 1.08\omega_{\text{crit}} < 0$$

解得 $\omega_{\text{crit}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2.88675$. $\text{GM} = |G(j\omega_{\text{crit}})|^{-1} \approx 5.58$.

(3) 1 型系统, 速度误差常数为 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K = 1.1151$.

5. 超前补偿有如下形式

$$D(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

未施加补偿器时, Bode 图如图 4 所示.

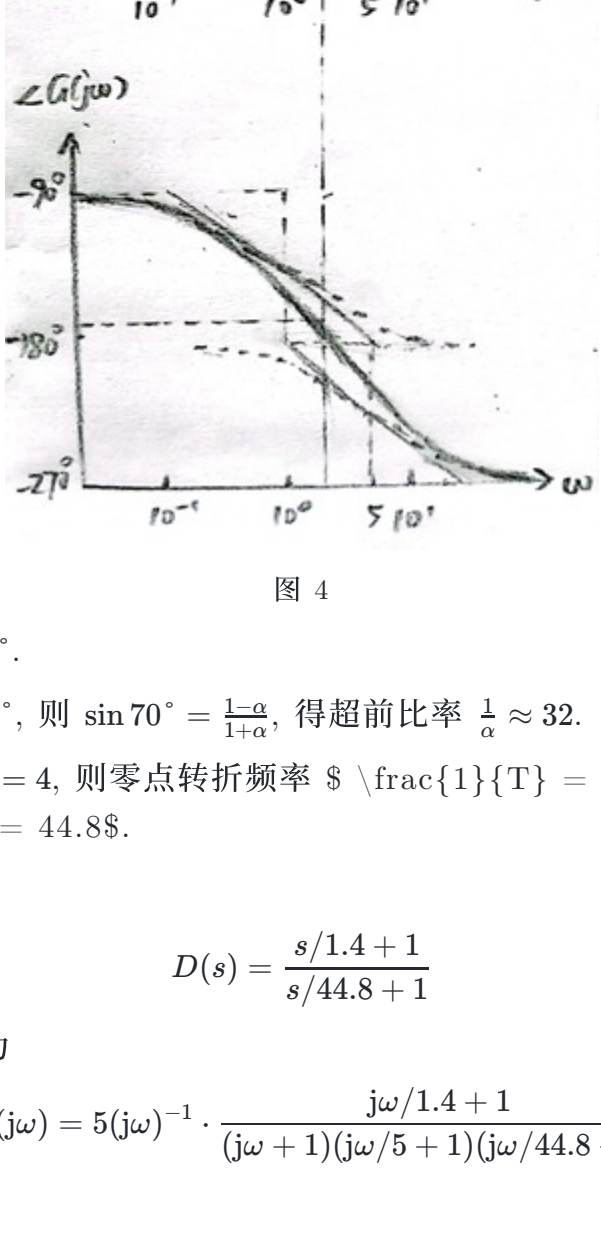


图 4

穿越频率 $\omega_c \approx 2$, 相位裕度 $\text{PM} \approx 5^\circ$.

选取超前补偿的最大相位 $\phi_{\text{max}} = 70^\circ$, 则 $\sin 70^\circ = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, 得超前比率 $\frac{1}{\alpha} \approx 32$.

选取超前补偿的最大相位频率 $\omega_{\text{max}} = 4$, 则零点转折频率 $\frac{1}{T} = 2\sqrt{\alpha} \approx 0.78$, 极点转折频率 $\frac{1}{\alpha T} = 44.8$.

候选的补偿器为

$$D(s) = \frac{s/1.4 + 1}{s/44.8 + 1}$$

此时, 开环传递函数的 Bode 形式为

$$DG(j\omega) = 5(j\omega)^{-1} \cdot \frac{j\omega/1.4 + 1}{(j\omega + 1)(j\omega/5 + 1)(j\omega/44.8 + 1)}$$

Bode 图如图 5 所示.

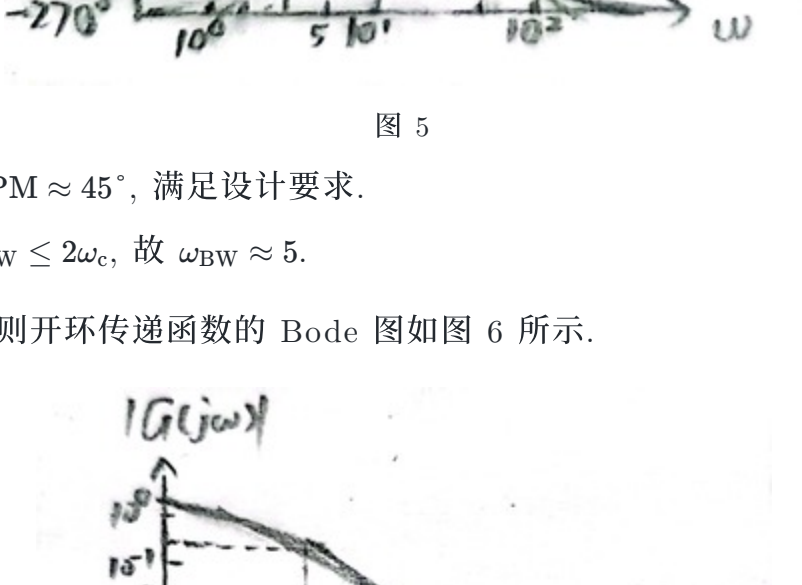


图 5

穿越频率 $\omega_c \approx 3$, 相位裕度 $\text{PM} \approx 45^\circ$, 满足设计要求.

对于系统的带宽, 有 $\omega_c \leq \omega_{\text{BW}} \leq 2\omega_c$, 故 $\omega_{\text{BW}} \approx 5$.

6. 未施加补偿器时, 取 $K = 1$, 则开环传递函数的 Bode 图如图 6 所示.

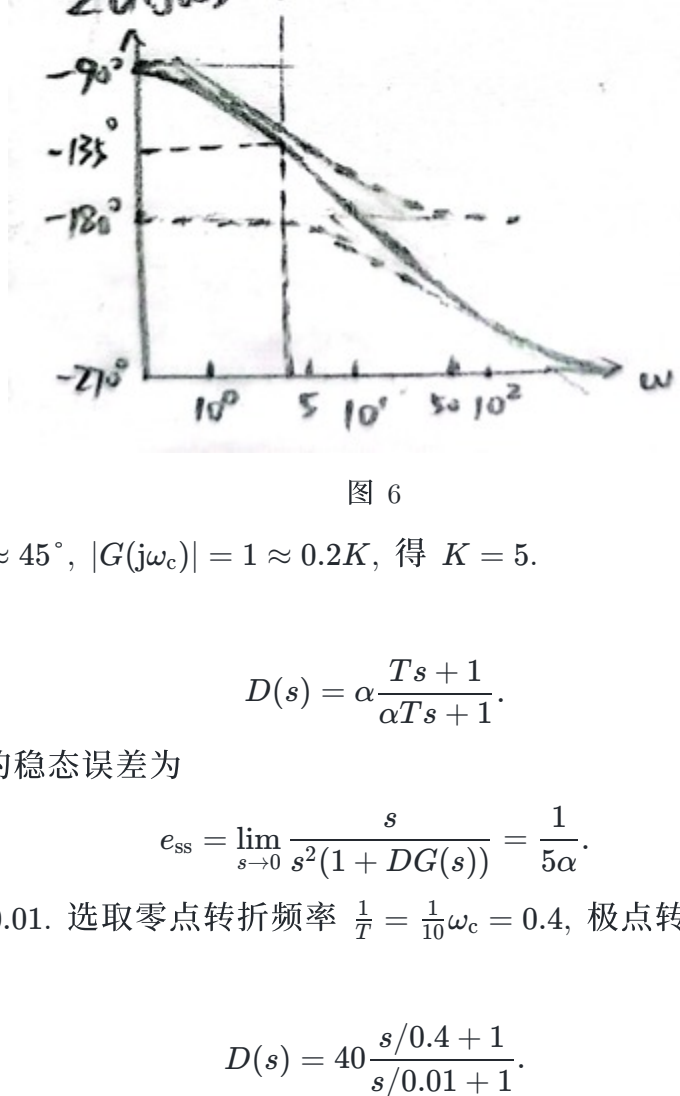


图 6

选取 $\omega_c \approx 4$, 则相位裕度 $\text{PM} \approx 45^\circ$, $|G(j\omega_c)| = 1 \approx 0.2K$, 得 $K = 5$.

滞后补偿有如下形式

$$D(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}.$$

对于单位斜坡输入, 闭环系统的稳态误差为

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2(1 + DG(s))} = \frac{1}{5\alpha}.$$

选取 $\alpha = 40$, 则 $e_{\text{ss}} = 0.005 < 0.01$. 选取零点转折频率 $\frac{1}{T} = \frac{1}{10}\omega_c = 0.4$, 极点转折频率 $\frac{1}{\alpha T} = 0.01$.

候选的补偿器为

$$D(s) = 40 \frac{s/0.4 + 1}{s/0.01 + 1}.$$

此时, 开环传递函数的 Bode 形式为

$$DG(j\omega) = 200(j\omega)^{-1} \cdot \frac{j\omega/0.4 + 1}{(j\omega/0.01 + 1)(j\omega/5 + 1)(j\omega/50 + 1)}$$

Bode 图如图 7 所示.

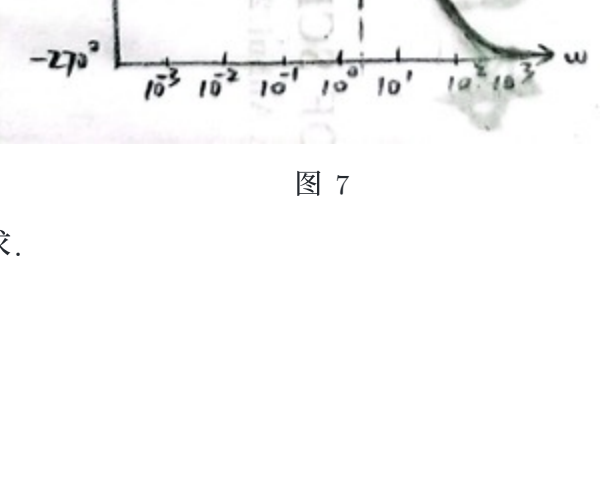


图 7

相位裕度 $\text{PM} \approx 45^\circ$, 满足设计要求.