定理 6.4 证明勘误

PB20061372 朱云沁 June 15, 2023

定理 6.4: (Shapley, 1971) 凸博弈核心非空.

证明: 定义 $S_k = \{1, 2, \dots, k\}$ 为编号最小的 k 个局中人的联盟. 其中, $S_0 = \varnothing, S_n = N$. 进一步, 定义 $x_i = v(S_i) - v(S_{i-1})$. 下证, 向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个分配, 并且属于核心 $C(v)$.

注意到 $\sum_{i\in N} x_i = v(S_n) - v(S_0) = v(N) - v(\emptyset) = v(N)$. 由定理 6.1, 只需证 $\sum_{i\in T} x_i \geq v(T)$ 对任意联盟 $T \subseteq N$ 成立.

设 $N - T = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, 其中 $j_1 < j_2 < \dots < j_m$. 作如下观察

$$\begin{cases} S_{j_1-1} & \subseteq & T & \subseteq & N - \{j_1\} \\ S_{j_2-1} & \subseteq & T \cup \{j_1\} & \subseteq & N - \{j_2\} \\ S_{j_3-1} & \subseteq & T \cup \{j_1, j_2\} & \subseteq & N - \{j_3\} \\ \vdots & & & & \\ S_{j_m-1} & \subseteq & T \cup \{j_1, j_2, \dots j_{m-1}\} & \subseteq & N - \{j_m\} \end{cases}$$

由于 $x_i = v(S_{i-1} \cup \{i\}) - v(S_{i-1})$, 结合凸博弈的性质, 我们有

$$\begin{cases} x_{j_1} & \leq & v(T \cup \{j_1\}) & - & v(T) \\ x_{j_2} & \leq & v(T \cup \{j_1, j_2\}) & - & v(T \cup \{j_1\}) \\ x_{j_3} & \leq & v(T \cup \{j_1, j_2, j_3\}) & - & v(T \cup \{j_1, j_2\}) \\ \vdots & & & & \\ x_{j_m} & \leq & v(T \cup \{j_1, j_2, \dots, j_m\}) & - & v(T \cup \{j_1, j_2, \dots, j_{m-1}\}) \end{cases}$$

上式两边求和, 得 $\sum_{i\in N-T} x_i \leq v(N) - v(T)$. 又 $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$, 故 $\sum_{i\in T} x_i \geq v(T)$. 证毕.

注 1: 上述证明中, 我们利用了合作博弈 $\langle N, v\rangle$ 是凸博弈的等价定义:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T),\ \forall S \subseteq T \subseteq N - \{i\}.$$

注 2: 上述核心元素 $\mathbf{x}$ 的构造并不唯一. Shapley 的对称性公设告诉我们, 局中人的所得应当与编号顺序无关. 不难发现, 对于原博弈 $\langle N, v\rangle$ 的任意置换博弈 $\langle N^\pi, v^\pi\rangle$, 我们可以类似地构造出一个分配, 使其属于核心 $C(v^\pi)$, 进而由逆置换 π^{-1} 得到原博弈的核心元素 $\mathbf{x}^\pi \in C(v)$.

具体而言, $\mathbf{x}^\pi$ 的构造过程如下: 令 $\pi : N \to N$ 为对局中人集合 N 的任意置换运算, $\pi(i)$ 为置换后局中人的新编号. 定义 $S_k^\pi = \{i : \pi(i) \leq k\}$ 为置换后编号最小的 k 个局中人的联盟, 即

$$\begin{cases} S_0^\pi = \varnothing, \\ S_1^\pi = \{\pi^{-1}(1)\}, \\ S_2^\pi = \{\pi^{-1}(1), \pi^{-1}(2)\}, \\ \vdots \\ S_n^\pi = \{\pi^{-1}(1), \pi^{-1}(2), \dots, \pi^{-1}(n)\} = N. \end{cases}$$

令 $x_i^\pi = v(S_{\pi(i)}^\pi) - v(S_{\pi(i)-1}^\pi)$, 则向量 $\mathbf{x}^\pi = (x_1^\pi, x_2^\pi, \dots, x_n^\pi)$ 是一个分配, 并且属于核心 $C(v)$.

显然, $\mathbf{x}^\pi$ 不一定与 $\mathbf{x}$ 相同. Shapley 已在原论文中证明, 凸博弈的核心为所有形如 $\mathbf{x}^\pi$ 的分配的凸包 (核心为紧凸的多边形, 而 $\mathbf{x}^\pi$ 为其顶点), 而 Sharpley 值为核心的重心

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi : N \to N} \mathbf{x}^\pi.$$

可见 Sharpley 理论之美妙.

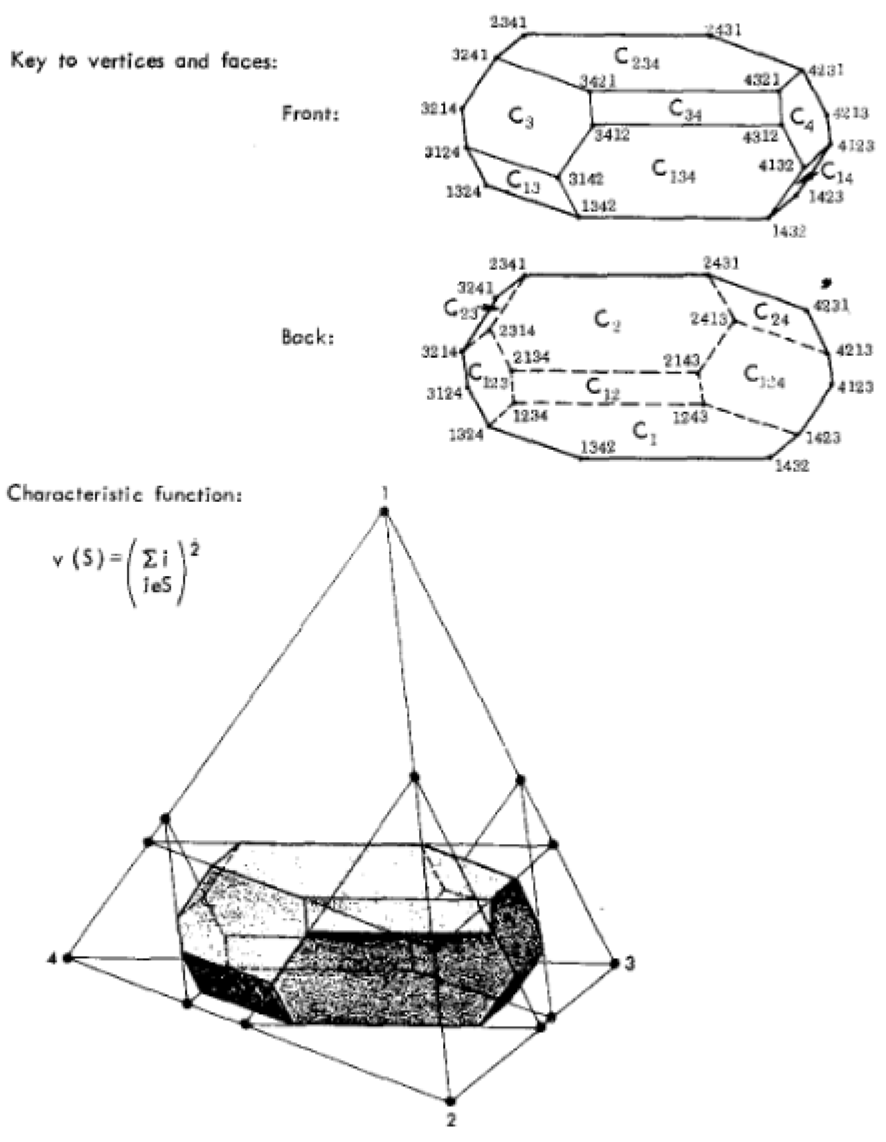

Figure 1. 四人凸博弈的核心示例 (Shapley, 1971)