Homework 5

1. (1) 特征方程的 Evans 形式为 $1+KL(s)$, 其中

$$L(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

$L(s)$ 无零点. 其极点为 $s=0,-1,-5$.

实轴上的根轨迹位于奇数个零极点的左侧, 如图 1 所示.

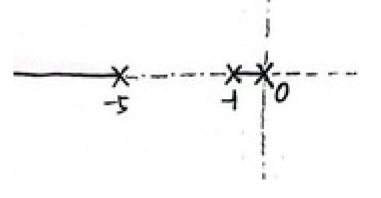

图 1

(2) 渐近线与实轴的夹角为

$$\phi=\frac{180^\circ+360^\circ(l-1)}{3}=60^\circ,180^\circ,300^\circ.$$

渐近线与实轴的交点为

$$\alpha=\frac{0-1-5}{3}=-2.$$

如图 2 所示.

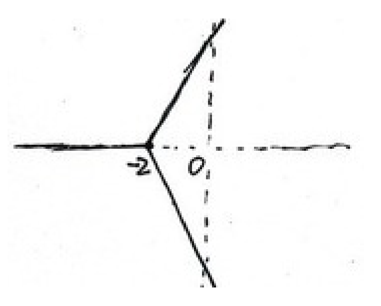

图 2

(3) 求解方程

$$\mathrm{j}\omega_c(\mathrm{j}\omega_c+1)(\mathrm{j}\omega_c+5)+K=0,$$

得根轨迹与虚轴的交点 $\omega_c=\pm\sqrt{5}$.

求解方程

$$0-(3s^2+12s+5)=0$$

得根轨迹上的分离点为 $s=\frac{\sqrt{21}-6}{3}$.

完整的根轨迹如图 3 所示.

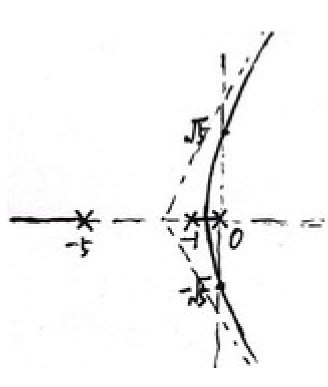

图 3

2. (1) 特征方程为

$$s^4+5s^3+9s^2+(K+5)s+3K=0.$$

劳斯阵列如下

$$\begin{bmatrix}1 & 9 & 3K & 0\\ 5 & K+5 & 0 & 0\\ \frac{40-K}{5} & 3K & 0 & 0\\ \frac{K^2+40K-200}{K-40} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

系统稳定当且仅当

$$40-K>0,$$
$$K^2+40K-200<0.$$

解得

$$0<K<-20+10\sqrt{6}.$$

(2) 特征方程的 Evans 形式为 $1+KL(s)$, 其中

$$L(s)=\frac{s+3}{s(s+1)(s^2+4s+5)}.$$

$L(s)$ 的零点为 $s=-3$, 极点为 $s=0,-1,-2\pm\mathrm{j}$.

故根轨迹渐近线与实轴的夹角为$\phi=60^\circ,180^\circ,300^\circ$, 与实轴的交点为 $\alpha=-\frac{5}{3}$.

根轨迹始于 $-2\pm\mathrm{j}$ 的分支的出射角为 0°.

求解方程

$$(\mathrm{j}\omega_c)^4+5(\mathrm{j}\omega_c)^3+9(\mathrm{j}\omega_c)^2+(K+5)(\mathrm{j}\omega_c)+3K=0,$$

得根轨迹与虚轴的交点 $\omega_c=\pm\sqrt{-3+2\sqrt{6}}$, 对应的 K 值为 $-20+10\sqrt{6}$.

求解方程

$$(s^4+5s^3+9s^2+5s)-(s+3)(4s^3+15s^2+18s+5)=0$$

得根轨迹上的分离点为 $s\approx-0.46245$ 与 $s\approx-3.56114$.

根轨迹如图 4 所示.

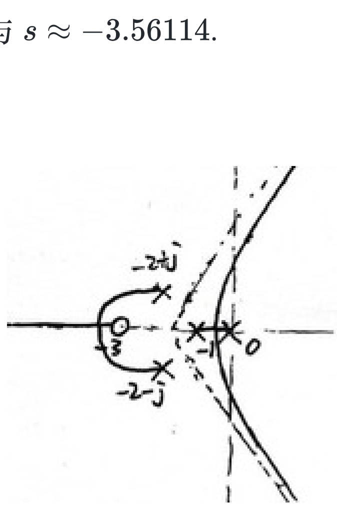

图 4

3. (1) 闭环传递函数为

$$G_c(s)=\frac{1+\tau s}{s^2+(\tau+0.2)s+1}.$$

特征方程的 Evans 形式为 $1+\tau L(s)$, 其中

$$L(s)=\frac{s}{s^2+0.2s+1},$$

其零点为 $s=0$, 极点为 $s=-0.1\pm0.3\sqrt{11}$.

根轨迹始于 $-0.1\pm0.3\sqrt{11}$ 的分支出射角为 0°. 求解方程

$$(s^2+0.2s+1)-s(2s+0.2)=0,$$

得分离点为 $s=-1$. 根轨迹如图 5 所示.

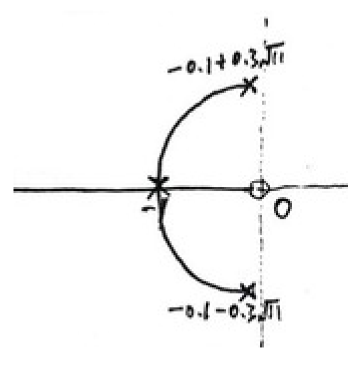

图 5

(2) $\omega_n^2=1, 2\zeta\omega=\tau+0.2$, 故 $\tau=2\zeta-0.2=0.8$. 此时, 闭环传递函数为

$$G_c(s)=\frac{1+0.8s}{s^2+s+1}.$$

4. (1) 特征方程的 Evans 形式为 $1+KL(s)$, 其中

$$L(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)},$$

无零点, 极点为 $s=-1,2$.

故渐近线与实轴的夹角为 $\phi=\pm90^\circ$, 与实轴的交点为 $\alpha=0.5$.

求解方程$2s-1=0$, 得根轨迹上的分离点为 $s=0.5$.

根轨迹如图 6 所示.

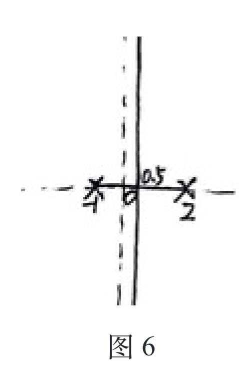

图 6

存在一条根轨迹的分支, 当 $K>0$ 时, 其上的闭环极点始终位于右半平面, 故系统不稳定.

(2) 特征方程为

$$s^2-s-2+K(1+\frac{1}{3}s)=0.$$

劳斯阵列为

$$\begin{bmatrix}1 & K-2 & 0\\ \frac{K}{3}-1 & 0 & 0\\ K-2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

系统稳定当且仅当

$$\frac{K}{3}-1>0,\quad K-2>0,$$

即 $K>3$.

(3) 取 $K=6$, 则闭环传递函数为

$$G_c(s)=\frac{2(s+3)}{s^2+s+4}$$

作后向差分变换

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T}$$

得离散系统的传递函数为

$$G_c(z)=\frac{-2Tz^{-1}+6T^2+2T}{z^{-2}-(T+2)z^{-1}+4T^2+T+1}.$$

相应的差分方程为

$$y(k-2)-(T+2)y(k-1)+(4T^2+T+1)y(k)=-2Tx(k-1)+(6T^2+2T)x(k).$$

5. 特征方程为

$$s^3+ps^2+Ks+Kz=0,$$

闭环系统有 3 个极点, 其中一对共轭的主导极点为 $s=-2\pm\mathrm{j}2$; 另一极点 $s=p_0$ 位于负实轴, 其绝对值比主导极点的实部 大 $2\sim3$ 倍以上.

取 $p_0=-10$. 将 3 个极点代入特征方程得

$$16-8p+2K=0,$$
$$16+Kz-2K=0,$$
$$-1000+100p+Kz-10K=0.$$

解得 $K=48, p=14, Kz=80$. 故超前补偿环节为

$$D(s)=\frac{48s+80}{s+14}.$$