

# 单摆法测重力加速度

PB20061372 朱云沁 2021/4/5

## 实验题目：

单摆法测重力加速度

## 实验目的：

利用经典的单摆周期公式和所给的实验器材，设计一个单摆装置，测量本地的重力加速度 $g$ ，使得测量精度满足 $\frac{\Delta g}{g} < 1\%$ ，借此理解使用不确定度均分原理，并学会实验设计、误差分析的基本方法。

## 实验原理：

依据本实验精度要求，忽略摆球几何形状、摆的质量、空气浮力、摆角（ $\theta < 5^\circ$ ）对单摆周期 $T$ 的修正，则单摆周期公式近似为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

按照不确定度均分原理，在一定精度范围内测量周期 $T$ 、摆长 $l$ ，即可求出重力加速度 $g$ 。

## 实验器材：

卷尺、电子秒表、单摆（带标尺、平面镜，摆线长度可调）。

其中，卷尺最大允差 $\Delta_{尺} \approx 0.2cm$ ，秒表最大允差 $\Delta_{秒} \approx 0.01s$ ，摆球直径 $d \approx 2.00cm$ 。

## 实验设计：

由 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ，得

$$g = \frac{4\pi^2 l^2}{T^2}$$

按照最大不确定度公式估算，有

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T}$$

本实验精度要求为 $\frac{\Delta g}{g} < 1\%$ ，由不确定度均分原理，应有

$$\frac{\Delta l}{l} < 0.5\%, \quad \frac{\Delta T}{T} < 0.25\%$$

选用卷尺测量摆长，则摆长至少为 $\frac{\Delta_{尺}}{0.5\%} \approx \frac{0.2cm}{0.5\%} = 40.00cm$ 。理论上，增加摆长可以提高精度，故选取摆线长度 $l_{线} \approx 70.00cm$ 进行实验。若仅以摆线长度作为摆长，则 $\Delta l < 0.5\% \cdot l_{线} \approx 0.35cm$ ，因而摆球半径 $\frac{d}{2} \approx 1.00cm$ 对摆长的修正不可忽略。由于卷尺精度足以满足实验要求，摆球直径无须用游标卡尺测量。实际操作时，可沿摆线方向用卷尺测出摆线顶端到摆球相切处的距离作为摆长。

根据统计分析，实验者测量时间的精度近似为 $\Delta_{人} \approx 0.2s$ ，则秒表单次所测时间至少为 $\frac{\Delta_{秒} + \Delta_{人}}{0.25\%} \approx \frac{0.01s + 0.2s}{0.25\%} = 84.00s$ 。设每次测量单摆的 $n$ 个全周期 $T$ ，由公式估算得 $T \approx 1.679s$ ，则 $nT > 84.00s$   
 $\Rightarrow n \geq 50$ ，至少应测50个周期。

## 实验步骤：

- 1、 调节螺栓使立柱竖直，并调节标尺高度，使其上沿中点距悬挂点50cm。将电子秒表归零。
- 2、 使用卷尺测量摆线长度。重复6次。
- 3、 令摆球偏离平衡位置，使其以小角度（ $\theta < 5^\circ$ ）在平面内摆动，使用电子秒表测量50次全振动所需时间。重复6次。
- 4、 打乱支架平衡、标尺及平面镜位置，整理仪器。
- 5、 处理所记录的数据，计算重力加速度 $g$ ，并进行误差分析。

### 实验数据:

序号	摆长 $l/cm$	摆过 50 个周期的时间 $t/s$
1	73.48	86.13
2	73.73	86.07
3	73.59	86.17
4	73.62	86.07
5	73.52	86.34
6	73.55	86.08

图表 1: 原始数据

### 数据处理:

摆长的平均值为

$$\bar{l} = \frac{73.48 + 73.73 + 73.59 + 73.62 + 73.52 + 73.55}{6} cm = 73.582 cm$$

摆长的标准差为

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{(73.48 - 73.582)^2 + (73.73 - 73.582)^2 + (73.59 - 73.582)^2 + (73.62 - 73.582)^2 + (73.52 - 73.582)^2 + (73.55 - 73.582)^2}{6 - 1}} cm = 0.088 cm$$

摆长的展伸不确定度为

$$u_l = \sqrt{(t_p \frac{\sigma_l}{\sqrt{n}})^2 + (k_p \frac{\Delta_R}{c})^2} = \sqrt{(1.11 \times \frac{0.088}{\sqrt{6}})^2 + (1 \times \frac{0.05}{3})^2} cm = 0.04 cm, \quad P = 0.683$$

单摆周期的平均值为

$$\bar{T} = \frac{86.13 + 86.07 + 86.17 + 86.07 + 86.34 + 86.08}{6 \times 50} s = 1.723 s$$

单摆周期的标准差为

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{(\frac{86.13}{50} - 1.723)^2 + (\frac{86.07}{50} - 1.723)^2 + (\frac{86.17}{50} - 1.723)^2 + (\frac{86.07}{50} - 1.723)^2 + (\frac{86.34}{50} - 1.723)^2 + (\frac{86.08}{50} - 1.723)^2}{6 - 1}} s = 0.002 s$$

单摆周期的 B 类不确定度为

$$\Delta_{BT} = \frac{\sqrt{\Delta_{秒}^2 + \Delta_{人}^2}}{50} = 0.004 s$$

单摆周期的展伸不确定度为

$$u_T = \sqrt{(t_p \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}})^2 + (k_p \frac{\Delta_{BT}}{c})^2} = \sqrt{(1.11 \times \frac{0.002}{\sqrt{6}})^2 + (1 \times \frac{0.004}{3})^2} s = 0.0016 s, \quad P = 0.683$$

重力加速度的平均值为

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^2} = \frac{4 \times 3.142^2 \times 0.73582 m}{(1.723 s)^2} = 9.788 m/s^2$$

重力加速度的展伸不确定度为

$$u_g = \sqrt{1^2 (\frac{u_l}{\bar{l}})^2 + 2^2 (\frac{u_T}{\bar{T}})^2} \cdot \bar{g} = \sqrt{1^2 (\frac{0.04}{73.582})^2 + 2^2 (\frac{0.002}{1.723})^2} \cdot 9.788 m/s^2 = 0.023 m/s^2, \quad P = 0.683$$

经检验,  $\frac{\Delta g}{g} < 1\%$ , 满足实验要求。故最终测量结果的表达式为

$$g = (9.788 \pm 0.023) m/s^2, \quad P = 0.683$$

### 误差分析:

由上述计算值, 结果偏小, 其可能的原因有:

1. 测量摆长时, 实验者未能准确判断摆球重心位置导致测得摆长偏小;
2. 测量周期时, 实验者的反应时间导致测得周期偏大。