Математическая статистика

Маттиас Феттер
(пер. Александр Самарин)

2016

Оглавление

Глава 1

Условное математическое ожидание

В этой главе мы рассмотрим понятие условного математического ожидания, которое представляет собой важную основу не только для анализа статистических методов, но и в общей сложности для стохастической теории.

Замечание 1.1. Рассмотрим интегрируемую случайную величину: $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. После проведения эксперимента и наблюдения результата информация о случайной величине полностью известна:

$$\omega \mapsto X(\omega).$$

Перед проведением эксперимента неизвестно ничего о его итоге. В такой ситуации лучший способ предсказать его – это использование математического ожидания:

$$\omega \mapsto \mathbb{E}[X](\omega)$$

Условное математическое ожидание – лучшая аппроксимация случайной величины X, при условии что часть информации о ней известна.

Определение 1.2. Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ – измеримое пространство с заданными мерами μ и ν. Мера ν называется ***абсолютно непрерывной*** относительно μ (или же μ доминирует ν), если

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Обозначение: $\nu \ll \mu$.

Теорема 1.3 (**Теорема Радона-Никодима**). *Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ – измеримое пространство с заданными мерами μ и ν. Если μ σ-конечная, то следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\nu \ll \mu$.

(ii) Существует $\mathcal{A}$-измеримая неотрицательная функция f, такая что:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, ν обладает плотностью f по μ. В качестве обозначения плотности часто используется т.н. ***производная Радона-Никодима****:*

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Доказательство: Теорема 17.10 в [1].

Определение 1.4. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ – σ-алгебра. Случайная величина $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ называется ***условным математическим ожиданием*** X относительно $\mathcal{F}$, если:

(i) Y $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$-измеримая[1],

(ii) $\mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[Y 1_A] \quad \forall A \in \mathcal{F}$.

Теорема 1.5. *Условное математическое ожидание X относительно $\mathcal{F}$ существует и единственно почти всюду.*

Доказательство: *Единственность.* Пусть Y и $\overline{Y}$ – два условных математических ожидания. Определим множество $A = \{\omega \mid Y(\omega) > \overline{Y}(\omega)\}$. Тогда, согласно Определению 1.4 (ii):

$$\mathbb{E}[(Y - \overline{Y})1_A] = \mathbb{E}[Y 1_A] - \mathbb{E}[\overline{Y} 1_A] = 0.$$

Так как $(Y - \overline{Y})1_A \geq 0$, то $\mathbb{P}(A) = 0$. Таким же образом доказывается, что $\mathbb{P}(Y < \overline{Y}) = 0$.

Существование. Представим $X = X^+ - X^-$ в виде разницы положительной и отрицательной случайных величин. Зададим две меры на $(\Omega, \mathcal{F})$:

$$\mathbb{Q}^{\pm}(A) = \mathbb{E}[X^{\pm} 1_A], \quad A \in \mathcal{F}.$$

Они обе абсолютно непрерывны относительно меры $\mathbb{P}$. По Теореме 1.3 существуют такие $\mathcal{F}$-измеримые плотности $Y^{\pm}$, что

$$\mathbb{Q}^{\pm}(A) = \int_A Y^{\pm} d\mathbb{P} = \mathbb{E}[Y^{\pm} 1_A].$$

В таком случае, $Y = Y^+ - Y^-$ – условное математическое ожидание.

Замечание 1.6. Для условного математического ожидания X относительно $\mathcal{F}$ мы будем использовать обозначение $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$, что в соответствии с предыдущей теоремой должно пониматься как равенство $\mathbb{P}$-почти наверное. Если $X = 1_C$ для $C \in \mathcal{A}$, то условная вероятность X при условии $\mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(C|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[1_C|\mathcal{F}].$$

Определение 1.7. Пусть Y – случайная величина (не обязательно интегригруемая) в пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Тогда ***условное ожидание X относительно*** Y:

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)],$$

где $\sigma(Y)$ обозначает σ-алгебру, порожденную Y.

Лемма 1.8. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ – σ-алгебра и X, Y – интегрируемые случайные величины, принимающие действительные значения. Тогда выполняются следующие свойства:*

(i) ***Линейность****. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y|\mathcal{F}] = \alpha \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \beta \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}].$$

(ii) ***Монотонность****. Если $X \leq Y$ $\mathbb{P}$-п.н., то $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ $\mathbb{P}$-п.н.*

Доказательство:

(i) Правая часть равенства $\mathcal{F}$-измерима. Следовательно, для любого множества $A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{E}[(\alpha X + \beta Y)1_A] = \alpha \mathbb{E}[1_A X] + \beta \mathbb{E}[1_A Y] = \mathbb{E}[1_A(\alpha \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \beta \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}])].$$

(ii) Зададим множество $A = \{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] < 0\} \in \mathcal{F}$. Тогда:

$$0 \geq \int_A (\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]) d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X - Y|\mathcal{F}] d\mathbb{P} = \int_A (X - Y) d\mathbb{P} \geq 0.$$

Следовательно, $\mathbb{P}(A) = 0$.

[1] $Y^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}$

Пример 1.9.

(i) Если $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, то $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ по определению постоянная и с выбором $A = \Omega$ в (ii) следует:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X].$$

Это соответствует ситуации, когда никакой дополнительной информации об итоге эксперимента неизвестно.

(ii) Если $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$, то $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$.

(iii) Пусть множество $A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) \in (0,1)$ и $\mathcal{F} = \sigma(A) = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$. Вследствие $\mathcal{F}$-измеримости условное ожидание $\mathbb{E}[X|A]$ является постоянной:

$$\mathbb{E}[X|A] = \Big(\mathbb{P}(A)^{-1} \int_A X d\mathbb{P}\Big) 1_A + \Big(\mathbb{P}(A^c)^{-1} \int_{A^c} X d\mathbb{P}\Big) 1_{A^c}.$$

В случае, если семейство элементарных событий составляют непересекающиеся множества $(\Omega = A_1 \cup \ldots A_n)$ с положительными вероятностями, то:

$$\mathbb{E}[X|A_1, \ldots, A_n] = \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathbb{P}(A_i)^{-1} \int_{A_i} X d\mathbb{P}\Big) 1_{A_i}.$$

Теорема 1.10 (Монотонная сходимость). *Пусть $X_n \geq 0$ – последовательность интегрируемых случайных величин, такая что $X_n \nearrow X$. Тогда существует $\mathcal{F}$-измеримая случайная величина Y, такая что $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] \nearrow Y$. В частности,*

$$\mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[Y 1_a] \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

и это выполняется, если X интегрируемая в понимании обычного условного математичесого ожидания.

Доказательство: По свойству монотонности математического ожидания последовательность $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}]$ возрастает. Следовательно, Y – поточечный предел последовательности $\mathcal{F}$-измеримых функций, который также $\mathcal{F}$-измеримый. В дополнение, так как $X_n \nearrow X$, то $X_n 1_A \nearrow X 1_A$, и мы получаем классическую теорему о монотонной сходимости:

$$\mathbb{E}[X 1_A] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n 1_A] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}]|1_A] = \mathbb{E}[Y 1_A].$$

Замечание 1.11.

(i) Теорема 1.10 также показывает, что условное математическое ожидание существует для X, если задать последовательность $X_n = \min(X, n)$.

(ii) Лемма 1.8 и Теорема 1.10 доказывают лишь некоторые свойства ожидаемых значений, которые могут быть обобщены до условных ожиданий. Последующие примеры включают неравенство Коши-Шварца, неравенство Йенсена и вариант теоремы о мажорируемой сходимости.

Теорема 1.12. *Пусть X и Y – случайные величины, такие что $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ и Y $\mathcal{F}$-измеримая, тогда*

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}].$$

Другими словами, мы вытаскиваем из-под условного математического ожидания все, что известно.

Доказательство: Случайная величина $Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ $\mathcal{F}$-измеримая. Остается доказать:

$$\mathbb{E}[XY1_A] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]1_A] \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Используем индукцию из теории меры:

(i) Пусть $Y = 1_B$, $B \subset \mathcal{F}$. Тогда

$$\mathbb{E}[XY1_A] = \mathbb{E}[X1_{A\cap B}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]1_{A\cap B}] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]1_A].$$

(ii) Обобщаем равенство до ступенчатых функций и используем свойство линейности (Лемма 1.8).

(iii) Для $X \geq 0$ и $Y \geq 0$ используем (ii) и монотонную сходимость (Теорема 1.10).

(iv) Раскладываем случайные величины X и Y на положительную и отрицательную части: $X = X^+ - X^-$ и $Y = Y^+ - Y^-$.

Теорема 1.13 (**Башенное свойство**). *Пусть X – интегрируемая случайная величина на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ – σ-алгебры, такие что $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{A}$. Тогда*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]\mathcal{F}_2].$$

Доказательство: Первое равенство: для любого множества $A \in \mathcal{F}_1$

$$\int_A \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1]d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]d\mathbb{P}.$$

Второе равенство следует из Теоремы 1.12, так как случайная величина $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$ $\mathcal{F}_2$-измерима.

Теорема 1.14 (**Независимость**). *Пусть X – интегрируемая случайная величина и $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ – σ-алгебры, такие что $\mathcal{G}$ и $\sigma(\sigma(X), \mathcal{F})$ независимы. Тогда:*

$$\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}].$$

Доказательство: Условное ожидание $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-измеримое. Остается показать, что

$$\mathbb{E}[X1_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]|1_A] \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Все множества, удовлетворяющие этому равенству составляют систему Динкина[2]. Нужно показать, что семейство этих множеств замкнуто относительно операции пересечения. Пусть $F \in \mathcal{F}$ и $D \in \mathcal{D}$, тогда:

$$\mathbb{E}[X1_{F\cap G}] = \mathbb{E}[1_G(1_F X)] = \mathbb{E}[1_G]\mathbb{E}[1_F X] = \mathbb{E}[1_G]\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]1_F] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]1_{F\cap G}].$$

Следствие 1.15. *Пусть $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ – σ-алгебра. Тогда:*

(i) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]] = \mathbb{E}[X]$ *(итерированное ожидание).*

(ii) Если X не зависит от $\mathcal{H}$, то $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X]$.

Доказательство:

[2]Семейство $\mathcal{D}$ подмножеств множества Ω называется ***системой Динкина*** (или ***λ-системой***), если оно удовлетворяет следующим свойствам:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(ii) $A \in \mathcal{D} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{D}$,

(iii) Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{D}$ – непересекающиеся множества, то $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Иными словами, система Динкина, замкнутая относительно конечного числа пересечений, образует σ-алгебру.

(i) Теорема 1.13 для $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset\}$.

(ii) Теорема 1.14 для $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ и $\mathcal{G} = \mathcal{H}$.

Пример 1.16.

(i) Предположим, что X и Y дискретные случайные величины, т.е. существуют счетные подмножетсва $I_X, I_Y \subset \mathbb{R}$, такие что $\mathbb{P}(X \in I_X) = \mathbb{P}(Y \in I_Y) = 1$. Зададим для $x \in I_X$ и $y \in I_y$ условную вероятность (при $\mathbb{P}(Y = y) > 0$):

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} =: \frac{p_{xy}}{p_y}.$$

Тогда $\mathbb{E}[X|Y] = g(Y)$ (если $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), где

$$g(y) : \begin{cases} \sum_{x \in I_X} x \frac{p_{xy}}{p_y}, & p_y > 0, \\ 0, & p_y = 0. \end{cases}$$

(ii) Предположим, что X и Y имеют плотность $f_{X,Y}(x, y)$ относительно меры Лебега. Функции

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy \quad \text{и} \quad f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x, y)dx$$

называются ***маргинальными плотностями***. Если мы зададим

$$g(y) : \begin{cases} \int x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx, & f_Y(y) > 0, \\ 0, & f_Y(y) = 0, \end{cases}$$

то $\mathbb{E}[X|Y] = g(Y)$.

Доказательство:

(i) Функция $g(Y) = \sigma(Y)$-измеримая, так как она является измеримой по Борелю. Также пусть $B \in \mathcal{B}$ и $F = \{Y \in B\} \in \sigma(Y)$. Тогда

$$\mathbb{E}[g(Y)1_F] = \sum_{y \in B \cap I_y} \sum_{x \in I_x} x \frac{p_{xy}}{p_y} 1_{\{p_y > 0\}} p_y = \sum_{x \in I_x} \sum_{y \in B \cap I_y} x p_{xy} = \mathbb{E}[X 1_F].$$

(ii) По теореме Фубини[3] имеет место измеримость $y \mapsto \int x f(x, y)dx$ и $y \mapsto \int f(x, y)dx$. Следовательно, g измерима. В заключение, пусть $F = \{Y \in B\} \in \sigma(Y)$. Тогда,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(Y)1_F] &= \int_B g(y) f_Y(y) 1_{\{f_Y(y) > 0\}} dy \\ &= \int_B \frac{\int x f_{X,Y}(x, y)dx}{f_Y(y)} f_Y(y) 1_{\{f_Y(y)>0\}} dy \\ \text{т. Фубини} \rightarrow &= \int x \int_B 1_{\{f_Y(y)>0\}} f_{X,Y}(x, y) dy dx = \mathbb{E}[X 1_F]. \end{aligned}$$

Замечание 1.17. В предыдущем примере мы увидели, что $\mathbb{E}[X|Y]$ принимает форму функции $g(Y)$, где g – измеримая функция. Это необходимое свойство.

---

[3] Пусть даны два пространства с σ-конечными мерами $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$. Обозначим через $(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ их произведение. Пусть функция $f \colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ интегрируема относительно меры $\mu_1 \otimes \mu_2$. Тогда

(a) Функция $x_1 \mapsto \int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2)$ определена и интегрируема относительно μ_1.

(b) Функция $x_2 \mapsto \int\limits_{X_1} f(x_1, x_2)\mu_1(dx_1)$ определена и интегрируема относительно μ_2.

(c) $\iint\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\mu_1 \otimes \mu_2(dx_1, dx_2) = \int\limits_{X_1} \int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2)\mu_1(dx_1) = \int\limits_{X_2} \int\limits_{X_1} f(x_1, x_2)\mu_1(dx_1)\mu_2(dx_2)$.

Теорема 1.18 (Лемма о факторизации). *Пусть $Y : \Omega \to \Omega'$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-измерима и $Z : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-измерима. Тогда Z $\sigma(Y)$-$\overline{\mathcal{B}}$-измерима тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{A}'-\overline{\mathcal{B}}$-измеримая функция $g : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$, такая что $Z = g \circ Y$.*

Доказательство:

"$\Longleftarrow$" Y $\sigma(Y)$-$\mathcal{A}'$-измерима и g $\mathcal{A}'$-$\overline{\mathcal{B}}$-измерима. Следовательно, $g \circ Y$ $\sigma(Y)$-$\overline{\mathcal{B}}$-измерима.

"$\Longrightarrow$" Пусть $Z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, где $A_i \in \sigma(Y)$. Тогда, существуют $A'_i \in \mathcal{A}'_i$, такие что $A_i = Y^{-1}(A'_i)$. Тогда, пусть $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A'_i}$. В общем случае, любая $\sigma(Y)$-$\overline{\mathcal{B}}$-измеримая функция Z является пределом таких элементарных функций.

Теорема 1.19. *Пусть $X : \Omega \to \mathbb{R}$ и $Y : \Omega \to \Omega'$ – случайные величины и $\mathbb{E}[X] < \infty$. Тогда любая $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-измеримая функция $g : \Omega' \to \mathbb{R}$, такая что $\mathbb{E}[X|Y] = g(Y)$ $\mathbb{P}^Y$-интегрируема, удовлетворяет*

$$\int_{A'} g d\mathbb{P}^Y = \int_{\{Y \in A'\}} X d\mathbb{P} \quad \forall A' \in \mathcal{A}' \tag{1.1}$$

и $\mathbb{P}^Y$-п.н. единственная. И наоборот, если $g : \Omega' \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-измерима и удовлетворяет (1.1), то $g(Y)$ – версия[4] математического ожидания.

Доказательство:

"$\Longrightarrow$" Для любого $A' \in \mathcal{A}'$ имеет место

$$\int_{\{Y \in A'\}} X d\mathbb{P} = \int_{\{Y \in A'\}} \mathbb{E}[X|Y] d\mathbb{P} = \int_{\{Y \in A'\}} g \circ Y d\mathbb{P} = \int_{A'} g d\mathbb{P}^Y.$$

$\mathbb{P}^Y$-интегрируемость g следует из (1.1). Предположим, что $\mathbb{E}[X|Y] = h(Y)$, тогда

$$\int_{A'} g d\mathbb{P}^Y = \int_{A'} h d\mathbb{P}^Y \quad \forall A' \in \mathcal{A}',$$

вследствие (1.1). Разложив функции на положительные и отрицательные части:

$$g = g^+ - g^- \quad \text{и} \quad h = h^+ - h^-,$$

получаем

$$\int_{A'} (g^+ + h^-) d\mathbb{P}^Y = \int_{A'} (h^+ + g^-) d\mathbb{P}^Y \quad \forall A' \in \mathcal{A}'.$$

Как и в доказательстве Теоремы 1.5:

$$g^+ + h^- = h^+ + g^- \quad \mathbb{P}^Y - \text{п.н.} \quad \Rightarrow \quad g^+ - g^- = h^+ - h^- \quad \mathbb{P}^Y - \text{п.н.}$$

"$\Longleftarrow$" $g \circ Y$ $\sigma(Y)$-$\overline{\mathcal{B}}$-измеримая по определению. Используя замену переменных и (1.1), мы получаем:

$$\int_{\{Y \in A'\}} g \circ Y d\mathbb{P} = \int_{A'} g d\mathbb{P}^Y = \int\limits_{\{Y \in A'\}} X d\mathbb{P} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'.$$

Следовательно,

$$\int_C g \circ Y d\mathbb{P} = \int_C X d\mathbb{P} \quad \forall C \in \sigma(Y)$$

и также $g \circ Y = \mathbb{E}[X|Y]$.

[4]Версия от версии отличается не более чем на множестве нулевой меры Лебега.

Пример 1.20. Рассмотрим $(\Omega', \mathcal{A}')$, где $\{y\} \in \mathcal{A}'$ для определенного события $y \in \Omega'$. В этом случае (1.1) следует читать следующим образом:

$$\int_{\{y\}} g d\mathbb{P}^Y = g(y)\mathbb{P}(Y = y) = \int_{\{Y=y\}} X d\mathbb{P}.$$

Если $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, то

$$g(y) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y)} \int_{\{\mathbb{P}(Y=y)\}} X d\mathbb{P} =: \mathbb{E}[X|Y = y].$$

В большинстве случаев $\mathbb{P}(Y = y) = 0$.

Определение 1.21. Пусть $X : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема и $Y : \Omega \to \Omega'$. Если g удовлетворяет равенству (1.1) и $\mathcal{A}'$-$\mathcal{B}$-измерима и $\mathbb{P}^Y$-интегрируема, тогда

$$g(y) := \mathbb{E}[X|Y = y]$$

называется ***математическим ожиданием*** X ***при условии*** $Y = y$.

Замечание 1.22. В общем случае, $\mathbb{E}[X|Y]$ – случайная величина, которая принимает различные значения в соответствии с реализацией $\omega \mapsto Y(\omega)$. В свою очередь, $\mathbb{E}[X|Y = y]$ – вещественное число, принадлежащее реализации $Y(\omega) = y$.

Пример 1.23. Мы уже посчитали $\mathbb{E}[X|Y]$ в двух важных случаях (см. Пример 1.16):

(i) Для дискретных случайных величин X и Y, мы получаем:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = g(y) = \begin{cases} \sum_{x \in I_X} x \frac{p_{xy}}{p_y}, & p_y > 0, \\ 0, & p_y = 0. \end{cases}$$

(ii) Для непрерывных:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = g(y) = \begin{cases} \int x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y) > 0, \\ 0, & f_Y(y) = 0. \end{cases}$$

Оба равенства схожи с формулами для стандартного математического ожидания, за исключением того, что мы замещаем p_x и $f_X(x)$ их условными версиями:

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{p_{xy}}{p_y} \quad \text{и} \quad f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Если X и Y независимы, то мы получаем обыкновенное математическое ожидание (см. Следствие 1.15).

Замечание 1.24. В начале главы, мы заметили, что $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ – лучшая аппроксимация X при условии $\mathcal{F}$. Давайте, опишем это строго.

Теорема 1.25. *Пусть* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Тогда для любой случайной величины* $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *соблюдается неравенство*

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] \geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2],$$

которое вырождается в равенство тогда и только тогда, когда $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ *п.н.*

Доказательство: Из условного неравенства Йенсена и Следствия 1.15 следует:

$$\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X^2] < \infty.$$

Далее, используя Следствие 1.15 и Теорему 1.12, получаем

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]]$$

и

$$\mathbb{E}[X\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|\mathcal{F}]].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-Y)^2] - \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2] &= \mathbb{E}[X^2 - 2XY + Y^2] - \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + (\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2] \\ &= \mathbb{E}[Y^2 - 2\mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] + (\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2] \\ &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2] \geq 0.\end{aligned}$$

Упражнения

1.1. Пусть X – конечная интегрируемая вещественнозначная случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ – σ-алгебра.

(i) Докажите ***условное неравенство Йенсена***: для любой выпуклой функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{F}] \quad \mathbb{P}\text{-п.н.}$$

Подсказка: для любой выпуклой функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существует последовательность $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$, такая что равенство

$$\varphi = \sup_{(a_n, b_n)} (a_n x + b_n)$$

соблюдается $\forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Докажите, что

$$\|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\|_p \leq \|X\|_p \quad \forall p \geq 1,$$

где $\| \cdot \|_p = (\mathbb{E}[| \cdot |^p])^{1/p}$.

1.2. Пусть X – вещественнозначная случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ – σ-алгебра. ***Условная дисперсия*** задается следующим образом:

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2|\mathcal{F}].$$

Покажите, что

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{F})] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X]|\mathcal{F}).$$

1.3. Пусть $X = (X_1, X_2)^T \in \mathbb{R}^2$ – двумерный нормально распределенный случайный вектор: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, с математическим ожиданием $\mu = (0, 0)^T$ и ковариационной матрицей

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что

$$\mathbb{E}[X_1|X_2] = \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}X_2.$$

1.4. Пусть X, Y – две случайные величины с совместной плотностью

$$f_{X,Y}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x - y) 1_{(0,\infty)}(y).$$

(i) Найдите маргинальные плотности f_X и f_Y. Что это за распределения?

(ii) Вычислите $\mathbb{E}[Y|X]$.

(iii) Покажите, что $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$.

1.5. Пусть X и Y – две вещественнозначные случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и $\varphi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-измеримая функция. Покажите с помощью теоремы Фубини, что для функции $g : x \mapsto \mathbb{E}[\varphi(x, Y)]$ выполняется равенство

$$g(X) = \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|X] \quad \mathbb{P}\text{-п.н.}$$

Глава 2

Основы точечного оценивания

Пример 2.1. Перед введением лекарства в производство проводятся опыты на животных для оценки его качества в зависимости от дозирования. Обследуется животное и проверяется, выздоровело ли оно или нет, приняв дозу X. Модель:

$$Y \sim Bin(1, p(X)),$$

где $p(X)$ - вероятность выздоровления животного, принявшего дозу X. Как правило, обследуется несколько животных: $Y_1, \ldots, Y_n$. Предположим, что эти случайные величины независимы. Подбираем различные дозы $X_1, \ldots, X_n$ таким образом, что:

$$Y_i \sim Bin(1, p(X_i)).$$

Цель: оценить функцию $p : [0, \infty) \to [0, 1]$. Упрощение: "параметрическая модель". Типичный пример:

$$p(x) = 1 - e^{-\beta x}, \quad \beta > 0.$$

Следовательно, оценка функции $p(x)$ эквивалентна оценке параметра β.

Предположение 2.2. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ – измеримое пространство и $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ – случайная величина. Зададим

$$P(B) = \mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Тогда $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$ является вероятностным пространством, $\mathcal{X}$ называется ***выборочным пространством***, а $x = X(\omega)$ – ***выборкой***.

Определение 2.3. Пусть $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B}$ – σ-алгебра на $\mathcal{X}$ и $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – семейство вероятностных мер на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, в котором $|\Theta| \geq 2$ и $P_\vartheta \neq P_{\vartheta'}$ для любых $\vartheta \neq \vartheta'$. Тогда Θ называется ***вероятностным пространством*** и $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ называется ***статистическим экспериментом***.

Замечание 2.4. Интерпретация: мы заинтересованы в реальном распределении $P \in \mathcal{P}$ случайной величины $X : \Omega \to \mathcal{X}$. На основе выборки $x = X(\omega)$ принимаем решение о неизвестном распределениии P. Идентифицируя $\mathcal{P}$ с параметрическим пространством Θ, выбор P эквивалентен выбору ϑ.

Пример 2.5. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы и имеют распределение:

$$Y_i \sim Bin(1, p(X_i)) = Bin(1, 1 - \exp(-\beta X_i)) = P_i^\beta.$$

Формально, составляющие статистического эксперимента:

$$\mathcal{X} = \{0, 1\}^n, \quad \mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathcal{X}), \quad \mathcal{P} = \{\otimes_{i=1}^n P_i^\beta \mid \beta > 0\}, \quad \Theta = [0, \infty)\,.$$

Определение 2.6. Пусть $(\Gamma, \mathcal{A}_\Gamma)$ – измеримое пространство и $\gamma : \Theta \to \Gamma$ – отображение. Измеримая функция

$$g : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to \Gamma(\mathcal{A}_\Gamma)$$

называется ***(точечной) оценкой*** $\gamma(\vartheta)$.

Пример 2.7.

(i) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = P_{\mu,\sigma^2}$, $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ и

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}^n, \quad \mathcal{P} = \{\otimes_{i=1}^n P_{\mu,\sigma^2} \mid \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}, \quad \Theta = \mathbb{R} \times [0, \infty)\,.$$

Типичная оценка для параметра $\gamma(\vartheta) = \vartheta = (\mu, \sigma^2)$:

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \Theta \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} \overline{x}_n \\ \hat{s}_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_n)^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(ii) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim F$, где $F(x) = \mathbb{P}(X_i \le x)$ – неизвестная функция распределения. В этом случае Θ – бесконечномерное семейство всех функций распределения. Если мы заинтересованы в значении функции только в одной точке:

$$\gamma : \begin{cases} \Theta & \to & \Gamma = [0,1] \\ F & \mapsto & F(0) = \mathbb{P}(X_i \le 0), \end{cases}$$

то точечная оценка будет:

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \Gamma \\ x & \mapsto & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \le 0\}}. \end{cases}$$

Замечание 2.8. Из предыдущего примера становится ясно, зачем нужно вводить отображение $\gamma : \Theta \to \Gamma$, поскольку мы не всегда заинтересованы в значении самого параметра ϑ, но в подходящем функционале.

Определение 2.9. Измеримая функция $L : \Gamma \times \Gamma \to [0, \infty)$ называется ***функцией потерь***. Для точечной оценки $g : \mathcal{X} \to \Gamma$ функция

$$R(\cdot, g) : \begin{cases} \Theta & \to & [0, \infty) \\ \vartheta & \mapsto & \mathbb{E}[L(\gamma(\vartheta), g(X))] = \int_{\mathcal{X}} L(\gamma(\vartheta), g(x)) P_\vartheta(dx) \end{cases}$$

называется ***риском*** g от L.

Замечание 2.10. Если ϑ – истинный параметр, а $g(x)$ – оценка, то функция $L(\gamma(\vartheta), g(x))$ измеряет соответствующие потери. Если Γ – измеримое пространство, то, как правило, функции потерь зависят от дистанции между $\gamma(\vartheta)$ и $g(x)$, например квадратичная функция потерь $L(x, y) = (x - y)^2$ для $\Gamma = \mathbb{R}$. Тогда риск – это ожидаемые потери.

Определение 2.11. Пусть L – функция потерь и $\gamma(\vartheta)$ – оцениваемый параметр. Если $\mathcal{K}$ – множество всех точечных оценок $\gamma(\vartheta)$, то $g^* \in \mathcal{K}$ называется ***равномерно лучшей оценкой***, если

$$R(\vartheta, g^*) = \inf_{g \in \mathcal{K}} R(\vartheta, g) \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Пример 2.12. Как правило, не существует равномерно лучших оценок, как и не существует оценки, которая была бы равномерно лучше другой. Например, пусть

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{P} = \{P_\mu = \mathcal{N}(\mu, 1) \mid \mu \in \mathbb{R}\}, \quad \gamma(\mu) = \mu$$

и функция потерь квадратичная. Возьмем тривиальную оценку $g_\nu(x) = \nu$. Тогда риск:

$$R(\mu, g_\nu) = \mathbb{E}_\mu[(\mu - \nu)^2] = (\mu - \nu)^2.$$

В частности, $R(\nu, g_\nu) = 0$. Таким образом, никакая оценка g_ν не является равномерно лучшей, чем некоторая g_μ. Также, чтобы получить равномерно лучшую оценку равенство

$$\mathbb{E}_\mu[(g^*(X) - \mu)^2] = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad \iff \quad g^*(x) = \mu \ P_\mu\text{-п.н.} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

должно выполняться, что приводит к противоречию.

Замечание 2.13. Для того, чтобы всё же найти "оптимальную" оценку, можно выбрать две опции:

(i) ограничиться подклассами $\overline{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}$

(ii) выбрать иной критерий, нежели равномерно меньший риск

Определение 2.14.

(i) Оценка $g^* \in \mathcal{K}$ называется ***допустимой***, если не существует такой оценки $g \in \mathcal{K}$, что

$$R(\vartheta, g) \leq R(\vartheta, g^*) \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

и хотя бы для одного значения $\vartheta^* \in \Theta$

$$R(\vartheta^*, g) < R(\vartheta^*, g^*).$$

(ii) Класс $\tilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}$ называется ***полным***, если для любой оценки $g \in \mathcal{K} \backslash \tilde{\mathcal{K}}$ существует такая оценка $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{K}}$, что

$$R(\vartheta, \tilde{g}) \leq R(\vartheta, g) \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Если класс $\tilde{\mathcal{K}}$ не содержит полного подкласса, то $\tilde{\mathcal{K}}$ называется ***минимальным полным*** классом.

Замечание 2.15. Оценки наподобие $g_\nu(x) = \nu$ являются допустимыми, так что даже априори плохие оценки допустимые или принадлежат полным классам. Как следствие, мы нуждаемся в больших ограничениях.

Определение 2.16.

(i) Пусть g – оценка функции $\gamma : \Theta \to \Gamma$. Тогда,

$$B_\vartheta(g) = \mathbb{E}_\vartheta[g(X)] - \gamma(\vartheta)$$

называется ***смещением*** g. Оценка g называется ***несмещенной***, если

$$B_\vartheta(g) = 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

(ii) Оценка g^* называется ***несмещенной с равномерно минимальной дисперсией (UMVU)***, если

$$g^* \in \mathcal{E}_\gamma = \{g \mid g \text{ несмещенная и } g \in L^2(P_\vartheta)\}$$

и

$$\mathrm{Var}_\vartheta(g^*(X)) = \mathbb{E}[(g^*(X) - \gamma(\vartheta))^2] = \inf_{g \in \mathcal{E}_\gamma} \mathrm{Var}(g(X)) \quad \forall \vartheta \in \Theta. \tag{2.1}$$

Замечание 2.17.

(i) Оценки, удовлетворяющие равенству (2.1) лишь для одного значения $\vartheta \in \Theta$ называются локально оптимальными. Так как истинное значение ϑ неизвестно, то на практике это неприменимо.

(ii) Если в качестве функции потерь мы выбираем $L(x, y) = (x - y)^2$, то для любой оценки $g \in L^2(P_\vartheta)$ величина

$$MSE_\vartheta(g) = R(\vartheta, g) = \mathbb{E}_\vartheta[(g(X) - \gamma(\vartheta))^2] = Var_\vartheta(g(X)) + B_\vartheta^2(g)$$

называется ***среднеквадратической ошибкой***. Если g несмещенная, то

$$MSE_\vartheta(g) = \mathrm{Var}_\vartheta(g(X)).$$

(iii) Аналогичное определение для несмещенных оценок g, если $\gamma : \Theta \to \mathbb{R}^d$.

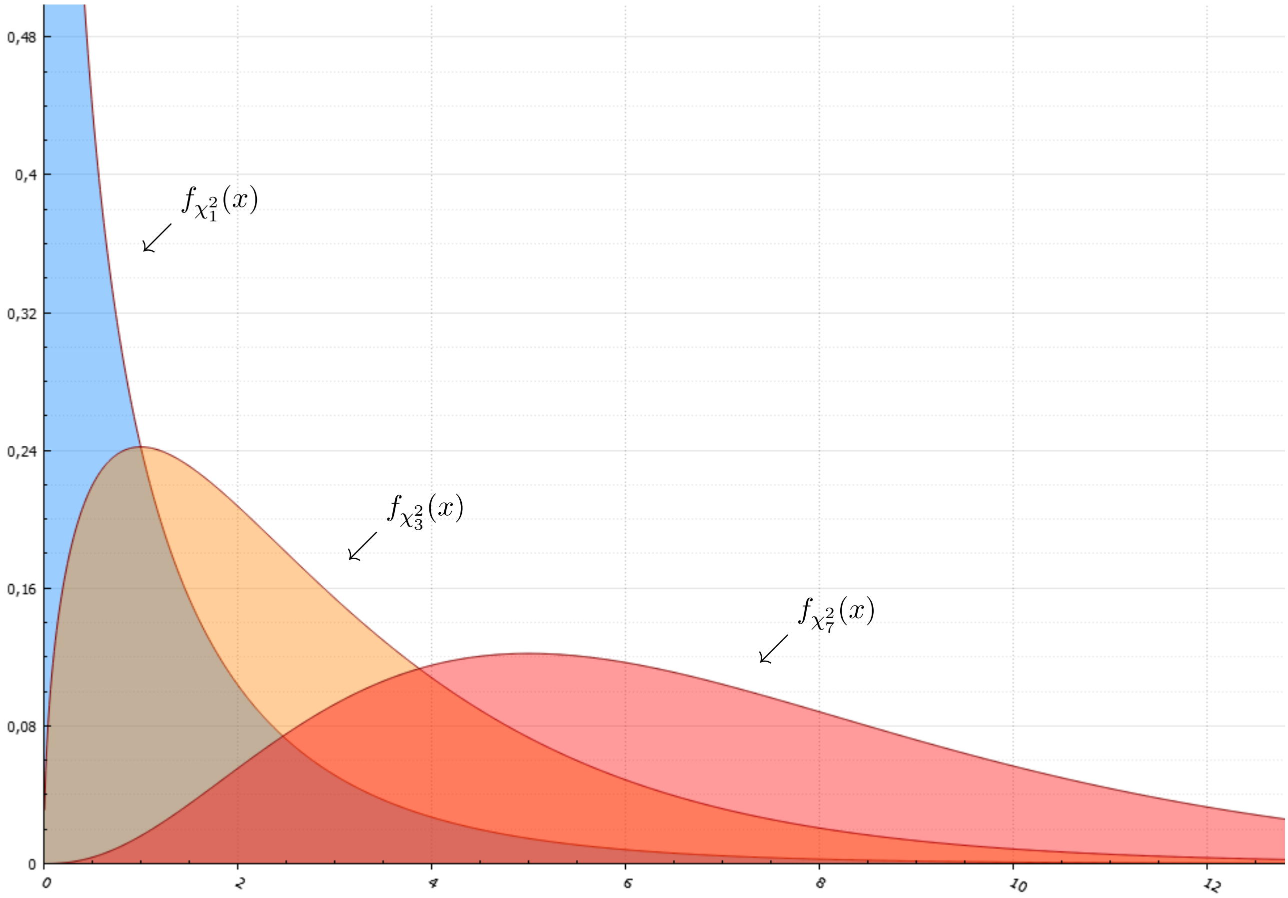
Определение 2.18.

(i) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0,1)$. Тогда случайная величина $Z = \sum_{i=1}^n X_i^2$ имеет ***распределение хи-квадрат*** с n степенями свободы. Обозначение: $Z \sim \chi_n^2$. Плотность распределения Z:

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}1_{(0,\infty)}(x),$$

где $\Gamma(\cdot)$ в знаменателе обозначает гамма-функцию:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \quad \alpha > 0.$$



(ii) Пусть $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $Z \sim \chi_n^2$ независимы. Тогда, случайная величина

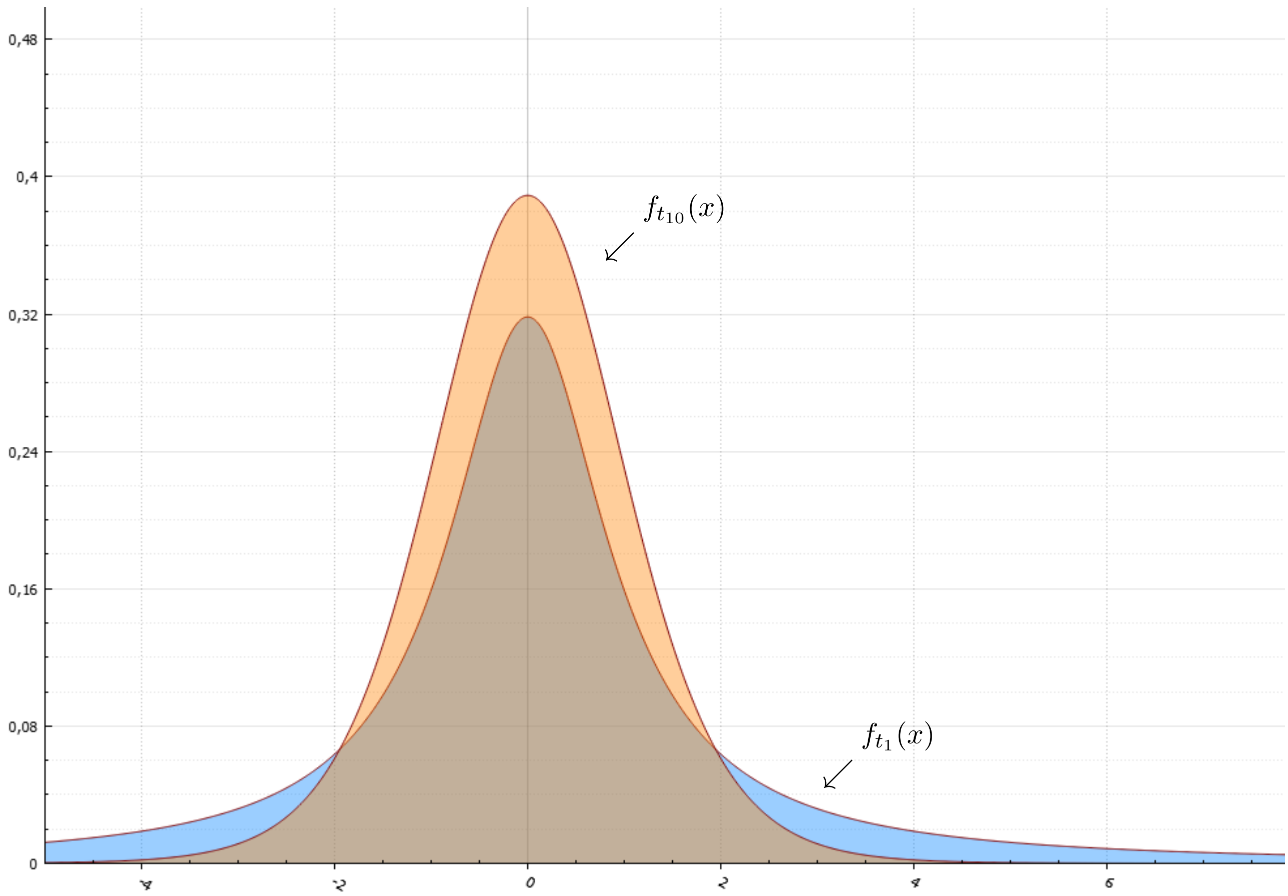
$$T = \frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$$

имеет ***t-распределение*** с n степенями свободы. Обозначение: $T \sim t_n$. Плотность распределения:

$$f_{t_n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Замечание 2.19. Если $Z \sim \chi_n^2$, то

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] = n$$



и

$$\mathrm{Var}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i^2) = n\Big(\mathbb{E}[X_1^4] - (\mathbb{E}[X_1^2])^2\Big) = 2n.$$

Лемма 2.20. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ *i.i.d.* $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. *Тогда*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Big)$$

и

$$\hat{s}_n^2(X) = \frac{1}{n}\sum (X_i - \overline{X}_n)^2 \sim \frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n-1},$$

и обе оценки независимые.

Доказательство: Распределение $\overline{X}_n$ следует из свойства нормального распределения. Зададим

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

и $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$. Выберем такую ортогональную матрицу A, что её последняя строчка:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdots \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = v^T.$$

Тогда для $Z = AY$ имеет место равенство:

$$\|Z\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = Z^T Z = Y^T A^T A Y = Y^Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \|Y\|_2^2.$$

Так как $\mathrm{Cov}(Z) = A^T A = \mathbb{I}_n$, то $Z \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_n)$. Также:

$$\sqrt{n}\overline{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\sigma Y_i + \mu) = \sigma v^T Y + \sqrt{n}\mu = \sigma Z_n + \sqrt{n}\mu$$

и

$$\begin{aligned}
n\hat{s}_n^2(X) &= \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y}_n)^2 \\
&= \sigma^2 \Big(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\overline{Y}_n^2 \Big) = \sigma^2 \Big(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i \Big)^2 \Big) \\
&= \sigma^2 \Big(\sum_{i=1}^n Z_i^2 - Z_n^2 \Big) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1} Z_i^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n-1}.
\end{aligned}$$

Обе оценки независимы как функции от Z_n и $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ соответственно.

Следствие 2.21. *Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Тогда*

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\hat{s}_n(X)} \sim t_{n-1}.$$

Доказательство: Представим T в виде:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{n\hat{s}_n(X)}}$$

и используем предыдущую лемму.

Пример 2.22. Проверим, какие оценки из Примера 2.7 являются несмещенными. Мы знаем, что $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Big)$, значит оценка $\overline{X}_n$ несмещенная. С другой стороны, используя Лемму 2.20 мы получаем:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\hat{s}_n^2(X)] = \frac{\sigma^2}{n}(n-1) \neq \sigma^2.$$

Стоит также заметить, что

$$MSE_\vartheta(\overline{X}_n) = \mathrm{Var}_\vartheta(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и

$$MSE_\vartheta(\hat{s}_n^2(X)) = \mathrm{Var}_\vartheta(\hat{s}_n^2(X)) + B_\vartheta^2(\hat{s}_n^2(X)) = \frac{\sigma^4}{n^2} 2(n-1) + \frac{\sigma^4}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема 2.23 (Неравенство Рао-Крамера). *Пусть μ – σ-конечная мера и $P_\vartheta \ll \mu$ с μ-плотностью $f(\cdot, \vartheta)$. Пусть также $\Theta \subset \mathbb{R}$ – открытое пространство и $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ – оценка. Дальнейшие предположения (условия регулярности):*

(i) *Множество $M_f = \{x \in \mathcal{X} \mid f(x, \vartheta) > 0\}$ не зависит от параметра ϑ.*

(ii) *Частная производная $\frac{\partial}{\partial\vartheta} f(x, \vartheta)$ существует $\forall x \in \mathcal{X}$.*

(iii) *(a)* $\mathbb{E}_\vartheta\big[\frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f(X, \vartheta)\big] = 0$,

(b) $\mathbb{E}_\vartheta\big[g(X) \frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f(X, \vartheta)\big] = \frac{\partial}{\partial\vartheta} \mathbb{E}_\vartheta[g(X)]$.

(iv) $0 < I(f(\cdot, \vartheta)) = \mathbb{E}_\vartheta\big[\big(\frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f(X, \vartheta)\big)^2\big] < \infty$

Тогда:

$$\mathrm{Var}_\vartheta(g(X)) \geq \frac{\big(\frac{\partial}{\partial\vartheta} \mathbb{E}_\vartheta[g(X)]\big)^2}{I(f(\cdot, \vartheta))} \quad \forall \vartheta \in \Theta \tag{2.2}$$

Доказательство: Зададим функцию:

$$U_\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin M_f, \\ \frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f(x, \vartheta), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из условия (iii)(a) мы знаем, что $\mathbb{E}[U_\vartheta(X)] = 0$ и

$$\mathrm{Var}_\vartheta(U_\vartheta(X)) = \mathbb{E}[(U_\vartheta(X))^2] = I(f(\cdot,\vartheta)).$$

Тогда используя неравенство Коши-Шварца мы получаем:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta[g(X)]\Big)^2 = \Big(\mathbb{E}_\vartheta[g(X)\cdot U_\vartheta(X)]\Big)^2 = \Big(\mathrm{Cov}_\vartheta(g(X), U_\vartheta(X))\Big)^2 \\ \le \mathrm{Var}_\vartheta(g(X))\cdot \mathrm{Var}_\vartheta(U_\vartheta(X)) = I(f(\cdot,\vartheta))\cdot \mathrm{Var}_\vartheta(g(X)).\end{aligned}$$

Определение 2.24.

(i) $I(f(\cdot,\vartheta))$ называется ***информацией Фишера*** семейства $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta\in\Theta\}$.

(ii) Если оценка g такая, что неравенство (2.2) превращается в равенство, то такая оценка называется ***эффективной*** для $\gamma(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta[g(X)]$.

Замечание 2.25.

(i) Запишем эквивалентные версии равенств в условии (iii):

(a) $\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(x,\vartheta) f(x,\vartheta)d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\vartheta} f(x,\vartheta)d\mu(x) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{\mathcal{X}} f(x,\vartheta)d\mu(x) = 0$,

(b) $\int_{\mathcal{X}} g(x)\frac{\partial}{\partial\vartheta} f(x,\vartheta)d\mu(x) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{\mathcal{X}} g(x)f(x,\vartheta)d\mu(x)$.

В обоих случаях условие (iii) означает, что можно менять местами интегралы и производные.

(ii) Теорема 2.23 дает нижнюю границу для дисперсии оценки $\gamma(\vartheta) = \mathbb{E}[g(X)]$ и может быть использована для получения UMVU-оценок. Если условия регулярности соблюдены, то любая эффективная и несмещенная оценка является UMVU.

(iii) Если $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $\sim P^1_\vartheta \ll \mu^1$ и $X = (X_1,\dots,X_n)^T$, то $P_\vartheta = \otimes_{i=1}^n P^1_\vartheta \ll \otimes_{i=1}^n \mu^1$ и $f(x,\vartheta) = \prod_{i=1}^n f^1(x_i,\vartheta)$, где $f^1(\cdot,\vartheta)$ – μ^1-плотность P^1_ϑ. Несложно увидеть, что в данном случае:

$$I(f(\cdot,\vartheta)) = nI(f^1(\cdot,\vartheta)).$$

Пример 2.26. Пусть $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $\sim\mathcal{N}(\mu,1)$ с плотностью

$$f^1(x,\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\Big\}.$$

Тогда

$$I(f^1(\cdot,\mu)) = \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\mu}\log f^1(X_1,\mu)\Big)^2\Big] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = 1.$$

В частности, информация Фишера для $X = (X_1,\dots,X_n)^T$: $I(f(\cdot,\vartheta),\mu) = n$ и тогда неравенство Рао-Крамера для несмещенных оценок:

$$\mathrm{Var}_\mu(g(X)) \ge \frac{1}{n}\Big(\frac{\partial}{\partial\mu}\mathbb{E}_\mu[g(X)]\Big)^2 = \frac{1}{n}.$$

Как следствие, $g(x) = \overline{x}_n$ – UMVU-оценка.

Определение 2.27. Пусть

$$SYM(k) = \{A\in\mathbb{R}^{k\times k} \mid A \text{ симметричная}\}.$$

Для $A,B\in SYM(k)$ будем использовать обозначения:

$$\begin{aligned} A\ge 0 &\iff A \text{ положительно полуопределенная},\\ A\ge B &\iff A-B\ge 0.\end{aligned}$$

Частичное упорядочение определенное знаком $\geq$ называется ***упорядочением Левнера*** на $SYM(k)$. Также зададим множества:

$$NND(k) = \{A \in SYM(k) \mid A \geq 0\},$$

$$PD(k) = \{A \in NND(k) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Теорема 2.28 (**Многомерное неравенство Рао-Крамера**). *Пусть μ – σ-конечная мера и $P_\vartheta \ll \mu\ \forall\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Предположим, что Θ – открытое множество и $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^k$ – оценка. Зададим функцию*

$$G(\vartheta) = \Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\mathbb{E}_\vartheta[g_i(X)]\Big)_{i,j} \in \mathbb{R}^{k\times d}.$$

Тогда при условиях регулярности, схожими с условиями в Теореме 2.23 имеет место неравенство:

$$\mathrm{Cov}_\vartheta(g(X)) \geq G(\vartheta)I^{-1}(f(\cdot,\vartheta))G^T(\vartheta) \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

в понимании упорядочения Левнера. Информация Фишера в данном случае:

$$I(f(\cdot,\vartheta)) = \Big(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial\vartheta_i}\log f(X,\vartheta)\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\log f(X,\vartheta)\Big]\Big)_{i,j=1}^d \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$

Доказательство: Для доказательства можно использовать многомерное неравенство Коши-Шварца (см. [2]) для $Y \in \mathbb{R}^k$ и $Z \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}[YY^T] \geq \mathbb{E}[YZ^T](\mathbb{E}[ZZ^T])^{-1}\mathbb{E}[ZY^T],$$

и подставить:

$$Y = g(X) - \mathbb{E}_\vartheta[g(X)]$$

и

$$Z = \nabla_\vartheta \log f(X,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\log f(X,\vartheta) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\vartheta_d}\log f(X,\vartheta)\end{pmatrix}.$$

Пример 2.29. В Примере 2.22:

$$f^1(x,\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\Big\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}.$$

Тогда:

$$U_\vartheta = \Big(\frac{\partial}{\partial\mu}\log f^1(X_1,\vartheta), \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log f^1(X_1,\vartheta)\Big)^T = \begin{pmatrix} (X_1-\mu)/\sigma^2 \\ -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}(X_1-\mu)^2\end{pmatrix}$$

и информация Фишера:

$$I(f^1(\cdot,\vartheta)) = \mathbb{E}[U_\vartheta, U_\vartheta^T] = \begin{pmatrix}\sigma^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^{-4}\end{pmatrix} = \frac{1}{n}I(f(\cdot,\vartheta)).$$

Если оценка $g(X)$ несмещенная, то $G(\vartheta)$ – едичная матрица и граница Рао-Крамера:

$$\mathrm{Cov}_\vartheta(g(X)) \geq G(\vartheta)\ I^{-1}(f(\cdot,\vartheta))\ G^T(\vartheta) = I^{-1}(f(\cdot,\vartheta)) = \begin{pmatrix}\frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^4}{n}\end{pmatrix}.$$

В частности для оценки

$$\widetilde{g}(X) = \Big(\overline{X}_n, \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_j - \overline{X}_n)^2\Big)^T$$

имеет место

$$\mathrm{Cov}_\vartheta(\widetilde{g}(X)) = \begin{pmatrix}\frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^4}{n-1}\end{pmatrix} \geq I(f(\cdot,\vartheta)),$$

то есть оценка $\widetilde{g}$ не является эффективной.

Замечание 2.30. В предыдущих примерах мы бездоказательно считали, что все условия регулярности для неравенства Рао-Крамера соблюдены. В дальнейшем мы обсудим семейство распределений, для которых неравенство Рао-Крамера превращается в равенство.

Предложение 2.31. Пусть μ – σ-конечная мера и $P_\vartheta \ll \mu$ с μ-плотностью:

$$f(x,\vartheta) = c(\vartheta)h(x)\exp(\vartheta T(x)) \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Тогда равенство в (2.2) достигается при оценке $g(x) = T(x)$.

Доказательство: В одной из дальнейших теорем мы докажем, что функция c бесконечно дифференцируема ($c \in C^\infty(\Theta)$) и что производные и интегралы могут быть поменяны местами. Сначала, заметим, что так как $\int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx) = 1 \ \ \forall\vartheta \in \Theta$, то

$$c(\vartheta) = \Big(\int_{\mathcal{X}} h(x)\exp\{\vartheta T(x)\}\mu(dx)\Big)^{-1}.$$

и

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{\mathcal{X}} c(\vartheta)h(x)\exp\{\vartheta T(x)\} \\ &= \int_{\mathcal{X}} (c'(\vartheta) + c(\vartheta)T(x))h(x)\exp\{\vartheta T(x)\}\mu(dx). \end{aligned}$$

Используя эти два равенства получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\vartheta[T(X)] &= c(\vartheta)\int_{\mathcal{X}} h(x)T(x)\exp\{\vartheta T(x)\}\mu(dx) \\ &= -c'(\vartheta)\int_{\mathcal{X}} h(x)\exp\{\vartheta T(x)\}\mu(dx) \\ &= -\frac{c'(\vartheta)}{c(\vartheta)} = (-\log c(\vartheta))'. \end{aligned}$$

Информация Фишера:

$$I(f(\cdot,\vartheta)) = \mathbb{E}_\vartheta\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(X,\vartheta)\Big)^2\Big] = \mathbb{E}_\vartheta[(T(X) + (\log c(\vartheta))')^2] = \mathrm{Var}_\vartheta(T(X)).$$

Также:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta[T(X)] &= \int_{\mathcal{X}} c'(\vartheta)h(x)T(x)\exp\{\vartheta T(x)\}\mu(dx) + \int_{\mathcal{X}} c(\vartheta)h(x)T^2(x)\exp\{\vartheta T(x)\}\mu(dx) \\ &= \frac{c'(\vartheta)}{c(\vartheta)}\int_{\mathcal{X}} c(\vartheta)h(x)T(x)\exp\{\vartheta T(x)\}\mu(dx) + \mathbb{E}_\vartheta[(T(X))^2] \\ &= \mathbb{E}_\vartheta[(T(X))^2] - (\mathbb{E}_\vartheta[T(X)])^2. \end{aligned}$$

Из этого следует:

$$\frac{\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta[T(X)]\Big)^2}{I(f(\cdot,\vartheta))} = \mathrm{Var}_\vartheta(T(X)).$$

Определение 2.32.

(i) Семейство $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ называется ***экспоненциальным семейством***, если существуют такие вещественнозначные $c, Q_1, \ldots, Q_k : \Theta \to \mathbb{R}$ и измеримые функции $h, T_1, \ldots, T_k : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, что μ-плотность P_ϑ:

$$f(x,\vartheta) = c(\vartheta)h(x)\exp\Big\{\sum_{j=1}^k Q_j(\vartheta)T_j(x)\Big\}$$

для σ-конечной меры μ.

(ii) $\mathcal{P}$ называется ***k-параметрическим экспоненциальным семейством***, если функции $1, Q_1, \dots, Q_k$ и $1, T_1, \dots, T_k$ линейно независимы (μ-почти наверное).

Замечание 2.33.

(i) В экспоненциальных семействах равенство в Теореме Рао-Крамера достигается при оценке $(T_1, \dots, T_k)^T$. С другой стороны, это свойство и характеризует экспоненциальные семейства (Теорема 3.42 в [3])

(ii) Без ограничения общности можно считать, что $h(x) = 1$, в другом случае можно использовать меру:
$$\mu'(dx) = h(x)\mu(dx).$$

(iii) С этого момента мы обсуждаем только k-параметрические экспоненциальные семейства.

Пример 2.34.

(i) Если $X \sim Bin(n, \vartheta)$, то плотность по счетной мере:
$$f(k, \vartheta) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x} = (1-\vartheta)^n \binom{n}{x} \exp\Big\{x \log\Big(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\Big)\Big\},$$
где $c(\vartheta) = (1-\vartheta)^n$, $h(x) = \binom{n}{x}$, $T_1(x) = x$ и $Q_1(\vartheta) = \log\Big(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\Big)$.

(ii) Если $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то $\vartheta = (\mu, \sigma^2)^T$ и плотность:
$$\begin{aligned} f(x, \vartheta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\Big\} \exp\Big\{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2}\Big\} \\ &= c(\vartheta)\exp\Big\{Q_1(\vartheta)T_1(x) + Q_2(\vartheta)T_2(x)\Big\}. \end{aligned}$$

(iii) Если $X \sim Po(\lambda)$, то
$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\frac{1}{x!}\exp\{x \log \lambda\}.$$

Замечание 2.35.

(i) Если $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – экспоненциальное семейство, то $\mathcal{P}^{(n)} = \{\otimes_{j=1}^n P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – также экспоненциальное семейство.

(ii) Используя обозначение $Q(\vartheta) = (Q_1(\vartheta), \dots, Q_k(\vartheta))^T$, мы получаем новое параметрическое пространство $Q(\Theta)$, которое ныне обозначается Θ. В таком случае μ-плотность:
$$f(x, \vartheta) = c(\vartheta)\exp\Big\{\sum_{j=1}^k \vartheta_j T_j(x)\Big\}, \quad \vartheta \in \Theta,$$
и множество
$$\Theta^* = \{\vartheta \in \mathbb{R}^k \mid f(\cdot, \vartheta) \in L^1(\vartheta)\}$$
называется ***естественным параметрическим пространством***.

Пример 2.36. В предыдущем примере естественное параметрическое пространство:

(i) $X \sim Bin(n, \vartheta) : \Theta^* = \{\log\big(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\big) \mid \vartheta \in (0,1)\} = \mathbb{R}$.

(ii) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) : \Theta^* = \{\big(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\big) \mid \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

(iii) $X \sim Po(\lambda) : \Theta^* = \{\log \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}$.

Теорема 2.37. *Естественное параметрическое пространство Θ^* k-параметрического экспоненциального семейства выпуклое и с непустой внутренней частью.*

Доказательство: Непустая внутренняя часть следует из линейной независимости. Выпуклость: пусть $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)^T$ и $\vartheta' = (\vartheta'_1, \ldots, \vartheta'_k)^T$ – элементы Θ^*. Тогда для $\alpha \in (0,1)$ имеет место

$$\int \exp\Big\{\sum_{j=1}^k (\alpha\vartheta_j + (1-\alpha)\vartheta'_j)T_j(x)\Big\}\mu'(dx) = \int \Big(\exp\Big\{\sum_{j=1}^k \vartheta_j T_j(x)\Big\}\Big)^\alpha \Big(\exp\Big\{\sum_{j=1}^k \vartheta'_j T_j(x)\Big\}\Big)^{1-\alpha}\mu'(dx)$$

неравенство Гельдера
$$\Big(p = \frac{1}{\alpha}, q = \frac{1}{1-\alpha}\Big) \longrightarrow \leq \Bigg(\int \exp\Big\{\sum_{j=1}^k \vartheta_j T_j(x)\Big\}\mu'(dx)\Bigg)^\alpha \Bigg(\int \exp\Big\{\sum_{j=1}^k \vartheta'_j T_j(x)\Big\}\mu'(dx)\Bigg)^{1-\alpha} < \infty.$$

Следовательно, $\alpha\vartheta + (1-\alpha)\vartheta' \in \Theta^*$.

Теорема 2.38. *Пусть $\mathcal{P}$ – k-параметрическое экспоненциальное семейство с плотностями*

$$f(x, \vartheta) = c(\vartheta) \exp\Big\{\sum_{j=1}^k \vartheta_j T_j(x)\Big\}.$$

Пусть также $\Theta^{**} \subset \Theta^*$ открытое множество и $\varphi \in L^1(P_\vartheta)$ $\forall \vartheta \in \Theta^{**}$. Тогда функция

$$\beta : \begin{cases} \Theta^{**} & \to \quad \mathbb{R} \\ \vartheta & \mapsto \quad \beta(\vartheta) := \int \varphi(x) \exp\Big\{\sum_{j=1}^k \vartheta_j T_j(x)\Big\}\mu(dx) \end{cases}$$

бесконечно дифференцируемая, и её производные:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\Big)^{l_1} \ldots \Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta_k}\Big)^{l_k} \beta(\vartheta) = \int \varphi(x) T_1^{l_1}(x) \ldots T_k^{l_k}(x) \exp\Big\{\sum_{j=1}^k \vartheta_j T_j(x)\Big\}\mu(dx).$$

Доказательство: Теорема 2.71 в [4].

Замечание 2.39. Прежде чем задаваться вопросом о качестве, необходимы методы получения хорошей или хотя бы какой-нибудь оценки. Если $\mathcal{P}$ – экспоненциальное семейство, то оценка $T(X) = (T_1(X), \ldots, T_k(X))$ является UMVU для $\mathbb{E}_\vartheta[T(X)]$.

Пример 2.40. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, тогда совместная плотность:

$$f(x, \vartheta) = c(\vartheta) \exp\Big\{-\frac{n}{2\sigma^2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\Big) + \frac{n\mu}{\sigma^2}\Big(\frac{1}{n} x_i\Big)\Big\}.$$

Тогда оценка

$$T(X) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\Big)^T$$

является эффективной для $(\mu, \mu^2 + \sigma^2)^T$.

Замечание 2.41. Если распределение не принадлежит параметрическому семейству, то для такого случая существуют два классических метода оценивания:

(i) ***Метод моментов***:
Пусть, $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim P_\vartheta$. Пусть также

$$\gamma(\vartheta) = f(m_1, \ldots, m_k),$$

где $m_j = \mathbb{E}[X_1^j] = \int x^j P_\vartheta(dx)$. Тогда ***оценка, полученная методом моментов*** будет

$$\hat{\gamma}(X) = f(\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k),$$

где $\hat{m}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^j$. Вследствие Закона Больших Чисел, при дополнительных условиях имеет место сходимость $\hat{m}_j \xrightarrow{\mathbb{P}} m_j$.

(ii) ***Метод максимального правдоподобия***:
Пусть $X \sim P_\vartheta \ll \mu$, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ и $\gamma(\vartheta) = \vartheta$. Тогда, оценка $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$ называется ***оценкой максимального правдоподобия***, если

$$f(x, \hat{\theta}) = \sup_{\vartheta \in \theta} f(x, \vartheta).$$

Пример 2.42. Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и мы оцениваем параметр $\vartheta = (\mu, \sigma^2)^T = (m_1, m_2 - m_1^2)^T$. Тогда по методу моментов:

$$\hat{\gamma}(\vartheta) = (\hat{m}_1, \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^T = (\overline{x}_n, \hat{s}_n^2)^T.$$

Несложно доказать, что эта оценка совпадает с оценкой, полученной по методу максимального правдоподобия.

Упражнения

2.1. Пусть $X_1, \dots X_n$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$:
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
и $X = (X_1, \dots, X_n)^T$. Покажите, что $g(X) = \overline{X}_n$ является UMVU-оценкой для λ^{-1}.

2.2. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ – вектор i.i.d. нормально распределенных случайных величин: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с известным параметром σ.

(i) Покажите, что оценка
$$g(X) = (\overline{X}_n)^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$
является несмещенной для μ^2.

(ii) Вычислите квадратичный риск для $g(X)$.

(iii) Найдите границу Рао-Крамера для $g(X)$. Какой можно сделать вывод?

2.3. Выясните, какие из следующих распределений образуют экспоненциальное семейство. Найдите параметр k, статистики $T_1, \dots T_k$ и естественное параметрическое пространство в соответствующих случаях.

(i) $f_\vartheta(x) = \frac{\vartheta_2^{\vartheta_1}}{\Gamma(\vartheta_1)} x^{\vartheta_1 - 1} e^{-\vartheta_2 x},\ x \geq 0,\ \vartheta_1, \vartheta_2 > 0,$

(ii) $f_\vartheta(x) = 1_{(0,\vartheta)}(x) \exp(-2\log\vartheta + \log(2x)),\ x \in \mathbb{R},\ \vartheta > 0,$

(iii) $f_\vartheta(x) = \vartheta^{x-1}(1-\vartheta),\ x \in \mathbb{N}_0,\ \vartheta \in (0,1).$

2.4. Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и $X = (X_1, \dots, X_n)^T$. Покажите, что оценка
$$g(X) = (\overline{X}_n, \hat{s}_n^2(X))^T$$
является оценкой максимального правдоподобия для $\vartheta = (\mu, \sigma^2)^T$.

2.5. Пусть $X = (X_1, \dots X_n)^T$ – вектор i.i.d. равномерно распределенных случайных величин: $X_i \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$, где оцениваемый параметр $\vartheta > 0$. Рассмотрим оценку
$$g(X) = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

(i) Покажите, что $g(X)$ – оценка максимального правдоподобия

(ii) Найдите математическое ожидание и дисперсию $g(X)$. Покажите, что
$$\mathrm{Var}_\vartheta(g(X)) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(iii) Найдите оценку $\hat{g}$ методом моментов. Найдите её математическое ожидание и дисперсию.

(iv) Найдите границу Рао-Крамера для несмещенной оценки ϑ. Применима ли здесь теорема Рао-Крамера?

(v) Сравните дисперсии $\hat{g}$ и $\frac{n+1}{n} g$ с границей Рао-Крамера.

Глава 3

Байесовское и минимаксное оценивания параметров

В предыдущей главе мы заметили, что крайне маловероятно получить равномерно лучшую оценку. Альтернативный вариант для сравнения функций риска - это интегрирование или вычисление максимума.

Определение 3.1. Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ - статистический эксперимент, $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ и $(\Theta, \mathcal{A}_\Theta)$ – измеримое пространство. Вероятностная мера π на $\mathcal{A}_\Theta$ называется ***априорным распределением*** для ϑ. Для оценки $g \in \mathcal{K}$ и её риска $R(\cdot, g)$ функция

$$R(\pi, g) = \int_\Theta R(\vartheta, g)\pi(d\vartheta)$$

называется ***Байесовским риском*** g относительно π. Оценка $g^* \in \mathcal{K}$ называется ***Байесовской оценкой***, если она минимизирует Байесовский риск по всем возможным оценочным функциям:

$$R(\pi, g^*) = \inf_{g \in \mathcal{K}} R(\pi, g).$$

Замечание 3.2.

(i) В байесовской интерпретации параметр ϑ является случайным, а точнее - реализацией случайной величины $\theta : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Theta, \mathcal{A}_\Theta)$ с распределением π.

$$\begin{array}{c} (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \xrightarrow{X} (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \\ \theta \downarrow \qquad\qquad\qquad \\ (\Theta, \mathcal{A}_\Theta) \qquad\qquad \end{array}$$

(ii) Функция $R(\pi, g)$ играет роль среднего значения по всем функциям риска, где возможные значения θ имеют вес соответственно их вероятностям. Распределение π может быть интерпретировано как априорное знание статистика о неизвестном параметре.

Предположение 3.3. В дальнейшем пусть $(\Theta, \mathcal{A}_\Theta) = (\mathbb{R}^l, \mathcal{B}^l)$ и $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Также мы обозначаем $Q^{X,\theta}$ в качестве распределения (X, θ) на $(\mathcal{X} \times \Theta, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}_\Theta)$ и P_ϑ в качестве условного распределения X (при условии $\theta = \vartheta$):

$$P_\vartheta = Q^{X|\theta=\vartheta}.$$

Мера π является маргинальным распределением θ под $Q^{X,\theta}$. Для совместного распределения (X, θ) правило итерированного ожидания (Следствие 1.15) дает:

$$Q^{X,\theta}(A) = \int_\Theta \int_\mathcal{X} 1_A(x, \vartheta) P_\vartheta(dx)\pi(d\vartheta).$$

Следует также заметить, что существует ***апостериорное распределение*** $Q^{\theta|X=x}$ случайной величины θ при условии $X = x$.

Замечание 3.4. В Байесовской статистике значения π и P_ϑ интерпретируются следующим образом: перед экспериментом $\pi = Q^\theta$ – предполагаемое статистиком распределение параметра ϑ. После наблюдения $X(\omega) = x$ информация о θ изменяется с π на $Q^{\theta|X=x}$. Для функции риска от $\gamma(\vartheta)$ используются следующие представления:

$$\begin{aligned} R(\pi, g) &= \int_\Theta R(\vartheta, g)\pi(d\vartheta) = \int_\Theta \int_\mathcal{X} L(\gamma(\vartheta), g(x))P_\vartheta(dx)\pi(d\vartheta) \\ &= \int_{\Theta\times\mathcal{X}} L(\gamma(\vartheta), g(x))Q^{X,\theta}(dx, d\vartheta) \\ &= \int_\mathcal{X} \int_\Theta L(\gamma(\vartheta), g(x))Q^{\theta|X=x}(d\vartheta)Q^X(dx) \\ &= \int_\mathcal{X} R_\pi^x(g)Q^X(dx). \end{aligned}$$

Величина

$$R_\pi^x(g) := \int_\Theta L(\gamma(\vartheta), g(x))Q^{\theta|X=x}(d\vartheta)$$

называется ***апостериорным риском*** g при данном X=x.

Теорема 3.5.

(i) Оценка g^* является Байесовской оценкой для ϑ тогда и только тогда, когда g^* доставляет минимум апостериорному риску $R_\pi^X(g)$ Q^X-п.н.

$$R_\pi^x(g^*) = \inf_{g\in\mathcal{K}} R_\pi^x(g) = \inf_{a\in\Theta} \int L(\vartheta, a)Q^{\theta|X=x}(d\vartheta).$$

(ii) Пусть $\Theta \subset \mathbb{R}$, $L(\vartheta, a) = (\vartheta - a)^2$ и $\int \vartheta^2 Q^{\theta|X=x}(d\vartheta) < \infty$ Q^X-п.н. Тогда Байесовская оценка для ϑ:

$$g^*(x) = \mathbb{E}[\theta|X = x] = \int_\Theta \vartheta Q^{\theta|X=x}(d\vartheta)$$

Доказательство:

(i) В соответствии с Замечанием 3.4, $R(\pi, g)$ достигает минимума по g тогда и только тогда, когда $R_\pi^x(g)$ минимальна относительно g Q^X-п.н. В частности, мы минимизируем по всем возможным оценкам. Если существует g^*, то эта оценка должна минимизировать $R_\pi^x(g)$ Q^X-п.н., в противном случае возможно построить оценку, доставляющую меньшее значение риска.

(ii) В соответствии с Теоремой 1.25, величина $\int_\Theta (\vartheta - a)^2 Q^{\theta|X=x}(d\vartheta)$ минимальна, если $a = \mathbb{E}[\theta|X = x]$.

Замечание 3.6. Если $P_\vartheta \ll \mu$ с μ-плотностью $f(x|\vartheta)$ и также $\pi \ll \nu$ с ν-плотностью $h(\vartheta)$, то совместное распределение (X, θ) удовлетворяет:

$$Q^{X,\theta} \ll \mu \otimes \nu$$

с плотностью $f(x|\vartheta)h(\vartheta)$. Также, апостериорное распределение $Q^{\theta|X=x}$ обладает ν-плотностью:

$$f(\vartheta|x) = \frac{f(x|\vartheta)h(\vartheta)}{\int_\Theta f(x|\vartheta)h(\vartheta)\nu(d\vartheta)}$$

если знаменатель положительный. Апостериорный и Байесовский риски соответственно:

$$R_\pi^x(g) = \frac{\int_\Theta L(\vartheta, g(x))f(x|\vartheta)h(\vartheta)\nu(d\vartheta)}{\int_\Theta f(x|\vartheta)h(\vartheta)\nu(d\vartheta)},$$

$$R(\pi, g) = \int_\mathcal{X} \int_\Theta L(\vartheta, g(x))f(x|\vartheta)h(\vartheta)\nu(d\vartheta)\mu(dx).$$

Пример 3.7.

Рассмотрим пример с оцениванием параметра биномиального распределения. Пусть $\Theta = (0,1)$, $\mathcal{X} = \{0,\dots,n\}$:

$$P_\vartheta(X = x) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}.$$

Функция потерь: $L(x,y) = (x-y)^2$

- UMVU-оценка для ϑ: $g(x) = \frac{x}{n}$ (экспоненциальное семейство)

$$\mathrm{Var}_\vartheta(g(X)) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}.$$

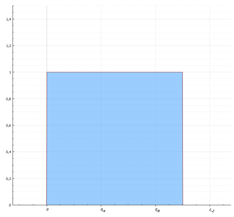
- Пусть $\pi \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Тогда

$$f(x \mid \vartheta) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}1_{\{0,\dots,n\}}(x)$$

и априорная функция плотности распределения параметра:

$$h(\vartheta) = 1_{(0,1)}(\vartheta).$$



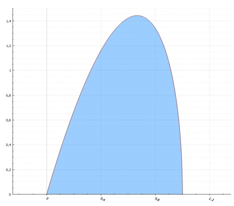
$h(\vartheta)$

Апостериорная плотность вероятности:

$$f(\vartheta \mid x) = \frac{\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}1_{(0,1)}(\vartheta)}{B(x+1, n-x+1)},$$

где в знаменателе бета-функция:

$$B(a,b) = \int_0^1 \vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{b-1}d\vartheta.$$



$f(\vartheta \mid x)$

Тогда Байесовская оценка:

$$g^*(x) = \mathbb{E}[\theta|X=x] = \int_0^1 \frac{\vartheta^{x+1}(1-\vartheta^{n-x})}{B(x+1,n-x+1)} = \frac{B(x+2,n-x+1)}{B(x+1,n-x+1)} = \frac{x+1}{n+2},$$

и Байесовский риск:

$$R(\pi, g^*) = \int_0^1 R(\vartheta, g^*)d\vartheta = \int_0^1 \mathbb{E}_\vartheta\Big[\Big(\frac{X+1}{n+2} - \vartheta\Big)^2\Big]d\vartheta$$
$$= \frac{1}{(n+2)^2}\int_0^1 (n\vartheta - n\vartheta^2 + 1 - 4\vartheta + 4\vartheta^2)\; d\vartheta = \frac{1}{6(n+2)}.$$

Пример 3.8. Пусть $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $\sim P_\mu^1 = \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ с заранее известным параметром σ^2. Априорное распределение μ:

$$h(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}}\exp\Big\{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\tau^2}\Big\}.$$

Используя плотность распределения X

$$f(x|\mu) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\Big)^n \exp\Big\{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (x_j-\mu)^2\Big\},$$

получаем апостериорное распределение:

$$Q^{\mu|X=x} \sim \mathcal{N}\Big(g_{\mu_0,\tau^2}(x), \Big(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}\Big)^{-1}\Big),$$

где
$$g_{\mu_0,\tau^2}(x) = \Big(1 + \frac{\sigma^2}{n\tau^2}\Big)^{-1}\overline{x}_n + \Big(\frac{n\tau^2}{\sigma^2} + 1\Big)^{-1}\mu_0.$$
Для квадратичного риска функция $g_{\mu_0,\tau^2}(x)$ – Байесовская оценка. Интерпретация: при большом значении τ^2 (мало априорной информации) оценка $g_{\mu_0,\tau^2}(x) \approx \overline{x}_n$, иначе $g_{\mu_0,\tau^2}(x) \approx \mu_0$.

Определение 3.9. Пусть g – оценка $\gamma(\vartheta)$. Тогда:
$$R^*(g) = \sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g)$$
называется ***максимальным риском*** g и
$$R^*(g^*) = \inf_{g\in\mathcal{K}} R^*(g)$$
называется ***минимаксным риском***, а соответствующая оценка g^* – ***минимаксной***.

Замечание 3.10.

(i) Использование минимаксной оценки нацелено на защиту от больших потерь.

(ii) Пусть $\mathcal{M} = \{\pi \mid \pi$ – вероятностная мера на $\mathcal{A}_\Theta\}$. Тогда несложно заметить, что:
$$R^*(g) = \sup_{\pi\in\mathcal{M}} R(\pi, g).$$

Определение 3.11. Априорное распределение π^* на $\mathcal{A}_\Theta$ называется ***наименее благоприятным априорным***, если
$$\inf_{g\in\mathcal{K}} R(\pi^*, g) \geq \inf_{g\in\mathcal{K}} R(\pi, g) \quad \forall\pi \in \mathcal{M}.$$

Теорема 3.12.

(i) Если g_π – Байесовская оценка относительно π и
$$R(\pi, g_\pi) = \sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g_\pi), \tag{3.1}$$
то g_π – минимаксная оценка.

(ii) Если g_π – единственная Байесовская оценка относительно π, удовлетворяющая равенству (3.1)*, то g_π – единственная минимаксная оценка.*

(iii) Если равенство (3.1) *выполняется, то π – наименее благоприятное априорное распределение.*

Доказательство:

(i) Для любой оценки $g \in \mathcal{K}$:
$$\sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g) \geq \int_\Theta R(\vartheta, g)\pi(d\vartheta) \geq \int_\Theta R(\vartheta, g_\pi)\pi(d\vartheta) = R(\pi, g_\pi) = \sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g_\pi).$$

(ii) Если g_π – единственная Байесовская оценка для π, то
$$\int_\Theta R(\vartheta, g)\pi(d\vartheta) > \int_\Theta R(\vartheta, g_\pi)\pi(d\vartheta) \quad \forall g \neq g_\pi.$$
Тогда $\sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g) > \sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g_\pi)$ и g_π единственная минимаксная оценка.

(iii) Для любого распределения $\mu \in \mathcal{M}$:
$$\inf_{g\in\mathcal{K}} \int_\Theta R(\vartheta, g)\mu(d\vartheta) \leq \int_\Theta R(\vartheta, g_\pi)\mu(d\vartheta) \leq \sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g_\pi) = R(\pi, g_\pi) = \inf_{g\in\mathcal{K}} \int_\Theta R(\vartheta, g)\pi(d\vartheta).$$

Замечание 3.13. Иногда функция риска Байесовской оценки g_π является постоянной:

$$R(\vartheta, g_\pi) = c \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Тогда

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g_\pi) = c = \int_\Theta R(\vartheta, g_\pi)\pi(d\vartheta) = R(\pi, g_\pi),$$

равенство (3.1) выполняется, g_π минимаксная оценка и π – наименее благоприятное априорное распределение.

Пример 3.14. Пусть $\Theta = (0,1)$, $\mathcal{X} = \{0, \dots, n\}$ и

$$P_\vartheta(X = x) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}.$$

Мы снова используем квадратичный риск и выбираем бета-распределение в качестве априорного:

$$h(\vartheta) = \frac{\vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{b-1} 1_{[0,1]}(\vartheta)}{B(a,b)}.$$

Апостериорное распределение $Q^{\vartheta|X=x} \sim B(x+a, n-x+b)$ с плотностью:

$$f(\vartheta|x) = \frac{\vartheta^{x+a-1}(1-\vartheta)^{n-x+b-1} 1_{[0,1](\vartheta)}}{B(x+a, n-x+b)}.$$

Несложно доказать, что для случайной величины Z с бета-распределением $B(p,q)$

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{p}{p+q} \quad \text{и} \quad \mathrm{Var}(Z) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}.$$

Используя Теорему 3.5, получаем Байесовскую оценку для ϑ:

$$g_{a,b}(x) = \frac{x+a}{n+a+b}.$$

Соответствующий ей риск:

$$R(\vartheta, g_{a,b}) = \mathbb{E}[(g_{a,b}(X) - \vartheta)^2] = \frac{\vartheta^2(-n + (a+b)^2 + \vartheta(n - 2a(a+b)) + a^2}{(n+a+b)^2}.$$

Если выбрать постоянные $a^* = b^* = \sqrt{n}/2$, то риск будет равен:

$$R(\vartheta, g_{a^*,b^*}) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}.$$

Такой риск не зависит от ϑ, а значит оценка $g_{a^*,b^*}(x) = \frac{x+\sqrt{n}/2}{n+\sqrt{n}}$ является минимаксной и $B(a^*, b^*)$ – наименее благоприятное распределение.

Определение 3.15. Пусть

$$r_\pi = \inf_{g\in\mathcal{K}} R(\pi, g), \quad \pi \in \mathcal{M}.$$

Последовательность $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{M}$ называется ***наименее благоприятной последовательностью априорных распределений***, если

(i) $\lim\limits_{m\to\infty} r_{\pi_m} = r$,

(ii) $\forall \pi \in \mathcal{M} \quad r_\pi \le r$.

Теорема 3.16. *Пусть (π_m) в $\mathcal{M}$ последовательность, такая что $r_{\pi_m} \to r \in \mathbb{R}$. Также пусть существует такая оценка $g^* \in \mathcal{K}$, что:*

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g^*) = r.$$

Тогда:

(i) g^* – минимаксная оценка,

(ii) (π_m) – наименее благоприятная последовательность априорных распределений.

Доказательство:

(i) Для любой оценки $g \in \mathcal{K}$

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g) \geq \int_\Theta R(\vartheta, g)\pi_m(d\vartheta) \geq r_{\pi_m} \longrightarrow r = \sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g^*).$$

(ii) Для любого распределения $\pi \in \mathcal{M}$

$$r_\pi \leq R(\pi, g^*) = \int_\Theta R(\vartheta, g^*)\pi(d\vartheta) \leq \sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, g^*) = r.$$

Пример 3.17. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с известным параметром σ^2. В качестве априорного распределения выбираем:

$$h_m(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \exp\Big\{ -\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2m} \Big\}.$$

Байесовская оценка:

$$g_m(x) = \Big(1 + \frac{\sigma^2}{nm}\Big)^{-1} \overline{x}_n + \Big(\frac{nm}{\sigma^2} + 1\Big)^{-1} \mu_0.$$

Для любого значения $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} R(\mu, g_m) &= \mathbb{E}_\mu[(g_m(X) - \mu)^2] \\ &= \mathbb{E}_\mu\left[\left(\Big(1+\frac{\sigma^2}{nm}\Big)^{-1}(\overline{x}_n - \mu) + \Big(\frac{nm}{\sigma^2}+1\Big)^{-1}(\mu_0 - \mu)\right)^2\right] \\ &= \Big(1+\frac{\sigma^2}{nm}\Big)^{-2}\frac{\sigma^2}{n} + \Big(1+\frac{nm}{\sigma^2}\Big)^{-2}(\mu_0-\mu)^2 \xrightarrow[m\ \to\infty]{} \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Так как риск ограничен сверху:

$$R(\mu, g_m) \leq \frac{\sigma^2}{n} + (\mu - \mu_0)^2,$$

то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости[1]:

$$r_{\pi_m} = R(\pi_m, g_m) = \int_\mathbb{R} R(\mu, g_m)\pi_m(d\mu) \longrightarrow \frac{\sigma^2}{n}.$$

Очевидно, $g^*(x) = \overline{x}_n$ удовлетворяет равенству

$$R(\mu, g^*) = \mathbb{E}_\mu[(\overline{X}_n - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n},$$

следовательно по Теореме 3.16 g^* – минимаксная оценка и π_m – наименее благоприятная последовательность априорных распределений.

[1] Пусть фиксировано измеримое пространство $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Предположим, что $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ и f – измеримые функции на X, причем $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду. Тогда если существует определённая на том же пространстве интегрируемая функция g, такая что

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

почти всюду, то f_n и f интегрируемы и

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

Упражнения

3.1. Пусть $X \sim Po(\lambda)$ (распределение Пуассона). Функция потерь:

$$L(\lambda, a) = (\lambda - a)^2/\lambda.$$

Докажите, что оценка $g(X) = X$ является минимаксной для параметра λ. Используйте следующие шаги:

(i) Выберите гамма-распределение $\pi_{\alpha,\beta} = \Gamma(\alpha, \beta)$ в качестве априорного. Найдите апостериорное распределение.

(ii) Рассчитайте апостериорный риск:

$$R^x_{\pi_{\alpha,\beta}}(a) := \int_\Theta L(\lambda, a) Q^{\lambda|X=x}(d\lambda).$$

для $a \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 1$.

Подсказка: если $\Lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, то

$$\mathbb{E}[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathbb{E}[1/\Lambda] = \frac{\beta}{\alpha - 1}.$$

(iii) Найдите значение a^*, доставляющее минимум апостериорному риску $R^x_{\pi_{\alpha,\beta}}(a)$. Рассчитайте соответствующий минимум $R^x_{\pi_{\alpha,\beta}}(a^*)$.

(iv) Рассчитайте $R(\lambda, X)$ и тем самым завершите доказательство.

3.2. Докажите следующие утверждения:

(i) Если g^* – допустимая оценка с постоянным риском, то g^* – минимаксная.

(ii) Если g^* – Байесовская оценка для априорного распределения π и единственная в том смысле, что для любой другой Байесовской оценки $\tilde{g}$

$$R(\vartheta, g^*) = R(\vartheta, \tilde{g}) \quad \forall \vartheta \in \Theta,$$

то g^* – допустимая.

3.3. Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ и функция потерь:

$$L(\sigma^2, d) = (d/\sigma^2 - 1)^2.$$

Предположим, что $\mu = 0$. Докажите, что

$$g(X) = \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

является минимаксной оценкой σ^2.

Подсказка: произведите замену $\lambda = 1/\sigma^2$ и возьмите для этого параметра априорное распределение $\pi_{\alpha,\beta} = \Gamma(p, b)$. Заметьте, что для апостериорного риска g:

$$R^x_{\pi_{\alpha,\beta}}(\sigma^2, g) = \int_\Theta L(\sigma^2, g(x)) Q^{\theta|X=x} d(1/\sigma^2) = \int_\Theta (g(x)\lambda - 1)^2 Q^{\theta|X=x} d(\lambda).$$

Глава 4

Достаточность и полнота

Теперь, пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$, где $P \in \mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$, – вероятностное пространство и $(\mathcal{T}, \mathcal{D})$ – измеримое пространство.

Определение 4.1. $\mathcal{B}$-$\mathcal{D}$-измеримая функция $T : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ называется ***статистикой***.

Пример 4.2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim Bin(1, \vartheta)$ с совместным распределением:

$$f(x, \vartheta) = \vartheta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\vartheta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = \vartheta^{T(x)}(1-\vartheta)^{n-T(x)},$$

где $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ – статистика. Если мы выбираем $u_1, \ldots, u_n \in \{0, 1\}$, то

$$P_\vartheta(X_i = u_i \ \forall i = 1, \ldots, n \mid T(X) = k) = \begin{cases} \frac{1}{\binom{n}{k}}, & \text{если } \sum_{i=1}^n u_i = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Мы видим, что в данном примере, зная значение $T(X)$, никакой дополнительной информации о ϑ не может быть получено из информации о векторе $X = X_1, \ldots, X_n$.

Определение 4.3.

(i) σ-алгебра $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ называется ***достаточной*** для ϑ, если

$$k_B = P_\vartheta(B|\mathcal{C}) \quad \forall \vartheta \in \Theta, \ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Это означает, что $\mathcal{C}$-условные вероятности не зависят от ϑ.

(ii) Статистика $T : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ называется ***достаточной*** для ϑ, если $\sigma(T)$ достаточна для ϑ.

Замечание 4.4.

(i) Из Леммы о факторизации (Теорема 1.18) мы знаем, что T достаточная для ϑ тогда и только тогда, когда $\forall B \in \mathcal{B}$ существует функция $h_B : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, такая что:

$$h_B(t) = P_\vartheta(B \mid T = t).$$

(ii) В Примере 4.2 статистика $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ достаточная для ϑ.

(iii) Пусть $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ из $L^1(\mathcal{P}) = \bigcap_{\vartheta \in \Theta} L^1(P_\vartheta)$.

(a) Если $\mathcal{C}$ достаточная для ϑ, то существует функция

$$k = \mathbb{E}_\vartheta[g|\mathcal{C}],$$

не зависящая от ϑ.

(b) Если $T : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ достаточная для ϑ, то существует функция

$$h(t) = \mathbb{E}_\vartheta[g \mid T = t],$$

не зависящая от ϑ.

Пример 4.5. Пусть Q – конечная группа отображений $\pi : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Система

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(Q) = \{B \in \mathcal{B} \mid \pi(B) = B \quad \forall \pi \in Q\}$$

называется σ-алгеброй Q-инвариантных множеств. Если $\mathcal{P}$ инвариантна относительно Q, то есть:

$$P_\vartheta^\pi(B) = P_\vartheta(\pi^{-1}(B)) = P_\vartheta(B) \quad \forall B \in \mathcal{B},\ \forall \pi \in Q,\ \forall \vartheta \in \Theta$$

и если $g \in L^1(\mathcal{P})$ и $q = |Q|$, то

$$k(x) = \frac{1}{q} \sum_{\pi \in Q} g(\pi(x))$$

является версией $\mathbb{E}_\vartheta[g|\mathcal{C}]$, независимой от ϑ. Как следствие, $\mathcal{C}$ – достаточная.

Доказательство: Так как Q является группой, то $k(x) = k(\pi(x))\ \forall \pi \in Q$. Следовательно,

$$k^{-1}(B) = (\pi)^{-1}(k^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

иными словами, k – $\mathcal{C}$-измерима. Пусть $C \in \mathcal{C}$, тогда:

$$\begin{aligned}
\int_C k(x) P_\vartheta(dx) &= \frac{1}{q} \sum_{\pi \in Q} \int_C g(\pi(x)) P_\vartheta(dx) = \frac{1}{q} \sum_{\pi \in Q} \int_{\pi(C)} g(x) P_\vartheta^\pi(dx) \\
&= \frac{1}{q} \sum_{\pi \in Q} \int_{\pi(C)} g(x) P_\vartheta(dx) = \frac{1}{q} \sum_{\pi \in Q} \int_C g(x) P_\vartheta(dx) \\
&= \int_C g(x) P_\vartheta(dx).
\end{aligned}$$

Пример 4.6. Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim F$ и

$$\mathcal{P} = \{P \sim F^n \mid F \text{ – функция распределения}\}, \quad F^n(x) = \prod_{i=1}^n F(x_i).$$

Также $\mathcal{X} = \mathbb{P}^n$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}^n$. Пусть

$$Q = S_n = \{\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \pi \text{ – перестановка}\},$$

тогда $P^\pi = P \quad \forall \pi \in S_n$ и таким образом $\mathcal{P}$ – инвариантна относительно S_n. Следовательно, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(S_n)$ – достаточная.

Определение 4.7. Пусть $\mathbb{R}^n_\leq = \{X \in \mathbb{R}^n | X_1 \leq \dots \leq X_n\}$ и $X_{(j)}$ – j-ое наименьшое число среди $X_1, \dots, X_n$. Тогда статистика

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n_\leq \\ X & \mapsto & X_{(\cdot)} \end{cases}$$

называется ***порядковой статистикой*** $(X_1, \dots, X_n)^T$.

Замечание 4.8.

(i) По определению $\sigma(T) = \mathcal{C}(S_n)$, поэтому T – достаточная статистика. Другими словами, всегда достаточно хранить упорядоченный вектор наблюдений.

(ii) Статистика

$$\widetilde{T} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2, \dots, \sum_{i=1}^n X_i^n\right)^T \end{cases}$$

также достаточная, потому что можно показать, что $\sigma(T) = \sigma(\widetilde{T})$.

Определение 4.9. Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – семейство вероятностных мер. Тогда мера ν называется ***эквивалентной*** $\mathcal{P}$, если

$$\nu(N) = 0 \Longleftrightarrow P_\vartheta(N) = 0 \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Теорема 4.10 (Теорема Халмоса-Саважа). *Пусть μ – σ-конечная мера, $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ и $P_\vartheta \ll \mu \quad \forall\vartheta \in \Theta$.*

(i) Существует мера ν, эквивалентная $\mathcal{P}$, вида

$$\nu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i P_{\vartheta_i}, \text{ где } c_i \geq 0 \ \forall i \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1. \tag{4.1}$$

(ii) σ-алгебра $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ достаточная для ϑ тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{C}$-измеримая функция $\frac{dP_\vartheta}{d\nu}$ для любого параметра ϑ.

(iii) Статистика T является достаточной для ϑ тогда и только тогда, когда для любого параметра ϑ существует функция g_ϑ, такая что:

$$\frac{dP_\vartheta}{d\nu}(x) = g_\vartheta(T(x)).$$

Доказательство:

(i) Мы докажем утверждение только для конечной меры μ. Пусть

$$\mathcal{J} = \{\nu \mid \nu \text{ – мера вида (4.1)}\}$$

и

$$q = \frac{dQ}{d\mu}, \quad Q \in \mathcal{J}.$$

Достаточно показать, что существует мера $Q_0 \in \mathcal{J}$, такая что:

$$Q_0(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{J}. \tag{4.2}$$

Тогда $P_\vartheta(A) = 0 \ \forall\vartheta$, так как $P_\vartheta \in \mathcal{J}$. Верно и обратное, если $P_\vartheta(A) = 0 \ \forall\vartheta$, то $Q_0(A) = 0$, так как $Q_0 \in \mathcal{J}$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{C} := \{B \in \mathcal{B} \mid \exists Q \in \mathcal{J}, \text{ такая что } Q(B) > 0 \text{ и } q(x) > 0 \text{ для } \mu\text{-почти всех } x \in B\}$$

и зададим $\sup_{B \in \mathcal{C}} \mu(B) = r$. Тогда существуют $B_i \in \mathcal{C}$, такие что $\mu(B_i) \to r$. Пусть

$$B_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i,$$

тогда вследствие непрерывности μ мы получаем $\mu(B_0) = r$. Пусть также Q_i – меры $Q \in \mathcal{J}$, соответствующие B_i, и

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i Q_i \in \mathcal{J},$$

где $c_i > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$. Тогда μ-плотность Q_0:

$$\frac{dQ_0}{d\mu}(x) = q_0(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i(x).$$

Очевидно, что $q_0(x) > 0$ для μ-почти всех $x \in B_0$. Следовательно $Q_0(B_0) > 0$ и $B_0 \in \mathcal{C}$. Докажем (4.2). Допустим, $Q_0(A) = 0$ и пусть $Q \in \mathcal{J}$ – произвольная мера. Пусть q – плотность Q и

$$B = \{x \mid q(x) > 0\}.$$

Тогда
$$0 = Q_0(A \cap B_0) = \int_{A\cap B_0} q_0(x)\mu(dx).$$
Так как на $q_0 > 0$ на B_0, мы получаем
$$\mu(A \cap B_0) = 0$$
и, как следствие,
$$Q(A \cap B_0) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{J}.$$
Кроме того, в соответствии с определением B:
$$Q(A \cap B_0^c \cap B^c) = 0.$$
Если $Q(A \cap B_0^c \cap B) > 0$, то B_0 и $A \cap B_0^c \cap B$ являются элементами $\mathcal{C}$. Тогда легко увидеть, что объединение B_0 и $A \cap B_0^c \cap B$ также принадлежит $\mathcal{C}$. Тогда
$$\mu(B_0 \cup (A \cap B_0^c \cap B)) = \mu(B_0) + \mu(A \cap B_0^c \cap B) > \mu(B_0),$$
что противоречит максимальности B_0 в $\mathcal{C}$. Следовательно,
$$Q(A \cap B_0^c \cap B) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0.$$

(ii) "$\Longrightarrow$" Допустим, что $\mathcal{C}$ – достаточная. Тогда $\forall B \in \mathcal{B}$ существует $\mathcal{C}$-измеримая функция k_B, независимая от ϑ, такая что
$$\int_C k_B dP_\vartheta = \int_C 1_B dP_\vartheta \quad \forall C \in \mathcal{C}\ \forall \vartheta \in \Theta.$$
Из (i) следует, что
$$\int_C k_B d\nu = \int_C 1_B d\nu \quad \forall C \in \mathcal{C}.$$
Следовательно, $k_B = \mathbb{E}_\nu[1_B|\mathcal{C}]$ и
$$P_\vartheta(B) = \int_\mathcal{X} 1_B dP_\vartheta = \int_\mathcal{X} k_B dP_\vartheta = \int_\mathcal{X} \mathbb{E}_\nu[1_B|\mathcal{C}]dP_\vartheta.$$
Пусть теперь
$$f_\vartheta^\mathcal{C} = \frac{dP_\vartheta^\mathcal{C}}{d\nu}$$
– ν-плотность P_ϑ, ограниченная σ-алгеброй $\mathcal{C}$. Тогда вследствие $\mathcal{C}$-измеримости f_ϑ^C (Теорема 1.3) мы получаем по Теореме 1.12:
$$P_\vartheta(B) = \int_\mathcal{X} \mathbb{E}_\nu[1_B|\mathcal{C}]f_\vartheta^\mathcal{C} d\nu = \int_\mathcal{X} \mathbb{E}_\nu[1_B f_\vartheta^\mathcal{C}|\mathcal{C}]d\nu = \int_B f_\vartheta^\mathcal{C} d\nu.$$
Следовательно, $\frac{dP_\vartheta}{d\nu} = f_\vartheta^\mathcal{C}$ и $f_\vartheta^\mathcal{C}$ $\mathcal{C}$-измерима.

"$\Longleftarrow$" Пусть $B \in \mathcal{B}$ и k_B – версия $\mathbb{E}_\nu[1_B|\mathcal{C}]$, где ν – мера из (i). Тогда для $f_\vartheta = \frac{dP_\vartheta}{d\nu}$ имеет место
$$\int_C 1_B dP_\vartheta = \int_{B\cap C} f_\vartheta d\nu = \int_C 1_B f_\vartheta d\nu = \int_C \mathbb{E}_\nu[1_B f_\vartheta|\mathcal{C}]d\nu \quad \forall C \in \mathcal{C}.$$
f_ϑ $\mathcal{C}$-измерима по предположению. Таким образом,
$$\int_C 1_B dP_\vartheta = \int_C f_\vartheta \mathbb{E}_\nu[1_B|\mathcal{C}]d\nu = \int_C f_\vartheta k_B d\nu = \int_C k_B dP_\vartheta$$
и $\mathcal{C}$ – достаточная по определению.

(iii) Следует из (ii) и Леммы о факторизации (Теорема 1.18).

Теорема 4.11 (**Критерий Неймана**). *Пусть* μ *–* σ*-конечная мера и* $P \ll \mu$*. Тогда:*

(i) σ*-алгебра* $\mathcal{C}$ *является достаточной для* $\vartheta \in \Theta$ *тогда и только тогда, когда существуют* $\mathcal{C}$*-измеримые функции* $f_\vartheta : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *и* $\mathcal{B}$*-измеримая функция* $r : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*, такие что*

$$\frac{dP_\vartheta}{d\mu} = r(x) f_\vartheta(x).$$

(ii) Статистика $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ *является достаточной тогда и только тогда, когда существуют* $\mathcal{D}$*-измеримые функции* $g_\vartheta : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ *и* $\mathcal{B}$*-измеримая функция* $r : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*, такие что*

$$\frac{dP_\vartheta}{d\mu} = r(x) g_\vartheta(T(x)).$$

Доказательство: Мы покажем только (i), так как (ii) следует из 1.18.
"$\Longrightarrow$" Пусть r – мера из Теоремы 4.10, $P_\vartheta \ll r \ll \mu$. Из Теоремы 1.3 следует:

$$\frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x) = \underbrace{\frac{dP_\vartheta}{d\nu}(x)}_{f_\vartheta(x)} \ \underbrace{\frac{d\nu}{d\mu}(x)}_{r(x)}$$

$f_\vartheta(x)$ $\mathcal{C}$-измерима по Теореме 4.10(ii).
"$\Longleftarrow$" $f_\vartheta(x)$ $\mathcal{C}$-измерима по предположению. Возьмем c_i и f_{ϑ_i} из r из Теоремы 4.10 и определим:

$$\widetilde{f_\vartheta}(x) = \begin{cases} f_\vartheta(x) / \sum_{i=1}^\infty c_i f_{\vartheta_i}(x), & \exists\, i : f_{\vartheta_i}(x) > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, $\widetilde{f_\vartheta}$ $\mathcal{C}$-измерима и

$$\int_B \widetilde{f_\vartheta} d\nu = \int_B \widetilde{f_\vartheta} \sum_{i=1}^\infty c_i dP_{\vartheta_i} = \int_B \widetilde{f_\vartheta} \sum_{i=1}^\infty c_i r f_{\vartheta_i} d\mu = \int_B f_\vartheta r d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

что не что иное, как $P_\vartheta(B)$. Следовательно, $\widetilde{f_\vartheta}$ $\mathcal{C}$-измеримая версия $\frac{dP_\vartheta}{dr}$. Следовательно, по Теореме 4.10 (ii) $\mathcal{C}$ достаточная для ϑ.

Пример 4.12.

(i) Пусть P – k-параметрическое экспоненциальное семейство с плотностями

$$\frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x) = c(\vartheta) h(x) \exp\Big\{ \sum_{i=1}^k Q_j(\vartheta) T_j(x) \Big\}.$$

По Теореме 4.11 $T = (T_1, \ldots, T_n)^T$ достаточная для ϑ.

(ii) Если $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то

$$T(X) = \Big(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2 \Big)$$

достаточная для $(\mu, \sigma^2)^T$.

(iii) Если $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{U}[0, \vartheta]$ $(\vartheta > 0)$, то для X плотность вероятности будет:

$$f_\vartheta(X) = \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^n \prod_{i=1}^n 1_{[0,\vartheta]}(X_i) = \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^n 1_{[0,\vartheta]}\big(\max_{1 \le i \le n} X_i\big).$$

Следовательно, $T(X) = \max_{1 \le i \le n} X_i$ достаточная для ϑ по Теореме 4.11.

Замечание 4.13. Пусть $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ и $\widetilde{T} : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}})$ – статистики и, без ограничения общности, $\mathcal{T} = T(\mathcal{X})$ и $\widetilde{\mathcal{T}} = \widetilde{T}(\mathcal{X})$. Если T – достаточная для ϑ и существует биекция $b : \mathcal{T} \to \widetilde{\mathcal{T}}$, такая что $\widetilde{T} = b \circ T$ и $b(\mathcal{D}) = \widetilde{\mathcal{D}}$, то

$$\widetilde{T}^{-1}(\widetilde{D}) = T^{-1}(b^{-1}(b(D))) = T^{-1}(D), \quad \widetilde{D} \in \widetilde{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad D = b^{-1}(\widetilde{D}) \in \mathcal{D}.$$

Следовательно, $\sigma(\widetilde{T}) = \sigma(T)$ и $\widetilde{T}$ – достаточная.
Вкратце: биективное отображение сохраняет достаточность.

Пример 4.14. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Мы знаем из Примера 4.12, что

$$T(X) = \Big(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2 \Big)$$

достаточная для $(\mu, \sigma^2)^T$. Из Замечания 4.13 следует, что $(\overline{X}_n, \hat{s}_n^2)$ достаточная, если взять

$$b(x, y) = \left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n} - \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right), \quad \mathcal{T} = \left\{ (x, y) | x \in \mathbb{R}, y \geq \frac{x^2}{n} \right\} \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathcal{T}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Множество $\mathcal{T}$ может быть проверено с помощью неравенства Коши-Шварца.

Теорема 4.15 (Теорема Рао-Блэквелла). *Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – семейство распределений на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ – достаточная статистика для ϑ, $\gamma : \Theta \to \Gamma \subset \mathbb{R}^l$, $L : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}^+$ – функция потерь, такая что $y \mapsto L(\gamma(\vartheta), y)$ – выпуклая $\forall \vartheta \in \Theta$. Если g – несмещенная оценка $\gamma(\vartheta)$ и $\mathbb{E}[L(\gamma(\vartheta), g)] < \infty$ $\forall \vartheta \in \Theta$, то:*

(i) Существует $\sigma(T)$-измеримая несмещенная оценка k, такая что

$$R(\vartheta, k) \leq R(\vartheta, g) \quad \forall \vartheta \in \Theta,$$

точнее $k = \mathbb{E}[g|T]$.

(ii) Если $y \mapsto L(\gamma(\vartheta), y)$ строго выпуклая $\forall \vartheta \in \Theta$, то

$$R(\vartheta, k) = R(\vartheta, g) \quad \forall \vartheta \in \Theta,$$

тогда и только тогда, когда $g = h \circ T$, где $h(t) = \mathbb{E}[g|T = t]$.

Доказательство: Используем неравенство Йенсена для условного математического ожидания:

$$f(\mathbb{E}[g(X)|\mathcal{V}]) \leq \mathbb{E}[f(g(X))|\mathcal{V}] \quad \mathbb{P}^{\mathcal{V}}\text{-п.н.}$$

Для строго выпуклой функции f имеет место равенство в случае $g = \mathbb{E}[g|\mathcal{V}]$.

(i) По свойству итерированного ожидания:

$$\mathbb{E}_\vartheta[k] = \mathbb{E}_\vartheta[\mathbb{E}_\vartheta[g|T]] = \mathbb{E}_\vartheta[g] = \gamma(\vartheta),$$

то есть оценка k несмещенная $\forall \vartheta \in \Theta$.

$$L(\gamma(\vartheta), k) = L(\gamma(\vartheta), \mathbb{E}_\vartheta[g|T]) \leq \mathbb{E}_\vartheta[L(\gamma(\vartheta), g)|T] \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Интегрируя по P_ϑ, получаем:

$$R(\vartheta, k) = \mathbb{E}_\vartheta[L(\gamma(\vartheta), k)] \leq \mathbb{E}_\vartheta[\mathbb{E}_\vartheta[L(\gamma(\vartheta), g)|T]] = \mathbb{E}_\vartheta[L(\gamma(\vartheta), g)] = R(\vartheta, g).$$

(ii) В случае строгой выпуклости равенство имеет место тогда и только тогда, когда $g = \mathbb{E}[g|T]$.

Следствие 4.16. *Пусть* $\Theta \subset \mathbb{R}$ *и* $L(x,y) = (x-y)^2$. *Если* g *– несмещенная оценка, а* T *– достаточная стастистика, то для оценки* $k = \mathbb{E}[g|T]$ *неравенство*

$$\mathrm{Var}_\vartheta(k) \le \mathrm{Var}_\vartheta(g) \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

превращается в равенство тогда и только тогда, когда $g = \mathbb{E}[g|T]$.

Пример 4.17.

(i) Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$, $\vartheta > 0$. Мы знаем, что статистика

$$T(X) = X_{(n)} = \max_{1 \le i \le n} X_i$$

является достаточной для ϑ. Оценка $g(X) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ является несмещенной для ϑ. Следовательно, оценка

$$k(X) = \mathbb{E}[g(X) \mid X_{(n)}] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_{(i)} \mid X_{(n)}] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \frac{i}{n} X_{(n)} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

также является несмещенной и имеет меньшую (или, по крайней мере, такую же) дисперсию. Проверим это, используя распределение i-го элемента в порядковой статистике из стандартного равномерного распределения $\mathcal{U}(0,1)$:

$$\mathbb{P}(X_{(i)} \le x) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = \frac{\int_0^x t^{i-1}(1-t)^{n-i} dt}{B(i, n-i+1)}.$$

Другими словами, $X_{(i)} \sim B(i, n-i+1)$. Зная дисперсию бета-распределения (Пример 3.14) и масштабируя на ϑ, мы получаем

$$\mathrm{Var}_\vartheta(g) = \frac{\vartheta^2}{3n} \quad \text{и} \quad \mathrm{Var}_\vartheta(k) = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)}.$$

Таким образом, для $n \ge 2$ оценка k имеет меньшую дисперсию.

(ii) Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim F$ и

$$\mathcal{P} = \{F \mid F \text{ – функция распределения}\}.$$

Допустим, мы заинтересованы в оценке $\gamma : F \mapsto F(z)$, $z \in \mathbb{R}$. Функция

$$g(X) = 1_{\{X_1 \le z\}}$$

является несмещенной оценкой. Статистика

$$X_{(\cdot)} = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^T$$

является достаточной для F (Замечание 4.8). Заметив, что

$$\mathbb{E}[1_{\{X_n \le z\}} | X_{(\cdot)}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \le z\}}, \tag{4.3}$$

мы увидим, что $\hat{F}_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \le z\}}$ – несмещенная оценка $F(z)$, с дисперсией, не большей чем дисперсия g. Функция $\hat{F}_n(z)$ называется ***эмпирической функцией распределения***.

Чтобы увидеть, откуда берется (4.3), вспомним из Замечания 4.8, что

$$\sigma(X_{(\cdot)}) = \mathcal{C}(S_n).$$

Так как $\hat{F}_n(z)$ инвариантна по отношению к перестановкам, она $\sigma(X_{(\cdot)})$-измерима. Заметим далее, что

$$\int_B 1_{\{X_1 \le z\}} d\mathbb{P} = \int_B 1_{\{X_j \le z\}} d\mathbb{P} \quad \forall B \in \sigma(X_{(\cdot)}) = \mathcal{C}(S_n)$$

и (4.3) следует из определения условного математического ожидания.

Замечание 4.18. Хорошие оценки факторизуются в общем над достаточными статистиками. Таким способом, уменьшаются данные, как в Примере 4.12, где мы храним $(\overline{X}_n, \hat{s}_n^2(X))$, вместо целого вектора $(X_1, \dots, X_n)^T$. Оптимальным будет сокращение до минимальных достаточных статистик.

Определение 4.19. Достаточная статистика $T^* : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ называется ***минимальной достаточной***, если для любой другой достаточной статистики T существует функция h, такая что

$$T^* = h \circ T.$$

Пример 4.20. Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – семейство эквивалентных вероятностных мер, где $\Theta = \{\vartheta_0, \dots, \vartheta_k\}$ и μ-плотности $f_{\vartheta_i}, i = 0, \dots, k$. Тогда статистика

$$T^*(x) = \left(\frac{f_{\vartheta_1}(x)}{f_{\vartheta_0}(x)}, \dots, \frac{f_{\vartheta_k}(x)}{f_{\vartheta_0}(x)}\right)^T$$

минимальная достаточная для ϑ.

Доказательство: Введем обозначения: $P_i = P_{\vartheta_i}$ и $f_i = f_{\vartheta_i}$. Выберем P_0 в качестве доминирующей меры в критерии Неймана (Теорема 4.11). Тогда

$$\frac{dP_i}{dP_0} = \frac{dP_i/d\mu}{dP_0/d\mu} = \frac{f_i}{f_0} = \pi_i \circ T^*, \quad i = 1, \dots, k$$

и

$$P_i(A) = \int_A \frac{dP_i}{dP_0} dP_0 = \int_A \frac{dP_i}{dP_0}\frac{dP_0}{d\mu} d\mu = \int_A \frac{dP_i}{d\mu} d\mu \quad i = 1, \dots k,$$

где π_i обозначает проекцию i-й компоненты. Также, так как $\frac{dP_0}{dP_0} = 1 = k \circ T^*$ для $k \equiv 1$, то T^* – достаточная по критерию Неймана. Допустим теперь, что T – другая достаточная статистика. Тогда

$$f_i(x) = h(x) g_i(T(x))$$

для определенных функций h и g. Тогда

$$\frac{f_i(x)}{f_0(x)} = \frac{g_i(T(x))}{g_0(T(x))}.$$

Следовательно, $T^*(x)$ – функция от $T(x)$.

Лемма 4.21. *Пусть $\mathcal{P}$ – семейство эквивалентных мер и $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ – конечное подсемейство. Тогда любая статистика T, достаточная для $\mathcal{P}$ и минимальная достаточная для $\mathcal{P}_0$ также минимальная достаточная для $\mathcal{P}$.*

Доказательство: Пусть S – достаточная для $\mathcal{P}$. Тогда S также достаточная для $\mathcal{P}_0$ и

$$T = h \circ S \quad \mathcal{P}_0\text{-п.н.}$$

Так как все меры эквивалентны,

$$T = h \circ S \quad \mathcal{P}\text{-п.н.}$$

Теорема 4.22. *Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – k-параметрическое экспоненциальное семейство с плотностями:*

$$\frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x) = c(\vartheta) h(x) \exp\Big\{\sum_{i=1}^k Q_i(\vartheta) T_i(x)\Big\}.$$

Если $Z = \{(Q_1(\vartheta), \dots, Q_k(\vartheta))^T \mid \vartheta \in \Theta\}$ имеет непустую внутреннюю часть, то $(T_1(x), \dots, T_k(x))^T$ – минимальная достаточная для ϑ.

Доказательство: Статистика $(T_1(x), \dots, T_k(x))^T$ – достаточная по критерию Неймана. Пусть $\mathcal{P}_0 = \{P_{\vartheta_i} \mid i = 0, \dots, k\}$ – конечное подсемейство. Из Примера 4.20 и Замечания 4.13 мы знаем, что

$$\widetilde{T}(x) = \left(\sum_{i=1}^{k} (Q_i(\vartheta_1) - Q_i(\vartheta_0)) T_i(x), \dots, \sum_{i=1}^{k} (Q_i(\vartheta_k) - Q_i(\vartheta_0)) T_i(x) \right)^T$$

минимальная достаточная для $\mathcal{P}_0$. Пусть $T(x) = (T_1(x), \dots, T_k(x))^T$, тогда имеет место равенство

$$\widetilde{T} = \Delta Q \cdot T = (Q_i(\vartheta_j) - Q_i(\vartheta_0))_{i,j=1}^{k} \cdot T.$$

Если мы выберем подсемейство так, что ΔQ обратима (это возможно, благодаря непустой части Z), то

$$T = (\Delta Q)^{-1} \cdot \widetilde{T}$$

минимальная достаточная для $\mathcal{P}_0$. Тогда теорема следует из Леммы 4.21.

Замечание 4.23. Используя Теорему 4.15 все кандидаты на UMVU-оценку – достаточные статистики. Мы будем искать условия, при которых класс этих статистик будет относительно небольшим.

Определение 4.24.

(i) Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – семейство вероятностных мер на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Тогда σ-алгебра $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ называется ***полной*** для $\mathcal{P}$, если для любой $\mathcal{B}_0$-измеримой функции $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}_\vartheta[g(X)] = 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta \quad \iff \quad g = 0 \;\; P_\vartheta\text{-п.н.} \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

(ii) Статистика $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ называется ***полной*** для ϑ, если $\sigma(T)$ полная для ϑ:

$$\mathbb{E}_\vartheta[g \circ T] = 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta \quad \iff \quad g \circ T = 0 \;\; P_\vartheta\text{-п.н.} \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Теорема 4.25. *Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – k-параметрическое экспоненциальное семейство с непустой внутренней частью и плотностями:*

$$\frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x) = c(\vartheta) h(x) \exp\Big\{ \sum_{i=1}^{k} Q_i(\vartheta) T_i(x) \Big\}.$$

Тогда $T(x) = (T_1(x), \dots, T_k(x))^T$ – полная статистика для ϑ.

Доказательство: Естественное параметрическое пространство: $\vartheta_i = Q_i(\vartheta)$. Предположим, что $[-a, a]^k \subset \Theta^*$. Пусть g измерима и

$$0 = \mathbb{E}_\vartheta[g(T(X))] = \int c(\vartheta) g(t) \exp\Big\{ \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i t_i \Big\} \mu^T(dt) \quad \forall \vartheta \in [-a, a]^k.$$

Разложим $g = g^+ - g^-$ и получим:

$$\int c(\vartheta) g^+(t) \exp\Big\{ \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i t_i \Big\} \mu^T(dt) = \int c(\vartheta) g^-(t) \exp\Big\{ \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i t_i \Big\} \mu^T(dt) \quad \forall \vartheta \in [-a, a]^k. \tag{4.4}$$

В частности мы получаем для $\vartheta = 0$:

$$A = \int g^+ \mu^T(dt) = \int g^- \mu^T(dt).$$

Нам нужно показать, $g^+ = g^- = 0$ μ^T-п.н. Если $A = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $A \neq 0$, тогда зададим

$$P^\pm(B) = \frac{1}{A} \int_B g^\pm \mu^T(dt).$$

Тогда равенство (4.4) эквивалентно

$$\int \exp\Big\{\sum_{i=1}^{k} \vartheta_i t_i\Big\} P^+(dt) = \int \exp\Big\{\sum_{i=1}^{k} \vartheta_i t_i\Big\} P^-(dt) \quad \forall \vartheta \in [-a,a]^k,$$

что несколько напоминает равенство характеристических функций, но без комплексной части в экспоненте. Зададим $\vartheta_i = \xi_i + i\eta_i$, где $|\xi_i| \le a \ \forall i = 1,\dots,k$. Рассмотрим функции

$$f_l^{\pm} : \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \mid |Re(z)| \le a\} & \to \quad \mathbb{C} \\ \qquad z & \mapsto \quad \int \exp\Big\{\sum\limits_{i\ne l} \vartheta_i t_i + z t_l\Big\} P^{\pm}(dt). \end{cases}$$

Используя комплексную версию Теоремы 2.38 мы заключаем, что эти функции аналитические (и таким образом голоморфные). На множестве $\mathbb{C} \cap [-a,a]$ имеет место равенство $f_l^+(z) = f_l^-(z)$. Используя тождественную теорему для голоморфных функций[1], мы получаем равенство

$$f_l^+(z) = f_l^-(z) \quad \forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |Re(z)| \le a\}.$$

Так как l выбирается произвольно:

$$\int \exp\Big\{i\sum_{i=1}^{k} \eta_i t_i\Big\} P^+(dt) = \int \exp\Big\{i\sum_{i=1}^{k} \eta_i t_i\Big\} P^-(dt) \quad \forall \eta = (\eta_1,\dots,\eta_k)^T.$$

Следовательно, исходя из теоремы о единственности характеристических функций, имеет равенство мер P^+ и P^- и

$$g^+ = g^- \ \mu\text{-п.н.} \quad \Longrightarrow \quad g = 0 \ \mu\text{-п.н.}$$

Пример 4.26.

(i) Пусть $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ с плотностью

$$f_{\sigma^2}(x) = \Big(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\Big)^{n/2} \exp\Big\{-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sigma^2}\Big\}.$$

Мы видим из Теоремы 4.11, что

$$T_1(X) = (X_1,\dots,X_n)^T,$$

$$T_2(X) = (X_1^2,\dots,X_n^2)^T,$$

$$T_3(X) = \Big(\sum_{i=1}^{m} X_i^2, \sum_{i=m+1}^{n} X_i^2\Big)^T,$$

$$T_4(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

достаточные статистики в порядке убывания сложности.

(ii) Несложно увидеть, что можно подобрать набор функций h_{ij}, такой что

$$T_j(X) = h_{ij}(T_i), \quad i < j.$$

Следовательно, T_1, T_2, T_3 не минимальные достаточные, в отличие от T_4 (по Теореме 4.22).

[1] Пусть заданы функции f и g на связном открытом множестве D. Тогда, если $f = g$ на некотором непустом открытом подмножестве D, то $f = g$ на всем множестве D.

(iii) Статистики T_1, T_2, T_3 не полные, так как можно подобрать следующие функции:

$$g_1(X) = X_1 \text{ (для } T_1),$$

$$g_2(X) = X_2 - X_1 \text{ (для } T_2),$$

$$g_3(X) = (n-m)X_1 - mX_2 \text{ (для } T_3).$$

Статистика T_4 является полной вследствие Теоремы 4.25.

Пример 4.27.

(i) В Примере 4.17(i) мы показали, что

$$X_{(n)} = \max_{i=1}^{n} X_i$$

является достаточной для $\vartheta \in (0, \infty)$. Она также является полной, так как плотность $X_{(n)}$

$$f_\vartheta(x) = \frac{n}{\vartheta^n} x^{n-1} 1_{[0,\vartheta]}(x).$$

То есть, если

$$\mathbb{E}_\vartheta[g(X_{(n)})] = \frac{n}{\vartheta^n} \int_0^\vartheta g(x) x^{n-1} dx = 0 \quad \forall \vartheta > 0,$$

то $g(x) \equiv 0$ λ-п.н.

(ii) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim F \ll \lambda$ и

$$\mathcal{P} = \{F \mid F \text{ – функция распределения}\}.$$

Тогда порядковая статистика $X_{(\cdot)}$ является полной (см. Пример 4.34 в [4].).

Теорема 4.28 (Теорема Леманна-Шеффе). *Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – семейство вероятностных мер на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ – достаточная и полная статистика для ϑ. Пусть также $\gamma : \Theta \to \Gamma$ – функционал, для которого может быть получена несмещенная оценка и L – функция потерь, такая что $L(\gamma(\vartheta), \cdot)$ – выпуклая $\forall \vartheta \in \Theta$. Тогда существует (почти наверное) единственная несмещенная оценка $\gamma(\vartheta)$ вида $h \circ T$. Она имеет равномерно наименьший риск среди всех несмещенных оценок.*

Доказательство: Существование следует из Теоремы 4.15.
Единственность: пусть $g \circ T$ – другая несмещенная оценка $\gamma(\vartheta)$. Тогда:

$$\mathbb{E}_\vartheta[h(T) - g(T)] = 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Так как T – полная статистика, то:

$$h \circ T = g \circ T \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Наконец, пусть k – некоторая несмещенная оценка $\gamma(\vartheta)$. Тогда

$$k \circ T = \mathbb{E}[k|T]$$

также несмещенная и мы знаем из Теоремы Рао-Блэквелла, что

$$R(\vartheta, k) \geq R(\vartheta, \mathbb{E}[k|T]) = R(\vartheta, h \circ T).$$

Следствие 4.29. *В случае, когда функция потерь $L(x, y) = (x-y)^2$ и T – достаточная и полная, любая несмещенная оценка вида $h \circ T$ единственная и UMVU.*

Пример 4.30.

(i) Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{U}[0, \vartheta]$. Тогда

$$\frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

является UMVU-оценкой.

(ii) Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim F \ll \lambda$. Тогда эмпирическая функция распределения $\hat{F}(z)$ – UMVU-оценка для $F(z)$.

(iii) Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim Bin(1, \vartheta)$, $\vartheta \in [0, 1]$. Тогда

$$T(X) = \sum_{i=1}^{j} X_j$$

является достаточной (Пример 4.2). Она также является полной, что можно видеть из Примера 2.34 и Теоремы 4.25 или же из того, что, если

$$0 = \mathbb{E}_\vartheta[h \circ T] = \sum_{j=0}^{n} h(j) \binom{n}{j} \vartheta^j (1 - \vartheta)^j \quad \forall \vartheta \in [0, 1],$$

то $h \equiv 0$. Следовательно, $\overline{X}_n$ – UMVU-оценка.

Замечание 4.31. В тех же условиях, что и в Замечании 4.13 для статистик $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{B})$ и $\widetilde{T} = b \circ T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}})$ имеет место следующая импликация: если T полная и достаточная, то $\widetilde{T}$ также полная и достаточная. Например, мы видим из Примера 4.30 (iii), что

$$g(X) = \frac{n}{n-1} \overline{X}_n (1 - \overline{X}_n)$$

UMVU-оценка для $\vartheta(1 - \vartheta)$.

Упражнения

4.1. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ – вектор i.i.d. случайных величин, имеющих

(i) распределение Вейбулла:

$$f_{\theta,\alpha}(x) = \theta\alpha(\theta x)^{\alpha-1} \exp\{-(\theta x)^\alpha\} 1_{(0,\infty)}(x), \quad \theta, \alpha > 0.$$

(ii) равномерное распределение:

$$f_{\theta_1,\theta_2}(x) = \frac{1_{(\theta_1,\theta_2)}(x)}{\theta_2 - \theta_1}, \quad (\theta_1, \theta_2) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}.$$

Найдите достаточную статистику для X, используя критерий Неймана.

4.2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. случайные величины, распределенные по Парето с параметром (θ, α), т.е. имеющие плотность:

$$f_{\theta,\alpha}(x) = \frac{\theta\alpha^\theta}{x^{\theta+1}} 1_{(\alpha,\infty)}(x), \quad \theta, \alpha > 0.$$

(i) Найдите достаточную статистику для (θ, α).

(ii) Найдите достаточную статистику для θ и для α, если другой параметр известен.

4.3. Пусть X – случайная величина, принимающая значения в $\mathcal{X}$, и, имеющая распределение P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$. Статистика $S : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ называется ***свободной от распределения***, если её распределение не зависит от ϑ. Статистика называется ***свободной от распределения первого рода***, если её математическое ожидание $\mathbb{E}_\vartheta[S(X)]$ не зависит от ϑ. Докажите, что статистика $T : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ является полной тогда и только тогда, когда существует неконстантная функция $f : \mathcal{T} \to \widetilde{\mathcal{T}}$, такая что $f(T)$ является свободной от распределения первого рода.

4.4. Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – семейство распределений и $T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^d$ – достаточная и полная статистика для ϑ. Докажите, что T является минимальной достаточной статистикой, если таковая существует.

4.5. Докажите следующее утверждение. Пусть P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$ – семейство эквивалентных мер с μ-плотностями f_ϑ. Пусть $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ – статистика, обладающая следующим свойством:

$$\frac{f_\vartheta(x)}{f_\vartheta(y)}$$

не зависит от ϑ тогда и только тогда, когда $T(x) = T(y)$. Тогда T – минимальная достаточная. Используйте следующие шаги:

(i) Покажите, что T – достаточная статистика. Для этого рассмотрите

$$f_\vartheta(x) = \frac{f_\vartheta(x)}{f_\vartheta(y)} f_\vartheta(y).$$

(ii) Докажите, что для любой достаточной статистики S имеет место импликация

$$S(x) = S(y) \Longrightarrow T(x) = T(y),$$

и тем самым завершите доказательство.

4.6. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim Cauchy(\vartheta, 1)$, т.е. плотность распределения X_i:

$$f_\vartheta(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \vartheta)^2)}.$$

Покажите, используя утверждение из предыдущего упражнения, что порядковая статистика $X_{(\cdot)}$ является минимальной достаточной для ϑ.

Глава 5

Асимптотические свойства оценок

Пусть $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)^T$ – вектор случайных величин на пространстве $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}^n$ с распределением $\mathcal{P}^n = \{P_\vartheta^n \mid \vartheta \in \Theta\}$. Для любого n пусть функция

$$T_n : \begin{cases} \mathcal{X}_n & \to & \Gamma \\ x^{(n)} & \mapsto & T_n(x^{(n)}) \end{cases}$$

будет оценкой $\gamma(\vartheta)$. Минимальное условие для хорошей оценки – это стремление T_n к $\gamma(\vartheta)$ при растущем значении n.

Определение 5.1. Пусть $T_n : \mathcal{X}_n \to \Gamma$ – оценка $\gamma(\vartheta)$, принимающая значения в метрическом пространстве. Допустим, что все эксперименты определены на совместном вероятностном пространстве $P_\vartheta^n \ll Q_\vartheta$ для любого n.

(i) T_n называется ***(слабо) состоятельной*** оценкой $\gamma(\vartheta)$, если

$$T_n \xrightarrow{Q_\vartheta} \gamma(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

(ii) T_n называется ***сильно состоятельной*** оценкой $\gamma(\vartheta)$, если

$$T_n \to \gamma(\vartheta) \ Q_\vartheta\text{-п.н.} \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Пример 5.2. Вспомним метод моментов из Замечания 2.41: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim P_\vartheta$ вещественные случайные величины, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ и $\gamma : \Theta \to \Gamma \subset \mathbb{R}^l$. Также $m_j = \mathbb{E}_\vartheta[X_1^j] = \int x^j P_\vartheta(dx)$, $j = 1, \dots, k$ и

$$\gamma(\vartheta) = f(m_1, \dots, m_k).$$

Далее берем

$$\hat{\gamma}(X) = f(\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_k),$$

гду $\hat{m}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_k^j$. Если $\mathbb{E}_\vartheta[|X|^k] < \infty$, то из Закона Больших чисел следует, что $\hat{m}_j \to m_j$ Q_ϑ-п.н., где $Q_\vartheta = \otimes_{i=1}^{\mathbb{N}} P_\vartheta$. Так как f – непрерывная, мы получаем:

$$\hat{\gamma}(X) \to \gamma(\vartheta) \quad Q_\vartheta\text{-п.н.}$$

Теорема 5.3 (Теорема Крамера-Вольда). *Пусть (X_n) – последовательность d-мерных случайных величин. Тогда $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ тогда и только тогда, когда*

$$y^T X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} y^T X \quad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

Доказательство: Согласно Теореме Леви о непрерывности:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[\exp\{iu^t X_n\}] \to \mathbb{E}[\exp\{iu^t X\}] \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

Остается только произвести замену $u = ty$ для $t \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}^d$.

Теорема 5.4 (**Центральная предельная теорема**). *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. d-размерные случайные величины, $\mathbb{E}[X_j] = \mu \in \mathbb{R}^d$ и $\mathrm{Cov}(X_j) = \Sigma > 0 \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (положительно-определенная). Тогда для случайного вектора*

$$Z^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \in \mathbb{R}^d$$

имеет место сходимость:

$$\sqrt{n}(Z^{(n)} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma). \tag{5.1}$$

Доказательство: Из одномерной центральной предельной теоремы мы знаем, что

$$\sqrt{n}(y^T Z^{(n)} - y^T\mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, y^T\Sigma y).$$

Применяем Теорему 5.3 и получаем сходимость (5.1).

Определение 5.5. Пусть $T_n : \mathcal{X}_n \to \Gamma \subset \mathbb{R}^l$ – последовательность оценок.

(i) Пусть $\mu_n(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta[T_n]$, тогда T_n называется ***асимптотически несмещенной*** оценкой $\gamma(\vartheta)$, если

$$\mu_n(\vartheta) \to \gamma(\vartheta).$$

(ii) T_n назывется ***асимптотически нормальной***, если существуют последовательности $(\mu_n) \in \mathbb{R}^l$ и $(\Sigma_n(\vartheta)) \in \mathbb{R}^{l\times l}$, такие что $\|\Sigma_n(\vartheta)\| \to 0$ и

$$\Sigma_n^{-\frac{1}{2}}(\vartheta)(T_n - \mu_n(\vartheta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_l).$$

Теорема 5.6 (**Лемма Слуцкого**). *Пусть (Y_n) и (Z_n) – последовательности d-мерных случайных величин, такие что*

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{и} \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y_0.$$

Тогда:

(i) $Z_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z + y_0$.

(ii) $Y_n^T Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} y_0^T Z$.

Доказательство: Теорема 11.2.11 в [4].

Пример 5.7. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim Bin(1,p)$, $p \in (0,1)$. Тогда оценка p $T_n = \overline{X}_n$ является несмещенной. Из центральной предельной теоремы мы знаем, что:

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Но так как $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} p$, то имеет место:

$$\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{p(1-p)}.$$

По Теореме 5.6:

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Например, пусть $n = 100$ и $\overline{X}_n = 0.85$. Тогда

$$P_p(|\overline{X}_n - p| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}\right) - 1 \quad \forall p \in (0,1),$$

где Φ – функция распределения $\mathcal{N}(0,1)$.

$$P_p(|\overline{X}_n - p| < \varepsilon) \approx \begin{cases} 83.84\%, & \varepsilon = 0.05 \\ 99.46\%, & \varepsilon = 0.1 \end{cases}$$

Теорема 5.8 (**Дельта-метод**). *Пусть (X_n) – последовательность k-мерных случайных векторов, такая что:*

$$\frac{X_n - \mu}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

где $c_n \to 0$, $\mu \in \mathbb{R}^k$ и $\Sigma \geq 0 \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Пусть также $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ – непрерывно дифференцируемая по μ функция с матрицей Якоби $D \in \mathbb{R}^{m \times k}$. Тогда:

$$\frac{g(X_n) - g(\mu)}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, D\Sigma D^T).$$

Доказательство: По Лемме 5.6:

$$X_n - \mu = \frac{X_n - \mu}{c_n} c_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

Из сходимости по распределению к постоянной следует сходимость по вероятности:

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Далее

$$\frac{g(X_n) - g(\mu)}{c_n} = g'(\mu)\frac{X_n - \mu}{c_n} + (g'(\xi_n) - g'(\mu))\frac{X_n - \mu}{c_n},$$

где ξ_n – промежуточная точка:

$$\|\xi_n - \mu\| \leq \|X_n - \mu\|.$$

Следовательно, $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ и $g'(\xi_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g'(\mu)$ (поскольку g – непрерывно дифференцируемая). Вновь по Лемме 5.6:

$$g'(\mu)\frac{X_n - \mu}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} g'(\mu)\mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Замечание 5.9. Пусть в Примере 5.2 $\mathbb{E}_\vartheta[X_1^{2k}] < \infty$ для любого $\vartheta \in \Theta$ и $\gamma : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ – непрерывно дифференцируема по $\mu = (m_1, \ldots, m_k)^T$ с матрицей Якоби D. Мы знаем из Теоремы 5.4, что

$$\sqrt{n}((\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k)^T - (m_1, \ldots, m_k)^T) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

где

$$\Sigma = (\Sigma)_{i,j=1}^k = (m_{i+j} - m_i m_j)_{i,j=1}^k.$$

Тогда

$$\sqrt{n}(\gamma(\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k) - \gamma(m_1, \ldots, m_k)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, D\Sigma D^T).$$

Пример 5.10.

(i) Пусть $X_1, \ldots X_n$ i.i.d., $\mathbb{E}_\vartheta[X_i] = \mu$ и $\mathrm{Var}_\vartheta(X_i) = \sigma^2$. Из ЦПТ следует:

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

В качестве оценки μ^2 выберем асимптотически несмещенную статистику $\overline{X}_n^2$. Используя Дельта-метод, получаем:

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 4\mu^2\sigma^2).$$

(ii) Пусть

$$(X_i, Y_i)^T \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma^2 & \rho\sigma\tau \\ \rho\sigma\tau & \tau^2\end{pmatrix}\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

i.i.d. с параметром $\vartheta = (\mu_1, \mu_2, \sigma^2, \tau^2, \rho)^T$. Оценка

$$\hat{\rho}_n = \frac{SQ_{xy}}{\sqrt{SQ_{xx}SQ_{yy}}},$$

где $SQ_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)$, ($SQ_{xx}, SQ_{yy}$ – аналогично), называется ***коэффициентом корреляции Пирсона***. Без ограничения общности, пусть $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma = \tau = 1$, так как $\hat{\rho}_n$ инвариантна по отношению к аффинным преобразованиям. Докажем сначала, что $S_n = (SQ_{xx}, SQ_{yy}, SQ_{xy})^T$ удовлетворяет

$$\sqrt{n}(S_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V), \tag{5.2}$$

где $m = (1, 1, \rho)^T$ и

$$V = 2\begin{pmatrix} 1 & \rho^2 & \rho \\ \rho^2 & 1 & \rho \\ \rho & \rho & (1+\rho^2)/2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы доказать (5.2), используем Лемму 5.6 и ЦПТ и покажем, что

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n, \overline{Y}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \sqrt{n}(\overline{X}_n)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \sqrt{n}(\overline{Y}_n)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Далее, несложно увидеть, что

$$\sqrt{n}(S_n - m) - \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i - m\Big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

где $Z_i = (X_i^2, Y_i^2, X_iY_i)^T$. Затем, покажем, что

$$\mathrm{Cov}(Z_i) = \mathbb{E}[Z_i Z_i^T] - \mathbb{E}[Z_i]\mathbb{E}[Z_i]^T = V.$$

Сходимость (5.2) следует из Теоремы 5.4. Наконец, $g(S_n) = \hat{\rho}_n$, где $g(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1 x_2}}$. Тогда матрица Якоби функции g в точке m:

$$D = (-\rho/2, -\rho/2, 1).$$

Как результат,

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, DVD^T) = \mathcal{N}(0, (1-\rho^2)^2).$$

Определение 5.11. Пусть $T_n : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^l$ – асимптотически несмещенная и асимптотически нормальная последовательность оценок. При условиях регулярности из Теоремы 2.23 мы назовем T_n ***асимптотически эффективной***, если

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_n(\vartheta) I(f_n(\cdot, \vartheta)) = \mathbb{I}_l \quad \forall \vartheta \in \Theta,$$

где $\mathbb{I}_l$ – единичная матрица, а $I(f_n(\cdot, \vartheta))$ – информация Фишера.

Замечание 5.12. Заданное выше определение можно интерпретировать следующим образом: если T_n несмещенная, то вследствие Теоремы Рао-Крамера

$$\mathrm{Cov}_\vartheta(T_n) \geq I^{-1}(f_n(\cdot, \vartheta)).$$

Но, так как

$$\Sigma_n^{\frac{1}{2}}(\vartheta)(T_n - \mu_n(\vartheta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_l),$$

то

$$\mathrm{Cov}_\vartheta(T_n) \approx \Sigma_n(\vartheta) \approx I^{-1}(f_n(\cdot, \vartheta))$$

и T_n асимптотически несмещенная и асимптотически эффективная.

Пример 5.13. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Из Примера 2.29 следует, что для

$$g_n(X) = \begin{pmatrix} \overline{X}_n \\ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 \end{pmatrix}$$

выполняется равенство

$$\mathrm{Cov}_\vartheta(g_n) = \begin{pmatrix} \sigma^2/n & 0 \\ 0 & 2\sigma^4/(n-1) \end{pmatrix} = \Sigma_n(\vartheta).$$

Но информация Фишера:

$$I^{-1}(f_n(\cdot, \vartheta)) = \begin{pmatrix} \sigma^2/n & 0 \\ 0 & 2\sigma^4/n \end{pmatrix}$$

и g_n не эффективная, но эффективная асимптотически.

Замечание 5.14. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim P_\vartheta$, $\vartheta \in \Theta$ с μ-плотностями $f(\cdot, \vartheta)$. Мы назовем

$$\ell(\cdot, \vartheta) = \log f(\cdot, \vartheta)$$

логарифмической функцией правдоподобия и зададим

$$\hat{\theta}_n(X) = \arg\sup_{\vartheta \in \Theta} f(X, \vartheta) = \arg\sup_{\vartheta \in \Theta} \ell(X, \vartheta) = \arg\sup_{\vartheta \in \Theta} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ell(X_i, \vartheta)$$

как оценку максимального правдоподобия для ϑ (если таковая существует).

Определение 5.15. Пусть $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ – вероятностные меры на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, тогда

$$KL(\mathbb{P}|\mathbb{Q}) = \begin{cases} \int_\mathcal{X} \log\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(x) d\mathbb{P}(x)\right), & \text{если } \mathbb{P} \ll \mathbb{Q}, \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

называется ***расстоянием Кульбака - Лейблера*** для $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$.

Лемма 5.16. *Величина $KL(\mathbb{P}|\mathbb{Q}) \geq 0$ и достигает нуля тогда и только тогда, когда $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.*

Доказательство:

$$\begin{aligned} \int_\mathcal{X} \log\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)(x)\mathbb{P}(dx) &= \int_\mathcal{X} -\log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)(x)\mathbb{P}(dx) \\ \text{неравенство Йенсена} \to &\geq -\log\int_\mathcal{X}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)(x)\mathbb{P}(dx) \\ &= -\log\int_\mathcal{X}\mathbb{Q}(dx) = 0. \end{aligned}$$

Неравенство вырождается в равенство, если $\frac{d\mathbb{Q}(x)}{d\mathbb{P}(x)} = 1$ п.н.

Теорема 5.17. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim P_\vartheta$, $\vartheta \in \Theta$, $\ell(\cdot, \vartheta)$ – функция правдоподобия. Также:*

(i) $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ *– компактное пространство.*

(ii) $\eta \mapsto L(\eta, \vartheta) = \mathbb{E}[\ell(X_i, \eta)]$ *непрерывная и* $\eta \mapsto L_n(\eta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ell(X_i, \eta)$ $\otimes_{i=1}^n P_\vartheta$*-п.н. непрерывная функции.*

(iii) Пусть $Q_\vartheta = \otimes_{i=1}^{\mathbb{N}} P_\vartheta$ *и*

$$\sup_{\eta \in \Theta} |L_n(\eta) - L(\eta, \vartheta)| \xrightarrow{Q_\vartheta} 0.$$

Тогда оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n$ состоятельная.

Доказательство: Для любого $\eta \in \Theta$:

$$L_n(\eta) \to L(\eta, \vartheta) = \int \ell(x,\eta) f(x,\vartheta)\mu(dx) = \int \ell(x,\vartheta) f(x,\vartheta)\mu(dx) - KL(\vartheta|\eta)$$

μ-п.н. Используя Лемму 5.16, заключаем что $\eta \mapsto L(\eta,\vartheta)$ достигает максимума при $\eta = \vartheta$. Функция

$$\arg\max : \begin{cases} C(\Theta,\mathbb{R}) & \to & \Theta \\ f & \mapsto & m_f = \arg\max_{\eta\in\Theta} f(\eta) \end{cases}$$

непрерывна для тех f, для которых m_f единственная. Тогда утверждение будет доказано, исходя из того, что

$$\vartheta = \arg\max L(\eta,\vartheta) \quad \text{и} \quad \hat{\theta}_n = \arg\max L_n(\eta)$$

и из условия (iii).

Замечание 5.18.

(i) Так как $\eta \to L_n(\eta)$ (п.н.) непрерывна и Θ – компакт, оценка максимального правдоподобия существует (п.н.) и измерима (Лемма 6.7 в [5])

(ii) Наиболее сложным условием для проверки является (iii). Как правило, используется следующий вывод: Предположим, что $T \subset \mathbb{R}$ компакт и случайные величины $X_n(\gamma)$ и $X(\gamma)$ такие, что

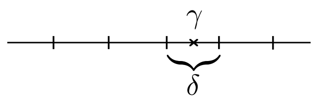
$$X_n(\gamma) \xrightarrow{\mathbb{P}} X(\gamma)$$

и

$$\gamma \mapsto X(\gamma) \quad \text{и} \quad \gamma \mapsto X_n(\gamma)$$

(п.н.) непрерывные. Тогда

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \|X_n(\gamma) - X(\gamma)\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$



Идея заключается в интерполяции внутри интервалов δ.

тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{|\gamma_1-\gamma_2|<\delta} \|X_n(\gamma_1) - X_n(\gamma_2)\| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Теорема 5.19 (Асимптотическая эффективность оценок МП). *Пусть $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $\sim P_\vartheta$, $\vartheta \in \Theta$, $\ell(\cdot,\vartheta)$ – функция правдоподобия. Также:*

(i) $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ – компактное пространство и $\vartheta \subset \mathrm{int}(\Theta)$.

(ii) $\eta \mapsto \ell(x,\eta)$ непрерывна на Θ и дважды непрерывно дифференцируема по ϑ для почти всех $x \in \mathcal{X}$.

(iii) Существуют функции $H_0, H_2 \in L^1(P_\vartheta)$ и $H_1 \in L^2(P_\vartheta)$, такие что:

$$\sup_{\eta\in\Theta} |\ell(x,\eta)| \leq H_0(x), \quad \sup_{\eta\in\Theta} \|\dot{\ell}(x,\eta)\| \leq H_1(x), \quad \sup_{\eta\in\Theta} \|\ddot{\ell}(x,\eta)\| \leq H_2(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

(iv) Информация Фишера

$$I(f(\cdot,\vartheta)) = \mathbb{E}_\vartheta[\dot{\ell}(X,\vartheta)\dot{\ell}(X,\vartheta)^T]$$

положительно определенная (обратима).

Тогда имеет место сходимость:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \vartheta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(f(\cdot,\vartheta))^{-1}).$$

Доказательство:
Шаг 1: покажем состоятельность оценки $\hat{\theta}_n$ (проверим, что условия из Теоремы 5.17 соблюдаются)

(i) Соблюдается по предположению.

(ii) $\eta \mapsto L_n(\eta)$ п.н. непрерывная по условию (ii). Также, используя (ii), (iii) и мажорируемую сходимость, получаем

$$|L(\eta_1, \vartheta) - L(\eta_2, \vartheta)| \le \int_{\mathcal{X}} |\ell(x, \eta_1) - \ell(x, \eta_2)| f(x, \vartheta)\mu(dx) \to 0,$$

при $\eta_1 \to \eta_2$.

(iii) В силу Сильного Закона Больших Чисел:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sup_{\|\eta_1-\eta_2\|<\delta} |L_n(\eta_1) - L_n(\eta_2)| &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sup_{\|\eta_1-\eta_2\|<\delta} |\ell(X_i, \eta_1) - \ell(X_i, \eta_2)| \\ &= \mathbb{E}_\vartheta[\sup_{\|\eta_1-\eta_2\|<\delta} |\ell(X, \eta_1) - \ell(X, \eta_2)|] \quad Q_\vartheta = \otimes_{i=1}^{\mathbb{N}} P_\vartheta\text{-п.н.}\end{aligned}$$

Так как Θ компакт, то $\eta \mapsto \ell(X, \eta)$ (п.н.) равномерно непрерывная. Как следствие, последнее выражение сходится к нулю при $\delta \to 0$ (используя снова мажорируемую сходимость).

Шаг 2: пусть A_n – k-мерный прямоугольник с вершинами $\hat{\theta}_n$ и ϑ. Поскольку $\hat{\theta}_n \xrightarrow{Q_\vartheta} \vartheta$ и $\vartheta \in \operatorname{int}(\Theta)$, то

$$Q_\vartheta(A_n \subset \operatorname{int}(\Theta)) \to 1.$$

Также

$$\dot{L}_n(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \dot{\ell}(X_i, \hat{\theta}_n) = 0$$

по определению $\hat{\theta}_n$. По Теореме о среднем:

$$-\dot{L}_n(\vartheta) = \dot{L}_n(\hat{\theta}_n) - \dot{L}_n(\vartheta) = \ddot{L}_n(\widetilde{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \vartheta)$$

для некоторого $\widetilde{\theta}_n \in A_n$. Как и в Замечании 2.25:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\dot{\ell}(X_i, \vartheta)] &= \int_{\mathcal{X}} \dot{\ell}(x, \vartheta) f(x, \vartheta)\mu(dx) \\ \ell = \log f \to &= \int_{\mathcal{X}} \dot{f}(x, \vartheta)\mu(dx) = 0.\end{aligned}$$

По определению

$$\operatorname{Cov}(\dot{\ell}(X_i, \vartheta)) = I(f(\cdot, \vartheta)).$$

Тогда по Центральной Предельной Теореме:

$$\sqrt{n}\dot{L}_n(\vartheta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(f(\cdot, \vartheta))).$$

Шаг 3: предположим, что

$$\ddot{L}_n(\widetilde{\theta}_n) \xrightarrow{Q_\vartheta} -I(f(\cdot, \vartheta)). \tag{5.3}$$

Если (5.3) соблюдается, мы можем заключить, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_\vartheta(\ddot{L}_n(\widetilde{\theta}_n) \text{ обратима}) = 1.$$

Тогда, используя лемму Слуцкого, получаем

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \vartheta) &= -\ddot{L}_n(\widetilde{\theta}_n)^{-1}\dot{L}_n(\vartheta)1_{\{A_n \subset \operatorname{int}(\Theta)\}\cap\{\ddot{L}_n(\widetilde{\theta}_n) \text{ обратима}\}} + B_n \\ &\to I(f(\cdot, \vartheta))^{-1}\mathcal{N}(0, I(f(\cdot, \vartheta))) = \mathcal{N}(0, I(f(\cdot, \vartheta))^{-1}),\end{aligned}$$

так как $B_n \xrightarrow{Q_\vartheta} 0$.

Шаг 4: докажем (5.3). Используем равенство:

$$\ddot{\ell}(x,\vartheta) = \frac{\ddot{f}(x,\vartheta)}{f(x,\vartheta)} - \dot{\ell}(x,\vartheta)\dot{\ell}(x,\vartheta)^T.$$

Тогда имеет место:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\ddot{\ell}(X,\vartheta)] + I(f(\cdot,\vartheta)) = \mathbb{E}_\vartheta\Big[\frac{\ddot{f}(X,\vartheta)}{f(X,\vartheta)}\Big] = 0,$$

как в Замечании 2.25. Из Закона Больших Чисел следует:

$$\ddot{L}_n(\vartheta) \xrightarrow{Q_\vartheta} -I(f(\cdot,\vartheta)).$$

Наконец, используем равенство

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} Q_\vartheta(\|\widetilde{\theta}_n - \vartheta\| < \delta) = 1$$

и непрерывность $\ddot{\ell}$ по ϑ, чтобы завершить доказательство (5.3).

Замечание 5.20. Теорема 5.17 и Теорема 5.19 – это специальные случаи ***оценок минимального контраста***, которые минимизируют функцию

$$\eta \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n k(X_i,\eta).$$

Можно получить похожие результаты при схожих предположениях, но асимптотическая эффективность достигается только при $k = -\ell$.

Пример 5.21. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$. Найдем оценку максимального правдоподобия. Для этого

$$f_n(X,\lambda) = \lambda^n \exp\bigg(-\lambda\sum_{i=1}^n X_i\bigg)1_{[0,\infty)}(\min_{i=1}^n X_i)$$

или

$$\ell_n(X,\lambda) = n\log(\lambda) - \lambda\sum_{i=1}^n X_i + \log 1_{[0,\infty)}(\min_{i=1}^n X_i)$$

должны быть максимизированы. Приравнивая любую из производных к нулю, получаем условие:

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^n X_i,$$

то есть оценка:

$$\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}.$$

Рассчитаем информацию Фишера:

$$\begin{aligned}\ell_1(X,\lambda) &= \log(\lambda) - \lambda X + \log(1_{[0,\infty)}X)\\ &\Rightarrow \dot{\ell}_1(X,\lambda) = -\Big(X - \frac{1}{\lambda}\Big)\\ &\Rightarrow I(f(\cdot,\lambda)) = \mathbb{E}_\lambda\Big[\Big(X - \frac{1}{\lambda}\Big)^2\Big].\end{aligned}$$

По Теореме 5.19

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\lambda^2),$$

но с другой стороны:

$$\sqrt{n}\Big(\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0,\frac{1}{\lambda^2}\Big).$$

Используя Дельта-метод для $g(x) = x^{-1}$, получаем

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^{-1} - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2).$$

Также заметим, что

$$\mathrm{Var}_\lambda(\hat{\lambda}_n) = n^{-1}\lambda^2 = (nI(f(\cdot, \lambda)))^{-1}$$

является следствием из Предположения 2.31 для экспоненциального семейства.

Упражнения

5.1. Докажите следующий вариант леммы Слуцкого: пусть (X_n) и (Y_n) – последовательности вещественнозначных случайных величин, такие что

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{и} \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c,$$

где X – вещественнозначная случайная величина и $c \in \mathbb{R}$. Тогда имеет место:

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c.$$

Подсказка: последовательность (Z_n) сходится к Z тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}[f(Z_n)] \to \mathbb{E}[f(Z)]$ для любых равномерно непрерывных и ограниченных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5.2. Пусть (X_n) – последовательность i.i.d. случайных величин с плотностью

$$f(x, \vartheta) = \vartheta x^{\vartheta - 1} 1_{[0,1]}(x).$$

(i) Найдите оценку максимального правдоподобия $\hat{\vartheta}$.

(ii) Рассчитайте асимптотическое распределение $\hat{\vartheta}$.
Подсказка: для $\vartheta > 0$:

$$\int_0^1 \log(x) x^{\vartheta-1} dx = -\frac{1}{\vartheta}, \quad \int_0^1 (\log(x))^2 x^{\vartheta-1} dx = \frac{2}{\vartheta^3}.$$

5.3. ***Коэффициент вариации*** вероятностного распределения P определяется как

$$c_v(X) := \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\mathbb{E}[X]}, \ X \sim P,$$

если соответствующие моменты существуют и $\mathbb{E}[X] \neq 0$. Пусть (X_n) – последовательность i.i.d. нормально распределенных случайных величин: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, где $\mu \in \mathbb{R}/\{0\}$ и $\sigma^2 > 0$.

(i) Найдите оценку $\hat{c}_n(X)$ для $c_v(X)$, полученную методом моментов.

(ii) Выведите Центральную Предельную Теорему для оценки $\hat{c}_n(X)$.

5.4. Пусть (X_n) – последовательность i.i.d. равномерно распределенных случайных величин: $X_i \sim \mathcal{U}[0.\vartheta]$. Покажите, что $\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}}$ – состоятельная оценка для $\frac{\vartheta}{e}$.

Подсказка: один из способов доказать сходимость по распределению, это показать, что

$$\sqrt{n}\Bigg(\Big(\prod_{i=1}^n X_i\Big)^{\frac{1}{n}} - \frac{\vartheta}{e}\Bigg) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Bigg(0, \Big(\frac{\vartheta}{e}\Big)^2\Bigg).$$

5.5. Пусть (X_n) – последовательность i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, 1)$ распределенных величин. Пусть также $a > 0$ и

$$\hat{\mu}_a = \begin{cases} \overline{X}_n, & |\overline{X}_n| \geq n^{-\frac{1}{4}}, \\ a\overline{X}_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(i) Покажите, что

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}_a - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v(\mu)),$$

где $v(\mu) = 1$, если $\mu \neq 0$, и $v(\mu) = a^2$, иначе.

(ii) Для каких a μ_a является эффективной?

(iii) Покажите, что существуют случаи, для которых имеет место:

$$v(\mu) \leq I_1^{-1}(\mu).$$

Глава 6

Основы тестирования

В этой главе мы проверяем гипотезы о неизвестном параметре ϑ. Как и ранее, мы рассматриваем статистический эксперимент $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$, где $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$.

Пример 6.1. Обсудим (упрощенный) клинический эксперимент, в которомы мы принимаем решение, лучше ли новоизобретенное лекарство B, чем известное лекарство A или нет. Предположим, что мы знаем по опыту предыдущих лет, что A имеет шанс излечения 65%. Новое лекарство B было протестировано на 100 подопытных и 80% выздоровели. Должны мы выбрать A или B? На языке математики мы проверяем:

$$H : p \leq 0.65 \quad \text{против} \quad K : p > 0.65,$$

где p – неизвестная вероятность излечения после принятия лекарства B.

Определение 6.2. Пусть $\Theta = \Theta_H \cup \Theta_K$ – разделение параметрического пространства.

(i) Θ_H называется ***(нулевой) гипотезой***, Θ_K называется ***альтернативой***.

(ii) ***Рандомизированный критерий*** – измеримое отображение

$$\varphi : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to ([0,1], \mathcal{B}|_{[0,1]}).$$

Функция $\varphi(x)$ – это вероятность принятия решения, что $\vartheta \in \Theta_K$, после наблюдения $x = X(\omega)$. Множество таких критериев обозначим:

$$\Phi = \{\varphi \mid \varphi \text{ – рандомизированный критерий}\}.$$

(iii) Для критерия φ назовем $\mathcal{K} = \{x \mid \varphi(x) = 1\}$ ***критической областью***, а $\mathcal{R} = \{x \mid \varphi(x) \in (0,1)\}$ – ***областью рандомизации***. Критерий φ называется ***нерандомизированным***, если $\mathcal{R} = \emptyset$.

Пример 6.3. В ситуации в предыдущем примере мы знаем, что $\overline{X}_n$ является UMVU-оценкой p. Разумно принять K, если значение $\overline{X}_n$ достаточно большое, например:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \overline{X}_n > 0.7 \\ 0 & \overline{X}_n \leq 0.7 \end{cases}$$

является разумным критерием.

Замечание 6.4. При принятии решения могут произойти две ошибки:

- Ошибка первого рода: отклонить гипотезу H, когда она верна.
- Ошибка второго рода: принять гипотезу H, когда она неверна.

		Истина	
		Θ_H	Θ_K
Решение	Θ_H	✓	Ошибка 2-го рода
	Θ_K	Ошибка 1-го рода	✓

Обе ошибки могут произойти с определенными вероятностями.

Пример 6.5. В Примере 6.3 вероятность принятия K:

$$P_p(\varphi(X) = 1) = P_p(\overline{X}_n > 0.7).$$

На практике биномиальное распределение можно аппроксимировать нормальным:

$$\begin{aligned} P_p(\overline{X}_n > 0.7) &= P_p\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} > \frac{\sqrt{n}(0.7 - p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ \text{ЦПТ} \to &\approx P\left(\mathcal{N}(0,1) > \frac{\sqrt{n}(0.7-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(0.7-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right). \end{aligned}$$

Используя Лемму Слуцкого, мы можем заменить p на $\overline{X}_n$ в знаменателе. Пусть $n = 100$ и $\overline{X}_n = 0.8$, тогда

$$P_p(\varphi(X) = 1) \approx \Phi(25(p - 0.7)).$$

Например, если $p \le 0.65$:

$$P_p(\text{Ошибка первого рода}) \approx \begin{cases} 0, & p = 0.5 \\ 0.006, & p = 0.6 \end{cases}$$

Вероятность ошибки ограничена сверху:

$$P_p(\text{Ошибка первого рода}) \le P_{0.65}(\text{Ошибка первого рода}) \approx \Phi(1.25) \approx 0.106.$$

Симметрично

$$P_p(\text{Ошибка второго рода}) \approx \begin{cases} 0, & p = 0.9 \\ 0.006, & p = 0.8 \\ 0.5, & p = 0.7 \end{cases}$$

Граница сверху:

$$P_p(\text{Ошибка второго рода}) \le P_{0.65}(\text{Ошибка второго рода}) \approx 0.894.$$

Замечание 6.6. В идеале, мы хотим минимизировать вероятности обеих ошибок и выбрать оптимальный критерий. Проблема заключается в том, что критерии

$$\varphi_0(X) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} P_p(\text{Ошибка первого рода}) = 0 \\ P_p(\text{Ошибка второго рода}) = 1 \end{cases}$$

$$\varphi_1(X) \equiv 1 \Rightarrow \begin{cases} P_p(\text{Ошибка первого рода}) = 1 \\ P_p(\text{Ошибка второго рода}) = 0 \end{cases}$$

являются оптимальными, если нужно минимизировать вероятность одной из ошибок, но не минимизирует вероятности обеих ошибок одновременно. На практике берут границу α для вероятности ошибки первого рода и минимизируют вероятность ошибки второго рода по всем критериям. Обычно $0.01 \le \alpha \le 0.1$.

Определение 6.7. Пусть φ – критерий для $H : \varphi \in \Theta_H$ против $K : \vartheta \in \Theta_K$.

(i) Функция

$$\beta_\varphi : \begin{cases} \Theta & \to & [0,1] \\ \vartheta & \mapsto & \mathbb{E}_\vartheta[\varphi(X)] \end{cases}$$

называется ***функцией мощности*** φ.

(ii) Критерий φ называется ***критерием с уровнем значимости*** $\alpha \in [0,1]$, если

$$\beta_\varphi(\vartheta) \le \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_H$$

Зададим множество таких критериев:

$$\Phi_\alpha = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi \text{ – критерий с уровнем значимости } \alpha\}.$$

(iii) Критерий φ называется ***несмещенным с уровнем значимости*** $\alpha \in [0,1]$, если $\varphi \in \Phi_\alpha$ и

$$\beta_\varphi(\vartheta) \geq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_K,$$

$$\Phi_{\alpha\alpha} = \{\varphi \in \Phi_\alpha \mid \varphi \text{ – несмещенный критерий}\}.$$

Замечание 6.8.

(i) Если φ – нерандомизированный критерий, то

$$\beta_\varphi(\vartheta) = P_\vartheta(\varphi(X) = 1)$$

– вероятность принятия K. В частности,

(a) $\vartheta \in \Theta_H$: $\beta_\varphi(\vartheta)$ – вероятность ошибки 1-го рода.

(b) $\vartheta \in \Theta_K$: $1 - \beta_\varphi(\vartheta)$ – вероятность ошибки 2-го рода.

Аналогичная интерпретация имеет место для радномизированных критериев.

(ii) Критерий φ ограничивает вероятность ошибки первого рода уровнем значимости α $\forall \vartheta \in \Theta_H$.

(iii) Для несмещенного критерия φ вероятность принятия гипотезы K в случае, если $\vartheta \in \Theta_K$, не меньше, чем в случае, если $\vartheta \in \Theta_H$.

Пример 6.9. Функция мощности критерия из Примера 6.3 будет приблизительно равна:

$$\beta_\varphi : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ p & \mapsto & \beta_\varphi(p) \approx \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(p-0.7)}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}\Big). \end{cases}$$

Уровень значимости критерия φ: $\alpha \approx 0.106$.

Определение 6.10.

(i) Критерий $\varphi^* \in \Phi_\alpha$ называется ***равномерно наиболее мощным (UMP) с уровнем значимости*** α, если

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta) = \sup_{\varphi \in \Phi_\alpha} \beta_\varphi(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta_K.$$

(ii) Критерий $\varphi^* \in \Phi_{\alpha\alpha}$ называется ***равномерно наиболее мощным несмещенным (UMPU) с уровнем значимости*** α, если

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta) = \sup_{\varphi \in \Phi_{\alpha\alpha}} \beta_\varphi(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta_K.$$

Теорема 6.11. *Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – семейство распределений на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, статистика $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ – достаточная для ϑ и φ – критерий. Тогда существует критерий $\psi \circ T$, обладающий той же функцией мощности, что и φ, а именно:*

$$\psi \circ T = \mathbb{E}[\varphi | T].$$

Доказательство: Пусть $\psi(t) = \mathbb{E}[\varphi | T = t]$. Во-первых, $\psi(T) \in [0,1]$, так как это критерий. Также,

$$\beta_{\psi \circ T}(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta[\psi \circ T] = \mathbb{E}_\vartheta[\mathbb{E}[\varphi | T]] = \mathbb{E}_\vartheta[\varphi] = \beta_\varphi(\vartheta).$$

Замечание 6.12.

(i) Теорема 6.11 показывает, что для создания критерия всегда можно воспользоваться достаточной статистикой.

(ii) Простейший случай простых гипотез:

$$H : \vartheta \in \{\vartheta_0\} \quad \text{против} \quad K : \vartheta \in \{\vartheta_1\}, \quad \vartheta_0 \neq \vartheta_1.$$

Зададим доминирующую меру для P_{ϑ_0} и P_{ϑ_1}:

$$\mu = P_{\vartheta_0} + P_{\vartheta_1}.$$

Также, пусть

$$p_i = \frac{dP_{\vartheta_i}}{d\mu}$$

и

$$\frac{p_1}{p_0} = \begin{cases} \infty, & p_1 > 0, p_0 = 0 \\ \text{произвольное}, & p_1 = 0, p_0 = 0. \end{cases}$$

Имеют место следующие утверждения:

(a) Величина $\frac{p_1}{p_0}$ независима от μ (вплоть до множеств меры нуль).

(b) $\frac{p_1}{p_0}$ – минимальная достаточная статистика для ϑ (Пример 4.20).

(c) UMP-критерий с уровнем значимости α максимизирует

$$\beta_\varphi(\vartheta_1) = \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\varphi(X)] = \int \varphi(x) p_1(x) \mu(dx)$$

при ограничении

$$\beta_\varphi(\vartheta_0) = \mathbb{E}_{\vartheta_0}[\varphi(X)] = \int \varphi(x) p_0(x) \mu(dx) \leq \alpha.$$

Определение 6.13. В случае простой гипотезы критерий φ называется ***критерием Неймана-Пирсона (NP критерий)***, если существует константа $c \in [0, \infty)$, такая что

$$\varphi(x) : \begin{cases} 1, & p_1(x) > cp_0(x), \\ 0, & p_1(x) < cp_0(x). \end{cases}$$

Теорема 6.14 (***NP лемма***)**.** *Пусть $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ и рассматриваются гипотезы*

$$H : \vartheta \in \{\vartheta_0\} \quad \textit{против} \quad K : \vartheta \in \{\vartheta_1\}.$$

(i) NP критерий φ^* – UMP-критерий с уровнем значимости $\alpha = \mathbb{E}_{\vartheta_0}[\varphi^*(X)]$.

(ii) Для любого $\alpha \in [0, 1]$ существует NP критерий φ, такой что $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\varphi(X)] = \alpha$.

(iii) Если φ' – UMP-критерий с уровнем значимости α, то φ' – (п.н.) NP критерий. Если $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\varphi'(X)] < \alpha$, то $\mathbb{E}_{\vartheta_1}[\varphi'(X)] = 1$.

Доказательство:

(i) Пусть φ^* – NP критерий с константой c^* и φ – другой критерий, такой что $\beta_\varphi(\vartheta_0) \leq \alpha = \beta_{\varphi^*}(\vartheta_0)$. Рассмотрим

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta_1) - \beta_\varphi(\vartheta_1) = \int (\varphi^* - \varphi) p_1 d\mu = \int (\varphi^* - \varphi)(p_1 - c^* p_0) d\mu + \int c^* p_0 (\varphi^* - \varphi) d\mu.$$

Второй интеграл неотрицателен, так как его подинтегральное выражение:

$$c^*(\beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) - \beta_\varphi(\vartheta_0)) \geq 0.$$

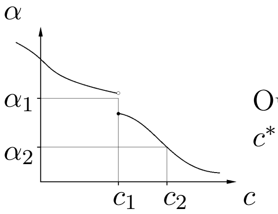
В первом интеграле:

$$\varphi^* - \varphi > 0 \Longrightarrow \varphi^* > 0 \Longrightarrow p_1 \geq c^* p_0,$$

$$\varphi^* - \varphi < 0 \Longrightarrow \varphi^* < 1 \Longrightarrow p_1 \leq c^* p_0$$

$\Longrightarrow (\varphi^* - \varphi)(p_1 - c^* p_0) \geq 0$ всегда.

(ii) Для $c \in \mathbb{R}$ зададим



$$\alpha(c) := P_{\vartheta_0}\Big(\frac{p_1(X)}{p_0(X)} > c\Big).$$

Очевидно, что $1-\alpha(c)$ – функция распределения. Для $\alpha \neq 0$ выберем c^* таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\alpha(c^*) \leq \alpha \leq \alpha(c^*-),$$

где $\alpha(c-)$ обозначает левый предел в точке c. Для $\alpha = 0$ пусть $c^* = \infty$. Зададим функции

$$\gamma^* : \begin{cases} \frac{\alpha-\alpha(c^*)}{\alpha(c^*-)-\alpha(c^*)}, & \text{если } \alpha(c^*-)-\alpha(c^*) > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и

$$\varphi^*(x) : \begin{cases} 1, & p_1(x) > c^*p_0(x), \\ \gamma^*, & p_1(x) = c^*p_0(x), \\ 0, & p_1(x) < c^*p_0(x). \end{cases}$$

Если $c^* < \infty$, то

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) = \int_{\{p_1 > c^*p_0\}} dP_{\vartheta_0} + \int_{\{p_1 = c^*p_0\}} \gamma^* dP_{\vartheta_0} = \alpha(c^*) + \gamma^*(\alpha(c^*-) - \alpha(c^*)) = \alpha.$$

Если $c^* = \infty$, то

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) = P_{\vartheta_0}(p_1(X) > \infty) = 0.$$

(iii) Пусть φ' – UMP-критерий с уровнем значимости α и φ^* – критерий из (ii). Так как из (i) следует, что φ^* – UMP, то $\beta_{\varphi^*}(\vartheta_1) = \beta_{\varphi_1}(\vartheta_1)$. Таким образом,

$$\int (\varphi^* - \varphi')p_1 d\mu = 0,$$

но

$$\int (\varphi^* - \varphi')p_1 d\mu = \int (\varphi^* - \varphi')(p_1 - c^*p_0) d\mu + \int c^*p_0(\varphi^* - \varphi') d\mu = I + II$$

Так как $\beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) = \alpha \geq \beta_{\varphi'}(\vartheta_0)$, второй интеграл неотрицателен. Как и в доказательстве (i), мы можем показать, что $I \geq 0$. Следовательно, $I = II = 0$. Зададим множество

$$S = \{x \mid \varphi'(x) \neq \varphi^*(x)\} \cap \{x \mid p_1(x) \neq c^*p_0(x)\}.$$

На множестве S имеет место неравенство

$$(\varphi^* - \varphi')(p_1 - c^*p_0) > 0$$

$\Longrightarrow \mu(S) = 0$. На его дополнении S^c φ' – NP критерий. Так как $II = 0$, либо $c^* = 0$, либо $\beta_{\varphi'}(\vartheta_0) = \beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) = \alpha$. Если $\beta_{\varphi'}(\vartheta_0) < \alpha$, то $c^* = 0$ и $\varphi^*(x) = 1$ для любого x, такого что $p_1(x) > 0$. Следовательно,

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta_1) = \int \varphi^* p_1 d\mu = \int p_1 d\mu = 1.$$

Утверждение следует из равенства $\beta_{\varphi'}(\vartheta_1) = \beta_{\varphi^*}(\vartheta_1) = 1$.

Замечание 6.15. NP критерий φ^* для $H : \vartheta = \vartheta_0$ против $K : \vartheta = \vartheta_1$ на дополнении множества $S_= = \{x \mid p_1(x) = c^*p_0(x)\}$ определен единственным образом. На множестве $S_=$ критерий может быть выбран таким образом, чтобы $\beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) = \alpha$. Один из возможных способов показан в пункте (ii).

Следствие 6.16. *Любой NP критерий φ^*, такой что $\beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) \in (0,1)$ является несмещенным. В частности,*

$$\alpha := \beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) < \beta_{\varphi^*}(\vartheta_1).$$

Доказательство: Критерий вида $\varphi \equiv \alpha$ имеет уровень значимости α. Так как φ^* – UMP, $\beta_\varphi(\vartheta_1) \le \beta_{\varphi^*}(\vartheta_1)$. Также заметим, что если $\alpha = \beta_{\varphi^*}(\vartheta_1) < 1$, то φ – UMP. Так как любой UMP-критерий является NP критерием, то имеет место равенство $p_1(x) = c^* p_0(x)$ для почти всех x. Следовательно, $c^* = 1$ и $p_1 = p_0$ μ-п.н., и также $P_{\vartheta_0} = P_{\vartheta_1}$ – мы приходим к противоречию.

Пример 6.17. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с известным параметром σ^2. Рассмотрим гипотезы:

$$H : \mu = \mu_0 \quad \text{против} \quad K : \mu = \mu_1,$$

где $\mu_0 < \mu_1$. Плотность $X_1, \ldots, X_n$:

$$p_j(x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\Big\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\mu_j \sum_{i=1}^n X_i + n\mu_j^2 \Big)\Big\}, \quad j = 0, 1.$$

Неравенство для отношения плотностей (или отношения правдоподобия), необходимое для создания NP критерия:

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \exp\Big\{ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i(\mu_1 - \mu_0) \Big\} \cdot f(\sigma^2, \mu_1, \mu_0) > c^*,$$

где $f(\sigma^2, \mu_1, \mu_0)$ – известная положительная константа. Это неравенство эквивалентно:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i > c,$$

где c – соответствующая константа. Таким образом, достаточно найти c, такую что

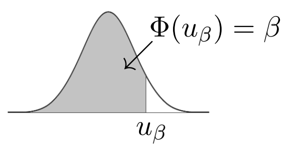
$$P_{\mu_0}(\overline{X}_n > c) = \alpha$$

или, что эквивалентно,

$$P_{\mu_0}\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > \frac{\sqrt{n}(c - \mu_0)}{\sigma} \Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(c - \mu_0)}{\sigma} \Big) = \alpha.$$

Назовем величину u_β ***β-квантилем*** стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0,1)$, если $\Phi(u_\beta) = \beta$. Тогда

$$\frac{\sqrt{n}(c - \mu_0)}{\sigma} = u_{1-\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad c = \mu_0 + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$



и NP критерий:

$$\varphi^*(x) = 1_{\{\overline{X}_n > \mu_0 + u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}}.$$

Пример 6.18. Пусть $X_1, \ldots X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{U}[0, \vartheta]$ и мы проверяем

$$H : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{против} \quad K : \vartheta = \vartheta_1,$$

где $\vartheta_0 < \vartheta_1$. Плотности:

$$p_j(x) = \Big(\frac{1}{\vartheta_j} \Big)^n 1_{[0, \vartheta_j]}(x_{(n)}), \quad j = 0, 1,$$

и их отношение правдоподобия:

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \begin{cases} \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^n, & x_{(n)} \le \vartheta_0, \\ \infty, & x_{(n)} \in (\vartheta_0, \vartheta_1], \\ \text{произвольное}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее

$$\alpha(c) = P_{\vartheta_0}(p_1(X) > cp_0(X)) = \begin{cases} 1, & c \le \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^n, \\ 0, & c > \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^n. \end{cases}$$

Для любого $\alpha \in (0,1)$ имеет место

$$\alpha(c) \le \alpha \le \alpha(c-) \quad \Longleftrightarrow \quad c = c^* = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^n.$$

NP лемма гласит, что

$$\varphi^*(x) = 1_{\left\{\frac{p_1(x)}{p_0(x)} > c^*\right\}} + \gamma(x) 1_{\left\{\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = c^*\right\}} = 1_{\{x_{(n)} > \vartheta_0\}} + \gamma(x) 1_{\{x_{(n)} \le \vartheta_0\}}.$$

Как выбрать $\gamma(x)$? Возможностей много:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) =& 1_{\{x_{(n)} > c_1\}}, \quad c_1 = \vartheta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}, \\ \varphi_2(x) =& 1_{\{x_{(n)} > \vartheta_0\}} + 1_{\{x_{(n)} < c_2\}}, \quad c_2 = \vartheta_0 \sqrt[n]{\alpha}, \\ \varphi_3(x) =& 1_{\{x_{(n)} > \vartheta_0\}} + \alpha 1_{\{x_{(n)} \le \vartheta_0\}}. \end{aligned}$$

Замечание 6.19. Простые гипотезы на практике не актуальны, но

(i) Они дают интуитивное ощущение того, как нужно строить критерии. Во-первых, нужен т.н. ***доверительный интервал*** $c(X) \subset \Theta$, внутри которого неизвестный параметр лежит с вероятностью $1-\alpha$. В Примере 6.17 мы использовали, что для $c(X) = [\overline{X}_n - u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty)$ имеет место

$$P_{\mu_0}(\mu_0 \in c(X)) = P_{\mu_0}(\overline{X}_n \le \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}) = 1-\alpha.$$

Любой такой интервал $c(X)$ может быть использован для построения критерия, например:

$$c'(X) = \left[\overline{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

В дополнение, простые гипотезы показывают в какой стороне лежит альтернатива, и поэтому был выбран интервал $c(X)$ в Примере 6.17.

(ii) С помощью формальных результатов, таких как NP лемма, можно вывести более актуальные результаты.

Определение 6.20. Пусть $\Theta \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ и $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ – статистика. Семейство $\mathcal{P}$ называется ***классом с монотонным (изотоническим) отношением правдоподобия***, если для любого $\vartheta < \vartheta_1$ существует монотонно возрастающая функция $H_{\vartheta_0,\vartheta_1} : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, такая что

$$\frac{p_{\vartheta_1}(x)}{p_{\vartheta_0}(x)} = H_{\vartheta_0,\vartheta_1}(T(x)) \quad P_{\vartheta_0} + P_{\vartheta_1}\text{-п.н.}$$

Пример 6.21.

(i) В Примере 6.17

$$\frac{p_{\mu_1}(x)}{p_{\mu_0}(x)} = \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i(\mu_1 - \mu_0)\right\} \cdot f(\sigma^2, \mu_1, \mu_0),$$

монотонно возрастает по $\overline{X}_n$. Это свойство может быть обобщено до однопараметрических экспоненциальных семейств.

(ii) В Примере 6.18

$$\frac{p_{\vartheta_1}(x)}{p_{\vartheta_0}(x)} = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^n 1_{[0,\vartheta_0]}(x_{(n)}) + \infty 1_{(\vartheta_0,\vartheta_1]}(X_{(n)})$$

монотонно возрастает по $X_(n)$.

Теорема 6.22. *Пусть* $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ *– класс с монотонным отношением правдоподобия по* T, $\vartheta_0 \in \Theta$ *и* $\alpha \in (0,1)$. *Также, пусть*

$$\varphi^*(x) = 1_{\{T(x)>c\}} + \gamma 1_{\{T(x)=c\}},$$

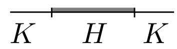
где

$$c := \inf\{t \mid P_{\vartheta_0}(T(X) > t) \le \alpha\}$$

и

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\alpha - P_{\vartheta_0}(T(X)>c)}{P_{\vartheta_0}(T(X)=c)}, & \textit{если } P_{\vartheta_0}(T(X)=c) \neq 0 \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

двусторонние гипотезы:



односторонние гипотезы:

Тогда

(i) $\beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) = \alpha$ *и* φ^* *– UMP-критерий с уровнем значимости* α *для односторонних гипотез:*

$$H : \vartheta \le \vartheta_0 \quad \textit{против} \quad K : \vartheta > \vartheta_0.$$

(ii) Для любого $\vartheta < \vartheta_0$ *имеет место равенство*

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta) = \inf\{\beta_\varphi(\vartheta) \mid \varphi \in \Phi \textit{ и } \beta_\varphi(\vartheta_0) = \alpha\}.$$

(iii) Функция мощности $\vartheta \mapsto \beta_{\varphi^*}(\vartheta)$ *строго монотонно возрастает для любого* ϑ*, такого что* $\beta_{\varphi^*}(\vartheta) \in (0,1)$.

(iv) Для любого $\vartheta' \in \Theta$ φ^* *– UMP-критерий с уровнем значимости* $\alpha' = \mathbb{E}_{\vartheta'}[\varphi^*(X)]$ *для гипотез*

$$H' : \vartheta \le \vartheta' \quad \textit{против} \quad K' : \vartheta > \vartheta'.$$

Доказательство:

(i) Если $P_{\vartheta_0}(T(X) = c) = 0$, то

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) = P_{\vartheta_0}(T(X) > c) = \alpha.$$

Если $P_{\vartheta_0}(T(X) = c) > 0$, то мы подбираем γ таким образом, чтобы имело место равенство

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta_0) = P_{\vartheta_0}(T(X) > c) + \gamma P_{\vartheta_0}(T(X) = c) = \alpha.$$

Пусть $\vartheta_0 < \vartheta_1$ и $H_{\vartheta_0,\vartheta_1}(T(x)) = p_{\vartheta_1}(x)/p_{\vartheta_0}(x)$. Вследствие монотонности

$$H_{\vartheta_0,\vartheta_1}(T(x)) \lesseqgtr H_{\vartheta_0,\vartheta_1}(c) = s \quad \Longrightarrow \quad T(x) \lesseqgtr c$$

и

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & H_{\vartheta_0,\vartheta_1}(x) > s, \\ 0, & H_{\vartheta_0,\vartheta_1}(x) < s. \end{cases}$$

Таким образом φ^* – NP критерий с уровнем значимости α и по NP лемме

$$\beta_{\varphi^*}(\vartheta') = \sup\{\beta_\varphi(\vartheta_1) \mid \varphi \in \Phi \text{ и } \beta_\varphi(\vartheta_0) = 1 - \alpha\}.$$

Так как φ^* не зависит от выбора ϑ_1, это соотношение имеет место для любого $\vartheta_1 > \vartheta_0$. Наконец, пусть $\varphi'(x) = 1 - \varphi^*(x)$. Используя те же рассуждения, что и выше, можно показать, что

$$\beta_{\varphi'}(\vartheta_2) = \sup\{\beta_\varphi(\vartheta_2) \mid \varphi \in \Phi \text{ и } \beta_\varphi(\vartheta_0) = \alpha\} \quad \forall \vartheta_2 < \vartheta_0.$$

Так как критерий вида $\overline{\varphi} \equiv \alpha$ удовлетворяет равенству $\beta_{\overline{\varphi}}(\vartheta_0) = \alpha$, мы заключаем, что

$$1 - \beta_{\varphi^*}(\vartheta_2) = \beta_{\varphi'}(\vartheta_2) \ge \beta_{1-\overline{\varphi}}(\vartheta_2) = 1 - \beta_{\overline{\varphi}}(\vartheta_2) = 1 - \alpha.$$

Следовательно, $\beta_{\varphi^*}(\vartheta_2) \le \alpha$ и $\varphi^* \in \Phi_\alpha$.

(ii) Утверждение следует непосредственно, так как $\beta_{\varphi'} = 1 - \beta_{\varphi^*}$.

(iii) Следует из Следствия 6.16, так как для любых $\vartheta_1 < \vartheta_2$ φ^* – NP критерий.

(iv) Доказывается, используя схожие аргументы, что и в доказательстве пункта (i).

Пример 6.23. Пусть $X_1, \dots X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с известным параметром σ^2. Из Примера 6.17 мы знаем, что плотности

$$p_\mu(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big\{ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \Big\}$$

обладают монотонным отношением правдоподобия по $T(x) = \overline{x}_n$. Из Теоремы 6.22: UMP-критерий с уровнем значимости α для

$$H : \mu \le \mu_0 \quad \text{против} \quad K : \mu > \mu_0$$

имеет вид

$$\varphi^*(x) = 1_{\{\overline{x}_n > c\}} + \gamma 1_{\{\overline{x}_n = c\}}.$$

Так как $P_{\mu_0}(T(X) = c) = 0$, то $\gamma = 0$ и выбрать c так, что $P_{\mu_0}(\overline{X}_n > c) = \alpha \Longleftrightarrow c = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$. UMP-критерий

$$\varphi^*(x) = 1_{\{\overline{X}_n > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}\}}$$

называется ***односторонним критерием Гаусса***.

Замечание 6.24.

(i) Существует эвристика, как получить односторонний критерий Гаусса: так как $\overline{X}_n$ UMVU-оценка для μ, разумной стратегией будет принятие гипотезы K, если $\overline{X}_n$ достаточно большое. Следовательно, критерий должен иметь вид:

$$\varphi(x) = 1_{\{\overline{X}_n > c\}}.$$

Выбираем c, контролируя вероятность ошибки первого рода. Для любого $\mu \le \mu_0$ имеет место

$$\beta_\varphi(\mu) = P_\mu(\overline{X}_n > c) = P_\mu\Big(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}(c - \mu)}{\sigma} \Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(c-\mu)}{\sigma} \Big) \le 1 - \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(c-\mu_0)}{\sigma} \Big).$$

Мы должны удостовериться, что:

$$1 - \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(c-\mu_0)}{\sigma} \Big) \le \alpha,$$

иначе говоря:

$$c \ge \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}.$$

Мы берем $c = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$, чтобы вероятность ошибки первого рода была равна α.

(ii) Этот метод позволяет построить критерий, однако ничего не говорит о его оптимальности. Что важно, он может быть применен в более общих ситуациях, например в случае неизвестного параметра σ^2. В такой ситуации можно воспользоваться оценкой

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Как и выше, мы получаем:

$$\beta_\varphi(\mu) = P_\mu\Big(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} > \frac{\sqrt{n}(c-\mu)}{\hat{\sigma}_n} \Big) = 1 - F_{t_{n-1}}\Big(\frac{c-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}} \Big)$$

из Следствия 2.21, где $F_{t_{n-1}}$ – функция распределения t_{n-1}. Разумный выбор константы:

$$c = \mu_0 + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha},$$

где $t_{n-1,1-\alpha}$ – $1-\alpha$-квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Критерий

$$1_{\{\overline{x}_n > \mu_0 + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\}}$$

называется ***односторонним t-критерием***.

Замечание 6.25. В общем случае не существует UMP-критериев для

$$H : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{против} \quad K : \vartheta \neq \vartheta_0,$$

так как этот критерий должен быть оптимальным для всех

$$H' : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{против} \quad K' : \vartheta = \vartheta_1,$$

где $\vartheta_0 \neq \vartheta_1$. В случае монотонного отношения правдоподобия оптимальный критерий будет

$$\varphi(x) = 1_{\{T(x)>c\}} + \gamma(x) 1_{\{T(x)=c\}}$$

для $\vartheta_1 > \vartheta_0$ и

$$\varphi'(x) = 1_{\{T(x)<c'\}} + \gamma'(x) 1_{\{T(x)=c'\}}$$

для $\vartheta_1 < \vartheta_0$, что невозможно.

Теорема 6.26. *Пусть $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ – однопараметрическое экспоненциальное семейство с μ-плотностью*

$$p_\vartheta(x) = c(\vartheta) h(x) \exp(Q(\vartheta) T(x))$$

с растущей функцией Q. Тогда существует UMPU-критерий для

$$H : \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2] \quad \textit{против} \quad K : \vartheta \notin [\vartheta_1, \vartheta_2],$$

а именно

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } T(x) \notin [c_1, c_2], \\ \gamma_i, & \textit{если } T(x) = c_i, \\ 0, & \textit{если } T(x) \in (c_1, c_2), \end{cases}$$

где константы c_i, γ_i определяются из равенства

$$\beta_\varphi(\vartheta_1) = \beta_\varphi(\vartheta_2) = \alpha$$

Доказательство: Теорема 3.7.1 в [4].

Замечание 6.27. Похожие утверждения имеют место для k-параметрических экспоненциальных семейств.

Упражнения

6.1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – i.i.d. нормально распределенные случайные величины: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с известным математическим ожиданием $\mu \in \mathbb{R}$ и неизвестной дисперсией $\sigma^2 > 0$. Постройте UMP-критерий с уровнем значимости $\alpha \in (0,1)$ для гипотез

$$H : \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad \text{против} \quad K : \sigma \geq \sigma_0^2.$$

6.2. Пусть мы наблюдаем $X \in (0,1)$. Постройте UMP-критерий с уровнем значимости α для

$$H : \text{плотность } X\text{: } f(x) = 4x1_{(0,1/2)}(x) + (4-4x)1_{(1/2,1)}(x)$$

против альтернативы

$$K : X \sim \mathcal{U}(0,1).$$

6.3. Пусть X – случайная величина с плотностью

$$f_\vartheta(x) = \frac{2(\vartheta - x)}{\vartheta^2} 1_{(0,\vartheta)}(x).$$

Постройте UMP-критерий с уровнем значимости α для гипотез

$$H : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{против} \quad K : \vartheta = \vartheta_1$$

для $\vartheta_1 < \vartheta_0$.

6.4. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – i.i.d. экспоненциально распределенные случайные величины: $X_i \sim Exp(\vartheta)$, т.е. плотность X_i:

$$f_\vartheta(x) = \vartheta \exp(\vartheta x) 1_{[0,\infty)}(x).$$

(i) Покажите, что распределение $X = (X_1, \dots, X_n)$ обладает мононотонным отношением правдоподобия.

(ii) Постройте UMP-критерий для гипотез

$$H : \vartheta < \vartheta_0 \quad \text{против} \quad K : \vartheta \geq \vartheta_0.$$

(iii) Рассчитайте критическую область для этого критерия для $\vartheta_0 = 1$, $n = 10$ и $\alpha = 0.05$.

Подсказка: 5%-квантиль гамма распределения $\Gamma(10,1)$ приблизительно равен 5.43.

6.5. Рассмотрим еще раз ситуацию из Упражнения 6.4.

(i) Рассмотрим гипотезы

$$H : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{против} \quad K : \vartheta \neq \vartheta_0.$$

Обрисуйте построение доверительного интервала $[\overline{X}_n - \alpha, \overline{X}_n + \alpha]$ с уровнем значимости α для $\gamma(\vartheta) = 1/\vartheta$. Как он поможет для построения критерия для гипотез выше?

(ii) Используйте аппроксимацию нормальным распределением, чтобы построить доверительный интервал из (i) для $n = 100$ и $\alpha = 0.1$.

6.6. Продолжим рассмотрение Упражнения 6.4.

(i) Пусть $n = 1$. Постройте UMPU-критерий с уровнем значимости α для гипотез

$$H : \vartheta \in [1,2] \quad \text{против} \quad K : \vartheta \notin [1,2].$$

(ii) Теоретически мы можем воспользоваться Теоремой 6.26, чтобы построить UMPU-критерий для гипотез

$$H : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{против} \quad K : \vartheta \neq \vartheta_0.$$

Какие проблемы могут возникнуть? Как их можно обойти?

Глава 7

Асимптотические свойства критериев

В этой главе пусть $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ – вектор с распределением $\mathcal{P}^n = \{P_\vartheta^n \mid \vartheta \in \Theta\}$. Также, пусть функция

$$\varphi_n : \begin{cases} \mathcal{X}_n & \to & [0,1] \\ x^{(n)} & \mapsto & \varphi_n(x^{(n)}) \end{cases}$$

будет критерием для:

$$H : \vartheta \in \Theta_H \quad \text{против} \quad K : \vartheta \in \Theta_K.$$

Определение 7.1.

(i) Последовательность (φ_n) имеет ***асимптотический уровень значимости*** α, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\vartheta\in\Theta_H} \beta_{\varphi_n}(\vartheta) \leq \alpha.$$

(ii) Последовательность (φ_n) называется ***состоятельной***, если

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{\varphi_n}(\vartheta) = 1 \quad \forall \vartheta \in \Theta_K.$$

Замечание 7.2. Чтобы критерий имел смысл, оба свойства должны соблюдаться: уровень значимости должен быть по меньшей мере асимптотическим и с возрастанием объема выборки вероятность ошибки второго рода должна уменьшаться.

Пример 7.3. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_2, \tau^2)$ – две независимые выборки. Мы хотим проверить гипотезы:

$$H : \mu_1 \leq \mu_2 \quad \text{против} \quad K : \mu_1 > \mu_2.$$

Мы принимаем K, если $\overline{Y}_n$ "намного меньше", чем $\overline{X}_m$.

(i) Допустим, $\sigma^2 = \tau^2$, но дисперсия неизвестна. Из Леммы 2.20 мы знаем, что:

$$\overline{X}_m - \overline{Y}_n = \mathcal{N}\bigg(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\Big(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\Big)\bigg)$$

и

$$\hat{\sigma}^2_{m,n} = \frac{1}{m+n-2}\Big(\sum_{i=1}^m (X_i - \overline{X}_m)^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y}_n)^2\Big) \sim \frac{\sigma^2}{m+n-2}\chi^2_{m+n-2}.$$

Если $\mu_1 = \mu_2$, то

$$T_{m,n} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\hat{\sigma}^2_{m,n}} \sim t_{m+n-2},$$

таким образом критерий уровня значимости α:

$$\varphi_{m,n}(x) = 1_{\{T_{m,n} > t_{m+n-2,1-\alpha}\}}.$$

Такой критерий называется ***двухвыборочным t-критерием***.

(ii) Допустим, $\sigma^2 \neq \tau^2$. Тогда:

$$\overline{X}_m - \overline{Y}_n = \mathcal{N}\Big(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\tau^2}{n}\Big).$$

Оценка дисперсии:

$$\hat{s}^2_{m,n} = \frac{1}{m}\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X}_m)^2 + \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}_n)^2.$$

Распределение случайной величины

$$T^*_{m,n} = \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\hat{s}_{m,n}}$$

неизвестно (проблема Беренса-Фишера). Из ЦПТ мы знаем, что

$$\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{s}_{m,n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1),$$

если $m \to \infty$, $n \to \infty$ и $\frac{m}{n} \to \lambda \in (0, \infty)$. Пусть

$$\varphi^*_{m,n}(x) = 1_{\{T^*_{m,n} > u_{1-\alpha}\}},$$

тогда:

$$\beta_{\varphi^*_{m,n}}(\mu_1, \mu_2) = P_{\mu_1,\mu_2}(T^*_{m,n} > u_{1-\alpha}) = P_{\mu_1,\mu_2}\Big(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{s}_{m,n}} > \frac{-(\mu_1 - \mu_2)}{\hat{s}_{m,n}} + u_{1-\alpha}\Big)$$

$$\xrightarrow[m\to\infty,\ n\to\infty,\ \frac{m}{n}\to\lambda]{} \begin{cases} 0, & \mu_1 < \mu_2, \\ \alpha, & \mu_1 = \mu_2, \\ 1, & \mu_1 > \mu_2. \end{cases}$$

Мы видим, что $\varphi^*_{m,n}$ состоятельная и имеет асимптотический уровень значимости α.

Замечание 7.4. Общий принцип построения критериев для

$$H : \vartheta \in \Theta_H \quad \text{против} \quad K : \vartheta \in \Theta_K$$

– это ***метод отношения правдоподобия***. Допустим, $f_n(x^{(n)}, \vartheta)$ – плотность P^n_ϑ по некоторой мере μ. Тогда ***отношение правдоподобия***:

$$\lambda(x^{(n)}) = \frac{\sup_{\vartheta\in\Theta_H} f_n(x^{(n)}, \vartheta)}{\sup_{\vartheta\in\Theta} f_n(x^{(n)}, \vartheta)}$$

и ***критерий отношения правдоподобия***:

$$\varphi_n(x^{(n)}) = 1_{\{\lambda(x^{(n)}) < c\}}.$$

Как правило, c выбирается таким образом, чтобы:

$$\sup_{\vartheta\in\Theta_H} P_\vartheta(\lambda(X^{(n)}) < c) \le \alpha.$$

Распределение $\lambda(X^{(n)})$, тем не менее, может быть оценено лишь асимптотически.

Условия 7.5.

(i) Допустим $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ и существуют $\Delta \subset \mathbb{R}^c$ и $h : \Delta \to \Theta$, такие что

(a) $\Theta_H = h(\Delta)$,

(b) $h \in C^2(\Delta, \Theta)$,

(c) Матрица Якоби h – матрица полного ранга.

(ii) Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim P_\vartheta$ и в обоих семействах $\mathcal{P}_\vartheta = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ и $\mathcal{P}_h = \{P_{h(\eta)} \mid \eta \in \Delta\}$ условия Теоремы 5.19 соблюдаются.

Пример 7.6. Пусть $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ и $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ – независимые выборки. Допустим, мы хотим проверить эквивалентность математических ожиданий:

$$H : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{против} \quad K : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Тогда $\Theta \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, $\Delta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ и

$$h : \begin{cases} \Delta & \to \quad \Theta \\ (\mu, \sigma^2)^T & \mapsto \quad (\mu, \mu, \sigma^2)^T. \end{cases}$$

Матрица Якоби h:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица полного ранга.

Теорема 7.7. *Если условия 7.5 соблюдены, то*

$$T_n = -2 \log \lambda(X^{(n)}) = 2(\log f_n(X^{(n)}, \hat{\theta}_n) - \log f_n(X^{(n)}, h(\hat{\eta}_n))) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{d-c},$$

если $\vartheta \in \Theta_H$.

Доказательство: Как и прежде пусть

$$\ell(x, \vartheta) = \log f(x, \vartheta),$$

где f – функция плотности X_1. Сначала рассмотрим:

$$\begin{aligned} T_n^{(1)} &= 2(\log f_n(X^{(n)}, \hat{\theta}_n) - \log f_n(X^{(n)}, \vartheta)) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \Big(\ell(X_i, \hat{\theta}_n) - \ell(X_i, \vartheta) \Big) \\ &= 2(\hat{\theta}_n - \vartheta)^T \sum_{i=1}^n \dot{\ell}(X_i, \vartheta) + (\hat{\theta}_n - \vartheta)^T \sum_{i=1}^n \ddot{\ell}(X_i, \widetilde{\vartheta}_n)(\hat{\theta}_n - \vartheta) \\ &= 2(\hat{\theta}_n - \vartheta)^T \Big(\sum_{i=1}^n \dot{\ell}(X_i, \vartheta) + \sum_{i=1}^n \ddot{\ell}(X_i, \widetilde{\vartheta}_n)(\hat{\theta}_n - \vartheta) \Big) - (\hat{\theta}_n - \vartheta)^T \sum_{i=1}^n \ddot{\ell}(X_i, \widetilde{\vartheta}_n)(\hat{\theta}_n - \vartheta) \end{aligned}$$

для некоторой $\widetilde{\theta}_n$ между $\hat{\theta}_n$ и ϑ. Используя обозначения из Теоремы 5.19, запишем первое слагаемое в виде

$$2n(\hat{\theta}_n - \vartheta)^T \underbrace{(\dot{L}_n(\vartheta) - \ddot{L}_n(\vartheta)(\hat{\theta}_n - \vartheta))}_{= 0}$$

Также по Теореме 5.19:

$$T_n^{(1)} = -\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \vartheta)^T \ddot{L}_n(\widetilde{\vartheta}_n) \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \vartheta),$$

где

$$\begin{gathered} \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \vartheta)^T \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I^{-1}(f(\cdot, \vartheta))), \\ \ddot{L}_n(\widetilde{\vartheta}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} -I(f(\cdot, \vartheta)), \\ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \vartheta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I^{-1}(f(\cdot, \vartheta))). \end{gathered}$$

Если $X \sim \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$ и $\Sigma > 0$, то

$$X^T \Sigma X \ \sim \mathcal{X}_d^2.$$

Следовательно, $T_n^{(1)} \xrightarrow{\mathcal{L}} A = \mathcal{X}_d^2$. Таким же образом,

$$T_n^{(2)} = 2(\log f_n(X^{(n)}, h(\hat{\eta}_n)) - \log f_n(X^{(n)}, h(\eta))) \xrightarrow{\mathcal{L}} B = \mathcal{X}_c^2.$$

Если выполняется H, то $\vartheta = h(\eta)$ и

$$T_n = T_n^{(1)} - T_n^{(2)} \xrightarrow{\mathcal{L}} A - B = \mathcal{X}_{d-c}^2,$$

так как A и B независимы.

Замечание 7.8.

(i) Теорема 7.7 показывает, что

$$\varphi_n(X^{(n)}) = \begin{cases} 1, & -2\log\lambda(X^{(n)}) > \mathcal{X}^2_{d-c,1-\alpha}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

является критерием с асимптотическим уровнем α для

$$H : \vartheta \in \Theta_H \quad \text{против} \quad K : \vartheta \in \Theta_K.$$

(ii) Последовательность (ϑ_n) состоятельная, так как

$$\begin{aligned} -\frac{2}{n}\log(\lambda(X^{(n)})) &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\ell(X_i, \hat{\theta}_n) - \ell(X_i, h(\hat{\eta}_n))\Big) \\ &\xrightarrow{Q_\vartheta} 2\mathbb{E}_\vartheta[\ell(X, \vartheta) - \ell(X, h(\eta))] \\ &= 2KL(\vartheta | h(\eta)) > 0, \end{aligned}$$

если $\vartheta \neq h(\eta)$ (если $\vartheta \in \Theta_K$). Следовательно,

$$-2\log(\lambda(X^{(n)})) \xrightarrow{Q_\vartheta} \infty.$$

Пример 7.9 (Критерий Бартлетта). Пусть $X_{ij} \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, r$ и $j = 1, \dots, n_i$, где $n_i \to \infty$ с одинаковой скоростью. Мы проверяем равенство дисперсий:

$$H : \sigma_1^2 = \dots = \sigma_r^2 \quad \text{против} \quad K : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \text{ для некоторых } i \neq j.$$

Здесь $\Theta = \mathbb{R}^r \times (\mathbb{R}^+)^r$, $\Delta = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^+$ и

$$h((x_1, \dots, x_r, y)^T) = (x_1, \dots, x_r, y, \dots, y)^T.$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$\hat{\theta}_n = (\mu_1, \dots, \mu_r, \hat{s}_1^2, \dots, \hat{s}_r^2),$$

где $\mu_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} =: \overline{X}_{i\cdot}$ и $\hat{s}_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_{i\cdot})^2$. В этом случае

$$f_n(X^{(n)}, \hat{\vartheta}_n) = \prod_{i=1}^{r}(2\pi e \hat{s}_i^2)^{-\frac{n_i}{2}}.$$

Если нулевая гипотеза верна, то оценка МП максимизирует

$$f_n(X^{(n)}, \hat{\eta}_n) = \prod_{i=1}^{r}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n_i}{2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_{i\cdot})^2\Big\}.$$

Задав $n = \sum_{i=1}^r n_i$, получаем

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - X_{i\cdot})^2 = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{n}\hat{s}_i^2.$$

Тогда

$$f_n(X^{(n)}, \hat{\eta}_n) = \prod_{i=1}^r (2\pi e\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n_i}{2}} = (2\pi e\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}$$

и тестовая статистика:

$$T_n = -2\log\lambda(X^{(n)}) = n\log\hat{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^r n_i \log\hat{s}_i^2.$$

Критерий Бартлетта:

$$\varphi_n(X^{(n)}) = \begin{cases} 1, & T_n > \mathcal{X}^2_{r-1,1-\alpha}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 7.10 (Критерий независимости). Даны две статистические характеристики A и B (пол, возраст, образование, доход), где A состоит из r факторов и B – из s факторов. Всего наблюдается n лиц.

		Фактор B			
		1	$\cdots$	s	Сумма
Фактор A	1	X_{11}	$\cdots$	X_{1s}	$X_{1\cdot} = \sum_{j=1}^s X_{1j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	r	X_{r1}	$\cdots$	X_{rs}	$X_{r\cdot}$
	Сумма	$X_{\cdot 1}$	$\cdots$	$X_{\cdot s}$	n

Модель: мультиномиальное распределение

$$(X_1, \ldots, X_n)^T \sim \mathcal{M}(n, p_{11}, \ldots, p_{rs}),$$

где $\sum_{ij} p_{ij} = 1$. Плотность распределения:

$$f_n(x^{(n)}, p) = P_p(X_{ij} = x_{ij}) = \frac{n!}{\prod_{i,j=1}^{r,s} x_{ij}!}\prod_{i,j=1}^{r,s}(p_{ij})^{x_{ij}},$$

где $x_{ij} = \{0, \cdots, n\}$ и $\sum_{i,j=1}^{r,s} x_{ij} = n$. Оценка максимального правдоподобия:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{X_{ij}}{n}$$

(по аналогии с биномиальным распределением) и

$$f_n(X^{(n)}, \hat{p}) = \frac{n!}{\prod_{i,j=1}^{r,s} X_{ij}!}\prod_{i,j=1}^{r,s}\left(\frac{X_{ij}}{n}\right)^{X_{ij}}.$$

Допустим, мы хотим проверить независимость между характеристиками:

$$H: p_{ij} = p_i q_j \ \forall i,j \quad \text{против} \quad K: p_{ij} \neq p_i q_j \text{ для некоторых } i \neq j,$$

где $p_i = p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^s p_{ij}$ и $q_j = p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^r p_{ij}$. Здесь $d = rs - 1$, $c = r + s - 2$ и $d - c = (r-1)(s-1)$. Если нулевая гипотеза выполняется, то

$$f_n(X^{(n)}, p, q) = \frac{n!}{\prod_{i,j=1}^{r,s} X_{ij}!}\prod_{i,j=1}^{r,s}(p_i q_j)^{X_{ij}} = \frac{n!}{\prod_{i,j=1}^{r,s} X_{ij}!}\prod_{i}^{r} p_i^{X_{i\cdot}}\prod_{j=1}^{s} q_j^{X_{\cdot j}}.$$

МП оценки:

$$\hat{p}_i = \frac{X_{i\cdot}}{n} \quad \text{и} \quad \hat{q}_j = \frac{X_{\cdot j}}{n}$$

и функция правдоподобия:

$$f_n(X^{(n)}, \hat{p}, \hat{q}) = \frac{n!}{\prod_{i,j=1}^{r,s} X_{ij}!} \prod_{i,j=1}^{r,s} \left(\frac{X_{i\cdot} X_{\cdot j}}{n^2} \right)^{X_{ij}}.$$

Мы получаем:

$$T_n = -2 \log \lambda(X^{(n)}) = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} X_{ij} \log \left(\frac{X_{ij}}{X_{i\cdot} X_{\cdot j}} \right)$$

и ***критерий независимости*** $\mathcal{X}^2$:

$$\varphi_n(X^{(n)}) = \begin{cases} 1, & T_n > \mathcal{X}^2_{(r-1)(s-1),1-\alpha}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Используя разложение Тейлора (до второго порядка) и Закон Больших Чисел, получаем асимптотический эквивалент:

$$\widetilde{T}_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(X_{ij} - \frac{X_{i\cdot} X_{\cdot j}}{n} \right)^2}{X_{i\cdot} X_{\cdot j}} n.$$

Обычно

$$V_n^2 = \frac{\widetilde{T}_n}{n(\min(r,s) - 1)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(p_{ij} - p_{i\cdot} p_{\cdot j})}{p_{i\cdot} p_{\cdot j}}}{\min(r,s) - 1}$$

используется в качестве меры зависимости между A и B. Например, рассмотрим следующие характеристики:

		Годовой доход				
		1	2	3	4	Сумма
Число детей	0	2161	3577	2184	1636	9558
	1	2755	5081	2222	1052	11110
	2	936	1753	640	306	3635
	3	225	419	96	38	778
	4	39	98	31	14	182
	Сумма	6116	10928	5173	3046	25263

Тогда

$$\widetilde{T}_n = 568.566 \quad \text{и} \quad \mathcal{X}^2_{12,0.95} = 21.026$$

и гипотеза о независимости принимается с уровнем значимости 5%. Тем не менее, $V_n = 0.087$, что показывает слабую зависимость.

Упражнения

7.1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – i.i.d. случайные величины с распределением Бернулли: $X_i \sim Bin(1,p)$. Мы проверяем гипотезы

$$H : p \leq p_0 \quad \text{против} \quad K : p > p_0,$$

где $p_0 \in (0,1)$.

(i) Докажите, что последовательность критериев с уровнем значимости $\alpha \in (0,1)$, полученных из аппроксимации нормальным распределением:

$$\varphi_n(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x}_n > p_0\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}u_{1-\alpha},$$

имеет асимптотический уровень значимости α.

(ii) Покажите, что последовательность (φ_n) – состоятельная.

7.2. В Примере 7.6.

(i) Найдите оценку максимального правдоподобия для Δ и Θ.

(ii) Рассчитайте $T = -2\log\lambda(Z)$, где $Z = (X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$

7.3. Пусть $Y_1, \ldots Y_n$ независимые случайные величины, такие что

$$Y_i = ax_i + \varepsilon_i,$$

где a – неизвестный параметр, $x_1, \ldots, x_n$ фиксированы, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ – i.i.d. и $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(i) Найдите оценку максимального правдоподобия $\hat{a}$ для a.

(ii) Найдите критерий отношения правдоподобия для

$$H : a = 0 \quad \text{против} \quad K : a \neq 0.$$

7.4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – i.i.d. случайные величины с гамма-распределением: $X_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, т.е. их плотность:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x},$$

где $\alpha, \beta > 0$.

(i) Найдите оценку максимального правдоподобия $\hat{b}$ для b.

(ii) Найдите критерий отношения правдоподобия для

$$H : b = b_0 \quad \text{против} \quad K : b \neq b_0.$$

7.5. Пусть $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность i.i.d. случайных величин с неизвестной плотностью p. Мы хотим протестировать

$$H : p = p_0 \quad \text{против} \quad K : p = p_1,$$

где $\{x \in \mathbb{R} \mid p_1(x) > 0\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid p_0(x) > 0\}$. Используя лемму Неймана-Пирсона, UMP-критерий с уровнем значимости α определяется критической областью $\prod_{i=1}^n r(X_i) \geq C_n(\alpha)$, где $r(x) = p_1(x)/p_0(x)$ и $C_n(\alpha)$ – константа, зависящая от n и α.

(i) Докажите, что критическая область может быть записана в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\sum_{i=1}^n \log r(X_i) - \mathbb{E}_{p_0}[\log r(X_i)]\Big) \geq k_n(\alpha)$$

для подходящей $k_n(\alpha)$.

(ii) Покажите, что

$$k_n \to \sqrt{\mathrm{Var}_{p_0}(\log r(X_i))}u_{1-\alpha}.$$

(iii) Используя Лемму 5.16, покажите, что последовательность критериев состоятельная для $p_1 \neq p_0$.

Глава 8

Линейная модель

Пример 8.1 (**Линейная регрессия**). Предположим, что X и Y связаны следующим соотношением:

$$Y = b_0 + b_1 X,$$

и мы хотим оценить значения b_0 и b_1. На практике рассматривается не строгая линейная зависимость, а соотношение вида

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

где ε_i – ошибка, такая что $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ и $\operatorname{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 > 0$. В векторной записи: $Y = Xb + \varepsilon$ или

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Пример 8.2 (**Анализ дисперсии**). Рассмотрим эксперимент: разделим n животных на a групп по типу питания. В каждой i-й группе n_i животных. Смоделируем вес каждого животного:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, a, \ j = 1, \dots, n_i.$$

В векторной записи: $Y = X\mu + \varepsilon$ или

$$\begin{pmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ \vdots \\ Y_{a1} \\ \vdots \\ Y_{an_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{1}_{n_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{a1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{an_a} \end{pmatrix}$$

Вопрос: как оценить μ_i и протестировать $\mu_1 = \dots = \mu_a$?

Определение 8.3. Пусть $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ и $b \in \mathbb{R}^k$, $n > k$ и пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ – n-мерный случайный вектор.

(i) Если $\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \mathbb{1}_n)$, то $Y = Xb + \varepsilon$ называется ***линейной моделью с предположением нормальности (LMN)***.

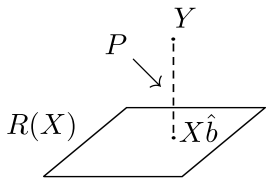
(ii) Пусть $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbb{1}_n)$. Если

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\varepsilon_{i_3}\varepsilon_{i_4}] = \mathbb{E}[Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4}] \quad \forall i_j \in \{1, \dots, n\},$$

то $Y = Xb + \varepsilon$ называется ***линейной моделью с предположением о моментах (LMM)***.

(iii) X называется ***матрицей плана***.

Замечание 8.4. Если ранг матрицы X равен r и



$$R(X) = \{Xb \mid b \in \mathbb{R}^k\} \in \mathbb{R}^n$$

её диапазон, то наивной оценкой Xb является ортогональная проекция Y на $R(X)$. Тогда любой вектор $\hat{b}$ такой, что $P(Y) = X\hat{b}$ является приемлемой оценкой b.

Определение 8.5. Мы назовем $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ***обобщенной обратной матрицей*** к матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, если

$$AGA = A.$$

Зададим множество обобщенных обратных к A матриц:

$$A^- = \{G \mid AGA = A\}.$$

Замечание 8.6. Мы будем писать A^- вместо G, если действенность формулы не зависит то выбора обобщенной обратной матрицы. Например, $AA^-A = A$.

Пример 8.7. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщенные обратные матрицы, например:

$$G_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 8.8 (Включение диапазона). *Пусть $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ и $V \in \mathbb{R}^{n\times s}$. Тогда:*

(i) $R(X) \subset R(V) \iff VV^-X = X$.

(ii) Если (i) соблюдается и $V \geq 0$ (также $n = s$), то

(a) $X^TV^-X = 0$,

(b) $R(X^T) = R(X^TV^-X)$.

Доказательство:

(i) Напомним, что

$$R(X) \subset R(V) \iff X = VW.$$

"$\Longleftarrow$" ✓.
"$\Longrightarrow$" Пусть $X = VW$ и G – обобщенная обратная матрица V. Тогда

$$VGX = VGVW = VW = X.$$

(ii) (a) Пусть G – обобщенная обратная матрица V. Тогда вследствие симметричности V

$$X^TGX = W^TV^TGVW = W^TVW \geq 0.$$

(b) Напомним некоторые теоремы из линейной алгебры:

i. Матрица V симметричная и неотрицательно определенная $\Longrightarrow$ её собственные числа λ_i вещественные и неотрицательные $\Longrightarrow V = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i z_i^T$ (z_i – ортонормальные собственные вектора) $\Longrightarrow V^\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha z_i z_i^T$ для $\alpha \geq 0$ и $V^{\alpha+\beta} = V^\alpha V^\beta$.

ii. $r(A) = r(A^TA)$ и $r(A \cdot B) \leq \min\{r(A), r(B)\}$. В частности, $r(VW) = r(W^TVW)$, так как

$$r(VW) = r(V^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}W) \leq r(V^{\frac{1}{2}}W) = r(W^TVW) \leq \min\{r(W^T), r(VW)\}.$$

Используя (a), мы получаем:

$$r(X^TV^-X) = r(W^TVW) = r(VW) = r(VV^-X) = r(X).$$

Теорема 8.9. *В линейной модели $Y = Xb + \varepsilon$ ортогональная проекция Y на $R(X)$ и её ортогональное дополнение*

$$R(X)^\perp = \{Z \mid Z^TX = 0\}$$

задаются как

$$P = X(X^TX)^-X^T \quad \text{и} \quad R = \mathbb{I}_n - P$$

соответственно.

Доказательство: Мы докажем только для P. Для ортогональной проекции имеют место равенства $P^T = P$ и $P^2 = P$. Во-первых,

$$(X^TX)(X^TX)^-X^T = VV^-X^T = X^T$$

по Лемме 8.8(i) и (ii)(b). Тогда

$$P^2 = X(X^TX)^-X^TX(X^TX)^-X^T = X(X^TX)^-X^T = P$$

и $P^T = P$ следует из Леммы 8.8 (ii)(a). Наконец, $P(Y) \in R(X)$, так как P вида XA, где $A = (X^TX)^-X^T$. Также,

$$P(Xb) = X(X^TX)^-X^TXb = Xb.$$

Замечание 8.10.

(i) Разумными оценками для Xb и σ^2 являются

$$X\hat{b} = P(Y) = X(X^TX)^-X^TY$$

и

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\hat{b}\|_2^2}{n-r} = \frac{\|RY\|_2^2}{n-r} = \frac{Y^TRY}{n-r},$$

где выбор знаменателя $n - r$ будет обоснован в Следствии 8.13.

(ii) В общем случае, не существует единственной оценки для b. Однако если матрица X^TX обратима ($r = r(X) = k$), то

$$X^TX\hat{b} = X^TX(X^TX)^{-1}X^TY = X^TY$$

и

$$\hat{b} = (X^TX)^{-1}X^TY.$$

Заметим также, что

$$\mathbb{E}[\hat{b}] = (X^TX)^{-1}X^T\mathbb{E}[Y] = (X^TX)^{-1}X^TXb = b.$$

Пример 8.11. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, такие что:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = X\mu + \varepsilon,$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Так как

$$X^T X = (1 \ \ldots \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n,$$

то

$$P = X(X^T X)^{-1} X^T = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ \ldots \ 1).$$

Таким образом,

$$PY = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \overline{Y}_n$$

является оценкой $X\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mu$. В частности, $\overline{Y}_n$ – оценка μ. Также,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\hat{\mu}\|_2^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y}_n)^2.$$

Лемма 8.12. *Пусть Y – n-мерная случайная величина с математическим ожиданием $\mathbb{E}[Y] = \mu$ и дисперсией $\mathrm{Var}(Y) = V \geq 0$. Также, пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда:*

(i) $\mathbb{E}[Y^T A Y] = \mu^T A \mu + \mathrm{tr}(AV)$.

(ii) Пусть моменты Y до четвертого порядка совпадают с моментами нормального распределения, тогда

(a) $\mathrm{Cov}(Y, Y^T A Y) = 2VA\mu$,

(b) $\mathrm{Cov}(Y^T A Y, Y^T B Y) = 2\mathrm{tr}(AVBV)$, *если* $\mu = 0$.

Доказательство: Упражнение.

Следствие 8.13. *В LMM* $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$.

Доказательство: По определению и по Лемме 8.12:

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \frac{\mathbb{E}[Y^T R Y]}{n-r} = \frac{1}{n-r}(\mu^T R \mu + \mathrm{tr}(\sigma^2 R)),$$

где $\mu = Xb$. Так как R – ортогональная проекция $R(X)^\perp$, то $RXb = 0$. Следовательно,

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2 \frac{\mathrm{tr}(R)}{n-r}.$$

Любая ортогональная проекция Q удовлетворяет равенству

$$Q = A \cdot \mathrm{diag}(\lambda_i) \cdot A^T.$$

Так как Q идемпотентна ($Q^2 = Q$), то все собственные числа равны либо 0, либо 1. Число единиц совпадает с рангом Q. Как следствие,

$$\mathrm{tr}(R) = r(R) = n - r.$$

Теорема 8.14 (**Теорема Гаусса-Маркова**). *Рассмотрим LMM с $r(X) = k$:*

(i) Оценки $\hat{b}$ и $\hat{\sigma}^2$ несмещенные и некоррелированные.

*(ii) Оценка $\hat{b}$ – **лучшая линейная несмещенная оценка (BLUE)** b, то есть для любого вектора $\widetilde{b} = LY$, такого что $\mathbb{E}[\widetilde{b}] = b$:*

$$\operatorname{Var}(\widetilde{b}) \geq \operatorname{Var}(\hat{b}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}.$$

*(iii) Оценка $\hat{\sigma}^2$ – **лучшая квадратичная несмещенная оценка (BQUE)** σ^2, то есть для любого вектора $\widetilde{\sigma}^2 = Y^T AY$, такого что $\mathbb{E}[\widetilde{\sigma}^2] = \sigma^2$:*

$$\operatorname{Var}(\widetilde{\sigma}^2) \geq \operatorname{Var}(\hat{\sigma}^2).$$

Доказательство:

(i) Несмещенность следует из Замечания 8.10 (ii) и Следствия 8.13. Также,

$$\operatorname{Cov}(\hat{b}, \hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n-k} (X^T X)^{-1} X^T \operatorname{Cov}(Y, Y^T RY)$$

и из Леммы 8.12 (ii) (a) следует, что

$$\operatorname{Cov}(Y, Y^T RY) = 2\sigma^2 \mathbb{I}_n RXb = 0,$$

так как $RXb = 0$.

(ii) Если $\widetilde{b}$ несмещенная, то

$$\mathbb{E}[\widetilde{b}] = L\mathbb{E}[Y] = LXb = b \quad \forall b \in \mathbb{R}^k.$$

Следовательно, $LX = \mathbb{I}_k$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq ((X^T X)^{-1} X^T - L)((X^T X)^{-1} X^T - L)^T \\ &= (X^T X)^{-1} - (X^T X)^{-1} X^T L^T - LX(X^T X)^{-1} + LL^T \\ &= LL^T - (X^T X)^{-1}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\operatorname{Var}(\widetilde{b}) = \operatorname{Var}(LY) = L\operatorname{Var}(Y)L^T = \sigma^2 LL^T \geq \sigma^2 (X^T X)^{-1} = \operatorname{Var}(\hat{b}).$$

(iii) Может быть доказано аналогично (ii), используя Лемму 8.12 (ii) (b).

Лемма 8.15. *Пусть $Y \sim \mathcal{N}(0, V)$ и $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Тогда*

(i) AY и BY независимы, если $AVB^T = 0$.

(ii) Пусть $q = n$ и B ортогональная проекция. Тогда $Y^T AY$ и BY независимые, если $AVB = 0$.

Доказательство:

(i) Свойство нормального распределения.

(ii) Как в Лемме 2.20.

Теорема 8.16. *В LMN с $r(X) = k$ оценка $(\hat{b}, \hat{\sigma}^2)^T$ UMVU для $(b, \sigma^2)^T$ и обе оценки независимые.*

Доказательство: Независимость следует из Леммы 8.15, где $A = R$ и $B = P$.
UMVU: функция плотности случайной величины $Y \sim \mathcal{N}(Xb, \sigma^2 \mathbb{I}_n)$:

$$f(y) = c(\sigma^2) \exp\Big\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \|y - Xb\|_2^2 \Big\} = \widetilde{c}(\sigma^2, b) \exp\Big\{ -\frac{1}{2\sigma^2} y^T y - 2b^T X^T y \Big\}.$$

Следовательно, мы получаем $(k+1)$-мерное экспоненциальное семейство. Статистики $Y^T Y$ и $X^T Y$ являются достаточными (Теорема 4.22) и полными (Теорема 4.25) для оценки $(b\sigma^2)^T$. Статистика $(\hat{b}, \hat{\sigma}^2)^T$ также достаточная и полная (Замечание 4.31). Теорема 4.28 завершает доказательство.

Пример 8.17 (Метод наименьших квадратов). Рассмотрим линейную регрессию:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + \varepsilon_i.$$

Если

$$X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix}$$

– матрица полного ранга, то $\hat{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y$. Пусть $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ и $\overline{X^2}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$, тогда:

$$X^T X = n \begin{pmatrix} 1 & \overline{X}_n \\ \overline{X}_n & \overline{X^2}_n \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2} \begin{pmatrix} \overline{X^2}_n & -\overline{X}_n \\ -\overline{X}_n & 1 \end{pmatrix}$$

существует, если все X_i принимают различные значения. Также,

$$X^T Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix}.$$

Наконец, $\hat{b} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1)^T$, где

$$\hat{b}_0 = \overline{Y}_n - \hat{b}_1 \overline{X}_n,$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}$$

и

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i)^2.$$

Замечание 8.18. Часто мы заинтересованы не в b, но в $K^T b$ для некоторого $K \in \mathbb{R}^{k \times s}$. Если $r(X) = k$, то разумной оценкой будет:

$$K^T \hat{b} = K^T (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Даже если $r(X) \neq k$, но $R(K) \subset R(X^T)$, то оценка

$$K^T \hat{b} = K^T (X^T X)^{-} X^T Y$$

единственна по Лемме 8.8 и

$$\mathbb{E}[K^T b] = K^T (X^T X)^{-} X^T X b = K^T b.$$

Определение 8.19. Пусть $K \in \mathbb{R}^{k \times s}$ и $r(K) = s$. Тогда мы назовем $K^T b$ ***оцениваемым***, если $R(K) \subset R(X^T)$.

Пример 8.20. Допустим, мы тестируем

$$H_0 : K^T b = 0 \quad \text{против} \quad H_1 : K^T b \neq 0.$$

Не должно быть ситуации, в которой одновременно $X b_1 = X b_2$ и $K^T b_1 \neq K^T b_2$, так как b может быть получено только из Xb в модели $Y = Xb + \varepsilon$. Другими словами, если мы зададим множество

$$N(A) = \{y \mid Ay = 0\},$$

то

$$X b_1 = X b_2 \quad \Longrightarrow \quad K^T b_1 = K^T b_2$$

эквивалетно

$$N(X) \subset N(K^T) \quad \Longleftrightarrow \quad R(X^T)^{\perp} \subset R(K)^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad R(K) \subset R(X^T).$$

Теорема 8.21. *Пусть $K^T b$ оцениваем. Тогда:*

(i) В LMM $K^T\hat{b}$ – BLUE для $K^T b$, где

$$\mathrm{Var}(K^T\hat{b}) = K^T\sigma^2(X^TX)^{-1}K \in \mathbb{R}^{s\times s}.$$

(ii) В LMM $K^T\hat{b}$ – UMVU для $K^T b$.

Доказательство: Как в Теоремах 8.14 и 8.16.

Пример 8.22.

(i) Рассмотрим линейную регрессию: $Y_i = b_0 + b_1 x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 > 0$. В векторной записи:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Допустим, мы заинтересованы в гипотезах:

$$H_0 : b_0 = 0 \quad \text{против} \quad H_1 : b_0 \neq 0,$$

тогда мы выбираем $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и, например,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $R(X) \subset R(K^T)$. Также,

$$X^T X = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

не обратима, но мы можем взять

$$G = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

как обобщенную обратную матрицу и $K^T\hat{b}$ становится:

$$K^T G X^T Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}_n.$$

(ii) Рассмотрим анализ дисперсий для $a = 3$:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad (i = 1, 2, 3,\ j = 1, \ldots, n_i).$$

В векторной записи:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{2n_2} \\ Y_{31} \\ \vdots \\ Y_{3n_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n_2} \\ \varepsilon_{31} \\ \vdots \\ \varepsilon_{3n_3} \end{pmatrix}.$$

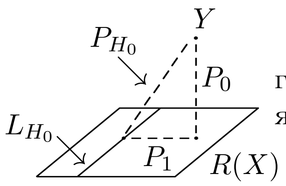
Если мы хотим проверить:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad \text{против} \quad H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ для некоторых } i \neq j,$$

то мы можем выбрать

$$K^T \mu = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 8.23. Мы рассматриваем



$$H_0 : K^T b = 0 \quad \text{против} \quad H_1 : K^T b \neq 0,$$

где $R(K) \subset R(X^T)$. В таком случае решающей величиной будет являться расстояние от Y до пространства гипотезы:

$$L_{H_0} = \{XB \mid K^T b = 0,\ b \in \mathbb{R}^k\} \subset R(X).$$

Ортогональная проекция Y на L_{H_0}:

$$P_{H_0} = P_0 - P_1,$$

где

$$P_0 = X(X^T X)^- X^T$$

и

$$P_1 = X(X^T X)^- K(K^T (X^T X)^- K)^- K^T (X^T X)^- X^T.$$

P_1 также является ортогональное проекцией. При построении критерия разумно опираться на расстояние между $P_0 Y$ и $P_{H_0} Y$. По теореме Пифагора:

$$\|(\mathbb{I}_n - P_{H_0})Y\|_2^2 - \|(\mathbb{I}_n - P_0)Y\|_2^2 = \|P_1 Y\|_2^2 = Y^T P_1 Y.$$

Последнее равенство следует из свойства идемпотентности матрицы P_1.

Теорема 8.24. *Пусть $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 \mathbb{I}_n)$ и $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, где $P^T = P$. Тогда P – ортогональная проекция тогда и только тогда, когда*

$$Q = \frac{(Y - \mu)^T P (Y - \mu)}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{r(P)}.$$

Доказательство:

"$\Longrightarrow$" Если $P^2 = P$, то существует $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, где $A^T A = A A^T = \mathbb{I}_n$, такая что

$$A^T P A = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $r = r(P)$. Мы знаем, что $Z = A^T (Y - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbb{I}_n)$. Тогда

$$Q = \frac{(Y - \mu)^T P (Y - \mu)}{\sigma^2} = \frac{Z^T A^T P A Z}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{Z_i}{\sigma}\right)^2 \sim \mathcal{X}^2_r.$$

"$\Longleftarrow$" Так как $P^T = P$, существует матрица B, такая что $B^T B = B B^T = \mathbb{I}_n$ и

$$B^T P B = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

где λ_i – вещественнозначные собственные числа P. Подставляя $X = B^T (Y - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbb{I}_n)$, получаем

$$Q = \frac{1}{\sigma^2} X^T B^T P B X.$$

Так как $Q \sim \mathcal{X}_r^2$, то её характеристическая функция:

$$\mathbb{E}[\exp\{itQ\}] = (1-2it)^{-r/2},$$

и также:

$$\mathbb{E}[\exp\{itQ\}] = \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\frac{it}{\sigma^2}X^TB^TPBX\Big\}\Big] = \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{it\sum_{j=1}^n \lambda_j\Big(\frac{X_j}{\sigma}\Big)^2\Big\}\Big]$$

$$= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{it\lambda_j\Big(\frac{X_j}{\sigma}\Big)^2\Big\}\Big] = \prod_{j=1}^n (1-2it\lambda_j).$$

Поскольку полином однозначно определяется его линейными множителями, $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 1$ и $\lambda_j = 0 \ \forall j > r$. В частности,

$$P^2 = B\Lambda B^T B\Lambda B^T = B^T\Lambda^2 B^T = B\Lambda B^T = P.$$

Замечание 8.25. Пусть $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2\mathbb{I}_n)$ и P – ортогональная проекция, где $r(P) = r$. Задав

$$A^TPA = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

мы получаем

$$\widetilde{Q} = \frac{Y^TPY}{\sigma^2} = \frac{\widetilde{Z}^TA^TPA\widetilde{Z}}{\sigma^2},$$

где

$$\widetilde{Z} = A^TY \sim \mathcal{N}(A^T\mu, \sigma^2\mathbb{1}_n).$$

Можно показать, что распределение

$$\widetilde{Q} = \sum_{i=1}^r \Big(\frac{\widetilde{Z}_i}{\sigma}\Big)^2$$

зависит только от r и

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^r \Big(\frac{(A^T\mu)_i}{\sigma}\Big)^2 = \frac{\mu^TP\mu}{\sigma^2}.$$

Оно называется смещенным распределением $\mathcal{X}^2$ с r степенями свободы и смещением δ^2. Обозначение: $\widetilde{Q} \sim \mathcal{X}^2_{r,\delta^2}$.

Определение 8.26. Пусть $X \sim \mathcal{X}_m^2$ и $Y \sim \mathcal{X}_n^2$ независимы.

(i) Распределение случайной величины

$$F = \frac{nX}{mY}$$

называется ***F-распределением с*** m ***и*** n ***степенями свободы***. Обозначение $F \sim F_{m,n}$.

(ii) Если $X \sim \mathcal{X}^2_{m,\sigma^2}$, то

$$F = \frac{nX}{mY} \sim F_{m,n,\sigma^2}.$$

Теорема 8.27 (F-критерий в LMN). *В LMN пусть $R(K) \subset R(X^T)$, $t = r(K)$ и $r = r(X)$. Тогда*

(i)

$$F = \frac{\frac{1}{t}\|P_1Y\|_2^2}{\frac{1}{n-r}\|RY\|_2^2} \sim F_{t,n-r,\delta^2},$$

где

$$\delta^2 = \frac{1}{\sigma^2}(K^Tb)^T(K^T(X^TX)^-K)^-K^Tb$$

и

$$R = \mathbb{I} - P_0$$

как прежде.

(ii)

$$\varphi(Y) = \begin{cases} 1, & F > F_{t,n-r,1-\alpha} \\ 0, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

– ***F*-критерий** *для*

$$H_0 : K^T b = 0 \quad \textit{против} \quad H_1 : K^T b \neq 0$$

с уровнем значимости α.

Доказательство: Достаточно показать (i). Из Замечания 8.25 следует:

$$\frac{\|P_1 Y\|_2^2}{\sigma^2} = \frac{Y^T P_1 Y}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{t,\delta^2}$$

и

$$\delta^2 = \frac{(Xb)^T P_1 X b}{\sigma^2} = \frac{(K^T b)^T (K^T (X^T X)^- K)^- K^T b}{\sigma^2},$$

исходя из определения P_1. Аналогично $\frac{Y^T R Y}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_{n-r}$, так как $RXb = 0$. Лемма 8.15 и $P_1 R = 0$ завершают доказательство.

Литература

[1] Bauer H. Maß- und Integrationstheorie. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1992.

[2] Tripathi G. A matrix extension of the Cauchy-Schwarz inequality. Econom. Lett. 63 (1), 1 – 3. 1999.

[3] Bickel P. J., Doksum K. A. Mathematical statistics. San Francisco, Calif.-Düsseldorf-Johannesburg: Holden-Day, Inc., 2001.

[4] Lehmann E. L., Romano J. P. Testing statistical hypotheses. New York: Springer, 2005.

[5] Witting H., Müller-Funk U. Mathematische Statistik. II. Stuttgart: B. G. Teubner, 2001.