Оглавление

Занятие 2. Характеристики случайного процесса

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(t), t \in T$ — это параметризированная совокупность случайных величин.

Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?

$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n};\, t_1,\ldots,t_n \in T,\, n \geq 1\}$ — набор конечномерных распределений процесса ξ, где $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ — распределение вектора $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))$ в $\mathbb{R}^n$, то есть для борелевского $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)) \in \Delta\}$.

Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.

$m(t) = M\xi(t), t \in T$ — функция среднего.
$D\xi(t), t \in T$ — функция дисперсии.
$K(t,s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)], t, s \in T$ — функция ковариации.

Аудиторные задачи

2.2

Задание. Пусть
$$\xi(t) = X \cdot e^{-t},\, t > 0,$$
где X — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами a, σ^2. Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса $\xi = \{\xi(t), t > 0\}$.

Решение. Сейчас $T = (0, \infty)$.

Случайная величина X имеет распределение $N\left(a, \sigma^2\right)$. Нужно найти $M\xi(t) = m(t)$, $D\xi(t)$, ковариационную функцию $K(t,s)$ и одномерную плотность распределения $p_\xi(t)$.

Найчнём с математического ожидания

$$m(t) = M\left(X \cdot e^{-t}\right) = e^{-t} MX = e^{-t} \cdot a.$$

Далее — функция дисперсии $D\xi(t) = D\left(X \cdot e^{-t}\right) = e^{-2t} \cdot DX$. Дисперсия X — известная: $e^{-2t} \cdot DX = e^{-2t} \cdot \sigma^2$.

Далее — ковариационная функция

$$K(t,s) = M\left[\xi(t) - m(t)\right] \cdot \left[\xi(s) - m(s)\right] = cov\left[\xi(t), \xi(s)\right].$$

Вместо $\xi(t)$, $\xi(s)$ подставляем их значения

$$cov\left[\xi(t), \xi(s)\right] = cov\left(Xe^{-t}, Xe^{-s}\right).$$

Множители выносятся

$$cov\left(Xe^{-t}, Xe^{-s}\right) = e^{-t-s} cov(X, X) = e^{-t-s} DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность $\xi(t) \sim N\left(e^{-t}a,\ e^{-2t}\sigma^2\right)$.

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{\left(x - e^{-t}a\right)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины X.

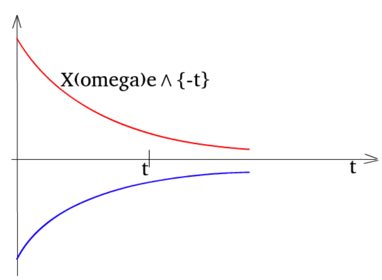

Рис. 1: Траектория процесса

Домашнее задание