

# Оглавление

<b>Занятие 1. Выборочные характеристики</b>	<b>1</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	3
Аудиторные задачи . . . . .	4
Домашнее задание . . . . .	11
<b>Занятие 2. Свойства оценок</b>	<b>25</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	27
Аудиторные задачи . . . . .	28
Домашнее задание . . . . .	33



# Занятие 1. Выборочные характеристики

## Контрольные вопросы и задания

**Приведите определение выборки, вариационного ряда, статистики, порядковой статистики, эмпирической функции распределения.**

$x_1, \dots, x_n$  — наблюдаемые значения — независимые одинаково распределённые случайные величины с неизвестной функцией распределения  $F(x)$ .

Такой набор случайных величин называется выборкой из распределения  $F$ .

Вариационный ряд — последовательность  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ , полученная в результате расположения в порядке неубывания исходной последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин  $x_1, \dots, x_n$ .

Статистикой называют функцию  $S$  от выборки  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  такую, что  $S(X) = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Вариационный ряд и его члены являются порядковыми статистиками.

Эмпирической (выборочной) функцией распределения, построенной по выборке  $x_1, \dots, x_n$  называется функция

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{x_k \leq x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Какими свойствами обладает эмпирическая функция распределения?**

Есть множество полной вероятности, на котором эмпирическая функция распределения аппроксимирует функцию распределения, то есть почти наверное  $F_n \Rightarrow F, n \rightarrow \infty$ .

Запишите выражения для выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочных моментов.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

— выборочное среднее.

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

Выборочные моменты в математической статистике — это оценка теоретических моментов распределения на основе выборки.

Выборочный момент порядка  $k$  — это случайная величина

$$a_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

## Аудиторные задачи

### 1.4

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$  с неизвестным параметром  $\theta$ . Какие из приведённых ниже функций являются статистиками?

- a)  $\bar{X}$ ;
- b)  $5X_{(n)}$ ;
- c)  $\theta/2$ ;
- d)  $X_1/\theta$ ;
- e)  $X_{(1)} + X_1 + X_n$ .

*Решение.*

- a) Да;
- b) да;
- c) нет, так как не функция от выборки;
- d) функция не только от выборки (зависит от неизвестного параметра). Отсюда следует, что это не статистика;
- e) да.

### 1.5

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . Вычислите математическое ожидание и дисперсию статистики

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Выясните, имеет ли статистика  $\bar{X}$  распределение Пуассона.

*Решение.* Все  $X_i$  одинаково распределены. Отсюда следует, что все математические ожидания одинаковы

$$M\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \lambda.$$

Для всякой выборки справедливо  $M\bar{X} = MX_1$ .

Из независимости  $X_i$  получаем

$$D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i.$$

Так как  $X_i$  одинаково распределены, то все дисперсии одинаковы

$$D\bar{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{\lambda}{n}.$$

Математическое ожидание и дисперсия для распределения Пуассона совпадают. Отсюда следует, что эта случайная величина не имеет распределения Пуассона.

$\bar{X}$  не обязательно будет принимать целые значения.

### 1.6

*Задание.* Вычислите математическое ожидание статистик:

a)  $S^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2$ ;

b)  $S_0^2 = 1/(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

*Решение.*

a) Распишем каждую из величин

$$S^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2.$$

Распишем квадрат

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i < j}^n X_i X_j \right).$$

Берём слева и справа математическое ожидание. Из того, что случайные величины в выборке одинаково распределены

$$MS^2 = MX_1^2 - \frac{1}{n^2} [nMX_1 + 2C_n^2 (MX_1)^2].$$

Подставляем  $C_n^2$  и группируем

$$MX_1^2 - \frac{1}{n^2} [nMX_1 + 2C_n^2 (MX_1)^2] = \frac{n-1}{n} \cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n} (MX_1)^2.$$

Вынесем общий множитель за скобки

$$\frac{n-1}{n} \cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n} (MX_1)^2 = \frac{n-1}{n} [MX_1^2 - (MX_1)^2] = \frac{n-1}{n} \cdot SX_1.$$

Эта оценка смещена асимптотически;

b) выразим  $S_0$  через  $S$ . Раскроем квадрат

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2).$$

Имеем сумму  $n$  одинаковых слагаемых

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} (n\bar{X}^2 - 2(\bar{X})^2 n + n\bar{X}^2) = \frac{n}{n-1} [\bar{X}^2 - (\bar{X})^2] = \frac{n-1}{n} \cdot S^2.$$

Отсюда следует, что

$$MS_0^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot DX_1 = DX_1.$$

## 1.7

*Задание.* Найдите в терминах функции распределения  $F$  выборки  $X_1, \dots, X_n$ :

- a) распределение  $k$ -ой порядковой статистики  $X_{(k)}$ ;
- b) вероятность  $P(X_{(k)} < y, X_{(k+1)} \geq y)$ .

*Решение.*

- a) Сделали упорядочивание случайных величин

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

По определению  $F_{X_{(k)}}(y) = P(X_{(k)} \leq y) = P\{\text{хотя бы } k \text{ элементов выборки не превышает } y\} =$

$$= \sum_{i=k}^n P(A_i),$$

где  $A_i = \{\text{ровно } i \text{ элементов выборки не превышают } y\}$ .

Есть  $n$  испытаний, успех —  $X_i \leq y$ .

Вероятность успеха — это  $F(y)$ , вероятность неудачи — это  $[1 - F(y)]$ .

Это биномиальное распределение

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^n C_n^i F^i(y) [1 - F(y)]^{n-i};$$

б) согласно с предыдущим пунктом  $P(X_{(k)} < y, X_{(k+1)} \geq y) = P\{\text{ровно } i \text{ элементов выборки не превышает } y\} = C_n^k F^k(y) [1 - F(y)]^{n-k}$ .

## 1.8

*Задание.* Пусть  $(-0.8; 2.9; 4.5; -5.7; 1.1; -3.2)$  — наблюдаемые значения выборки. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения  $F_6(x)$  и её график. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

*Решение.* Вариационный ряд:  $(-5.7; -3.2; -0.8; 1.1; 2.9; 4.3)$ .

Эмпирическая функция распределения (рис. 1).

$$F_6(y) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \mathbb{1}\{x_i \leq y\} = \begin{cases} 0, & x < -5.7; \\ \frac{1}{6}, & -5.7 \leq x < -3.2, \\ \frac{2}{6}, & -3.2 \leq x < -0.8, \\ \frac{3}{6}, & -0.8 \leq x < 1.1, \\ \frac{4}{6}, & 1.1 \leq x < 2.9, \\ \frac{5}{6}, & 2.9 \leq x < 4.3, \\ 1, & x \geq 4.3. \end{cases}$$

Выборочное среднее

$$\bar{X} = \frac{1}{6} (-5.7 - 3.2 - 0.8 + 1.1 + 2.9 + 4.3) = \frac{1}{6} (-9.7 + 8.3) = -\frac{1}{6} \cdot 1.4 = -0.23.$$

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (X_i + 0.23)^2.$$

Она является несмещённой.



Рис. 1: Эмпирическая функция распределения

### 1.9

*Задание.* Вычислите вероятность  $P(F_n(y) < F_n(z))$ .

*Решение.*

- а)  $y \geq z$ . Событие невозможное, потому что  $F_n(y) \geq F_n(z)$ ;  
 б) рассмотрим случай, когда  $y < z$ .

Тогда искомая вероятность равна  $P(F_n(y) < F_n(z)) = P\{\text{в } (y, z) \text{ попал хотя бы 1 элемент выборки}\} = 1 - P\{\text{в } (y, z) \text{ ни один элемент выборки не попал}\}$ . Случайные величины одинаково распределены, поэтому  $1 - P\{\text{в } (y, z) \text{ ни один элемент выборки не попал}\} =$   
 $= [1 - P\{x_i \notin (y, z)\}]^n = 1 - [1 - P\{x_1 \in (y, z)\}]^n =$   
 $= 1 - [1 - P(x_1 < z) + P(x_1 < y)]^n = 1 - [1 - F(z) + F(y)]^n.$

### 1.10

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения  $F$  с плотностью  $f$ . Найдите совместную плотность распределения всех порядковых статистик, то есть плотность распределения случайного вектора  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ .

*Решение.*  $F_{(X_{(1)}, X_{(2)})}(y_1, y_2) = P(X_{(1)} \leq y_1, X_{(2)} \leq y_2)$ . Воспользуемся формулой  $P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ . Получим

$$P(X_{(1)} \leq y_1, X_{(2)} \leq y_2) = P(X_{(1)} \leq y_2) - P(X_{(1)} > y_1, X_{(2)} \leq y_2).$$

Среди  $X_{(1)}$  и  $X_{(2)}$  случайная величина  $X_{(2)}$  является максимальной.

$$\begin{aligned} & P(X_{(1)} \leq y_2) - P(X_{(1)} > y_1, X_{(2)} \leq y_2) = \\ & = P(X_1 \leq y_2, X_2 \leq y_2) - P(X_1 \in (y_1, y_2], X_2 \in (y_1, y_2]). \end{aligned}$$

Случайные величины  $X_1, X_2$  — независимые и одинаково распределённые

$$\begin{aligned} & P(X_1 \leq y_2, X_2 \leq y_2) - P(X_1 \in (y_1, y_2], X_2 \in (y_1, y_2]) = \\ & = \begin{cases} [F(y_2)]^2, & y_1 \geq y_2, \\ [F(y_2)]^2 - [F(y_2) - F(y_1)]^2, & y_1 < y_2. \end{cases} \end{aligned}$$



Продифференцируем

$$f_{(X_{(1)}, X_{(2)})}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_1 \geq y_2, \\ 2f(y_1)f(y_2), & y_1 < y_2. \end{cases}$$

Рассматриваем множество всех векторов, которые имеют упорядоченные координаты  $\Delta = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : z_1 < z_2 < \dots < z_n\}$ ,  $\Gamma \subseteq \Delta$  — произвольное подмножество.

$$(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \in \Delta.$$

Чтобы найти вероятность того, что данный вектор принадлежит  $\Gamma$ , должны проинтегрировать плотность этого вектора по этому множеству

$$P\{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \in \Gamma\} = \int_{\Gamma} f_{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})}(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n.$$

С другой стороны,

$$P\{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \in \Gamma\} = \sum_{\sigma \in S_n} P\{(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \in \Gamma\}.$$

Учтём все перестановки

$$\sum_{\sigma \in S_n} P\{(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \in \Gamma\} = n! P\{(X_1, \dots, X_n) \in \Gamma\}.$$

Подставим найденное выражение для вероятности

$$n! P\{(X_1, \dots, X_n) \in \Gamma\} = n! \cdot \int_{\Gamma} f(z_1) \cdot \dots \cdot f(z_n) dz_1 \dots dz_n.$$

Сравниваем полученные выражения

$$f_{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})}(z_1, \dots, z_n) = n! f(z_1) \cdot \dots \cdot f(z_n) \cdot \mathbb{1}\{z_1 < z_2 < \dots < z_n\}$$

— плотность вектора упорядоченных статистик.

### 1.11

*Задание.* Пусть задана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из показательного распределения с параметром  $\alpha$ .

- Докажите, что случайные величины  $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$  являются независимыми;
- найдите распределение разности  $X_{(k+1)} - X_{(k)}$  соседних порядковых статистик.

Решение.  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор с плотностью распределения  $f_{\vec{\xi}}(\vec{x})$ .

Линейное преобразование этого вектора  $\vec{\eta} = A\vec{\xi}$ , где  $A$  — некоторая  $n$ -мерная матрица.

$$f_{A\vec{\xi}}(\vec{y}) = \frac{1}{|\det A|} \cdot f_{\vec{\xi}}(A^{-1}\vec{y}).$$

Составим вектор из величин  $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ . Его плотность должна распадаться на произведение плотностей компонент.

Из задачи 1.10

$$f_{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})}(y_1, \dots, y_n) = n! f(y_1) \cdot \dots \cdot f(y_n) \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \dots < y_n\}.$$

Подставим плотность показательного распределения

$$\begin{aligned} n! f(y_1) \cdot \dots \cdot f(y_n) \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \dots < y_n\} = \\ = n! \alpha e^{-\alpha y_1} \cdot \mathbb{1}\{y_1 > 0\} \cdot \dots \cdot \alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\} \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \dots < y_n\}. \end{aligned}$$

Перемножим

$$\begin{aligned} n! \alpha e^{-\alpha y_1} \cdot \mathbb{1}\{y_1 > 0\} \cdot \dots \cdot \alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\} \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \dots < y_n\} = \\ = n! \alpha^n e^{-\alpha(y_1 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n\}. \end{aligned}$$

Нужно найти линейное преобразование

$$\begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} - X_{(1)} \\ X_{(3)} - X_{(2)} \\ \dots \\ X_{(n)} - X_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ X_{(3)} \\ \dots \\ X_{(n)} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Определитель  $\det A = 1$ .

Ищем обратную матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} - X_{(1)} \\ X_{(3)} - X_{(2)} \\ \dots \\ X_{(n)} - X_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ X_{(3)} \\ \dots \\ X_{(n)} \end{bmatrix}.$$

Тогда имеем выражение

$$A^{-1}\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}.$$

Определим искомый вектор через

$$\vec{\eta} = (X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & f_{\vec{\eta}}(y_1, \dots, y_n) = \\ & = n! \alpha^n e^{-\alpha(ny_1 + (n-1)y_2 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_1 + y_2 < \dots < y_1 + y_2 + \dots + y_n\}. \end{aligned}$$

Разобьём на  $n$  множителей

$$\begin{aligned} & n! \alpha^n e^{-\alpha(ny_1 + (n-1)y_2 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_1 + y_2 < \dots < y_1 + y_2 + \dots + y_n\} = \\ & = [n\alpha e^{-\alpha ny_1} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1\}] \cdot [(n-1)\alpha e^{-\alpha(n-1)y_2} \cdot \mathbb{1}\{y_2 > 0\}] \cdot \dots \times \\ & \quad \times [\alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\}]. \end{aligned}$$

Имеем произведение плотностей компонент, значит, элементы вектора независимы и показательно распределены с параметром  $\alpha(n-k)$ , то есть  $X_{(k+1)} - X_{(k)} \sim \Pi(\alpha(n-k))$ . Считаем, что  $X_{(0)} = 0$ .

## Домашнее задание

### 1.15

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного на отрезке  $[a, b]$  распределения. Вычислите математическое ожидание и дисперсию статистики

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Выясните, имеет ли статистика  $\bar{X}$  равномерное распределение; нормальное распределение.

*Решение.* Все  $X_i$  одинаково распределены. Отсюда следует, что все математические ожидания одинаковы

$$M\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Из независимости  $X_i$  получаем

$$D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i.$$

Так как  $X_i$  одинаково распределены, то все дисперсии одинаковы

$$D\bar{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{(b-a)^2}{12n}.$$

Чтобы выяснить, распределена ли статистика  $\bar{X}$  по нормальному или равномерному распределению, найдём её характеристическую функцию  $\varphi_{\bar{X}}(t)$ . Учитывая независимость элементов выборки и то, что

$$\varphi_{X_1}(t) = \dots = \varphi_{X_n}(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)},$$

находим

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[ \frac{(e^{itb} - e^{ita})n}{it(b-a)} \right]^n.$$

Отсюда следует, что  $\bar{X}$  не имеет указанных распределений.

### 1.16

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из некоторого распределения вероятностей, функция распределения которого  $F$  является непрерывной и строго возрастающей. Найдите распределение выборки  $Y_1, \dots, Y_n$ , где

$$Y_i = F(X_i).$$

*Решение.* По определению

$$F_{\eta_1, \dots, \eta_n}(X_1, \dots, X_n) = P(\eta_1 \leq X_1, \dots, \eta_n \leq X_n).$$

Воспользуемся независимостью

$$P(\eta_1 \leq X_1, \dots, \eta_n \leq X_n) = P(\eta_1 \leq X_1) \cdot \dots \cdot P(\eta_n \leq X_n).$$

Функция распределения  $i$ -й компоненты вектора равна

$$F_{\eta_i}(x) = P(F_{\xi_i}(X_i) \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим  $[0, 1]$ .

Поскольку  $F$  — непрерывная и строго возрастающая, то существует  $F^{-1}(x)$ . Обозначим через  $z$  точку  $F^{-1}(x)$  такую, что  $F(z) = x$ . Событие  $\{\eta = F(\xi) < x\}$  происходит тогда и только тогда, когда происходит событие  $\{\xi < z\}$ .

Получаем на отрезке  $[0, 1]$  равномерное распределение

$$F_{\eta}(x) = F_{\xi}(z) = F_{\xi}(F_{\xi}^{-1}(x)) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

### 1.17

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из дискретного распределения с вероятностями  $P(X_1 = m) = p_m$ , где

$$\sum_{m=0}^N p_m = 1.$$

Найдите распределение  $k$ -й порядковой статистики  $X_{(k)}$ .

*Решение.* Сделали упорядочивание случайных величин

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

По определению  $F_{X_{(k)}}(y) = P(X_{(k)} \leq y) = P\{\text{хотя бы } k \text{ элементов выборки не превышает } y\} =$

$$= \sum_{i=k}^n P(A_i),$$

где  $A_i = \{\text{ровно } i \text{ элементов выборки не превышают } y\}$ .

Есть  $n$  испытаний, успех —  $X_i \leq y$ .

Вероятность успеха — это  $F(y)$ , вероятность неудачи — это  $[1 - F(y)]$ . Это биномиальное распределение

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^n C_n^i F^i(y) [1 - F(y)]^{n-i}.$$

Представим  $F_{X_i}(y) = F(y)$  через  $m$ . Запишем по определению

$$F_{X_1}(y) = P(X_1 \leq y) = \sum_{m=1}^n P(X_1 = m) = \sum_{m=1}^n p_m.$$

Подставим полученное выражение в функцию распределения

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^n C_n^i \sum_{m=1}^n p_m \left(1 - \sum_{m=1}^n p_m\right)^{n-i}.$$

### 1.18

*Задание.* Пусть  $(3, 0, 4, 3, 6, 0, 3, 1)$  — наблюдаемые значения выборки. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения  $F_8(x)$  и её график. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

*Решение.* Вариационный ряд:  $(0, 0, 1, 3, 3, 3, 4, 6)$ .

Эмпирическая функция распределение (рис. 2)

$$F_8(y) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \mathbb{1}\{x_i \leq y\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{8}, & 1 \leq x < 3, \\ \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, & 3 \leq x < 4, \\ \frac{7}{8}, & 4 \leq x < 6, \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$



Рис. 2: Эмпирическая функция распределения

Выборочное среднее

$$\bar{X} = \frac{1}{8} (0 + 0 + 1 + 3 + 3 + 4 + 6) = \frac{1}{8} \cdot 20 = \frac{10}{4} = 2.5.$$

Выборочная дисперсия

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (X_i - 2.5)^2 = \\ &= \frac{1}{7} \left[ 2(0 - 2.5)^2 + (1 - 2.5)^2 + 3(3 - 2.5)^2 + (4 - 2.5)^2 + (6 - 2.5)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{7} (12.5 + 2.25 + 0.75 + 2.25 + 12.25) = \frac{30}{7} \approx 4.29. \end{aligned}$$

### 1.19

*Задание.* По выборке объёма  $n$  из распределения Бернулли с параметром  $p$  постройте эмпирическую функцию распределения  $F_n(y)$ .

*Решение.* Случайная величина имеет распределение Бернулли, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями  $p$  и  $(1 - p)$  соответственно. Таким образом:  $P(x = 1) = p$ ,  $P(x = 0) = 1 - p$ .

Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке

$$x_1, \dots, x_n,$$

называется функция

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \leq y).$$

Пусть есть набор из  $n$  чисел (нулей и единиц) — выборка из распределения Бернулли.

Для удобства выстроим числа в порядке их возрастания:

$$0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1.$$

Видим, что слева от нуля эмпирическая функция распределения будет равна нулю.

В точке 0 произойдёт скачок на

$$\frac{n-k}{n},$$

где  $k$  — количество единиц, а  $(n-k)$  — количество нулей в выборке.

В точке 1 будет скачок на

$$1 - \frac{n-k}{n} = \frac{n-n+k}{n} = \frac{k}{n},$$

а значение самой функции будет равно единице.

$$F_n(y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{n-k}{n}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Эмпирическая функция распределения будет выглядеть так, как показано на рис. 3.



Рис. 3: Эмпирическая функция распределения

## 1.20

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения  $F$ . Докажите, что для произвольных  $y \in \mathbb{R}$  и  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  справедливо равенство

$$P\left(F_n(y) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F^k(y) (1 - F(y))^{n-k}.$$

*Решение.* Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке  $X_1, \dots, X_n$ , называется функция

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq y).$$

Посмотрим, что значит событие в указанной вероятности

$$F_n(y) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq y).$$

Сократим константы в знаменателях

$$k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq y).$$

Это означает, что есть ровно  $k$  элементов выборки, не превышающих  $y$ . Следовательно, это биномиальное распределение с параметром  $F(y)$ , то есть

$$P\left(F_n(y) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F^k(y) (1 - F(y))^{n-k}.$$

## 1.21

*Задание.* Для выборки  $X_1, \dots, X_n$  из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$  найдите плотность, математическое ожидание и дисперсию:

- а) максимального члена вариационного ряда  $X_{(n)}$ ;
- б) минимального члена вариационного ряда  $X_{(1)}$ ;
- в) совместную плотность распределения и ковариацию  $X_{(n)}$  и  $X_{(1)}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) Найдем функцию распределения } n\text{-й порядковой статистики } F_{X_{(n)}}(y) &= \\ &= P(X_{(n)} \leq y) = P(n \text{ элементов выборки не превышают } y) = \\ &= C_n^n [F_{X_1}(y)]^n \cdot [1 - F_{X_1}(y)]^{n-n} = [F_{X_1}(y)]^n = [P(X_1 \leq y)]^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n, \end{aligned}$$

при этом  $y \in [0, \theta]$ .

Продифференцируем

$$f_{X_{(n)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(n)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\theta}\right)^n = \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{dy^n}{dy} = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\{y \in [0, \theta]\}.$$



По определению математического ожидания

$$MX_{(n)} = \int_0^\theta y dF^n(y) = \int_0^\theta y d\left(\frac{y}{\theta}\right)^n = \frac{1}{\theta^n} \int_0^\theta y dy^n = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y y^{n-1} dy.$$

Сложим степени сомножителей

$$\frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y y^{n-1} dy = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^n dy = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^\theta = \frac{\theta^{n+1} n}{\theta^n (n+1)} = \frac{\theta n}{n+1}.$$

Найдём второй момент

$$MX_{(n)}^2 = \int_0^\theta y^2 dF^n(y) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^2 y^{n-1} dy = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^{n+1} dy.$$

Возьмём интеграл

$$\frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^{n+1} dy = \frac{ny^{n+2}}{\theta^n (n+2)} \Big|_0^\theta = \frac{n\theta^{n+2}}{\theta^n (n+2)} = \frac{n\theta^2}{n+2}.$$

По свойствам дисперсии

$$DX_{(n)} = MX_{(n)}^2 - (MX_{(n)})^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}.$$

Приведём к общему знаменателю

$$\begin{aligned} \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} &= \frac{n\theta^2 (n^2 + 2n + 1) - n^2\theta^2 (n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \\ &= \frac{n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2 + n\theta^2 - n^3\theta^2 - 2n^2\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}; \end{aligned}$$

b) найдём функцию распределения первой порядковой статистики

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(y) &= P(X_{(1)} \leq y) = P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y) = \\ &= P(\text{хотя бы 1 элемент выборки не превышает } y) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P(\text{exactly } k \text{ elements of the sample does not exceed } y) &= \\ &= \sum_{k=1}^n C_n^k F^k(y) [1 - F(y)]^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k F^k(y) [1 - F(y)]^{n-k} - C_n^0 F^0(y) [1 - F(y)]^{n-0}. \end{aligned}$$

Применяем формулу для бинома Ньютона

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k F^k(y) [1 - F(y)]^{n-k} - C_n^0 F^0(y) [1 - F(y)]^{n-0} = \\ = [F(y) + 1 - F(y)]^n - [1 - F(y)]^n = 1 - \left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n. \end{aligned}$$

Продифференцируем

$$f_{X_{(1)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(1)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{(\theta - y)^n}{\theta^n}\right) = -\frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\theta - y)^n.$$

Берём производную сложной функции

$$-\frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\theta - y)^n - \frac{1}{\theta^n} \cdot n (\theta - y)^{n-1} (-1) = \frac{n (\theta - y)^{n-1}}{\theta^n}, \quad y \in [0, \theta].$$

Найдём математическое ожидание по определению

$$MX_{(1)} = \int_0^\theta y dF^n(y) = \int_0^\theta y d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Сделаем замену

$$1 - \frac{y}{\theta} = z,$$

откуда  $y = \theta(1 - z)$ , при этом интегрирование происходит в пределах от одного до нуля

$$\int_0^\theta y d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n = \int_1^0 \theta(1 - z) dz^n = \theta n \int_1^0 (z - 1) z^{n-1} dz.$$

Разбиваем на 2 интеграла

$$\theta n \int_1^0 (z - 1) z^{n-1} dz = -\theta n \int_0^1 z^n dz + \theta n \int_0^1 z^{n-1} dz = -\theta n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + \theta n \cdot \frac{z^n}{n} \Big|_0^1.$$

Подставляем пределы интегрирования

$$-\theta n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + \theta n \cdot \frac{z^n}{n} \Big|_0^1 = -\theta n \cdot \frac{1}{n+1} + \theta n \cdot \frac{1}{n} = -\theta n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right).$$

Приводим к общему знаменателю

$$-\theta n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -\theta n \cdot \frac{n - n - 1}{n(n+1)} = \frac{\theta n}{n(n+1)} = \frac{\theta}{(n+1)}.$$

Найдём второй момент

$$MX_{(1)}^2 = \int_0^\theta y^2 d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Применяем такую же замену, как при поиске первого момента

$$\int_0^\theta y^2 d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n = \int_1^0 \theta^2 (1-z)^2 dz^n = \int_0^1 \theta^2 n (1-z)^2 z^{n-1} dz.$$

Выносим константу за знак интеграла и возводим скобку в квадрат

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta^2 n (1-z)^2 z^{n-1} dz &= \theta^2 n \int_0^1 (1-2z+z^2) z^{n-1} dz = \\ &= \theta^2 n \int_0^1 z^{n-1} dz - 2\theta^2 n \int_0^1 z^n dz + \theta^2 n \int_0^1 z^{n+1} dz = \\ &= \theta^2 n \cdot \frac{z^n}{n} \Big|_0^1 - 2\theta^2 n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + \theta^2 n \cdot \frac{z^{n+2}}{n+2} \Big|_0^1 = \theta^2 - \frac{2\theta^2 n}{n+1} + \frac{\theta^2 n}{n+2} = \\ &= \theta^2 \left(1 - \frac{2n}{n+1} + \frac{n}{n+2}\right) = \\ &= \theta^2 \cdot \frac{(n+1)(n+2) - 2n(n+2) + n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{\theta^2 (n^2 + 3n + 2 - 2n^2 - 4n + n^2 + n)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

По свойствам дисперсии

$$DX_{(1)} = MX_{(1)}^2 - [MX_{(1)}]^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\begin{aligned} \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} &= \frac{2\theta^2(n+1) - \theta^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \\ &= \frac{2\theta^2 n + 2\theta^2 - \theta^2 n - 2\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}; \end{aligned}$$

с) найдём функцию распределения вектора по определению

$$F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(y_1, y_n) = P(X_{(1)} \leq y_1, X_{(n)} \leq y_n).$$

Воспользовавшись формулой  $P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ , получим

$$P(X_{(1)} \leq y_1, X_{(n)} \leq y_n) = P(X_{(n)} \leq y_n) - P(X_{(1)} > y_1, X_{(n)} \leq y_n).$$

Если максимум меньше какого-то значения, то все элементы меньше него

$$\begin{aligned} P(X_{(1)} > y_1, X_{(n)} \leq y_n) &= \\ &= P(X_1 \leq y_n, \dots, X_n \leq y_n) - \\ &= P(X_1 \in (y_1, y_n], X_2 \in (y_1, y_n], \dots, X_n \in (y_1, y_n]) = \\ &= [F(y_n)]^n - [F(y_1)]^n \end{aligned}$$

при  $y_1 < y_n$ .

Продифференцируем

$$f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(y_1, y_n) = \begin{cases} 0, & y_1 \geq y_n, \\ n(n-1) \cdot [F(y_n) - F(y_1)]^{n-2} \times \\ \times p_{X_1}(y_1) p_{X_n}(y_n) = \\ = n(n-1) \cdot \left[ \frac{y_n}{\theta} - \frac{y_1}{\theta} \right]^{n-2} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \\ = n(n-1) \cdot \frac{(y_n - y_1)^n}{\theta^{n-2}} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{n(n-1)(y_n - y_1)^{n-1}}{\theta^n}. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание вектора

$$M(X_{(1)}, X_{(n)}) = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta \int_{y_n}^\theta y_1 y_n (y_n - y_1)^{n-2} dy_1 dy_n.$$

Заменяем разность величин величиной  $x$ . Якобиан преобразования равен

$$\frac{\partial(x, y_n)}{\partial(x, y_1)} = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y_1} & \frac{\partial y_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x}{\partial y_n} & \frac{\partial y_1}{\partial y_1} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 1.$$

Получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta \int_{y_n}^\theta y_1 y_n (y_n - y_1)^{n-2} dy_1 dy_n = \\
& = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta \int_0^{\theta-y_n} (x + y_n) y_n x^{n-2} dx dy_n = \\
& = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta y_n dy_n \cdot \int_0^{\theta-y_n} (x^{n-1} + y_n x^{n-2}) dx = \\
& = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta y_n dy_n \cdot \left( \frac{x^n}{n} + y_n \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} \right) \Big|_0^{\theta-y_n} = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta \left[ (n-1)(\theta - y_n) + y_n n (\theta - y_n)^{n-1} \right] \cdot y_n dy_n = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta (\theta - y_n)^{n-1} \cdot [(n-1)(\theta - y_n) + y_n n] \cdot y_n dy_n = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta (\theta - y_n)^{n-1} [n\theta - (\theta - y_n)] y_n dy_n.
\end{aligned}$$

Заменяем первую скобку в интеграле на  $t$ . Получаем

$$\frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta (\theta - y_n)^{n-1} [n\theta - (\theta - y_n)] y_n dy_n = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta t^{n-1} (n\theta - t) (\theta - t) dt.$$

Перемножаем скобки

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta t^{n-1} (n\theta - t) (\theta - t) dt = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta t^{n-1} (n\theta^2 - (n+1)\theta t + t^2) dt = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta (n\theta^2 t^{n-1} - (n+1)\theta t^n + t^{n+1}) dt = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \left[ \theta^2 t^n - \theta t^{n+1} + \frac{t^{n+2}}{n+2} \right] \Big|_0^\theta = \frac{1}{\theta^n} \cdot \left[ \theta^{n+2} - \theta^{n+2} + \frac{\theta^{n+2}}{n+2} \right] = \frac{\theta^2}{n+2}.
\end{aligned}$$

По определению ковариации

$$cov(X_{(1)}, X_{(n)}) = M(X_{(1)}X_{(n)}) - MX_{(1)}MX_{(n)} = \frac{\theta^2}{n+2} - \frac{\theta}{n+1} \cdot \frac{\theta n}{n+1}.$$

Выносим общий множитель за скобки

$$\frac{\theta^2}{n+2} - \frac{\theta}{n+1} \cdot \frac{\theta n}{n+1} = \theta^2 \left( \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right).$$

Приводим к общему знаменателю дроби в скобках

$$\theta^2 \left( \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \theta^2 \cdot \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

### 1.22

*Задание.* Пусть задана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из показательного распределения с параметром  $\alpha$ . Докажите, что

$$MX_{(k)} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{n-k+1} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

не находя распределения порядковой статистики  $X_{(k)}$ .

*Решение.* Преобразуем левую часть того, что нужно доказать

$$MX_{(k)} = MX_{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} M(X_{(i+1)} - X_{(i)}).$$

Элементы выборки имеют плотность распределения

$$p(y) = \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Интегрируя плотность, получим функцию распределения

$$F(y) = \int_{-\infty}^y p(x) dx = \int_{-\infty}^y \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\} dx = \int_0^y \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x} \Big|_0^y.$$

Подставляем пределы интегрирования

$$-e^{-\alpha x} \Big|_0^y = 1 - e^{-\alpha y}, \quad y \geq 0.$$

Находим функцию распределения минимальной порядковой статистики

$$F_{X_{(1)}}(y) = P(X_{(1)} \leq y) = 1 - P(X_{(1)} > y).$$

Если минимальный элемент выборки больше какого-то значения, то все элементы выборки больше него

$$1 - P(X_{(1)} > y) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y).$$

Из независимости случайных величин следует, что

$$1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y) = 1 - P(X_1 > y) \cdot P(X_2 > y) \cdot \dots \cdot P(X_n > y).$$

Переходим к противоположным событиям и учитываем то, что случайные величины одинаково распределены

$$1 - P(X_1 > y) \cdot P(X_2 > y) \cdot \dots \cdot P(X_n > y) = 1 - [1 - F(y)]^n.$$

Находим плотность минимальной порядковой статистики

$$f_{X_{(1)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(1)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial \{1 - [1 - F(y)]^n\}}{\partial y} = -n[1 - F(y)]^{n-1} \cdot (-1) f(y).$$

Упрощаем и учитываем, что  $f(y)$  — это плотность распределения элементов выборки

$$-n[1 - F(y)]^{n-1} \cdot (-1) f(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} p(y).$$

Подставляем функцию и плотность распределения

$$n[1 - F(y)]^{n-1} p(y) = n[1 - (1 - e^{-\alpha y})]^n \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Упрощаем выражение в скобках

$$n[1 - (1 - e^{-\alpha y})]^n \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\} = n\alpha e^{-\alpha(n-1)y} e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Суммируем показатели экспонент

$$n\alpha e^{-\alpha(n-1)y} e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\} = n\alpha e^{-\alpha n y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Отсюда следует, что  $X_{(1)} \sim \text{Exp}(n\alpha)$ .

Из задачи 1.11 б)  $X_{(i+1)} - X_{(i)} \sim \text{Exp}(\alpha(n-i))$ .

Тогда такая разность имеет математическое ожидание

$$M(X_{(i+1)} - X_{(i)}) = \frac{1}{\alpha(n-i)}.$$

Подставляем в полученное в начале выражение

$$MX_{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} M(X_{(i+1)} - X_{(i)}) = \frac{1}{n\alpha} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha(n-i)}.$$

Записываем сумму в явном виде

$$\frac{1}{n\alpha} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha(n-i)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-k+1} \right).$$

### 1.23

*Задание.* Для выборки  $X_1, \dots, X_n$  из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$  найдите:

- а) ковариацию  $X_{(n)}$  и  $X_{(1)}$ ;

б) совместную плотность распределения  $X_{(k)}$  и  $X_{(j)}$ ,  $1 \leq k \leq j \leq n$ .

*Решение.*

а) Данный пункт решён в задаче 1.21 с);

б) по определению функции распределения

$$F_{(X_{(k)}, X_{(j)})}(y, z) = P(X_{(k)} \leq y, X_{(j)} \leq z).$$

Воспользовавшись формулой  $P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ , получим  $P(X_{(k)} \leq y, X_{(j)} \leq z) = P(X_{(j)} \leq z) - P(X_{(k)} > y, X_{(j)} \leq z)$ . Аналогично задаче 1.10 разбиваем на 2 решения согласно коэффициентам

$$\begin{aligned} & P(X_{(j)} \leq z) - P(X_{(k)} > y, X_{(j)} \leq z) = \\ & = \begin{cases} P(X_{(j)} \leq z), & y \geq z, \\ P(X_{(j)} \leq z) - P(X_{(k)} > y, X_{(j)} \leq z), & y < z. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдём первую вероятность  $P(X_{(j)} \leq z) = P(\text{хотя бы } j \text{ элементов выборки не превышает } z) =$

$$= \sum_{i=j}^n C_n^i F^i(z) [1 - F(z)]^{n-i} = \sum_{i=j}^n C_n^i \left(\frac{z}{\theta}\right)^i \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^{n-i}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\sum_{i=j}^n C_n^i \left(\frac{z}{\theta}\right)^i \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^{n-i} = \sum_{i=j}^n C_n^i \frac{z^i}{\theta^i} \cdot \frac{(\theta - z)^{n-i}}{\theta^{n-i}} = \sum_{i=j}^n C_n^i \frac{z^i (\theta - z)^{n-i}}{\theta^n}.$$

Найдём вторую вероятность  $P(X_{(j)} \leq z, X_{(k)} > y) = P(\text{хотя бы } (j - k + 1)$

элементов выборки находится в интервале  $(y, z]) =$

$$\begin{aligned} & = \sum_{i=j-k+1}^n C_n^i [F(z) - F(y)]^i \cdot \{1 - [F(z) - F(y)]\}^{n-i} = \\ & = \sum_{i=j-k+1}^n C_n^i \cdot \left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)^i \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)\right]^{n-i} = \\ & = \sum_{i=j-k+1}^n C_n^i \cdot \frac{(z - y)^i}{\theta^i} \cdot \left(1 - \frac{z - y}{\theta}\right)^{n-i} = \\ & = \sum_{i=j-k+1}^n C_n^i \cdot \frac{(z - y)^i}{\theta^i} \cdot \frac{(\theta - z + y)^{n-i}}{\theta^{n-i}} = \\ & = \sum_{i=j-k+1}^n \frac{C_n^i}{\theta^n} (z - y)^i (\theta - z + y)^{n-i}. \end{aligned}$$



Продифференцируем. В первом случае будет 0. Найдём производную второй вероятности

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \\
& = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sum_{i=j-k+1}^n \frac{C_n^i}{\theta^n} \times \right. \\
& \times \left[ i(z-y)^{i-1}(\theta-z+y)^{n-i} - (z-y)(n-i)(\theta-z+y)^{n-i-1} \right] \Big\} = \\
& = \sum_{i=j-k+1}^n \frac{C_n^i}{\theta^n} \times \\
& \times [-i(i-1)(z-y)^{i-2}(\theta-z+y)^{n-i} + \\
& + 2i(z-y)^{i-1}(n-i) \cdot (\theta-z+y)^{n-i-1} - \\
& - (z-y)^i(n-i)(n-i-1) \cdot (\theta-z+y)^{n-i-2}] = \\
& = \sum_{i=j-k+1}^n \frac{C_n^i(z-y)^{i-2} \cdot (\theta-z+y)^{n-i-2}}{\theta^n} \times \\
& \times [2i(z-y)(n-i)(\theta-z+y) - i(i-1)(\theta-z+y) - \\
& - (n-i)(n-i-1)(z-y)^2].
\end{aligned}$$

Тогда во втором случае плотность равна полученному выражению.



## Занятие 2. Свойства оценок

### Контрольные вопросы и задания

**Что называют оценкой неизвестного параметра?**

Статистику, значение которой заменяет неизвестный параметр, называют оценкой этого параметра.

**Преведиты определение оценки: несмещённой, асимптотически несмещённой, состоятельной, сильно состоятельной, оптимальной.**

Оценка  $\hat{\theta}$  несмещённая, если  $\forall \theta \in \Theta : M_{\theta} \hat{\theta} = \theta$ .

Асимптотически несмещённая оценка — такая оценка, математическое ожидание которой совпадает с оцениваемым параметром при  $n \rightarrow \infty$ .

Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной, если стремится к истинному значению  $\theta$  по вероятности  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$ .

Оценка  $\hat{\theta}$  называется сильно состоятельной, если стремится к истинному значению  $\theta$  почти наверное  $\hat{\theta} \xrightarrow{a.s.} \theta, n \rightarrow \infty$ .

Несмещённая оценка  $\hat{\theta} \in K$  называется оптимальной в классе квадратично интегрируемых оценок  $K$ , если для всякой другой несмещённой оценки  $\tilde{\theta} \in \Theta \forall \theta \in \Theta : D_{\theta} \hat{\theta} \leq D_{\theta} \tilde{\theta}$  или же  $\forall \theta \in \Theta, M_{\theta} \left( \hat{\theta} - \theta \right)^2 \leq M_{\theta} \left( \tilde{\theta} - \theta \right)^2$ .

**Что называется среднеквадратическим отклонением оценки?**

$M_{\theta} \left( \hat{\theta} - \theta \right)^2$  — среднеквадратическое отклонение.

Сформулируйте утверждение про поведение выборочных моментов.

Какая оценка является несмещённой и содержательной для математического ожидания распределения выборки?

Какая статистика является несмещённой оценкой для дисперсии распределения выборки?

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

— несмещённая оценка для  $\sigma^2 = Dx_1$ .

## Аудиторные задачи

### 2.4

*Задание.* Для выборки равномерного распределения на отрезке  $[0, 1]$  проверьте состоятельность и несмещённость оценки  $X_{(1)}$  параметра  $\theta$ .

*Решение.*  $\theta$  — минимальное наблюдение. Проверяем, выполняется ли  $X_{(1)} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$ .

По определению сходимости по вероятности

$$\forall \varepsilon > 0 P(|X_{(1)} - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Раскроем модуль

$$P\{X_{(1)} > \varepsilon + \theta\} = P(X_1 > \varepsilon + \theta, \dots, X_n > \varepsilon + \theta) = [P(X_1 > \varepsilon + \theta)]^n.$$

Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$[P(X_1 > \varepsilon + \theta)]^n = \left(\frac{1 - \theta - \varepsilon}{1 - \theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 - \theta}\right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Число в скобках строго меньше единицы, так как  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

Проверяем несмещённость оценки. Проверяем, выполняется ли

$$MX_{(1)} = \theta.$$

Нужно найти плотность

$$MX_{(1)} = \int_{\mathbb{R}} f_{X_{(1)}}(y) y dy.$$

Начинаем с функции распределения  $F_{X_{(1)}}(y) = P(X_{(1)} \leq y)$ . Переходим к противоположному событию

$$P(X_{(1)} \leq y) = 1 - P(X_{(1)} > y) = 1 - [P(X_1 > y)]^n.$$

Переходим к противоположному событию  $1 - [P(X_1 > y)]^n = 1 - [1 - F(y)]^n$ .  
Продифференцируем

$$\frac{dF_{X_{(1)}}(y)}{dy} = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y).$$

На отрезке  $[\theta, 1]$  имеет равномерное распределение

$$n[1 - F(y)]^{n-1} f(y) = n \left[ 1 - \frac{y - \theta}{1 - \theta} \right]^{n-1} \cdot \mathbb{1}\{y \in [\theta, 1]\} \cdot \frac{1}{1 - \theta}.$$

Приведём к общему знаменателю

$$n \left[ 1 - \frac{y - \theta}{1 - \theta} \right]^{n-1} \cdot \mathbb{1}\{y \in [\theta, 1]\} \cdot \frac{1}{1 - \theta} = \frac{n}{(1 - \theta)^2} \cdot (1 - y)^{n-1} \cdot \mathbb{1}\{y \in [\theta, 1]\}.$$

Нашли плотность  $X_{(1)}$  и теперь можем вычислить интеграл

$$MX_{(1)} = \int_{\theta}^1 y \cdot \frac{n}{(1 - \theta)^2} \cdot (1 - y)^{n-1} dy.$$

Замена:

$$1 - y = z, dy = -dz, y = 1 - z, y = 1 \Rightarrow z = 0, y = \theta \Rightarrow z = 1 - \theta.$$

Подставляя замену, получаем

$$\int_{\theta}^1 y \cdot \frac{n}{(1 - \theta)^2} \cdot (1 - y)^{n-1} dy = n \cdot \frac{1}{(1 - \theta)^n} \int_0^{1-\theta} (1 - z) z^{n-1} dz.$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{1}{(1 - \theta)^n} \int_0^{1-\theta} (1 - z) z^{n-1} dz \frac{n}{(1 - \theta)^n} \left[ \frac{(1 - \theta)^n}{n} - \frac{(1 - \theta)^{n+1}}{n + 1} \right] = \\ = n \left( \frac{1}{n} - \frac{1 - \theta}{n + 1} \right) = 1 - \frac{n}{n + 1} (1 - \theta). \end{aligned}$$

Раскроем скобки

$$1 - \frac{n}{n + 1} (1 - \theta) = 1 - \frac{n}{n + 1} - \theta \cdot \frac{n}{n + 1} \neq \theta.$$

Отсюда следует, что оценка смещённая, но асимптотически несмещённая, потому что

$$1 - \frac{n}{n + 1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

и

$$\frac{n}{n + 1} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

## 2.5

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ . Выясните, является ли статистика

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 :$$

- а) несмещённой оценкой для  $\lambda^2$ ;
- б) состоятельной оценкой для  $\lambda^2$ .

*Решение.*

- а) Нужно проверить, выполняется ли

$$M \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \lambda^2.$$

Преобразуем левую часть

$$M \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = M X_1^2 = D X_1 + (M X_1)^2 = \lambda + \lambda^2 \neq \lambda^2.$$

Значит, оценка смещённая;

- б) проверяем, имеет ли место

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} \lambda^2, n \rightarrow \infty.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow M X_1^2 = \lambda^2 + \lambda \neq \lambda^2,$$

значит, оценка не состоятельная.

## 2.6

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из показательного распределения с параметром  $\alpha > 0$ . Докажите, что статистика  $1/\bar{X}$  является состоятельной оценкой для  $\alpha$ .

*Решение.* Нужно показать, что

$$\frac{1}{\bar{X}} \xrightarrow{P} \alpha, n \rightarrow \infty.$$

Выборочное среднее

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

По закону больших чисел

$$\bar{X} \xrightarrow{P} MX_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\bar{X}} \xrightarrow{P} \frac{1}{MX_1} = \alpha.$$

## 2.7

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из нормального распределения  $N(a, \sigma^2)$ . Докажите, что статистика

$$S_n = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

является несмещённой и состоятельной оценкой для  $\sigma^1$ .

*Решение.* Нужно проверить условие  $MS_n = \sigma^2$ .

Разность двух соседних элементов выборки имеет распределение

$$X_{i+1} - X_i \sim N(0, 2\sigma^2).$$

Найдём математическое ожидание статистики

$$MS_n = M \frac{1}{2(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^n M(X_{i+1} - X_i)^2.$$

Случайные величины одинаково распределены

$$\frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^n M(X_{i+1} - X_i)^2 = \frac{n}{2(n-1)} \cdot M(X_2 - X_1)^2.$$

В данном случае второй момент равен дисперсии

$$\frac{n}{2(n-1)} \cdot M(X_2 - X_1)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sigma^2 = \sigma^2.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Проверим состоятельность, то есть  $S_n \xrightarrow{P} \sigma^2, n \rightarrow \infty$ .

Разобьём  $S_n$  на две суммы

$$S_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[ \sum_{\text{even } i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \sum_{\text{odd } i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right].$$

В каждой из сумм слагаемые независимы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[ \sum_{\text{even } i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \sum_{\text{odd } i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[ \frac{m}{m} \sum_{\text{even } i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \frac{n-1-m}{n-1-m} \sum_{\text{odd } i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right]. \end{aligned}$$

По закону больших чисел

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[ \frac{m}{m} \sum_{\text{even } i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \frac{n-1-m}{n-1-m} \sum_{\text{odd } i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] \xrightarrow{P} \\ & \xrightarrow{P} \frac{1}{2} \cdot M(X_2 - X_1)^2 = \frac{1}{2} \cdot D(X_2 - X_1) = \sigma^2, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

## 2.8

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из показательного распределения с параметром  $\alpha > 1$ . Для какого параметра  $\theta = \theta(\alpha)$  статистика

$$\hat{\theta}_n = e^{\bar{X}}$$

является состоятельной оценкой? Является ли  $\hat{\theta}_n$  сильно состоятельной оценкой того же параметра? Является ли  $\hat{\theta}_n$  несмещённой оценкой того же параметра? Асимптотически несмещённой?

*Решение.*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} MX_1, n \rightarrow \infty.$$

Случайные величины в выборке имеют показательное распределение

$$MX_1 = \frac{1}{\alpha},$$

значит,

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \frac{1}{\alpha}, n \rightarrow \infty.$$

Применяем непрерывную функцию  $e^x$ . Получаем  $e^{\bar{X}} \xrightarrow{P} e^{\frac{1}{\alpha}}, n \rightarrow \infty$ .

Проверяем, является ли оценка  $e^{\bar{X}}$  несмещённой к параметру  $e^{\frac{1}{\alpha}}$ , то есть выполняется ли  $Me^{\bar{X}} = e^{\frac{1}{\alpha}}$ .



Вычисляем  $Me^{\bar{X}} = Me^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$ . Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому  $Me^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} = \left( Me^{\frac{X_1}{n}} \right)^n$ . По определению характеристической функции  $\varphi_{X_1} = Me^{itX_1}$  получаем

$$\left( Me^{\frac{X_1}{n}} \right)^n = \left[ \varphi_{X_1} \left( \frac{1}{in} \right) \right]^n.$$

Характеристическая функция показательного распределения

$$\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1} = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

Подставляем

$$\left[ \varphi_{X_1} \left( \frac{1}{in} \right) \right]^n = \left( \frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{n}} \right)^n.$$

Прибавим и отнимем в числителе  $1/n$  и поделим числитель на знаменатель

$$\left( \frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{n}} \right)^n = \left( \frac{\alpha + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\alpha - \frac{1}{n}} \right)^n = \left[ 1 + \frac{1}{n \left( \alpha - \frac{1}{n} \right)} \right]^n = e^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Значит, оценка смещённая, но несмещённая асимптотически.

## Домашнее задание