Оглавление

Занятие 1. Выборочные характеристики

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение выборки, вариационого ряда, статистики, порядковой статистики, эмпирической функции распределения.

$x_1, \ldots, x_n$ — наблюдаемые значения — независимые одинаково распределённые случайные величины с неизвестной функцией распределения $F(x)$.

Такой набор случайных величин называется выборкой из распределения F.

Вариационный ряд — последовательность $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$, полученная в результате расположения в порядке неубывания исходной последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин $x_1, \ldots, x_n$.

Статистикой называют функцию S от выборки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такую, что $S(X) = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Вариационный ряд и его члены являются порядковыми статистиками.

Эмпирической (выборочной) функцией распределения, построенной по выборке $x_1, \ldots, x_n$ называется функция

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{x_k \leq x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Какими свойствами обладает эмпирическая функция распределения?

Есть множество полной вероятности, на котором эмпирическая функция распределения аппроксимирует функцию распределения, то есть почти наверное $F_n \rightrightarrows F$, $n \to \infty$.

Запишите выражения для выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочных моментов.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

— выборочное среднее.

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2.$$

Выборочные моменты в математической статистике — это оценка теоретических моментов распределения на основе выборки.

Выборочный момент порядка k — это случайная величина

$$a_n\left(k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Аудиторные задачи

1.4

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ с неизвестным параметром θ. Какие из приведённых ниже функций являются статистиками?

a) $\overline{X}$;

b) $5X_{(n)}$;

c) $\theta/2$;

d) X_1/θ;

e) $X_{(1)} + X_1 + X_n$.

Решение.

a) Да;

b) да;

c) нет, так как не функция от выборки;

d) функция не только от выборки (зависит от неизвестного параметра). Отсюда следует, что это не статистика;

e) да.

1.5

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Вычислите математическое ожидание и дисперсию статистики

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Выясните, имеет ли статистика $\overline{X}$ распределение Пуассона.

Решение. Все X_i одинаково распределены. Отсюда следует, что все математические ожидания одинаковы

$$M\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \lambda.$$

Для всякой выборки справедливо $M\overline{X} = MX_1$.

Из независимости X_i получаем

$$D\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i.$$

Так как X_i одинаково распределены, то все дисперсии одинаковы

$$D\overline{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{\lambda}{n}.$$

Математическое ожидание и дисперсия для распределения Пуассона совпадают. Отсюда следует, что эта случайная величина не имеет распределения Пуассона.

$\overline{X}$ не обязательно буде принимать целые значения.

1.6

Задание. Вычислите математическое ожидание статистик:

a) $S^2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2$;

b) $S_0^2 = 1/\left(n-1\right) \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

Решение.

a) Распишем каждую из величин

$$S^2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2.$$

Распишем квадрат

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i,j=1,i<j}^{n} X_i X_j\right).$$

Берём слева и справа математическое ожидание. Из того, что случайные величины в выборке одинаково распределены

$$MS^2 = MX_1^2 - \frac{1}{n^2}\left[nMX_1 + 2C_n^2\left(MX_1\right)^2\right].$$

Подставляем C_n^2 и группируем

$$MX_1^2 - \frac{1}{n^2}\left[nMX_1 + 2C_n^2\left(MX_1\right)^2\right] = \frac{n-1}{n}\cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n}\left(MX_1\right)^2.$$

Вынесем общий множитель за скобки

$$\frac{n-1}{n}\cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n}\left(MX_1\right)^2 = \frac{n-1}{n}\left[MX_1^2 - \left(MX_1\right)^2\right] = \frac{n-1}{n}\cdot SX_1.$$

Эта оценка смещена ассимптотически;

b) выразим S_0 через S. Раскроем квадрат

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2\right).$$

Имеем сумму n одинаковых слагаемых

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\left(n\overline{X^2} - 2\left(\overline{X}\right)^2 n + n\overline{X}^2\right) = \frac{n}{n-1}\left[\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2\right] = \frac{n-1}{n}\cdot S^2.$$

Отсюда следует, что

$$MS_0^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot DX_1 = DX_1.$$

1.7

Задание. Найдите в терминах функции распределения F выборки $X_1, \ldots, X_n$:

a) распределение k-ой порядковой статистики $X_{(k)}$;

b) вероятность $P\left(X_{(k)} < y,\, X_{(k+1)} \geq y\right)$.

Решение.

a) Сделали упорядочивание случайных величин

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(k)} \leq \ldots \leq X_{(n)}.$$

По определению $F_{X_{(k)}}(y) = P\left(X_{(k)} \le y\right) = P\{$хотя бы k элементов выборки не превышает $y\} =$

$$= \sum_{i=k}^{n} P(A_i),$$

где $A_i = \{$ровно i элементов выборки не превышают $y\}$.

Есть n испытаний, успех — $X_i \le y$.

Вероятность успеха — это $F(y)$, вероятность неудачи — это $[1 - F(y)]$. Это биномиальное распределение

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i F^i(y) \left[1 - F(y)\right]^{n-i};$$

b) согласно с предыдущим пунктом $P\left(X_{(k)} < y,\, X_{(k+1)} \ge y\right) = P\{$ровно i элементов выборки не превышает $y\} = C_n^k F^k(y) \left[1 - F(y)\right]^{n-k}$.

1.8

Задание. Пусть $(-0.8; 2.9; 4.5; -5.7; 1.1; -3.2)$ — наблюдаемые значения выборки. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения $F_6(x)$ и её график. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Решение. Вариационный ряд: $(-5.7; -3.2; -0.8; 1.1; 2.9; 4.3)$.

Эмпирическая функция распределения (рис. 1).

$$F_6(y) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \mathbb{1}\{x_i \le y\} = \begin{cases} 0, & x < -5.7; \\ \frac{1}{6}, & -5.7 \le x < -3.2, \\ \frac{2}{6}, & -3.2 \le x < -0.8, \\ \frac{3}{6}, & -0.8 \le x < 1.1, \\ \frac{4}{6}, & 1.1 \le x < 2.9, \\ \frac{5}{6}, & 2.9 \le x < 4.3, \\ 1, & x \ge 4.3. \end{cases}$$

Выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{6}(-5.7 - 3.2 - 0.8 + 1.1 + 2.9 + 4.3) = \frac{1}{6}(-9.7 + 8.3) = -\frac{1}{6} \cdot 1.4 = -0.23.$$

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{6} (X_i + 0.23)^2.$$

Она является несмещённой.

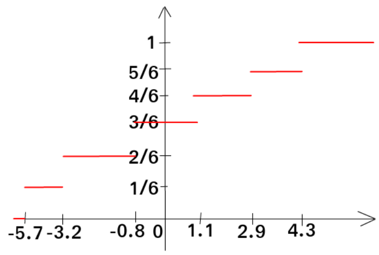

Рис. 1: Эмпирическая функция распределения

1.9

Задание. Вычислите вероятность $P\left(F_n\left(y\right) < F_n\left(z\right)\right)$.
Решение.

a) $y \geq z$. Событие невозможное, потому что $F_n\left(y\right) \geq F_n\left(z\right)$;

b) рассмотрим случай, когда $y < z$.

Тогда искомая вероятность равна $P\left(F_n\left(y\right) < F_n\left(z\right)\right) = P$ {в (y, z) попал хотя бы 1 элемент выборки} $= 1 - P${в (y, z) ни один элемент выборки не попал}. Случайные величины одинаково распределены, поэтому $1 - P${в (y, z) ни один элемент выборки не попал} $=$
$= \left[1 - P\left\{x_i \notin (y, z)\right\}\right]^n = 1 - \left[1 - P\left\{x_1 \in (y, z)\right\}\right]^n =$
$= 1 - \left[1 - P\left(x_1 < z\right) + P\left(x_1 < y\right)\right]^n = 1 - \left[1 - F\left(z\right) + F\left(y\right)\right]^n.$

1.10

Задание. Пусть $X1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения F с плотностью f. Найдите совместную плотность распределения всех порядковых статистик, то есть плотность распределения случайного вектора $\left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right)$.

Решение. $F_{\left(X_{(1)}, X_{(2)}\right)}\left(y_1, y_2\right) = P\left(X_{(1)} \leq y_1,\, X_{(2)} \leq y_2\right)$. Воспользуемся формулой $P\left(A \cap B\right) = P\left(B\right) - P\left(\overline{A} \cap B\right)$. Получим

$$P\left(X_{(1)} \leq y_1,\, X_{(2)} \leq y_2\right) = P\left(X_{(1)} \leq y_2\right) - P\left(X_{(1)} > y_1,\, X_{(2)} \leq y_2\right).$$

Среди $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$ случайная величина $X_{(2)}$ является максимальной.

$$P\left(X_{(1)} \leq y_2\right) - P\left(X_{(1)} > y_1,\, X_{(2)} \leq y_2\right) =$$
$$= P\left(X_1 \leq y_2,\, X_2 \leq y_2\right) - P\left(X_1 \in \left(y_1, y_2\right],\, X_2 \in \left(y_1, y_2\right]\right).$$

Случайные величины X_1, X_2 — независимые и одинаково распределённые

$$P\left(X_1 \leq y_2,\, X_2 \leq y_2\right) - P\left(X_1 \in \left(y_1, y_2\right],\, X_2 \in \left(y_1, y_2\right]\right) =$$
$$= \begin{cases} \left[F\left(y_2\right)\right]^2, & y_1 \geq y_2, \\ \left[F\left(y_2\right)\right]^2 - \left[F\left(y_2\right) - F\left(y_1\right)\right]^2, & y_1 < y_2. \end{cases}$$

Продифференцируем

$$f_{\left(X_{(1)},X_{(2)}\right)}\left(y_1,y_2\right)=\begin{cases}0, & y_1\geq y_2,\\ 2f\left(y_1\right)f\left(y_2\right), & y_1<y_2.\end{cases}$$

Рассматриваем множество всех векторов, которые имеют упорядоченные координаты $\Delta=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\ :\ z_1<z_2<\ldots<z_n\}$, $\Gamma\subseteq\Delta$ — произвольное подмножество.

$\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)\in\Delta$.

Чтобы найти вероятность того, что данный вектор принадлежит Γ, должны проинтегрировать плотность этого вектора по этому множеству

$$P\left\{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)\in\Gamma\right\}=\int\limits_{\Gamma}f_{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)}\left(z_1,\ldots,z_n\right)dz_1\ldots dz_n.$$

С другой стороны,

$$P\left\{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)\in\Gamma\right\}=\sum_{\sigma\in S_n}P\left\{\left(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)}\right)\in\Gamma\right\}.$$

Учтём все перестановки

$$\sum_{\sigma\in S_n}P\left\{\left(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)}\right)\in\Gamma\right\}=n!P\left\{\left(X_1,\ldots,X_n\right)\in\Gamma\right\}.$$

Подставим найденное выражение для вероятности

$$n!P\left\{\left(X_1,\ldots,X_n\right)\in\Gamma\right\}n!\cdot\int\limits_{\Gamma}f\left(z_1\right)\cdot\ldots\cdot f\left(z_n\right)dz_1\ldots dz_n.$$

Сравниваем полученные выражения

$$f_{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)}\left(z_1,\ldots,z_n\right)=n!f\left(z_1\right)\cdot\ldots\cdot f\left(z_n\right)\cdot\mathbb{1}\left\{z_1<z_2<\ldots<z_n\right\}$$

— плотность вектора упорядоченных статистик.

1.11

Задание. Пусть задана выборка $X_1,\ldots,X_n$ из показательного распределения с параметром α.

a) Докажите, что случайные величины $X_{(1)},X_{(2)}-X_{(1)},\ldots,X_{(n)}-X_{(n-1)}$ являются независимыми;

b) найдите распределение разности $X_{(k+1)}-X_{(k)}$ соседних порядковых статистик.

Решение. $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор с плотностью распределения $f_{\vec{\xi}}(\vec{x})$.

Линейное преобразование этого вектора $\vec{\eta} = A\vec{\xi}$, где A — некоторая n-мерная матрица.

$$f_{A\vec{\xi}}(\vec{y}) = \frac{1}{|detA|} \cdot f_{\vec{\xi}}\left(A^{-1}\vec{y}\right).$$

Составим вектор из величин $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$. Его плотность должна распасться на произведение плотностей компонент.

Из задачи 1.10

$$f_{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)}(y_1, \ldots, y_n) = n! f(y_1) \cdot \ldots \cdot f(y_n) \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \ldots < y_n\}.$$

Подставим плотность показательного распределения

$$n! f(y_1) \cdot \ldots \cdot f(y_n) \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \ldots < y_n\} =$$
$$= n! \alpha e^{-\alpha y_1} \cdot \mathbb{1}\{y_1 > 0\} \cdot \ldots \cdot \alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\} \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \ldots < y_n\}.$$

Перемножим

$$n! \alpha e^{-\alpha y_1} \cdot \mathbb{1}\{y_1 > 0\} \cdot \ldots \cdot \alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\} \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \ldots < y_n\} =$$
$$= n! \alpha^n e^{-\alpha(y_1 + \ldots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n\}.$$

Нужно найти линейное преобразование

$$\begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} - X_{(1)} \\ X_{(3)} - X_{(2)} \\ \ldots \\ X_{(n)} - X_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 9 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1))} \\ X_{(2)} \\ X_{(3)} \\ \ldots \\ X_{(n)} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Определитель $detA = 1$.

Ищем обратную матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} - X_{(1)} \\ X_{(3)} - X_{(2)} \\ \ldots \\ X_{(n)} - X_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{(1))} \\ X_{(2)} \\ X_{(3)} \\ \ldots \\ X_{(n)} \end{bmatrix}.$$

Тогда имеем выражение

$$A^{-1}\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}.$$

Определим искомый вектор через

$$\vec{\eta} = \left(X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}\right).$$

Тогда

$$f_{\vec{\eta}}(y_1, \dots, y_n) = \\ = n!\alpha^n e^{-\alpha(ny_1 + (n-1)y_2 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_1 + y_2 < \dots < y_1 + y_2 + \dots + y_n\}.$$

Разобъём на n множителей

$$n!\alpha^n e^{-\alpha(ny_1 + (n-1)y_2 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_1 + y_2 < \dots < y_1 + y_2 + \dots + y_n\} = \\ = \left[n\alpha e^{-\alpha n y_1} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1\}\right] \cdot \left[(n-1)\,\alpha e^{-\alpha(n-1)y_2} \cdot \mathbb{1}\{y_2 > 0\}\right] \cdot \ldots \times \\ \times \left[\alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\}\right].$$

Имеем произведение плотностей компонент, значит, элементы вектора независимы и показательно распределены с параметром $\alpha(n-k)$, то есть $X_{(k+1)} - X_{(k)} \sim \Pi(\alpha(n-k))$. Считаем, что $X_{(0)} = 0$.

Домашнее задание

1.15

Задание. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из равномерного на отрезке $[a, b]$ распределения. Вычислите математическое ожидание и дисперсию статистики

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Выясните, имеет ли статистика $\overline{X}$ равномерное распределение; нормальное распределение.

Решение. Все X_i одинаково распределены. Отсюда следует, что все математические ожидания одинаковы

$$M\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Из независимости X_i получаем

$$D\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i.$$

Так как X_i одинаково распределены, то все дисперсии одинаковы

$$D\overline{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{(b-a)^2}{12n}.$$

Чтобы выяснить, распределена ли статистика $\overline{X}$ по нормальному или равномерному распределению, найдём её характеристическую функцию $\varphi_{\overline{X}}(t)$. Учитывая независимость элементов выборки и то, что

$$\varphi_{X_1}(t) = \ldots = \varphi_{X_n}(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)},$$

находим

$$\varphi_{\overline{X}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[\frac{\left(e^{itb} - e^{ita}\right)n}{it(b-a)}\right]^n.$$

Отсюда следует, что $\overline{X}$ не имеет указанных распределений.

1.16

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из некоторого распределения вероятностей, функция распределения которого F является непрерывной и строго возрастающей. Найдите распределение выборки $Y_1, \ldots, Y_n$, где

$$Y_i = F(X_i).$$

Решение. По определению

$$F_{\eta_1,\ldots,\eta_n}(X_1, \ldots, X_n) = P(\eta_1 \leq X_1, \ldots, \eta_n \leq X_n).$$

Воспользуемся независимостью

$$P(\eta_1 \leq X_1, \ldots, \eta_n \leq X_n) = P(\eta_1 \leq X_1) \cdot \ldots \cdot P(\eta_n \leq X_n).$$

Функция распределения i-й компоненты вектора равна

$$F_{\eta_i}(x) = P(F_{\xi_i}(X_i) \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим $[0,1]$.

Поскольку F — непрерывная и строго возрастающая, то существует $F^{-1}(x)$. Обозначим через z точку $F^{-1}(x)$ такую, что $F(z) = x$. Событие $\{\eta = F(\xi) < x\}$ происходит тогда и только тогда, когда происходит событие $\{\xi < z\}$.

Получаем на отрезке $[0,1]$ равномерное распределение

$$F_\eta(x) = F_\xi(z) = F_\xi\left(F_\xi^{-1}(x)\right) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x \in (0,1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

1.17

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из дискретного распределения с вероятностями $P(X_1 = m) = p_m$, где

$$\sum_{m=0}^{N} p_m = 1.$$

Найдите распределение k-й порядковой статистики $X_{(k)}$.

Решение. Сделали упорядочивание случайных величин

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(k)} \leq \ldots \leq X_{(n)}.$$

По определению $F_{X_{(k)}}(y) = P\left(X_{(k)} \leq y\right) = P\{$хотя бы k элементов выборки не превышает $y\} =$

$$= \sum_{i=k}^{n} P(A_i),$$

где $A_i = \{$ровно i элементов выборки не превышают $y\}$.

Есть n испытаний, успех — $X_i \leq y$.

Вероятность успеха — это $F(y)$, вероятность неудачи — это $[1 - F(y)]$. Это биномиальное распределение

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i F^i(y) \left[1 - F(y)\right]^{n-i}.$$

Представим $F_{X_i}(y) = F(y)$ через m. Запишем по определению

$$F_{X_1}(y) = P(X_1 \leq y) = \sum_{m=1}^{n} P(X_1 = m) = \sum_{m=1}^{n} p_m.$$

Подставим полученное выражение в функцию распределения

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i \sum_{m=1}^{n} p_m \left(1 - \sum_{m=1}^{n}\right)^{n-i}.$$

1.18

Задание. Пусть $(3, 0, 4, 3, 6, 0, 3, 1)$ — наблюдаемые значения выборки. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения $F_8(x)$ и её график. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Решение. Вариационный ряд: $(0, 0, 1, 3, 3, 3, 4, 6)$.

Эмпирическая функция распределение (рис. 2)

$$F_8(y) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \mathbb{1}\{x_i \le y\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{3}{8}, & 1 \le x < 3, \\ \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, & 3 \le x < 4, \\ \frac{7}{8}, & 4 \le x < 6, \\ 1, & x \ge 6. \end{cases}$$

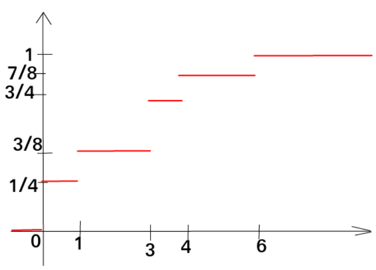

Рис. 2: Эмпирическая функция распределения

Выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{8}(0+0+1+3+3+4+6) = \frac{1}{8}\cdot 20 = \frac{10}{4} = 2.5.$$

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(X_i - 2.5)^2 =$$

$$= \frac{1}{7}\left[2(0-2.5)^2 + (1-2.5)^2 + 3(3-2.5)^2 + (4-2.5)^2 + (6-2.5)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{7}(12.5 + 2.25 + 0.75 + 2.25 + 12.25) = \frac{30}{7} \approx 4.29.$$

1.19

Задание. По выборке объёма n из распределения Бернулли с параметром p постройте эмпирическую функцию распределения $F_n(y)$.

Решение. Случайная величина имеет распределение Бернулли, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями p и $(1-p)$ соответственно. Таким образом: $P(x=1) = p$, $P(x=0) = 1-p$.

Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке

$$x_1, \ldots, x_n,$$

называется функция

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(x_k \leq y).$$

Пускай есть набор из n чисел (нулей и единиц) — выборка из распределения Бернулли.

Для удобства выстроим числа в порядке их возрастания:

$$0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1.$$

Видим, что слева от нуля эмпирическая функция распределения будет равна нулю.

В точке 0 произойдёт скачок на

$$\frac{n-k}{n},$$

где k — количество единиц, а $(n-k)$ — количество нулей в выборке.

В точке 1 будет скачок на

$$1 - \frac{n-k}{n} = \frac{n-n+k}{n} = \frac{k}{n},$$

а значение самой функции будет равно единице.

$$F_n(y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{n-k}{n}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Эмпирическая функция распределения будет выглядеть так, как показано на рис. 3.

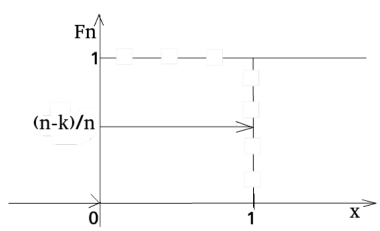

Рис. 3: Эмпирическая функция распределения

1.20

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения F. Докажите, что для произвольных $y \in \mathbb{R}$ и $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ справедливо равенство

$$P\left(F_n(y) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F^k(y) (1 - F(y))^{n-k}.$$

Решение. Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке $X_1, \ldots, X_n$, называется функция

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i \le y).$$

Посмотрим, что значит событие в указанной вероятности

$$F_n(y) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i \le y).$$

Сократим константы в знаменателях

$$k = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i \le y).$$

Это означает, что есть ровно k элементов выборки, не превышающих y. Следовательно, это биномиальное распределение с параметром $F(y)$, то есть

$$P\left(F_n(y) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F^k(y)(1 - F(y))^{n-k}.$$

1.21

Задание. Для выборки $X_1, \ldots, X_n$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ найдите плотность, математическое ожидание и дисперсию:

a) максимального члена вариационного ряда $X_{(n)}$;

b) минимального члена вариационного ряда $X_{(1)}$;

c) совместную плотность распределения и ковариацию $X_{(n)}$ и $X_{(1)}$.

Решение.

a) Найдём функцию распределения n-й порядковой статистики $F_{X_{(n)}}(y) =$

$= P\left(X_{(n)} \le y\right) = P$ (n элементов выборки не превышают y)=

$= C_n^n \left[F_{X_1}(y)\right]^n \cdot \left[1 - F_{X_1}(y)\right]^{n-n} = \left[F_{X_1}(y)\right]^n = \left[P(X_1 \le y)\right]^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n,$

при этом $y \in [0, \theta]$.

Продифференцируем

$$f_{X_{(n)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(n)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\theta}\right)^n = \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{dy^n}{dy} = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\{y \in [0, \theta]\}.$$

По определению математического ожидания

$$MX_{(n)} = \int_0^\theta y dF^n(y) = \int_0^\theta yd\left(\frac{y}{\theta}\right)^n = \frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta y dy^n = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta yy^{n-1}dy.$$

Сложим степени сомножителей

$$\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta yy^{n-1}dy = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n dy = \frac{n}{\theta^n}\cdot\left.\frac{y^{n+1}}{n+1}\right|_0^\theta = \frac{\theta^{n+1}n}{\theta^n(n+1)} = \frac{\theta n}{n+1}.$$

Найдём второй момент

$$MX_{(n)}^2 = \int_0^\theta y^2 dF^n(y) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^2 y^{n-1}dy = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^{n+1}dy.$$

Возьмём интеграл

$$\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^{n+1}dy = \left.\frac{ny^{n+2}}{\theta^n(n+2)}\right|_0^\theta = \frac{n\theta^{n+2}}{\theta^n(n+2)} = \frac{n\theta^2}{n+2}.$$

По свойствам дисперсии

$$DX_{(n)} = MX_{(n)}^2 - \left(MX_{(n)}\right)^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}.$$

Приведём к общему знаменателю

$$\frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\theta^2\left(n^2+2n+1\right) - n^2\theta^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} =$$
$$= \frac{n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2 + n\theta^2 - n^3\theta^2 - 2n^2\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2};$$

b) найдём функцию распределения первой порядковой статистики

$$F_{X_{(1)}}(y) = P\left(X_{(1)} \le y\right) = P\left(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le y\right) =$$

$= P($хотя бы 1 элемент выборки не превышает $y)=$

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(exactly\, k\, elements\, of\, the\, sample\, does\, not\, exceed\, y\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k F^k(y)\left[1-F(y)\right]^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k(y)\left[1-F(y)\right]^{n-k} - C_n^0 F^0(y)\left[1-F(y)\right]^{n-0}.$$

Применяем формулу для бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k(y)\left[1-F(y)\right]^{n-k} - C_n^0 F^0(y)\left[1-F(y)\right]^{n-0} =$$
$$= \left[F(y)+1-F(y)\right]^n - \left[1-F(y)\right]^n = 1-\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Продифференцируем

$$f_{X_{(1)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(1)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{(\theta-y)^n}{\theta^n}\right) = -\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\theta-y)^n.$$

Берём производную сложной функции

$$-\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\theta-y)^n - \frac{1}{\theta^n}\cdot n(\theta-y)^{n-1}(-1) = \frac{n(\theta-y)^{n-1}}{\theta^n},\ y\in[0,\theta].$$

Найдём математическое ожидание по определению

$$MX_{(1)} = \int\limits_0^\theta y dF^n(y) = \int\limits_0^\theta y d\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Сделаем замену

$$1-\frac{y}{\theta}=z,$$

откуда $y=\theta(1-z)$, при этом интегрирование происходит в пределах от одного до нуля

$$\int\limits_0^\theta y d\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^n = \int\limits_1^0 \theta(1-z)\,dz^n = \theta n\int\limits_1^0 (z-1)\,z^{n-1}dz.$$

Разбиваем на 2 интеграла

$$\theta n\int\limits_1^0 (z-1)\,z^{n-1}dz = -\theta n\int\limits_0^1 z^n dz + \theta n\int\limits_0^1 z^{n-1}dz = -\theta n\cdot\left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 + \theta n\cdot\left.\frac{z^n}{n}\right|_0^1.$$

Подставляем пределы интегрирования

$$-\theta n\cdot\left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 + \theta n\cdot\left.\frac{z^n}{n}\right|_0^1 = -\theta n\cdot\frac{1}{n+1} + \theta n\cdot\frac{1}{n} = -\theta n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right).$$

Приводим к общему знаменателю

$$-\theta n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) = -\theta n\cdot\frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{\theta n}{n(n+1)} = \frac{\theta}{(n+1)}.$$

Найдём второй момент

$$MX_{(1)}^2 = \int\limits_0^\theta y^2 d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Применяем такую же замену, как при поиске первого момента

$$\int\limits_0^\theta y^2 d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n = \int_1^0 \theta^2 \left(1 - z\right)^2 dz^n = \int_0^1 \theta^2 n \left(1 - z\right)^2 z^{n-1} dz.$$

Выносим константу за знак интеграла и возводим скобку в квадрат

$$\int_0^1 \theta^2 n \left(1 - z\right)^2 z^{n-1} dz = \theta^2 n \int\limits_0^1 \left(1 - 2z + z^2\right) z^{n-1} dz =$$

$$= \theta^2 n \int\limits_0^1 z^{n-1} dz - 2\theta^2 n \int\limits_0^1 z^n dz + \theta^2 n \int\limits_0^1 z^{n+1} dz =$$

$$= \theta^2 n \cdot \left.\frac{z^n}{n}\right|_0^1 - 2\theta^2 n \cdot \left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 + \theta^2 n \cdot \left.\frac{z^{n+2}}{n+2}\right|_0^1 = \theta^2 - \frac{2\theta^2 n}{n+1} + \frac{\theta^2 n}{n+2} =$$

$$= \theta^2 \left(1 - \frac{2n}{n+1} + \frac{n}{n+2}\right) =$$

$$= \theta^2 \cdot \frac{(n+1)(n+2) - 2n(n+2) + n(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{\theta^2 \left(n^2 + 3n + 2 - 2n^2 - 4n + n^2 + n\right)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

По свойствам дисперсии

$$DX_{(1)} = MX_{(1)}^2 - \left[MX_{(1)}\right]^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{2\theta^2(n+1) - \theta^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} =$$

$$= \frac{2\theta^2 n + 2\theta^2 - \theta^2 n - 2\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)};$$

c) найдём функцию распределения вектора по определению

$$F_{\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)}\left(y_1, y_n\right) = P\left(X_{(1)} \le y_1, X_{(n)} \le y_n\right).$$

Воспользовавшись формулой $P\left(A\cap B\right)=P\left(B\right)-P\left(\overline{A}\cap B\right)$, получим

$$P\left(X_{(1)}\le y_1, X_{(n)}\le y_n\right)=P\left(X_{(n)}\le y_n\right)-P\left(X_{(1)}>y_1,\, X_{(n)}\le y_n\right).$$

Если максимум меньше какого-то значения, то все элементы меньше него

$$\begin{aligned}
P\left(X_{(1)}>y_1,\, X_{(n)}\le y_n\right)&=\\
=P\left(X_1\le y_n,\ldots,X_n\le y_n\right)&-\\
=P\left(X_1\in\left(y_1,y_n\right],\, X_2\in\left(y_1,y_n\right],\ldots,X_n\in\left(y_1,y_n\right]\right)&=\\
=\left[F\left(y_n\right)\right]^n-\left[F\left(y_n\right)-F\left(y_1\right)\right]^n&
\end{aligned}$$

при $y_1<y_n$.

Продифференцируем

$$f_{\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)}\left(y_1,y_n\right)=\begin{cases}0, \qquad y_1\ge y_n,\\ n\left(n-1\right)\cdot\left[F\left(y_n\right)-F\left(y_1\right)\right]^{n-2}\times\\ \times p_{X_1}\left(y_1\right)p_{X_n}\left(y_n\right)=\\ =n\left(n-1\right)\cdot\left[\frac{y_n}{\theta}-\frac{y_1}{\theta}\right]^{n-2}\cdot\frac{1}{\theta^2}=\\ =n\left(n-1\right)\cdot\frac{\left(y_n-y_1\right)^n}{\theta^{n-2}}\cdot\frac{1}{\theta^2}=\frac{n(n-1)(y_n-y_1)^{n-1}}{\theta^n}.\end{cases}$$

Найдём математическое ожидание вектора

$$M\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^\theta\int\limits_{y_n}^\theta y_1y_n\left(y_n-y_1\right)^{n-2}dy_1dy_n.$$

Заменим разность величин величиной x. Якобиан преобразования равен

$$\frac{\partial\left(x,y_n\right)}{\partial\left(x,y_1\right)}=\left|\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial y_1} & \frac{\partial y_n}{\partial y_1}\\ \frac{\partial x}{\partial y_n} & \frac{\partial y_1}{\partial y_1}\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right|=1.$$

Получаем

$$\frac{n\left(n-1\right)}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}\int\limits_{y_n}^{\theta}y_1y_n\left(y_n-y_1\right)^{n-2}dy_1dy_n=$$

$$=\frac{n\left(n-1\right)}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}\int\limits_{0}^{\theta-y_n}\left(x+y_n\right)y_nx^{n-2}dxdy_n=$$

$$=\frac{n\left(n-1\right)}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}y_ndy_n\cdot\int\limits_{0}^{\theta-y_n}\left(x^{n-1}+y_nx^{n-2}\right)dx=$$

$$=\frac{n\left(n-1\right)}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}y_ndy_n\cdot\left(\frac{x^n}{n}+y_n\cdot\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)\Bigg|_{0}^{\theta-y_n}=$$

$$=\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}\left[\left(n-1\right)\left(\theta-y_n\right)+y_nn\left(\theta-y_n\right)^{n-1}\right]\cdot y_ndy_n=$$

$$=\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}\left(\theta-y_n\right)^{n-1}\cdot\left[\left(n-1\right)\left(\theta-y_n\right)+y_nn\right]\cdot y_ndy_n=$$

$$=\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}\left(\theta-y_n\right)^{n-1}\left[n\theta-\left(\theta-y_n\right)\right]y_ndy_n.$$

Заменяем первую скобку в интеграле на t. Получаем

$$\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}\left(\theta-y_n\right)^{n-1}\left[n\theta-\left(\theta-y_n\right)\right]y_ndy_n=\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}t^{n-1}\left(n\theta-t\right)\left(\theta-t\right)dt.$$

Перемножаем скобки

$$\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}t^{n-1}\left(n\theta-t\right)\left(\theta-t\right)dt=\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}t^{n-1}\left(n\theta^2-\left(n+1\right)\theta t+t^2\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{\theta}\left(n\theta^2t^{n-1}-\left(n+1\right)\theta t^n+t^{n+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\left[\theta^2t^n-\theta t^{n+1}+\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]\Bigg|_{0}^{\theta}=\frac{1}{\theta^{n}}\cdot\left[\theta^{n+2}-\theta^{n+2}+\frac{\theta^{n+2}}{n+2}\right]=\frac{\theta^2}{n+2}.$$

По определению ковариации

$$cov\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)=M\left(X_{(1)}X_{(n)}\right)-MX_{(1)}MX_{(n)}=\frac{\theta^2}{n+2}-\frac{\theta}{n+1}\cdot\frac{\theta n}{n+1}.$$

Выносим общий множитель за скобки

$$\frac{\theta^2}{n+2} - \frac{\theta}{n+1} \cdot \frac{\theta n}{n+1} = \theta^2 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right).$$

Приводим к общему знаменателю дроби в скобках

$$\theta^2 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \theta^2 \cdot \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

1.22

Задание. Пусть задана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Докажите, что

$$MX_{(k)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{n-k+1} + \ldots + \frac{1}{n} \right),$$

не находя распределения порядковой статистики $X_{(k)}$.

Решение. Преобразуем левую часть того, что нужно доказать

$$MX_{(k)} = MX_{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} M\left(X_{(i+1)} - X_{(i)}\right).$$

Элементы выборки имеют плотность распределения

$$p(y) = \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Интегрируя плотность, получим функцию распределения

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} p(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{y} \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\}\,dx = \int\limits_{0}^{y} \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x}\Big|_0^y.$$

Подставляем пределы интегрирования

$$-e^{-\alpha x}\Big|_0^y = 1 - e^{-\alpha y},\ y \geq 0.$$

Находим функцию распределения минимальной порядковой статистики

$$F_{X_{(1)}}(y) = P\left(X_{(1)} \leq y\right) = 1 - P\left(X_{(1)} > y\right).$$

Если минимальный элемент выборки больше какого-то значения, то все элементы выборки больше него

$$1 - P\left(X_{(1)} > y\right) = 1 - P\left(X_1 > y, X_2 > y, \ldots, X_n > y\right).$$

Из независимости случайных величин следует, что

$$1 - P\left(X_1 > y, X_2 > y, \ldots, X_n > y\right) = 1 - P\left(X_1 > y\right) \cdot P\left(X_2 > y\right) \cdot \ldots \cdot P\left(X_n > y\right).$$

Переходим к противоположным событиям и учитываем то, что случайные величины одинаково распределены

$$1 - P(X_1 > y) \cdot P(X_2 > y) \cdot \ldots \cdot P(X_n > y) = 1 - [1 - F(y)]^n.$$

Находим плотность минимальной порядковой статистики

$$f_{X_{(1)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(1)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial \{1 - [1 - F(y)]^n\}}{\partial y} = -n[1 - F(y)]^{n-1} \cdot (-1) f(y).$$

Упрощаем и учитываем, что $f(y)$ — это плотность распределения элементов выборки

$$-n[1 - F(y)]^{n-1} \cdot (-1) f(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} p(y).$$

Подставляем функцию и плотность распределения

$$n[1 - F(y)]^{n-1} p(y) = n\left[1 - \left(1 - e^{-\alpha y}\right)\right]^n \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Упрощаем выражение в скобках

$$n\left[1 - \left(1 - e^{-\alpha y}\right)\right]^n \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\} = n\alpha e^{-\alpha(n-1)y} e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Суммируем показатели экспонент

$$n\alpha e^{-\alpha(n-1)y} e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\} = n\alpha e^{-\alpha n y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Отсюда следует, что $X_{(1)} \sim Exp(n\alpha)$.

Из задачи 1.11 б) $X_{(i+1)} - X_{(i)} \sim Exp(\alpha(n-i))$.

Тогда такая разность имеет математическое ожидание

$$M\left(X_{(i+1)} - X_{(i)}\right) = \frac{1}{\alpha(n-i)}.$$

Подставялем в полученное в начале выражение

$$MX_{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} M\left(X_{(i+1)} - X_{(i)}\right) = \frac{1}{n\alpha} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha(n-i)}.$$

Записываем сумму в явном виде

$$\frac{1}{n\alpha} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha(n-i)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{n-k+1}\right).$$

1.23

Задание. Для выборки $X_1, \ldots, X_n$ из равномерного распрделения на отрзке $[0, \theta]$ найдите:

а) ковариацию $X_{(n)}$ и $X_{(1)}$;

b) совместную плотность распределения $X_{(k)}$ и $X_{(j)}$, $1 \le k \le j \le n$.

Решение.

a) Данный пункт решён в задаче 1.21 c);

b) по определению функции распределения

$$F_{\left(X_{(k)},X_{(j)}\right)}(y,z) = P\left(X_{(k)} \le y, X_{(j)} \le z\right).$$

Воспользовавшись формулой $P(A \cap B) = P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right)$, получим $P\left(X_{(k)} \le y, X_{(j)} \le z\right) = P\left(X_{(j)} \le z\right) - P\left(X_{(k)} > y, X_{(j)} \le z\right)$. Аналогично задаче 1.10 разбиваем на 2 решения согласно коэффициентам

$$P\left(X_{(j)} \le z\right) - P\left(X_{(k)} > y, X_{(j)} \le z\right) =$$

$$= \begin{cases} P\left(X_{(j)} \le z\right), & y \ge z, \\ P\left(X_{(j)} \le z\right) - P\left(X_{(k)} > y, X_{(j)} \le z\right), & y < z. \end{cases}$$

Найдём первую вероятность $P\left(X_{(j)} \le z\right) = P($хотя бы j элементов выборки не превышает $z) =$

$$= \sum_{i=j}^{n} C_n^i F^i(z)\left[1 - F(z)\right]^{n-i} = \sum_{i=j}^{n} C_n^i \left(\frac{z}{\theta}\right)^i \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^{n-i}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\sum_{i=j}^{n} C_n^i \left(\frac{z}{\theta}\right)^i \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^{n-i} = \sum_{i=j}^{n} C_n^i \frac{z^i}{\theta^i} \cdot \frac{(\theta - z)^{n-i}}{\theta^{n-i}} = \sum_{i=j}^{n} C_n^i \frac{z^i (\theta - z)^{n-i}}{\theta^n}.$$

Найдём вторую вероятность $P\left(X_{(j)} \le z, X_{(k)} > y\right) = P($ хотя бы

$$(j - k + 1)$$

элементов выборки находится в интервале $(y, z]) =$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} C_n^i \left[F(z) - F(y)\right]^i \cdot \left\{1 - \left[F(z) - F(y)\right]\right\}^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} C_n^i \cdot \left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)^i \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)\right]^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} C_n^k \cdot \frac{(z - y)^i}{\theta^i} \cdot \left(1 - \frac{z - y}{\theta}\right)^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} C_n^i \cdot \frac{(z - y)^i}{\theta^i} \cdot \frac{(\theta - z + y)^{n-i}}{\theta^{n-i}} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} \frac{C_n^i}{\theta^n} (z - y)^i (\theta - z + y)^{n-i}.$$

Продифференцируем. В первом случае будет 0. Найдём производную второй вероятности

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\{ \sum_{i=j-k+1}^{n} \frac{C_n^i}{\theta^n} \times$$

$$\times \left[i\,(z-y)^{i-1}\,(\theta - z + y)^{n-i} - (z-y)\,(n-i)\,(\theta - z + y)^{n-i-1} \right] \} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} \frac{C_n^i}{\theta^n} \times$$

$$\times [-i\,(i-1)\,(z-y)^{i-2}\,(\theta - z + y)^{n-i} +$$

$$+2i\,(z-y)^{i-1}\,(n-i)\cdot(\theta - z + y)^{n-i-1} -$$

$$-\,(z-y)^{i}\,(n-i)\,(n-i-1)\cdot(\theta - z + y)^{n-i-2}] =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} \frac{C_n^i\,(z-y)^{i-2}\cdot(\theta - z + y)^{n-i-2}}{\theta^n} \times$$

$$\times [2i\,(z-y)\,(n-i)\,(\theta - z + y) - i\,(i-1)\,(\theta - z + y) -$$

$$-\,(n-i)\,(n-i-1)\,(z-y)^2].$$

Тогда во втором случае плотность равна полученному выражению.

Занятие 2. Свойства оценок

Контрольные вопросы и задания

Что называют оценкой неизвестного параметра?

Статистику, значение которой заменяет неизвестный параметр, называют оценкой этого параметра.

Приведите определение оценки: несмещённой, ассимптотически несмещённой, состоятельной, сильно состоятельной, оптимальной.

Оценка $\hat{\theta}$ несмещённая, если $\forall\theta \in \Theta : M_\theta\hat{\theta} = \theta$.

Асимптотически несмещенная оценка — такая оценка, математическое ожидание которой совпадает с оцениваемым параметром при $n \to \infty$.

Оценка $\hat{\theta}$ называется состоятельной, если стремится к истинному значению θ по вероятности $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

Оценка $\hat{\theta}$ называется сильно состоятельной, если стремится к истинному значению θ почти наверное $\hat{\theta} \xrightarrow{a.s.} \theta$, $n \to \infty$.

Несмещённая оценка $\hat{\theta} \in K$ называется оптимальной в классе квадратично интегрируемых оценок K, если для всякой другой несмещённой оценки $\tilde{\theta} \in \Theta \forall\theta \in \Theta : D_\theta\hat{\theta} \le D_\theta\tilde{\theta}$ или же $\forall\theta \in \Theta$, $M_\theta\left(\hat{\theta} - \theta\right)^{\le} M_\theta\left(\tilde{\theta} - \theta\right)^2$.

Что называется среднеквадратическим отклонением оценки?

$M_\theta\left(\hat{\theta} - \theta\right)$ — среднеквадратическое оклонение.

Сформулируйте утверждение про поведение выборочных моментов.

ыборочный начальный момент M_k k-го порядка стремится к начальному моменту ν_k случайной величины X, то есть

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|M_k - \nu_k| \ge \varepsilon\right) = 0,$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, если моменты ν_{2k} и ν_k случайной величины X существуют и конечны.

Какая оценка является несмещённой и состоятельной для математического ожидания распределения выборки?

В качестве оценки для математического ожидания естественно предложить среднееарифметическое наблюденных значений

$$\tilde{m} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Какая статистика является несмещённой оценкой для дисперсии распределения выборки?

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$

— несмещённая оценка для $\sigma^2 = Dx_1$.

Аудиторные задачи

2.4

Задание. Для выборки равномерного распределения на отрезке $[\theta, 1]$ проверьте состоятельность и несмещённость оценки $X_{(1)}$ параметра θ.

Решение. θ — минимальное наблюдение. Проверяем, выполняется ли $X_{(1)} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

По определению сходимости по вероятности

$$\forall \varepsilon > 0 \, P\left(\left|X_{(1)} - \theta\right| > \varepsilon\right) \to 0, \, n \to \infty.$$

Раскроем модуль

$$P\left\{X_{(1)} > \varepsilon + \theta\right\} = P\left(X_1 > \varepsilon + \theta, \ldots, X_n > \varepsilon + \theta\right) = \left[P\left(X_1 > \varepsilon + \theta\right)\right]^n.$$

Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$\left[P\left(X_1 > \varepsilon + \theta\right)\right]^n = \left(\frac{1-\theta-\varepsilon}{1-\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{1-\theta}\right)^n \to 0, \, n \to \infty.$$

Число в скобках строго меньше единицы, так как $0 \le \theta \le 1$.

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

Проверяем несмещённость оценки. Проверяем, выполняется ли

$$MX_{(1)} = \theta.$$

Нужно найти плотность

$$MX_{(1)} = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X_{(1)}}(y) \, y dy.$$

Начинаем с функции распределения $F_{X_{(1)}}(y) = P\left(X_{(1)} \le y\right)$. Переходим к противоположному событию

$$P\left(X_{(1)} \le y\right) = 1 - P\left(X_{(1)} > y\right) = 1 - \left[P\left(X_1 > y\right)\right]^n.$$

Переходим к противоположному событию $1 - \left[P\left(X_1 > y\right)\right]^n = 1 - \left[1 - F(y)\right]^n$.

Продифференцируем

$$\frac{dF_{X_{(1)}}(y)}{dy} = n\left[1 - F(y)\right]^{n-1} f(y).$$

На отрезке $[\theta, 1]$ имеет равномерное распределение

$$n\left[1 - F(y)\right]^{n-1} f(y) = n\left[1 - \frac{y-\theta}{1-\theta}\right]^{n-1} \cdot \mathbb{1}\left\{y \in [\theta, 1]\right\} \cdot \frac{1}{1-\theta}.$$

Приведём к общему знаменателю

$$n\left[1 - \frac{y-\theta}{1-\theta}\right]^{n-1} \cdot \mathbb{1}\left\{y \in [\theta, 1]\right\} \cdot \frac{1}{1-\theta} = \frac{n}{(1-\theta)^2} \cdot (1-y)^{n-1} \cdot \mathbb{1}\left\{y \in [\theta, 1]\right\}.$$

Нашли плотность $X_{(1)}$ и теперь можем вычислить интеграл

$$MX_{(1)} = \int_\theta^1 y \cdot \frac{n}{(1-\theta)^2} \cdot (1-y)^{n-1}\, dy.$$

Замена:

$$1 - y = z,\ dy = -dz,\ y = 1 - z,\ y = 1 \Rightarrow \Longrightarrow\ z = 0,\ y = \theta\ \Longrightarrow\ z = 1 - \theta.$$

Подставляя замену, получаем

$$\int_\theta^1 y \cdot \frac{n}{(1-\theta)^2} \cdot (1-y)^{n-1}\, dy = n \cdot \frac{1}{(1-\theta)^n} \int_0^{1-\theta} (1-z)\, z^{n-1} dz.$$

Вычислим интеграл

$$n \cdot \frac{1}{(1-\theta)^n} \int_0^{1-\theta} (1-z)\, z^{n-1} dz \frac{n}{(1-\theta)^n}\left[\frac{(1-\theta)^n}{n} - \frac{(1-\theta)^{n+1}}{n+1}\right] =$$

$$= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1-\theta}{n+1}\right) = 1 - \frac{n}{n+1}(1-\theta).$$

Раскроем скобки

$$1 - \frac{n}{n+1}(1-\theta) = 1 - \frac{n}{n+1} - \theta \cdot \frac{n}{n+1} \ne \theta.$$

Отсюда следует, что оценка смещённая, но ассимптотически несмещённая, потому что

$$1 - \frac{n}{n+1} \to 0,\ n \to \infty$$

и

$$\frac{n}{n+1} \to 1,\ n \to \infty.$$

2.5

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Выясните, является ли статистика

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 :$$

a) несмещённой оценкой для λ^2;

b) состоятельной оценкой для λ^2.

Решение.

a) Нужно проверить, выполняется ли

$$M\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \lambda^2.$$

Преобразуем левую часть

$$M\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = MX_1^2 = DX_1 + (MX_1)^2 = \lambda + \lambda^2 \neq \lambda^2.$$

Значит, оценка смещённая;

b) проверяем, имеет ли место

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} \lambda^2,\ n \to \infty.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to MX_1^2 = \lambda^2 + \lambda \neq \lambda^2,$$

значит, оценка не состоятельная.

2.6

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha > 0$. Докажите, что статистика $1/\overline{X}$ является состоятельной оценкой для α.

Решение. Нужно показать, что

$$\frac{1}{\overline{X}} \xrightarrow{P} \alpha,\ n \to \infty.$$

Выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

По закону больших чисел

$$\overline{X} \xrightarrow{P} MX_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\overline{X}} \xrightarrow{P} \frac{1}{MX_1} = \alpha.$$

2.7

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения $N\left(a, \sigma^2\right)$. Докажите, что статистика

$$S_n = \frac{1}{2\,(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2$$

является несмещённой и состоятельной оценкой для σ^1.

Решение. Нужно проверить условие $MS_n = \sigma^2$.

Разность двух соседних элементов выборки имеет распределение

$$X_{i+1} - X_i \sim N\left(0, 2\sigma^2\right).$$

Найдём математическое ожидание статистики

$$MS_n = M\frac{1}{2\,(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2 = \frac{1}{2\,(n-1)}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_{i+1} - X_i\right)^2.$$

Случайные величины одинаково распределены

$$\frac{1}{2\,(n-1)}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_{i+1} - X_i\right)^2 = \frac{n}{2\,(n-1)}\cdot M\left(X_2 - X_1\right)^2.$$

В данном случае второй момент равен дисперсии

$$\frac{n}{2\,(n-1)}\cdot M\left(X_2 - X_1\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\sigma^2 = \sigma^2.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Проверим состоятельность, то есть $S_n \xrightarrow{P} \sigma^2$, $n \to \infty$.

Разобъём S_n на две суммы

$$S_n = \frac{1}{2\,(n-1)}\cdot\left[\sum_{even\,i}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2 + \sum_{odd\,i}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2\right].$$

В каждой из сумм слагаемые независимы

$$\frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[\sum_{even\, i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \sum_{odd\, i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[\frac{m}{m} \sum_{even\, i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \frac{n-1-m}{n-1-m} \sum_{odd\, i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right].$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[\frac{m}{m} \sum_{even\, i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \frac{n-1-m}{n-1-m} \sum_{odd\, i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] \xrightarrow{P}$$

$$\xrightarrow{P} \frac{1}{2} \cdot M(X_2 - X_1)^2 = \frac{1}{2} \cdot D(X_2 - X_1) = \sigma^2,\ n \to \infty.$$

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

2.8

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распредения с параметром $\alpha > 1$. Для какого параметра $\theta = \theta(\alpha)$ статистика

$$\hat{\theta_n} = e^{\overline{X}}$$

является состоятельной оценкой? Является ли $\hat{\theta_n}$ сильно состоятельной оценкой того же параметра? Является ли $\hat{\theta_n}$ несмещённой оценкой того же параметра? Ассимптотически немещённой?

Решение.

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} MX_1,\ n \to \infty.$$

Случайные величины в выборке имеют показательное распределение

$$MX_1 = \frac{1}{\alpha},$$

значит,

$$\overline{X} \xrightarrow{P} \frac{1}{\alpha},\ n \to \infty.$$

Применяем непрерывную функцию e^x. Получаем $e^{\overline{X}} \xrightarrow{P} e^{\frac{1}{\alpha}}$, $n \to \infty$.

Проверяем, является ли оценка $e^{\overline{X}}$ несмещённой к параметру $e^{\frac{1}{\alpha}}$, то есть выполняется ли $Me^{\overline{X}} = e^{\frac{1}{\alpha}}$.

Вычисляем $Me^{\overline{X}} = Me^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$. Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому $Me^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n$. По определению характеристической функции $\varphi_{X_1} = Me^{itX_1}$ получаем

$$\left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n = \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n.$$

Характеристическая функция показательного распределения

$$\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1} = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

Подставляем

$$\left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n = \left(\frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{n}}\right)^n.$$

Прибавим и отнимем в числителе $1/n$ и поделим числитель на знаменатель

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{\alpha + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\alpha - \frac{1}{n}}\right)^n = \left[1 + \frac{1}{n\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)}\right]^n = e^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Значит, оценка смещённая, но несмещённая ассимптотически.

2.9

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из геометрического распределения с параметром p. Найдите состоятельные оценки для параметров

$$p,\ p^2,\ lnp,\ p\sin(1-p),\ pe^{\frac{q^2}{2}}.$$

Решение. Всё это — непрерывные функции от p. Применение непрерывной функции не нарушает сходимости по вероятности.

Если параметр каким-то образом связан со средним, но нужно пробовать выборочные моменты.

Сформируем выборочное среднее и применим закон больших чисел

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} MX_1.$$

Для геометрического распределения

$$MX_1 = \frac{1-p}{p}.$$

Прибавим единицу слева и справа

$$1 + \overline{X} \xrightarrow{P} 1 + \frac{1-p}{p} = 1 + \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{p}.$$

Функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

— это непрерывная функция, значит, можем применить эту функцию слева и справа, и сходимость сохранится

$$\frac{1}{1+\overline{\overline{X}}} \xrightarrow{P} p.$$

Состоятельной оценкой для параметра p будет

$$\hat{p} = \frac{1}{1+\overline{\overline{X}}}.$$

Состоятельной оценкой лдя p^2 будет $\hat{p^2} = \hat{p}^2 \xrightarrow{P} p^2$, потому что $f(x) = x^2$ — это непрерывная функция.

Логарифм — это непрерывная функция

$$\hat{lnp} = ln\hat{p} = ln\frac{1}{1+\overline{\overline{X}}} \xrightarrow{P} lnp,$$

поскольку

$$\frac{1}{1+\overline{\overline{X}}} \xrightarrow{P} p.$$

2.12

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределния Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Докажите, что не существует несмещённой оценки для параметра $1/\lambda$.

Решение. Будем действовать от противного.

Допустим, что такая оценка существует, то есть существует $\hat{\theta}$ такое, что

$$M\hat{\theta} = \frac{1}{\lambda}.$$

Это условие несмещённости.

$\hat{\theta}$ — функция от выборки, то есть $\hat{\theta} = f(X_1, \ldots, X_n)$.

Распределение Пуассона дискретное

$$M\hat{\theta} = Mf(X_1, \ldots, X_n) =$$
$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \ldots, X_n) P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n).$$

Воспользуемся независимостью

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \ldots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n) =$$
$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \ldots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = k_n).$$

Подставим в явном виде вероятности

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f\left(X_1, \ldots, X_n\right) \cdot P\left(X_1 = k_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(X_n = k_n\right) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f\left(X_1, \ldots, X_n\right) \cdot \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} k_i!} \cdot e^{-\lambda n}.$$

Обозначим

$$\sum k_i = k$$

и получим

$$e^{-\lambda n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cdot \sum_{k_i \colon k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k} \frac{f\left(k_1, \ldots, k_n\right)}{k_1! \ldots k_n!} = e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_k,$$

где c_k — число.

Допустим, что эта величина равна $1/\lambda$.

Посмотрим, возможно ли это

$$e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_k = \frac{1}{\lambda}.$$

Запишем так, чтобы с одной стороны было $e^{\lambda n}$, а всё остальное перенесём

$$e^{\lambda n} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} c_k.$$

Для экспоненты существует одно развитие в ряд. Из этого следует, что последнее равенство невозможно (развитие в ряд начинается со степени λ, равной единице).

Домашнее задание

2.17

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$. Проверьте несмещённость, состоятельность и найдите среднеквадратическое отклонение следующих оценок параметра θ:

a) $X_{(1)} + X_{(n)}$;

b) $(n+1) X_{(1)}$.

Решение. θ — максимальное наблюдение.

а) Проверим, выполняется ли $X_{(1)} + X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

По определению сходимости по вероятности $\forall \varepsilon > 0\, P\left(X_{(1)} > \varepsilon\right) =$ $= P\left(X_1 > \varepsilon, X_2 > \varepsilon, \ldots, X_n > \varepsilon\right) = \left[P\left(X_1 > \varepsilon\right)\right]^n$. Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$\left[P\left(X_1 > \varepsilon\right)\right]^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \to 0,\ n \to \infty.$$

Значит, $X_{(1)} \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$.

Остаётся проверить, выполняется ли $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

По определению сходимости по вероятности

$$P\left\{\left|X_{(n)} - \theta\right| > \varepsilon\right\} \to 0,\ n \to \infty.$$

Раскроем модуль

$$P\left\{\theta - X_{(n)} > \varepsilon\right\} = P\left\{X_{(n)} - \theta < -\varepsilon\right\} = P\left\{X_{(n)} < \theta - \varepsilon\right\} =$$
$$= P\left(X_1 < \theta - \varepsilon, X_2 < \theta - \varepsilon, \ldots, X_n < \theta - \varepsilon\right) = \left[P\left(X_1 < \theta - \varepsilon\right)\right]^n.$$

Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$\left[P\left(X_1 < \theta - \varepsilon\right)\right]^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \to 0,\ n \to \infty.$$

Число в скобках строго меньше единицы, так как $0 \le \theta \le 1$, $\varepsilon > 0$.

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

Проверим несмещённость оценки. Проверим, выполняется ли

$$M\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right) = \theta.$$

Из задачи 1.21

$$MX_{(n)} = \frac{\theta n}{n+1}$$

и

$$MX_{(1)} = \frac{\theta}{n+1}.$$

Из свойства линейности математического ожидания

$$M\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right) = MX_{(1)} + MX_{(n)} = \frac{\theta n}{n+1} + \frac{\theta}{n+1} = \frac{\theta\left(n+1\right)}{n+1} = \theta.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Формула среднеквадратического отклонения имеет вид $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Найдём дисперсию оценки

$$D\left(X_{(1)}+X_{(n)}\right)=M\left(X_{(1)}+X_{(n)}\right)^2-\left[M\left(X_{(1)}+X_{(n)}\right)\right]^2=$$
$$=M\left(X_{(1)}^2+X_{(n)}^2+2X_{(1)}X_{(n)}\right)-\left(MX_{(1)}+MX_{(n)}\right)^2=$$
$$=MX_{(1)}^2+MX_{(n)}^2+2M\left(X_{(1)}X_{(n)}\right)-\left(MX_{(1)}\right)^2-2MX_{(1)}MX_{(n)}-$$
$$-\left(MX_{(n)}\right)^2=DX_{(1)}+DX_{(n)}+2cov\left(X_{(1)},X_{(n)}\right).$$

Возьмём необходимые значения из задачи 1.21, а именно

$$DX_{(1)}=\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}=DX_{(n)},\; cov\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)=\frac{\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Подставляя в найденной выражение, получаем

$$DX_{(1)}+DX_{(n)}+2cov\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)=$$
$$=\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}+\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}+\frac{2\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}=$$
$$=\frac{2\theta^2 n+2\theta}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{2\theta^2(n+1)}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Извлекая корень, получаем

$$\sigma=\sqrt{\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}}=\theta\sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}};$$

b) проверим, выполняется ли $(n+1)X_{(1)}\xrightarrow{P}\theta$, $n\to\infty$.

По определению сходимости по вероятности

$$\forall\varepsilon>0\,P\left(\left|(n+1)X_{(1)}-\theta\right|>\varepsilon\right)\to 0,\; n\to\infty.$$

Перейдём к противоположному событию

$$P\left(\left|(n+1)X_{(1)}-\theta\right|>\varepsilon\right)=1-P\left\{\left|(n+1)X_{(1)}-\theta\right|\le\varepsilon\right\}.$$

Раскроем модуль

$$1-P\left\{\left|(n+1)X_{(1)}-\theta\right|\le\varepsilon\right\}=$$
$$=1-P\left\{-\varepsilon\le(n+1)X_{(1)}-\theta\le\varepsilon\right\}=$$
$$=1-P\left\{\frac{-\varepsilon+\theta}{n+1}\le X_{(1)}\le\frac{\varepsilon+\theta}{n+1}\right\}=$$
$$=1+P\left\{X_{(1)}\le\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\right\}-P\left\{X_{(1)}<\frac{\varepsilon+\theta}{n+1}\right\}=$$
$$=1+1-P\left(X_1>\frac{\theta-\varepsilon}{n+1},\ldots,X_n>\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\right)-1+P\left(X_{(1)}>\frac{\varepsilon+\theta}{n+1}\right)=$$
$$=1-\left[P\left(X_1>\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\right)\right]^n+\left[P\left(X_1>\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)\right]^n.$$

Подставим значения вероятностей из геометрического эксперимента

$$1-\left[P\left(X_1>\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\right)\right]^n+\left[P\left(X_1>\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)\right]^n=$$

$$=1-\left(\frac{\theta-\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}}{\theta}\right)^2+\left(\frac{\theta-\frac{\varepsilon+\theta}{n+1}}{\theta}\right)^n=$$

$$=1-\left(1-\frac{\theta-\varepsilon}{(n+1)\,\theta}\right)^n+\left(1-\frac{\varepsilon+\theta}{(n+1)\,\theta}\right)^n\not\to 0,\ n\to\infty.$$

Отсюда следует, что оценка несостоятельная.

Проверим несмещённость оценки. Проверим, выполняется ли

$$M\,(n+1)\,X_{(1)}=\theta.$$

Выносим константу из-под знака математического ожидания

$$(n+1)\,MX_{(1)}=(n+1)\cdot\frac{\theta}{n+1}=\theta.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Найдём дисперсию оценки

$$D\,(n+1)\,X_{(1)}=(n+1)^2\,DX_{(1)}=(n+1)^2\cdot\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2\,(n+2)}=\frac{\theta^2 n}{n+2},$$

откуда среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma=\sqrt{D\,(n+1)\,X_{(1)}}=\sqrt{\frac{\theta^2 n}{n+2}}=\theta\sqrt{\frac{n}{n+2}}.$$

2.18

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $1/\sqrt{\alpha}$. Выясните, является ли статистика $\hat{\alpha_n}=\left(\overline{X}\right)^2$ несмещённой оценкой параметра α. Является ли эта оценка состоятельной?

Решение. Нужно проверить, выполняется ли $M\left(\overline{X}\right)^2=\alpha$.

Запишем, что означает выборочное среднее

$$M\left(\overline{X}\right)^2=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=M\left(\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right)=\frac{1}{n^2}\cdot M\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2.$$

Квадрат суммы запишем в виде двух сумм. Получим

$$\frac{1}{n^2}\cdot M\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{k<i}^{n}X_kX_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot M\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{2}{n^2}M\sum_{k<i}^{n}X_kX_i.$$

Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому

$$\frac{1}{n^2}\cdot M\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{2}{n^2}M\sum_{k<i}^{n}X_kX_i=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}MX_i^2+\frac{2}{n^2}\sum_{k<i}^{n}MX_kMX_i.$$

Для показательного распределения

$$MX_i=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}=\sqrt{\alpha},\ MX_i^2=\frac{2}{\lambda^2}=\frac{2}{\frac{1}{\alpha}}=2\alpha.$$

Подставляем

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}MX_i^2+\frac{2}{n^2}\sum_{k<i}^{n}MX_kMX_i=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot 2\alpha+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\,n\,(MX_1)^2=$$
$$=\frac{2\alpha}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot\alpha=\frac{2\alpha}{n}+\alpha-\frac{\alpha}{n}=\frac{\alpha}{n}+\alpha\to\alpha,\ n\to\infty,$$

значит, оценка смещённая, но несмещённая ассимптотически.

Проверим, имеет ли место $\left(\overline{X}\right)^2\xrightarrow{P}\alpha,\ n\to\infty$.

По закону больших чисел

$$\left(\overline{X}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\to(MX_1)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,$$

значит, оценка состоятельная.

2.21

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 2 и p. Для какого параметра $\theta=\theta(p)$ статистика $\hat{\theta_n}=e^{\overline{X}}$ будет состоятельной? Является ли $\hat{\theta_n}$ сильно состоятельной оценкой того же параметра? Является ли $\hat{\theta_n}$ несмещённой оценкой того же параметра? Найдите среднеквадратическое отклонение этой оценки.

Решение.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}MX_1,\ n\to\infty.$$

Случайные величины в выборке имеют биномиальное распределение с математическим ожиданием $MX_1=np=2p$, значит, $\overline{X}\xrightarrow{P}2p,\ n\to\infty$.

Применим непрерывную функцию e^x. Получим $e^{\overline{X}}\xrightarrow{P}e^{2p},\ n\to\infty$.

Проверим, является ли оценка несмещённой к параметру e^{2p}, то есть выполняется ли $Me^{\overline{X}}=e^{2p}$.

Вычисляем $Me^{\overline{X}} = Me^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$. Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому $Me^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n$. По определению характеристической функции $\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1}$, получим

$$\left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n = \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n.$$

Характеристическая функция биномиального распределения

$$\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1} = \left[\left(e^{it} - 1\right)p + 1\right]^n.$$

Подставим и получим

$$\left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n = \left[\left(e^{\frac{i}{in}} - 1\right)p + 1\right]^n = \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n \neq e^{2p}.$$

Значит, оценка смещённая.

Проверим сильную состоятельность. По усиленному закону больших чисел

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{a.s.}{\to} MX_1 = 2p,\ n \to \infty.$$

Отсюда следует, что $e^{\overline{X}} \overset{a.s.}{\to} e^{2p}$, $n \to \infty$. Значит, оценка сильно состоятельная.

Найдём дисперсию оценки $De^{\overline{X}} = Me^{2\overline{X}} - \left(Me^{\overline{X}}\right)^2$.

Нашли, что $Me^{\overline{X}} = \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n$.

Вычисляем $Me^{2\overline{X}} = Me^{\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$. Из независимости и одинаковой распределенности случайных величин следует, что $Me^{\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \left(Me^{\frac{2X_1}{n}}\right)^n$. По определению характеристической функции $\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1}$, получаем

$$\left(Me^{\frac{2X_1}{n}}\right)^n = \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{2}{in}\right)\right]^n.$$

Подставляем характеристическую фунцию биномиального распределения

$$\left[\varphi_{X_1}\left(\frac{2}{in}\right)\right]^n = \left[\left(e^{\frac{2i}{in}} - 1\right)p + 1\right]^n = \left[\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n.$$

Отсюда находим дисперсию оценки

$$De^{\overline{X}} = \left[\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n - \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^{2n}.$$

Извлекая корень, получим $\sigma = \sqrt{\left[\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n - \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^{2n}}$.

2.22

Задание. В партии из n изделий оказалось m бракованных. Неизвестная вероятность p появления бракованного изделия оценивается величиной m/n. Проверьте состоятельность и несмещённость этой оценки.

Решение. Выборка имеет распределение Бернулли, то есть

$$X_i = \begin{cases} 1, & p, \\ 0, & 1-p, \end{cases}$$

где событие $\{X_i = 1\}$ означает, что i-тое изделие браковано.

Тогда

$$\frac{m}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},$$

где $(X_1 + \ldots + X_n)$ — количество бракованных изделий в партии.

Проверяем состоятельность, то есть проверяем, выполняется ли

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{p} p,\ n \to \infty.$$

По закону больших чисел

$$\frac{m}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{p} MX_1 = p,\ n \to \infty,$$

так как это распределение Бернулли.

Это означает, что оценка состоятельная.

Проверим несмещённость оценки, то есть проверим, выполняется ли

$$M\frac{m}{n} = p.$$

Ищем математическое ожидание оценки

$$M\frac{m}{n} = M\frac{X_1 + \ldots + X_n}{p} = \frac{1}{n} \cdot M\left(X_1 + \ldots + X_n\right).$$

Пользуемся линейностью математического ожидания

$$\frac{1}{n} \cdot M\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = p,$$

то есть оценка несмещённая.

2.23

Задание. При каком значении k статистика

$$k\sum_{j=1}^{n} \left|X_j\right|,$$

которая построена по выборке из нормального распределения $N\left(0, \sigma^2\right)$, является несмещённой оценкой для параметра σ?

Решение. Нужно найти такое k, для которого

$$M\left(k\sum_{j=1}^{n}|X_j|\right) = \sigma,\ X_j \sim N\left(0, \sigma^2\right).$$

Выносим константу k за знак математического ожидания

$$M\left(k\sum_{j=1}^{n}|X_j|\right) = kM\sum_{j=1}^{n}|X_j|.$$

Пользуемся линейностью математического ожидания

$$kM\sum_{j=1}^{n}|X_j| = k\sum_{j=1}^{n}M|X_j|.$$

Из того, что случайные величины одинаково распределены, следует, что

$$k\sum_{j=1}^{n}M|X_j| = knM|X_1|.$$

Найдём математическое ожидание модуля первого элемента выборки через плотность распределения

$$M|X_1| = \int\limits_{\mathbb{R}} p(x)\cdot|x|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} |x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = 2\cdot\int\limits_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Внесём под знак дифференциала то, что стоит в степени экспоненты

$$2\cdot\int\limits_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cdot 2\sigma^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sigma.$$

Тогда математическое ожидание оценки

$$M\left(k\sum_{j=1}^{n}|X_j|\right) = kn\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

— условие несмещённости, откуда

$$k = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2.24

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha > 0$. Найдите несмещённые состоятельные оценки для параметров

$$\alpha, \sin\frac{1}{\alpha}.$$

Решение. $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые.

θ — неизвестный параметр.

$$\hat{\theta} = \frac{f(X_1) + \ldots + f(X_n)}{n}.$$

Так как элементы выборки одинаково распределённые, то $M\hat{\theta} = Mf(X_1)$.

По закону больших чисел $\hat{\theta} \xrightarrow{P} Mf(X_1)$.

Хотим, чтобы

$$\begin{cases} M\hat{\theta} = \hat{\theta}, \\ \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta. \end{cases}$$

Нужно подобрать f из условия, что $Mf(X_1) = \theta = \alpha$.

Записывая математическое ожидание через интеграл от плотности получаем преобразование Лапласа

$$\int\limits_0^\infty f(y)\,\alpha e^{-\alpha y} dy = \alpha.$$

Это способ построения одновременно несмещённой и сотоятельной оценки.

Выносим α из-под знака интеграла

$$\alpha \int\limits_0^\infty f(y)\,e^{-\alpha y} dy = \alpha.$$

Сокращая константы, получаем

$$\int\limits_0^\infty f(y)\,e^{-\alpha y} dy = 1.$$

Из таблицы преобразований Лапласа $f(y) = \delta(y)$. Тогда оценка параметра α примет вид

$$\hat{\theta} = \frac{\delta(X_1) + \ldots + \delta(X_n)}{n}.$$

Для второго параметра

$$\int\limits_0^\infty f(y)\,\alpha e^{-\alpha y} dy = \sin\frac{1}{\alpha}.$$

Вынесем α из-под знака интеграла

$$\alpha \int\limits_0^\infty f(y)\, e^{-\alpha y} dy = \sin \frac{1}{\alpha}.$$

Перенесём α вправо

$$\int\limits_0^\infty f(y)\, e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{y} \sim \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2},$$

откуда из таблицы преобразований Лапласа $f(y) = y$. Перешли к пределу, потому что иначе интеграл расходится. Оценка параметра в таком случае примет вид

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \overline{X}.$$

2.25

Задание. Пусть X — количество успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Докажите, что не существует несмещённой оценки для параметра p^N при $N > n$.

Решение. Будем действовать от противного.

Допустим, такая оценка существует, то есть существует $\hat{\theta}$ такое, что $M\hat{\theta} = p^N$.

Это условие несмещённости.

$\hat{\theta}$ — функция от выборки $X_1, \ldots, X_n$, где $X_1 + \ldots + X_n = X$, то есть $\hat{\theta} = f(X_1, \ldots, X_n)$.

Распределение Бернулли дискретное

$$M\hat{\theta} = Mf(X_1, \ldots, X_n) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n)\, P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n).$$

Пользуясь независимостью, получаем

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n)\, P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = k_n).$$

Подставляем вероятности в явном виде

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n)\, P(X_1 = k_1) \cdot P(X_n = k_n) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n)\, p^{k_1} \cdot (1-p)^{1-k_1} \cdot \ldots \cdot p^{k_n} \cdot (1-p)^{1-k_n} =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n) \cdot p^{k_1 + \ldots + k_n} \cdot (1-p)^{n-(k_1 + \ldots + k_n)}.$$

Обозначим
$$\sum k_i = k.$$
Получим
$$\sum_{k_1,\ldots,k_n=1\; or\; 0} f\left(X_1,\ldots,X_n\right)\cdot p^{k_1+\ldots+k_n}\cdot(1-p)^{n-(k_1+\ldots+k_n)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{k_1,\ldots,k_n=1\; or\; 0} f\left(k_1,\ldots,k_n\right)p^k\left(1-p\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}c_k p^k\left(1-p\right)^{n-k},$$
где c_k — число.

Допустим, эта величина равна p^N.

Посмотрим, возможно ли это
$$\sum_{k=0}^{n}c_k p^k\left(1-p\right)^{n-k}=p^N.$$

Последнее равенство невозможно при $N>n$. Из этого следует, что не существует несмещённой оценки для параметра p^N при $N>n$.

2.26

Задание. Проводится n измерений неизвестного диаметра d круга. В первом приближении считается, что измерения $X_i=d+\varepsilon_i$ проводятся с независимыми случайными погрешностями ε_i, которые имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и неизвестной дисперсией σ^2. Проверьте несмещённость и состоятельность следующей оценки площади круга:
$$\hat{s_n}=\frac{\pi}{4}\left(\left(\overline{X}\right)^2-\frac{S_0^2}{n}\right),$$
где
$$S_0^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2.$$

Решение. Имеем случайные величины $\varepsilon_i\sim N\left(0,\sigma^2\right)$. Проверим несмещённость оценки, то есть проверим, выполняется ли
$$M\hat{s_n}=\frac{\pi d^2}{4}.$$

Преобразуем
$$S_0^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(d+\varepsilon_i-d-\overline{\varepsilon}\right)^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_i-\overline{\varepsilon}\right)^2.$$
Математическое ожидание этой случайной величины равно
$$MS_0^2=DS_0^2=\sigma^2.$$

Найдём математическое ожидание квадрата выборочного среднего

$$M\left(\overline{X}\right)^2 = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = M\left[\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} X_i X_j\right)\right].$$

Пользуемся тем, что случайные величины в выборке одинаково распределены

$$M\left[\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} X_i X_j\right)\right] = \frac{1}{n^2}\cdot nMX_1^2 + \frac{1}{n^2}\cdot 2C_n^2\left(MX_1\right)^2.$$

Расписываем биномиальный коэффициент

$$\frac{1}{n^2}\cdot nMX_1^2 + \frac{1}{n^2}\cdot 2C_n^2\left(MX_1\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n!}{2\,(n-2)!}\cdot\left(MX_1\right)^2.$$

Расписываем $n!$ через факториал, стоящий в знаменателе

$$\frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n!}{2\,(n-2)!}\cdot\left(MX_1\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{(n-2)!\,(n-1)\,n}{2\,(n-2)!}\cdot\left(MX_1\right)^2.$$

Сокращаем

$$\frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{(n-2)!\,(n-1)\,n}{2\,(n-2)!}\cdot\left(MX_1\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{n-1}{n}\cdot\left(MX_1\right)^2.$$

Найдём математическое ожидание измерения

$$MX_1 = M\left(d+\varepsilon_i\right) = Md + M\varepsilon_i = d.$$

Найдём математическое ожидание квадрата измерения

$$MX_1^2 = M\left(d+\varepsilon_i\right)^2 = M\left(d^2 + 2d\varepsilon_i + \varepsilon_i^2\right) = Md^2 + M\left(2d\varepsilon_i\right) + M\varepsilon_i^2.$$

Выносим константы за знак матетматического ожидания и учитываем то, что случайная величина ε_i имеет нулевой математическое ожидание

$$Md^2 + M\left(2d\varepsilon_i\right) + M\varepsilon_i^2 = d^2 + 2dM\varepsilon_i + D\varepsilon_i = d^2 + \sigma^2.$$

Подставляя эти значения в полученное выражение для математического ожидания квадрата выборочного среднего, получаем

$$M\left(\overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\left(d^2+\sigma^2\right) + \frac{n-1}{n}\cdot d^2 = \frac{d^2+\sigma^2+nd^2-d^2}{n} = \frac{\sigma^2+nd^2}{n} = d^2 + \frac{\sigma^2}{n}.$$

Получаем математическое ожидание оценки

$$M\hat{s_n} = M\left\{\frac{\pi}{4}\cdot\left[\left(\overline{X}\right)^2 - \frac{S_0^2}{n}\right]\right\} = \frac{\pi}{4}\cdot M\left[\left(\overline{X}\right)^2 - \frac{S_0^2}{n}\right] = \frac{\pi}{4}\cdot M\left(\overline{X}\right)^2 - \frac{\pi}{4}\cdot M\frac{S_0^2}{n}.$$

Подставляем найденные значения математических ожиданий и выносим за скобку общий множитель

$$\frac{\pi}{4}\cdot M\left(\overline{X}\right)^2-\frac{\pi}{4}\cdot M\frac{S_0^2}{n}=\frac{\pi}{4}\cdot\left(d^2+\frac{\sigma^2}{n}\right)-\frac{\pi}{4n}\cdot MS_0^2=\frac{\pi}{4}\cdot d^2+\frac{\pi\sigma^2}{4n}-\frac{\pi\sigma^2}{4n}=\frac{\pi d^2}{4},$$

значит, оценка несмещённая.

Проверим состоятельность оценки, то есть выполняется ли

$$\hat{s_n}\xrightarrow{P}\frac{\pi d^2}{4},\ n\to\infty.$$

По закону больших чисел

$$\left(\overline{X}\right)^2\xrightarrow{P}\left(MX_1\right)^2=d^2,\ n\to\infty.$$

Остаётся проверить, стремится ли по вероятности второе слагаемое в оценке к нулю

$$P\left(\frac{S_0^2}{n}\geq\varepsilon\right)=P\left(S_0^2\geq\varepsilon n\right).$$

Применим неравенство Чебышева

$$P\left(S_0^2\geq\varepsilon n\right)\leq\frac{MS_0^2}{\varepsilon n}\to 0,\ n\to\infty.$$

Остюда следует, что

$$\frac{S_0^2}{n}\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty.$$

Значит,

$$\hat{s_n}\xrightarrow{P}\frac{\pi}{4}\cdot d^2,$$

то есть оценка состоятельная.

Занятие 3. Метод моментов построения оценок

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение оценки: несмещённой, ассимптотически несмещённой, состоятельной, сильно состоятельной, оптимальной.

Оценка $\hat{\theta}$ несмещённая, если $\forall\theta \in \Theta : M_\theta\hat{\theta} = \theta$.

Асимптотически несмещенная оценка — такая оценка, математическое ожидание которой совпадает с оцениваемым параметром при $n \to \infty$.

Оценка $\hat{\theta}$ называется состоятельной, если стремится к истинному значению θ по вероятности $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

Оценка $\hat{\theta}$ называется сильно состоятельной, если стремится к истинному значению θ почти наверное $\hat{\theta} \xrightarrow{a.s.} \theta$, $n \to \infty$.

Несмещённая оценка $\hat{\theta} \in K$ называется оптимальной в классе квадратично интегрируемых оценок K, если для всякой другой несмещённой оценки $\tilde{\theta} \in \Theta \, \forall\theta \in \Theta : D_\theta\hat{\theta} \leq D_\theta\tilde{\theta}$ или же $\forall\theta \in \Theta$, $M_\theta \left(\hat{\theta} - \theta\right)^{\leq} M_\theta \left(\tilde{\theta} - \theta\right)^2$.

Что называется среднеквадратическим отклонением оценки?

$M_\theta \left(\hat{\theta} - \theta\right)$ — среднеквадратическое оклонение.

Сформулируйте утверждение про поведение выборочных моментов.

Выборочный начальный момент M_k k-го порядка стремится к начальному моменту ν_k случайной величины X, то есть

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|M_k - \nu_k| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, если моменты ν_{2k} и ν_k случайной величины X существуют и конечны.

Сформулируйте основную идею метода моментов построения оценки неизвестного параметра.

$x_1, \ldots, x_n$ — выборка из распределения F_θ и $\theta: \ M_\theta f(x_1) = g(\theta)$.

Вычисляем математическое ожидание, считая, что x_1 имеет распределение с параметром θ, иными словами,

$$M_\theta f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_\theta(x), \ f, g \in C(\mathbb{R}), \ g$$

— строго монотонная. Тогда в силу усиленного закона больших чисел

$$\theta \approx g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) \overset{a.s.}{\theta}, \ n \to \infty.$$

Если существуют непрерывные f и g, g — обратима и $g(\theta) = M_\theta f(x)$, то в качестве оценки можно выбрать

$$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f dF_n\right).$$

Аудиторные задачи

3.3

Задание. Пользуясь методом моментов, оцените параметр θ равномерного распределения на отрезке:

a) $[0, \theta]$;

b) $[\theta - 1, \theta + 1]$;

c) $[0, 2\theta]$;

d) $[-\theta, \theta]$.

Решение.

a) $X_i \sim U([0, \theta])$. Записываем теоретический момент. Для равномерного распределения — это средина отрезка

$$MX_1 = \frac{\theta}{2}.$$

Должны приравнять

$$\frac{\theta^*}{2} = \overline{X},$$

откуда $\theta^* = 2\overline{X}$;

b) случайные величины имеют распределение $X_i \sim U([\theta - 1, \theta + 1])$.

Вычисляем теоретический момент $MX_1 = \theta$. Должны записать, что $\theta^* = \overline{X}$;

c) случайные величины имеют распределение $X_i \sim U([0, 2\theta])$.

Вычисляем теоретический момент $MX_1 = \theta$, откуда $\theta^* = \overline{X}$;

d) случайные величины имеют распределение $X_i \sim U([-\theta, \theta])$.

Вычисляем теоретический момент $MX_1 = 0$ — не подходит, потому что не является функцией от θ. Можем вычислить второй момент, который в данном случае совпадает с дисперсией $MX_1^2 = DX_1$. Для равномерного распределения

$$DX_1 = \frac{4\theta^2}{12} = \frac{\theta}{3}.$$

Должны записать уравнение

$$\frac{\left(\theta^2\right)^*}{3} = \overline{X^2},$$

откуда $\left(\theta^2\right)^* = 3\overline{X^2}$. Извлекая корень, получаем $\theta^* = \sqrt{3\overline{X^2}}$.

3.4

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Пользуясь методом моментов, постройте оценку параметра λ и убедитесь, что эта оценка является несмещённой и состоятельной.

Решение. Первый теоретический момент $MX_1 = \lambda$. Должны приравнять

$$\lambda^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

По закону больших чисел $\lambda^* \xrightarrow{P} \lambda$. Отсюда следует состоятельность.

$M\lambda^* = MX_1 = \lambda$. Отсюда следует несмещённость.

3.5

Задание. Пользуясь методом моментов с пробной функцией $g(y) = y$, оцените параметр сдвига $\beta \in \mathbb{R}$ показательного распределения с плотностью

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta - y}, & t \geq \beta, \\ 0, & y < \beta. \end{cases}$$

Решение. $Mg(X_1) = \overline{g(X)}$ — метод моментов.

Ищем теоретический момент, зная плотность распределения

$$MX_1 = \int\limits_{\beta}^{\infty} ye^{\beta - y} dy.$$

Делаем замену $y - \beta = z$ и получаем

$$\int\limits_{\beta}^{\infty} ye^{\beta - y} dy = \int\limits_{0}^{\infty} (\beta + z)\, e^{-z} dz = \beta + 1.$$

Отсюда должны решить уравнение $\beta^* + 1 = \overline{X}$.

Отсюда $\beta^* = \overline{X} - 1$. Эта оценка несмещённая и состоятельная.

3.6

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами m и p. Пользуясь методом моментов, постройте оценку:

a) параметра p, если параметр m известный;

b) параметра m, если параметр p известный;

c) векторного параметра (m, p).

Решение.

a) $MX_1 = mp$. Тогда уравенение имеет вид $mp^* = \overline{X}$. Отсюда

$$p^* = \frac{\overline{X}}{m};$$

b) параметр m — это целое число.

$m^* p = \overline{X}$, откуда

$$m^* = \left[\frac{\overline{X}}{p}\right]$$

— целая часть;

c) одного теоретического момента мало.

Нужно найти второй теоретический момент.

Выражаем его через дисперсию и первый момент

$$MX_1^2 = DX_1 + (MX_1)^2 = mp\,(1 - p) + (mp)^2 = mp\,(1 - p + mp)\,.$$

Составляем уравнения с двумя неизвестными

$$\begin{cases} m^* p^* = \overline{X}, \\ m^* p^* \left(1 - p^* + m^* p^*\right) = \overline{X^2}. \end{cases}$$

Во второе уравнение можем подставить $\overline{X}$ вместо произведения m^*p^* и решить $\overline{X}\left(1-p+\overline{X}\right)=\overline{X^2}$, откуда

$$1-p^*+\overline{X}=\frac{\overline{X^2}}{\overline{X}}.$$

Отсюда находим

$$p^*=1+\overline{X}-\frac{\overline{X^2}}{\overline{X}},$$

соответственно

$$m^*=\left[\frac{\overline{X}}{p^*}\right]=\left[\frac{\overline{X}}{1+\overline{X}-\frac{\overline{X^2}}{\overline{X}}}\right]=\left[\frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X}+\overline{X}^2-\overline{X^2}}\right].$$

3.7

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения Парето с плотностью

$$f_{\beta,\theta}\left(y\right)=\begin{cases}\beta\theta y^{-(\beta+1)}, & y\geq\theta,\\ 0, & t<\theta,\end{cases}\qquad\beta>0,\,\theta>0.$$

Постройте оценки по методу моментов

a) параметра $\beta>1$, если параметр $\theta>0$ известный;

b) параметра $\theta>0$, если параметр $\beta>1$ известный;

c) векторного параметра (β,θ), где $\beta>2$, $\theta>0$.

Решение.

a) Вычисляем теоретический момент

$$MX_1=\beta\int\limits_{\theta}^{\infty}\theta^{\beta}y^{-\beta}dy=\beta\theta^{\beta}\cdot\frac{y^{-\beta+1}}{-\beta+1}=-\beta\theta^{\beta}\cdot\frac{\theta}{1-\beta}=\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\theta.$$

Найдём второй момент

$$MX_1^2=\beta\int\limits_{\theta}^{\infty}\theta^{\beta}y^{-\beta+1}dy=\beta\cdot\frac{1}{\beta-2}\cdot\theta^2.$$

Приравниваем теоретический и выборочный момент, учитывая, что β — параметр

$$\frac{\beta^*}{\beta^*-1}\cdot\theta=\overline{X},$$

откуда
$$\frac{\beta^*}{\beta^*-1}=\frac{\overline{X}}{\theta}.$$
Решим пропорцию $\beta^*\theta=(\beta-1)\,\overline{X}=\beta^*\overline{X}-\overline{X}$.

Получаем
$$\beta^*=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-\theta};$$

b) считаем, что β — известно, ищем θ.

Приравниваем моменты
$$\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\theta=\overline{X},$$
откуда
$$\theta^*=\frac{\overline{X}\,(\beta-1)}{\beta};$$

c) нужно 2 уравнения
$$\begin{cases}\frac{\beta^*}{\beta^*-1}\cdot\theta^*=\overline{X},\\ \frac{\beta^*}{\beta^*-2}\cdot(\theta^*)^2=\overline{X^2}.\end{cases}$$

Выражаем θ^* из первого уравнения и подставляем во второе
$$\frac{\beta^*}{\beta^*-2}\cdot\left(\frac{\beta^*-1}{\beta^*}\right)^2\cdot\left(\overline{X}\right)^2=\overline{X^2}.$$

Умножим на знаменатель $\left(\overline{X}\right)^2(\beta^*-1)^2=\overline{X^2}\beta^*\,(\beta^*-2)$.

Оставляем в левой части только квадрат выборочного момента
$$\left(\overline{X}\right)^2=\overline{X^2}\cdot\frac{(\beta^*)^2-2\beta^*}{(\beta^*-1)^2}.$$

Делаем замену $(\beta^*-1)^2=t$.

Получаем
$$\left(\overline{X}\right)^2=\frac{t-1}{t}\cdot\overline{X^2}=\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot\overline{X^2}=\overline{X^2}-\frac{\overline{X^2}}{t}.$$

Отсюда
$$t=\frac{\overline{X^2}}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}.$$

Отсюда найдём $\beta^*=\sqrt{t}+1$, соответственно находим θ^*.

Домашнее задание

3.10

Задание. Пользуясь методом моментов, оцените значение α по выборке из показательного распределения с параметром $1/\sqrt{\alpha}$.

Решение.

$$X_i \sim Exp\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Записываем теоретический момент. Для показательного распределения — это обратная величина к параметру распределения

$$MX_1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha}.$$

Должны приравнять $\sqrt{\alpha^*} = \overline{X}$, откуда $\alpha^* = \left(\overline{X}\right)^2$.

3.11

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha > 0$. Пользуясь методом моментов с пробной функцией $g(y) = y$, оцените параметр $\theta(\alpha) = P(X_1 > 1)$.

Решение. $Mg(X_1) = \overline{g(X)}$ — метод моментов.

Ищем теоретический момент, зная плотность распределения

$$MX_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Из метода моментов следует, что

$$\frac{1}{\alpha^*} = \overline{X}.$$

Выражаем оценку

$$\alpha^* = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Перейдём в параметре к противоположному событию

$$\theta(\alpha) = P(X_1 > 1) = 1 - P(X_1 \leq 1) = 1 - F_{X_1}(1).$$

Найдём функцию показательного распределения как интеграл от плотности

$$F_{X_1}(y) = \int_0^y \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \int_0^\alpha e^{-\alpha x} d(-\alpha x) = -e^{-\alpha x}\Big|_0^y = 1 - e^{-\alpha y}.$$

Тогда параметр примет вид $\theta(\alpha) = 1 - (1 - e^{-\alpha}) = 1 - 1 + e^{-\alpha} = e^{-\alpha} = e^{-\frac{1}{\overline{X}}}$.

3.12

Задание. Пользуясь методом моментов с пробной функцией $g(y) = y$, оцените параметр p распределения Бернулли. Возможно ли с помощью метода мометов с некоторой пробной функией $g(y)$ получить оценку параметра p, отличную от $\overline{X}$?

Решение.

$$X_i = \begin{cases} 0, & 1-p, \\ 1, & p. \end{cases}$$

Теоретический момент $MX_1 = p$, $p^* = \overline{X}$.

Найдём теоретический момент с пробной функцией

$$Mg(X_1) = g(0)(1-p) + g(0)p = g(0) + p[g(1) - g(0)] = \overline{g(X)}.$$

Отсюда

$$p^* = \frac{g\left(\overline{X}\right) - g(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{g(X_1) + \ldots + g(X_n) - g(0)}{n[g(1) - g(0)]}.$$

Количество единиц равно $\overline{X}n$, соответственно $n - \overline{X}n$ — количество нулей.

$$\frac{g(X_1) + \ldots + g(X_n) - g(0)}{n[g(1) - g(0)]} = \frac{g(1)\overline{X}n + g(0)\left(n - \overline{X}n\right) - g(0)n}{n[g(1) - g(0)]}.$$

Раскроем скобки и приведём подобные

$$\frac{g(1)\overline{X}n + g(0)\left(n - \overline{X}n\right) - g(0)n}{n[g(1) - g(0)]} = \frac{ng(1)\overline{X} - gn\overline{X}}{n[g(1) - g(0)]} = \overline{X},$$

откуда следует, что невозможно получить другую оценку параметра p.

3.13

Задание. Пользуясь методом моментов, оцените параметр $\lambda > 1$ по выборке из распределения Пуассона с параметром $ln\lambda$.

Решение. Первый теоретический момент $MX_1 = ln\lambda$. Должны приравнять $ln\lambda = \overline{X}$. Отсюда следует, что $\lambda^* = e^{\overline{X}}$.

3.14

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из Г-распределения с плотностью

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} e^{-\alpha y}, \; y \geq 0, \\ 0, \quad y < 0, \end{cases} \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Постройте оценки по методу моментов

a) параметра α, если параметр β известный;

b) параметра β, если параметр α известный;

c) векторного параметра (α, β).

Решение.

a) Вычислим теоретический момент

$$MX_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha y} \cdot y dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^\beta y^\beta e^{-\alpha y} dy.$$

Сделаем замену $\alpha y = s$, откуда

$$y = \frac{s}{\alpha},\, dy = \frac{ds}{\alpha}.$$

Подставляем

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^\beta y^\beta e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^\beta e^{-s} \cdot \frac{ds}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^\beta \cdot e^{-s} ds.$$

Интеграл равен Гамма-функции

$$\frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^\beta \cdot e^{-s} ds = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma(\beta+1) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \cdot \beta \cdot \Gamma(\beta) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Найдём второй момент

$$MX_1^2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} e^{-\alpha y} \cdot y^2 dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^\beta y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy.$$

Умножаем на α числитель и знаменатель

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^\beta y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\alpha} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^{\beta+1} y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy.$$

Сделаем замену как и в предыдущем случае

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)\,\alpha} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^{\beta+1} y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\alpha^2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^{\beta+1} e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\beta+2)}{\alpha^2\Gamma(\beta)}.$$

Пользуясь свойством Гамма-функции, записываем

$$\frac{\Gamma(\beta+2)}{\alpha^2\Gamma(\beta)} = \frac{(\beta+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\alpha^2\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\beta+1)\,\beta + \Gamma(\beta+1)}{\alpha^2\Gamma(\beta)}.$$

Снова пользуемся свойством Гамма-функции и сокращаем её

$$\frac{\Gamma(\beta+1)\beta+\Gamma(\beta+1)}{\alpha^2\Gamma(\beta)}=\frac{\beta^2\Gamma(\beta)+\beta\Gamma(\beta)}{\alpha^2\Gamma(\beta)}=\frac{\beta^2+\beta}{\alpha^2}.$$

Приравниваем теоретический момент и выборочный момент, учитывая, что α — параметр

$$\frac{\beta}{\alpha^*}=\overline{X},$$

откуда

$$\alpha^*=\frac{\beta}{\overline{X}};$$

b) считаем, что α — известно, ищем β^*.

Приравниваем моменты

$$\frac{\beta^*}{\alpha}=\overline{X},$$

откуда $\beta^*=\alpha\overline{X}$;

c) нужно 2 уравнения

$$\begin{cases}\frac{\beta^*}{\alpha^*}=\overline{X},\\ \frac{(\beta^*)^2+\beta^*}{(\alpha^*)^2}=\overline{X^2}.\end{cases}$$

Выражаем α^* из первого уравнения и подставляем во второе

$$\frac{(\beta^*)^2+\beta^*}{\beta^*}\cdot\overline{X}=\overline{X^2}.$$

Поделим числитель на знаменатель

$$\left(1+\frac{1}{\beta^*}\right)\cdot\left(\overline{X}\right)^2=\overline{X^2}.$$

Оставляем в левой части только скобку

$$1+\frac{1}{\beta^*}=\frac{\overline{X^2}}{\left(\overline{X}\right)^2}.$$

Переносим единицу вправо

$$\frac{1}{\beta^*}=\frac{\overline{X^2}}{\left(\overline{X}\right)^2}-1.$$

Выражаем параметр

$$\beta^*=\frac{1}{\frac{\overline{X^2}}{\left(\overline{X}\right)^2}-1}=\frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}.$$

Соответственно находим

$$\alpha^* = \frac{\beta^*}{\overline{X}} = \frac{\frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}}{\overline{X}} = \frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\left(\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2\right)\overline{X}} = \frac{\overline{X}}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}.$$

3.15

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 2, p. Пользуясь методом моментов с пробной функцией

$$g(y) = y,$$

оцените параметр $\theta = e^{2p}$.

Решение. $Mg(X_1) = \overline{g(X)}$ — метод моментов.

Ищем теоретический момент, зная распределение

$$MX_1 = \sum_{k=0}^{2} k \cdot P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{2} k \cdot C_2^k p^k (1-p)^{2-k}.$$

При $k = 0$ первое слагаемое зануляется, поэтому можно суммировать от единицы

$$\sum_{k=0}^{2} k \cdot C_2^k p^k (1-p)^{2-k} = \sum_{k=1}^{2} k \cdot C_2^k \cdot p^k (1-p)^{2-k} = 1 \cdot C_2^1 p (1-p) + 2 \cdot C_2^2 \cdot p^2.$$

Распишем биномиальные коэффициенты, раскроем скобки и приведём подобные

$$1 \cdot C_2^1 p (1-p) + 2 \cdot C_2^2 \cdot p^2 = 2p(1-p) + 2p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p.$$

Должны решить уравнение $2p^* = \overline{X}$.

Отсюда

$$p^* = \frac{\overline{X}}{2}.$$

Оценим параметр $\theta^* = e^{2p^*} = e^{\frac{2\overline{X}}{2}} = e^{\overline{X}}$.

3.16

Задание. При нейтронном бомбардировании ядер урана начинается расщепление ядра, при котором ядро урана распадается на две части разного типа. В камере Вильсона это явление наблюдается в виде двух траекторий, которые выходят из одной точки. Эти траектории вскоре разделяются на несколько веток, которые получаются от столкновения частиц с молекулами газа в камере. Можно показать, что количество веток в одной траектории имеет так называемое «двойное» распределение Пуассона, то есть

$$P(X = k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}\right),\ k = 0, 1, \ldots,$$

где $\lambda_1 < \lambda_2$ — некоторые положительные постоянные. Пользуясь методом моментов, оцените векторный параметр (λ_1, λ_2).

Решение.

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\left(X = k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}\right).$$

Разобьём на две суммы

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}.$$

Слагаемые при $k = 0$ равны нулю

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}.$$

Вынесем λ_i за скобку и сократим k, где $i \in \{1, 2\}$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} = \\ = \frac{\lambda_1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} = \\ = \frac{\lambda_1}{2} \cdot e^{\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{2} \cdot e^{\lambda_2} \cdot e^{-\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \end{aligned}$$

Одного теоретического момента мало.

Нужно найти второй теоретический момент

$$MX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}\right).$$

Одно k сокращаем, записываем через две суммы

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{(k-2)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{(k-2)!} \cdot e^{-\lambda_2} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot e^{\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2^2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot e^{\lambda_2} + \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 + \lambda_2 \right).$$

Составим уравенения с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1^* + \lambda_2^*}{2} = \overline{X}, \\ \frac{1}{2} \cdot \Big((\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2 + \lambda_1^* + \lambda_2^* \Big) = \overline{X^2}. \end{cases}$$

Возведём первое уравнение в квадрат, предварительно умножив на 2. Получим $(\lambda_1^* + \lambda_2^*)^2 = (\lambda_1^*)^2 + 2\lambda_1^*\lambda_2^* + (\lambda_2^*)^2 = 4 \left(\overline{X}\right)^2$, откуда

$$(\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2 = 4 \left(\overline{X}\right)^2 - 2\lambda_1^*\lambda_2^*.$$

Подставим это выражение во второе уравнение

$$\frac{1}{2} \cdot \left[4 \left(\overline{X}\right)^2 - 2\lambda_1^*\lambda_2^* + \lambda_1^* + \lambda_2^* \right] = \overline{X^2}.$$

Раскроем скобки

$$2 \left(\overline{X}\right)^2 - \lambda_1^*\lambda_2^* + \frac{1}{2} (\lambda_1^* + \lambda_2^*) = \overline{X^2}.$$

Подставим сумму оценок из первого уравнения

$$2\left(\overline{X}\right)^2 - \lambda_1^*\lambda_2^* + \frac{1}{2}\cdot 2\overline{X} = \overline{X^2}.$$

Выразим произведение оценок и сократим двойки $\lambda_1^*\lambda_2^* = 2\left(\overline{X}\right)^2 + \overline{X} - \overline{X^2}$.

Из первого уравнения подставим $\lambda_2^* = 2\overline{X} - \lambda_1^*$ в полученное уравнение $\lambda_1^*\left(2\overline{X} - \lambda_1^*\right) = 2\left(\overline{X}\right)^2 + \overline{X} - \overline{X^2}$.

Раскроем скобки и поменяем знаки в обеих частях

$$(\lambda_1^*)^2 - 2\overline{X}\lambda_1^* = -2\left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X} + \overline{X^2}.$$

Перенесём всё влево $(\lambda_1^*)^2 - 2\overline{X}\lambda_1^* + 2\left(\overline{X}\right)^2 + \overline{X} - \overline{X^2} = 0$.

Получили квадратное уравнение относительно λ_1^*. Найдём его дискриминант

$$D = 4\left(\overline{X}\right)^2 - 4\left(2\left(\overline{X}\right)^2 + \overline{X} - \overline{X^2}\right) = 4\left(\overline{X}\right)^2 - 8\left(\overline{X}\right)^2 - 4\overline{X} + 4\overline{X^2}.$$

Приведём подобные

$$4\left(\overline{X}\right)^2 - 8\left(\overline{X}\right)^2 - 4\overline{X} + 4\overline{X^2} = 4\overline{X^2} - 4\left(\overline{X}\right)^2 - 4\overline{X}.$$

Найдём корень

$$\lambda_1^* = \frac{2\overline{X} - 2\sqrt{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X}}}{2} = \overline{X} - \sqrt{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X}}.$$

Тогда оценка второго параметра равна $\lambda_2^* = \overline{X} + \sqrt{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X}}$.

Занятие 4. Оценка максимального правдоподобия

Контрольные вопросы и задания

Как построить оценку максимального правдоподобия?

Плотность распределения выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ имеет вид

$$L\left(\vec{X}, \theta\right) = \prod_{k=1}^{n} p\left(X_k, \theta\right),$$

как плотность вектора с независимыми координатами. $L\left(\vec{X}, \theta\right)$ — функция правдоподобия.

Оценка максимаьлного правдоподобия $\hat{\theta}$ — такое значение параметра θ, при котором функция правдоподобия достикает своего максимального значения $\hat{\theta} = \underset{\theta}{argmax} L\left(\vec{X}, \theta\right)$.

Сформулируйте свойства оценки максимального правдоподобия.

Оценка максимального правдоподобия, как правило, сильно состоятельная.

Аудиторные задачи

4.3

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия векторного параметра $\left(a, \sigma^2\right)$ нормального распределения.

Решение. Выборка $x_1, \ldots, x_n \sim N\left(a, \sigma^2\right)$. Сейчас θ будет векторным параметром, состоящим из двух элементов: a, σ^2.

Плотность имеет вид

$$p\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Произведение этих плотностей даёт

$$L\left(\vec{x},a,\sigma^2\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}.$$

Обозначим $\sigma^2=\sigma^*$, чтобы было удобней брать производную

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^2}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^*)^{\frac{n}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^*}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}.$$

Поскольку есть экспонента, стоит брать логарифм

$$l\left(\vec{x},a,\sigma^*\right)=lnL\left(\vec{x},a,\sigma^*\right)=-\frac{n}{2}\cdot ln\left(2\pi\sigma^*\right)-\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Распишем логарифм произведения через сумму логарифмов

$$-\frac{n}{2}\cdot ln\left(2\pi\sigma^*\right)-\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=-\frac{n}{2}\cdot ln\left(2\pi\right)-\frac{n}{2}\cdot ln\sigma^*-\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Берём производную

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^*}l=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^*}+\frac{1}{2\left(\sigma^*\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=0.$$

Теперь надо по a продифференцировать и тоже приравнять к нулю

$$\frac{\partial}{\partial a}l=\frac{1}{\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)=0=\frac{n\overline{X}-na}{\sigma^*}.$$

Распишем сумму в явном виде $(x_1-a)+(x_2-a)+\ldots+(x_n-a)=0$.
Отсюда

$$a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Оценка равна $\hat{a}=\overline{x}$.
Тогда оценка второго параметра равна

$$\hat{\sigma^*}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2.$$

Проверили только необходимое условие для максимума. Теперь нужно проверить достаточность.

Имеем матрицу $n \times n$. Матрица положительно определена тогда и только тогда, когда каждый минор положительный. Матрица отрицательно определена тогда и только тогда, когда каждый минор отрицательный.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial a^2} & \frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma^*} \\ \frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma^*} & \frac{\partial^2}{\partial (\sigma^*)^2} \end{bmatrix}.$$

Найдём последний элемент матрицы

$$\frac{\partial^2}{\partial \left(\sigma^*\right)^2} l = \frac{n}{2\left(\sigma^*\right)^2} - \frac{1}{\left(\sigma^*\right)^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)^2.$$

Найдём смешанную производную

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma^*} l = -\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right) \cdot \frac{1}{\left(\sigma^*\right)^2} = \frac{n\overline{x} - na}{\left(\sigma^*\right)^2}.$$

Найдём первый элемент матрицы

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} l = -\frac{n}{\sigma^*}.$$

Теорема Шварца. Если

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

и они непрерывны в точке (x_0, y_0), то они совпадают в этой точке.

Первый определитель строго отрицательный.

Второй определитель

$$M_2 = -\frac{n^2}{2\left(\sigma^*\right)^3} + \frac{n}{\left(\sigma^*\right)^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right) - \frac{n}{\left(\sigma^*\right)^4} \cdot \left(\overline{x} - a\right)^2.$$

Последнее слагаемое равно нулю. Нужно проверять это значение в точке $\hat{a} = \overline{x}$. Имеем

$$-\frac{n^2}{2\left(\sigma^*\right)^3} + \frac{n}{\left(\sigma^*\right)^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right) - \frac{n}{\left(\sigma^*\right)^4} \cdot \left(\overline{x} - a\right)^2 =$$
$$= -\frac{n}{\left(\sigma^*\right)^3} \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{\sigma^*} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)\right) > 0.$$

Нужно проверить в точке $\sigma^* = \hat{\sigma}$. Имеем

$$\frac{n}{2} < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)^2}{\sigma^*}.$$

Отсюда выражаем значение оценки

$$\sigma^* = \hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}).$$

Следовательно,

$$\frac{n}{2} < n,$$

то есть $M_2 < 0$. По критерию Сильвестра $\hat{A} < 0$ тогда и только тогда, когда $\left(\hat{a}, \hat{\sigma^*}\right)$ — точка максимума.

4.5

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра θ показательного распределения.

Решение. $p(x, \theta) = \theta e^{-\theta x} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\}$.

Нужно найти функцию правдобоподия как произведение плотностей $L(\vec{x}, \theta) = \theta^n \cdot e^{-n\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\{\vec{x} \in [0, +\infty)^n\}$. Предполагаем, что все $x_i \geq 0$, то есть индикатор можно отбросить. Если какой-то элемент выборки сильно отрицательный, то не имеет смысла говорить о равномерном распределении. Если какой-то элемент выборки близок к нулю и при этом отрицательный, то на него повлияла ошибка, и его не учитываем

$$\theta^n \cdot e^{-n\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\{\vec{x} \in [0, +\infty)^n\} = \theta^n e^{-n\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Удобнее будет рассмотреть

$$lnL(\vec{x}, \theta) = l(\theta) = -\theta\sum_{i=1}^{n} x_i + nln\theta.$$

Нужно взять производную и приравнять к нулю

$$\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{\theta} = 0.$$

Переносим сумму вправо

$$\frac{n}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Получаем оценку

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Выразим через выборочное среднее

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Остаётся проверить, что $\hat{\theta}$ будет действительно максимумом функции l. Нужно найти вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta) = -\frac{n}{\theta^n} < 0.$$

Отсюда следует, что фунция выпуклая ввекх, соответственно это точка максимума.

4.6

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$ равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$.

Решение. Плотность равномерного распределения на отрезук $[0, \theta]$ имеет вид

$$p_\theta(x) = \frac{\mathbb{1}\{x \in [0, \theta]\}}{\theta}.$$

По этой плотности строим функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \frac{\mathbb{1}\{\vec{x} \in [0, \theta]^n\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min\limits_i x_i \geq 0, \max\limits_i x_i \leq \theta\right\}}{\theta^n}.$$

Если какой-то элемент выборки сильно отрицательный, то не имеет смысла говорить о равномерном распределении, если близок к нулю, то на него повлияла ошибка, и его не учитываем

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\min\limits_i x_i \geq 0, \max\limits_i x_i \leq \theta\right\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\max\limits_i x_i \leq \theta\right\}}{\theta}.$$

Нарисуем график получившейся функции как функции от θ (рис. 4).

Точка максимума такой функции — это $\max\limits_i x_i$.

Значит, $\hat{\theta} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$.

4.7

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра сдвига $\beta \in \mathbb{R}$ показательного распределения с плотностью

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta - y}, & y \geq \beta, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

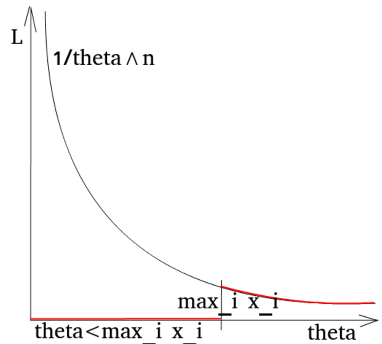

Рис. 4: График функции $L(\theta)$

Проверьте состоятельность этой оценки.
Решение. $f_\beta(y) = e^{\beta - y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq \beta\}$.
Запишем функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \beta) = e^{n\beta - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\{\vec{x} \in [\beta, +\infty)^n\} = e^{n\beta - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\left\{\min_{1 \leq i \leq n} x_i \geq \beta\right\}.$$

Рисуем схематический график (рис. 5).

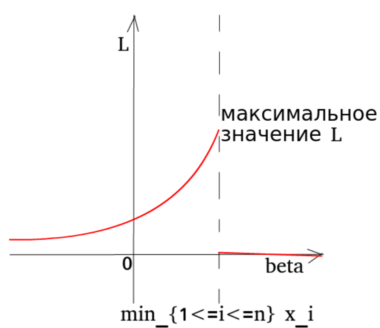

Рис. 5: График функции $L(\beta)$

Из графика видно, что $\hat{\beta} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$. Проверяем состоятельность:

$$\hat{\beta} \xrightarrow{P} \beta,\ n \to \infty.$$

По определению $P\left(\left|\hat{\beta} - \beta\right| > \varepsilon\right) \to 0$, $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$. Подставляем оценку в функцию правдоподобия

$$e^{n\beta - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\left\{\min_{1 \leq i \leq n} x_i \geq \beta\right\} = P\left(\left|\min_{1 \leq i \leq n} x_i - \beta\right| > \varepsilon\right).$$

Минимальный член выборки не может быть меньше β из-за распределения. $P\left(\left|\min\limits_{1\le i\le n} x_i - \beta\right| > \varepsilon\right) = P\left(\min\limits_{1\le i\le n} x_i > \beta + \varepsilon\right)$. Запишем через вероятность пересечения событий $\{x_i > \beta+\varepsilon\}$. Получим

$$P\left(\min_{1\le i\le n} x_i > \beta+\varepsilon\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{x_i > \beta+\varepsilon\}\right).$$

Случайные величины независимы и одинаково распределены

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{x_i > \beta+\varepsilon\}\right) = \left[P\left(x_1 > \beta+\varepsilon\right)\right]^n \to 0,\ n\to\infty,$$

так как такая вероятность меньше единицы.

Достаточно показать, что $P\left(x_1 > \beta+\varepsilon\right) \ne 1$. Тогда $l^n \to 0$.

Запишем интеграл от плотности со сдвигом

$$\int\limits_{\beta+\varepsilon}^{+\infty} p_\beta\left(y\right)dy = 1 - \int\limits_{\beta}^{\beta+\varepsilon} p_\beta\left(y\right)dy < 1,$$

так как второй интеграл больше нуля (забрали кусок $\beta+\varepsilon$).

4.9

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра p распределения Бернулли.

Решение. Распределение Бернулли не имеет плотности. Есть выборка $x_1,\ldots,x_n \sim B\left(1,p\right)$.

Функция правдоподобия, когда есть плотность, выглядит так

$$L\left(\vec{x},p\right) = \prod_{i=1}^{n} p_p\left(x_i\right).$$

Функция $f_p\left(x\right) = P\left\{x_1 = x\right\} =$ “$P\left(\left\{\omega \mid x_1\left(\omega\right) = x\right\}\right)$, где $x \in \{0,1\}$.

В этом случае функция правдободобие примет вид

$$L\left(\vec{x},p\right) = \prod_{i=1}^{n} f_p\left(x_i\right).$$

Для распределения Пуассона $x \in \{0,1,2,\ldots\}$. Ищем максимум функции правдоподобия. Нужно записать $f_p\left(1\right) = p$, $f_p\left(0\right) = 1-p$, то есть

$$f_p\left(x\right) = \begin{cases} p, & x = 1, \\ 1-p, & x = 0 \end{cases} = p\cdot\mathbb{1}\left\{x=1\right\} + \left(1-p\right)\cdot\mathbb{1}\left\{x=0\right\}.$$

Подставляем в функцию правдоподобия

$$\prod_{i=1}^{n} f_p\left(x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \left[p \cdot \mathbb{1}\left\{x_i = 1\right\} + (1-p) \cdot \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\}\right].$$

Перепишем первый индикатор как $\mathbb{1}\left\{x_i = 1\right\} = 1 - \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\}$. Получим

$$\prod_{i=1}^{n} \left[p \cdot \mathbb{1}\left\{x_i = 1\right\} + (1-p) \cdot \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\}\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left[p - p \cdot \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\} + \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\} - p \cdot \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\}\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(p - 2p \cdot \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\} + \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\}\right) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{x_i = 1\right\}} \cdot (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\}}.$$

p будет встречаться ровно столько раз, сколько индикаторов равно единице.

$$p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{x_i = 1\right\}} \cdot (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{x_i = 0\right\}} = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \left(1-p\right)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = p^{n\overline{x}} \left(1-p\right)^{n\left(1-\overline{x}\right)}.$$

Теперь нужно брать производную по p, приравнивать к нулю, искать оценку, которая должна получиться $\hat{p} = \overline{x}$.

Домашнее задание

4.14

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия дисперсии σ^2 нормального распределения, если математическое ожидание a известно. Выясните, не является ли оценка состоятельной оценкой параметра σ^2.

Решение.

$$p_{\sigma^2}\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Запишем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{x}, \sigma^2\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2}.$$

Обозначим $\sigma^2 = \sigma^*$, чтобы было удобнее брать производную

$$\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2} = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^*\right)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^*} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2}.$$

Поскольку есть экспонента, стоит брать логарифм

$$l\left(\vec{x}, \sigma^2\right) = lnL\left(\vec{x}, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2} \cdot ln\left(2\pi\sigma^*\right) - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)^2.$$

Распишем логарифм произведения через сумму логарифмов в первом слагаемом

$$-\frac{n}{2}\cdot ln\left(2\pi\sigma^*\right)-\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=-\frac{n}{2}\cdot ln\left(2\pi\right)-\frac{n}{2}\cdot ln\sigma^*-\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Берём производную и приравниваем её к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma^*}=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^*}+\frac{1}{2\left(\sigma^*\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=0.$$

Выносим в знаменателе σ^* за скобку, сокращаем и переносим первое слагаемое вправо

$$\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=\frac{n}{2}.$$

Выражаем оценку

$$\sigma^*=\hat{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2}{n}.$$

Проверили необходимое условие для максимума. Теперь нужно проверить достаточное.

Найдём вторую производную

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\left(\sigma^*\right)^2}=\frac{\partial}{\partial\sigma^*}\left[-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^*}+\frac{1}{2\left(\sigma^*\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]=\frac{n}{2\left(\sigma^*\right)^2}-\frac{1}{\left(\sigma^*\right)^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Подставим найденное значение оценки

$$\frac{n}{2\left(\sigma^*\right)^2}-\frac{1}{\left(\sigma^*\right)^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=\frac{n\cdot n^2}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^2}-\frac{n^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Упростим

$$\frac{n\cdot n^2}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^2}-\frac{n^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=$$

$$=\frac{n^3}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^2}-\frac{n^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^2}=\frac{n^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^3}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)=$$

$$=-\frac{n^3}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^3}<0,$$

следовательно, $\hat{\sigma^2}$ — точка максимума функции. Проверим состоятельность, то есть $\hat{\sigma^2} \xrightarrow{P} \sigma^2$, $n \to \infty$.

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \xrightarrow{P} M\,(x_1 - a)^2 = Dx_1 = \sigma^2,\ n \to \infty,$$

то есть оценка состоятельная.