

# Оглавление

<b>Занятие 1. Выборочные характеристики</b>	<b>2</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	3
Аудиторные задачи . . . . .	4
Домашнее задание . . . . .	11
<b>Занятие 2. Свойства оценок</b>	<b>25</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	27
Аудиторные задачи . . . . .	28
Домашнее задание . . . . .	35
<b>Занятие 3. Метод моментов построения оценок</b>	<b>47</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	49
Аудиторные задачи . . . . .	50
Домашнее задание . . . . .	54
<b>Занятие 4. Оценка максимального правдоподобия</b>	<b>62</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	63
Аудиторные задачи . . . . .	63
Домашнее задание . . . . .	72
<b>Занятие 5. Достаточные статистики</b>	<b>84</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	85
Аудиторные задачи . . . . .	85
Домашнее задание . . . . .	90
<b>Занятие 6. Теорема Колмогорова про улучшение оценок. Неравенство Рао-Крамера</b>	<b>95</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	97
Аудиторные задачи . . . . .	98
Домашнее задание . . . . .	105
<b>Занятие 7. Гауссовы системы</b>	<b>113</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	115
Аудиторные задачи . . . . .	116
Домашнее задание . . . . .	126

<b>Занятие 8. Основные распределения, связанные с нормальным законом</b>	<b>137</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	139
Аудиторные задачи . . . . .	139
Домашнее задание . . . . .	141

# Занятие 1. Выборочные характеристики

## Контрольные вопросы и задания

**Приведите определение выборки, вариационного ряда, статистики, порядковой статистики, эмпирической функции распределения.**

$x_1, \dots, x_n$  — наблюдаемые значения — независимые одинаково распределённые случайные величины с неизвестной функцией распределения  $F(x)$ .

Такой набор случайных величин называется выборкой из распределения  $F$ .

Вариационный ряд — последовательность  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ , полученная в результате расположения в порядке неубывания исходной последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин  $x_1, \dots, x_n$ .

Статистикой называют функцию  $S$  от выборки  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  такую, что  $S(X) = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Вариационный ряд и его члены являются порядковыми статистиками.

Эмпирической (выборочной) функцией распределения, построенной по выборке  $x_1, \dots, x_n$  называется функция

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{x_k \leq x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Какими свойствами обладает эмпирическая функция распределения?**

Есть множество полной вероятности, на котором эмпирическая функция распределения аппроксимирует функцию распределения, то есть почти наверное  $F_n \Rightarrow F, n \rightarrow \infty$ .

Запишите выражения для выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочных моментов.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

— выборочное среднее.

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

Выборочные моменты в математической статистике — это оценка теоретических моментов распределения на основе выборки.

Выборочный момент порядка  $k$  — это случайная величина

$$a_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

## Аудиторные задачи

### 1.4

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$  с неизвестным параметром  $\theta$ . Какие из приведённых ниже функций являются статистиками?

- a)  $\bar{X}$ ;
- b)  $5X_{(n)}$ ;
- c)  $\theta/2$ ;
- d)  $X_1/\theta$ ;
- e)  $X_{(1)} + X_1 + X_n$ .

*Решение.*

- a) Да;
- b) да;
- c) нет, так как не функция от выборки;
- d) функция не только от выборки (зависит от неизвестного параметра). Отсюда следует, что это не статистика;
- e) да.

### 1.5

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . Вычислите математическое ожидание и дисперсию статистики

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Выясните, имеет ли статистика  $\bar{X}$  распределение Пуассона.

*Решение.* Все  $X_i$  одинаково распределены. Отсюда следует, что все математические ожидания одинаковы

$$M\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \lambda.$$

Для всякой выборки справедливо  $M\bar{X} = MX_1$ .

Из независимости  $X_i$  получаем

$$D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i.$$

Так как  $X_i$  одинаково распределены, то все дисперсии одинаковы

$$D\bar{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{\lambda}{n}.$$

Математическое ожидание и дисперсия для распределения Пуассона совпадают. Отсюда следует, что эта случайная величина не имеет распределения Пуассона.

$\bar{X}$  не обязательно будет принимать целые значения.

### 1.6

*Задание.* Вычислите математическое ожидание статистик:

a)  $S^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2$ ;

b)  $S_0^2 = 1/(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

*Решение.*

a) Распишем каждую из величин

$$S^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2.$$

Распишем квадрат

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i < j}^n X_i X_j \right).$$

Берём слева и справа математическое ожидание. Из того, что случайные величины в выборке одинаково распределены

$$MS^2 = MX_1^2 - \frac{1}{n^2} [nMX_1 + 2C_n^2 (MX_1)^2].$$

Подставляем  $C_n^2$  и группируем

$$MX_1^2 - \frac{1}{n^2} [nMX_1 + 2C_n^2 (MX_1)^2] = \frac{n-1}{n} \cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n} (MX_1)^2.$$

Вынесем общий множитель за скобки

$$\frac{n-1}{n} \cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n} (MX_1)^2 = \frac{n-1}{n} [MX_1^2 - (MX_1)^2] = \frac{n-1}{n} \cdot SX_1.$$

Эта оценка смещена асимптотически;

b) выразим  $S_0$  через  $S$ . Раскроем квадрат

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2).$$

Имеем сумму  $n$  одинаковых слагаемых

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} (n\bar{X}^2 - 2(\bar{X})^2 n + n\bar{X}^2) = \frac{n}{n-1} [\bar{X}^2 - (\bar{X})^2] = \frac{n-1}{n} \cdot S^2.$$

Отсюда следует, что

$$MS_0^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot DX_1 = DX_1.$$

## 1.7

*Задание.* Найдите в терминах функции распределения  $F$  выборки  $X_1, \dots, X_n$ :

- a) распределение  $k$ -ой порядковой статистики  $X_{(k)}$ ;
- b) вероятность  $P(X_{(k)} < y, X_{(k+1)} \geq y)$ .

*Решение.*

- a) Сделали упорядочивание случайных величин

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

По определению  $F_{X_{(k)}}(y) = P(X_{(k)} \leq y) = P\{\text{хотя бы } k \text{ элементов выборки не превышает } y\} =$

$$= \sum_{i=k}^n P(A_i),$$

где  $A_i = \{\text{ровно } i \text{ элементов выборки не превышают } y\}$ .

Есть  $n$  испытаний, успех —  $X_i \leq y$ .

Вероятность успеха — это  $F(y)$ , вероятность неудачи — это  $[1 - F(y)]$ .

Это биномиальное распределение

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^n C_n^i F^i(y) [1 - F(y)]^{n-i};$$

б) согласно с предыдущим пунктом  $P(X_{(k)} < y, X_{(k+1)} \geq y) = P\{\text{ровно } i \text{ элементов выборки не превышает } y\} = C_n^k F^k(y) [1 - F(y)]^{n-k}$ .

## 1.8

*Задание.* Пусть  $(-0.8; 2.9; 4.5; -5.7; 1.1; -3.2)$  — наблюдаемые значения выборки. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения  $F_6(x)$  и её график. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

*Решение.* Вариационный ряд:  $(-5.7; -3.2; -0.8; 1.1; 2.9; 4.3)$ .

Эмпирическая функция распределения (рис. 1).

$$F_6(y) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \mathbb{1}\{x_i \leq y\} = \begin{cases} 0, & x < -5.7; \\ \frac{1}{6}, & -5.7 \leq x < -3.2, \\ \frac{2}{6}, & -3.2 \leq x < -0.8, \\ \frac{3}{6}, & -0.8 \leq x < 1.1, \\ \frac{4}{6}, & 1.1 \leq x < 2.9, \\ \frac{5}{6}, & 2.9 \leq x < 4.3, \\ 1, & x \geq 4.3. \end{cases}$$

Выборочное среднее

$$\bar{X} = \frac{1}{6} (-5.7 - 3.2 - 0.8 + 1.1 + 2.9 + 4.3) = \frac{1}{6} (-9.7 + 8.3) = -\frac{1}{6} \cdot 1.4 = -0.23.$$

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (X_i + 0.23)^2.$$

Она является несмещённой.



Рис. 1: Эмпирическая функция распределения

### 1.9

*Задание.* Вычислите вероятность  $P(F_n(y) < F_n(z))$ .

*Решение.*

- а)  $y \geq z$ . Событие невозможное, потому что  $F_n(y) \geq F_n(z)$ ;  
 б) рассмотрим случай, когда  $y < z$ .

Тогда искомая вероятность равна  $P(F_n(y) < F_n(z)) = P\{\text{в } (y, z) \text{ попал хотя бы 1 элемент выборки}\} = 1 - P\{\text{в } (y, z) \text{ ни один элемент выборки не попал}\}$ . Случайные величины одинаково распределены, поэтому  $1 - P\{\text{в } (y, z) \text{ ни один элемент выборки не попал}\} =$   
 $= [1 - P\{x_i \notin (y, z)\}]^n = 1 - [1 - P\{x_1 \in (y, z)\}]^n =$   
 $= 1 - [1 - P(x_1 < z) + P(x_1 < y)]^n = 1 - [1 - F(z) + F(y)]^n.$

### 1.10

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения  $F$  с плотностью  $f$ . Найдите совместную плотность распределения всех порядковых статистик, то есть плотность распределения случайного вектора  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ .

*Решение.*  $F_{(X_{(1)}, X_{(2)})}(y_1, y_2) = P(X_{(1)} \leq y_1, X_{(2)} \leq y_2)$ . Воспользуемся формулой  $P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ . Получим

$$P(X_{(1)} \leq y_1, X_{(2)} \leq y_2) = P(X_{(1)} \leq y_2) - P(X_{(1)} > y_1, X_{(2)} \leq y_2).$$

Среди  $X_{(1)}$  и  $X_{(2)}$  случайная величина  $X_{(2)}$  является максимальной.

$$\begin{aligned} & P(X_{(1)} \leq y_2) - P(X_{(1)} > y_1, X_{(2)} \leq y_2) = \\ & = P(X_1 \leq y_2, X_2 \leq y_2) - P(X_1 \in (y_1, y_2], X_2 \in (y_1, y_2]). \end{aligned}$$

Случайные величины  $X_1, X_2$  — независимые и одинаково распределённые

$$\begin{aligned} & P(X_1 \leq y_2, X_2 \leq y_2) - P(X_1 \in (y_1, y_2], X_2 \in (y_1, y_2]) = \\ & = \begin{cases} [F(y_2)]^2, & y_1 \geq y_2, \\ [F(y_2)]^2 - [F(y_2) - F(y_1)]^2, & y_1 < y_2. \end{cases} \end{aligned}$$



Продифференцируем

$$f_{(X_{(1)}, X_{(2)})}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_1 \geq y_2, \\ 2f(y_1)f(y_2), & y_1 < y_2. \end{cases}$$

Рассматриваем множество всех векторов, которые имеют упорядоченные координаты  $\Delta = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : z_1 < z_2 < \dots < z_n\}$ ,  $\Gamma \subseteq \Delta$  — произвольное подмножество.

$$(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \in \Delta.$$

Чтобы найти вероятность того, что данный вектор принадлежит  $\Gamma$ , должны проинтегрировать плотность этого вектора по этому множеству

$$P\{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \in \Gamma\} = \int_{\Gamma} f_{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})}(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n.$$

С другой стороны,

$$P\{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \in \Gamma\} = \sum_{\sigma \in S_n} P\{(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \in \Gamma\}.$$

Учтём все перестановки

$$\sum_{\sigma \in S_n} P\{(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \in \Gamma\} = n! P\{(X_1, \dots, X_n) \in \Gamma\}.$$

Подставим найденное выражение для вероятности

$$n! P\{(X_1, \dots, X_n) \in \Gamma\} = n! \cdot \int_{\Gamma} f(z_1) \cdot \dots \cdot f(z_n) dz_1 \dots dz_n.$$

Сравниваем полученные выражения

$$f_{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})}(z_1, \dots, z_n) = n! f(z_1) \cdot \dots \cdot f(z_n) \cdot \mathbb{1}\{z_1 < z_2 < \dots < z_n\}$$

— плотность вектора упорядоченных статистик.

### 1.11

*Задание.* Пусть задана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из показательного распределения с параметром  $\alpha$ .

- Докажите, что случайные величины  $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$  являются независимыми;
- найдите распределение разности  $X_{(k+1)} - X_{(k)}$  соседних порядковых статистик.

Решение.  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор с плотностью распределения  $f_{\vec{\xi}}(\vec{x})$ .

Линейное преобразование этого вектора  $\vec{\eta} = A\vec{\xi}$ , где  $A$  — некоторая  $n$ -мерная матрица.

$$f_{A\vec{\xi}}(\vec{y}) = \frac{1}{|\det A|} \cdot f_{\vec{\xi}}(A^{-1}\vec{y}).$$

Составим вектор из величин  $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ . Его плотность должна распадаться на произведение плотностей компонент.

Из задачи 1.10

$$f_{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})}(y_1, \dots, y_n) = n! f(y_1) \cdot \dots \cdot f(y_n) \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \dots < y_n\}.$$

Подставим плотность показательного распределения

$$\begin{aligned} n! f(y_1) \cdot \dots \cdot f(y_n) \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \dots < y_n\} = \\ = n! \alpha e^{-\alpha y_1} \cdot \mathbb{1}\{y_1 > 0\} \cdot \dots \cdot \alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\} \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \dots < y_n\}. \end{aligned}$$

Перемножим

$$\begin{aligned} n! \alpha e^{-\alpha y_1} \cdot \mathbb{1}\{y_1 > 0\} \cdot \dots \cdot \alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\} \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \dots < y_n\} = \\ = n! \alpha^n e^{-\alpha(y_1 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n\}. \end{aligned}$$

Нужно найти линейное преобразование

$$\begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} - X_{(1)} \\ X_{(3)} - X_{(2)} \\ \dots \\ X_{(n)} - X_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ X_{(3)} \\ \dots \\ X_{(n)} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Определитель  $\det A = 1$ .

Ищем обратную матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} - X_{(1)} \\ X_{(3)} - X_{(2)} \\ \dots \\ X_{(n)} - X_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ X_{(3)} \\ \dots \\ X_{(n)} \end{bmatrix}.$$

Тогда имеем выражение

$$A^{-1}\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}.$$

Определим искомый вектор через

$$\vec{\eta} = (X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & f_{\vec{\eta}}(y_1, \dots, y_n) = \\ & = n! \alpha^n e^{-\alpha(ny_1 + (n-1)y_2 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_1 + y_2 < \dots < y_1 + y_2 + \dots + y_n\}. \end{aligned}$$

Разобьём на  $n$  множителей

$$\begin{aligned} & n! \alpha^n e^{-\alpha(ny_1 + (n-1)y_2 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_1 + y_2 < \dots < y_1 + y_2 + \dots + y_n\} = \\ & = [n\alpha e^{-\alpha ny_1} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1\}] \cdot [(n-1)\alpha e^{-\alpha(n-1)y_2} \cdot \mathbb{1}\{y_2 > 0\}] \cdot \dots \times \\ & \quad \times [\alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\}]. \end{aligned}$$

Имеем произведение плотностей компонент, значит, элементы вектора независимы и показательно распределены с параметром  $\alpha(n-k)$ , то есть  $X_{(k+1)} - X_{(k)} \sim \Pi(\alpha(n-k))$ . Считаем, что  $X_{(0)} = 0$ .

## Домашнее задание

### 1.15

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного на отрезке  $[a, b]$  распределения. Вычислите математическое ожидание и дисперсию статистики

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Выясните, имеет ли статистика  $\bar{X}$  равномерное распределение; нормальное распределение.

*Решение.* Все  $X_i$  одинаково распределены. Отсюда следует, что все математические ожидания одинаковы

$$M\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Из независимости  $X_i$  получаем

$$D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i.$$

Так как  $X_i$  одинаково распределены, то все дисперсии одинаковы

$$D\bar{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{(b-a)^2}{12n}.$$

Чтобы выяснить, распределена ли статистика  $\bar{X}$  по нормальному или равномерному распределению, найдём её характеристическую функцию  $\varphi_{\bar{X}}(t)$ . Учитывая независимость элементов выборки и то, что

$$\varphi_{X_1}(t) = \dots = \varphi_{X_n}(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)},$$

находим

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[ \frac{(e^{itb} - e^{ita})n}{it(b-a)} \right]^n.$$

Отсюда следует, что  $\bar{X}$  не имеет указанных распределений.

### 1.16

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из некоторого распределения вероятностей, функция распределения которого  $F$  является непрерывной и строго возрастающей. Найдите распределение выборки  $Y_1, \dots, Y_n$ , где

$$Y_i = F(X_i).$$

*Решение.* По определению

$$F_{\eta_1, \dots, \eta_n}(X_1, \dots, X_n) = P(\eta_1 \leq X_1, \dots, \eta_n \leq X_n).$$

Воспользуемся независимостью

$$P(\eta_1 \leq X_1, \dots, \eta_n \leq X_n) = P(\eta_1 \leq X_1) \cdot \dots \cdot P(\eta_n \leq X_n).$$

Функция распределения  $i$ -й компоненты вектора равна

$$F_{\eta_i}(x) = P(F_{\xi_i}(X_i) \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим  $[0, 1]$ .

Поскольку  $F$  — непрерывная и строго возрастающая, то существует  $F^{-1}(x)$ . Обозначим через  $z$  точку  $F^{-1}(x)$  такую, что  $F(z) = x$ . Событие  $\{\eta = F(\xi) < x\}$  происходит тогда и только тогда, когда происходит событие  $\{\xi < z\}$ .

Получаем на отрезке  $[0, 1]$  равномерное распределение

$$F_{\eta}(x) = F_{\xi}(z) = F_{\xi}(F_{\xi}^{-1}(x)) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

### 1.17

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из дискретного распределения с вероятностями  $P(X_1 = m) = p_m$ , где

$$\sum_{m=0}^N p_m = 1.$$

Найдите распределение  $k$ -й порядковой статистики  $X_{(k)}$ .

*Решение.* Сделали упорядочивание случайных величин

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

По определению  $F_{X_{(k)}}(y) = P(X_{(k)} \leq y) = P\{\text{хотя бы } k \text{ элементов выборки не превышает } y\} =$

$$= \sum_{i=k}^n P(A_i),$$

где  $A_i = \{\text{ровно } i \text{ элементов выборки не превышают } y\}$ .

Есть  $n$  испытаний, успех —  $X_i \leq y$ .

Вероятность успеха — это  $F(y)$ , вероятность неудачи — это  $[1 - F(y)]$ . Это биномиальное распределение

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^n C_n^i F^i(y) [1 - F(y)]^{n-i}.$$

Представим  $F_{X_i}(y) = F(y)$  через  $m$ . Запишем по определению

$$F_{X_1}(y) = P(X_1 \leq y) = \sum_{m=1}^n P(X_1 = m) = \sum_{m=1}^n p_m.$$

Подставим полученное выражение в функцию распределения

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^n C_n^i \sum_{m=1}^n p_m \left(1 - \sum_{m=1}^n p_m\right)^{n-i}.$$

### 1.18

*Задание.* Пусть  $(3, 0, 4, 3, 6, 0, 3, 1)$  — наблюдаемые значения выборки. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения  $F_8(x)$  и её график. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

*Решение.* Вариационный ряд:  $(0, 0, 1, 3, 3, 3, 4, 6)$ .

Эмпирическая функция распределение (рис. 2)

$$F_8(y) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \mathbb{1}\{x_i \leq y\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{8}, & 1 \leq x < 3, \\ \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, & 3 \leq x < 4, \\ \frac{7}{8}, & 4 \leq x < 6, \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$



Рис. 2: Эмпирическая функция распределения

Выборочное среднее

$$\bar{X} = \frac{1}{8} (0 + 0 + 1 + 3 + 3 + 4 + 6) = \frac{1}{8} \cdot 20 = \frac{10}{4} = 2.5.$$

Выборочная дисперсия

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (X_i - 2.5)^2 = \\ &= \frac{1}{7} \left[ 2(0 - 2.5)^2 + (1 - 2.5)^2 + 3(3 - 2.5)^2 + (4 - 2.5)^2 + (6 - 2.5)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{7} (12.5 + 2.25 + 0.75 + 2.25 + 12.25) = \frac{30}{7} \approx 4.29. \end{aligned}$$

### 1.19

*Задание.* По выборке объёма  $n$  из распределения Бернулли с параметром  $p$  постройте эмпирическую функцию распределения  $F_n(y)$ .

*Решение.* Случайная величина имеет распределение Бернулли, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями  $p$  и  $(1 - p)$  соответственно. Таким образом:  $P(x = 1) = p$ ,  $P(x = 0) = 1 - p$ .

Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке

$$x_1, \dots, x_n,$$

называется функция

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \leq y).$$

Пусть есть набор из  $n$  чисел (нулей и единиц) — выборка из распределения Бернулли.

Для удобства выстроим числа в порядке их возрастания:

$$0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1.$$

Видим, что слева от нуля эмпирическая функция распределения будет равна нулю.

В точке 0 произойдёт скачок на

$$\frac{n-k}{n},$$

где  $k$  — количество единиц, а  $(n-k)$  — количество нулей в выборке.

В точке 1 будет скачок на

$$1 - \frac{n-k}{n} = \frac{n-n+k}{n} = \frac{k}{n},$$

а значение самой функции будет равно единице.

$$F_n(y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{n-k}{n} = 1 - \bar{X}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Эмпирическая функция распределения будет выглядеть так, как показано на рис. 3.



Рис. 3: Эмпирическая функция распределения

## 1.20

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения  $F$ . Докажите, что для произвольных  $y \in \mathbb{R}$  и  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  справедливо равенство

$$P\left(F_n(y) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F^k(y) (1 - F(y))^{n-k}.$$

*Решение.* Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке  $X_1, \dots, X_n$ , называется функция

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq y).$$

Посмотрим, что значит событие в указанной вероятности

$$F_n(y) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq y).$$

Сократим константы в знаменателях

$$k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq y).$$

Это означает, что есть ровно  $k$  элементов выборки, не превышающих  $y$ . Следовательно, это биномиальное распределение с параметром  $F(y)$ , то есть

$$P\left(F_n(y) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F^k(y) (1 - F(y))^{n-k}.$$

## 1.21

*Задание.* Для выборки  $X_1, \dots, X_n$  из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$  найдите плотность, математическое ожидание и дисперсию:

- а) максимального члена вариационного ряда  $X_{(n)}$ ;
- б) минимального члена вариационного ряда  $X_{(1)}$ ;
- в) совместную плотность распределения и ковариацию  $X_{(n)}$  и  $X_{(1)}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) Найдем функцию распределения } n\text{-й порядковой статистики } F_{X_{(n)}}(y) &= \\ &= P(X_{(n)} \leq y) = P(n \text{ элементов выборки не превышают } y) = \\ &= C_n^n [F_{X_1}(y)]^n \cdot [1 - F_{X_1}(y)]^{n-n} = [F_{X_1}(y)]^n = [P(X_1 \leq y)]^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n, \end{aligned}$$

при этом  $y \in [0, \theta]$ .

Продифференцируем

$$f_{X_{(n)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(n)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\theta}\right)^n = \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{dy^n}{dy} = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\{y \in [0, \theta]\}.$$



По определению математического ожидания

$$MX_{(n)} = \int_0^\theta y dF^n(y) = \int_0^\theta y d\left(\frac{y}{\theta}\right)^n = \frac{1}{\theta^n} \int_0^\theta y dy^n = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y y^{n-1} dy.$$

Сложим степени сомножителей

$$\frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y y^{n-1} dy = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^n dy = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^\theta = \frac{\theta^{n+1} n}{\theta^n (n+1)} = \frac{\theta n}{n+1}.$$

Найдём второй момент

$$MX_{(n)}^2 = \int_0^\theta y^2 dF^n(y) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^2 y^{n-1} dy = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^{n+1} dy.$$

Возьмём интеграл

$$\frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^{n+1} dy = \frac{ny^{n+2}}{\theta^n (n+2)} \Big|_0^\theta = \frac{n\theta^{n+2}}{\theta^n (n+2)} = \frac{n\theta^2}{n+2}.$$

По свойствам дисперсии

$$DX_{(n)} = MX_{(n)}^2 - (MX_{(n)})^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}.$$

Приведём к общему знаменателю

$$\begin{aligned} \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} &= \frac{n\theta^2 (n^2 + 2n + 1) - n^2\theta^2 (n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \\ &= \frac{n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2 + n\theta^2 - n^3\theta^2 - 2n^2\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}; \end{aligned}$$

b) найдём функцию распределения первой порядковой статистики

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(y) &= P(X_{(1)} \leq y) = P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y) = \\ &= P(\text{хотя бы 1 элемент выборки не превышает } y) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P(\text{exactly } k \text{ elements of the sample does not exceed } y) &= \\ &= \sum_{k=1}^n C_n^k F^k(y) [1 - F(y)]^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k F^k(y) [1 - F(y)]^{n-k} - C_n^0 F^0(y) [1 - F(y)]^{n-0}. \end{aligned}$$

Применяем формулу для бинома Ньютона

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k F^k(y) [1 - F(y)]^{n-k} - C_n^0 F^0(y) [1 - F(y)]^{n-0} = \\ = [F(y) + 1 - F(y)]^n - [1 - F(y)]^n = 1 - \left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n. \end{aligned}$$

Продифференцируем

$$f_{X_{(1)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(1)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{(\theta - y)^n}{\theta^n}\right) = -\frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\theta - y)^n.$$

Берём производную сложной функции

$$-\frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\theta - y)^n - \frac{1}{\theta^n} \cdot n (\theta - y)^{n-1} (-1) = \frac{n (\theta - y)^{n-1}}{\theta^n}, \quad y \in [0, \theta].$$

Найдём математическое ожидание по определению

$$MX_{(1)} = \int_0^\theta y dF^n(y) = \int_0^\theta y d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Сделаем замену

$$1 - \frac{y}{\theta} = z,$$

откуда  $y = \theta(1 - z)$ , при этом интегрирование происходит в пределах от одного до нуля

$$\int_0^\theta y d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n = \int_1^0 \theta(1 - z) dz^n = \theta n \int_1^0 (z - 1) z^{n-1} dz.$$

Разбиваем на 2 интеграла

$$\theta n \int_1^0 (z - 1) z^{n-1} dz = -\theta n \int_0^1 z^n dz + \theta n \int_0^1 z^{n-1} dz = -\theta n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + \theta n \cdot \frac{z^n}{n} \Big|_0^1.$$

Подставляем пределы интегрирования

$$-\theta n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + \theta n \cdot \frac{z^n}{n} \Big|_0^1 = -\theta n \cdot \frac{1}{n+1} + \theta n \cdot \frac{1}{n} = -\theta n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right).$$

Приводим к общему знаменателю

$$-\theta n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -\theta n \cdot \frac{n - n - 1}{n(n+1)} = \frac{\theta n}{n(n+1)} = \frac{\theta}{(n+1)}.$$

Найдём второй момент

$$MX_{(1)}^2 = \int_0^\theta y^2 d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Применяем такую же замену, как при поиске первого момента

$$\int_0^\theta y^2 d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n = \int_1^0 \theta^2 (1-z)^2 dz^n = \int_0^1 \theta^2 n (1-z)^2 z^{n-1} dz.$$

Выносим константу за знак интеграла и возводим скобку в квадрат

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta^2 n (1-z)^2 z^{n-1} dz &= \theta^2 n \int_0^1 (1-2z+z^2) z^{n-1} dz = \\ &= \theta^2 n \int_0^1 z^{n-1} dz - 2\theta^2 n \int_0^1 z^n dz + \theta^2 n \int_0^1 z^{n+1} dz = \\ &= \theta^2 n \cdot \frac{z^n}{n} \Big|_0^1 - 2\theta^2 n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + \theta^2 n \cdot \frac{z^{n+2}}{n+2} \Big|_0^1 = \theta^2 - \frac{2\theta^2 n}{n+1} + \frac{\theta^2 n}{n+2} = \\ &= \theta^2 \left(1 - \frac{2n}{n+1} + \frac{n}{n+2}\right) = \\ &= \theta^2 \cdot \frac{(n+1)(n+2) - 2n(n+2) + n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{\theta^2 (n^2 + 3n + 2 - 2n^2 - 4n + n^2 + n)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

По свойствам дисперсии

$$DX_{(1)} = MX_{(1)}^2 - [MX_{(1)}]^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\begin{aligned} \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} &= \frac{2\theta^2(n+1) - \theta^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \\ &= \frac{2\theta^2 n + 2\theta^2 - \theta^2 n - 2\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}; \end{aligned}$$

с) найдём функцию распределения вектора по определению

$$F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(y_1, y_n) = P(X_{(1)} \leq y_1, X_{(n)} \leq y_n).$$

Воспользовавшись формулой  $P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ , получим

$$P(X_{(1)} \leq y_1, X_{(n)} \leq y_n) = P(X_{(n)} \leq y_n) - P(X_{(1)} > y_1, X_{(n)} \leq y_n).$$

Если максимум меньше какого-то значения, то все элементы меньше него

$$\begin{aligned} P(X_{(1)} > y_1, X_{(n)} \leq y_n) &= \\ &= P(X_1 \leq y_n, \dots, X_n \leq y_n) - \\ &= P(X_1 \in (y_1, y_n], X_2 \in (y_1, y_n], \dots, X_n \in (y_1, y_n]) = \\ &= [F(y_n)]^n - [F(y_n) - F(y_1)]^n \end{aligned}$$

при  $y_1 < y_n$ .

Продифференцируем

$$f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(y_1, y_n) = \begin{cases} 0, & y_1 \geq y_n, \\ n(n-1) \cdot [F(y_n) - F(y_1)]^{n-2} \times \\ \times p_{X_1}(y_1) p_{X_n}(y_n) = \\ = n(n-1) \cdot \left[ \frac{y_n}{\theta} - \frac{y_1}{\theta} \right]^{n-2} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \\ = n(n-1) \cdot \frac{(y_n - y_1)^n}{\theta^{n-2}} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{n(n-1)(y_n - y_1)^{n-1}}{\theta^n}. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание вектора

$$M(X_{(1)}, X_{(n)}) = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta \int_{y_n}^\theta y_1 y_n (y_n - y_1)^{n-2} dy_1 dy_n.$$

Заменяем разность величин величиной  $x$ . Якобиан преобразования равен

$$\frac{\partial(x, y_n)}{\partial(x, y_1)} = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y_1} & \frac{\partial y_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x}{\partial y_n} & \frac{\partial y_1}{\partial y_1} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 1.$$

Получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta \int_{y_n}^\theta y_1 y_n (y_n - y_1)^{n-2} dy_1 dy_n = \\
& = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta \int_0^{\theta-y_n} (x + y_n) y_n x^{n-2} dx dy_n = \\
& = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta y_n dy_n \cdot \int_0^{\theta-y_n} (x^{n-1} + y_n x^{n-2}) dx = \\
& = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta y_n dy_n \cdot \left( \frac{x^n}{n} + y_n \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} \right) \Big|_0^{\theta-y_n} = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta \left[ (n-1)(\theta - y_n) + y_n n (\theta - y_n)^{n-1} \right] \cdot y_n dy_n = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta (\theta - y_n)^{n-1} \cdot [(n-1)(\theta - y_n) + y_n n] \cdot y_n dy_n = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta (\theta - y_n)^{n-1} [n\theta - (\theta - y_n)] y_n dy_n.
\end{aligned}$$

Заменяем первую скобку в интеграле на  $t$ . Получаем

$$\frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta (\theta - y_n)^{n-1} [n\theta - (\theta - y_n)] y_n dy_n = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta t^{n-1} (n\theta - t) (\theta - t) dt.$$

Перемножаем скобки

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta t^{n-1} (n\theta - t) (\theta - t) dt = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta t^{n-1} (n\theta^2 - (n+1)\theta t + t^2) dt = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta (n\theta^2 t^{n-1} - (n+1)\theta t^n + t^{n+1}) dt = \\
& = \frac{1}{\theta^n} \cdot \left[ \theta^2 t^n - \theta t^{n+1} + \frac{t^{n+2}}{n+2} \right] \Big|_0^\theta = \frac{1}{\theta^n} \cdot \left[ \theta^{n+2} - \theta^{n+2} + \frac{\theta^{n+2}}{n+2} \right] = \frac{\theta^2}{n+2}.
\end{aligned}$$

По определению ковариации

$$cov(X_{(1)}, X_{(n)}) = M(X_{(1)}X_{(n)}) - MX_{(1)}MX_{(n)} = \frac{\theta^2}{n+2} - \frac{\theta}{n+1} \cdot \frac{\theta n}{n+1}.$$

Выносим общий множитель за скобки

$$\frac{\theta^2}{n+2} - \frac{\theta}{n+1} \cdot \frac{\theta n}{n+1} = \theta^2 \left( \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right).$$

Приводим к общему знаменателю дроби в скобках

$$\theta^2 \left( \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \theta^2 \cdot \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

### 1.22

*Задание.* Пусть задана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из показательного распределения с параметром  $\alpha$ . Докажите, что

$$MX_{(k)} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{n-k+1} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

не находя распределения порядковой статистики  $X_{(k)}$ .

*Решение.* Преобразуем левую часть того, что нужно доказать

$$MX_{(k)} = MX_{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} M(X_{(i+1)} - X_{(i)}).$$

Элементы выборки имеют плотность распределения

$$p(y) = \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Интегрируя плотность, получим функцию распределения

$$F(y) = \int_{-\infty}^y p(x) dx = \int_{-\infty}^y \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\} dx = \int_0^y \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x} \Big|_0^y.$$

Подставляем пределы интегрирования

$$-e^{-\alpha x} \Big|_0^y = 1 - e^{-\alpha y}, \quad y \geq 0.$$

Находим функцию распределения минимальной порядковой статистики

$$F_{X_{(1)}}(y) = P(X_{(1)} \leq y) = 1 - P(X_{(1)} > y).$$

Если минимальный элемент выборки больше какого-то значения, то все элементы выборки больше него

$$1 - P(X_{(1)} > y) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y).$$

Из независимости случайных величин следует, что

$$1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y) = 1 - P(X_1 > y) \cdot P(X_2 > y) \cdot \dots \cdot P(X_n > y).$$

Переходим к противоположным событиям и учитываем то, что случайные величины одинаково распределены

$$1 - P(X_1 > y) \cdot P(X_2 > y) \cdot \dots \cdot P(X_n > y) = 1 - [1 - F(y)]^n.$$

Находим плотность минимальной порядковой статистики

$$f_{X_{(1)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(1)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial \{1 - [1 - F(y)]^n\}}{\partial y} = -n[1 - F(y)]^{n-1} \cdot (-1) f(y).$$

Упрощаем и учитываем, что  $f(y)$  — это плотность распределения элементов выборки

$$-n[1 - F(y)]^{n-1} \cdot (-1) f(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} p(y).$$

Подставляем функцию и плотность распределения

$$n[1 - F(y)]^{n-1} p(y) = n[1 - (1 - e^{-\alpha y})]^n \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Упрощаем выражение в скобках

$$n[1 - (1 - e^{-\alpha y})]^n \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\} = n\alpha e^{-\alpha(n-1)y} e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Суммируем показатели экспонент

$$n\alpha e^{-\alpha(n-1)y} e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\} = n\alpha e^{-\alpha n y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Отсюда следует, что  $X_{(1)} \sim \text{Exp}(n\alpha)$ .

Из задачи 1.11 б)  $X_{(i+1)} - X_{(i)} \sim \text{Exp}(\alpha(n-i))$ .

Тогда такая разность имеет математическое ожидание

$$M(X_{(i+1)} - X_{(i)}) = \frac{1}{\alpha(n-i)}.$$

Подставляем в полученное в начале выражение

$$MX_{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} M(X_{(i+1)} - X_{(i)}) = \frac{1}{n\alpha} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha(n-i)}.$$

Записываем сумму в явном виде

$$\frac{1}{n\alpha} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha(n-i)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-k+1} \right).$$

### 1.23

*Задание.* Для выборки  $X_1, \dots, X_n$  из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$  найдите:

- а) ковариацию  $X_{(n)}$  и  $X_{(1)}$ ;

б) совместную плотность распределения  $X_{(k)}$  и  $X_{(j)}$ ,  $1 \leq k \leq j \leq n$ .

*Решение.*

а) Данный пункт решён в задаче 1.21 с);

б) по определению функции распределения

$$F_{(X_{(k)}, X_{(j)})}(y, z) = P(X_{(k)} \leq y, X_{(j)} \leq z).$$

Воспользовавшись формулой  $P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ , получим  $P(X_{(k)} \leq y, X_{(j)} \leq z) = P(X_{(j)} \leq z) - P(X_{(k)} > y, X_{(j)} \leq z)$ . Аналогично задаче 1.10 разбиваем на 2 решения согласно коэффициентам

$$\begin{aligned} & P(X_{(j)} \leq z) - P(X_{(k)} > y, X_{(j)} \leq z) = \\ & = \begin{cases} P(X_{(j)} \leq z), & y \geq z, \\ P(X_{(j)} \leq z) - P(X_{(k)} > y, X_{(j)} \leq z), & y < z. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдём первую вероятность  $P(X_{(j)} \leq z) = P(\text{хотя бы } j \text{ элементов выборки не превышает } z) =$

$$= \sum_{i=j}^n C_n^i F^i(z) [1 - F(z)]^{n-i} = \sum_{i=j}^n C_n^i \left(\frac{z}{\theta}\right)^i \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^{n-i}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\sum_{i=j}^n C_n^i \left(\frac{z}{\theta}\right)^i \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^{n-i} = \sum_{i=j}^n C_n^i \frac{z^i}{\theta^i} \cdot \frac{(\theta - z)^{n-i}}{\theta^{n-i}} = \sum_{i=j}^n C_n^i \frac{z^i (\theta - z)^{n-i}}{\theta^n}.$$

Найдём вторую вероятность  $P(X_{(j)} \leq z, X_{(k)} > y) = P(\text{хотя бы}$

$$(j - k + 1)$$

элементов выборки находится в интервале  $(y, z]) =$

$$\begin{aligned} & = \sum_{i=j-k+1}^n C_n^i [F(z) - F(y)]^i \cdot \{1 - [F(z) - F(y)]\}^{n-i} = \\ & = \sum_{i=j-k+1}^n C_n^i \cdot \left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)^i \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)\right]^{n-i} = \\ & = \sum_{i=j-k+1}^n C_n^i \cdot \frac{(z - y)^i}{\theta^i} \cdot \left(1 - \frac{z - y}{\theta}\right)^{n-i} = \\ & = \sum_{i=j-k+1}^n C_n^i \cdot \frac{(z - y)^i}{\theta^i} \cdot \frac{(\theta - z + y)^{n-i}}{\theta^{n-i}} = \\ & = \sum_{i=j-k+1}^n \frac{C_n^i}{\theta^n} (z - y)^i (\theta - z + y)^{n-i}. \end{aligned}$$



Продифференцируем. В первом случае будет 0. Найдём производную второй вероятности

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \\
& = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sum_{i=j-k+1}^n \frac{C_n^i}{\theta^n} \times \right. \\
& \times \left[ i(z-y)^{i-1}(\theta-z+y)^{n-i} - (z-y)(n-i)(\theta-z+y)^{n-i-1} \right] \Big\} = \\
& = \sum_{i=j-k+1}^n \frac{C_n^i}{\theta^n} \times \\
& \times [-i(i-1)(z-y)^{i-2}(\theta-z+y)^{n-i} + \\
& + 2i(z-y)^{i-1}(n-i) \cdot (\theta-z+y)^{n-i-1} - \\
& - (z-y)^i(n-i)(n-i-1) \cdot (\theta-z+y)^{n-i-2}] = \\
& = \sum_{i=j-k+1}^n \frac{C_n^i(z-y)^{i-2} \cdot (\theta-z+y)^{n-i-2}}{\theta^n} \times \\
& \times [2i(z-y)(n-i)(\theta-z+y) - i(i-1)(\theta-z+y) - \\
& - (n-i)(n-i-1)(z-y)^2].
\end{aligned}$$

Тогда во втором случае плотность равна полученному выражению.



## Занятие 2. Свойства оценок

### Контрольные вопросы и задания

**Что называют оценкой неизвестного параметра?**

Статистику, значение которой заменяет неизвестный параметр, называют оценкой этого параметра.

**Приведите определение оценки: несмещённой, асимптотически несмещённой, состоятельной, сильно состоятельной, оптимальной.**

Оценка  $\hat{\theta}$  несмещённая, если  $\forall \theta \in \Theta : M_{\theta} \hat{\theta} = \theta$ .

Асимптотически несмещённая оценка — такая оценка, математическое ожидание которой совпадает с оцениваемым параметром при  $n \rightarrow \infty$ .

Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной, если стремится к истинному значению  $\theta$  по вероятности  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$ .

Оценка  $\hat{\theta}$  называется сильно состоятельной, если стремится к истинному значению  $\theta$  почти наверное  $\hat{\theta} \xrightarrow{a.s.} \theta, n \rightarrow \infty$ .

Несмещённая оценка  $\hat{\theta} \in K$  называется оптимальной в классе квадратично интегрируемых оценок  $K$ , если для всякой другой несмещённой оценки  $\tilde{\theta} \in \Theta \forall \theta \in \Theta : D_{\theta} \hat{\theta} \leq D_{\theta} \tilde{\theta}$  или же  $\forall \theta \in \Theta, M_{\theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 \leq M_{\theta} (\tilde{\theta} - \theta)^2$ .

**Что называется среднеквадратическим отклонением оценки?**

$M_{\theta} (\hat{\theta} - \theta)$  — среднеквадратическое отклонение.

**Сформулируйте утверждение про поведение выборочных моментов.**

Выборочный начальный момент  $M_k$   $k$ -го порядка стремится к начальному моменту  $\nu_k$  случайной величины  $X$ , то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|M_k - \nu_k| \geq \varepsilon) = 0,$$

для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$ , если моменты  $\nu_{2k}$  и  $\nu_k$  случайной величины  $X$  существуют и конечны.

**Какая оценка является несмещённой и состоятельной для математического ожидания распределения выборки?**

В качестве оценки для математического ожидания естественно предложить среднеарифметическое наблюдаемых значений

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

**Какая статистика является несмещённой оценкой для дисперсии распределения выборки?**

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

— несмещённая оценка для  $\sigma^2 = Dx_1$ .

## Аудиторные задачи

### 2.4

*Задание.* Для выборки равномерного распределения на отрезке  $[\theta, 1]$  проверьте состоятельность и несмещённость оценки  $X_{(1)}$  параметра  $\theta$ .

*Решение.*  $\theta$  — минимальное наблюдение. Проверяем, выполняется ли  $X_{(1)} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$ .

По определению сходимости по вероятности

$$\forall \varepsilon > 0 \ P(|X_{(1)} - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0, \ n \rightarrow \infty.$$

Раскроем модуль

$$P\{X_{(1)} > \varepsilon + \theta\} = P(X_1 > \varepsilon + \theta, \dots, X_n > \varepsilon + \theta) = [P(X_1 > \varepsilon + \theta)]^n.$$

Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$[P(X_1 > \varepsilon + \theta)]^n = \left(\frac{1 - \theta - \varepsilon}{1 - \theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 - \theta}\right)^n \rightarrow 0, \ n \rightarrow \infty.$$

Число в скобках строго меньше единицы, так как  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

Проверяем несмещённость оценки. Проверяем, выполняется ли

$$MX_{(1)} = \theta.$$

Нужно найти плотность

$$MX_{(1)} = \int_{\mathbb{R}} f_{X_{(1)}}(y) y dy.$$

Начинаем с функции распределения  $F_{X_{(1)}}(y) = P(X_{(1)} \leq y)$ . Переходим к противоположному событию

$$P(X_{(1)} \leq y) = 1 - P(X_{(1)} > y) = 1 - [P(X_1 > y)]^n.$$

Переходим к противоположному событию  $1 - [P(X_1 > y)]^n = 1 - [1 - F(y)]^n$ .

Продифференцируем

$$\frac{dF_{X_{(1)}}(y)}{dy} = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y).$$

На отрезке  $[\theta, 1]$  имеет равномерное распределение

$$n[1 - F(y)]^{n-1} f(y) = n \left[ 1 - \frac{y - \theta}{1 - \theta} \right]^{n-1} \cdot \mathbb{1}\{y \in [\theta, 1]\} \cdot \frac{1}{1 - \theta}.$$

Приведём к общему знаменателю

$$n \left[ 1 - \frac{y - \theta}{1 - \theta} \right]^{n-1} \cdot \mathbb{1}\{y \in [\theta, 1]\} \cdot \frac{1}{1 - \theta} = \frac{n}{(1 - \theta)^2} \cdot (1 - y)^{n-1} \cdot \mathbb{1}\{y \in [\theta, 1]\}.$$

Нашли плотность  $X_{(1)}$  и теперь можем вычислить интеграл

$$MX_{(1)} = \int_{\theta}^1 y \cdot \frac{n}{(1 - \theta)^2} \cdot (1 - y)^{n-1} dy.$$

Замена:

$$1 - y = z, dy = -dz, y = 1 - z, y = 1 \Rightarrow z = 0, y = \theta \Rightarrow z = 1 - \theta.$$

Подставляя замену, получаем

$$\int_{\theta}^1 y \cdot \frac{n}{(1 - \theta)^2} \cdot (1 - y)^{n-1} dy = n \cdot \frac{1}{(1 - \theta)^n} \int_0^{1-\theta} (1 - z) z^{n-1} dz.$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{1}{(1 - \theta)^n} \int_0^{1-\theta} (1 - z) z^{n-1} dz &= \frac{n}{(1 - \theta)^n} \left[ \frac{(1 - \theta)^n}{n} - \frac{(1 - \theta)^{n+1}}{n + 1} \right] = \\ &= n \left( \frac{1}{n} - \frac{1 - \theta}{n + 1} \right) = 1 - \frac{n}{n + 1} (1 - \theta). \end{aligned}$$

Раскроем скобки

$$1 - \frac{n}{n + 1} (1 - \theta) = 1 - \frac{n}{n + 1} - \theta \cdot \frac{n}{n + 1} \neq \theta.$$

Отсюда следует, что оценка смещённая, но асимптотически несмещённая, потому что

$$1 - \frac{n}{n + 1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

и

$$\frac{n}{n + 1} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

## 2.5

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ . Выясните, является ли статистика

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 :$$

- а) несмещённой оценкой для  $\lambda^2$ ;
- б) состоятельной оценкой для  $\lambda^2$ .

*Решение.*

- а) Нужно проверить, выполняется ли

$$M \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \lambda^2.$$

Преобразуем левую часть

$$M \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = M X_1^2 = D X_1 + (M X_1)^2 = \lambda + \lambda^2 \neq \lambda^2.$$

Значит, оценка смещённая;

- б) проверяем, имеет ли место

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} \lambda^2, n \rightarrow \infty.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow M X_1^2 = \lambda^2 + \lambda \neq \lambda^2,$$

значит, оценка не состоятельная.

## 2.6

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из показательного распределения с параметром  $\alpha > 0$ . Докажите, что статистика  $1/\bar{X}$  является состоятельной оценкой для  $\alpha$ .

*Решение.* Нужно показать, что

$$\frac{1}{\bar{X}} \xrightarrow{P} \alpha, n \rightarrow \infty.$$

Выборочное среднее

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

По закону больших чисел

$$\bar{X} \xrightarrow{P} MX_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\bar{X}} \xrightarrow{P} \frac{1}{MX_1} = \alpha.$$

## 2.7

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из нормального распределения  $N(a, \sigma^2)$ . Докажите, что статистика

$$S_n = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

является несмещённой и состоятельной оценкой для  $\sigma^1$ .

*Решение.* Нужно проверить условие  $MS_n = \sigma^2$ .

Разность двух соседних элементов выборки имеет распределение

$$X_{i+1} - X_i \sim N(0, 2\sigma^2).$$

Найдём математическое ожидание статистики

$$MS_n = M \frac{1}{2(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^n M(X_{i+1} - X_i)^2.$$

Случайные величины одинаково распределены

$$\frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^n M(X_{i+1} - X_i)^2 = \frac{n}{2(n-1)} \cdot M(X_2 - X_1)^2.$$

В данном случае второй момент равен дисперсии

$$\frac{n}{2(n-1)} \cdot M(X_2 - X_1)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sigma^2 = \sigma^2.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Проверим состоятельность, то есть  $S_n \xrightarrow{P} \sigma^2, n \rightarrow \infty$ .

Разобьём  $S_n$  на две суммы

$$S_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[ \sum_{\text{even } i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \sum_{\text{odd } i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right].$$

В каждой из сумм слагаемые независимы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[ \sum_{\text{even } i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \sum_{\text{odd } i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[ \frac{m}{m} \sum_{\text{even } i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \frac{n-1-m}{n-1-m} \sum_{\text{odd } i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right]. \end{aligned}$$

По закону больших чисел

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[ \frac{m}{m} \sum_{\text{even } i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \frac{n-1-m}{n-1-m} \sum_{\text{odd } i} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] \xrightarrow{P} \\ & \xrightarrow{P} \frac{1}{2} \cdot M(X_2 - X_1)^2 = \frac{1}{2} \cdot D(X_2 - X_1) = \sigma^2, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

## 2.8

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из показательного распределения с параметром  $\alpha > 1$ . Для какого параметра  $\theta = \theta(\alpha)$  статистика

$$\hat{\theta}_n = e^{\bar{X}}$$

является состоятельной оценкой? Является ли  $\hat{\theta}_n$  сильно состоятельной оценкой того же параметра? Является ли  $\hat{\theta}_n$  несмещённой оценкой того же параметра? Асимптотически несмещённой?

*Решение.*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} MX_1, n \rightarrow \infty.$$

Случайные величины в выборке имеют показательное распределение

$$MX_1 = \frac{1}{\alpha},$$

значит,

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \frac{1}{\alpha}, n \rightarrow \infty.$$

Применяем непрерывную функцию  $e^x$ . Получаем  $e^{\bar{X}} \xrightarrow{P} e^{\frac{1}{\alpha}}, n \rightarrow \infty$ .

Проверяем, является ли оценка  $e^{\bar{X}}$  несмещённой к параметру  $e^{\frac{1}{\alpha}}$ , то есть выполняется ли  $Me^{\bar{X}} = e^{\frac{1}{\alpha}}$ .



Вычисляем  $Me^{\bar{X}} = Me^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$ . Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому  $Me^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} = \left( Me^{\frac{X_1}{n}} \right)^n$ . По определению характеристической функции  $\varphi_{X_1} = Me^{itX_1}$  получаем

$$\left( Me^{\frac{X_1}{n}} \right)^n = \left[ \varphi_{X_1} \left( \frac{1}{in} \right) \right]^n.$$

Характеристическая функция показательного распределения

$$\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1} = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

Подставляем

$$\left[ \varphi_{X_1} \left( \frac{1}{in} \right) \right]^n = \left( \frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{n}} \right)^n.$$

Прибавим и отнимем в числителе  $1/n$  и поделим числитель на знаменатель

$$\left( \frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{n}} \right)^n = \left( \frac{\alpha + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\alpha - \frac{1}{n}} \right)^n = \left[ 1 + \frac{1}{n(\alpha - \frac{1}{n})} \right]^n = e^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Значит, оценка смещённая, но несмещённая асимптотически.

## 2.9

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из геометрического распределения с параметром  $p$ . Найдите состоятельные оценки для параметров

$$p, p^2, \ln p, p \sin(1-p), pe^{\frac{q^2}{2}}.$$

*Решение.* Всё это — непрерывные функции от  $p$ . Применение непрерывной функции не нарушает сходимости по вероятности.

Если параметр каким-то образом связан со средним, но нужно пробовать выборочные моменты.

Сформируем выборочное среднее и применим закон больших чисел

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} MX_1.$$

Для геометрического распределения

$$MX_1 = \frac{1-p}{p}.$$

Прибавим единицу слева и справа

$$1 + \bar{X} \xrightarrow{P} 1 + \frac{1-p}{p} = 1 + \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{p}.$$

Функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

— это непрерывная функция, значит, можем применить эту функцию слева и справа, и сходимость сохранится

$$\frac{1}{1 + \overline{X}} \xrightarrow{P} p.$$

Состоятельной оценкой для параметра  $p$  будет

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \overline{X}}.$$

Состоятельной оценкой для  $p^2$  будет  $\hat{p}^2 = \hat{p}^2 \xrightarrow{P} p^2$ , потому что  $f(x) = x^2$  — это непрерывная функция.

Логарифм — это непрерывная функция

$$\ln \hat{p} = \ln \hat{p} = \ln \frac{1}{1 + \overline{X}} \xrightarrow{P} \ln p,$$

поскольку

$$\frac{1}{1 + \overline{X}} \xrightarrow{P} p.$$

## 2.12

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ . Докажите, что не существует несмещённой оценки для параметра  $1/\lambda$ .

*Решение.* Будем действовать от противного.

Допустим, что такая оценка существует, то есть существует  $\hat{\theta}$  такое, что

$$M\hat{\theta} = \frac{1}{\lambda}.$$

Это условие несмещённости.

$\hat{\theta}$  — функция от выборки, то есть  $\hat{\theta} = f(X_1, \dots, X_n)$ .

Распределение Пуассона дискретное

$$\begin{aligned} M\hat{\theta} &= Mf(X_1, \dots, X_n) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \dots, X_n) P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n). \end{aligned}$$

Воспользуемся независимостью

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \dots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \dots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = k_n). \end{aligned}$$

Подставим в явном виде вероятности

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \dots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = k_n) = \\ = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \dots, X_n) \cdot \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n k_i}}{\prod_{i=1}^n k_i!} \cdot e^{-\lambda n}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\sum k_i = k$$

и получим

$$e^{-\lambda n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cdot \sum_{k_i: k_1+k_2+\dots+k_n=k} \frac{f(k_1, \dots, k_n)}{k_1! \dots k_n!} = e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_k,$$

где  $c_k$  — число.

Допустим, что эта величина равна  $1/\lambda$ .

Посмотрим, возможно ли это

$$e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_k = \frac{1}{\lambda}.$$

Запишем так, чтобы с одной стороны было  $e^{\lambda n}$ , а всё остальное перенесём

$$e^{\lambda n} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} c_k.$$

Для экспоненты существует одно развитие в ряд. Из этого следует, что последнее равенство невозможно (развитие в ряд начинается со степени  $\lambda$ , равной единице).

## Домашнее задание

### 2.17

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$ . Проверьте несмещённость, состоятельность и найдите среднеквадратическое отклонение следующих оценок параметра  $\theta$ :

а)  $X_{(1)} + X_{(n)}$ ;

б)  $(n+1) X_{(1)}$ .

*Решение.*  $\theta$  — максимальное наблюдение.

а) Проверим, выполняется ли  $X_{(1)} + X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$ .

По определению сходимости по вероятности  $\forall \varepsilon > 0 P(X_{(1)} > \varepsilon) = P(X_1 > \varepsilon, X_2 > \varepsilon, \dots, X_n > \varepsilon) = [P(X_1 > \varepsilon)]^n$ . Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$[P(X_1 > \varepsilon)]^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Значит,  $X_{(1)} \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$ .

Остаётся проверить, выполняется ли  $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$ .

По определению сходимости по вероятности

$$P\{|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Раскроем модуль

$$\begin{aligned} P\{\theta - X_{(n)} > \varepsilon\} &= P\{X_{(n)} - \theta < -\varepsilon\} = P\{X_{(n)} < \theta - \varepsilon\} = \\ &= P(X_1 < \theta - \varepsilon, X_2 < \theta - \varepsilon, \dots, X_n < \theta - \varepsilon) = [P(X_1 < \theta - \varepsilon)]^n. \end{aligned}$$

Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$[P(X_1 < \theta - \varepsilon)]^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Число в скобках строго меньше единицы, так как  $0 \leq \theta \leq 1, \varepsilon > 0$ .

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

Проверим несмещённость оценки. Проверим, выполняется ли

$$M(X_{(1)} + X_{(n)}) = \theta.$$

Из задачи 1.21

$$MX_{(n)} = \frac{\theta n}{n+1}$$

и

$$MX_{(1)} = \frac{\theta}{n+1}.$$

Из свойства линейности математического ожидания

$$M(X_{(1)} + X_{(n)}) = MX_{(1)} + MX_{(n)} = \frac{\theta n}{n+1} + \frac{\theta}{n+1} = \frac{\theta(n+1)}{n+1} = \theta.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Формула среднеквадратического отклонения имеет вид  $\sigma = \sqrt{D\xi}$ .

Найдём дисперсию оценки

$$\begin{aligned}
D(X_{(1)} + X_{(n)}) &= M(X_{(1)} + X_{(n)})^2 - [M(X_{(1)} + X_{(n)})]^2 = \\
&= M(X_{(1)}^2 + X_{(n)}^2 + 2X_{(1)}X_{(n)}) - (MX_{(1)} + MX_{(n)})^2 = \\
&= MX_{(1)}^2 + MX_{(n)}^2 + 2M(X_{(1)}X_{(n)}) - (MX_{(1)})^2 - 2MX_{(1)}MX_{(n)} - \\
&\quad - (MX_{(n)})^2 = DX_{(1)} + DX_{(n)} + 2cov(X_{(1)}, X_{(n)}).
\end{aligned}$$

Возьмём необходимые значения из задачи 1.21, а именно

$$DX_{(1)} = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2 (n+2)} = DX_{(n)}, \quad cov(X_{(1)}, X_{(n)}) = \frac{\theta^2}{(n+1)^2 (n+2)}.$$

Подставляя в найденное выражение, получаем

$$\begin{aligned}
DX_{(1)} + DX_{(n)} + 2cov(X_{(1)}, X_{(n)}) &= \\
&= \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2 (n+2)} + \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2 (n+2)} + \frac{2\theta^2}{(n+1)^2 (n+2)} = \\
&= \frac{2\theta^2 n + 2\theta^2}{(n+1)^2 (n+2)} = \frac{2\theta^2 (n+1)}{(n+1)^2 (n+2)} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

Извлекая корень, получаем

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}} = \theta \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}};$$

b) проверим, выполняется ли  $(n+1)X_{(1)} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$ .

По определению сходимости по вероятности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|(n+1)X_{(1)} - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Перейдём к противоположному событию

$$P(|(n+1)X_{(1)} - \theta| > \varepsilon) = 1 - P\{|(n+1)X_{(1)} - \theta| \leq \varepsilon\}.$$

Раскроем модуль

$$\begin{aligned}
1 - P\{|(n+1)X_{(1)} - \theta| \leq \varepsilon\} &= \\
&= 1 - P\{-\varepsilon \leq (n+1)X_{(1)} - \theta \leq \varepsilon\} = \\
&= 1 - P\left\{\frac{-\varepsilon + \theta}{n+1} \leq X_{(1)} \leq \frac{\varepsilon + \theta}{n+1}\right\} = \\
&= 1 + P\left\{X_{(1)} \leq \frac{\theta - \varepsilon}{n+1}\right\} - P\left\{X_{(1)} < \frac{\varepsilon + \theta}{n+1}\right\} = \\
&= 1 + 1 - P\left(X_1 > \frac{\theta - \varepsilon}{n+1}, \dots, X_n > \frac{\theta - \varepsilon}{n+1}\right) - 1 + P\left(X_{(1)} > \frac{\varepsilon + \theta}{n+1}\right) = \\
&= 1 - \left[P\left(X_1 > \frac{\theta - \varepsilon}{n+1}\right)\right]^n + \left[P\left(X_1 > \frac{\theta + \varepsilon}{n+1}\right)\right]^n.
\end{aligned}$$

Подставим значения вероятностей из геометрического эксперимента

$$\begin{aligned} 1 - \left[ P\left(X_1 > \frac{\theta - \varepsilon}{n+1}\right) \right]^n + \left[ P\left(X_1 > \frac{\theta + \varepsilon}{n+1}\right) \right]^n &= \\ &= 1 - \left( \frac{\theta - \frac{\theta - \varepsilon}{n+1}}{\theta} \right)^2 + \left( \frac{\theta - \frac{\varepsilon + \theta}{n+1}}{\theta} \right)^n = \\ &= 1 - \left( 1 - \frac{\theta - \varepsilon}{(n+1)\theta} \right)^n + \left( 1 - \frac{\varepsilon + \theta}{(n+1)\theta} \right)^n \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оценка несостоятельная.

Проверим несмещённость оценки. Проверим, выполняется ли

$$M(n+1)X_{(1)} = \theta.$$

Выносим константу из-под знака математического ожидания

$$(n+1)MX_{(1)} = (n+1) \cdot \frac{\theta}{n+1} = \theta.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Найдём дисперсию оценки

$$D(n+1)X_{(1)} = (n+1)^2 DX_{(1)} = (n+1)^2 \cdot \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2 (n+2)} = \frac{\theta^2 n}{n+2},$$

откуда среднееквадратическое отклонение равно

$$\sigma = \sqrt{D(n+1)X_{(1)}} = \sqrt{\frac{\theta^2 n}{n+2}} = \theta \sqrt{\frac{n}{n+2}}.$$

## 2.18

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из показательного распределения с параметром  $1/\sqrt{\alpha}$ . Выясните, является ли статистика  $\hat{\alpha}_n = (\bar{X})^2$  несмещённой оценкой параметра  $\alpha$ . Является ли эта оценка состоятельной?

*Решение.* Нужно проверить, выполняется ли  $M(\bar{X})^2 = \alpha$ .

Запишем, что означает выборочное среднее

$$M(\bar{X})^2 = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = M\left(\frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right) = \frac{1}{n^2} \cdot M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2.$$

Квадрат суммы запишем в виде двух сумм. Получим

$$\frac{1}{n^2} \cdot M\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{k < i}^n X_k X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot M \sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{2}{n^2} M \sum_{k < i}^n X_k X_i.$$

Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому

$$\frac{1}{n^2} \cdot M \sum_{i=1}^n X_i + \frac{2}{n^2} M \sum_{k < i} X_k X_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n M X_i^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{k < i} M X_k M X_i.$$

Для показательного распределения

$$M X_i = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha}, \quad M X_i^2 = \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\frac{1}{\alpha}} = 2\alpha.$$

Подставляем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n M X_i^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{k < i} M X_k M X_i &= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot 2\alpha + \frac{1}{n^2} \cdot (n-1)n (M X_1)^2 = \\ &= \frac{2\alpha}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \alpha = \frac{2\alpha}{n} + \alpha - \frac{\alpha}{n} = \frac{\alpha}{n} + \alpha \rightarrow \alpha, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

значит, оценка смещённая, но несмещённая асимптотически.

Проверим, имеет ли место  $(\bar{X})^2 \xrightarrow{P} \alpha, n \rightarrow \infty$ .

По закону больших чисел

$$(\bar{X})^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \rightarrow (M X_1)^2 = (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha,$$

значит, оценка состоятельная.

## 2.21

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из биномиального распределения с параметрами 2 и  $p$ . Для какого параметра  $\theta = \theta(p)$  статистика  $\hat{\theta}_n = e^{\bar{X}}$  будет состоятельной? Является ли  $\hat{\theta}_n$  сильно состоятельной оценкой того же параметра? Является ли  $\hat{\theta}_n$  несмещённой оценкой того же параметра? Найдите среднеквадратическое отклонение этой оценки.

*Решение.*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} M X_1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Случайные величины в выборке имеют биномиальное распределение с математическим ожиданием  $M X_1 = np = 2p$ , значит,  $\bar{X} \xrightarrow{P} 2p, n \rightarrow \infty$ .

Применим непрерывную функцию  $e^x$ . Получим  $e^{\bar{X}} \xrightarrow{P} e^{2p}, n \rightarrow \infty$ .

Проверим, является ли оценка несмещённой к параметру  $e^{2p}$ , то есть выполняется ли  $M e^{\bar{X}} = e^{2p}$ .

Вычисляем  $Me^{\bar{X}} = Me^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$ . Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому  $Me^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} = \left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n$ . По определению характеристической функции  $\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1}$ , получим

$$\left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n = \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n.$$

Характеристическая функция биномиального распределения

$$\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1} = [(e^{it} - 1)p + 1]^n.$$

Подставим и получим

$$\left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n = \left[\left(e^{\frac{i}{in}} - 1\right)p + 1\right]^n = \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n \neq e^{2p}.$$

Значит, оценка смещённая.

Проверим сильную состоятельность. По усиленному закону больших чисел

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} MX_1 = 2p, n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что  $e^{\bar{X}} \xrightarrow{a.s.} e^{2p}$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Значит, оценка сильно состоятельная.

Найдём дисперсию оценки  $De^{\bar{X}} = Me^{2\bar{X}} - \left(Me^{\bar{X}}\right)^2$ .

Нашли, что  $Me^{\bar{X}} = \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n$ .

Вычисляем  $Me^{2\bar{X}} = Me^{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$ . Из независимости и одинаковой распределённости случайных величин следует, что  $Me^{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i} = \left(Me^{\frac{2X_1}{n}}\right)^n$ . По определению характеристической функции  $\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1}$ , получаем

$$\left(Me^{\frac{2X_1}{n}}\right)^n = \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{2}{in}\right)\right]^n.$$

Подставляем характеристическую функцию биномиального распределения

$$\left[\varphi_{X_1}\left(\frac{2}{in}\right)\right]^n = \left[\left(e^{\frac{2i}{in}} - 1\right)p + 1\right]^n = \left[\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n.$$

Отсюда находим дисперсию оценки

$$De^{\bar{X}} = \left[\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n - \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^{2n}.$$

Извлекая корень, получим  $\sigma = \sqrt{\left[\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n - \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^{2n}}$ .



## 2.22

*Задание.* В партии из  $n$  изделий оказалось  $m$  бракованных. Незвестная вероятность  $p$  появления бракованного изделия оценивается величиной  $m/n$ . Проверьте состоятельность и несмещённость этой оценки.

*Решение.* Выборка имеет распределение Бернулли, то есть

$$X_i = \begin{cases} 1, & p, \\ 0, & 1 - p, \end{cases}$$

где событие  $\{X_i = 1\}$  означает, что  $i$ -тое изделие браковано.

Тогда

$$\frac{m}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

где  $(X_1 + \dots + X_n)$  — количество бракованных изделий в партии.

Проверяем состоятельность, то есть проверяем, выполняется ли

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{p} p, \quad n \rightarrow \infty.$$

По закону больших чисел

$$\frac{m}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p} MX_1 = p, \quad n \rightarrow \infty,$$

так как это распределение Бернулли.

Это означает, что оценка состоятельная.

Проверим несмещённость оценки, то есть проверим, выполняется ли

$$M \frac{m}{n} = p.$$

Ищем математическое ожидание оценки

$$M \frac{m}{n} = M \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot M(X_1 + \dots + X_n).$$

Пользуемся линейностью математического ожидания

$$\frac{1}{n} \cdot M(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = p,$$

то есть оценка несмещённая.

## 2.23

*Задание.* При каком значении  $k$  статистика

$$k \sum_{j=1}^n |X_j|,$$

которая построена по выборке из нормального распределения  $N(0, \sigma^2)$ , является несмещённой оценкой для параметра  $\sigma$ ?

*Решение.* Нужно найти такое  $k$ , для которого

$$M \left( k \sum_{j=1}^n |X_j| \right) = \sigma, \quad X_j \sim N(0, \sigma^2).$$

Выносим константу  $k$  за знак математического ожидания

$$M \left( k \sum_{j=1}^n |X_j| \right) = k M \sum_{j=1}^n |X_j|.$$

Пользуемся линейностью математического ожидания

$$k M \sum_{j=1}^n |X_j| = k \sum_{j=1}^n M |X_j|.$$

Из того, что случайные величины одинаково распределены, следует, что

$$k \sum_{j=1}^n M |X_j| = kn M |X_1|.$$

Найдём математическое ожидание модуля первого элемента выборки через плотность распределения

$$M |X_1| = \int_{\mathbb{R}} p(x) \cdot |x| dx = \int_{\mathbb{R}} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Внесём под знак дифференциала то, что стоит в степени экспоненты

$$2 \cdot \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \cdot 2\sigma^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma.$$

Тогда математическое ожидание оценки

$$M \left( k \sum_{j=1}^n |X_j| \right) = kn\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

— условие несмещённости, откуда

$$k = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

## 2.24

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из показательного распределения с параметром  $\alpha > 0$ . Найдите несмещённые состоятельные оценки для параметров

$$\alpha, \sin \frac{1}{\alpha}.$$

*Решение.*  $X_1, \dots, X_n$  — независимые одинаково распределённые.  $\theta$  — неизвестный параметр.

$$\hat{\theta} = \frac{f(X_1) + \dots + f(X_n)}{n}.$$

Так как элементы выборки одинаково распределённые, то  $M\hat{\theta} = Mf(X_1)$ .

По закону больших чисел  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} Mf(X_1)$ .

Хотим, чтобы

$$\begin{cases} M\hat{\theta} = \theta, \\ \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta. \end{cases}$$

Нужно подобрать  $f$  из условия, что  $Mf(X_1) = \theta = \alpha$ .

Записывая математическое ожидание через интеграл от плотности получаем преобразование Лапласа

$$\int_0^{\infty} f(y) \alpha e^{-\alpha y} dy = \alpha.$$

Это способ построения одновременно несмещённой и состоятельной оценки.

Выносим  $\alpha$  из-под знака интеграла

$$\alpha \int_0^{\infty} f(y) e^{-\alpha y} dy = \alpha.$$

Сокращая константы, получаем

$$\int_0^{\infty} f(y) e^{-\alpha y} dy = 1.$$

Из таблицы преобразований Лапласа  $f(y) = \delta(y)$ . Тогда оценка параметра  $\alpha$  примет вид

$$\hat{\theta} = \frac{\delta(X_1) + \dots + \delta(X_n)}{n}.$$

Для второго параметра

$$\int_0^{\infty} f(y) \alpha e^{-\alpha y} dy = \sin \frac{1}{\alpha}.$$

Вынесем  $\alpha$  из-под знака интеграла

$$\alpha \int_0^{\infty} f(y) e^{-\alpha y} dy = \sin \frac{1}{\alpha}.$$

Перенесём  $\alpha$  вправо

$$\int_0^{\infty} f(y) e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{y} \sim \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2},$$

откуда из таблицы преобразований Лапласа  $f(y) = y$ . Перешли к пределу, потому что иначе интеграл расходится. Оценка параметра в таком случае примет вид

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}.$$

## 2.25

*Задание.* Пусть  $X$  — количество успехов в серии из  $n$  испытаний Бернулли с вероятностью успеха  $p$ . Докажите, что не существует несмещённой оценки для параметра  $p^N$  при  $N > n$ .

*Решение.* Будем действовать от противного.

Допустим, такая оценка существует, то есть существует  $\hat{\theta}$  такое, что  $M\hat{\theta} = p^N$ .

Это условие несмещённости.

$\hat{\theta}$  — функция от выборки  $X_1, \dots, X_n$ , где  $X_1 + \dots + X_n = X$ , то есть  $\hat{\theta} = f(X_1, \dots, X_n)$ .

Распределение Бернулли дискретное

$$\begin{aligned} M\hat{\theta} &= Mf(X_1, \dots, X_n) = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1 \text{ or } 0} f(X_1, \dots, X_n) P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n). \end{aligned}$$

Пользуясь независимостью, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1, \dots, k_n=1 \text{ or } 0} f(X_1, \dots, X_n) P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1 \text{ or } 0} f(X_1, \dots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = k_n). \end{aligned}$$

Подставляем вероятности в явном виде

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1, \dots, k_n=1 \text{ or } 0} f(X_1, \dots, X_n) P(X_1 = k_1) \cdot P(X_n = k_n) = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1 \text{ or } 0} f(X_1, \dots, X_n) p^{k_1} \cdot (1-p)^{1-k_1} \cdot \dots \cdot p^{k_n} \cdot (1-p)^{1-k_n} = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1 \text{ or } 0} f(X_1, \dots, X_n) \cdot p^{k_1 + \dots + k_n} \cdot (1-p)^{n - (k_1 + \dots + k_n)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\sum k_i = k.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, \dots, k_n=1 \text{ or } 0} f(X_1, \dots, X_n) \cdot p^{k_1 + \dots + k_n} \cdot (1-p)^{n-(k_1 + \dots + k_n)} = \\ & = \sum_{k=0}^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1 \text{ or } 0} f(k_1, \dots, k_n) p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n c_k p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

где  $c_k$  — число.

Допустим, эта величина равна  $p^N$ .

Посмотрим, возможно ли это

$$\sum_{k=0}^n c_k p^k (1-p)^{n-k} = p^N.$$

Последнее равенство невозможно при  $N > n$ . Из этого следует, что не существует несмещённой оценки для параметра  $p^N$  при  $N > n$ .

## 2.26

*Задание.* Проводится  $n$  измерений неизвестного диаметра  $d$  круга. В первом приближении считается, что измерения  $X_i = d + \varepsilon_i$  проводятся с независимыми случайными погрешностями  $\varepsilon_i$ , которые имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и неизвестной дисперсией  $\sigma^2$ . Проверьте несмещённость и состоятельность следующей оценки площади круга:

$$\hat{s}_n = \frac{\pi}{4} \left( (\bar{X})^2 - \frac{S_0^2}{n} \right),$$

где

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

*Решение.* Имеем случайные величины  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ . Проверим несмещённость оценки, то есть проверим, выполняется ли

$$M\hat{s}_n = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Преобразуем

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (d + \varepsilon_i - d - \bar{\varepsilon})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2.$$

Математическое ожидание этой случайной величины равно

$$MS_0^2 = DS_0^2 = \sigma^2.$$

Найдём математическое ожидание квадрата выборочного среднего

$$M(\bar{X})^2 = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = M\left[\frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i \neq j}^n X_i X_j\right)\right].$$

Пользуемся тем, что случайные величины в выборке одинаково распределены

$$M\left[\frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i \neq j}^n X_i X_j\right)\right] = \frac{1}{n^2} \cdot n M X_1^2 + \frac{1}{n^2} \cdot 2 C_n^2 (M X_1)^2.$$

Расписываем биномиальный коэффициент

$$\frac{1}{n^2} \cdot n M X_1^2 + \frac{1}{n^2} \cdot 2 C_n^2 (M X_1)^2 = \frac{1}{n} \cdot M X_1^2 + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n!}{2(n-2)!} \cdot (M X_1)^2.$$

Расписываем  $n!$  через факториал, стоящий в знаменателе

$$\frac{1}{n} \cdot M X_1^2 + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n!}{2(n-2)!} \cdot (M X_1)^2 = \frac{1}{n} \cdot M X_1^2 + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{(n-2)!(n-1)n}{2(n-2)!} \cdot (M X_1)^2.$$

Сокращаем

$$\frac{1}{n} \cdot M X_1^2 + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{(n-2)!(n-1)n}{2(n-2)!} \cdot (M X_1)^2 = \frac{1}{n} \cdot M X_1^2 + \frac{n-1}{n} \cdot (M X_1)^2.$$

Найдём математическое ожидание измерения

$$M X_1 = M(d + \varepsilon_i) = M d + M \varepsilon_i = d.$$

Найдём математическое ожидание квадрата измерения

$$M X_1^2 = M(d + \varepsilon_i)^2 = M(d^2 + 2d\varepsilon_i + \varepsilon_i^2) = M d^2 + M(2d\varepsilon_i) + M \varepsilon_i^2.$$

Выносим константы за знак математического ожидания и учитываем то, что случайная величина  $\varepsilon_i$  имеет нулевой математическое ожидание

$$M d^2 + M(2d\varepsilon_i) + M \varepsilon_i^2 = d^2 + 2d M \varepsilon_i + M \varepsilon_i^2 = d^2 + \sigma^2.$$

Подставляя эти значения в полученное выражение для математического ожидания квадрата выборочного среднего, получаем

$$M(\bar{X})^2 = \frac{1}{n} \cdot (d^2 + \sigma^2) + \frac{n-1}{n} \cdot d^2 = \frac{d^2 + \sigma^2 + n d^2 - d^2}{n} = \frac{\sigma^2 + n d^2}{n} = d^2 + \frac{\sigma^2}{n}.$$

Получаем математическое ожидание оценки

$$M \hat{s}_n = M \left\{ \frac{\pi}{4} \cdot \left[ (\bar{X})^2 - \frac{S_0^2}{n} \right] \right\} = \frac{\pi}{4} \cdot M \left[ (\bar{X})^2 - \frac{S_0^2}{n} \right] = \frac{\pi}{4} \cdot M(\bar{X})^2 - \frac{\pi}{4} \cdot M \frac{S_0^2}{n}.$$

Подставляем найденные значения математических ожиданий и выносим за скобку общий множитель

$$\frac{\pi}{4} \cdot M(\bar{X})^2 - \frac{\pi}{4} \cdot M \frac{S_0^2}{n} = \frac{\pi}{4} \cdot \left( d^2 + \frac{\sigma^2}{n} \right) - \frac{\pi}{4n} \cdot MS_0^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 + \frac{\pi \sigma^2}{4n} - \frac{\pi \sigma^2}{4n} = \frac{\pi d^2}{4},$$

значит, оценка несмещённая.

Проверим состоятельность оценки, то есть выполняется ли

$$\hat{s}_n \xrightarrow{P} \frac{\pi d^2}{4}, n \rightarrow \infty.$$

По закону больших чисел

$$(\bar{X})^2 \xrightarrow{P} (MX_1)^2 = d^2, n \rightarrow \infty.$$

Остаётся проверить, стремится ли по вероятности второе слагаемое в оценке к нулю

$$P\left(\frac{S_0^2}{n} \geq \varepsilon\right) = P(S_0^2 \geq \varepsilon n).$$

Применим неравенство Чебышева

$$P(S_0^2 \geq \varepsilon n) \leq \frac{MS_0^2}{\varepsilon n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Остюда следует, что

$$\frac{S_0^2}{n} \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$\hat{s}_n \xrightarrow{P} \frac{\pi}{4} \cdot d^2,$$

то есть оценка состоятельная.





# Занятие 3. Метод моментов построения оценок

## Контрольные вопросы и задания

**Приведите определение оценки: несмещённой, асимптотически несмещённой, состоятельной, сильно состоятельной, оптимальной.**

Оценка  $\hat{\theta}$  несмещённая, если  $\forall \theta \in \Theta : M_{\theta} \hat{\theta} = \theta$ .

Асимптотически несмещённая оценка — такая оценка, математическое ожидание которой совпадает с оцениваемым параметром при  $n \rightarrow \infty$ .

Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной, если стремится к истинному значению  $\theta$  по вероятности  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$ .

Оценка  $\hat{\theta}$  называется сильно состоятельной, если стремится к истинному значению  $\theta$  почти наверное  $\hat{\theta} \xrightarrow{a.s.} \theta, n \rightarrow \infty$ .

Несмещённая оценка  $\hat{\theta} \in K$  называется оптимальной в классе квадратично интегрируемых оценок  $K$ , если для всякой другой несмещённой оценки  $\tilde{\theta} \in \Theta \forall \theta \in \Theta : D_{\theta} \hat{\theta} \leq D_{\theta} \tilde{\theta}$  или же  $\forall \theta \in \Theta, M_{\theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 \leq M_{\theta} (\tilde{\theta} - \theta)^2$ .

**Что называется среднеквадратическим отклонением оценки?**

$M_{\theta} (\hat{\theta} - \theta)$  — среднеквадратическое отклонение.

**Сформулируйте утверждение про поведение выборочных моментов.**

Выборочный начальный момент  $M_k$   $k$ -го порядка стремится к начальному моменту  $\nu_k$  случайной величины  $X$ , то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|M_k - \nu_k| \geq \varepsilon) = 0,$$

для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$ , если моменты  $\nu_{2k}$  и  $\nu_k$  случайной величины  $X$  существуют и конечны.

**Сформулируйте основную идею метода моментов построения оценки неизвестного параметра.**

$x_1, \dots, x_n$  — выборка из распределения  $F_\theta$  и  $\theta : M_\theta f(x_1) = g(\theta)$ .

Вычисляем математическое ожидание, считая, что  $x_1$  имеет распределение с параметром  $\theta$ , иными словами,

$$M_\theta f(x) = \int_{\mathbb{R}} x dF_\theta(x), \quad f, g \in C(\mathbb{R}), \quad g$$

— строго монотонная. Тогда в силу усиленного закона больших чисел

$$\theta \approx g^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right) \stackrel{a.s.}{\rightarrow} \theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если существуют непрерывные  $f$  и  $g$ ,  $g$  — обратима и  $g(\theta) = M_\theta f(x)$ , то в качестве оценки можно выбрать

$$\hat{\theta} = g^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}} f dF_n \right).$$

## Аудиторные задачи

### 3.3

*Задание.* Пользуясь методом моментов, оцените параметр  $\theta$  равномерного распределения на отрезке:

- a)  $[0, \theta]$ ;
- b)  $[\theta - 1, \theta + 1]$ ;
- c)  $[0, 2\theta]$ ;
- d)  $[-\theta, \theta]$ .

*Решение.*

- a)  $X_i \sim U([0, \theta])$ . Записываем теоретический момент. Для равномерного распределения — это середина отрезка

$$MX_1 = \frac{\theta}{2}.$$

Должны приравнять

$$\frac{\theta^*}{2} = \bar{X},$$

откуда  $\theta^* = 2\bar{X}$ ;

b) случайные величины имеют распределение  $X_i \sim U([\theta - 1, \theta + 1])$ .

Вычисляем теоретический момент  $MX_1 = \theta$ . Должны записать, что  $\theta^* = \bar{X}$ ;

с) случайные величины имеют распределение  $X_i \sim U([0, 2\theta])$ .

Вычисляем теоретический момент  $MX_1 = \theta$ , откуда  $\theta^* = \bar{X}$ ;

d) случайные величины имеют распределение  $X_i \sim U([- \theta, \theta])$ .

Вычисляем теоретический момент  $MX_1 = 0$  — не подходит, потому что не является функцией от  $\theta$ . Можем вычислить второй момент, который в данном случае совпадает с дисперсией  $MX_1^2 = DX_1$ . Для равномерного распределения

$$DX_1 = \frac{4\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3}.$$

Должны записать уравнение

$$\frac{(\theta^2)^*}{3} = \overline{X^2},$$

откуда  $(\theta^2)^* = 3\overline{X^2}$ . Извлекая корень, получаем  $\theta^* = \sqrt{3\overline{X^2}}$ .

### 3.4

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . Пользуясь методом моментов, постройте оценку параметра  $\lambda$  и убедитесь, что эта оценка является несмещённой и состоятельной.

*Решение.* Первый теоретический момент  $MX_1 = \lambda$ . Должны приравнять

$$\lambda^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

По закону больших чисел  $\lambda^* \xrightarrow{P} \lambda$ . Отсюда следует состоятельность.  $M\lambda^* = MX_1 = \lambda$ . Отсюда следует несмещённость.

### 3.5

*Задание.* Пользуясь методом моментов с пробной функцией  $g(y) = y$ , оцените параметр сдвига  $\beta \in \mathbb{R}$  показательного распределения с плотностью

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta-y}, & t \geq \beta, \\ 0, & y < \beta. \end{cases}$$

*Решение.*  $Mg(X_1) = \overline{g(X)}$  — метод моментов.

Ищем теоретический момент, зная плотность распределения

$$MX_1 = \int_{\beta}^{\infty} ye^{\beta-y} dy.$$

Делаем замену  $y - \beta = z$  и получаем

$$\int_{\beta}^{\infty} ye^{\beta-y} dy = \int_0^{\infty} (\beta + z) e^{-z} dz = \beta + 1.$$

Отсюда должны решить уравнение  $\beta^* + 1 = \bar{X}$ .

Отсюда  $\beta^* = \bar{X} - 1$ . Эта оценка несмещённая и состоятельная.

### 3.6

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из биномиального распределения с параметрами  $m$  и  $p$ . Пользуясь методом моментов, постройте оценку:

- параметра  $p$ , если параметр  $m$  известный;
- параметра  $m$ , если параметр  $p$  известный;
- векторного параметра  $(m, p)$ .

*Решение.*

- $MX_1 = mp$ . Тогда уравнение имеет вид  $mp^* = \bar{X}$ . Отсюда

$$p^* = \frac{\bar{X}}{m};$$

- параметр  $m$  — это целое число.

$m^*p = \bar{X}$ , откуда

$$m^* = \left[ \frac{\bar{X}}{p} \right]$$

— целая часть;

- одного теоретического момента мало.

Нужно найти второй теоретический момент.

Выражаем его через дисперсию и первый момент

$$MX_1^2 = DX_1 + (MX_1)^2 = mp(1-p) + (mp)^2 = mp(1-p+mp).$$

Составляем уравнения с двумя неизвестными

$$\begin{cases} m^*p^* = \bar{X}, \\ m^*p^*(1-p^* + m^*p^*) = \overline{X^2}. \end{cases}$$

Во второе уравнение можем подставить  $\bar{X}$  вместо произведения  $m^* p^*$  и решить  $\bar{X}(1 - p^* + \bar{X}) = \bar{X}^2$ , откуда

$$1 - p^* + \bar{X} = \frac{\bar{X}^2}{\bar{X}}.$$

Отсюда находим

$$p^* = 1 + \bar{X} - \frac{\bar{X}^2}{\bar{X}},$$

соответственно

$$m^* = \left[ \frac{\bar{X}}{p^*} \right] = \left[ \frac{\bar{X}}{1 + \bar{X} - \frac{\bar{X}^2}{\bar{X}}} \right] = \left[ \frac{(\bar{X})^2}{\bar{X} + \bar{X}^2 - \bar{X}^2} \right].$$

### 3.7

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Парето с плотностью

$$f_{\beta, \theta}(y) = \begin{cases} \beta \theta y^{-(\beta+1)}, & y \geq \theta, \\ 0, & t < \theta, \end{cases} \quad \beta > 0, \theta > 0.$$

Постройте оценки по методу моментов

- а) параметра  $\beta > 1$ , если параметр  $\theta > 0$  известный;
- б) параметра  $\theta > 0$ , если параметр  $\beta > 1$  известный;
- в) векторного параметра  $(\beta, \theta)$ , где  $\beta > 2, \theta > 0$ .

*Решение.*

- а) Вычисляем теоретический момент

$$MX_1 = \beta \int_{\theta}^{\infty} \theta^{\beta} y^{-\beta} dy = \beta \theta^{\beta} \cdot \frac{y^{-\beta+1}}{-\beta+1} = -\beta \theta^{\beta} \cdot \frac{\theta}{1-\beta} = \frac{\beta}{\beta-1} \cdot \theta.$$

Найдём второй момент

$$MX_1^2 = \beta \int_{\theta}^{\infty} \theta^{\beta} y^{-\beta+1} dy = \beta \cdot \frac{1}{\beta-2} \cdot \theta^2.$$

Приравниваем теоретический и выборочный момент, учитывая, что  $\beta$  — параметр

$$\frac{\beta^*}{\beta^* - 1} \cdot \theta = \bar{X},$$

откуда

$$\frac{\beta^*}{\beta^* - 1} = \frac{\overline{X}}{\theta}.$$

Решим пропорцию  $\beta^* \theta = (\beta^* - 1) \overline{X} = \beta^* \overline{X} - \overline{X}$ .

Получаем

$$\beta^* = \frac{\overline{X}}{\overline{X} - \theta};$$

b) считаем, что  $\beta$  — известно, ищем  $\theta$ .

Приравниваем моменты

$$\frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \theta = \overline{X},$$

откуда

$$\theta^* = \frac{\overline{X} (\beta - 1)}{\beta};$$

c) нужно 2 уравнения

$$\begin{cases} \frac{\beta^*}{\beta^* - 1} \cdot \theta^* = \overline{X}, \\ \frac{\beta^*}{\beta^* - 2} \cdot (\theta^*)^2 = \overline{X^2}. \end{cases}$$

Выражаем  $\theta^*$  из первого уравнения и подставляем во второе

$$\frac{\beta^*}{\beta^* - 2} \cdot \left( \frac{\beta^* - 1}{\beta^*} \right)^2 \cdot (\overline{X})^2 = \overline{X^2}.$$

Умножим на знаменатель  $(\overline{X})^2 (\beta^* - 1)^2 = \overline{X^2} \beta^* (\beta^* - 2)$ .

Оставляем в левой части только квадрат выборочного момента

$$(\overline{X})^2 = \overline{X^2} \cdot \frac{(\beta^*)^2 - 2\beta^*}{(\beta^* - 1)^2}.$$

Делаем замену  $(\beta^* - 1)^2 = t$ .

Получаем

$$(\overline{X})^2 = \frac{t - 1}{t} \cdot \overline{X^2} = \left( 1 - \frac{1}{t} \right) \cdot \overline{X^2} = \overline{X^2} - \frac{\overline{X^2}}{t}.$$

Отсюда

$$t = \frac{\overline{X^2}}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2}.$$

Отсюда найдём  $\beta^* = \sqrt{t} + 1$ , соответственно находим  $\theta^*$ .

## Домашнее задание

### 3.10

*Задание.* Пользуясь методом моментов, оцените значение  $\alpha$  по выборке из показательного распределения с параметром  $1/\sqrt{\alpha}$ .

*Решение.*

$$X_i \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Записываем теоретический момент. Для показательного распределения — это обратная величина к параметру распределения

$$MX_1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha}.$$

Должны приравнять  $\sqrt{\alpha^*} = \bar{X}$ , откуда  $\alpha^* = (\bar{X})^2$ .

### 3.11

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из показательного распределения с параметром  $\alpha > 0$ . Пользуясь методом моментов с пробной функцией  $g(y) = y$ , оцените параметр  $\theta(\alpha) = P(X_1 > 1)$ .

*Решение.*  $Mg(X_1) = g(X)$  — метод моментов.

Ищем теоретический момент, зная плотность распределения

$$MX_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Из метода моментов следует, что

$$\frac{1}{\alpha^*} = \bar{X}.$$

Выражаем оценку

$$\alpha^* = \frac{1}{\bar{X}}.$$

Перейдём в параметре к противоположному событию

$$\theta(\alpha) = P(X_1 > 1) = 1 - P(X_1 \leq 1) = 1 - F_{X_1}(1).$$

Найдём функцию показательного распределения как интеграл от плотности

$$F_{X_1}(y) = \int_0^y \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \int_0^y e^{-\alpha x} d(-\alpha x) = -e^{-\alpha x} \Big|_0^y = 1 - e^{-\alpha y}.$$

Тогда параметр примет вид  $\theta(\alpha) = 1 - (1 - e^{-\alpha}) = 1 - 1 + e^{-\alpha} = e^{-\alpha} = e^{-\frac{1}{\bar{X}}}$ .

### 3.12

*Задание.* Пользуясь методом моментов с пробной функцией  $g(y) = y$ , оцените параметр  $p$  распределения Бернулли. Возможно ли с помощью метода моментов с некоторой пробной функцией  $g(y)$  получить оценку параметра  $p$ , отличную от  $\bar{X}$ ?

*Решение.*

$$X_i = \begin{cases} 0, & 1-p, \\ 1, & p. \end{cases}$$

Теоретический момент  $MX_1 = p$ ,  $p^* = \bar{X}$ .

Найдём теоретический момент с пробной функцией

$$Mg(X_1) = g(0)(1-p) + g(0)p = g(0) + p[g(1) - g(0)] = \overline{g(\bar{X})}.$$

Отсюда

$$p^* = \frac{g(\bar{X}) - g(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{g(X_1) + \dots + g(X_n) - g(0)}{n[g(1) - g(0)]}.$$

Количество единиц равно  $\bar{X}n$ , соответственно  $n - \bar{X}n$  — количество нулей.

$$\frac{g(X_1) + \dots + g(X_n) - g(0)}{n[g(1) - g(0)]} = \frac{g(1)\bar{X}n + g(0)(n - \bar{X}n) - g(0)n}{n[g(1) - g(0)]}.$$

Раскроем скобки и приведём подобные

$$\frac{g(1)\bar{X}n + g(0)(n - \bar{X}n) - g(0)n}{n[g(1) - g(0)]} = \frac{ng(1)\bar{X} - gn\bar{X}}{n[g(1) - g(0)]} = \bar{X},$$

откуда следует, что невозможно получить другую оценку параметра  $p$ .

### 3.13

*Задание.* Пользуясь методом моментов, оцените параметр  $\lambda > 1$  по выборке из распределения Пуассона с параметром  $\ln \lambda$ .

*Решение.* Первый теоретический момент  $MX_1 = \ln \lambda$ . Должны приравнять  $\ln \lambda = \bar{X}$ . Отсюда следует, что  $\lambda^* = e^{\bar{X}}$ .

### 3.14

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из  $\Gamma$ -распределения с плотностью

$$f_{\alpha, \beta}(y) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} e^{-\alpha y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Постройте оценки по методу моментов

- а) параметра  $\alpha$ , если параметр  $\beta$  известный;
- б) параметра  $\beta$ , если параметр  $\alpha$  известный;



с) векторного параметра  $(\alpha, \beta)$ .

*Решение.*

а) Вычислим теоретический момент

$$MX_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha y} \cdot y dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{+\infty} \alpha^\beta y^\beta e^{-\alpha y} dy.$$

Сделаем замену  $\alpha y = s$ , откуда

$$y = \frac{s}{\alpha}, \quad dy = \frac{ds}{\alpha}.$$

Подставляем

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{+\infty} \alpha^\beta y^\beta e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{+\infty} s^\beta e^{-s} \cdot \frac{ds}{\alpha} = \frac{1}{\alpha \Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{+\infty} s^\beta \cdot e^{-s} ds.$$

Интеграл равен Гамма-функции

$$\frac{1}{\alpha \Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{+\infty} s^\beta \cdot e^{-s} ds = \frac{1}{\alpha \Gamma(\beta)} \cdot \Gamma(\beta + 1) = \frac{1}{\alpha \Gamma(\beta)} \cdot \beta \cdot \Gamma(\beta) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Найдём второй момент

$$MX_1^2 = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} e^{-\alpha y} \cdot y^2 dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{+\infty} \alpha^\beta y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy.$$

Умножаем на  $\alpha$  числитель и знаменатель

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{+\infty} \alpha^\beta y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\Gamma(\beta) \alpha} \cdot \int_0^{+\infty} \alpha^{\beta+1} y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy.$$

Сделаем замену как и в предыдущем случае

$$\frac{1}{\Gamma(\beta) \alpha} \cdot \int_0^{+\infty} \alpha^{\beta+1} y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\Gamma(\beta) \alpha^2} \cdot \int_0^{+\infty} s^{\beta+1} e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\beta + 2)}{\alpha^2 \Gamma(\beta)}.$$

Пользуясь свойством Гамма-функции, записываем

$$\frac{\Gamma(\beta + 2)}{\alpha^2 \Gamma(\beta)} = \frac{(\beta + 1) \Gamma(\beta + 1)}{\alpha^2 \Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\beta + 1) \beta + \Gamma(\beta + 1)}{\alpha^2 \Gamma(\beta)}.$$

Снова пользуемся свойством Гамма-функции и сокращаем её

$$\frac{\Gamma(\beta+1)\beta + \Gamma(\beta+1)}{\alpha^2\Gamma(\beta)} = \frac{\beta^2\Gamma(\beta) + \beta\Gamma(\beta)}{\alpha^2\Gamma(\beta)} = \frac{\beta^2 + \beta}{\alpha^2}.$$

Приравниваем теоретический момент и выборочный момент, учитывая, что  $\alpha$  — параметр

$$\frac{\beta}{\alpha^*} = \bar{X},$$

откуда

$$\alpha^* = \frac{\beta}{\bar{X}};$$

б) считаем, что  $\alpha$  — известно, ищем  $\beta^*$ .

Приравниваем моменты

$$\frac{\beta^*}{\alpha} = \bar{X},$$

откуда  $\beta^* = \alpha\bar{X}$ ;

с) нужно 2 уравнения

$$\begin{cases} \frac{\beta^*}{\alpha^*} = \bar{X}, \\ \frac{(\beta^*)^2 + \beta^*}{(\alpha^*)^2} = \bar{X}^2. \end{cases}$$

Выражаем  $\alpha^*$  из первого уравнения и подставляем во второе

$$\frac{(\beta^*)^2 + \beta^*}{\beta^*} \cdot \bar{X} = \bar{X}^2.$$

Поделим числитель на знаменатель

$$\left(1 + \frac{1}{\beta^*}\right) \cdot (\bar{X})^2 = \bar{X}^2.$$

Оставляем в левой части только скобку

$$1 + \frac{1}{\beta^*} = \frac{\bar{X}^2}{(\bar{X})^2}.$$

Переносим единицу вправо

$$\frac{1}{\beta^*} = \frac{\bar{X}^2}{(\bar{X})^2} - 1.$$

Выражаем параметр

$$\beta^* = \frac{1}{\frac{\bar{X}^2}{(\bar{X})^2} - 1} = \frac{(\bar{X})^2}{\bar{X}^2 - (\bar{X})^2}.$$

Соответственно находим

$$\alpha^* = \frac{\beta^*}{\bar{X}} = \frac{\frac{(\bar{X})^2}{\bar{X}^2 - (\bar{X})^2}}{\bar{X}} = \frac{(\bar{X})^2}{(\bar{X}^2 - (\bar{X})^2) \bar{X}} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}^2 - (\bar{X})^2}.$$

### 3.15

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из биномиального распределения с параметрами 2,  $p$ . Пользуясь методом моментов с пробной функцией

$$g(y) = y,$$

оцените параметр  $\theta = e^{2p}$ .

*Решение.*  $Mg(X_1) = g(\bar{X})$  — метод моментов.

Ищем теоретический момент, зная распределение

$$MX_1 = \sum_{k=0}^2 k \cdot P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^2 k \cdot C_2^k p^k (1-p)^{2-k}.$$

При  $k = 0$  первое слагаемое зануляется, поэтому можно суммировать от единицы

$$\sum_{k=0}^2 k \cdot C_2^k p^k (1-p)^{2-k} = \sum_{k=1}^2 k \cdot C_2^k \cdot p^k (1-p)^{2-k} = 1 \cdot C_2^1 p (1-p) + 2 \cdot C_2^2 \cdot p^2.$$

Распишем биномиальные коэффициенты, раскроем скобки и приведём подобные

$$1 \cdot C_2^1 p (1-p) + 2 \cdot C_2^2 \cdot p^2 = 2p(1-p) + 2p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p.$$

Должны решить уравнение  $2p^* = \bar{X}$ .

Отсюда

$$p^* = \frac{\bar{X}}{2}.$$

Оценим параметр  $\theta^* = e^{2p^*} = e^{\frac{2\bar{X}}{2}} = e^{\bar{X}}$ .

### 3.16

*Задание.* При нейтронном бомбардировании ядер урана начинается расщепление ядра, при котором ядро урана распадается на две части разного типа. В камере Вильсона это явление наблюдается в виде двух траекторий, которые выходят из одной точки. Эти траектории вскоре разделяются на несколько веток, которые получаются от столкновения частиц с молекулами газа в камере. Можно показать, что количество веток в одной траектории имеет так называемое «двойное» распределение Пуассона, то есть

$$P(X = k) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $\lambda_1 < \lambda_2$  — некоторые положительные постоянные. Пользуясь методом моментов, оцените векторный параметр  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

*Решение.*

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right).$$

Разобьём на две суммы

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}.$$

Слагаемые при  $k = 0$  равны нулю

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}.$$

Вынесем  $\lambda_i$  за скобку и сократим  $k$ , где  $i \in \{1, 2\}$ . Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} = \\ &= \frac{\lambda_1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} = \\ &= \frac{\lambda_1}{2} \cdot e^{\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{2} \cdot e^{\lambda_2} \cdot e^{-\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \end{aligned}$$

Одного теоретического момента мало.

Нужно найти второй теоретический момент

$$MX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right).$$

Одно  $k$  сокращаем, записываем через две суммы

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{(k-2)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{(k-2)!} \cdot e^{-\lambda_2} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot e^{\lambda_2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2^2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot e^{\lambda_2} + \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 + \lambda_2).
\end{aligned}$$

Составим уравнения с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1^* + \lambda_2^*}{2} = \overline{X}, \\ \frac{1}{2} \cdot ((\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2 + \lambda_1^* + \lambda_2^*) = \overline{X^2}. \end{cases}$$

Возведём первое уравнение в квадрат, предварительно умножив на 2. Получим  $(\lambda_1^* + \lambda_2^*)^2 = (\lambda_1^*)^2 + 2\lambda_1^*\lambda_2^* + (\lambda_2^*)^2 = 4(\overline{X})^2$ , откуда

$$(\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2 = 4(\overline{X})^2 - 2\lambda_1^*\lambda_2^*.$$

Подставим это выражение во второе уравнение

$$\frac{1}{2} \cdot [4(\overline{X})^2 - 2\lambda_1^*\lambda_2^* + \lambda_1^* + \lambda_2^*] = \overline{X^2}.$$

Раскроем скобки

$$2(\overline{X})^2 - \lambda_1^*\lambda_2^* + \frac{1}{2}(\lambda_1^* + \lambda_2^*) = \overline{X^2}.$$

Подставим сумму оценок из первого уравнения

$$2(\bar{X})^2 - \lambda_1^* \lambda_2^* + \frac{1}{2} \cdot 2\bar{X} = \bar{X}^2.$$

Выразим произведение оценок и сократим двойки  $\lambda_1^* \lambda_2^* = 2(\bar{X})^2 + \bar{X} - \bar{X}^2$ .

Из первого уравнения подставим  $\lambda_2^* = 2\bar{X} - \lambda_1^*$  в полученное уравнение  $\lambda_1^* (2\bar{X} - \lambda_1^*) = 2(\bar{X})^2 + \bar{X} - \bar{X}^2$ .

Раскроем скобки и поменяем знаки в обеих частях

$$(\lambda_1^*)^2 - 2\bar{X}\lambda_1^* = -2(\bar{X})^2 - \bar{X} + \bar{X}^2.$$

Перенесём всё влево  $(\lambda_1^*)^2 - 2\bar{X}\lambda_1^* + 2(\bar{X})^2 + \bar{X} - \bar{X}^2 = 0$ .

Получили квадратное уравнение относительно  $\lambda_1^*$ . Найдём его дискриминант

$$D = 4(\bar{X})^2 - 4(2(\bar{X})^2 + \bar{X} - \bar{X}^2) = 4(\bar{X})^2 - 8(\bar{X})^2 - 4\bar{X} + 4\bar{X}^2.$$

Приведём подобные

$$4(\bar{X})^2 - 8(\bar{X})^2 - 4\bar{X} + 4\bar{X}^2 = 4\bar{X}^2 - 4(\bar{X})^2 - 4\bar{X}.$$

Найдём корень

$$\lambda_1^* = \frac{2\bar{X} - 2\sqrt{\bar{X}^2 - (\bar{X})^2 - \bar{X}}}{2} = \bar{X} - \sqrt{\bar{X}^2 - (\bar{X})^2 - \bar{X}}.$$

Тогда оценка второго параметра равна  $\lambda_2^* = \bar{X} + \sqrt{\bar{X}^2 - (\bar{X})^2 - \bar{X}}$ .

# Занятие 4. Оценка максимального правдоподобия

## Контрольные вопросы и задания

Как построить оценку максимального правдоподобия?

Плотность распределения выборки  $(X_1, \dots, X_n)$  имеет вид

$$L(\vec{X}, \theta) = \prod_{k=1}^n p(X_k, \theta),$$

как плотность вектора с независимыми координатами.  $L(\vec{X}, \theta)$  — функция правдоподобия.

Оценка максимального правдоподобия  $\hat{\theta}$  — такое значение параметра  $\theta$ , при котором функция правдоподобия достигает своего максимального значения  $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(\vec{X}, \theta)$ .

**Сформулируйте свойства оценки максимального правдоподобия.**

Оценка максимального правдоподобия, как правило, сильно состоятельная.

## Аудиторные задачи

### 4.3

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия векторного параметра  $(a, \sigma^2)$  нормального распределения.

*Решение.* Выборка  $x_1, \dots, x_n \sim N(a, \sigma^2)$ . Сейчас  $\theta$  будет векторным параметром, состоящим из двух элементов:  $a, \sigma^2$ .

Плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Произведение этих плотностей даёт

$$L(\vec{x}, a, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}.$$

Обозначим  $\sigma^2 = \sigma^*$ , чтобы было удобней брать производную

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma^*)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^*} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}.$$

Поскольку есть экспонента, стоит брать логарифм

$$l(\vec{x}, a, \sigma^*) = \ln L(\vec{x}, a, \sigma^*) = -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi\sigma^*) - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Распишем логарифм произведения через сумму логарифмов

$$-\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi\sigma^*) - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \cdot \ln\sigma^* - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Берём производную

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^*} l = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^*} + \frac{1}{2(\sigma^*)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = 0.$$

Теперь надо по  $a$  продифференцировать и тоже приравнять к нулю

$$\frac{\partial}{\partial a} l = \frac{1}{\sigma^*} \sum_{i=1}^n (x_i - a) = 0 = \frac{n\bar{X} - na}{\sigma^*}.$$

Распишем сумму в явном виде  $(x_1 - a) + (x_2 - a) + \dots + (x_n - a) = 0$ .

Отсюда

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Оценка равна  $\hat{a} = \bar{x}$ .

Тогда оценка второго параметра равна

$$\hat{\sigma}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Проверили только необходимое условие для максимума. Теперь нужно проверить достаточность.



Имеем матрицу  $n \times n$ . Матрица положительно определена тогда и только тогда, когда каждый минор положительный. Матрица отрицательно определена тогда и только тогда, когда каждый минор отрицательный.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial a^2} & \frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma^*} \\ \frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma^*} & \frac{\partial^2}{\partial (\sigma^*)^2} \end{bmatrix}.$$

Найдём последний элемент матрицы

$$\frac{\partial^2}{\partial (\sigma^*)^2} l = \frac{n}{2 (\sigma^*)^2} - \frac{1}{(\sigma^*)^3} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Найдём смешанную производную

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma^*} l = - \sum_{i=1}^n (x_i - a) \cdot \frac{1}{(\sigma^*)^2} = \frac{n\bar{x} - na}{(\sigma^*)^2}.$$

Найдём первый элемент матрицы

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} l = - \frac{n}{\sigma^*}.$$

Теорема Шварца. Если

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

и они непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ , то они совпадают в этой точке.

Первый определитель строго отрицательный.

Второй определитель

$$M_2 = - \frac{n^2}{2 (\sigma^*)^3} + \frac{n}{(\sigma^*)^4} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a) - \frac{n}{(\sigma^*)^4} \cdot (\bar{x} - a)^2.$$

Последнее слагаемое равно нулю. Нужно проверять это значение в точке  $\hat{a} = \bar{x}$ . Имеем

$$\begin{aligned} & - \frac{n^2}{2 (\sigma^*)^3} + \frac{n}{(\sigma^*)^4} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a) - \frac{n}{(\sigma^*)^4} \cdot (\bar{x} - a)^2 = \\ & = - \frac{n}{(\sigma^*)^3} \cdot \left( \frac{n}{2} - \frac{1}{\sigma^*} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a) \right) > 0. \end{aligned}$$

Нужно проверить в точке  $\sigma^* = \hat{\sigma}$ . Имеем

$$\frac{n}{2} < \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{\sigma^*}.$$

Отсюда выражаем значение оценки

$$\sigma^* = \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}).$$

Следовательно,

$$\frac{n}{2} < n,$$

то есть  $M_2 < 0$ . По критерию Сильвестра  $\hat{A} < 0$  тогда и только тогда, когда  $(\hat{a}, \hat{\sigma}^*)$  — точка максимума.

#### 4.5

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия параметра  $\theta$  показательного распределения.

*Решение.*  $p(x, \theta) = \theta e^{-\theta x} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\}$ .

Нужно найти функцию правдоподобия как произведение плотностей  $L(\vec{x}, \theta) = \theta^n \cdot e^{-n\theta \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \mathbb{1}\{\vec{x} \in [0, +\infty)^n\}$ . Предполагаем, что все  $x_i \geq 0$ , то есть индикатор можно отбросить. Если какой-то элемент выборки сильно отрицательный, то не имеет смысла говорить о равномерном распределении. Если какой-то элемент выборки близок к нулю и при этом отрицательный, то на него повлияла ошибка, и его не учитываем

$$\theta^n \cdot e^{-n\theta \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \mathbb{1}\{\vec{x} \in [0, +\infty)^n\} = \theta^n e^{-n\theta \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Удобнее будет рассмотреть

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = l(\theta) = -\theta \sum_{i=1}^n x_i + n \ln \theta.$$

Нужно взять производную и приравнять к нулю

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = -\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{\theta} = 0.$$

Переносим сумму вправо

$$\frac{n}{\theta} = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Получаем оценку

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Выразим через выборочное среднее

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

Остаётся проверить, что  $\hat{\theta}$  будет действительно максимумом функции  $l$ . Нужно найти вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0.$$

Отсюда следует, что функция выпуклая ввекх, соответственно это точка максимума.

#### 4.6

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия параметра  $\theta > 0$  равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$ .

*Решение.* Плотность равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$  имеет вид

$$p_{\theta}(x) = \frac{\mathbb{1}\{x \in [0, \theta]\}}{\theta}.$$

По этой плотности строим функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \frac{\mathbb{1}\{\vec{x} \in [0, \theta]^n\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq 0, \max_i x_i \leq \theta\right\}}{\theta^n}.$$

Если какой-то элемент выборки сильно отрицательный, то не имеет смысла говорить о равномерном распределении, если близок к нулю, то на него повлияла ошибка, и его не учитываем

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq 0, \max_i x_i \leq \theta\right\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\max_i x_i \leq \theta\right\}}{\theta}.$$

Нарисуем график получившейся функции как функции от  $\theta$  (рис. 4).

Точка максимума такой функции — это  $\max_i x_i$ .

Значит,  $\hat{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ .

#### 4.7

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия параметра сдвига  $\beta \in \mathbb{R}$  показательного распределения с плотностью

$$f_{\beta}(y) = \begin{cases} e^{\beta-y}, & y \geq \beta, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$



Рис. 4: График функции  $L(\theta)$

Проверьте состоятельность этой оценки.

*Решение.*  $f_\beta(y) = e^{\beta-y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq \beta\}$ .

Запишем функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \beta) = e^{n\beta - \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \mathbb{1}\{\vec{x} \in [\beta, +\infty)^n\} = e^{n\beta - \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \mathbb{1}\left\{\min_{1 \leq i \leq n} x_i \geq \beta\right\}.$$

Рисуем схематический график (рис. 5).



Рис. 5: График функции  $L(\beta)$

Из графика видно, что  $\hat{\beta} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$ . Проверяем состоятельность:

$$\hat{\beta} \xrightarrow{P} \beta, n \rightarrow \infty.$$

По определению  $P\left(\left|\hat{\beta} - \beta\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall \varepsilon > 0$ . Подставляем оценку в функцию правдоподобия

$$e^{n\beta - \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \mathbb{1}\left\{\min_{1 \leq i \leq n} x_i \geq \beta\right\} = P\left(\left|\min_{1 \leq i \leq n} x_i - \beta\right| > \varepsilon\right).$$

Минимальный член выборки не может быть меньше  $\beta$  из-за распределения.  
 $P\left(\left|\min_{1 \leq i \leq n} x_i - \beta\right| > \varepsilon\right) = P\left(\min_{1 \leq i \leq n} x_i > \beta + \varepsilon\right)$ . Запишем через вероятность пересечения событий  $\{x_i > \beta + \varepsilon\}$ . Получим

$$P\left(\min_{1 \leq i \leq n} x_i > \beta + \varepsilon\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{x_i > \beta + \varepsilon\}\right).$$

Случайные величины независимы и одинаково распределены

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{x_i > \beta + \varepsilon\}\right) = [P(x_1 > \beta + \varepsilon)]^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так как такая вероятность меньше единицы.

Достаточно показать, что  $P(x_1 > \beta + \varepsilon) \neq 1$ . Тогда  $l^n \rightarrow 0$ .

Запишем интеграл от плотности со сдвигом

$$\int_{\beta+\varepsilon}^{+\infty} p_{\beta}(y) dy = 1 - \int_{\beta}^{\beta+\varepsilon} p_{\beta}(y) dy < 1,$$

так как второй интеграл больше нуля (забрали кусок  $\beta + \varepsilon$ ).

#### 4.8

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия параметра сдвига  $\mu \in \mathbb{R}$  распределения Лапласа с плотностью  $f_{\mu}(y) = e^{-\frac{|y-\mu|}{2}}$ .

*Решение.* Записываем функцию правдоподобия

$$L(\vec{X}, \mu) = \prod_{i=1}^n f_{\mu}(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot e^{-|X_i - \mu|} = \frac{1}{2^n} \cdot e^{-\sum_{i=1}^n |X_i - \mu|}.$$

Находим логарифм

$$l(\vec{X}, \mu) = c - \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|,$$

где  $c = \text{const}$ . Дифференцировать по  $\mu$  не можем. Хотим максимизировать эту функцию правдоподобия. Нужно минимизировать сумму  $X_i$  — точки на оси.  $|X_i - \mu|$  — расстояние.

Вариационный ряд имеет понятие медианы. Это приблизительно середина вариационного ряда.

$$\mu^* = \begin{cases} X_{(m+1)}, & n = 2m + 1, \\ \frac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2}, & n = 2m \end{cases}$$

— аналогия с центром масс треугольника, который задаётся как точка пересечения медиан.

#### 4.9

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия параметра  $p$  распределения Бернулли.

*Решение.* Распределение Бернулли не имеет плотности. Есть выборка  $x_1, \dots, x_n \sim B(1, p)$ .

Сформулируем метод максимального правдоподобия в общем случае.

$X_1, \dots, X_n$  — выборка с параметром  $\theta$ .

$X_1, \dots, X_n$  имеют плотность распределения  $p_\theta(y)$ . Тогда

$$L(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i).$$

Отсюда находим  $\hat{\theta} = \operatorname{argmax} L(\vec{X}, \theta)$ .

В дискретном случае плотность заменяем функцией  $f(x) = P\{Y = x\}$ .

Имеем распределение  $P(X = k) = p^k \cdot (1 - p)^{1-k}$ ,  $k = 0, 1$ . Следовательно, но,

$$L(\vec{X}, p) = \prod_{i=1}^n p^{X_i} (1 - p)^{1-X_i} = p^{\sum_{i=1}^n X_i} \cdot (1 - p)^{\sum_{i=1}^n (1-X_i)} = p^{n\bar{X}} \cdot (1 - p)^{n(1-\bar{X})}.$$

Функцию непрерывна по  $p$ . Можем продифференцировать

$$l(\vec{X}, p) = n\bar{X} \ln p + n(1 - \bar{X}) \ln(1 - p).$$

Берём производную и приравниваем к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n\bar{X}}{p} - \frac{n(1 - \bar{X})}{1 - p} = 0.$$

Сокращаем на  $n$  и переносим второе слагаемое вправо

$$\frac{\bar{X}}{p} = \frac{1 - \bar{X}}{1 - p}.$$

Перемножаем как пропорцию  $\bar{X} - p\bar{X} = p(1 - \bar{X})$ . Отсюда следует, что  $p^* = \bar{X}$ .

Проверим это, взяв вторую производную и посмотрев на её знак

$$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{n\bar{X}}{p^2} - \frac{n(1 - \bar{X})}{(1 - p)^2} < 0,$$

следовательно,  $p^* = \operatorname{argmax} l(\vec{X}, p)$ .

#### 4.10

*Задание.* Пусть задана выборка из нормального распределения с единичной дисперсией и математическим ожиданием  $a$ , которое может принимать только два значения: 1 или 2. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра  $a$ .

*Решение.* Записываем общую функцию правдоподобия, как функцию параметра  $a$ .

Запишем для этого плотность распределения каждого элемента

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}.$$

Теперь

$$L(\vec{X}, a) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i-a)^2}.$$

Записываем логарифм

$$l(\vec{X}, a) = -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2.$$

Подставим возможные значения  $a$  и найдём разность логарифмов двух соответствующих функций правдоподобия

$$l(\vec{X}, 2) - l(\vec{X}, 1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - 2)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2.$$

Запишем под одну сумму

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - 2)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n [(X_i - 2)^2 - (X_i - 1)^2].$$

Разложим на 2 множителя

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n [(X_i - 2)^2 - (X_i - 1)^2] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - 2 - X_i + 1)(X_i - 2 + X_i - 1).$$

Приведём подобные

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - 2 - X_i + 1)(X_i - 2 + X_i - 1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (2X_i - 3)(-1).$$

Выносим  $n$  за скобки

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (2X_i - 3)(-1) = n \left( \frac{3}{2} - \bar{X} \right).$$

Знак разности будет зависеть от значения  $\vec{X}$ .

Если

$$\vec{X} < \frac{3}{2},$$

то  $a^* = 1$ , если

$$\vec{X} \geq \frac{3}{2},$$

то  $a^* = 2$ .

## Домашнее задание

### 4.14

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия дисперсии  $\sigma^2$  нормального распределения, если математическое ожидание  $a$  известно. Выясните, не является ли оценка состоятельной оценкой параметра  $\sigma^2$ .

*Решение.*

$$p_{\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Запишем функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}.$$

Обозначим  $\sigma^2 = \sigma^*$ , чтобы было удобнее брать производную

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^*)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^*} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}.$$

Поскольку есть экспонента, стоит брать логарифм

$$l(\vec{x}, \sigma^2) = \ln L(\vec{x}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi\sigma^*) - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Распишем логарифм произведения через сумму логарифмов в первом слагаемом

$$-\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi\sigma^*) - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \cdot \ln\sigma^* - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Берём производную и приравняем её к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^*} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^*} + \frac{1}{2(\sigma^*)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = 0.$$



Выносим в знаменателе  $\sigma^*$  за скобку, сокращаем и переносим первое слагаемое вправо

$$\frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \frac{n}{2}.$$

Выражаем оценку

$$\sigma^* = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{n}.$$

Проверили необходимое условие для максимума. Теперь нужно проверить достаточное.

Найдём вторую производную

$$\frac{\partial^2 l}{\partial (\sigma^*)^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^*} \left[ -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^*} + \frac{1}{2(\sigma^*)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right] = \frac{n}{2(\sigma^*)^2} - \frac{1}{(\sigma^*)^3} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Подставим найденное значение оценки

$$\frac{n}{2(\sigma^*)^2} - \frac{1}{(\sigma^*)^3} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \frac{n \cdot n^2}{2 \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right]^2} - \frac{n^3}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right]^3} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Упростим

$$\begin{aligned} & \frac{n \cdot n^2}{2 \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right]^2} - \frac{n^3}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right]^3} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \\ & = \frac{n^3}{2 \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right]^2} - \frac{n^3}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right]^2} = \frac{n^3}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right]^3} \cdot \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = \\ & = -\frac{n^3}{2 \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right]^3} < 0, \end{aligned}$$

следовательно,  $\hat{\sigma}^2$  — точка максимума функции. Проверим состоятельность, то есть  $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2, n \rightarrow \infty$ .

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \xrightarrow{P} M(x_1 - a)^2 = Dx_1 = \sigma^2, n \rightarrow \infty,$$

то есть оценка состоятельная.

#### 4.15

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия параметра  $\lambda > 0$  распределения Пуассона.

*Решение.* Распределение Пуассона не имеет плотности. Есть выборка  $x_1, \dots, x_n \sim Pois(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

Функция правдоподобия, когда есть плотность, выглядит так

$$L(\vec{x}, \lambda) = \prod_{i=1}^n p_{\lambda}(x_i).$$

Введём функцию  $f_{\lambda}(x) = P\{x_1 = x\} = P\{\omega | x_1(\omega) = x\}$ , где

$$x \in \{0, 1, \dots\}.$$

В этом случае функция правдоподобия примет вид

$$L(\vec{x}, \lambda) = \prod_{i=1}^n f_{\lambda}(x_i).$$

Ищем максимум функции правдоподобия. Нужно записать

$$f_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Подставляем в функцию правдоподобия

$$\prod_{i=1}^n f_{\lambda}(x_i) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \cdot e^{-\lambda n}.$$

Так как есть экспонента, возьмём логарифм

$$l(\vec{x}, \lambda) = \ln L(\vec{x}, \lambda) = \ln \left( \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \cdot e^{-\lambda n} \right) = -\lambda n + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n x_i!.$$

Берём производную по  $\lambda$ , приравниваем её к нулю

$$\frac{\partial l(\vec{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = -n + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Ищем оценку

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{\lambda} = n,$$

откуда

$$\lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}.$$

Проверили необходимое условие максимума. Проверим достаточное, то есть найдём вторую производную логарифма функции правдоподобия и посмотрим на её знак

$$\frac{\partial^2 l(\vec{x}, \lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( -n + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial \lambda^{-1}}{\partial \lambda} = - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{\lambda^2} < 0,$$

то есть точка  $\lambda^* = \bar{x}$  — точка максимума функции правдоподобия, то есть оценка максимального правдоподобия.

#### 4.16

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия параметра

$$p \in (0, 1)$$

геометрического распределения.

*Решение.* Геометрическое распределение не имеет плотности.

Сформируем метод максимального правдоподобия в общем случае.

$X_1, \dots, X_n$  — выборка с параметром  $\theta$ .

Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют плотность распределения  $p_\theta(y)$ .

Тогда

$$L(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i).$$

Отсюда находим  $\hat{\theta} = \operatorname{argmax} L(\vec{X}, \theta)$ .

В дискретном случае плотность заменяется функцией  $f(x) = P\{Y = x\}$ .

Имеем распределение  $P(X = k) = p(1-p)^k$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Следовательно,

$$L(\vec{X}, p) = \prod_{i=1}^n p(1-p)^{X_i} = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n X_i} = p^n (1-p)^{n\bar{X}}.$$

Функция непрерывна по  $p$ , можем дифференцировать.

$$l(\vec{X}, p) = n \ln p + n\bar{X} \ln(1-p).$$

Берём производную и приравняем к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{n\bar{X}}{1-p} = 0.$$

Сокращаем на  $n$  и переносим второе слагаемое вправо

$$\frac{1}{p} = \frac{\bar{X}}{1-p}.$$

Перемножаем как пропорцию  $1 - p = p\bar{X}$ . Отсюда слудует, что

$$1 = p + p\bar{X} = p(1 + \bar{X}),$$

и

$$p^* = \frac{1}{1 + \bar{X}}.$$

Проверим это, взяв вторую производную и посмотрев на её знак

$$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{n}{p^2} - \frac{n\bar{X}}{(1-p)^2} < 0,$$

следовательно,  $p^* = \operatorname{argmax}_l(\vec{X}, p)$ .

#### 4.17

*Задание.* Пусть задана выборка из биномиального распределения с параметрами  $p \in (0, 1)$  и  $m$ . Постройте оценку максимального правдоподобия параметра:

- а)  $p$ , если значение параметра  $m$  известно;
- б)  $m$  по выборке объёма  $n = 1$ , если значение  $p$  известно.

*Решение.* Биномиальное распределение не имеет плотности.

Сформируем метод максимального правдоподобия в общем случае.

$X_1, \dots, X_n$  — выборка с параметром  $\theta$ .

Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют плотность распределения  $p_\theta(y)$ .

Тогда

$$L(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i).$$

Отсюда находим  $\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_L(\vec{X}, \theta)$ .

В дискретном случае плотность заменяется функцией  $f(x) = P\{Y = x\}$ .

Имеем распределение  $P(X = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$ ,  $k = \overline{0, m}$ . Следовательно,

$$L(\vec{X}, p, m) = \prod_{i=1}^n C_m^{X_i} p^{X_i} (1-p)^{m-X_i} = \prod_{i=1}^n C_m^{X_i} \cdot p^{\sum_{i=1}^n X_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^n (m-X_i)}.$$

Записываем через выборочное среднее

$$\prod_{i=1}^n C_m^{X_i} \cdot p^{\sum_{i=1}^n X_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^n (m-X_i)} = \prod_{i=1}^n C_m^{X_i} \cdot p^{n\bar{X}} (1-p)^{n(m-\bar{X})}.$$

а) Функция непрерывна по  $p$ . Можем дифференцировать.

$$l(\vec{X}, p, m) = \sum_{i=1}^n C_m^{X_i} + n\bar{X} \ln p + n(m - \bar{X}) \ln(1 - p).$$

Берём производную и приравняем к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n\bar{X}}{p} - \frac{n(m - \bar{X})}{1 - p} = 0.$$

Сокращаем на  $n$  и переносим вправо второе слагаемое

$$\frac{\bar{X}}{p} = \frac{m - \bar{X}}{1 - p}.$$

Перемножим как пропорцию  $\bar{X} - p\bar{X} = p(m - \bar{X})$ . Отсюда следует, что  $p(m - \bar{X}) + p\bar{X} = \bar{X}$ , и оценка равна

$$p^* = \frac{\bar{X}}{m - \bar{X} + \bar{X}} = \frac{\bar{X}}{m}.$$

Проверим это, взяв вторую производную и посмотрев на её знак

$$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{m\bar{X}}{p^2} - \frac{m(m - \bar{X})}{(1 - p)^2} < 0,$$

следовательно,  $p^* = \operatorname{argmax} l(\vec{X}, p)$ ;

б) в данном случае  $\vec{X} = X_1$ . Имеем функцию правдоподобия

$$L_m = C_m^{X_1} p^{X_1} (1 - p)^{m - X_1} = L(X_1, m) = L(\vec{X}, m),$$

соответственно  $L_{m-1} = C_{m-1}^{X_1} p^{X_1} (1 - p)^{m-1-X_1}$ .

Найдём отношение

$$\frac{L_m}{L_{m-1}} = \frac{C_m^{X_1} p^{X_1} (1 - p)^{m - X_1}}{C_{m-1}^{X_1} p^{X_1} (1 - p)^{m-1-X_1}} = \frac{m! (1 - p) X_1! (m - X_1 - 1)!}{X_1! (m - X_1)! (m - 1)!}.$$

Сокращаем факториалы

$$\frac{m! (1 - p) X_1! (m - X_1 - 1)!}{X_1! (m - X_1)! (m - 1)!} = \frac{m(1 - p)}{m - X_1}.$$

Возможны 2 случая

$$\begin{cases} \frac{m(1-p)}{m-X_1} \geq 1, \\ \frac{m(1-p)}{m-X_1} \leq 1. \end{cases}$$

Переносим знаменатель вправо

$$\begin{cases} m(1-p) \geq m - X_1, \\ m(1-p) \leq m - X_1. \end{cases}$$

Переносим слагаемые с  $m$  в одну сторону

$$\begin{cases} m - m(1-p) \leq X_1, \\ m - m(1-p) \geq X_1. \end{cases}$$

Выносим  $m$  за скобки

$$\begin{cases} m(1-1+p) \leq X_1, \\ m(1-1+p) \geq X_1. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} m \leq \frac{X_1}{p}, \\ m \geq \frac{X_1}{p}. \end{cases}$$

Отсюда оценка равна

$$m^* = \left\lceil \frac{X_1}{p} \right\rceil.$$

#### 4.18

*Задание.* Постройте оценку максимального правдоподобия параметра  $\theta$  равномерного распределения на отрезке:

- a)  $[-\theta, 0]$ ,  $\theta > 0$ ;
- b)  $[-\theta, \theta]$ ,  $\theta > 0$ ;
- c)  $[\theta, \theta + 2]$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ;
- d)  $[\theta, 2\theta]$ ,  $\theta > 0$ .

*Решение.*

- a) Плотность равномерного распределения на отрезке  $[-\theta, 0]$ ,  $\theta > 0$  имеет вид

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\{x \in [-\theta, 0]\}.$$

По этой плотности строим функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \frac{\mathbb{1}\{\vec{x} \in [-\theta, 0]^n\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq -\theta, \max_i x_i \leq 0\right\}}{\theta^n}.$$

Если какой-то элемент выборки сильно положительный, то не имеет смысла говорить о равномерном распределении, если положительный, но близок к нулю, то на него повлияла ошибка, и его не учитываем

$$\frac{\mathbb{1} \left\{ \min_i x_i \geq -\theta, \max_i x_i \leq 0 \right\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1} \left\{ \min_i x_i \geq -\theta \right\}}{\theta^n}.$$

Нарисуем график получившейся функции, как функции от  $\theta$  (рис. 6).



Рис. 6: График функции  $L(\theta)$

Точка максимума этой функции — это  $\left(-\min_i x_i\right)$ .

Значит,  $\hat{\theta} = -\min_{1 \leq i \leq n} x_i$ ;

- b) плотность равномерного распределения на отрезке  $[-\theta, \theta]$ ,  $\theta > 0$  имеет вид

$$p_\theta(x) = \frac{\mathbb{1} \{x \in [-\theta, \theta]\}}{2\theta}.$$

По этой функции строим функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \frac{\mathbb{1} \{\vec{x} \in [-\theta, \theta]^n\}}{(2\theta)^n} = \frac{\mathbb{1} \left\{ \min_i x_i \geq -\theta, \max_i x_i \leq \theta \right\}}{(2\theta)^n}.$$

Меняем знак для минимального элемента выборки

$$\frac{\mathbb{1} \left\{ \min_i x_i \geq -\theta, \max_i x_i \leq \theta \right\}}{(2\theta)^n} = \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1} \left\{ \max_i x_i \leq \theta, -\min_i x_i \leq \theta \right\}.$$

Берём максимум

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1} \left\{ \max_i x_i \leq \theta, -\min_i x_i \leq \theta \right\} = \\ & = \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1} \left\{ \max \left( \max_i x_i, -\min_i x_i \right) \leq \theta \right\}. \end{aligned}$$



Рис. 7: График функции  $L(\theta)$

Нарисуем график этой функции, как функции от  $\theta$  (рис. 7).

Точка максимума такой функции — это  $\max \left( \max_i x_i, -\min_i x_i \right)$ .

Значит,  $\hat{\theta} = \max \left( \max_{1 \leq i \leq n} x_i, -\min_{1 \leq i \leq n} x_i \right)$ ;

- с) плотность равномерного распределения на отрезке  $[\theta, \theta + 2]$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  имеет вид

$$p_\theta(x) = \frac{\mathbb{1}\{x \in [\theta, \theta + 2]\}}{2}.$$

По этой плотности строим функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \frac{\mathbb{1}\{\vec{x} \in [\theta, \theta + 2]^n\}}{2^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq \theta, \max_i x_i \leq \theta + 2\right\}}{2^n}.$$

Переносим 2 влево

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq \theta, \max_i x_i \leq \theta + 2\right\}}{2^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq \theta, \max_i x_i - 2 \leq \theta\right\}}{2^n}.$$

Значит,  $\max_{1 \leq i \leq n} x_i - 2 \leq \hat{\theta} \leq \min_{1 \leq i \leq n} x_i$ ;

- д) плотность равномерного распределения на отрезке  $[\theta, 2\theta]$ ,  $\theta > 0$  имеет вид

$$p_\theta(x) = \frac{\mathbb{1}\{x \in [\theta, 2\theta]\}}{\theta}.$$

По этой функции строим функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \frac{\mathbb{1}\{\vec{x} \in [\theta, 2\theta]^n\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq \theta, \max_i x_i \leq 2\theta\right\}}{\theta^n}.$$



Делим неравенство с максимумом на 2

$$\frac{\mathbb{1} \left\{ \min_i x_i \geq \theta, \max_i x_i \leq 2\theta \right\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1} \left\{ \min_i x_i \geq \theta, \frac{\max_i x_i}{2} \leq \theta \right\}}{\theta^n}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\max_i x_i}{2} \leq \theta \leq \min_i x_i.$$

Нарисуем график полученной функции, как функции от  $\theta$  (рис. 8).



Рис. 8: График функции  $L(\theta)$

Точка максимума такой функции — это

$$\frac{\max_i x_i}{2}.$$

Значит,

$$\hat{\theta} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} x_i}{2}.$$

#### 4.19

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из двухпараметрического показательного распределения с плотностью

$$f_{\alpha, \beta}(y) = \begin{cases} \alpha^{-1} e^{-\frac{y-\beta}{\alpha}}, & y \geq \beta, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Постройте оценку максимального правдоподобия двумерного параметра  $(\alpha, \beta)$ . Проверьте состоятельность этой оценки.

*Решение.* Сейчас  $\theta$  будет векторным параметром, состоящим из двух элементов:  $\alpha, \beta$ .

Плотность имеет вид

$$f_{\alpha, \beta}(y) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{y}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}} \cdot \mathbb{1}\{y \geq \beta\}.$$

Произведение этих плотностей даёт

$$L(\vec{X}, \alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha^n} \cdot e^{-\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (X_i - \beta)} \cdot \mathbb{1} \left\{ \vec{X} \in [\beta, +\infty)^n \right\}.$$

Все элементы выборки не меньше, чем  $\beta$ . Запишем это условие через минимальный элемент

$$\frac{1}{\alpha^n} \cdot e^{-\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (X_i - \beta)} \cdot \mathbb{1} \left\{ \vec{X} \in [\beta, +\infty)^n \right\} = \frac{1}{\alpha^n} \cdot e^{-\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (X_i - \beta)} \cdot \mathbb{1} \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} X_i \geq \beta \right\}.$$

Найдём  $\beta^*$ . При фиксированном  $\alpha$  нарисуем график функции правдоподобия как функции от  $\beta$  (рис. 9).



Рис. 9: График функции  $L(\beta)$

Из графика видно, что точка максимума этой функции — это точка  $\min_{1 \leq i \leq n} X_i = \beta^*$ .

Так как есть экспонента, удобнее взять логарифм от функции правдоподобия

$$\ln(\vec{X}, \alpha, \beta) = l(\vec{X}, \alpha, \beta) = -n \ln \alpha + \frac{n\beta - \sum_{i=1}^n X_i}{\alpha}.$$

Возьмём производную по  $\alpha$  и приравняем её к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = -n \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{n\beta - \sum_{i=1}^n X_i}{\alpha^2} = 0.$$

Умножим на  $(-\alpha^2)$  левую и правую части уравнения

$$n\alpha + n\beta - \sum_{i=1}^n X_i = 0.$$

Отсюда выражаем оценку

$$\alpha^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \beta^* = \bar{X} - \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Проверим состоятельность. Нужно проверить, выполняется ли

$$(\alpha^*, \beta^*) \xrightarrow{P} (\alpha, \beta), n \rightarrow \infty.$$

По определению  $P(|\beta^* - \beta| > \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall \varepsilon > 0$ .

Подставим в вероятность оценку

$$P(|\beta^* - \beta| > \varepsilon) = P\left(\left|\min_{1 \leq i \leq n} X_i - \beta\right| > \varepsilon\right).$$

Из распределения  $\min_{1 \leq i \leq n} X_i \geq \beta$ , следовательно, можем убрать модуль

$$P\left(\left|\min_{1 \leq i \leq n} X_i - \beta\right| > \varepsilon\right) = P\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i - \beta > \varepsilon\right) = P\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i > \beta + \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i > \beta + \varepsilon\}\right).$$

Случайные величины независимые и одинаково распределённые  $P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i > \beta + \varepsilon\}\right) = [P(X_1 > \beta + \varepsilon)]^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , так как  $P(X_1 > \beta + \varepsilon) \neq 1$ .

Значит,  $\beta^*$  — состоятельная оценка. Тогда по закону больших чисел

$$\alpha^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \beta^* \xrightarrow{P} MX_1 - \beta = \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{y}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha}} y dy - \beta.$$

Возьмём интеграл по частям

$$u = y, du = dy, dv = e^{-\frac{y}{\alpha}} dy, v = \int e^{-\frac{y}{\alpha}} dy = -\alpha e^{-\frac{y}{\alpha}}.$$

Получим

$$\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{y}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha}} y dy - \beta = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{\beta}{\alpha}} (-\alpha) y e^{-\frac{y}{\alpha}} \Big|_{\beta}^{+\infty} + \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha \cdot \int_{\beta}^{+\infty} e^{-\frac{y}{\alpha}} dy - \beta.$$

Подставим пределы интегрирования и возьмём интеграл

$$\frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{\beta}{\alpha}} (-\alpha) y e^{-\frac{y}{\alpha}} \Big|_{\beta}^{+\infty} + \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha \cdot \int_{\beta}^{+\infty} e^{-\frac{y}{\alpha}} dy - \beta = e^{\frac{\beta}{\alpha}} \beta \cdot e^{-\frac{\beta}{\alpha}} - e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha e^{-\frac{y}{\alpha}} \Big|_{\beta}^{+\infty} - \beta.$$

Сократим экспоненты и подставим пределы интегрирования во втором слагаемом

$$e^{\frac{\beta}{\alpha}} \beta \cdot e^{-\frac{\beta}{\alpha}} - e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha e^{-\frac{y}{\alpha}} \Big|_{\beta}^{+\infty} - \beta = \beta + \alpha e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{\beta}{\alpha}} - \beta = \alpha.$$

Получили, что оценка  $\alpha^*$  — тоже состоятельная.

#### 4.20

*Задание.* Пусть задана выборка из двухпараметричного распределения Лапласа с плотностью

$$f_{\mu,\sigma}(y) = \frac{e^{-\frac{|y-\mu|}{\sigma}}}{2\sigma}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Постройте оценку максимального правдоподобия двумерного параметра  $(\mu, \sigma)$ .

*Решение.* Записываем функцию правдоподобия

$$L(\vec{X}, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n f_{\mu,\sigma}(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma} \cdot e^{-\frac{|X_i-\mu|}{\sigma}} = \frac{1}{(2\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |X_i-\mu|}.$$

Находим логарифм

$$l(\vec{X}, \mu, \sigma) = -n \ln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu| = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|.$$

Дифференцировать по  $\mu$  не можем. Хотим максимизировать функцию правдоподобия. Нужно минимизировать сумму  $|X_i - \mu|$  — точки на оси.  $|X_i - \mu|$  — расстояние.

Вариационный ряд имеет понятие медианы. Это приблизительно середина вариационного ряда

$$\mu^* = \begin{cases} X_{(m+1)}, & n = 2m + 1, \\ \frac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2}, & n = 2m \end{cases}$$

— аналог с центром масс треугольника, который задаётся как точка пересечения медиан.

Найдём оценку второго параметра. Нужно взять производную и приравнять к нулю

$$\frac{\partial l(\vec{X}, \mu, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu| = \frac{1}{\sigma} \cdot \left( \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu| - n \right) = 0.$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю

$$\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu| = n.$$

Отсюда оценка равна

$$\sigma^* = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \mu^*|}{n} = |\bar{X} - \mu^*|.$$

# Занятие 5. Достаточные статистики

## Контрольные вопросы и задания

Приведите определение условного распределения, определение достаточной статистики.

$$P(\xi \in \Delta \mid \mathcal{F}') = M[\mathbb{1}_\Delta(\xi) \mid \mathcal{F}'].$$

Статистика  $T$  называется достаточной для параметра  $\theta$ , если условное распределение при известном  $T$  не зависит от параметра  $\theta$ .

Сформулируйте теорему про характеризацию достаточной статистики.

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — выборка из распределения с плотностью

$$p(x, \theta), \theta \in \Theta.$$

Статистика  $T$  является достаточной тогда и только тогда, когда функция правдоподобия  $L(\vec{x}, \theta)$  допускает факторизацию, то есть может быть представлена произведением двух функций следующего вида

$$L(\vec{x}, \theta) = h(T, \theta) \cdot g(\vec{x}).$$

## Аудиторные задачи

### 5.3

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Бернулли с параметром  $p$ . Выясните, является ли  $\bar{X}$  достаточной статистикой для параметра  $p$ .

*Решение.* Записываем условное распределение.

Пусть  $k_i = 0$  или  $1$ .

По определению условной вероятности

$$\begin{aligned} & P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n | \bar{X} = y\} = \\ &= \frac{P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n, \bar{X} = y\}}{P\{\bar{X} = y\}}. \end{aligned}$$

Выборочное среднее  $\bar{X}$  выражаем через сумму

$$\begin{aligned} & \frac{P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n, \bar{X} = y\}}{P\{\bar{X} = y\}} = \\ &= \frac{P\left\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n, \sum_{i=1}^n X_i = ny\right\}}{P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = ny\right\}}. \end{aligned}$$

Все  $X_i$  — независимы, следовательно, будет произведение вероятностей событий

$$\begin{aligned} & \frac{P\left\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n, \sum_{i=1}^n X_i = ny\right\}}{P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = ny\right\}} = \\ &= \frac{\mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^n k_i = ny\right\} P\{X_1 = k_1\} \cdot \dots \cdot P\{X_n = k_n\}}{P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = ny\right\}}. \end{aligned}$$

Сумма распределена по биномиальному распределению с параметрами  $n, p$ . Подставляем значения вероятностей

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^n k_i = ny\right\} P\{X_1 = k_1\} \cdot \dots \cdot P\{X_n = k_n\}}{P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = ny\right\}} = \\ &= \frac{\mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^n k_i = ny\right\} p^{k_1} (1-p)^{1-k_1} \cdot \dots \cdot p^{k_n} (1-p)^{1-k_n}}{C_n^{ny} p^{ny} (1-p)^{n+ny}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся индикатором

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^n k_i = ny\right\} \cdot p^{k_1} (1-p)^{1-k_1} \cdot \dots \cdot p^{k_n} (1-p)^{1-k_n}}{C_n^{ny} p^{ny} (1-p)^{n+ny}} = \\ &= \frac{\mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^n k_i = ny\right\} \cdot p^{ny} (1-p)^{n-ny}}{C_n^{ny} p^{ny} (1-p)^{n-ny}}. \end{aligned}$$

Всё, что связано с  $p$ , пропадает

$$\frac{\mathbb{1} \left\{ \sum_{i=1}^n k_i = ny \right\} \cdot p^{ny} (1-p)^{n-ny}}{C_n^{ny} p^{ny} (1-p)^{n-ny}} = \frac{\mathbb{1} \left\{ \sum_{i=1}^n k_i = ny \right\}}{C_n^{ny}}.$$

Зависимости от  $p$  нет. Отсюда следует, что  $\bar{X}$  — достаточная статистика.

#### 5.4

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . Найдите условное распределение выборки при условии

$$X_1 + \dots + X_n = k.$$

Выясните, является ли  $\bar{X}$  достаточной статистикой для параметра  $\lambda$ .

*Решение.* Это дискретное распределение

$$\begin{aligned} P \left\{ X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n \mid \sum_{i=1}^n X_i = k \right\} = \\ \frac{P \left\{ X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n, \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}}{P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}}. \end{aligned}$$

Случайные величины  $X_i$  — независимы

$$\begin{aligned} \frac{P \left\{ X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n, \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}}{P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}} = \\ \frac{\mathbb{1} \left\{ \sum_{i=1}^n k_i = k \right\} P \{X_1 = k_1\} \cdot \dots \cdot P \{X_n = k_n\}}{P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}}. \end{aligned}$$

Имеем распределение Пуассона. Сумма независимых случайных величин имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda n$ . Подставляем значения вероятностей

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{1} \left\{ \sum_{i=1}^n k_i = k \right\} P \{X_1 = k_1\} \cdot \dots \cdot P \{X_n = k_n\}}{P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}} = \\ = \mathbb{1} \left\{ \sum_{i=1}^n k_i = k \right\} \cdot \frac{\frac{\lambda^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{k_n}}{k_n!} \cdot e^{-\lambda}}{\frac{(\lambda n)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\mathbb{1} \left\{ \sum_{i=1}^n k_i = k \right\} k!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n! n^k}. \end{aligned}$$

Видим, что нет зависимости от  $\lambda$ , следовательно, выборочное среднее  $\bar{X}$  — достаточная статистика для неизвестного  $\lambda$ .

## 5.5

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из нормального распределения со средним  $a$  и единичной дисперсией. Найдите условное совместное распределение выборки при условии  $X_1 + \dots + X_n = y$ . Выясните, является ли  $\bar{X}$  достаточной статистикой для параметра  $a$ .

*Решение.* Нужно записать функцию правдоподобия

$$L(X_1, \dots, X_n, a) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(X_i - a)^2}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - a)^2}{2}}.$$

Откроем квадрат и запишем в статистических обозначениях

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - a)^2}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\frac{n\bar{X}^2}{2} - an\bar{X} - \frac{a^2 n}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\frac{n\bar{X}^2}{2}} \cdot e^{an\bar{X} - \frac{a^2 n}{2}},$$

где

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\frac{n\bar{X}^2}{2}} = h(X_1, \dots, X_n), \quad e^{an\bar{X} - \frac{a^2 n}{2}} = g(a, \bar{X}).$$

Предъявляем функции, о которых идёт речь в теореме.

По теореме про характеризацию достаточной статистики  $\bar{X}$  — достаточная статистика.

## 5.6

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из нормального распределения с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Найдите достаточную статистику со значениями в  $\mathbb{R}$  для параметра  $\sigma^2$ .

*Решение.*

$$L(\vec{X}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{n\bar{X}^2}{2\sigma^2}}.$$

Достаточной статистикой будет второй выборочный момент.

$h(X_1, \dots, X_n) = 1$ , тогда

$$g(\sigma^2, \bar{X}^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{n\bar{X}^2}{2\sigma^2}}.$$

Для  $\sigma^2$  достаточная статистика —  $\hat{\sigma}^2 = \bar{X}^2$ .



### 5.7

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$ . Найдите достаточную статистику со значениями в  $\mathbb{R}$  для параметра  $\theta$ .

*Решение.*

$$L(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\{X_i \in [0, \theta]\}.$$

Все  $X_i$  должны быть не меньше нуля и не больше  $\theta$ . Получаем

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\{X_i \in [0, \theta]\} = \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq 0, X_{(n)} \leq \theta\}.$$

Разделим индикатор на 2

$$\frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq 0, X_{(n)} \leq \theta\} = \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq 0\} \cdot \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(n)} \leq \theta\},$$

где первый индикатор — это функция  $h(\vec{X})$ , всё остальное —  $g(\theta, X_{(n)})$ .

Вывод:  $X_{(n)}$  — достаточная статистика для  $\theta$ .

### 5.8

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке  $[a, b]$ . Выясните, какие из статистик  $\bar{X}$ ,  $X_{(n)}$ ,  $(X_{(1)}, X_{(n)})$  являются достаточными для двумерного параметра  $(a, b)$ .

*Решение.* Для оценки  $(a, b)$  будет достаточно  $(X_{(1)}, X_{(n)})$ .

Информацию про середину отрезка даёт  $\bar{X}$ . Этой информации недостаточно для оценки концов.

Зная  $X_{(n)}$ , будем знать, где правая граница, следовательно, этой информации недостаточно.

Ищем функцию правдоподобия

$$L(\vec{X}, a, b) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{X_i \in [a, b]\} = \frac{1}{(b-a)^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq a, X_{(n)} \leq b\}.$$

Записываем через функции, которые используются в теореме о характеристизации достаточной статистики

$$\frac{1}{(b-a)^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq a, X_{(n)} \leq b\} = g(a, b, X_{(1)}, X_{(n)}), \quad h(\vec{X}) = 1.$$

По теореме о характеристизации,  $(X_{(1)}, X_{(n)})$  — достаточная статистика для  $(a, b)$ .

Допустим,  $\bar{X}$  — достаточная статистика, значит должно выполняться  $L(\vec{X}, a, b) = h(\vec{X}) \cdot g(a, b, \bar{X})$ .

Пусть имеем две выборки:  $X_1^1, \dots, X_n^1$  и  $X_1^2, \dots, X_n^2$ , причём

$$\overline{X^1} = \overline{X^2} = c.$$

Допустим, что  $X_{(1)}^1 = a$ ,  $X_{(n)}^1 = b$ , следовательно,  $X_i^1 \sim U([a, b])$ .

Вторую выборку подбираем так, чтобы наблюдаемое значение выходило за пределы  $[a, b]$ , например,  $X_{(1)}^2 < a$ , но  $X_{(i)}^2 \in (a, b)$  при  $i \neq 1$ .

Ищем функции правдоподобия для этих двух выборок

$$L(\vec{X}^1) = \frac{1}{(b-a)^n} = h(\vec{X}^1) \cdot g(a, b, c), \quad L(\vec{X}^2) = 0 = h(\vec{X}^2) g(a, b, c).$$

Ноль — реакция на индикатор.

Если бы взяли выборку внутри  $(a, b)$ , то ничего бы не поменялось.

Но как только пересекаем границу, то есть реакция, то есть  $h$  уже зависит от концов отрезка,  $h$  зависит от  $a, b$ .

Для статистики  $X_{(n)}$  — аналогично.

## 5.9

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке  $[a(\theta), b(\theta)]$ . Докажите, что если  $a(\theta) \uparrow$ ,  $b(\theta) \downarrow$  с возрастанием  $\theta$ , то статистика  $T = \min(a^{-1}(X_{(1)}), b^{-1}(X_{(n)}))$  достаточная для параметра  $\theta$ .

*Решение.* Записываем функцию правдоподобия

$$L(\vec{X}, a(\theta), b(\theta)) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b(\theta) - a(\theta)} \cdot \mathbb{1}\{X_i \in [a(\theta), b(\theta)]\}.$$

Вычисляем произведение

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \frac{1}{b(\theta) - a(\theta)} \cdot \mathbb{1}\{X_i \in [a(\theta), b(\theta)]\} = \\ &= \frac{1}{[b(\theta) - a(\theta)]^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq a(\theta), X_{(n)} \leq b(\theta)\}. \end{aligned}$$

Это строго монотонные функции. Можем решить неравенства относительно  $\theta$ . Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[b(\theta) - a(\theta)]^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq a(\theta), X_{(n)} \leq b(\theta)\} = \\ &= \frac{1}{[b(\theta) - a(\theta)]^n} \cdot \mathbb{1}\{\theta \leq a^{-1}(X_{(1)}), \theta \leq b^{-1}(X_{(n)})\} = \\ &= \frac{1}{[b(\theta) - a(\theta)]^n} \cdot \mathbb{1}\{\theta \leq T\} = g(\theta, T), \end{aligned}$$

а  $h \equiv 1$ .

Отсюда  $T$  — достаточная статистика для  $\theta$ .

## Домашнее задание

### 5.11

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из биномиального распределения с параметрами  $m$  и  $p$ . Найдите условное распределение выборки при условии  $X_1 + \dots, X_n = k$ . Выясните, является ли  $\bar{X}$  достаточной статистикой для параметра  $p$  при известном  $m$ .

*Решение.* Это дискретное распределение

$$\begin{aligned} P\left(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n \mid \sum_{i=1}^n X_i = k\right) &= \\ &= \frac{P\left(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n, \sum_{i=1}^n X_i = k\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right)}. \end{aligned}$$

Имеем биномиальное распределение. Сумма независимых случайных величин имеет биномиальное распределение с параметрами  $mn$  и  $p$ . Подставляем значения вероятностей

$$\begin{aligned} &\frac{P\left(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n, \sum_{i=1}^n X_i = k\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right)} = \\ &= \frac{\mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^n k_i = k\right\} C_m^{k_1} p^{k_1} q^{m-k_1} \cdot \dots \cdot C_m^{k_n} p^{k_n} q^{m-k_n}}{C_{mn}^k p^k q^{mn-k}} = \\ &= \frac{\mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^n k_i = k\right\} C_m^{k_1} \cdot \dots \cdot C_m^{k_n}}{C_{mn}^k}. \end{aligned}$$

Видим, что нет зависимости от  $p$ , следовательно, выборочное среднее  $\bar{X}$  — достаточная статистика для неизвестного  $p$ .

### 5.12

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из нормального распределения со средним  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Найдите достаточную статистику со значениями в  $\mathbb{R}^2$  для двумерного параметра  $(a, \sigma^2)$ .

*Решение.* Ищем функцию правдоподобия

$$L(\vec{X}, a, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(X_i - a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}.$$

Раскрываем квадрат

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2aX_i + a^2)}.$$

Записываем через статистические величины

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2aX_i + a^2)} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{n\overline{X^2}}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{n\overline{X}a}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{a^2n}{2\sigma^2}}.$$

Эта величина равна  $g(a, \sigma^2, \overline{X}, \overline{X^2})$ ,  $h(\vec{X}) = 1$ .

По теореме о характеристизации,  $(\overline{X}, \overline{X^2})$  — достаточная статистика для  $(a, \sigma^2)$ .

### 5.13

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке

- a)  $[\theta, \theta + 1]$ ;
- b)  $[\theta, 2\theta]$ .

Найдите достаточную для параметра  $\theta$  статистику со значениями в  $\mathbb{R}^2$ .

*Решение.*

- a) Ищем функцию правдоподобия

$$L(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i \in [\theta, \theta + 1]\}.$$

Все  $X_i$  должны быть не меньше  $\theta$  и не больше  $(\theta + 1)$ . Получаем

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i \in [\theta, \theta + 1]\} = \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq \theta, X_{(n)} \leq \theta + 1\}.$$

Это равно  $g(\theta, X_{(1)}, X_{(n)} - 1)$ ,  $h(\vec{X}) = 1$ .

Вывод:  $(X_{(1)}, X_{(n)} - 1)$  — достаточная статистика для  $\theta$ ;

- b) ищем функцию правдоподобия

$$L(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\{X_i \in [\theta, 2\theta]\}.$$

Все  $X_i$  должны быть не меньше чем  $\theta$ , не больше  $2\theta$ . Получим

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\{X_i \in [\theta, 2\theta]\} = \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq \theta, X_{(n)} \leq 2\theta\}.$$

Это равно

$$g\left(\theta, X_{(1)}, \frac{X_{(n)}}{2}\right), h(\vec{X}) = 1.$$

Вывод:

$$\left(X_{(1)}, \frac{X_{(n)}}{2}\right)$$

— достаточная статистика для  $\theta$ .

### 5.14

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке  $[-\theta, \theta]$ . Найдите достаточную статистику для параметра  $\theta$  со значениями в  $\mathbb{R}$ .

*Решение.*

$$L(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} \cdot \mathbb{1}\{X_i \in [-\theta, \theta]\}.$$

Все  $X_i$  должны быть не меньше  $(-\theta)$  и не больше  $\theta$ . Получим

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} \cdot \mathbb{1}\{X_i \in [-\theta, \theta]\} = \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq -\theta, X_{(n)} \leq \theta\}.$$

Умножим первое неравенство на  $(-1)$ . Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq -\theta, X_{(n)} \leq \theta\} = \\ & = \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1}\{-X_{(1)} \leq \theta, X_{(n)} \leq \theta\}. \end{aligned}$$

По теореме о характеристизации это равно  $h(\vec{X}) \cdot g(\theta, \max(-X_{(1)}, X_{(n)}))$ .

Вывод:  $\max(-X_{(1)}, X_{(n)})$  — достаточная статистика для  $\theta$ .

### 5.15

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из  $\Gamma$ -распределения с плотностью

$$f_{\alpha, \beta}(y) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} e^{-\alpha y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Найдите достаточную статистику для параметра  $(\alpha, \beta)$ .

*Решение.* Запишем функцию правдоподобия данной выборки

$$L(X_1, \dots, X_n, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n f_{\alpha, \beta}(X_i) = \frac{\alpha^{n\beta}}{\Gamma^n(\beta)} \cdot \prod_{i=1}^n \left(X_i^{\beta-1} e^{-\alpha X_i}\right) \cdot \mathbb{1}\{X_{(1)} \geq 0\}.$$

Раскроем скобки в произведении

$$\frac{\alpha^{n\beta}}{\Gamma^n(\beta)} \cdot \prod_{i=1}^n \left( X_i^{\beta-1} e^{-\alpha X_i} \right) \cdot \mathbb{1} \{X_{(1)} \geq 0\} = \frac{\alpha^{n\beta}}{\Gamma^n(\beta)} \cdot \prod_{i=1}^n X_i^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha \bar{X}n} \cdot \mathbb{1} \{X_{(1)} \geq 0\}.$$

Видно, что функция правдоподобия подаётся в виде произведения функции  $h(X_1, \dots, X_n) = \mathbb{1} \{X_{(1)} \geq 0\}$ , которая не зависит от неизвестных параметров, и функции

$$g(X_1, \dots, X_n, \alpha, \beta) = \frac{\alpha^{n\beta}}{\Gamma^n(\beta)} \cdot \prod_{i=1}^n X_i^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha \bar{X}n},$$

которая зависит от неизвестных параметров и от функции выборки

$$T_1(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}$$

и

$$T_2(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n X_i.$$

Тогда, по теореме о характеристизации достаточной статистики, двумерная функция

$$T(X_1, \dots, X_n) = (T_1(X_1, \dots, X_n), T_2(X_1, \dots, X_n)) = \left( \bar{X}, \prod_{i=1}^n X_i \right)$$

является достаточной статистикой для параметра  $(\alpha, \beta)$ .

### 5.16

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке  $[a(\theta), b(\theta)]$ . Докажите, что если  $a(\theta) \downarrow$ ,  $b(\theta) \uparrow$  с возрастанием  $\theta$ , то статистика  $T = \max(a^{-1}(X_{(1)}), b^{-1}(X_{(n)}))$  достаточная для параметра  $\theta$ . По выборке с равномерным распределением на  $[-\theta, \theta]$  найдите достаточную статистику для параметра  $\theta$  со значениями в  $\mathbb{R}$ .

*Решение.* Запишем функцию правдоподобия

$$L(\vec{X}, a(\theta), b(\theta)) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b(\theta) - a(\theta)} \cdot \mathbb{1} \{X_i \in [a(\theta), b(\theta)]\}.$$

Вычисляем произведение

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \frac{1}{b(\theta) - a(\theta)} \cdot \mathbb{1} \{X_i \in [a(\theta), b(\theta)]\} = \\ & = \frac{1}{[b(\theta) - a(\theta)]^n} \cdot \mathbb{1} \{X_{(1)} \geq a(\theta), X_{(n)} \leq b(\theta)\}. \end{aligned}$$

Это строго монотонные функции. Можем решить неравенства относительно  $\theta$ . Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[b(\theta) - a(\theta)]^n} \cdot \mathbb{1} \left\{ X_{(1)} \geq a(\theta), X_{(n)} \leq b(\theta) \right\} = \\ &= \frac{1}{[b(\theta) - a(\theta)]^n} \cdot \mathbb{1} \left\{ \theta \geq a^{-1}(X_{(1)}), \theta \geq b^{-1}(X_{(n)}) \right\} = \\ &= \frac{1}{[b(\theta) - a(\theta)]^n} \cdot \mathbb{1} \{ \theta \geq T \} = g(\theta, T), \end{aligned}$$

а  $h \equiv 1$ .

Значит,  $T$  — достаточная статистика для  $\theta$ .

Для отрезка  $[-\theta, \theta]$  получаем  $b(\theta) = \theta$ ,  $a(\theta) = -\theta$ . Имеем неравенства  $X_{(1)} \geq -\theta$ ,  $X_{(n)} \leq \theta$ , откуда  $\theta \geq -X_{(1)}$ ,  $\theta \geq X_{(n)}$ , то есть

$$T = \max(-X_{(1)}, X_{(n)}).$$





# Занятие 6. Теорема Колмогорова про улучшение оценок. Неравенство Рао-Крамера

## Контрольные вопросы и задания

**Приведите определение достаточной статистики.**

Статистика  $T$  называется достаточной для параметра  $\theta$ , если условное распределение при известном  $T$  не зависит от параметра  $\theta$ .

**Сформулируйте теорему про характеризацию достаточной статистики.**

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — выборка из распределения с плотностью

$$p(x, \theta), \theta \in \Theta.$$

Статистика  $T$  является достаточной тогда и только тогда, когда функция правдоподобия  $L(\vec{x}, \theta)$  допускает факторизацию, то есть может быть представлена произведением двух функций следующего вида

$$L(\vec{x}, \theta) = h(T, \theta) \cdot g(\vec{x}).$$

**Сформулируйте теорему Колмогорова про улучшение оценки с помощью достаточной статистики.**

Оптимальная оценка единственная (в том случае, когда она существует).

**Что называется количеством информации Фишера?**

$$D_{\theta} U(\vec{x}, \theta) = n D_{\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x, \theta) \right) = n I_0,$$

где  $nI_0$  — количество информации Фишера.

### Запишите неравенство Рао-Крамера.

Пусть  $\hat{\theta}$  — несмещённая оценка для параметра  $\theta$ . Тогда

$$\forall \theta \in \Theta : D_{\theta} \hat{\theta} \geq \frac{1}{nI_0}.$$

Как угодно лучшую оценку взять нельзя.

### Какая оценка называется эффективной?

Если  $\hat{\theta}$  такова, что  $D_{\theta} \hat{\theta} = \frac{1}{nI_0}$  — несмещённая и

$$D_{\theta} \hat{\theta} = \frac{1}{nI_0}, \theta \in \Theta,$$

то  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой.

### Приведите определение экспоненциальной семьи распределений.

## Аудиторные задачи

### 6.3

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$ . Найдите несмещённую оценку неизвестного параметра  $\tau(\theta, y) = P(X_1 > y)$  и улучшите её усреднением по достаточной для параметра  $\theta$  статистике.

*Решение.*  $X_{(n)}$  — достаточная статистика для  $\theta$ .

Нужно найти  $\hat{\tau}$  из условия, что она была бы несмещённой, что

$$M\hat{\tau} = \tau = P(X_1 > y).$$

Берём в качестве  $\hat{\tau} = \mathbb{1}\{X_1 > y\}$  — это несмещённая оценка для  $\tau$ . Теперь улучшаем эту оценку.  $\tau^* = M(\hat{\tau} \mid X_{(n)}) = M\{\mathbb{1}\{X_1 > y\} \mid X_{(n)}\}$ . Индикатор может принимать значения 0 и 1, значит

$$\begin{aligned} & M\{\mathbb{1}\{X_1 > y\} \mid X_{(n)}\} = \\ &= 0 \cdot P(\mathbb{1}\{X_1 > y\} = 0 \mid X_{(n)}) + 1 \cdot P(\mathbb{1}\{X_1 > y\} = 1 \mid X_{(n)}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое пропадает

$$\begin{aligned} & 0 \cdot P(\mathbb{1}\{X_1 > y\} = 0 \mid X_{(n)}) + 1 \cdot P(\mathbb{1}\{X_1 > y\} = 1 \mid X_{(n)}) = \\ &= P(X_1 > y \mid X_{(n)}) = f(X_{(n)}). \end{aligned}$$

Ищем  $f(z) = P(X_1 > y \mid X_{(n)} = z)$ . Выборка имеет равномерное распределение, то есть распределение, которое имеет плотность. Вероятность попадания в точку равна нулю

$$P(X_1 > y \mid X_{(n)} = z) = \lim_{h \rightarrow 0} P\{X_1 > y \mid X_{(n)} \in [z, z+h]\}.$$

Воспользуемся определением условной вероятности

$$\lim_{h \rightarrow 0} P\{X_1 > y \mid X_{(n)} \in [z, z+h]\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{X_1 > y, X_{(n)} \in [z, z+h]\}}{P\{X_{(n)} \in [z, z+h]\}}.$$

Это нужно рассматривать при  $y < z$ . Разбиваем на разность двух вероятностей в числителе и знаменателе

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{X_1 > y, X_{(n)} \in [z, z+h]\}}{P\{X_{(n)} \in [z, z+h]\}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{P\{X_1 > y, X_{(n)} \leq z+h\}}{P\{X_{(n)} \leq z+h\} - P\{X_{(n)} \leq z\}} - \frac{P\{X_1 > y, X_{(n)} \leq z\}}{P\{X_{(n)} \leq z+h\} - P\{X_{(n)} \leq z\}} \right]. \end{aligned}$$

Переходим к функции распределения выборки

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{P\{X_1 > y, X_{(n)} \leq z+h\}}{P\{X_{(n)} \leq z+h\} - P\{X_{(n)} \leq z\}} - \frac{P\{X_1 > y, X_{(n)} \leq z\}}{P\{X_{(n)} \leq z+h\} - P\{X_{(n)} \leq z\}} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[F(z+h) - F(y)][F(z+h)]^{n-1}}{[F(z+h)]^n - [F(z)]^n} - \frac{[F(z) - F(y)][F(z)]^{n-1}}{[F(z+h)]^n - [F(z)]^n} \right\}. \end{aligned}$$

Знаменатель и числитель стремятся к нулю. Дифференцируем по  $h$  числитель и знаменатель. Это правило Лопиталя

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[F(z+h) - F(y)][F(z+h)]^{n-1}}{[F(z+h)]^n - [F(z)]^n} - \frac{[F(z) - F(y)][F(z)]^{n-1}}{[F(z+h)]^n - [F(z)]^n} \right\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{p(z+h)[F(z+h)]^{n-1}}{n[F(z+h)]^{n-1}p(z+h)} + \frac{(n+1)[F(z+h)]^{n-2}p(z+h)[F(z+h) - F(y)]}{n[F(z+h)]^{n-1}p(z+h)} \right\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) + (n-1)[F(z+h) - F(y)]}{nF(z+h)}. \end{aligned}$$

Переходим к пределу

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) + (n-1)[F(z+h) - F(y)]}{nF(z+h)} = \frac{F(z) + (n+1)[F(z) - F(y)]}{nF(z)}.$$

Приводим подобные

$$\frac{F(z) + (n+1)[F(z) - F(y)]}{nF(z)} = \frac{nF(z) - (n-1)F(y)}{nF(z)}.$$

Почленно поделим числитель на знаменатель

$$\frac{nF(z) - (n-1)F(y)}{nF(z)} = 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{F(y)}{F(z)}.$$

Подставляем значения функции равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$ . Получаем

$$1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{F(y)}{F(z)} = 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{y}{z}.$$

Окончательно

$$f(X_{(n)}) = 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{y}{X_{(n)}}.$$

#### 6.4

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . В качестве оценки параметра  $\theta = e^{-\lambda}$  рассматривают статистику  $\hat{\theta} = \mathbb{1}\{X_1 = 0\}$ . Вычислите смещение  $b_n(\theta) = M\hat{\theta} - \theta$  этой оценки и улучшите её усреднением по достаточной статистике для параметра  $\theta$  статистикой.

*Решение.* Неизвестный параметр — это  $e^{-\lambda} = \theta$ .

Ищем смещение  $M\hat{\theta} = M\mathbb{1}\{X_1 = 0\} = P\{X_1 = 0\} = e^{-\lambda} = \theta$ , значит, смещение  $b_n(\theta) = 0$ . Это несмещённая оценка.

Займёмся поиском достаточной статистики

$$L(\vec{X}, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{n\bar{X}}}{X_1! \dots X_n!} \cdot e^{-\lambda n} = \frac{1}{X_1! \dots X_n!} \cdot \lambda^{n\bar{X}} e^{-\lambda n}.$$

Вывод:  $\bar{X}$  — достаточная статистика для  $\lambda$ , а значит и для  $\theta$ , как функции от  $\lambda$ .

Нужно найти условное математическое ожидание  $M(\hat{\theta} | \bar{X}) = f(\bar{X})$ . Начнём с  $f(y) = M(\hat{\theta} | \bar{X} = y) = M(\mathbb{1}\{X_1 = 0\} | \bar{X} = y)$ . Индикатор — это дискретная случайная величина, которая принимает 2 значения

$$M(\mathbb{1}\{X_1 = 0\} | \bar{X} = y) = 1 \cdot P(X_1 = 0 | \bar{X} = y) = \frac{P\left(X_1 = 0, \sum_{i=1}^n X_i = ny\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = ny\right)}.$$

В числителе стоит случайное событие  $X_1 = 0$ . Оно означает, что суммировать можно от двух

$$\frac{P\left(X_1 = 0, \sum_{i=1}^n X_i = ny\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = ny\right)} = \frac{P(X_1 = 0) P\left(\sum_{i=2}^n X_i = ny\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = ny\right)}.$$

Сумма независимых пуассоновских случайных величин имеет распределение Пуассона с параметром, который равен сумме параметров

$$\frac{P(X_1 = 0) P\left(\sum_{i=2}^n X_i = ny\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = ny\right)} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{((n-1)\lambda)^{ny}}{(ny)!} \cdot e^{-\lambda(n-1)}}{\frac{(n\lambda)^{ny}}{(ny)!} \cdot e^{-\lambda n}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{ny}.$$

Чтобы записать ответ, нужно вместо  $y$  записать  $\bar{X}$ . Получим

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}}.$$

Когда  $n \rightarrow \infty$ , эта оценка стремится к  $e^{-\bar{X}}$ .

## 6.5

*Задание.* Пользуясь неравенством Рао-Крамера, выясните, является ли эффективной оценка  $\bar{X}$  параметра  $p$  распределения Бернулли.

*Решение.*  $X_1, \dots, X_n$  — выборка.

Несмещённой оценкой для параметра является  $\hat{p} = \bar{X}$ . Формально в этом убедимся. Итак,

$$M\hat{p} = M\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot M \sum_{i=1}^n X_i.$$

Все случайные величины одинаково распределены, следовательно, все математические ожидания совпадают

$$\frac{1}{n} \cdot M \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = p.$$

Ищем дисперсию

$$D\hat{p} = D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D \sum_{i=1}^n X_i.$$

Дисперсии равны. Случайные величины независимы, следовательно, дисперсия суммы — это сумма дисперсий

$$\frac{1}{n^2} \cdot D \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n^2} \cdot nDX_1 = \frac{1}{n} \cdot p(1-p).$$

Сначала нужна функция правдоподобия для одного наблюдения

$$L(X_1, p) = p^{X_1} (1-p)^{1-X_1}.$$

Логарифмируем  $\ln L(X_1, p) = X_1 \ln p + (1 - p) \ln(1 - p)$ . Ищем первую производную

$$\frac{\partial}{\partial p} \ln L(X_1, p) = \frac{X_1}{p} - \frac{1 - X_1}{1 - p}.$$

Ищем вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} \ln L(X_1, p) = -\frac{X_1}{p^2} - \frac{1 - X_1}{(1 - p)^2}.$$

Пишем количество информации. Берём математическое ожидание со знаком «минус»

$$I(\theta) = M\left(\frac{X_1}{p} + \frac{1 - X_1}{(1 - p)^2}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1 - p}{(1 - p)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1 - p}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{1 - p} = \frac{1 - p + p}{p(1 - p)} = \frac{1}{p(1 - p)}.$$

Ищем обратную величину, делённую на  $n$ . Получаем

$$\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{1}{n[p(1 - p)]^{-1}} = \frac{p(1 - p)}{n} = D\hat{p},$$

следовательно,  $\hat{p}$  — эффективная оценка параметра  $p$ .

## 6.6

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из равномерного распределения с параметром  $p$ . Выясните, является ли эффективной оценка  $\hat{\theta} = 1 + \bar{X}$  параметра

$$\theta = \frac{1}{p}.$$

*Решение.* Берём дисперсию

$$D\hat{\theta} = D(1 + \bar{X}) = D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n^2} \cdot nDX_1.$$

Сократим  $n$  и подставим значение дисперсии равномерного распределения

$$\frac{1}{n^2} \cdot nDX_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - p}{p^2}.$$

Можем записать это как функцию от  $\theta$ . Получим

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1 - p}{p^2} = \frac{1}{n} \cdot (\theta^2 - \theta).$$

Можно  $\theta$  вынести за скобки

$$\frac{1}{n} \cdot (\theta^2 - \theta) = \frac{\theta}{n} \cdot (\theta - 1).$$

Записываем функцию правдоподобия для одного наблюдения

$$L(X_1, p) = p(1-p)^{X_1}.$$

Подставим оценку параметра

$$L(X_1, \theta) = \frac{1}{\theta} \cdot \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{X_1} = \frac{1}{\theta^{X_1+1}} \cdot (\theta - 1)^{X_1}.$$

Логарифмируем  $\ln L(X_1, \theta) = -(X_1 + 1) \ln \theta + X_1 \ln(\theta - 1)$ . Берём первую производную

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X_1, \theta) = -\frac{X_1 + 1}{\theta} + \frac{X_1}{\theta - 1}.$$

Берём вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(X_1, \theta) = \frac{X_1 + 1}{\theta^2} - \frac{X_1}{(\theta - 1)^2}.$$

Берём математическое ожидание

$$MX_1 = \frac{1-p}{p}.$$

Почленно поделим числитель на знаменатель

$$\frac{1-p}{p} = \theta - 1.$$

Берём математическое ожидание второй производной функции правдоподобия со знаком «минус»

$$-M \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(X_1, \theta) \right] = -\frac{\theta}{\theta^2} + \frac{\theta - 1}{(\theta - 1)^2} = -\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta - 1} = \frac{-\theta + 1 + \theta}{\theta(\theta - 1)}.$$

Приводим подобные

$$\frac{-\theta + 1 + \theta}{\theta(\theta - 1)} = \frac{1}{\theta(\theta - 1)} = I(\theta).$$

Формируем обратную величину и делим на  $n$ . Значит,

$$\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta(\theta - 1)}{n} = D\hat{\theta}.$$

Получили, что оценка эффективная.

## 6.7

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения  $N(\theta, \sigma^2)$  с неизвестным параметром  $\theta$  и известной дисперсией. Выясните, является ли статистика  $\theta^* = \bar{X}$  эффективной оценкой параметра  $\theta$ .

*Решение.* Проверим несмещённость

$$M\theta^* = M\bar{X} = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot M \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = \theta.$$

Несмещённость есть. Ищем дисперсию

$$D\theta^* = D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D \sum_{i=1}^n X_i.$$

Воспользуемся независимостью случайных величин в выборке

$$\frac{1}{n^2} \cdot D \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n^2} \cdot nDX_1.$$

Случайные величины в выборке одинаково распределены, значит

$$\frac{1}{n^2} \cdot nDX_1 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Переходим к функции правдоподобия и оценке количества информации. Смотрим на одно наблюдение

$$L(X_1, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(X_1 - \theta)^2}{2\sigma^2}}.$$

Логарифмируем

$$\ln L(X_1, \theta) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) - (X_1 - \theta)^2 \cdot \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Ищем первую производную

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X_1, \theta) = 2(X_1 - \theta) \cdot \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{X_1 - \theta}{\sigma^2}.$$

Ищем вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(X_1, \theta) = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

Таким образом,

$$I(\theta) = -M\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Формируем величину

$$\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\sigma^2}{n} = D\theta^*,$$

значит, оценка эффективная.



## 6.8

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из экспоненциального распределения с плотностью

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Убедитесь, что оценка  $\theta^* = \bar{X}$  — эффективная по Рао-Крамеру оценка неизвестного параметра  $\theta$ .

*Решение.*

$$M\theta^* = M\bar{X} = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot M \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \theta,$$

значит, имеем несмещённость.

Теперь ищем дисперсию

$$D\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot DX_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2} = \frac{\theta^2}{n}.$$

Ищем количество информации. Начнём с функции правдоподобия

$$L(X_1, \theta) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{X_1}{\theta}} \cdot \mathbb{1}\{X_1 \geq 0\}.$$

Пусть  $X_1 \geq 0$ . Тогда берём логарифм

$$\ln L(X_1, \theta) = -\ln \theta - \frac{X_1}{\theta}.$$

Берём первую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{X_1}{\theta^2}.$$

Берём вторую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2X_1}{\theta^3}.$$

Ищем количество информации

$$I(\theta) = -M\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2X_1}{\theta^3}\right) = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \cdot MX_1 = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}.$$

Ищем обратную величину к количеству информации и делим на  $n$ . Получаем

$$\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta^2}{n} = D\theta^*.$$

Значит, выборочное среднее — эффективная оценка.

## Домашнее задание

### 6.10

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из нормального распределения с параметрами  $(a, 1)$ . Улучшите оценку  $\hat{a} = X_1$  усреднением по фиксированному значению достаточной статистики  $\bar{X}$ . Найдите распределение, математическое ожидание и дисперсию улучшенной оценки.

*Решение.* Улучшаем оценку

$$a^* = M(\hat{a} \mid \bar{X}) = M(X_1 \mid \bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i \mid \bar{X}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \mid \bar{X}\right).$$

Запишем через выборочное среднее

$$M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \mid \bar{X}\right) = M(\bar{X} \mid \bar{X}) = \bar{X}.$$

Математическое ожидание равно

$$Ma^* = M\bar{X} = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot na = a,$$

дисперсия —

$$Da^* = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot nDX_1 = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

Она имеет нормальное распределение

$$a^* \sim N\left(a, \frac{1}{n}\right).$$

Так как  $Ma^* = a$ , то оценка несмещённая.

### 6.11

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . В качестве оценки параметра  $\theta = e^{-\lambda}$  рассматривают статистику

$$\hat{\theta} = \overline{\mathbb{1}\{X = 0\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i = 0\}.$$

Вычислите смещение  $b_n(\theta) = M\hat{\theta} - \theta$  этой оценки и выясните, является ли она эффективной.

*Решение.*

$$M\hat{\theta} = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i = 0\}\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i = 0\}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P(X_i = 0).$$

Подставляем значение вероятности для распределения Пуассона

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P(X_i = 0) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1}{n} \cdot e^{-\lambda} \cdot n = e^{-\lambda}.$$

Подставляем полученное значение в формулу для смещения

$$b_n(\theta) = M\hat{\theta} - \theta = e^{-\lambda} - e^{-\lambda} = 0.$$

## 6.12

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выбока из распределения с плотностью  $f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1}$ ,  $y \in (0, 1)$ , где  $\theta > 0$ . Докажите, что статистика  $-\overline{\ln X}$  несмещённая и эффективная оценка для параметра

$$\tau = \frac{1}{\theta}.$$

*Решение.*

$$M(-\overline{\ln X}) = M\left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i\right) = -\frac{1}{n} \cdot M \sum_{i=1}^n \ln X_i = -\frac{1}{n} \cdot nM \ln X_1.$$

Сократим константы

$$-\frac{1}{n} \cdot nM \ln X_1 = -M \ln X_1.$$

Найдём математическое ожидание логарифма случайной величины выборки

$$M \ln X_1 = \int_0^1 \ln x \cdot \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^{\theta-1} \ln x dx.$$

Возьмём интеграл по частям

$$u = \ln x, dv = x^{\theta-1} dx, du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^\theta}{\theta},$$

получим

$$\theta \int_0^1 x^{\theta-1} \ln x dx = \theta \cdot \ln x \cdot \frac{x^\theta}{\theta} \Big|_0^1 - \theta \int_0^1 \frac{x^\theta}{\theta} \cdot \frac{dx}{x} = - \int_0^1 x^{\theta-1} dx = - \frac{x^\theta}{\theta} \Big|_0^1 = -\frac{1}{\theta}.$$

Запишем через параметр

$$-\frac{1}{\theta} = -\tau.$$

Подставляем найденное значение математического ожидания в математическое ожидание оценки  $-M \ln X_1 = -(-\tau) = \tau$ , значит, имеем несмещённость.

Теперь ищем дисперсию

$$D(-\overline{\ln X}) = \frac{1}{n^2} \cdot D \sum_{i=1}^n \ln X_i = \frac{1}{n} \left[ M(\ln X_1)^2 - (M \ln X_1)^2 \right].$$

Вычислим первое слагаемое из скобки

$$M \ln^2 X_1 = \int_0^1 \ln^2 x \cdot \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^{\theta-1} \ln^2 x dx.$$

Возьмём интеграл по частям

$$u = \ln^2 x, dv = x^{\theta-1} dx, du = 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x}, v = \frac{x^\theta}{\theta}.$$

Получим

$$\theta \int_0^1 x^{\theta-1} \ln^2 x dx = \theta \cdot \ln^2 x \cdot \frac{x^\theta}{\theta} \Big|_0^1 - \theta \int_0^1 \frac{x^\theta}{\theta} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x}.$$

Первое слагаемое зануляется, во втором сокращаем  $\theta$  и выносим двойку за знак интеграла

$$\theta \int_0^1 \frac{x^\theta}{\theta} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} = -2 \int_0^1 x^{\theta-1} \ln x dx.$$

Возьмём интеграл по частям

$$u = \ln x, dv = x^{\theta-1} dx, du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^\theta}{\theta}.$$

Получим

$$-2 \int_0^1 x^{\theta-1} \ln x dx = -2 \cdot \ln x \cdot \frac{x^\theta}{\theta} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{x^\theta}{\theta} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{2}{\theta} \int_0^1 x^{\theta-1} dx = \frac{2}{\theta^2}.$$

Дисперсия оценки равна

$$\frac{1}{n} \left[ M(\ln X_1)^2 - (M \ln X_1)^2 \right] = \frac{1}{n} \left( \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} \right) = \frac{1}{n\theta^2} = \frac{\tau^2}{n}.$$

Ищем количество информации. Начинаем с функции правдоподобия

$$L(X_1, \tau) = \frac{1}{\tau} \cdot X_1^{\frac{1}{\tau}-1} \cdot \mathbb{1}\{X_1 \in (0, 1)\}.$$

Пусть  $X_1 \in (0, 1)$ . Тогда берём логарифм

$$\ln L(X_1, \tau) = -\ln \tau + \left(\frac{1}{\tau} - 1\right) \ln X_1 = -\ln \tau + \frac{1}{\tau} \cdot \ln X_1 - \ln X_1.$$

Берём первую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L(X_1, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} \cdot \ln X_1.$$

Берём вторую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^3} \cdot \ln X_1.$$

Ищем количество информации

$$I(\tau) = -M \left( \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^3} \cdot \ln X_1 \right) = -\frac{1}{\tau^2} - \frac{2}{\tau^3} \cdot M \ln X_1 = -\frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^3} \cdot \tau = \frac{1}{\tau^2}.$$

Ищем обратную величину к количеству информации и делим на  $n$ . Получим

$$\frac{1}{nI(\tau)} = \frac{\tau^2}{n} = D(-\overline{\ln X}).$$

Значит,  $-\overline{\ln X}$  — эффективная оценка.

### 6.13

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения  $N(\mu, \theta)$  с неизвестным параметром  $\theta$  и известным математическим ожиданием. Докажите, что статистика

$$\theta^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

является эффективной по Рао-Крамеру оценкой параметра  $\theta$ .

*Решение.* Проверим несмещённость

$$M\theta^* = M \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right] = \frac{1}{n} \cdot M \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \cdot nM(X_1 - \mu)^2.$$

Сократим  $n$  и раскроем квадрат

$$\frac{1}{n} \cdot nM(X_1 - \mu)^2 = M(X_1^2 - 2\mu X_1 + \mu^2) = MX_1^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2.$$

По свойствам дисперсии

$$MX_1^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2 = DX_1 + (MX_1)^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2 = \theta + \mu^2 - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 = \theta.$$

Несмещённость есть. Ищем дисперсию

$$D\theta^* = D \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right] = \frac{1}{n^2} \cdot D \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \cdot D (X_1 - \mu)^2.$$

Вычислим отдельно дисперсию  $D (X_1 - \mu)^2 = M (X_1 - \mu)^4 - [M (X_1 - \mu)^2]^2$ .  
Случайная величина  $X_1 - \mu$  имеет распределение  $N (0, \theta)$ . Если  $X$  имеет нормальное распределение  $N (0, \sigma^2)$ , то для неё существуют (конечные) моменты при всех  $p$  с действительной частью больше  $-1$ . Для неотрицательных целых  $p$ , центральные моменты таковы

$$MX^p = \begin{cases} 0, & p = 2n + 1, \\ \sigma^p (p-1)!!, & p = 2n. \end{cases}$$

В данной задаче  $\sigma^2 = \theta$ , следовательно  $\sigma = \sqrt{\theta}$ . Подставим значения математических ожиданий четвёртого и второго моментов

$$M (X_1 - \mu)^4 - [M (X_1 - \mu)^2]^2 = (\sqrt{\theta})^4 (4-1)!! - \left[ (\sqrt{\theta})^2 (2-1)!! \right]^2.$$

Упростим

$$(\sqrt{\theta})^4 (4-1)!! - \left[ (\sqrt{\theta})^2 (2-1)!! \right]^2 = 3!!\theta^2 - \theta^2 = 3\theta^2 - \theta^2 = 2\theta^2.$$

Тогда дисперсия оценки равна

$$\frac{1}{n} \cdot D (X_1 - \mu)^2 = \frac{2\theta^2}{n}.$$

Переходим к функции правдоподобия и оценке количества информации. Смотрим на одно наблюдение

$$L (X_1, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \cdot e^{-\frac{(X_1 - \mu)^2}{2\theta}}.$$

Логарифмируем

$$\ln L (X_1, \theta) = -\frac{1}{2} \cdot \ln (2\pi\theta) - \frac{(X_1 - \mu)^2}{2\theta} = -\frac{1}{2} \cdot \ln (2\pi) - \frac{1}{2} \cdot \ln \theta - \frac{(X_1 - \mu)^2}{2\theta}.$$

Ищем первую производную

$$\frac{\partial \ln L (X_1, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{2\theta} + \frac{(X_1 - \mu)^2}{2\theta^2}.$$

Ищем вторую производную

$$\frac{\partial^2 \ln L (X_1, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2\theta^2} - \frac{(X_1 - \mu)^2}{\theta^3}.$$

Таким образом,

$$I(\theta) = -M \left( \frac{1}{2\theta^2} - \frac{(X_1 - \mu)^2}{\theta^3} \right) = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3} (MX_1^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2).$$

По свойствам дисперсии

$$-\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3} (MX_1^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2) = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3} (DX_1 + (MX_1)^2 - 2\mu\mu + \mu^2).$$

Подставим значение математического ожидания и дисперсии

$$-\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3} (DX_1 + (MX_1)^2 - 2\mu\mu + \mu^2) = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3} (\theta + \mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2).$$

Упростим

$$-\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3} (\theta + \mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2) = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{2\theta^2}.$$

Формируем величину

$$\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{2\theta^2}{n} = D\theta^*,$$

значит, оценка эффективная.

## 6.14

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где  $\sigma$  — известный параметр. Убедитесь, что статистика

$$\theta_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$$

является несмещённой оценкой параметра  $\theta$  и докажите, что  $\theta_n^*$  является эффективной по Рао-Крамеру оценкой параметра  $\theta$ .

*Решение.*

$$M\theta_n^* = M \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right) = \frac{1}{n} \cdot M \sum_{i=1}^n \ln X_i = \frac{1}{n} \cdot nM \ln X_1 = M \ln X_1.$$

Запишем математическое ожидание случайной величины, имеющей плотность, по определению

$$M \ln X_1 = \int_{\mathbb{R}} \ln x \cdot p(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \ln x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\} dx.$$

Вынесем константу из-под знака интеграла и воспользуемся индикатором

$$\int_{\mathbb{R}} \ln x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Внесём  $x^{-1}$  под знак дифференциала

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} \ln x \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} d(\ln x).$$

Делаем замену  $\ln x = t$ . Получаем

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} \ln x \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} d(\ln x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{(t - \theta)^2}{2\sigma^2}} dt = M t = \theta,$$

значит, имеем несмещённость.

Теперь ищем дисперсию

$$D\theta_n^* = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D \sum_{i=1}^n \ln X_i = \frac{1}{n} \cdot D \ln X_1.$$

По свойствам дисперсии

$$\frac{1}{n} \cdot D \ln X_1 = \frac{1}{n} \left\{ M (\ln X_1)^2 - [M \ln X_1]^2 \right\}.$$

Найдём отдельно второй момент

$$M (\ln X_1)^2 = \int_0^{+\infty} \ln^2 x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Внесём  $x^{-1}$  под знак дифференциала

$$\int_0^{+\infty} \ln^2 x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} \ln^2 x \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} d(\ln x).$$

Делаем замену как и в предыдущем случае

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} \ln^2 x \cdot e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} d(\ln x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{(t - \theta)^2}{2\sigma^2}} dt = \theta^2 + \sigma^2.$$

Подставляем в найденное выражение для дисперсии оценки

$$D\theta_n^* = \frac{1}{n} (\theta^2 + \sigma^2 - \theta^2) = \frac{\sigma^2}{n}.$$



Ищем количество информации. Начнём с функции правдоподобия

$$L(X_1, \theta) = \frac{1}{X_1 \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln X_1 - \theta)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}\{X_1 \geq 0\}.$$

Пусть  $X_1 \geq 0$ . Тогда берём логарифм

$$\ln L(X_1, \theta) = -\ln(X_1 \sigma \sqrt{2\pi}) - \frac{(\ln X_1 - \theta)^2}{2\sigma^2}.$$

Берём первую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L(X_1, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2(\ln X_1 - \theta)}{2\sigma^2} = \frac{\ln X_1 - \theta}{\sigma^2}.$$

Берём вторую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

Ищем количество информации

$$I(\theta) = -M\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Ищем обратную величину к количеству информации и делим на  $n$ . Получаем

$$\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\sigma^2}{n} = D\theta_n^*,$$

значит,

$$\theta_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$$

— эффективная оценка.



# Занятие 7. Гауссовы системы

## Контрольные вопросы и задания

Приведите определение гауссового случайного вектора, ковариационной матрицы гауссового случайного вектора.

$\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — гауссовый, если

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n : \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$$

— гауссовская случайная величина.

$$A = cov_{\vec{\xi}\vec{\xi}}, A_{ij} = cov(\xi_i, \xi_j) = M(\xi_i \xi_j) - M\xi_i M\xi_j.$$

Какими свойствами владеет ковариационная матрица?

$A_{ii} = D\xi_i \geq 0$  — на диагонали — неотрицательные числа.

Матрица симметрична:  $A_{ij} = A_{ji}$ .

Матрица неотрицательно определена.

Как изменяются характеристики гауссового случайного вектора при действии на него линейного оператора?

Пусть  $\vec{\xi}$  случайный  $n$ -элементный вектор, имеющий гауссовское распределение с параметрами  $\vec{a}$  и  $A$ ,  $\vec{\xi} \sim N(\vec{a}, A)$ ,  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Тогда  $T\vec{\xi} + \vec{b} \sim N(T\vec{a} + \vec{b}, TAT^*)$ .

При каких условиях гауссовский случайный вектор имеет плотность распределения?

Плотность можно записать только в случае, когда  $\det A \neq 0$ .

Запишите плотность распределения гауссового случайного вектора.

$$p_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{\det A}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[\vec{x}-\vec{a}, A^{-1}(\vec{x}-\vec{a})]}.$$

Сформулируйте теорему про нормальную корреляцию.

Есть гауссовский вектор  $\vec{\xi} \circ \vec{\eta}$  с ненулевой ковариацией  $cov_{\vec{\xi} \circ \vec{\eta}, \vec{\xi} \circ \vec{\eta}} \neq 0$ .  
Определитель ковариационной матрицы вектора  $\eta$  положителен

$$\det cov_{\vec{\eta}, \vec{\eta}} \geq 0.$$

Тогда вектор  $\vec{\xi}$  при условии  $\vec{\eta}$  — гауссовский случайный вектор

$$\vec{\xi} \Big| \vec{\eta} \sim N(\vec{m}, D).$$

Параметры  $\vec{m}$  и  $D$  имеют следующий вид

$$\vec{m} = M\vec{\xi} + cov_{\vec{\xi}, \vec{\eta}} cov_{\vec{\eta}, \vec{\eta}}^{-1} (\eta - M\vec{\eta}), \quad D = cov_{\vec{\xi}, \vec{\xi}} - cov_{\vec{\xi}, \vec{\eta}} cov_{\vec{\eta}, \vec{\eta}}^{-1} cov_{\vec{\eta}, \vec{\xi}}.$$

## Аудиторные задачи

### 7.3

*Задание.* Может ли матрица  $A$  быть ковариационной матрицей гауссового случайного вектора, если:

a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix};$

c)  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix};$

d)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix};$

e)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix};$

f)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$

Если так, то предъявите такой вектор.

*Решение.*

- a) Нет (матрица не квадратная);
- b) нет (матрица не симметрична);
- c) нет (на диагонали отрицательные числа);
- d) матрица квадратная, симметричная, неотрицательно определённая, на диагонали — неотрицательные числа;
- e) матрица квадратная, симметричная, на диагонали — неотрицательные числа. Первый минор  $M_1 = 1 \geq 0$ , второй минор  $M_2 = 6 - 4 = 2 \geq 0$ , третий минор

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix} = 1 \cdot (72 - 1) - 2 \cdot (24 + 1) + 1 \cdot (-2 - 6) = 13 \geq 0,$$

значит, матрица неотрицательно определена, то есть может быть ко-вариационной матрицей гауссового случайного вектора;

- f) матрица квадратная, симметричная, на диагонали — неотрицательные числа. Первый минор  $M_1 = 1 \geq 0$ , второй минор  $M_2 = 5 - 2 = 3 \geq 0$ , третий минор

$$M_3 = 1 \cdot (50 - 0) - 2 \cdot (20 - 0) + 1 \cdot (0 - 5) = 50 - 40 - 5 = 5 \geq 0,$$

значит, матрица неотрицательно определена, то есть может быть ко-вариационной матрицей гауссового случайного вектора.

## 7.5

*Задание.* Пусть  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — гауссовый вектор с математическим ожиданием  $(-1, 0, 2)$  и матрицей ковариаций из задачи 7.3 е).

- a) Выпишите плотность распределения и характеристическую функцию для  $\xi_1, (\xi_1, \xi_2), \xi$ .
- b) Найдите матрицу ковариаций и математическое ожидание для вектора  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , где  $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2, \eta_2 = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3, \eta_3 = \xi_3$ .
- c) Вычислите  $M\eta_2^2, M\eta_2^3, M\eta_2^4$ .
- d) Выясните, являются ли случайные величины  $\eta_1$  и  $\eta_2$  независимыми.
- e) Найдите  $M(\xi | (\xi_1, \xi_3)), M(\xi_1 | \xi_2)$ .

*Решение.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix}$$

- а) Начинаем со случайной величины  $\xi_1$ . Запишем её как линейную комбинацию гауссового вектора  $\xi_1 = 1 \cdot \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 + 0 \cdot \xi_3$ . Следовательно,  $\xi_1 \sim N(-1, 1)$ , где  $-1$  — это первый элемент  $\vec{a}$ , а  $1$  — элемент  $a_{11}$  матрицы ковариации.

Записываем плотность

$$p_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$$

и характеристическую функцию  $\varphi_{\xi_1}(t) = e^{-it - \frac{t^2}{2}}$ .

Переходим к вектору  $(\xi_1, \xi_2)$ . Это гауссовый вектор, потому что произвольная линейная комбинация  $\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + 0 \cdot \xi_3$  — это случайная величина, которая должна иметь нормальное распределение. Отсюда следует, что  $(\xi_1, \xi_2) = \vec{\xi}$  — гауссовый вектор.

$M\vec{\xi} = (-1, 0)$ , а ковариационная матрица данного вектора — это сужение исходной ковариационной матрицы на соответствующие вектора

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Записываем характеристическую функцию и плотность. Матрица ковариации невырождена, так что плотность можем записать

$$p_{(\xi_1, \xi_2)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_1+1 \ x_2) \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix}}.$$

Определитель этой матрицы  $\det R = 6 - 4 = 2$ . Обратная матрица

$$R^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Подставим полученное в выражение для плотности

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x_1+1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} x_1+6-2 \cdot x_2 & -2x_1-2+2x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4} \cdot [6x_1(x_1+1) - 2x_1(x_1-1) - 2x_1x_2 + 2x_2^2] \right\}. \end{aligned}$$

Для вектора  $\xi$  математическое ожидание равно  $(-1, 0, 2)$ , а матрица ковариаций совпадает с исходной;

b) задача: выписать матрицу, с помощью которой получим вектор

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3).$$

В условии задачи дано, что

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix},$$

а  $\vec{m}_\xi = (-1, 0, 2)$ .

Посмотрим, с помощью какой матрицы получаются преобразования.

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Это матрица  $B$ . Находим математическое ожидание вектора  $\eta$ . Получаем

$$\vec{m}_\eta = B\vec{m}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Теперь ищем матрицу ковариации

$$A_\eta = BA_\xi B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемножим две последние матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \\ 2 & 35 & 12 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \\ 2 & 35 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -3 & 135 & 35 \\ 2 & 35 & 12 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица ковариаций, значит, она симметричная;

- с) случайная величина  $\eta_2$  имеет распределение Гаусса, как компонент гауссового вектора. Нужно указать параметры, то есть её математическое ожидание и дисперсию.  $\eta_2 \sim N(5, 135)$ . У нас нецентрированная случайная величина. Значит,  $\eta_2 - 5 \sim N(0, 135)$ . Поэтому  $M(\eta_2 - 5)^2 = 135$ , потому что это её дисперсия. Раскрываем слева

скобки, пользуемся линейностью математического ожидания и находим второй момент  $M\eta_2^2 - 25M\eta_2 + 25 = 135$ . Математическое ожидание  $\eta_2$  мы знаем, выражаем второй момент  $M\eta_2^2 = 10 \cdot 5 + 110 = 160$ .

Третий момент этой случайной величины равен  $M(\eta_2 - 5)^3 = 0$ . Так же раскрываем скобки слева  $M\eta_2^3 - 15M\eta_2^2 + 75M\eta_2 - 125 = 0$ , откуда  $M\eta_2^3 = 15 \cdot 160 - 75 \cdot 5 + 125 = 2400 - 250 = 2150$ .

Четвёртый момент находится аналогично;

- d) если бы они были независимыми, ковариация была бы равна нулю. Это элемент матрицы  $(1, 2)$ . Он равен  $Cov(\eta_1, \eta_2) = -3 \neq 0$ . Отсюда следует, что случайные величины зависимы.

Компоненты гауссового вектора независимы тогда и только тогда, когда они некоррелируемы;

- e) пользуемся теоремой о нормальной корреляции.

Записываем, как в теореме,

$$M[\xi_1 | (\xi_2, \xi_3)] = M\xi_1 + Cov[\xi_1, (\xi_2, \xi_3)] \cdot \{Cov[(\xi_2, \xi_3), (\xi_2, \xi_3)]\}^{-1} [(\xi_2, \xi_3) - M(\xi_2, \xi_3)]^T.$$

Подставляем

$$\begin{aligned} M\xi_1 + Cov[\xi_1, (\xi_2, \xi_3)] \cdot \{Cov[(\xi_2, \xi_3), (\xi_2, \xi_3)]\}^{-1} [(\xi_2, \xi_3) - M(\xi_2, \xi_3)]^T &= \\ &= -1 + [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_2 - 0 \\ \xi_3 - 2 \end{bmatrix} = \\ &= -1 + [2 \quad 1] \cdot \frac{1}{71} \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 - 2 \end{bmatrix} = -1 + [25 \quad 8] \cdot \frac{1}{71} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 - 2 \end{bmatrix} = \\ &= -1 + \frac{1}{71} (25\xi_2 + 8\xi_3 - 16) \end{aligned}$$

— оценка  $\xi_1$  по вектору  $(\xi_2, \xi_3)$ .

Аналогично

$$M(\xi_1 | \xi_2) = M\xi_1 + Cov(\xi_1, \xi_2) [Cov(\xi_2, \xi_2)]^{-1} \cdot (\xi_2 - M\xi_2).$$

Подставляем известные значения

$$M\xi_1 + Cov(\xi_1, \xi_2) [Cov(\xi_2, \xi_2)]^{-1} \cdot (\xi_2 - M\xi_2) = -1 + 2 \cdot \frac{1}{6} (\xi_2 - 0).$$

Сократим

$$-1 + 2 \cdot \frac{1}{6} (\xi_2 - 0) = -1 + \frac{1}{3} \cdot \xi_2.$$



## 7.6

*Задание.* Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  — гауссовый вектор с вектором средних  $(1, -1)$  и ковариационной матрицей из примера задачи 7.3 d). Найдите такое  $c$ , что случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2 + c\xi_1$  являются независимыми.

*Решение.*

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2), \text{ vect}_{\xi} = (1, -1), A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Хотим найти  $c$ , при котором  $\xi_1$  и  $\xi_2 + c\xi_1$  — независимы. Сначала нужно показать, что  $(\xi_1, \xi_2 + c\xi_1)$  является гауссовым вектором, чтобы применить теорему. Берём какую-то комбинацию и группируем

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 (\xi_2 + c\xi_1) = \xi_1 (\lambda_1 + \lambda_2 c) + \xi_2 \lambda_2.$$

Видим, что это линейная комбинация координат гауссового вектора, которая имеет нормальное распределение. Значит, вектор гауссовый. Тогда независимость координат эквивалентна их некоррелируемости

$$\text{Cov}(\xi_1, \xi_2 + c\xi_1) = 0.$$

Воспользуемся линейностью ковариации

$$\text{Cov}(\xi_1, \xi_2 + c\xi_1) = \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) + c \cdot \text{Cov}(\xi_1, \xi_1) = 2 + c \cdot 1 = 2 + c = 0,$$

следовательно,  $c = -2$ .

## 7.7

*Задание.* Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределение каждая. Найдите:

- а) распределение вектора  $(\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1)$ ;
- б) плотность  $p(x_1, x_2)$  распределения вектора  $(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(1)})$ .

*Решение.*  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \sim N(0, 1)$ .

- а) Вектор  $\vec{\eta} = (\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1)$ .

Если они независимы, то их ковариация равна нулю.

Сформируем вектор  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и покажем, что это гауссовский вектор

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \sum_{i=1}^3 \lambda_i \xi_i \sim N(0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

Значит, вектор  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  является гауссовским. Поэтому вектор  $\vec{\eta}$  — гауссовский. Покажем это.

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_3 - \lambda_2 \xi_1 = \xi_1 (-\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 \xi_3.$$

Видим, что это линейная комбинация координат гауссового вектора, значит, вектор действительно гауссовый. Чтобы указать распределение, нужны параметры, то есть вектор математических ожиданий и матрица ковариации

$$\vec{\eta} = B\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \xi_3 - \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Матрицей  $B$  действуем на вектор математических ожиданий и на ковариационную матрицу  $\vec{m}_\eta = B\vec{m}_\xi = 0$ ,  $A_\eta = BA_\xi B^T$ , где  $A_\xi$  — единичная матрица, потому что они все независимы, некоррелируемы, значит,

$$BA_\xi B^T = BB^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Должна быть симметричная матрица

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

— матрица ковариации;

b) скобками обозначена упорядоченность.  $\vec{\eta} = (\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(1)})$ .

Если бы знали плотность распределения  $(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})$  (знаем из задачи 1.10)  $p_{(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})}(x_1, x_2, x_3)$ , можем сказать, что вектор  $\vec{\eta}$  получается линейным преобразованием с помощью матрицы  $B$ .

Формула замены переменных

$$p_{B\vec{\xi}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det B} \cdot p_{\vec{\xi}}(B^{-1}\vec{x}).$$

Значит, матрица  $B$  должна быть только квадратной. Найдём плотность вектора  $(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(1)}, \xi_{(1)})$   $p(u_1, u_2, u_3)$ .

Далее проинтегрируем по  $u_3$ . Это делают, когда размерность не совпадает.

$p_{(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})} = 3!p_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2, x_3\}$ . Запишем для нашего случая.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — независимы, значит, плотность вектора — это произведение плотностей

$$\begin{aligned} & 3!p_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2, x_3\} = \\ & = 6p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)p_{\xi_3}(x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\} = \\ & = 6 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\}. \end{aligned}$$

Записываем преобразование

$$\begin{bmatrix} \xi_{(2)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(3)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \\ \xi_{(3)} \end{bmatrix}.$$

Значит, матрица

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Чтобы применить формулу замены переменных, нужны определитель и обратная матрица. Раскладываем по последней строке

$$\det B = 1, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(2)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(3)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \\ \xi_{(3)} \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Действуем матрицей на вектор

$$B^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$p_{B(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})}(\vec{x}) = \frac{1}{\det B} \cdot p_{(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})}(B^{-1}\vec{x}).$$

Подставляем значение плотности

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\det B} \cdot p_{(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})}(B^{-1}\vec{x}) = \\ & = 6 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}[x_3^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2]} \cdot \mathbb{1}\{x_3 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3\}. \end{aligned}$$

Можем везде отнять  $x_3$ . Получим

$$\begin{aligned} & 6 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}[x_3^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2]} \cdot \mathbb{1}\{x_3 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3\} = \\ & = 6 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}[x_3^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2]} \cdot \mathbb{1}\{0 < x_1 < x_2\}. \end{aligned}$$

Нужно проинтегрировать по  $x_3$ , то есть выделить полный квадрат по  $x_3$ .

Получаем

$$3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 = \left( \sqrt{3}x_3 + \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{3}} \right)^2 + x_1^2 + x_2^2 - \left( \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{3}} \right)^3.$$

Нужная плотность вектора

$$\begin{aligned} P(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(1)})(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{6}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[ x_1^2 + x_2^2 - \frac{(x_1 + x_2)^2}{3} \right]} \cdot \mathbb{1}\{0 < x_1 < x_2\} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[ \sqrt{3}x_3 + \frac{(x_1 + x_2)^2}{3} \right]} dx_3 = \frac{6}{2\sqrt{3}\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[ x_1^2 + x_2^2 - \frac{(x_1 + x_2)^2}{3} \right]}. \end{aligned}$$

## 7.8

*Задание.* Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Докажите, что величины  $\xi + \eta$  и  $\xi - \eta$  являются независимыми гауссовскими случайными величинами.

*Решение.*  $\xi, \eta \sim N(0, 1)$  — независимы. Хотим показать, что  $\xi + \eta$  и  $\xi - \eta$  — независимые. Стандартный способ — через характеристические функции. Формируем вектор  $(\xi + \eta, \xi - \eta)$ . Должно быть

$$\varphi_{(\xi+\eta, \xi-\eta)}(t_1, t_2) = \varphi_{\xi+\eta}(t_1) \cdot \varphi_{\xi-\eta}(t_2)$$

тогда и только тогда, когда  $\xi - \eta$ ,  $\xi + \eta$  — независимы — критерий.

Заметим, что раз  $\xi, \eta$  — независимы, то вектор  $(\xi, \eta)$  — гауссовский. Можно убедиться, что  $(\xi + \eta, \xi - \eta)$  — гауссовский. Тогда достаточно показать, что  $Cov(\xi + \eta, \xi - \eta) = 0$ .

Случайная величина  $\xi + \eta$  имеет распределение  $N(0, 2)$ .

Её характеристическая функция равна  $\varphi_{\xi+\eta}(t_1) = e^{-t_1^2}$ .

Случайная величина  $\xi - \eta$  имеет распределение  $N(0, 2)$ , потому что «минус» из дисперсии выносится с квадратом.

Она имеет характеристическую функцию  $\varphi_{\xi-\eta}(t_2) = e^{-t_2^2}$ .

Значит, произведение  $\varphi_{\xi+\eta}(t_1) \varphi_{\xi-\eta}(t_2) = e^{-(t_1^2 + t_2^2)}$ .

Переходим к характеристической функции вектора. По определению

$$\varphi_{(\xi+\eta, \xi-\eta)}(t_1, t_2) = Me^{i[t_1(\xi+\eta) + t_2(\xi-\eta)]}.$$

Группируем  $\xi$  и  $\eta$ , получаем

$$Me^{i[t_1(\xi+\eta) + t_2(\xi-\eta)]} = Me^{i(t_1\xi + t_1\eta + t_2\xi - t_2\eta)} = Me^{i[\xi(t_1+t_2) + \eta(t_1-t_2)]}.$$

Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  — независимы, значит,

$$Me^{i[\xi(t_1+t_2) + \eta(t_1-t_2)]} = \varphi_{\xi}(t_1 + t_2) \varphi_{\eta}(t_1 - t_2).$$

Подставляем явный вид. Это стандартное нормальное распределение, следовательно,  $\varphi_\xi(t_1 + t_2) \varphi_\eta(t_1 - t_2) = e^{-\frac{(t_1+t_2)^2}{2}} e^{-\frac{(t_1-t_2)^2}{2}} = e^{-(t_1^2+t_2^2)}$ .

Случайный вектор  $(\xi, \eta)$  — гауссовский, потому что

$$\forall \alpha, \beta \quad \alpha \xi + \beta \eta \sim N(0, \alpha^2 + \beta^2)$$

— нормальное распределение. Отсюда следует, что  $(\xi + \eta, \xi - \eta)$  — гауссовский, потому что

$$\forall \alpha, \beta \quad \alpha(\xi + \eta) + \beta(\xi - \eta) = \alpha\xi + \alpha\eta + \beta\xi - \beta\eta = (\alpha + \beta)\xi + (\alpha - \beta)\eta$$

— линейная комбинация элементов гауссовского вектора, или в явном виде  $N(0, (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2)$ . Они будут независимыми, если некоррелируемы.

Из линейности следует, что

$$\text{Cov}(\xi + \eta, \xi - \eta) = \text{Cov}(\xi, \xi) - \text{Cov}(\xi, \eta) + \text{Cov}(\eta, \xi) - \text{Cov}(\eta, \eta).$$

Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  — независимые, и тем более некоррелируемы,  $\text{Cov}(\xi, \xi)$  — это её дисперсия, значит,  $\text{Cov}(\eta, \xi) - \text{Cov}(\eta, \eta) = 1 - 1 = 0$ , следовательно, они некоррелируемые и независимые.

## 7.9

*Задание.* Пусть положительная случайная величина  $R$  имеет распределение Рэлея с плотностью распределения:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r > 0,$$

где  $\sigma^2 > 0$ , и пусть  $\theta$  — независимая от неё случайная величина с равномерным распределением на  $(0, 2\pi)$ . Докажите, что величины  $X = R \cos \theta$  и  $Y = R \sin \theta$  являются независимыми и имеют нормальное распределение  $N(0, \sigma^2)$ .

*Решение.* Пусть есть вектор  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  и допустим, что  $p_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n)$  — известно.

$$\vec{\eta} = \varphi(\vec{\xi}).$$

Будет замена

$$\begin{cases} z_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ z_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ z_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Тогда

$$p_{\vec{\eta}}(\vec{z}) = p_{\vec{\eta}}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{J(z)} \cdot p_{\vec{\xi}}(\varphi^{-1}(\vec{x})),$$

где  $\varphi^{-1}(\vec{z})$  — обратное отображение, а

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

— определитель Якобиана.

Сформируем вектор  $(R, \theta)$ .

Запишем плотность этого вектора  $p_{(R, \theta)}(x, y)$ .

Рассматриваем замену переменных.

Нужно перевести  $(R, \theta) \rightarrow (\varphi)(R \cos \theta, R \sin \theta)$ .

Имеем замену

$$\begin{cases} z_1 = x \cos y, \\ z_2 = x \sin y. \end{cases}$$

Такая замена координат приводит к такому преобразованию. После этого согласно с формулой замены переменных нужно записать плотность нового вектора.

$$\theta \sim U([0, 2\pi]).$$

Случайные величины  $R, \theta$  — независимы между собой. Запишем плотность вектора как произведение плотностей, потому что они независимы  $p_{(R, \theta)}(x, y) = p_R(x) p_\theta(y)$ . Подставляем явный вид, включая индикаторы

$$p_R(x) p_\theta(y) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}\{x > 0\} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \mathbb{1}\{y \in [0, 2\pi]\}.$$

Записываем

$$J(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{vmatrix} = x \cos^2 y + x \sin^2 y = x = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

По сути это полярная замена координат.

Пишем плотность в новых переменных, индикаторы никаких ограничений на  $z_1, z_2$  не дают

$$p_{(R \cos \theta, R \sin \theta)}(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{\sigma^2} \cdot e^{-(z_1^2 + z_2^2) \cdot \frac{1}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2\sigma^2}}.$$

Это похоже на гауссовское распределение

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2\sigma^2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{z_1^2}{2\sigma^2}} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{z_2^2}{2\sigma^2}} \right) = p_{R \cos \theta}(z_1) p_{R \sin \theta}(z_2).$$

Из этого следует независимость.

## Домашнее задание

### 7.11

*Задание.* Может ли матрица  $A$  быть ковариационной матрицей гауссовского случайного вектора, если:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

*Решение.*

a) Матрица квадратная, симметричная, на диагонали — неотрицательные числа. Первый минор  $M_1 = 1 \geq 0$ , второй минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \geq 0,$$

третий минор

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \geq 0,$$

значит матрица неотрицательно определённая, то есть может быть ковариационной матрицей гауссовского случайного вектора;

b) матрица квадратная, симметричная, на диагонали — неотрицательные числа. Первый минор  $M_1 = 1 \geq 0$ , второй минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \geq 0,$$

третий минор

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 5(5 - 4) = 0,$$

значит матрица неотрицательно определённая, то есть может быть ковариационной матрицей гауссовского случайного вектора.

### 7.12

*Задание.* Пусть  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — гауссовский вектор со средним  $(1, 2, 5)$  и матрицей ковариаций из задачи 7.3 f).

- Запишите плотность распределения и характеристическую функцию для вектора  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .
- Найдите матрицу ковариаций и среднее для вектора  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , где  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ ,  $\eta_2 = \xi_2 + \xi_3$ ,  $\eta_3 = \xi_1 + \xi_3$ .
- Выясните, являются ли случайные величины  $\eta_2, \eta_3$  независимыми.
- Найдите условные математические ожидания

$$M(\xi_2 \mid (\xi_1, \xi_3)), M(\xi_1 \mid \xi_2).$$

- Вычислите  $M\eta_1^2, M\eta_1^3, M\eta_1^4$ .

*Решение.*

- $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{\xi}$  — гауссовский вектор с математическим ожиданием  $M\vec{\xi} = (1, 2, 5)$  и ковариационной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Записываем характеристическую функцию и плотность.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 10(5 - 4) = 5.$$

Матрица ковариаций невырождена, так что может записать

$$p_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 - 5 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 5 \end{bmatrix}}.$$

Найдём обратную матрицу к матрице ковариаций

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 50 & -10 & -5 \\ -10 & 9 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$



Перемножив вектора и матрицы в степени экспоненты, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 - 5 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 5 \end{bmatrix}} = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{5}} \cdot e^{50x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 40x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3 + 30x_1 - 16x_2 - 8x_3 + 21}. \end{aligned}$$

Запишем характеристическую функцию

$$\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{\lambda}) = \exp \left\{ i \left( \vec{\lambda}, M\vec{\xi} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( A\vec{\lambda}, \vec{\lambda} \right) \right\};$$

b) задача: выписать матрицу, с помощью которой получается вектор

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3).$$

В условии задачи дано, что

$$A_{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

а  $\vec{m}_{\xi} = (1, 2, 5)$ .

Посмотрим, с помощью какой матрицы получается преобразование

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Это матрица  $B$ . Находим математическое ожидание вектора  $\eta$ . Получаем

$$\vec{m}_{\eta} = B\vec{m}_{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 2+5 \\ 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Теперь ищем матрицу ковариаций

$$A_{\eta} = BA_{\xi}B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемножим две последние матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 10 & 11 \end{bmatrix}.$$

Перемножаем матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 8 & 15 & 13 \\ 4 & 13 & 13 \end{bmatrix}.$$

Это матрица ковариаций, значит, она симметрична;

- с) если бы они были независимыми, ковариация была бы равна нулю.

Это элемент матрицы  $(2, 3)$ . Он равен  $Cov(\eta_2, \eta_3) = 13 \neq 0$ . Отсюда следует, что случайные величины зависимы.

Компоненты гауссовского вектора независимы тогда и только тогда, когда они некоррелированные;

- d) пользуемся теоремой о нормальной корреляции.

Записываем, как в теореме,

$$\begin{aligned} M[\xi_2 | (\xi_1, \xi_3)] &= \\ &= M\xi_2 + \\ &+ Cov[\xi_2, (\xi_1, \xi_3)] \cdot \{Cov[(\xi_1, \xi_3), (\xi_1, \xi_3)]\}^{-1} \cdot [(\xi_1, \xi_3) - M(\xi_1, \xi_3)]^T. \end{aligned}$$

Подставим

$$\begin{aligned} M\xi_2 + Cov[\xi_2, (\xi_1, \xi_3)] \cdot \{Cov[(\xi_1, \xi_3), (\xi_1, \xi_3)]\}^{-1} \cdot [(\xi_1, \xi_3) - M(\xi_1, \xi_3)]^T &= \\ = 7 + [2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 - 1 \\ \xi_3 - 5 \end{bmatrix} &= 7 + [2 \quad 0] \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 - 1 \\ \xi_3 - 5 \end{bmatrix} = \\ = 7 + [20 \quad -2] \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} \xi_1 - 1 \\ \xi_3 - 5 \end{bmatrix} &= 7 + \frac{1}{9} (20\xi_1 - 20 - 2\xi_3 + 10) = \\ &= 7 + \frac{1}{9} (20\xi_1 - 2\xi_3 - 10) \end{aligned}$$

— оценка  $\xi_2$  по вектору  $(\xi_1, \xi_3)$ .

Аналогично  $M(\xi_1 | \xi_2) = M\xi_1 + Cov(\xi_1, \xi_2) \cdot [Cov(\xi_2, \xi_2)]^{-1} (\xi_2 - M\xi_2)$ .

Подставим известные значения

$$M\xi_1 + Cov(\xi_1, \xi_2) \cdot [Cov(\xi_2, \xi_2)]^{-1} (\xi_2 - M\xi_2) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{5} (\xi_2 - 2).$$

Сократим

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{5} (\xi_2 - 2) = 1 + \frac{2}{5} \cdot \xi_2 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \cdot \xi_2;$$

- е) случайная величина  $\eta_1$  имеет распределение Гаусса, как компонента гауссовского вектора. Нужно указать параметры, то есть её математическое ожидание и дисперсию  $\eta_1 \sim N(3, 10)$ . У нас смещённая случайная величина. Значит,  $\eta_1 - 3 \sim N(0, 10)$ . Поэтому

$$M(\eta_1 - 3)^2 = 10,$$

потому что это её дисперсия. Раскроем слева скобки, пользуемся линейностью математического ожидания и находим второй момент

$$M\eta_1^2 - 6M\eta_1 + 9 = 10.$$

Математическое ожидание  $\eta_1$  мы знаем, выражаем второй момент  $M\eta_1^2 = 6 \cdot 3 - 9 + 10 = 18 + 1 = 19$ .

Третий момент этой случайной величины  $M(\eta_1 - 3)^3 = 0$ .

Так же раскрываем скобки слева  $M\eta_1^3 - 3M\eta_1^2 \cdot 3 + 3M\eta_1 \cdot 9 - 27 = 0$ , откуда  $M\eta_1^3 = 9 \cdot 19 - 27 \cdot 3 + 27 = 117$ .

Четвёртый момент находим аналогично

$$M(\eta_1 - 3)^4 = M\eta_1^4 - 4M\eta_1^3 \cdot 3 + 6 \cdot M\eta_1^2 \cdot 9 - 4M\eta_1 \cdot 27 + 81.$$

Подставляем известные значения моментов

$$M\eta_1^4 - 4M\eta_1^3 \cdot 3 + 6 \cdot M\eta_1^2 \cdot 9 - 4M\eta_1 \cdot 27 + 81 = M\eta_1^4 - 12 \cdot 117 + 54 \cdot 19 - 108 \cdot 3 + 81.$$

Умножаем и складываем константы

$$M\eta_1^4 - 12 \cdot 117 + 54 \cdot 19 - 108 \cdot 3 + 81 = M\eta_1^4 - 621 = 10^2 \cdot 3! = 100 \cdot 6 = 600,$$

откуда  $M\eta_1^4 = 600 + 621 = 1221$ .

### 7.13

*Задание.* Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределение каждая. Найдите:

- распределение вектора  $(\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2)$ ;
- плотность  $p(x_1, x_2)$  распределения вектора  $(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(2)})$ .

*Решение.*

- Вектор  $\vec{\eta} = (\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2)$ .

Если случайные величины независимы, то их ковариация равна нулю.

Сформируем вектор  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и покажем, что это гауссовский вектор

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \sum_{i=1}^3 \lambda_i \xi_i \sim N(0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

Значит, вектор  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  является гауссовским. Поэтому вектор  $\vec{\eta}$  — гауссовский.

Покажем это

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \lambda_1 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_3 - \lambda_2 \xi_2 = \xi_1 (-\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 \xi_3.$$

Видим, что это линейная комбинация координат гауссовского вектора, значит, вектор действительно гауссовский. Чтобы указать распределение, нужны параметры, то есть вектор математических ожиданий и матрица ковариаций.

$$\vec{\eta} = B\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \xi_3 - \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Матрицей  $B$  действуем на вектор математических ожиданий и на ковариационную матрицу  $\vec{m}_\eta = B\vec{m}_\xi = 0$ ,  $A_\eta = BA_\xi B^T$ , где  $A_\xi$  — единичная матрица, потому что все они независимы, некоррелируемы, значит,

$$BA_\xi B^T = BB^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Должна быть симметрическая матрица

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

— матрица ковариаций;

- b) скобками обозначена упорядоченность  $\vec{\eta} = (\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(2)})$ .

Если бы знали плотность распределения  $(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})$  (знаем из задачи 1.10)  $p_{(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})}(x_1, x_2, x_3)$ , могли бы сказать, что вектор  $\vec{\eta}$  получен линейным преобразованием с помощью матрицы  $B$ .

Формула замены переменных

$$p_{B\vec{\xi}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det B} \cdot p_{\vec{\xi}}(B^{-1}\vec{x}).$$

Значит, матрица  $B$  должна быть только квадратной. Найдём плотность вектора  $(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(2)})$   $p(u_1, u_2, u_3)$ .

Должны проинтегрировать по  $u_3$ . Это делают, когда размерности не совпадают.

$p_{(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})}(x_1, x_2, x_3) = 3!p_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\}$ . Запишем для нашего случая.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — независимые, значит, плотность вектора — это произведение плотностей

$$\begin{aligned} & 3!p_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\} = \\ & = 6p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)p_{\xi_3}(x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\} = \\ & = \frac{6}{(\sqrt{2\pi})^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\}. \end{aligned}$$

Записываем преобразование

$$\begin{bmatrix} \xi_{(2)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(3)} - \xi_{(2)} \\ \xi_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \\ \xi_{(3)} \end{bmatrix}.$$

Значит, матрица

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Чтобы применить формулу замены переменных, нужны определитель и обратная матрица. Раскладываем по последней строке

$$\det B = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(2)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(3)} - \xi_{(2)} \\ \xi_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \\ \xi_{(3)} \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Действуем матрицей на вектор

$$B^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$p_{B(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})}(\vec{x}) = \frac{1}{\det B} \cdot p_{(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})}(B^{-1}\vec{x}).$$

Подставим значения плотностей

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\det B} \cdot p_{(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)})}(B^{-1}\vec{x}) = \\ & = 6 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}[x_3^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2]} \times \\ & \quad \times \mathbb{1}\{x_3 < x_1 + x_3 < x_1 + x_2 + x_3\}. \end{aligned}$$

Можем везде отнять  $x_3$  в индикаторе

$$\begin{aligned} & 6 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}[x_3^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2]} \times \\ & \quad \times \mathbb{1}\{x_3 < x_1 + x_3 < x_1 + x_2 + x_3\} = \\ & = 6 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}[x_3^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2]} \cdot \mathbb{1}\{0 < x_1 < x_1 + x_2\}. \end{aligned}$$

Нужно проинтегрировать по  $x_3$ , то есть для начала выделить полный квадрат по  $x_3$ .

Получим

$$\begin{aligned}
 x_3^2 + x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 &= \\
 = 3x_3^2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 &= \\
 = 3x_3^2 + 2x_3(2x_1 + x_2) + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 &= \\
 = \left( \sqrt{3}x_3 + \frac{2x_1 + x_2}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{(2x_1 + x_2)^2}{3} + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 &= \\
 = \left( \sqrt{3}x_3 + \frac{2x_1 + x_2}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2). &
 \end{aligned}$$

Нужная плотность вектора

$$\begin{aligned}
 p_{(\xi(2)-\xi(1), \xi(3)-\xi(2))}(x_1, x_2) &= \\
 = \frac{6}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)} \cdot \mathbb{1}\{0 < x_1 < x_1 + x_2\} \times \\
 \times \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \sqrt{3}x_3 + \frac{2x_1 + x_2}{\sqrt{3}} \right)^2} dx_3 &= \\
 = \frac{6}{2\pi\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)}. &
 \end{aligned}$$

## 7.14

*Задание.* Пусть  $Z = XY$ , где  $X$  и  $Y$  независимы,  $X \sim N(0, 1)$ , а

$$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

Докажите, что  $Z \sim N(0, 1)$ . Найдите распределение пар  $(X, Z)$ ,  $(Y, Z)$  и распределение случайной величины  $X + Z$ . Убедитесь в том, что  $X$  и  $Z$  являются некоррелируемыми, но зависимыми случайными величинами.

*Решение.*

$$\varphi_Z(t) = Me^{itZ} = Me^{itXY} = Me^{-itX} \cdot P(Y = -1) + Me^{itX} \cdot P(Y = 1).$$

По определению характеристической функции

$$Me^{-itX} \cdot P(Y = -1) + Me^{itX} \cdot P(Y = 1) = \varphi_X(-t) \cdot \frac{1}{2} + \varphi_X(t) \cdot \frac{1}{2}.$$

Подставляем значения характеристической функции

$$\varphi_X(-t) \cdot \frac{1}{2} + \varphi_X(t) \cdot \frac{1}{2} = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

значит,  $Z \sim N(0, 1)$ .

Найдём

$$\varphi_{(X,Z)}(t_1, t_2) = Me^{it_1 X + it_2 Z} = Me^{it_1 X + it_2 XY}.$$

Подставляем возможные значения  $Y$  и умножаем полученные выражения на соответствующие вероятности

$$Me^{it_1 X + it_2 XY} = Me^{it_1 X + it_2 X} \cdot P(Y = 1) + Me^{it_1 X - it_2 X} \cdot P(Y = -1).$$

Групируем степени экспонент и подставляем значения вероятностей

$$\begin{aligned} & Me^{it_1 X + it_2 X} \cdot P(Y = 1) + Me^{it_1 X - it_2 X} \cdot P(Y = -1) = \\ & = Me^{iX(t_1 + t_2)} \cdot \frac{1}{2} + Me^{iX(t_1 - t_2)} \cdot \frac{1}{2} = \\ & = \varphi_X(t_1 + t_2) \cdot \frac{1}{2} + \varphi_X(t_1 - t_2) \cdot \frac{1}{2} = e^{-\frac{(t_1 + t_2)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{(t_1 - t_2)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t_1^2 + 2t_1 t_2 + t_2^2}{2}} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t_1^2 - 2t_1 t_2 + t_2^2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}} (e^{-t_1 t_2} + e^{t_1 t_2}). \end{aligned}$$

Подобным образом находим

$$\varphi_{(Y,Z)}(t_1, t_2) = Me^{it_1 Y + it_2 Z} = Me^{it_1 Y + it_2 XY}.$$

Подставляем возможные значения  $Y$  и умножаем полученные выражения на соответствующие вероятности

$$Me^{it_1 Y + it_2 XY} = Me^{-it_1 - it_2 X} \cdot P(Y = -1) + Me^{it_1 + it_2 X} \cdot P(Y = 1).$$

Разбиваем экспоненты на две

$$\begin{aligned} & Me^{-it_1 - it_2 X} \cdot P(Y = -1) + Me^{it_1 + it_2 X} \cdot P(Y = 1) = \\ & = M(e^{-it_1} e^{-it_2 X}) \cdot \frac{1}{2} + M(e^{it_1} e^{it_2 X}) \cdot \frac{1}{2} = \\ & = e^{-it_1} \cdot \varphi_X(-t_2) \cdot \frac{1}{2} + e^{it_1} \varphi_X(t_2) \cdot \frac{1}{2} = e^{-it_1} \cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{it_1} \cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}} (e^{-it_1} + e^{it_1}). \end{aligned}$$

По такому же принципу находим

$$\varphi_{X+Z}(t) = Me^{it(X+Z)} = Me^{itX + itZ} = Me^{itX + itXY}.$$

Подставляем возможные значения  $Y$  и умножаем полученные выражения на соответствующие вероятности

$$Me^{itX + itXY} = Me^{itX - itX} \cdot P(Y = -1) + Me^{itX + itX} \cdot P(Y = 1).$$

Приводим подобные в степенях экспонент и подставляем значения вероятностей

$$Me^{itX - itX} \cdot P(Y = -1) + Me^{itX + itX} \cdot P(Y = 1) = \frac{1}{2} + Me^{2itX} \cdot \frac{1}{2}.$$

По определению характеристической функции

$$\frac{1}{2} + Me^{2itX} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \varphi_X(2t) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + e^{-\frac{4t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + e^{-2t^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + e^{-2t^2}).$$

Характеристическая функция независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций.

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Найдём произведение характеристических функций случайных величин

$$\varphi_X(t) \varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-t^2} \neq \frac{1}{2} (1 + e^{-2t^2}) = \varphi_{X+Z}(t),$$

значит, случайные величины  $X$  и  $Z$  — зависимы.

$M(XZ) = M(XXY) = M(X^2Y) = MX^2 \cdot MY = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$ ,  
значит, они некоррелируемые.

### 7.15

*Задание.* Пусть  $\xi$  — случайная величина со стандартным нормальным распределением, и пусть

$$\eta_\alpha = \begin{cases} \xi, & \text{if } |\xi| \leq \alpha, \\ -\xi, & \text{if } |\xi| \geq \alpha. \end{cases}$$

Докажите, что  $\eta_\alpha \sim N(0, 1)$  и что при  $\alpha$  таком, что

$$\int_0^\alpha x^2 f_\xi(x) dx = \frac{1}{4}$$

величины  $\xi$  и  $\eta_\alpha$  являются некоррелируемыми, но зависимыми гауссовскими случайными величинами.

*Решение.*  $\xi \sim N(0, 1)$ .

Запишем  $\eta_\alpha$  через индикаторы  $\eta_\alpha = \xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\} - \xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\}$ .

Характеристическая функция

$$\varphi_{\eta_\alpha}(t) = Me^{it\eta_\alpha} = Me^{it(\xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\} - \xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\})}.$$

Раскрываем скобки

$$Me^{it(\xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\} - \xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\})} = Me^{it\xi} \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\} + Me^{-it\xi} \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\}.$$

Подставляем значения характеристической функции стандартной нормальной случайной величины

$$Me^{it\xi} \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\} + Me^{-it\xi} \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\} = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\} + e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\}.$$

Объединим индикаторы

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\} + e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\} = e^{-\frac{t^2}{2}},$$



следовательно,  $\eta_\alpha \sim N(0, 1)$ .

Покажем, что случайные величины  $\xi$  и  $\eta_\alpha$  некоррелируемы при

$$\int_0^\alpha x^2 f_\xi(x) dx = \frac{1}{4}.$$

Нужно показать, что  $Cov(\xi, \eta_\alpha) = M(\xi \eta_\alpha) - M\xi \cdot M\eta_\alpha = M(\xi \eta_\alpha) = 0$ .

Покажем это

$$M(\xi \eta_\alpha) = M[\xi(\xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\} - \xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\})].$$

Раскроем скобки и воспользуемся линейностью математического ожидания

$$\begin{aligned} & M[\xi(\xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\} - \xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\})] = \\ & = M(\xi^2 \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \leq \alpha\}) - M(\xi^2 \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \geq \alpha\}) = \\ & = \int_{-\alpha}^\alpha x^2 f_\xi(x) dx - \int_{-\infty}^\alpha x^2 f_\xi(x) dx - \int_\alpha^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx = \\ & = \int_{-\alpha}^\alpha x^2 f_\xi(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx - \int_{-\alpha}^\alpha x^2 f_\xi(x) dx \right) = \\ & = -1 + 2 \int_{-\alpha}^\alpha x^2 f_\xi(x) dx = -1 + 4 \int_0^\alpha x^2 f_\xi(x) dx = -1 + 4 \cdot \frac{1}{4} = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Значит,  $Cov(\xi, \eta_\alpha) = 0$ , то есть они некоррелируемые.

$\xi$  и  $\eta_\alpha$  зависимы, так как  $\eta_\alpha$  выражается через  $\xi$ .



# Занятие 8. Основные распределения, связанные с нормальным законом

## Контрольные вопросы и задания

Приведите определение распределения Пирсона ( $\chi^2$ ) с  $n$  степенями свободы, распределения Стьюдента ( $t$ -распределения) с  $n$  степенями свободы, распределения Фишера ( $F$ -распределения) с  $(m, n)$  степенями свободы.

Считаем, что  $\vec{\xi}$  — стандартный гауссовский вектор.

Случайная величина  $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$  имеет распределение  $\chi_n^2$ .

Есть  $n + 1$  независимая стандартная гауссовская случайная величина  $\xi_0, \dots, \xi_n$ . Отношение первой (нулевой) случайной величины к корню суммы квадратов остальных, делённой на  $n$ , имеет распределение Стьюдента с  $n$  степенями свободы

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k^2}} \sim t_n.$$

Отношение независимых случайных величин  $\chi_{k_1}^2$  и  $\chi_{k_2}^2$  называется распределением Фишера

$$F_{k_1, k_2} = \frac{\chi_{k_1}^2}{\chi_{k_2}^2}.$$

## Аудиторные задачи

### 8.3

*Задание.* Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка из распределения  $N(a, \sigma^2)$ . Докажите, что величина

$$\frac{(\bar{X} - a) \sqrt{n}}{\sigma}$$

имеет распределение  $N(0, 1)$ .

*Решение.*  $\varphi_{\bar{X}}(t) = Me^{it\bar{X}} = Me^{it \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} = Me^{it \cdot \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)}$ . Воспользуемся независимостью

$$Me^{it \cdot \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)} = \varphi_{X_1} \left( \frac{t}{n} \right) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n} \left( \frac{t}{n} \right).$$

Воспользуемся одинаковой распределённостью

$$\varphi_{X_1} \left( \frac{t}{n} \right) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n} \left( \frac{t}{n} \right) = \exp \left\{ \left( \frac{iat}{n} - \frac{t^2 \sigma^2}{2n^2} \right) n \right\} = \exp \left\{ ita - \frac{t^2 \sigma^2}{2n} \right\},$$

значит,

$$\bar{X} \sim N \left( a, \frac{\sigma^2}{n} \right).$$

После этого центрированием следует, что

$$\bar{X} - a \sim N \left( 0, \frac{\sigma^2}{n} \right).$$

Получаем, что

$$\frac{(\bar{X} - a) \sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

#### 8.4

*Задание.* Пусть  $\chi_n^2$  — случайная величина, распределённая по закону  $\chi^2$  с  $n$  степенями свободы. Вычислите её математическое ожидание  $M\chi_n^2$  и дисперсию  $D\chi_n^2$ .

*Решение.* Раз эта случайная величина имеет распределение  $\chi^2$  с  $n$  степенями свободы, изобразим её как

$$\chi_n^2 = \sum_{\xi_i^2},$$

где  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые, имеющие распределение  $N(0, 1)$ . Тогда

$$M\chi_n^2 = M \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = nM\xi_1^2 = n \left[ M\xi_1^2 + (D\xi_1)^2 \right] = n.$$

Теперь ищем дисперсию

$$D\chi_n^2 = D \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Случайные величины независимы

$$D \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = nD\xi_1^2 = n \left[ M\xi_1^4 - (M\xi_1^2)^2 \right].$$

Случайная величина  $\xi \sim N(0, 1)$ . Если  $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ , то

$$M\xi^{2n} = (2n-1)!! (\sigma^2)^n,$$

значит,  $n \left[ M\xi_1^4 - (M\xi_1^2)^2 \right] = n(3-1) = 2n$ .

## 8.5

*Задание.* Пусть  $\chi_n^2$  — случайная величина, распределённая по закону  $\chi^2$  с  $n$  степенями свободы. Докажите, что

$$\frac{1}{n} \cdot \chi_n^2 \xrightarrow{P} 1$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

*Решение.*

$$\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{n} \xrightarrow{P} 1,$$

где  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением  $N(0, 1)$ .

Такая сумма похожа на закон больших чисел. Раз  $\xi_i$  — независимы, то их квадраты тоже независимы между собой.

Тогда

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{n} \xrightarrow{P} M\xi_i^2 = 1$$

по закону больших чисел.

## Домашнее задание