

Оглавление

Занятие 1. Выборочные характеристики	1
Контрольные вопросы и задания	3
Аудиторные задачи	4
Домашнее задание	6

Занятие 1. Выборочные характеристики

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение выборки, вариационного ряда, статистики, порядковой статистики, эмпирической функции распределения.

x_1, \dots, x_n — наблюдаемые значения — независимые одинаково распределённые случайные величины с неизвестной функцией распределения $F(x)$.

Такой набор случайных величин называется выборкой из распределения F .

Вариационный ряд — последовательность $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$, полученная в результате расположения в порядке неубывания исходной последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин x_1, \dots, x_n .

Статистикой называют функцию S от выборки $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ такую, что $S(X) = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Вариационный ряд и его члены являются порядковыми статистиками.

Эмпирической (выборочной) функцией распределения, построенной по выборке x_1, \dots, x_n называется функция

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{x_k \leq x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Какими свойствами обладает эмпирическая функция распределения?

Есть множество полной вероятности, на котором эмпирическая функция распределения аппроксимирует функцию распределения, то есть почти наверное $F_n \Rightarrow F, n \rightarrow \infty$.

Запишите выражения для выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочных моментов.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

— выборочное среднее.

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

Выборочные моменты в математической статистике — это оценка теоретических моментов распределения на основе выборки.

Выборочный момент порядка k — это случайная величина

$$a_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Аудиторные задачи

1.4

Задание. Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ с неизвестным параметром θ . Какие из приведённых ниже функций являются статистиками?

- a) \bar{X} ;
- b) $5X_{(n)}$;
- c) $\theta/2$;
- d) X_1/θ ;
- e) $X_{(1)} + X_1 + X_n$.

Решение.

- a) Да;
- b) да;
- c) нет, так как не функция от выборки;
- d) функция не только от выборки (зависит от неизвестного параметра). Отсюда следует, что это не статистика;
- e) да.

1.5

Задание. Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из распределения Пуассона с параметром λ . Вычислите математическое ожидание и дисперсию статистики

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Выясните, имеет ли статистика \bar{X} распределение Пуассона.

Решение. Все X_i одинаково распределены. Отсюда следует, что все математические ожидания одинаковы

$$M\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \lambda.$$

Для всякой выборки справедливо $M\bar{X} = MX_1$.

Из независимости X_i получаем

$$D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i.$$

Так как X_i одинаково распределены, то все дисперсии одинаковы

$$D\bar{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{\lambda}{n}.$$

Математическое ожидание и дисперсия для распределения Пуассона совпадают. Отсюда следует, что эта случайная величина не имеет распределения Пуассона.

\bar{X} не обязательно будет принимать целые значения.

1.6

Задание. Вычислите математическое ожидание статистик:

a) $S^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2$;

b) $S_0^2 = 1/(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Решение.

a) Распишем каждую из величин

$$S^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2.$$

Распишем квадрат

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i < j}^n X_i X_j \right).$$

Берём слева и справа математическое ожидание. Из того, что случайные величины в выборке одинаково распределены

$$MS^2 = MX_1^2 - \frac{1}{n^2} [nMX_1 + 2C_n^2 (MX_1)^2].$$

Подставляем C_n^2 и группируем

$$MX_1^2 - \frac{1}{n^2} [nMX_1 + 2C_n^2 (MX_1)^2] = \frac{n-1}{n} \cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n} (MX_1)^2.$$

Вынесем общий множитель за скобки

$$\frac{n-1}{n} \cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n} (MX_1)^2 = \frac{n-1}{n} [MX_1^2 - (MX_1)^2] = \frac{n-1}{n} \cdot SX_1.$$

Эта оценка смещена асимптотически;

b) выразим S_0 через S . Раскроем квадрат

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2).$$

Имеем сумму n одинаковых слагаемых

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} (n\bar{X}^2 - 2(\bar{X})^2 n + n\bar{X}^2) = \frac{n}{n-1} [\bar{X}^2 - (\bar{X})^2] = \frac{n-1}{n} \cdot S^2.$$

Отсюда следует, что

$$MS_0^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot DX_1 = DX_1.$$

Домашнее задание