Оглавление

Занятие 1. Выборочные характеристики

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение выборки, вариационого ряда, статистики, порядковой статистики, эмпирической функции распределения.

$x_1, \ldots, x_n$ — наблюдаемые значения — независимые одинаково распределённые случайные величины с неизвестной функцией распределения $F(x)$.

Такой набор случайных величин называется выборкой из распределения F.

Вариационный ряд — последовательность $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$, полученная в результате расположения в порядке неубывания исходной последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин $x_1, \ldots, x_n$.

Статистикой называют функцию S от выборки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такую, что $S(X) = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Вариационный ряд и его члены являются порядковыми статистиками.

Эмпирической (выборочной) функцией распределения, построенной по выборке $x_1, \ldots, x_n$ называется функция

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{x_k \leq x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Какими свойствами обладает эмпирическая функция распределения?

Есть множество полной вероятности, на котором эмпирическая функция распределения аппроксимирует функцию распределения, то есть почти наверное $F_n \rightrightarrows F$, $n \to \infty$.

Запишите выражения для выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочных моментов.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

— выборочное среднее.

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2.$$

Выборочные моменты в математической статистике — это оценка теоретических моментов распределения на основе выборки.

Выборочный момент порядка k — это случайная величина

$$a_n\left(k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Аудиторные задачи

1.4

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ с неизвестным параметром θ. Какие из приведённых ниже функций являются статистиками?

a) $\overline{X}$;

b) $5X_{(n)}$;

c) $\theta/2$;

d) X_1/θ;

e) $X_{(1)} + X_1 + X_n$.

Решение.

a) Да;

b) да;

c) нет, так как не функция от выборки;

d) функция не только от выборки (зависит от неизвестного параметра). Отсюда следует, что это не статистика;

e) да.

1.5

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Вычислите математическое ожидание и дисперсию статистики

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Выясните, имеет ли статистика $\overline{X}$ распределение Пуассона.

Решение. Все X_i одинаково распределены. Отсюда следует, что все математические ожидания одинаковы

$$M\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\cdot nMX_1 = MX_1 = \lambda.$$

Для всякой выборки справедливо $M\overline{X} = MX_1$.

Из независимости X_i получаем

$$D\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i.$$

Так как X_i одинаково распределены, то все дисперсии одинаковы

$$D\overline{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{\lambda}{n}.$$

Математическое ожидание и дисперсия для распределения Пуассона совпадают. Отсюда следует, что эта случайная величина не имеет распределения Пуассона.

$\overline{X}$ не обязательно буде принимать целые значения.

1.6

Задание. Вычислите математическое ожидание статистик:

a) $S^2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2$;

b) $S_0^2 = 1/\left(n-1\right)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

Решение.

a) Распишем каждую из величин

$$S^2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2.$$

Распишем квадрат

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i,j=1,i<j}^{n} X_i X_j\right).$$

Берём слева и справа математическое ожидание. Из того, что случайные величины в выборке одинаково распределены

$$MS^2 = MX_1^2 - \frac{1}{n^2}\left[nMX_1 + 2C_n^2\left(MX_1\right)^2\right].$$

Подставляем C_n^2 и группируем

$$MX_1^2 - \frac{1}{n^2}\left[nMX_1 + 2C_n^2\left(MX_1\right)^2\right] = \frac{n-1}{n}\cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n}\left(MX_1\right)^2.$$

Вынесем общий множитель за скобки

$$\frac{n-1}{n}\cdot MX_1^2 - \frac{n-1}{n}\left(MX_1\right)^2 = \frac{n-1}{n}\left[MX_1^2 - \left(MX_1\right)^2\right] = \frac{n-1}{n}\cdot SX_1.$$

Эта оценка смещена ассимптотически;

b) выразим S_0 через S. Раскроем квадрат

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2\right).$$

Имеем сумму n одинаковых слагаемых

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\left(n\overline{X^2} - 2\left(\overline{X}\right)^2 n + n\overline{X}^2\right) = \frac{n}{n-1}\left[\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2\right] = \frac{n-1}{n}\cdot S^2.$$

Отсюда следует, что

$$MS_0^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot DX_1 = DX_1.$$

1.7

Задание. Найдите в терминах функции распределения F выборки $X_1, \ldots, X_n$:

a) распределение k-ой порядковой статистики $X_{(k)}$;

b) вероятность $P\left(X_{(k)} < y,\, X_{(k+1)} \geq y\right)$.

Решение.

a) Сделали упорядочивание случайных величин

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(k)} \leq \ldots \leq X_{(n)}.$$

По определению $F_{X_{(k)}}(y) = P\left(X_{(k)} \le y\right) = P\{$хотя бы k элементов выборки не превышает $y\} =$

$$= \sum_{i=k}^{n} P(A_i),$$

где $A_i = \{$ровно i элементов выборки не превышают $y\}$.

Есть n испытаний, успех — $X_i \le y$.

Вероятность успеха — это $F(y)$, вероятность неудачи — это $[1 - F(y)]$. Это биномиальное распределение

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i F^i(y) \left[1 - F(y)\right]^{n-i};$$

b) согласно с предыдущим пунктом $P\left(X_{(k)} < y,\, X_{(k+1)} \ge y\right) = P\{$ровно i элементов выборки не превышает $y\} = C_n^k F^k(y) \left[1 - F(y)\right]^{n-k}$.

1.8

Задание. Пусть $(-0.8; 2.9; 4.5; -5.7; 1.1; -3.2)$ — наблюдаемые значения выборки. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения $F_6(x)$ и её график. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Решение. Вариационный ряд: $(-5.7; -3.2; -0.8; 1.1; 2.9; 4.3)$.

Эмпирическая функция распределения (рис. 1).

$$F_6(y) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \mathbb{1}\{x_i \le y\} = \begin{cases} 0, & x < -5.7; \\ \frac{1}{6}, & -5.7 \le x < -3.2, \\ \frac{2}{6}, & -3.2 \le x < -0.8, \\ \frac{3}{6}, & -0.8 \le x < 1.1, \\ \frac{4}{6}, & 1.1 \le x < 2.9, \\ \frac{5}{6}, & 2.9 \le x < 4.3, \\ 1, & x \ge 4.3. \end{cases}$$

Выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{6}(-5.7 - 3.2 - 0.8 + 1.1 + 2.9 + 4.3) = \frac{1}{6}(-9.7 + 8.3) = -\frac{1}{6} \cdot 1.4 = -0.23.$$

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{6} \left(X_i + 0.23\right)^2.$$

Она является несмещённой.

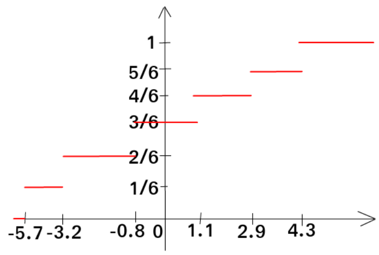

Рис. 1: Эмпирическая функция распределения

1.9

Задание. Вычислите вероятность $P\left(F_n\left(y\right)<F_n\left(z\right)\right)$.
Решение.

a) $y \geq z$. Событие невозможное, потому что $F_n\left(y\right) \geq F_n\left(z\right)$;

b) рассмотрим случай, когда $y<z$.

Тогда искомая вероятность равна $P\left(F_n\left(y\right)<F_n\left(z\right)\right)=P$ {в (y,z) попал хотя бы 1 элемент выборки} $=1-P${в (y,z) ни один элемент выборки не попал}. Случайные величины одинаково распределены, поэтому $1-P${в (y,z) ни один элемент выборки не попал} $=$
$=\left[1-P\left\{x_i \notin (y,z)\right\}\right]^n=1-\left[1-P\left\{x_1 \in (y,z)\right\}\right]^n=$
$=1-\left[1-P\left(x_1<z\right)+P\left(x_1<y\right)\right]^n=1-\left[1-F\left(z\right)+F\left(y\right)\right]^n$.

1.10

Задание. Пусть $X1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения F с плотностью f. Найдите совместную плотность распределения всех порядковых статистик, то есть плотность распределения случайного вектора $\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)$.

Решение. $F_{\left(X_{(1)},X_{(2)}\right)}\left(y_1,y_2\right)=P\left(X_{(1)} \leq y_1,\, X_{(2)} \leq y_2\right)$. Воспользуемся формулой $P\left(A \cap B\right)=P\left(B\right)-P\left(\overline{A} \cap B\right)$. Получим

$$P\left(X_{(1)} \leq y_1,\, X_{(2)} \leq y_2\right)=P\left(X_{(1)} \leq y_2\right)-P\left(X_{(1)}>y_1,\, X_{(2)} \leq y_2\right).$$

Среди $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$ случайная величина $X_{(2)}$ является максимальной.

$$P\left(X_{(1)} \leq y_2\right)-P\left(X_{(1)}>y_1,\, X_{(2)} \leq y_2\right)=$$
$$=P\left(X_1 \leq y_2,\, X_2 \leq y_2\right)-P\left(X_1 \in \left(y_1,y_2\right],\, X_2 \in \left(y_1,y_2\right]\right).$$

Случайные величины X_1,X_2 — независимые и одинаково распределённые

$$P\left(X_1 \leq y_2,\, X_2 \leq y_2\right)-P\left(X_1 \in \left(y_1,y_2\right],\, X_2 \in \left(y_1,y_2\right]\right)=$$
$$=\begin{cases}\left[F\left(y_2\right)\right]^2, & y_1 \geq y_2,\\ \left[F\left(y_2\right)\right]^2-\left[F\left(y_2\right)-F\left(y_1\right)\right]^2, & y_1<y_2.\end{cases}$$

Продифференцируем

$$f_{\left(X_{(1)},X_{(2)}\right)}\left(y_1,y_2\right)=\begin{cases}0, & y_1\geq y_2,\\ 2f\left(y_1\right)f\left(y_2\right), & y_1<y_2.\end{cases}$$

Рассматриваем множество всех векторов, которые имеют упорядоченные координаты $\Delta=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\ :\ z_1<z_2<\ldots<z_n\}$, $\Gamma\subseteq\Delta$ — произвольное подмножество.

$\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)\in\Delta$.

Чтобы найти вероятность того, что данный вектор принадлежит Γ, должны проинтегрировать плотность этого вектора по этому множеству

$$P\left\{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)\in\Gamma\right\}=\int\limits_{\Gamma}f_{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)}\left(z_1,\ldots,z_n\right)dz_1\ldots dz_n.$$

С другой стороны,

$$P\left\{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)\in\Gamma\right\}=\sum_{\sigma\in S_n}P\left\{\left(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)}\right)\in\Gamma\right\}.$$

Учтём все перестановки

$$\sum_{\sigma\in S_n}P\left\{\left(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)}\right)\in\Gamma\right\}=n!P\left\{\left(X_1,\ldots,X_n\right)\in\Gamma\right\}.$$

Подставим найденное выражение для вероятности

$$n!P\left\{\left(X_1,\ldots,X_n\right)\in\Gamma\right\}n!\cdot\int\limits_{\Gamma}f\left(z_1\right)\cdot\ldots\cdot f\left(z_n\right)dz_1\ldots dz_n.$$

Сравниваем полученные выражения

$$f_{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)}\left(z_1,\ldots,z_n\right)=n!f\left(z_1\right)\cdot\ldots\cdot f\left(z_n\right)\cdot\mathbb{1}\left\{z_1<z_2<\ldots<z_n\right\}$$

— плотность вектора упорядоченных статистик.

1.11

Задание. Пусть задана выборка $X_1,\ldots,X_n$ из показательного распределения с параметром α.

a) Докажите, что случайные величины $X_{(1)},X_{(2)}-X_{(1)},\ldots,X_{(n)}-X_{(n-1)}$ являются независимыми;

b) найдите распределение разности $X_{(k+1)}-X_{(k)}$ соседних порядковых статистик.

Решение. $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор с плотностью распределения $f_{\vec{\xi}}(\vec{x})$.

Линейное преобразование этого вектора $\vec{\eta} = A\vec{\xi}$, где A — некоторая n-мерная матрица.

$$f_{A\vec{\xi}}(\vec{y}) = \frac{1}{|detA|} \cdot f_{\vec{\xi}}\left(A^{-1}\vec{y}\right).$$

Составим вектор из величин $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$. Его плотность должна распасться на произведение плотностей компонент.

Из задачи 1.10

$$f_{\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)}(y_1, \ldots, y_n) = n! f(y_1) \cdot \ldots \cdot f(y_n) \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \ldots < y_n\}.$$

Подставим плотность показательного распределения

$$n! f(y_1) \cdot \ldots \cdot f(y_n) \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \ldots < y_n\} =$$
$$= n! \alpha e^{-\alpha y_1} \cdot \mathbb{1}\{y_1 > 0\} \cdot \ldots \cdot \alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\} \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \ldots < y_n\}.$$

Перемножим

$$n! \alpha e^{-\alpha y_1} \cdot \mathbb{1}\{y_1 > 0\} \cdot \ldots \cdot \alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\{y_n > 0\} \cdot \mathbb{1}\{y_1 < y_2 < \ldots < y_n\} =$$
$$= n! \alpha^n e^{-\alpha(y_1 + \ldots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\{0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n\}.$$

Нужно найти линейное преобразование

$$\begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} - X_{(1)} \\ X_{(3)} - X_{(2)} \\ \ldots \\ X_{(n)} - X_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 9 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1))} \\ X_{(2)} \\ X_{(3)} \\ \ldots \\ X_{(n)} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Определитель $detA = 1$.

Ищем обратную матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} - X_{(1)} \\ X_{(3)} - X_{(2)} \\ \ldots \\ X_{(n)} - X_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{(1))} \\ X_{(2)} \\ X_{(3)} \\ \ldots \\ X_{(n)} \end{bmatrix}.$$

Тогда имеем выражение

$$A^{-1}\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}.$$

Определим искомый вектор через

$$\vec{\eta} = \left(X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}\right).$$

Тогда

$$f_{\vec{\eta}}\left(y_1, \dots, y_n\right) = \\ = n!\alpha^n e^{-\alpha(ny_1 + (n-1)y_2 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\left\{0 < y_1 < y_1 + y_2 < \dots < y_1 + y_2 + \dots + y_n\right\}.$$

Разобъём на n множителей

$$n!\alpha^n e^{-\alpha(ny_1 + (n-1)y_2 + \dots + y_n)} \cdot \mathbb{1}\left\{0 < y_1 < y_1 + y_2 < \dots < y_1 + y_2 + \dots + y_n\right\} = \\ = \left[n\alpha e^{-\alpha n y_1} \cdot \mathbb{1}\left\{0 < y_1\right\}\right] \cdot \left[(n-1)\,\alpha e^{-\alpha(n-1)y_2} \cdot \mathbb{1}\left\{y_2 > 0\right\}\right] \cdot \ldots \times \\ \times \left[\alpha e^{-\alpha y_n} \cdot \mathbb{1}\left\{y_n > 0\right\}\right].$$

Имеем произведение плотностей компонент, значит, элементы вектора независимы и показательно распределены с параметром $\alpha\,(n-k)$, то есть $X_{(k+1)} - X_{(k)} \sim \Pi\left(\alpha\,(n-k)\right)$. Считаем, что $X_{(0)} = 0$.

Домашнее задание

1.15

Задание. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из равномерного на отрезке $[a, b]$ распределения. Вычислите математическое ожидание и дисперсию статистики

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Выясните, имеет ли статистика $\overline{X}$ равномерное распределение; нормальное распределение.

Решение. Все X_i одинаково распределены. Отсюда следует, что все математические ожидания одинаковы

$$M\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Из независимости X_i получаем

$$D\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i.$$

Так как X_i одинаково распределены, то все дисперсии одинаковы

$$D\overline{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{(b-a)^2}{12n}.$$

Чтобы выяснить, распределена ли статистика $\overline{X}$ по нормальному или равномерному распределению, найдём её характеристическую функцию $\varphi_{\overline{X}}(t)$. Учитывая независимость элементов выборки и то, что

$$\varphi_{X_1}(t) = \ldots = \varphi_{X_n}(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)},$$

находим

$$\varphi_{\overline{X}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[\frac{\left(e^{itb} - e^{ita}\right)n}{it(b-a)}\right]^n.$$

Отсюда следует, что $\overline{X}$ не имеет указанных распределений.

1.16

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из некоторого распределения вероятностей, функция распределения которого F является непрерывной и строго возрастающей. Найдите распределение выборки $Y_1, \ldots, Y_n$, где

$$Y_i = F(X_i).$$

Решение. По определению

$$F_{\eta_1,\ldots,\eta_n}(X_1, \ldots, X_n) = P(\eta_1 \le X_1, \ldots, \eta_n \le X_n).$$

Воспользуемся независимостью

$$P(\eta_1 \le X_1, \ldots, \eta_n \le X_n) = P(\eta_1 \le X_1) \cdot \ldots \cdot P(\eta_n \le X_n).$$

Функция распределения i-й компоненты вектора равна

$$F_{\eta_i}(x) = P(F_{\xi_i}(X_i) \le x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим $[0, 1]$.

Поскольку F — непрерывная и строго возрастающая, то существует $F^{-1}(x)$. Обозначим через z точку $F^{-1}(x)$ такую, что $F(z) = x$. Событие $\{\eta = F(\xi) < x\}$ происходит тогда и только тогда, когда происходит событие $\{\xi < z\}$.

Получаем на отрезке $[0, 1]$ равномерное распределение

$$F_\eta(x) = F_\xi(z) = F_\xi\left(F_\xi^{-1}(x)\right) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

1.17

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из дискретного распределения с вероятностями $P(X_1 = m) = p_m$, где

$$\sum_{m=0}^{N} p_m = 1.$$

Найдите распределение k-й порядковой статистики $X_{(k)}$.

Решение. Сделали упорядочивание случайных величин

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(k)} \leq \ldots \leq X_{(n)}.$$

По определению $F_{X_{(k)}}(y) = P\left(X_{(k)} \leq y\right) = P\{$хотя бы k элементов выборки не превышает $y\} =$

$$= \sum_{i=k}^{n} P(A_i),$$

где $A_i = \{$ровно i элементов выборки не превышают $y\}$.

Есть n испытаний, успех — $X_i \leq y$.

Вероятность успеха — это $F(y)$, вероятность неудачи — это $[1 - F(y)]$. Это биномиальное распределение

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i F^i(y) \left[1 - F(y)\right]^{n-i}.$$

Представим $F_{X_i}(y) = F(y)$ через m. Запишем по определению

$$F_{X_1}(y) = P(X_1 \leq y) = \sum_{m=1}^{n} P(X_1 = m) = \sum_{m=1}^{n} p_m.$$

Подставим полученное выражение в функцию распределения

$$F_{X_{(k)}} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i \sum_{m=1}^{n} p_m \left(1 - \sum_{m=1}^{n}\right)^{n-i}.$$

1.18

Задание. Пусть $(3, 0, 4, 3, 6, 0, 3, 1)$ — наблюдаемые значения выборки. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения $F_8(x)$ и её график. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Решение. Вариационный ряд: $(0, 0, 1, 3, 3, 3, 4, 6)$.

Эмпирическая функция распределение (рис. 2)

$$F_8(y) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\mathbb{1}\{x_i \le y\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{3}{8}, & 1 \le x < 3, \\ \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, & 3 \le x < 4, \\ \frac{7}{8}, & 4 \le x < 6, \\ 1, & x \ge 6. \end{cases}$$

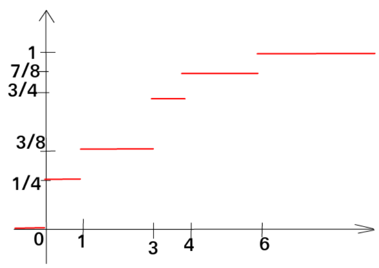

Рис. 2: Эмпирическая функция распределения

Выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{8}(0+0+1+3+3+4+6) = \frac{1}{8}\cdot 20 = \frac{10}{4} = 2.5.$$

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(X_i - 2.5)^2 =$$

$$= \frac{1}{7}\left[2(0-2.5)^2 + (1-2.5)^2 + 3(3-2.5)^2 + (4-2.5)^2 + (6-2.5)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{7}(12.5 + 2.25 + 0.75 + 2.25 + 12.25) = \frac{30}{7} \approx 4.29.$$

1.19

Задание. По выборке объёма n из распределения Бернулли с параметром p постройте эмпирическую функцию распределения $F_n(y)$.

Решение. Случайная величина имеет распределение Бернулли, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями p и $(1-p)$ соответственно. Таким образом: $P(x=1) = p$, $P(x=0) = 1-p$.

Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке

$$x_1, \ldots, x_n,$$

называется функция

$$F_n\left(y\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \le y\right).$$

Пускай есть набор из n чисел (нулей и единиц) — выборка из распределения Бернулли.

Для удобства выстроим числа в порядке их возрастания:

$$0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1.$$

Видим, что слева от нуля эмпирическая функция распределения будет равна нулю.

В точке 0 произойдёт скачок на

$$\frac{n-k}{n},$$

где k — количество единиц, а $(n-k)$ — количество нулей в выборке.

В точке 1 будет скачок на

$$1 - \frac{n-k}{n} = \frac{n-n+k}{n} = \frac{k}{n},$$

а значение самой функции будет равно единице.

$$F_n\left(y\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{n-k}{n} = 1 - \overline{X}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Эмпирическая функция распределения будет выглядеть так, как показано на рис. 3.

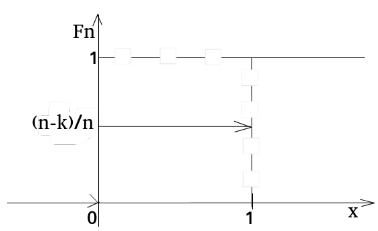

Рис. 3: Эмпирическая функция распределения

1.20

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения F. Докажите, что для произвольных $y \in \mathbb{R}$ и $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ справедливо равенство

$$P\left(F_n\left(y\right) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F^k\left(y\right)\left(1 - F\left(y\right)\right)^{n-k}.$$

Решение. Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке $X_1, \ldots, X_n$, называется функция

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i \le y).$$

Посмотрим, что значит событие в указанной вероятности

$$F_n(y) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i \le y).$$

Сократим константы в знаменателях

$$k = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i \le y).$$

Это означает, что есть ровно k элементов выборки, не превышающих y. Следовательно, это биномиальное распределение с параметром $F(y)$, то есть

$$P\left(F_n(y) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F^k(y) (1 - F(y))^{n-k}.$$

1.21

Задание. Для выборки $X_1, \ldots, X_n$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ найдите плотность, математическое ожидание и дисперсию:

a) максимального члена вариационного ряда $X_{(n)}$;

b) минимального члена вариационного ряда $X_{(1)}$;

c) совместную плотность распределения и ковариацию $X_{(n)}$ и $X_{(1)}$.

Решение.

a) Найдём функцию распределения n-й порядковой статистики $F_{X_{(n)}}(y) =$

$= P\left(X_{(n)} \le y\right) = P$ (n элементов выборки не превышают y)=

$$= C_n^n \left[F_{X_1}(y)\right]^n \cdot \left[1 - F_{X_1}(y)\right]^{n-n} = \left[F_{X_1}(y)\right]^n = \left[P(X_1 \le y)\right]^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n,$$

при этом $y \in [0, \theta]$.

Продифференцируем

$$f_{X_{(n)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(n)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\theta}\right)^n = \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{dy^n}{dy} = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\{y \in [0, \theta]\}.$$

По определению математического ожидания

$$MX_{(n)} = \int\limits_0^\theta y dF^n(y) = \int\limits_0^\theta y d\left(\frac{y}{\theta}\right)^n = \frac{1}{\theta^n}\int\limits_0^\theta y dy^n = \frac{n}{\theta^n}\int\limits_0^\theta y y^{n-1} dy.$$

Сложим степени сомножителей

$$\frac{n}{\theta^n}\int\limits_0^\theta y y^{n-1} dy = \frac{n}{\theta^n}\int\limits_0^\theta y^n dy = \frac{n}{\theta^n}\cdot\left.\frac{y^{n+1}}{n+1}\right|_0^\theta = \frac{\theta^{n+1}n}{\theta^n(n+1)} = \frac{\theta n}{n+1}.$$

Найдём второй момент

$$MX_{(n)}^2 = \int\limits_0^\theta y^2 dF^n(y) = \frac{n}{\theta^n}\int\limits_0^\theta y^2 y^{n-1} dy = \frac{n}{\theta^n}\int\limits_0^\theta y^{n+1} dy.$$

Возьмём интеграл

$$\frac{n}{\theta^n}\int\limits_0^\theta y^{n+1} dy = \left.\frac{ny^{n+2}}{\theta^n(n+2)}\right|_0^\theta = \frac{n\theta^{n+2}}{\theta^n(n+2)} = \frac{n\theta^2}{n+2}.$$

По свойствам дисперсии

$$DX_{(n)} = MX_{(n)}^2 - \left(MX_{(n)}\right)^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}.$$

Приведём к общему знаменателю

$$\frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\theta^2\left(n^2+2n+1\right) - n^2\theta^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} =$$
$$= \frac{n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2 + n\theta^2 - n^3\theta^2 - 2n^2\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2};$$

b) найдём функцию распределения первой порядковой статистики

$$F_{X_{(1)}}(y) = P\left(X_{(1)} \le y\right) = P\left(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le y\right) =$$

$= P$(хотя бы 1 элемент выборки не превышает y)=

$$\sum_{k=1}^n P\left(exactly\, k\, elements\, of\, the\, sample\, does\, not\, exceed\, y\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^n C_n^k F^k(y)\left[1-F(y)\right]^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^n C_n^k F^k(y)\left[1-F(y)\right]^{n-k} - C_n^0 F^0(y)\left[1-F(y)\right]^{n-0}.$$

Применяем формулу для бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k(y)\left[1-F(y)\right]^{n-k} - C_n^0 F^0(y)\left[1-F(y)\right]^{n-0} =$$
$$= \left[F(y)+1-F(y)\right]^n - \left[1-F(y)\right]^n = 1-\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Продифференцируем

$$f_{X_{(1)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(1)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{(\theta-y)^n}{\theta^n}\right) = -\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\theta-y)^n.$$

Берём производную сложной функции

$$-\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\theta-y)^n - \frac{1}{\theta^n}\cdot n(\theta-y)^{n-1}(-1) = \frac{n(\theta-y)^{n-1}}{\theta^n},\ y\in[0,\theta].$$

Найдём математическое ожидание по определению

$$MX_{(1)} = \int_0^\theta y\,dF^n(y) = \int_0^\theta y\,d\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Сделаем замену

$$1-\frac{y}{\theta} = z,$$

откуда $y=\theta(1-z)$, при этом интегрирование происходит в пределах от одного до нуля

$$\int_0^\theta y\,d\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^n = \int_1^0 \theta(1-z)\,dz^n = \theta n\int_1^0 (z-1)\,z^{n-1}dz.$$

Разбиваем на 2 интеграла

$$\theta n\int_1^0 (z-1)\,z^{n-1}dz = -\theta n\int_0^1 z^n dz + \theta n\int_0^1 z^{n-1}dz = -\theta n\cdot\left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 + \theta n\cdot\left.\frac{z^n}{n}\right|_0^1.$$

Подставляем пределы интегрирования

$$-\theta n\cdot\left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 + \theta n\cdot\left.\frac{z^n}{n}\right|_0^1 = -\theta n\cdot\frac{1}{n+1} + \theta n\cdot\frac{1}{n} = -\theta n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right).$$

Приводим к общему знаменателю

$$-\theta n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) = -\theta n\cdot\frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{\theta n}{n(n+1)} = \frac{\theta}{(n+1)}.$$

Найдём второй момент

$$MX_{(1)}^2 = \int\limits_0^\theta y^2 d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n.$$

Применяем такую же замену, как при поиске первого момента

$$\int\limits_0^\theta y^2 d\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n = \int_1^0 \theta^2 (1-z)^2 dz^n = \int_0^1 \theta^2 n (1-z)^2 z^{n-1} dz.$$

Выносим константу за знак интеграла и возводим скобку в квадрат

$$\int_0^1 \theta^2 n (1-z)^2 z^{n-1} dz = \theta^2 n \int\limits_0^1 \left(1 - 2z + z^2\right) z^{n-1} dz =$$

$$= \theta^2 n \int\limits_0^1 z^{n-1} dz - 2\theta^2 n \int\limits_0^1 z^n dz + \theta^2 n \int\limits_0^1 z^{n+1} dz =$$

$$= \theta^2 n \cdot \left.\frac{z^n}{n}\right|_0^1 - 2\theta^2 n \cdot \left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 + \theta^2 n \cdot \left.\frac{z^{n+2}}{n+2}\right|_0^1 = \theta^2 - \frac{2\theta^2 n}{n+1} + \frac{\theta^2 n}{n+2} =$$

$$= \theta^2 \left(1 - \frac{2n}{n+1} + \frac{n}{n+2}\right) =$$

$$= \theta^2 \cdot \frac{(n+1)(n+2) - 2n(n+2) + n(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{\theta^2 \left(n^2 + 3n + 2 - 2n^2 - 4n + n^2 + n\right)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

По свойствам дисперсии

$$DX_{(1)} = MX_{(1)}^2 - \left[MX_{(1)}\right]^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{2\theta^2 (n+1) - \theta^2 (n+2)}{(n+1)^2 (n+2)} =$$

$$= \frac{2\theta^2 n + 2\theta^2 - \theta^2 n - 2\theta^2}{(n+1)^2 (n+2)} = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2 (n+2)};$$

c) найдём функцию распределения вектора по определению

$$F_{\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)}(y_1, y_n) = P\left(X_{(1)} \le y_1, X_{(n)} \le y_n\right).$$

Воспользовавшись формулой $P(A\cap B)=P(B)-P\left(\overline{A}\cap B\right)$, получим

$$P\left(X_{(1)}\le y_1, X_{(n)}\le y_n\right)=P\left(X_{(n)}\le y_n\right)-P\left(X_{(1)}>y_1,\, X_{(n)}\le y_n\right).$$

Если максимум меньше какого-то значения, то все элементы меньше него

$$\begin{aligned}P\left(X_{(1)}>y_1,\, X_{(n)}\le y_n\right)=\\ =P\left(X_1\le y_n,\dots,X_n\le y_n\right)-\\ =P\left(X_1\in(y_1,y_n],\, X_2\in(y_1,y_n],\dots,X_n\in(y_1,y_n]\right)=\\ =\left[F(y_n)\right]^n-\left[F(y_n)-F(y_1)\right]^n\end{aligned}$$

при $y_1<y_n$.

Продифференцируем

$$f_{\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)}(y_1,y_n)=\begin{cases}0, \qquad y_1\ge y_n,\\ n(n-1)\cdot\left[F(y_n)-F(y_1)\right]^{n-2}\times\\ \times p_{X_1}(y_1)\,p_{X_n}(y_n)=\\ =n(n-1)\cdot\left[\frac{y_n}{\theta}-\frac{y_1}{\theta}\right]^{n-2}\cdot\frac{1}{\theta^2}=\\ =n(n-1)\cdot\frac{(y_n-y_1)^n}{\theta^{n-2}}\cdot\frac{1}{\theta^2}=\frac{n(n-1)(y_n-y_1)^{n-1}}{\theta^n}.\end{cases}$$

Найдём математическое ожидание вектора

$$M\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)=\frac{n(n-1)}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^\theta\int\limits_{y_n}^\theta y_1y_n\left(y_n-y_1\right)^{n-2}dy_1dy_n.$$

Заменим разность величин величиной x. Якобиан преобразования равен

$$\frac{\partial(x,y_n)}{\partial(x,y_1)}=\left|\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial y_1} & \frac{\partial y_n}{\partial y_1}\\ \frac{\partial x}{\partial y_n} & \frac{\partial y_1}{\partial y_1}\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right|=1.$$

Получаем

$$\frac{n(n-1)}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}\int\limits_{y_n}^{\theta} y_1 y_n (y_n-y_1)^{n-2}\,dy_1 dy_n =$$

$$=\frac{n(n-1)}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}\int\limits_0^{\theta-y_n}(x+y_n)\,y_n x^{n-2}dx dy_n =$$

$$=\frac{n(n-1)}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta} y_n dy_n\cdot\int\limits_0^{\theta-y_n}\left(x^{n-1}+y_n x^{n-2}\right)dx =$$

$$=\frac{n(n-1)}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta} y_n dy_n\cdot\left(\frac{x^n}{n}+y_n\cdot\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)\Bigg|_0^{\theta-y_n} =$$

$$=\frac{1}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}\Big[(n-1)(\theta-y_n)+y_n n(\theta-y_n)^{n-1}\Big]\cdot y_n dy_n =$$

$$=\frac{1}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}(\theta-y_n)^{n-1}\cdot\left[(n-1)(\theta-y_n)+y_n n\right]\cdot y_n dy_n =$$

$$=\frac{1}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}(\theta-y_n)^{n-1}\left[n\theta-(\theta-y_n)\right]y_n dy_n.$$

Заменяем первую скобку в интеграле на t. Получаем

$$\frac{1}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}(\theta-y_n)^{n-1}\left[n\theta-(\theta-y_n)\right]y_n dy_n=\frac{1}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}t^{n-1}(n\theta-t)(\theta-t)\,dt.$$

Перемножаем скобки

$$\frac{1}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}t^{n-1}(n\theta-t)(\theta-t)\,dt=\frac{1}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}t^{n-1}\left(n\theta^2-(n+1)\theta t+t^2\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\theta^n}\cdot\int\limits_0^{\theta}\left(n\theta^2 t^{n-1}-(n+1)\theta t^n+t^{n+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\theta^n}\cdot\left[\theta^2 t^n-\theta t^{n+1}+\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]\Bigg|_0^{\theta}=\frac{1}{\theta^n}\cdot\left[\theta^{n+2}-\theta^{n+2}+\frac{\theta^{n+2}}{n+2}\right]=\frac{\theta^2}{n+2}.$$

По определению ковариации

$$cov\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)=M\left(X_{(1)}X_{(n)}\right)-MX_{(1)}MX_{(n)}=\frac{\theta^2}{n+2}-\frac{\theta}{n+1}\cdot\frac{\theta n}{n+1}.$$

Выносим общий множитель за скобки

$$\frac{\theta^2}{n+2} - \frac{\theta}{n+1} \cdot \frac{\theta n}{n+1} = \theta^2 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right).$$

Приводим к общему знаменателю дроби в скобках

$$\theta^2 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \theta^2 \cdot \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

1.22

Задание. Пусть задана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Докажите, что

$$MX_{(k)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{n-k+1} + \ldots + \frac{1}{n} \right),$$

не находя распределения порядковой статистики $X_{(k)}$.

Решение. Преобразуем левую часть того, что нужно доказать

$$MX_{(k)} = MX_{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} M\left(X_{(i+1)} - X_{(i)} \right).$$

Элементы выборки имеют плотность распределения

$$p(y) = \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Интегрируя плотность, получим функцию распределения

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} p(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{y} \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\}\,dx = \int\limits_{0}^{y} \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x}\Big|_0^y.$$

Подставляем пределы интегрирования

$$-e^{-\alpha x}\Big|_0^y = 1 - e^{-\alpha y},\ y \geq 0.$$

Находим функцию распределения минимальной порядковой статистики

$$F_{X_{(1)}}(y) = P\left(X_{(1)} \leq y \right) = 1 - P\left(X_{(1)} > y \right).$$

Если минимальный элемент выборки больше какого-то значения, то все элементы выборки больше него

$$1 - P\left(X_{(1)} > y \right) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \ldots, X_n > y).$$

Из независимости случайных величин следует, что

$$1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \ldots, X_n > y) = 1 - P(X_1 > y) \cdot P(X_2 > y) \cdot \ldots \cdot P(X_n > y).$$

Переходим к противоположным событиям и учитываем то, что случайные величины одинаково распределены

$$1 - P(X_1 > y) \cdot P(X_2 > y) \cdot \ldots \cdot P(X_n > y) = 1 - [1 - F(y)]^n.$$

Находим плотность минимальной порядковой статистики

$$f_{X_{(1)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(1)}}(y)}{\partial y} = \frac{\partial \{1 - [1 - F(y)]^n\}}{\partial y} = -n[1 - F(y)]^{n-1} \cdot (-1) f(y).$$

Упрощаем и учитываем, что $f(y)$ — это плотность распределения элементов выборки

$$-n[1 - F(y)]^{n-1} \cdot (-1) f(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} p(y).$$

Подставляем функцию и плотность распределения

$$n[1 - F(y)]^{n-1} p(y) = n\left[1 - \left(1 - e^{-\alpha y}\right)\right]^n \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Упрощаем выражение в скобках

$$n\left[1 - \left(1 - e^{-\alpha y}\right)\right]^n \alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\} = n\alpha e^{-\alpha(n-1)y} e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Суммируем показатели экспонент

$$n\alpha e^{-\alpha(n-1)y} e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\} = n\alpha e^{-\alpha n y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq 0\}.$$

Отсюда следует, что $X_{(1)} \sim Exp(n\alpha)$.

Из задачи 1.11 б) $X_{(i+1)} - X_{(i)} \sim Exp(\alpha(n-i))$.

Тогда такая разность имеет математическое ожидание

$$M\left(X_{(i+1)} - X_{(i)}\right) = \frac{1}{\alpha(n-i)}.$$

Подставялем в полученное в начале выражение

$$MX_{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} M\left(X_{(i+1)} - X_{(i)}\right) = \frac{1}{n\alpha} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha(n-i)}.$$

Записываем сумму в явном виде

$$\frac{1}{n\alpha} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha(n-i)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{n-k+1}\right).$$

1.23

Задание. Для выборки $X_1, \ldots, X_n$ из равномерного распрделения на отрзке $[0, \theta]$ найдите:

а) ковариацию $X_{(n)}$ и $X_{(1)}$;

b) совместную плотность распределения $X_{(k)}$ и $X_{(j)}$, $1 \le k \le j \le n$.

Решение.

a) Данный пункт решён в задаче 1.21 c);

b) по определению функции распределения

$$F_{\left(X_{(k)}, X_{(j)}\right)}(y, z) = P\left(X_{(k)} \le y, X_{(j)} \le z\right).$$

Воспользовавшись формулой $P(A \cap B) = P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right)$, получим $P\left(X_{(k)} \le y, X_{(j)} \le z\right) = P\left(X_{(j)} \le z\right) - P\left(X_{(k)} > y, X_{(j)} \le z\right)$. Аналогично задаче 1.10 разбиваем на 2 решения согласно коэффициентам

$$P\left(X_{(j)} \le z\right) - P\left(X_{(k)} > y, X_{(j)} \le z\right) =$$

$$= \begin{cases} P\left(X_{(j)} \le z\right), & y \ge z, \\ P\left(X_{(j)} \le z\right) - P\left(X_{(k)} > y, X_{(j)} \le z\right), & y < z. \end{cases}$$

Найдём первую вероятность $P\left(X_{(j)} \le z\right) = P($хотя бы j элементов выборки не превышает $z) =$

$$= \sum_{i=j}^{n} C_n^i F^i(z) \left[1 - F(z)\right]^{n-i} = \sum_{i=j}^{n} C_n^i \left(\frac{z}{\theta}\right)^i \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^{n-i}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\sum_{i=j}^{n} C_n^i \left(\frac{z}{\theta}\right)^i \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^{n-i} = \sum_{i=j}^{n} C_n^i \frac{z^i}{\theta^i} \cdot \frac{(\theta - z)^{n-i}}{\theta^{n-i}} = \sum_{i=j}^{n} C_n^i \frac{z^i (\theta - z)^{n-i}}{\theta^n}.$$

Найдём вторую вероятность $P\left(X_{(j)} \le z, X_{(k)} > y\right) = P($ хотя бы

$$(j - k + 1)$$

элементов выборки находится в интервале $(y, z]) =$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} C_n^i \left[F(z) - F(y)\right]^i \cdot \left\{1 - \left[F(z) - F(y)\right]\right\}^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} C_n^i \cdot \left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)^i \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)\right]^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} C_n^k \cdot \frac{(z-y)^i}{\theta^i} \cdot \left(1 - \frac{z-y}{\theta}\right)^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} C_n^i \cdot \frac{(z-y)^i}{\theta^i} \cdot \frac{(\theta - z + y)^{n-i}}{\theta^{n-i}} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} \frac{C_n^i}{\theta^n} (z-y)^i (\theta - z + y)^{n-i}.$$

Продифференцируем. В первом случае будет 0. Найдём производную второй вероятности

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\{\sum_{i=j-k+1}^{n} \frac{C_n^i}{\theta^n} \times$$

$$\times \left[i\left(z-y\right)^{i-1}\left(\theta-z+y\right)^{n-i}-\left(z-y\right)\left(n-i\right)\left(\theta-z+y\right)^{n-i-1}\right]\} =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} \frac{C_n^i}{\theta^n} \times$$

$$\times[-i\left(i-1\right)\left(z-y\right)^{i-2}\left(\theta-z+y\right)^{n-i} +$$

$$+2i\left(z-y\right)^{i-1}\left(n-i\right)\cdot\left(\theta-z+y\right)^{n-i-1} -$$

$$-\left(z-y\right)^{i}\left(n-i\right)\left(n-i-1\right)\cdot\left(\theta-z+y\right)^{n-i-2}] =$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^{n} \frac{C_n^i\left(z-y\right)^{i-2}\cdot\left(\theta-z+y\right)^{n-i-2}}{\theta^n} \times$$

$$\times[2i\left(z-y\right)\left(n-i\right)\left(\theta-z+y\right)-i\left(i-1\right)\left(\theta-z+y\right)-$$

$$-\left(n-i\right)\left(n-i-1\right)\left(z-y\right)^2].$$

Тогда во втором случае плотность равна полученному выражению.

Занятие 2. Свойства оценок

Контрольные вопросы и задания

Что называют оценкой неизвестного параметра?

Статистику, значение которой заменяет неизвестный параметр, называют оценкой этого параметра.

Приведите определение оценки: несмещённой, ассимптотически несмещённой, состоятельной, сильно состоятельной, оптимальной.

Оценка $\hat{\theta}$ несмещённая, если $\forall \theta \in \Theta : \; M_\theta \hat{\theta} = \theta$.

Асимптотически несмещенная оценка — такая оценка, математическое ожидание которой совпадает с оцениваемым параметром при $n \to \infty$.

Оценка $\hat{\theta}$ называется состоятельной, если стремится к истинному значению θ по вероятности $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

Оценка $\hat{\theta}$ называется сильно состоятельной, если стремится к истинному значению θ почти наверное $\hat{\theta} \xrightarrow{a.s.} \theta$, $n \to \infty$.

Несмещённая оценка $\hat{\theta} \in K$ называется оптимальной в классе квадратично интегрируемых оценок K, если для всякой другой несмещённой оценки $\tilde{\theta} \in \Theta \, \forall \theta \in \Theta : \; D_\theta \hat{\theta} \leq D_\theta \tilde{\theta}$ или же $\forall \theta \in \Theta$, $M_\theta \left(\hat{\theta} - \theta \right)^{\leq} M_\theta \left(\tilde{\theta} - \theta \right)^2$.

Что называется среднеквадратическим отклонением оценки?

$M_\theta \left(\hat{\theta} - \theta \right)$ — среднеквадратическое оклонение.

Сформулируйте утверждение про поведение выборочных моментов.

ыборочный начальный момент M_k k-го порядка стремится к начальному моменту ν_k случайной величины X, то есть

$$\lim_{n \to \infty} P \left(|M_k - \nu_k| \geq \varepsilon \right) = 0,$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, если моменты ν_{2k} и ν_k случайной величины X существуют и конечны.

Какая оценка является несмещённой и состоятельной для математического ожидания распределения выборки?

В качестве оценки для математического ожидания естественно предложить среднееарифметическое наблюденных значений

$$\tilde{m} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Какая статистика является несмещённой оценкой для дисперсии распределения выборки?

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$

— несмещённая оценка для $\sigma^2 = Dx_1$.

Аудиторные задачи

2.4

Задание. Для выборки равномерного распределения на отрезке $[\theta, 1]$ проверьте состоятельность и несмещённость оценки $X_{(1)}$ параметра θ.

Решение. θ — минимальное наблюдение. Проверяем, выполняется ли $X_{(1)} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

По определению сходимости по вероятности

$$\forall \varepsilon > 0\, P\left(\left|X_{(1)} - \theta\right| > \varepsilon\right) \to 0,\, n \to \infty.$$

Раскроем модуль

$$P\left\{X_{(1)} > \varepsilon + \theta\right\} = P\left(X_1 > \varepsilon + \theta, \ldots, X_n > \varepsilon + \theta\right) = \left[P\left(X_1 > \varepsilon + \theta\right)\right]^n.$$

Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$\left[P\left(X_1 > \varepsilon + \theta\right)\right]^n = \left(\frac{1 - \theta - \varepsilon}{1 - \theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 - \theta}\right)^n \to 0,\, n \to \infty.$$

Число в скобках строго меньше единицы, так как $0 \leq \theta \leq 1$.

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

Проверяем несмещённость оценки. Проверяем, выполняется ли

$$MX_{(1)} = \theta.$$

Нужно найти плотность

$$MX_{(1)} = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X_{(1)}}(y)\, y dy.$$

Начинаем с функции распределения $F_{X_{(1)}}(y) = P\left(X_{(1)} \le y\right)$. Переходим к противоположному событию

$$P\left(X_{(1)} \le y\right) = 1 - P\left(X_{(1)} > y\right) = 1 - \left[P\left(X_1 > y\right)\right]^n.$$

Переходим к противоположному событию $1-\left[P\left(X_1 > y\right)\right]^n = 1-\left[1 - F\left(y\right)\right]^n$.

Продифференцируем

$$\frac{dF_{X_{(1)}}(y)}{dy} = n\left[1 - F\left(y\right)\right]^{n-1} f\left(y\right).$$

На отрезке $[\theta, 1]$ имеет равномерное распределение

$$n\left[1 - F\left(y\right)\right]^{n-1} f\left(y\right) = n\left[1 - \frac{y-\theta}{1-\theta}\right]^{n-1} \cdot \mathbb{1}\left\{y \in [\theta, 1]\right\} \cdot \frac{1}{1-\theta}.$$

Приведём к общему знаменателю

$$n\left[1 - \frac{y-\theta}{1-\theta}\right]^{n-1} \cdot \mathbb{1}\left\{y \in [\theta, 1]\right\} \cdot \frac{1}{1-\theta} = \frac{n}{\left(1-\theta\right)^2} \cdot \left(1-y\right)^{n-1} \cdot \mathbb{1}\left\{y \in [\theta, 1]\right\}.$$

Нашли плотность $X_{(1)}$ и теперь можем вычислить интеграл

$$MX_{(1)} = \int\limits_{\theta}^{1} y \cdot \frac{n}{\left(1-\theta\right)^2} \cdot \left(1-y\right)^{n-1} dy.$$

Замена:

$$1 - y = z,\ dy = -dz,\ y = 1 - z,\ y = 1 \Rightarrow \Longrightarrow\ z = 0,\ y = \theta\ \Longrightarrow\ z = 1 - \theta.$$

Подставляя замену, получаем

$$\int\limits_{\theta}^{1} y \cdot \frac{n}{\left(1-\theta\right)^2} \cdot \left(1-y\right)^{n-1} dy = n \cdot \frac{1}{\left(1-\theta\right)^n} \int\limits_{0}^{1-\theta} \left(1-z\right) z^{n-1} dz.$$

Вычислим интеграл

$$n \cdot \frac{1}{\left(1-\theta\right)^n} \int\limits_{0}^{1-\theta} \left(1-z\right) z^{n-1} dz \frac{n}{\left(1-\theta\right)^n}\left[\frac{\left(1-\theta\right)^n}{n} - \frac{\left(1-\theta\right)^{n+1}}{n+1}\right] =$$

$$= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1-\theta}{n+1}\right) = 1 - \frac{n}{n+1}\left(1-\theta\right).$$

Раскроем скобки

$$1 - \frac{n}{n+1}\left(1-\theta\right) = 1 - \frac{n}{n+1} - \theta \cdot \frac{n}{n+1} \ne \theta.$$

Отсюда следует, что оценка смещённая, но ассимптотически несмещённая, потому что

$$1 - \frac{n}{n+1} \to 0,\ n \to \infty$$

и

$$\frac{n}{n+1} \to 1,\ n \to \infty.$$

2.5

Задание. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Выясните, является ли статистика

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 :$$

a) несмещённой оценкой для λ^2;

b) состоятельной оценкой для λ^2.

Решение.

a) Нужно проверить, выполняется ли

$$M\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \lambda^2.$$

Преобразуем левую часть

$$M\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = MX_1^2 = DX_1 + (MX_1)^2 = \lambda + \lambda^2 \neq \lambda^2.$$

Значит, оценка смещённая;

b) проверяем, имеет ли место

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} \lambda^2,\ n \to \infty.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to MX_1^2 = \lambda^2 + \lambda \neq \lambda^2,$$

значит, оценка не состоятельная.

2.6

Задание. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha > 0$. Докажите, что статистика $1/\overline{X}$ является состоятельной оценкой для α.

Решение. Нужно показать, что

$$\frac{1}{\overline{X}} \xrightarrow{P} \alpha,\ n \to \infty.$$

Выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

По закону больших чисел

$$\overline{X} \xrightarrow{P} MX_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\overline{X}} \xrightarrow{P} \frac{1}{MX_1} = \alpha.$$

2.7

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения $N\left(a, \sigma^2\right)$. Докажите, что статистика

$$S_n = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2$$

является несмещённой и состоятельной оценкой для σ^1.

Решение. Нужно проверить условие $MS_n = \sigma^2$.

Разность двух соседних элементов выборки имеет распределение

$$X_{i+1} - X_i \sim N\left(0, 2\sigma^2\right).$$

Найдём математическое ожидание статистики

$$MS_n = M\frac{1}{2(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2 = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_{i+1} - X_i\right)^2.$$

Случайные величины одинаково распределены

$$\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_{i+1} - X_i\right)^2 = \frac{n}{2(n-1)} \cdot M\left(X_2 - X_1\right)^2.$$

В данном случае второй момент равен дисперсии

$$\frac{n}{2(n-1)} \cdot M\left(X_2 - X_1\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sigma^2 = \sigma^2.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Проверим состоятельность, то есть $S_n \xrightarrow{P} \sigma^2$, $n \to \infty$.

Разобъём S_n на две суммы

$$S_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[\sum_{even\, i}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2 + \sum_{odd\, i}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2\right].$$

В каждой из сумм слагаемые независимы

$$\frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[\sum_{even\, i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \sum_{odd\, i} (X_{i+1} - X_i)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[\frac{m}{m} \sum_{even\, i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \frac{n-1-m}{n-1-m} \sum_{odd\, i} (X_{i+1} - X_i)^2\right].$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[\frac{m}{m} \sum_{even\, i} (X_{i+1} - X_i)^2 + \frac{n-1-m}{n-1-m} \sum_{odd\, i} (X_{i+1} - X_i)^2\right] \xrightarrow{P}$$

$$\xrightarrow{P} \frac{1}{2} \cdot M(X_2 - X_1)^2 = \frac{1}{2} \cdot D(X_2 - X_1) = \sigma^2,\ n \to \infty.$$

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

2.8

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распредения с параметром $\alpha > 1$. Для какого параметра $\theta = \theta(\alpha)$ статистика

$$\hat{\theta_n} = e^{\overline{X}}$$

является состоятельной оценкой? Является ли $\hat{\theta_n}$ сильно состоятельной оценкой того же параметра? Является ли $\hat{\theta_n}$ несмещённой оценкой того же параметра? Ассимптотически немещённой?

Решение.

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} MX_1,\ n \to \infty.$$

Случайные величины в выборке имеют показательное распределение

$$MX_1 = \frac{1}{\alpha},$$

значит,

$$\overline{X} \xrightarrow{P} \frac{1}{\alpha},\ n \to \infty.$$

Применяем непрерывную функцию e^x. Получаем $e^{\overline{X}} \xrightarrow{P} e^{\frac{1}{\alpha}},\ n \to \infty$.

Проверяем, является ли оценка $e^{\overline{X}}$ несмещённой к параметру $e^{\frac{1}{\alpha}}$, то есть выполняется ли $Me^{\overline{X}} = e^{\frac{1}{\alpha}}$.

Вычисляем $Me^{\overline{X}} = Me^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$. Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому $Me^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n$. По определению характеристической функции $\varphi_{X_1} = Me^{itX_1}$ получаем

$$\left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n = \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n.$$

Характеристическая функция показательного распределения

$$\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1} = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

Подставляем

$$\left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n = \left(\frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{n}}\right)^n.$$

Прибавим и отнимем в числителе $1/n$ и поделим числитель на знаменатель

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{\alpha + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\alpha - \frac{1}{n}}\right)^n = \left[1 + \frac{1}{n\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)}\right]^n = e^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Значит, оценка смещённая, но несмещённая ассимптотически.

2.9

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из геометрического распределения с параметром p. Найдите состоятельные оценки для параметров

$$p,\ p^2,\ lnp,\ p\sin(1-p),\ pe^{\frac{q^2}{2}}.$$

Решение. Всё это — непрерывные функции от p. Применение непрерывной функции не нарушает сходимости по вероятности.

Если параметр каким-то образом связан со средним, но нужно пробовать выборочные моменты.

Сформируем выборочное среднее и применим закон больших чисел

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} MX_1.$$

Для геометрического распределения

$$MX_1 = \frac{1-p}{p}.$$

Прибавим единицу слева и справа

$$1 + \overline{X} \xrightarrow{P} 1 + \frac{1-p}{p} = 1 + \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{p}.$$

Функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

— это непрерывная функция, значит, можем применить эту функцию слева и справа, и сходимость сохранится

$$\frac{1}{1+\overline{\overline{X}}} \xrightarrow{P} p.$$

Состоятельной оценкой для параметра p будет

$$\hat{p} = \frac{1}{1+\overline{\overline{X}}}.$$

Состоятельной оценкой для p^2 будет $\hat{p^2} = \hat{p}^2 \xrightarrow{P} p^2$, потому что $f(x) = x^2$ — это непрерывная функция.

Логарифм — это непрерывная функция

$$\hat{lnp} = ln\hat{p} = ln\frac{1}{1+\overline{\overline{X}}} \xrightarrow{P} lnp,$$

поскольку

$$\frac{1}{1+\overline{\overline{X}}} \xrightarrow{P} p.$$

2.12

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределния Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Докажите, что не существует несмещённой оценки для параметра $1/\lambda$.

Решение. Будем действовать от противного.

Допустим, что такая оценка существует, то есть существует $\hat{\theta}$ такое, что

$$M\hat{\theta} = \frac{1}{\lambda}.$$

Это условие несмещённости.

$\hat{\theta}$ — функция от выборки, то есть $\hat{\theta} = f(X_1, \ldots, X_n)$.

Распределение Пуассона дискретное

$$M\hat{\theta} = Mf(X_1, \ldots, X_n) =$$
$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \ldots, X_n) P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n).$$

Воспользуемся независимостью

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \ldots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n) =$$
$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f(X_1, \ldots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = k_n).$$

Подставим в явном виде вероятности

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f\left(X_1, \ldots, X_n\right) \cdot P\left(X_1=k_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(X_n=k_n\right)=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} f\left(X_1, \ldots, X_n\right) \cdot \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} k_i!} \cdot e^{-\lambda n}.$$

Обозначим

$$\sum k_i=k$$

и получим

$$e^{-\lambda n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cdot \sum_{k_i:\, k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \frac{f\left(k_1, \ldots, k_n\right)}{k_1!\ldots k_n!}=e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_k,$$

где c_k — число.

Допустим, что эта величина равна $1/\lambda$.

Посмотрим, возможно ли это

$$e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_k=\frac{1}{\lambda}.$$

Запишем так, чтобы с одной стороны было $e^{\lambda n}$, а всё остальное перенесём

$$e^{\lambda n}=\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} c_k.$$

Для экспоненты существует одно развитие в ряд. Из этого следует, что последнее равенство невозможно (развитие в ряд начинается со степени λ, равной единице).

Домашнее задание

2.17

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$. Проверьте несмещённость, состоятельность и найдите среднеквадратическое отклонение следующих оценок параметра θ:

a) $X_{(1)}+X_{(n)}$;

b) $(n+1)\, X_{(1)}$.

Решение. θ — максимальное наблюдение.

а) Проверим, выполняется ли $X_{(1)} + X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

По определению сходимости по вероятности $\forall \varepsilon > 0 \, P\left(X_{(1)} > \varepsilon\right) =$
$= P\left(X_1 > \varepsilon, X_2 > \varepsilon, \ldots, X_n > \varepsilon\right) = \left[P\left(X_1 > \varepsilon\right)\right]^n$. Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$\left[P\left(X_1 > \varepsilon\right)\right]^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \to 0, \, n \to \infty.$$

Значит, $X_{(1)} \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$.

Остаётся проверить, выполняется ли $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

По определению сходимости по вероятности

$$P\left\{\left|X_{(n)} - \theta\right| > \varepsilon\right\} \to 0, \, n \to \infty.$$

Раскроем модуль

$$P\left\{\theta - X_{(n)} > \varepsilon\right\} = P\left\{X_{(n)} - \theta < -\varepsilon\right\} = P\left\{X_{(n)} < \theta - \varepsilon\right\} =$$
$$= P\left(X_1 < \theta - \varepsilon, X_2 < \theta - \varepsilon, \ldots, X_n < \theta - \varepsilon\right) = \left[P\left(X_1 < \theta - \varepsilon\right)\right]^n.$$

Подставим значение вероятности из геометрического эксперимента

$$\left[P\left(X_1 < \theta - \varepsilon\right)\right]^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \to 0, \, n \to \infty.$$

Число в скобках строго меньше единицы, так как $0 \leq \theta \leq 1$, $\varepsilon > 0$.

Отсюда следует, что оценка состоятельная.

Проверим несмещённость оценки. Проверим, выполняется ли

$$M\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right) = \theta.$$

Из задачи 1.21

$$MX_{(n)} = \frac{\theta n}{n+1}$$

и

$$MX_{(1)} = \frac{\theta}{n+1}.$$

Из свойства линейности математического ожидания

$$M\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right) = MX_{(1)} + MX_{(n)} = \frac{\theta n}{n+1} + \frac{\theta}{n+1} = \frac{\theta\,(n+1)}{n+1} = \theta.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Формула среднеквадратического отклонения имеет вид $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Найдём дисперсию оценки

$$D\left(X_{(1)}+X_{(n)}\right)=M\left(X_{(1)}+X_{(n)}\right)^2-\left[M\left(X_{(1)}+X_{(n)}\right)\right]^2=$$
$$=M\left(X_{(1)}^2+X_{(n)}^2+2X_{(1)}X_{(n)}\right)-\left(MX_{(1)}+MX_{(n)}\right)^2=$$
$$=MX_{(1)}^2+MX_{(n)}^2+2M\left(X_{(1)}X_{(n)}\right)-\left(MX_{(1)}\right)^2-2MX_{(1)}MX_{(n)}-$$
$$-\left(MX_{(n)}\right)^2=DX_{(1)}+DX_{(n)}+2cov\left(X_{(1)},X_{(n)}\right).$$

Возьмём необходимые значения из задачи 1.21, а именно

$$DX_{(1)}=\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}=DX_{(n)},\ cov\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)=\frac{\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Подставляя в найденной выражение, получаем

$$DX_{(1)}+DX_{(n)}+2cov\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)=$$
$$=\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}+\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}+\frac{2\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}=$$
$$=\frac{2\theta^2 n+2\theta}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{2\theta^2(n+1)}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Извлекая корень, получаем

$$\sigma=\sqrt{\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}}=\theta\sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}};$$

b) проверим, выполняется ли $(n+1)X_{(1)}\xrightarrow{P}\theta$, $n\to\infty$.

По определению сходимости по вероятности

$$\forall\varepsilon>0\, P\left(\left|(n+1)X_{(1)}-\theta\right|>\varepsilon\right)\to 0,\ n\to\infty.$$

Перейдём к противоположному событию

$$P\left(\left|(n+1)X_{(1)}-\theta\right|>\varepsilon\right)=1-P\left\{\left|(n+1)X_{(1)}-\theta\right|\le\varepsilon\right\}.$$

Раскроем модуль

$$1-P\left\{\left|(n+1)X_{(1)}-\theta\right|\le\varepsilon\right\}=$$
$$=1-P\left\{-\varepsilon\le(n+1)X_{(1)}-\theta\le\varepsilon\right\}=$$
$$=1-P\left\{\frac{-\varepsilon+\theta}{n+1}\le X_{(1)}\le\frac{\varepsilon+\theta}{n+1}\right\}=$$
$$=1+P\left\{X_{(1)}\le\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\right\}-P\left\{X_{(1)}<\frac{\varepsilon+\theta}{n+1}\right\}=$$
$$=1+1-P\left(X_1>\frac{\theta-\varepsilon}{n+1},\dots,X_n>\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\right)-1+P\left(X_{(1)}>\frac{\varepsilon+\theta}{n+1}\right)=$$
$$=1-\left[P\left(X_1>\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\right)\right]^n+\left[P\left(X_1>\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)\right]^n.$$

Подставим значения вероятностей из геометрического эксперимента

$$1-\left[P\left(X_1>\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\right)\right]^n+\left[P\left(X_1>\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)\right]^n=$$

$$=1-\left(\frac{\theta-\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}}{\theta}\right)^2+\left(\frac{\theta-\frac{\varepsilon+\theta}{n+1}}{\theta}\right)^n=$$

$$=1-\left(1-\frac{\theta-\varepsilon}{(n+1)\,\theta}\right)^n+\left(1-\frac{\varepsilon+\theta}{(n+1)\,\theta}\right)^n\not\to 0,\ n\to\infty.$$

Отсюда следует, что оценка несостоятельная.

Проверим несмещённость оценки. Проверим, выполняется ли

$$M\,(n+1)\,X_{(1)}=\theta.$$

Выносим константу из-под знака математического ожидания

$$(n+1)\,MX_{(1)}=(n+1)\cdot\frac{\theta}{n+1}=\theta.$$

Отсюда следует, что оценка несмещённая.

Найдём дисперсию оценки

$$D\,(n+1)\,X_{(1)}=(n+1)^2\,DX_{(1)}=(n+1)^2\cdot\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2\,(n+2)}=\frac{\theta^2 n}{n+2},$$

откуда среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma=\sqrt{D\,(n+1)\,X_{(1)}}=\sqrt{\frac{\theta^2 n}{n+2}}=\theta\sqrt{\frac{n}{n+2}}.$$

2.18

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $1/\sqrt{\alpha}$. Выясните, является ли статистика $\hat{\alpha_n}=\left(\overline{X}\right)^2$ несмещённой оценкой параметра α. Является ли эта оценка состоятельной?

Решение. Нужно проверить, выполняется ли $M\left(\overline{X}\right)^2=\alpha$.

Запишем, что означает выборочное среднее

$$M\left(\overline{X}\right)^2=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=M\left(\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right)=\frac{1}{n^2}\cdot M\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2.$$

Квадрат суммы запишем в виде двух сумм. Получим

$$\frac{1}{n^2}\cdot M\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{k<i}^{n}X_kX_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot M\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{2}{n^2}M\sum_{k<i}^{n}X_kX_i.$$

Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому

$$\frac{1}{n^2}\cdot M\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{2}{n^2}M\sum_{k<i}^{n}X_kX_i=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}MX_i^2+\frac{2}{n^2}\sum_{k<i}^{n}MX_kMX_i.$$

Для показательного распределения

$$MX_i=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}=\sqrt{\alpha},\ MX_i^2=\frac{2}{\lambda^2}=\frac{2}{\frac{1}{\alpha}}=2\alpha.$$

Подставляем

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}MX_i^2+\frac{2}{n^2}\sum_{k<i}^{n}MX_kMX_i=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot 2\alpha+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\,n\,(MX_1)^2=$$
$$=\frac{2\alpha}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot\alpha=\frac{2\alpha}{n}+\alpha-\frac{\alpha}{n}=\frac{\alpha}{n}+\alpha\to\alpha,\ n\to\infty,$$

значит, оценка смещённая, но несмещённая ассимптотически.

Проверим, имеет ли место $\left(\overline{X}\right)^2\xrightarrow{P}\alpha,\ n\to\infty.$

По закону больших чисел

$$\left(\overline{X}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\to(MX_1)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,$$

значит, оценка состоятельная.

2.21

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 2 и p. Для какого параметра $\theta=\theta(p)$ статистика $\hat{\theta_n}=e^{\overline{X}}$ будет состоятельной? Является ли $\hat{\theta_n}$ сильно состоятельной оценкой того же параметра? Является ли $\hat{\theta_n}$ несмещённой оценкой того же параметра? Найдите среднеквадратическое отклонение этой оценки.

Решение.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}MX_1,\ n\to\infty.$$

Случайные величины в выборке имеют биномиальное распределение с математическим ожиданием $MX_1=np=2p$, значит, $\overline{X}\xrightarrow{P}2p,\ n\to\infty.$

Применим непрерывную функцию e^x. Получим $e^{\overline{X}}\xrightarrow{P}e^{2p},\ n\to\infty.$

Проверим, является ли оценка несмещённой к параметру e^{2p}, то есть выполняется ли $Me^{\overline{X}}=e^{2p}$.

Вычисляем $Me^{\overline{X}} = Me^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$. Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому $Me^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n$. По определению характеристической функции $\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1}$, получим

$$\left(Me^{\frac{X_1}{n}}\right)^n = \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n.$$

Характеристическая функция биномиального распределения

$$\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1} = \left[\left(e^{it} - 1\right)p + 1\right]^n.$$

Подставим и получим

$$\left[\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{in}\right)\right]^n = \left[\left(e^{\frac{i}{in}} - 1\right)p + 1\right]^n = \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n \neq e^{2p}.$$

Значит, оценка смещённая.

Проверим сильную состоятельность. По усиленному закону больших чисел

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{a.s.}{\to} MX_1 = 2p,\ n \to \infty.$$

Отсюда следует, что $e^{\overline{X}} \overset{a.s.}{\to} e^{2p}$, $n \to \infty$. Значит, оценка сильно состоятельная.

Найдём дисперсию оценки $De^{\overline{X}} = Me^{2\overline{X}} - \left(Me^{\overline{X}}\right)^2$.

Нашли, что $Me^{\overline{X}} = \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n$.

Вычисляем $Me^{2\overline{X}} = Me^{\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$. Из независимости и одинаковой распределенности случайных величин следует, что $Me^{\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \left(Me^{\frac{2X_1}{n}}\right)^n$. По определению характеристической функции $\varphi_{X_1}(t) = Me^{itX_1}$, получаем

$$\left(Me^{\frac{2X_1}{n}}\right)^n = \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{2}{in}\right)\right]^n.$$

Подставляем характеристическую фунцию биномиального распределения

$$\left[\varphi_{X_1}\left(\frac{2}{in}\right)\right]^n = \left[\left(e^{\frac{2i}{in}} - 1\right)p + 1\right]^n = \left[\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n.$$

Отсюда находим дисперсию оценки

$$De^{\overline{X}} = \left[\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n - \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^{2n}.$$

Извлекая корень, получим $\sigma = \sqrt{\left[\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)p + 1\right]^n - \left[\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)p + 1\right]^{2n}}$.

2.22

Задание. В партии из n изделий оказалось m бракованных. Неизвестная вероятность p появления бракованного изделия оценивается величиной m/n. Проверьте состоятельность и несмещённость этой оценки.

Решение. Выборка имеет распределение Бернулли, то есть

$$X_i = \begin{cases} 1, & p, \\ 0, & 1-p, \end{cases}$$

где событие $\{X_i = 1\}$ означает, что i-тое изделие браковано.

Тогда

$$\frac{m}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},$$

где $(X_1 + \ldots + X_n)$ — количество бракованных изделий в партии.

Проверяем состоятельность, то есть проверяем, выполняется ли

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{p} p,\ n \to \infty.$$

По закону больших чисел

$$\frac{m}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{p} MX_1 = p,\ n \to \infty,$$

так как это распределение Бернулли.

Это означает, что оценка состоятельная.

Проверим несмещённость оценки, то есть проверим, выполняется ли

$$M\frac{m}{n} = p.$$

Ищем математическое ожидание оценки

$$M\frac{m}{n} = M\frac{X_1 + \ldots + X_n}{p} = \frac{1}{n} \cdot M\left(X_1 + \ldots + X_n\right).$$

Пользуемся линейностью математического ожидания

$$\frac{1}{n} \cdot M\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = p,$$

то есть оценка несмещённая.

2.23

Задание. При каком значении k статистика

$$k\sum_{j=1}^{n} |X_j|,$$

которая построена по выборке из нормального распределения $N\left(0,\sigma^2\right)$, является несмещённой оценкой для параметра σ?

Решение. Нужно найти такое k, для которого

$$M\left(k\sum_{j=1}^{n}|X_j|\right)=\sigma,\ X_j\sim N\left(0,\sigma^2\right).$$

Выносим константу k за знак математического ожидания

$$M\left(k\sum_{j=1}^{n}|X_j|\right)=kM\sum_{j=1}^{n}|X_j|.$$

Пользуемся линейностью математического ожидания

$$kM\sum_{j=1}^{n}|X_j|=k\sum_{j=1}^{n}M\,|X_j|.$$

Из того, что случайные величины одинаково распределены, следует, что

$$k\sum_{j=1}^{n}M\,|X_j|=knM\,|X_1|.$$

Найдём математическое ожидание модуля первого элемента выборки через плотность распределения

$$M\,|X_1|=\int\limits_{\mathbb{R}}p\left(x\right)\cdot|x|\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\cdot\int\limits_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Внесём под знак дифференциала то, что стоит в степени экспоненты

$$2\cdot\int\limits_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cdot 2\sigma^2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sigma.$$

Тогда математическое ожидание оценки

$$M\left(k\sum_{j=1}^{n}|X_j|\right)=kn\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

— условие несмещённости, откуда

$$k=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2.24

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha > 0$. Найдите несмещённые состоятельные оценки для параметров

$$\alpha, \sin\frac{1}{\alpha}.$$

Решение. $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые.
θ — неизвестный параметр.

$$\hat{\theta} = \frac{f(X_1) + \ldots + f(X_n)}{n}.$$

Так как элементы выборки одинаково распределённые, то $M\hat{\theta} = Mf(X_1)$.
По закону больших чисел $\hat{\theta} \xrightarrow{P} Mf(X_1)$.
Хотим, чтобы

$$\begin{cases} M\hat{\theta} = \hat{\theta}, \\ \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta. \end{cases}$$

Нужно подобрать f из условия, что $Mf(X_1) = \theta = \alpha$.
Записывая математическое ожидание через интеграл от плотности получаем преобразование Лапласа

$$\int\limits_0^\infty f(y)\,\alpha e^{-\alpha y} dy = \alpha.$$

Это способ построения одновременно несмещённой и сотоятельной оценки.

Выносим α из-под знака интеграла

$$\alpha \int\limits_0^\infty f(y)\, e^{-\alpha y} dy = \alpha.$$

Сокращая константы, получаем

$$\int\limits_0^\infty f(y)\, e^{-\alpha y} dy = 1.$$

Из таблицы преобразований Лапласа $f(y) = \delta(y)$. Тогда оценка параметра α примет вид

$$\hat{\theta} = \frac{\delta(X_1) + \ldots + \delta(X_n)}{n}.$$

Для второго параметра

$$\int\limits_0^\infty f(y)\,\alpha e^{-\alpha y} dy = \sin\frac{1}{\alpha}.$$

Вынесем α из-под знака интеграла

$$\alpha \int\limits_0^\infty f(y)\, e^{-\alpha y} dy = \sin \frac{1}{\alpha}.$$

Перенесём α вправо

$$\int\limits_0^\infty f(y)\, e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{y} \sim \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2},$$

откуда из таблицы преобразований Лапласа $f(y) = y$. Перешли к пределу, потому что иначе интеграл расходится. Оценка параметра в таком случае примет вид

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \overline{X}.$$

2.25

Задание. Пусть X — количество успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Докажите, что не существует несмещённой оценки для параметра p^N при $N > n$.

Решение. Будем действовать от противного.

Допустим, такая оценка существует, то есть существует $\hat{\theta}$ такое, что $M\hat{\theta} = p^N$.

Это условие несмещённости.

$\hat{\theta}$ — функция от выборки $X_1, \ldots, X_n$, где $X_1 + \ldots + X_n = X$, то есть $\hat{\theta} = f(X_1, \ldots, X_n)$.

Распределение Бернулли дискретное

$$M\hat{\theta} = Mf(X_1, \ldots, X_n) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n)\, P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n).$$

Пользуясь независимостью, получаем

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n)\, P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n) \cdot P(X_1 = k_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = k_n).$$

Подставляем вероятности в явном виде

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n)\, P(X_1 = k_1) \cdot P(X_n = k_n) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n)\, p^{k_1} \cdot (1-p)^{1-k_1} \cdot \ldots \cdot p^{k_n} \cdot (1-p)^{1-k_n} =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1\, or\, 0} f(X_1, \ldots, X_n) \cdot p^{k_1 + \ldots + k_n} \cdot (1-p)^{n-(k_1 + \ldots + k_n)}.$$

Обозначим

$$\sum k_i = k.$$

Получим

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n=1\ or\ 0} f\left(X_1,\ldots,X_n\right)\cdot p^{k_1+\ldots+k_n}\cdot(1-p)^{n-(k_1+\ldots+k_n)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{k_1,\ldots,k_n=1\ or\ 0} f\left(k_1,\ldots,k_n\right)p^k\left(1-p\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}c_kp^k\left(1-p\right)^{n-k},$$

где c_k — число.

Допустим, эта величина равна p^N.

Посмотрим, возможно ли это

$$\sum_{k=0}^{n}c_kp^k\left(1-p\right)^{n-k}=p^N.$$

Последнее равенство невозможно при $N>n$. Из этого следует, что не существует несмещённой оценки для параметра p^N при $N>n$.

2.26

Задание. Проводится n измерений неизвестного диаметра d круга. В первом приближении считается, что измерения $X_i=d+\varepsilon_i$ проводятся с независимыми случайными погрешностями ε_i, которые имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и неизвестной дисперсией σ^2. Проверьте несмещённость и состоятельность следующей оценки площади круга:

$$\hat{s_n}=\frac{\pi}{4}\left(\left(\overline{X}\right)^2-\frac{S_0^2}{n}\right),$$

где

$$S_0^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2.$$

Решение. Имеем случайные величины $\varepsilon_i\sim N\left(0,\sigma^2\right)$. Проверим несмещённость оценки, то есть проверим, выполняется ли

$$M\hat{s_n}=\frac{\pi d^2}{4}.$$

Преобразуем

$$S_0^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(d+\varepsilon_i-d-\overline{\varepsilon}\right)^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_i-\overline{\varepsilon}\right)^2.$$

Математическое ожидание этой случайной величины равно

$$MS_0^2=DS_0^2=\sigma^2.$$

Найдём математическое ожидание квадрата выборочного среднего

$$M\left(\overline{X}\right)^2 = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = M\left[\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} X_i X_j\right)\right].$$

Пользуемся тем, что случайные величины в выборке одинаково распределены

$$M\left[\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} X_i X_j\right)\right] = \frac{1}{n^2}\cdot nMX_1^2 + \frac{1}{n^2}\cdot 2C_n^2\left(MX_1\right)^2.$$

Расписываем биномиальный коэффициент

$$\frac{1}{n^2}\cdot nMX_1^2 + \frac{1}{n^2}\cdot 2C_n^2\left(MX_1\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n!}{2\left(n-2\right)!}\cdot\left(MX_1\right)^2.$$

Расписываем $n!$ через факториал, стоящий в знаменателе

$$\frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n!}{2\left(n-2\right)!}\cdot\left(MX_1\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{\left(n-2\right)!\left(n-1\right)n}{2\left(n-2\right)!}\cdot\left(MX_1\right)^2.$$

Сокращаем

$$\frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{\left(n-2\right)!\left(n-1\right)n}{2\left(n-2\right)!}\cdot\left(MX_1\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot MX_1^2 + \frac{n-1}{n}\cdot\left(MX_1\right)^2.$$

Найдём математическое ожидание измерения

$$MX_1 = M\left(d+\varepsilon_i\right) = Md + M\varepsilon_i = d.$$

Найдём математическое ожидание квадрата измерения

$$MX_1^2 = M\left(d+\varepsilon_i\right)^2 = M\left(d^2 + 2d\varepsilon_i + \varepsilon_i^2\right) = Md^2 + M\left(2d\varepsilon_i\right) + M\varepsilon_i^2.$$

Выносим константы за знак launch математического ожидания и учитываем то, что случайная величина ε_i имеет нулевой математическое ожидание

$$Md^2 + M\left(2d\varepsilon_i\right) + M\varepsilon_i^2 = d^2 + 2dM\varepsilon_i + D\varepsilon_i = d^2 + \sigma^2.$$

Подставляя эти значения в полученное выражение для математического ожидания квадрата выборочного среднего, получаем

$$M\left(\overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\left(d^2+\sigma^2\right) + \frac{n-1}{n}\cdot d^2 = \frac{d^2+\sigma^2+nd^2-d^2}{n} = \frac{\sigma^2+nd^2}{n} = d^2 + \frac{\sigma^2}{n}.$$

Получаем математическое ожидание оценки

$$M\hat{s_n} = M\left\{\frac{\pi}{4}\cdot\left[\left(\overline{X}\right)^2 - \frac{S_0^2}{n}\right]\right\} = \frac{\pi}{4}\cdot M\left[\left(\overline{X}\right)^2 - \frac{S_0^2}{n}\right] = \frac{\pi}{4}\cdot M\left(\overline{X}\right)^2 - \frac{\pi}{4}\cdot M\frac{S_0^2}{n}.$$

Подставляем найденные значения математических ожиданий и выносим за скобку общий множитель

$$\frac{\pi}{4}\cdot M\left(\overline{X}\right)^2-\frac{\pi}{4}\cdot M\frac{S_0^2}{n}=\frac{\pi}{4}\cdot\left(d^2+\frac{\sigma^2}{n}\right)-\frac{\pi}{4n}\cdot MS_0^2=\frac{\pi}{4}\cdot d^2+\frac{\pi\sigma^2}{4n}-\frac{\pi\sigma^2}{4n}=\frac{\pi d^2}{4},$$

значит, оценка несмещённая.

Проверим состоятельность оценки, то есть выполняется ли

$$\hat{s_n}\xrightarrow{P}\frac{\pi d^2}{4},\ n\to\infty.$$

По закону больших чисел

$$\left(\overline{X}\right)^2\xrightarrow{P}(MX_1)^2=d^2,\ n\to\infty.$$

Остаётся проверить, стремится ли по вероятности второе слагаемое в оценке к нулю

$$P\left(\frac{S_0^2}{n}\geq\varepsilon\right)=P\left(S_0^2\geq\varepsilon n\right).$$

Применим неравенство Чебышева

$$P\left(S_0^2\geq\varepsilon n\right)\leq\frac{MS_0^2}{\varepsilon n}\to 0,\ n\to\infty.$$

Остюда следует, что

$$\frac{S_0^2}{n}\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty.$$

Значит,

$$\hat{s_n}\xrightarrow{P}\frac{\pi}{4}\cdot d^2,$$

то есть оценка состоятельная.

Занятие 3. Метод моментов построения оценок

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение оценки: несмещённой, ассимптотически несмещённой, состоятельной, сильно состоятельной, оптимальной.

Оценка $\hat{\theta}$ несмещённая, если $\forall\theta \in \Theta : M_\theta\hat{\theta} = \theta$.

Асимптотически несмещенная оценка — такая оценка, математическое ожидание которой совпадает с оцениваемым параметром при $n \to \infty$.

Оценка $\hat{\theta}$ называется состоятельной, если стремится к истинному значению θ по вероятности $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

Оценка $\hat{\theta}$ называется сильно состоятельной, если стремится к истинному значению θ почти наверное $\hat{\theta} \xrightarrow{a.s.} \theta$, $n \to \infty$.

Несмещённая оценка $\hat{\theta} \in K$ называется оптимальной в классе квадратично интегрируемых оценок K, если для всякой другой несмещённой оценки $\tilde{\theta} \in \Theta\, \forall\theta \in \Theta : D_\theta\hat{\theta} \leq D_\theta\tilde{\theta}$ или же $\forall\theta \in \Theta$, $M_\theta \left(\hat{\theta} - \theta\right)^{\leq} M_\theta \left(\tilde{\theta} - \theta\right)^2$.

Что называется среднеквадратическим отклонением оценки?

$M_\theta \left(\hat{\theta} - \theta\right)$ — среднеквадратическое оклонение.

Сформулируйте утверждение про поведение выборочных моментов.

Выборочный начальный момент M_k k-го порядка стремится к начальному моменту ν_k случайной величины X, то есть

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|M_k - \nu_k| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, если моменты ν_{2k} и ν_k случайной величины X существуют и конечны.

Сформулируйте основную идею метода моментов построения оценки неизвестного параметра.

$x_1, \ldots, x_n$ — выборка из распределения F_θ и $\theta: \ M_\theta f(x_1) = g(\theta)$.

Вычисляем математическое ожидание, считая, что x_1 имеет распределение с параметром θ, иными словами,

$$M_\theta f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_\theta(x)\,,\ f, g \in C(\mathbb{R})\,,\ g$$

— строго монотонная. Тогда в силу усиленного закона больших чисел

$$\theta \approx g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) \overset{a.s.}{\theta}\,,\ n \to \infty.$$

Если существуют непрерывные f и g, g — обратима и $g(\theta) = M_\theta f(x)$, то в качестве оценки можно выбрать

$$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f dF_n\right).$$

Аудиторные задачи

3.3

Задание. Пользуясь методом моментов, оцените параметр θ равномерного распределения на отрезке:

a) $[0, \theta]$;

b) $[\theta - 1, \theta + 1]$;

c) $[0, 2\theta]$;

d) $[-\theta, \theta]$.

Решение.

a) $X_i \sim U([0, \theta])$. Записываем теоретический момент. Для равномерного распределения — это средина отрезка

$$MX_1 = \frac{\theta}{2}.$$

Должны приравнять

$$\frac{\theta^*}{2} = \overline{X},$$

откуда $\theta^* = 2\overline{X}$;

b) случайные величины имеют распределение $X_i \sim U\left([\theta-1, \theta+1]\right)$.

Вычисляем теоретический момент $MX_1 = \theta$. Должны записать, что $\theta^* = \overline{X}$;

c) случайные величины имеют распределение $X_i \sim U\left([0, 2\theta]\right)$.

Вычисляем теоретический момент $MX_1 = \theta$, откуда $\theta^* = \overline{X}$;

d) случайные величины имеют распределение $X_i \sim U\left([-\theta, \theta]\right)$.

Вычисляем теоретический момент $MX_1 = 0$ — не подходит, потому что не является функцией от θ. Можем вычислить второй момент, который в данном случае совпадает с дисперсией $MX_1^2 = DX_1$. Для равномерного распределения

$$DX_1 = \frac{4\theta^2}{12} = \frac{\theta}{3}.$$

Должны записать уравнение

$$\frac{\left(\theta^2\right)^*}{3} = \overline{X^2},$$

откуда $\left(\theta^2\right)^* = 3\overline{X^2}$. Извлекая корень, получаем $\theta^* = \sqrt{3\overline{X^2}}$.

3.4

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Пользуясь методом моментов, постройте оценку параметра λ и убедитесь, что эта оценка является несмещённой и состоятельной.

Решение. Первый теоретический момент $MX_1 = \lambda$. Должны приравнять

$$\lambda^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

По закону больших чисел $\lambda^* \xrightarrow{P} \lambda$. Отсюда следует состоятельность.

$M\lambda^* = MX_1 = \lambda$. Отсюда следует несмещённость.

3.5

Задание. Пользуясь методом моментов с пробной функцией $g(y) = y$, оцените параметр сдвига $\beta \in \mathbb{R}$ показательного распределения с плотностью

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta - y}, & t \geq \beta, \\ 0, & y < \beta. \end{cases}$$

Решение. $Mg(X_1) = \overline{g(X)}$ — метод моментов.

Ищем теоретический момент, зная плотность распределения

$$MX_1 = \int\limits_{\beta}^{\infty} y e^{\beta - y} dy.$$

Делаем замену $y - \beta = z$ и получаем

$$\int\limits_{\beta}^{\infty} y e^{\beta - y} dy = \int\limits_{0}^{\infty} (\beta + z)\, e^{-z} dz = \beta + 1.$$

Отсюда должны решить уравнение $\beta^* + 1 = \overline{X}$.

Отсюда $\beta^* = \overline{X} - 1$. Эта оценка несмещённая и состоятельная.

3.6

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами m и p. Пользуясь методом моментов, постройте оценку:

a) параметра p, если параметр m известный;

b) параметра m, если параметр p известный;

c) векторного параметра (m, p).

Решение.

a) $MX_1 = mp$. Тогда уравенение имеет вид $mp^* = \overline{X}$. Отсюда

$$p^* = \frac{\overline{X}}{m};$$

b) параметр m — это целое число.

$m^* p = \overline{X}$, откуда

$$m^* = \left[\frac{\overline{X}}{p}\right]$$

— целая часть;

c) одного теоретического момента мало.

Нужно найти второй теоретический момент.

Выражаем его через дисперсию и первый момент

$$MX_1^2 = DX_1 + (MX_1)^2 = mp\,(1 - p) + (mp)^2 = mp\,(1 - p + mp)\,.$$

Составляем уравнения с двумя неизвестными

$$\begin{cases} m^* p^* = \overline{X}, \\ m^* p^* \left(1 - p^* + m^* p^*\right) = \overline{X^2}. \end{cases}$$

Во второе уравнение можем подставить $\overline{X}$ вместо произведения m^*p^* и решить $\overline{X}\left(1-p+\overline{X}\right)=\overline{X^2}$, откуда

$$1-p^*+\overline{X}=\frac{\overline{X^2}}{\overline{X}}.$$

Отсюда находим

$$p^*=1+\overline{X}-\frac{\overline{X^2}}{\overline{X}},$$

соответственно

$$m^*=\left[\frac{\overline{X}}{p^*}\right]=\left[\frac{\overline{X}}{1+\overline{X}-\frac{\overline{X^2}}{\overline{X}}}\right]=\left[\frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X}+\overline{X}^2-\overline{X^2}}\right].$$

3.7

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения Парето с плотностью

$$f_{\beta,\theta}(y)=\begin{cases}\beta\theta y^{-(\beta+1)}, & y\geq\theta,\\ 0, & t<\theta,\end{cases}\qquad \beta>0,\ \theta>0.$$

Постройте оценки по методу моментов

a) параметра $\beta>1$, если параметр $\theta>0$ известный;

b) параметра $\theta>0$, если параметр $\beta>1$ известный;

c) векторного параметра (β,θ), где $\beta>2$, $\theta>0$.

Решение.

a) Вычисляем теоретический момент

$$MX_1=\beta\int\limits_{\theta}^{\infty}\theta^{\beta}y^{-\beta}dy=\beta\theta^{\beta}\cdot\frac{y^{-\beta+1}}{-\beta+1}=-\beta\theta^{\beta}\cdot\frac{\theta}{1-\beta}=\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\theta.$$

Найдём второй момент

$$MX_1^2=\beta\int\limits_{\theta}^{\infty}\theta^{\beta}y^{-\beta+1}dy=\beta\cdot\frac{1}{\beta-2}\cdot\theta^2.$$

Приравниваем теоретический и выборочный момент, учитывая, что β — параметр

$$\frac{\beta^*}{\beta^*-1}\cdot\theta=\overline{X},$$

откуда

$$\frac{\beta^*}{\beta^* - 1} = \frac{\overline{X}}{\theta}.$$

Решим пропорцию $\beta^*\theta = (\beta - 1)\,\overline{X} = \beta^*\overline{X} - \overline{X}$.

Получаем

$$\beta^* = \frac{\overline{X}}{\overline{X} - \theta};$$

b) считаем, что β — известно, ищем θ.

Приравниваем моменты

$$\frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \theta = \overline{X},$$

откуда

$$\theta^* = \frac{\overline{X}\,(\beta - 1)}{\beta};$$

c) нужно 2 уравнения

$$\begin{cases} \frac{\beta^*}{\beta^*-1} \cdot \theta^* = \overline{X}, \\ \frac{\beta^*}{\beta^*-2} \cdot (\theta^*)^2 = \overline{X^2}. \end{cases}$$

Выражаем θ^* из первого уравнения и подставляем во второе

$$\frac{\beta^*}{\beta^* - 2} \cdot \left(\frac{\beta^* - 1}{\beta^*}\right)^2 \cdot \left(\overline{X}\right)^2 = \overline{X^2}.$$

Умножим на знаменатель $\left(\overline{X}\right)^2 (\beta^* - 1)^2 = \overline{X^2}\beta^*\,(\beta^* - 2)$.

Оставляем в левой части только квадрат выборочного момента

$$\left(\overline{X}\right)^2 = \overline{X^2} \cdot \frac{(\beta^*)^2 - 2\beta^*}{(\beta^* - 1)^2}.$$

Делаем замену $(\beta^* - 1)^2 = t$.

Получаем

$$\left(\overline{X}\right)^2 = \frac{t - 1}{t} \cdot \overline{X^2} = \left(1 - \frac{1}{t}\right) \cdot \overline{X^2} = \overline{X^2} - \frac{\overline{X^2}}{t}.$$

Отсюда

$$t = \frac{\overline{X^2}}{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2}.$$

Отсюда найдём $\beta^* = \sqrt{t} + 1$, соответственно находим θ^*.

Домашнее задание

3.10

Задание. Пользуясь методом моментов, оцените значение α по выборке из показательного распределения с параметром $1/\sqrt{\alpha}$.

Решение.

$$X_i \sim Exp\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Записываем теоретический момент. Для показательного распределения — это обратная величина к параметру распределения

$$MX_1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha}.$$

Должны приравнять $\sqrt{\alpha^*} = \overline{X}$, откуда $\alpha^* = \left(\overline{X}\right)^2$.

3.11

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha > 0$. Пользуясь методом моментов с пробной функцией $g(y) = y$, оцените параметр $\theta(\alpha) = P(X_1 > 1)$.

Решение. $Mg(X_1) = \overline{g(X)}$ — метод моментов.

Ищем теоретический момент, зная плотность распределения

$$MX_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Из метода моментов следует, что

$$\frac{1}{\alpha^*} = \overline{X}.$$

Выражаем оценку

$$\alpha^* = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Перейдём в параметре к противоположному событию

$$\theta(\alpha) = P(X_1 > 1) = 1 - P(X_1 \leq 1) = 1 - F_{X_1}(1).$$

Найдём функцию показательного распределения как интеграл от плотности

$$F_{X_1}(y) = \int\limits_0^y \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \int\limits_0^\alpha e^{-\alpha x} d(-\alpha x) = -e^{-\alpha x}\Big|_0^y = 1 - e^{-\alpha y}.$$

Тогда параметр примет вид $\theta(\alpha) = 1 - (1 - e^{-\alpha}) = 1 - 1 + e^{-\alpha} = e^{-\alpha} = e^{-\frac{1}{\overline{X}}}$.

3.12

Задание. Пользуясь методом моментов с пробной функцией $g(y) = y$, оцените параметр p распределения Бернулли. Возможно ли с помощью метода мометов с некоторой пробной функией $g(y)$ получить оценку параметра p, отличную от $\overline{X}$?

Решение.

$$X_i = \begin{cases} 0, & 1-p, \\ 1, & p. \end{cases}$$

Теоретический момент $MX_1 = p$, $p^* = \overline{X}$.

Найдём теоретический момент с пробной функцией

$$Mg(X_1) = g(0)(1-p) + g(0)p = g(0) + p[g(1) - g(0)] = \overline{g(X)}.$$

Отсюда

$$p^* = \frac{g\left(\overline{X}\right) - g(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{g(X_1) + \ldots + g(X_n) - g(0)}{n[g(1) - g(0)]}.$$

Количество единиц равно $\overline{X}n$, соответственно $n - \overline{X}n$ — количество нулей.

$$\frac{g(X_1) + \ldots + g(X_n) - g(0)}{n[g(1) - g(0)]} = \frac{g(1)\overline{X}n + g(0)\left(n - \overline{X}n\right) - g(0)n}{n[g(1) - g(0)]}.$$

Раскроем скобки и приведём подобные

$$\frac{g(1)\overline{X}n + g(0)\left(n - \overline{X}n\right) - g(0)n}{n[g(1) - g(0)]} = \frac{ng(1)\overline{X} - gn\overline{X}}{n[g(1) - g(0)]} = \overline{X},$$

откуда следует, что невозможно получить другую оценку параметра p.

3.13

Задание. Пользуясь методом моментов, оцените параметр $\lambda > 1$ по выборке из распределения Пуассона с параметром $ln\lambda$.

Решение. Первый теоретический момент $MX_1 = ln\lambda$. Должны приравнять $ln\lambda = \overline{X}$. Отсюда следует, что $\lambda^* = e^{\overline{X}}$.

3.14

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из Г-распределения с плотностью

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1}e^{-\alpha y}, \ y \geq 0, \\ 0, \qquad y < 0, \end{cases} \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Постройте оценки по методу моментов

a) параметра α, если параметр β известный;

b) параметра β, если параметр α известный;

c) векторного параметра (α, β).

Решение.

a) Вычислим теоретический момент

$$MX_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha y} \cdot y dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^\beta y^\beta e^{-\alpha y} dy.$$

Сделаем замену $\alpha y = s$, откуда

$$y = \frac{s}{\alpha},\ dy = \frac{ds}{\alpha}.$$

Подставляем

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^\beta y^\beta e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^\beta e^{-s} \cdot \frac{ds}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^\beta \cdot e^{-s} ds.$$

Интеграл равен Гамма-функции

$$\frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^\beta \cdot e^{-s} ds = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma(\beta+1) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \cdot \beta \cdot \Gamma(\beta) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Найдём второй момент

$$MX_1^2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} e^{-\alpha y} \cdot y^2 dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^\beta y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy.$$

Умножаем на α числитель и знаменатель

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^\beta y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\alpha} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^{\beta+1} y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy.$$

Сделаем замену как и в предыдущем случае

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)\,\alpha} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \alpha^{\beta+1} y^{\beta+1} e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\alpha^2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^{\beta+1} e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\beta+2)}{\alpha^2\Gamma(\beta)}.$$

Пользуясь свойством Гамма-функции, записываем

$$\frac{\Gamma(\beta+2)}{\alpha^2\Gamma(\beta)} = \frac{(\beta+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\alpha^2\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\beta+1)\,\beta + \Gamma(\beta+1)}{\alpha^2\Gamma(\beta)}.$$

Снова пользуемся свойством Гамма-функции и сокращаем её

$$\frac{\Gamma(\beta+1)\beta+\Gamma(\beta+1)}{\alpha^2\Gamma(\beta)}=\frac{\beta^2\Gamma(\beta)+\beta\Gamma(\beta)}{\alpha^2\Gamma(\beta)}=\frac{\beta^2+\beta}{\alpha^2}.$$

Приравниваем теоретический момент и выборочный момент, учитывая, что α — параметр

$$\frac{\beta}{\alpha^*}=\overline{X},$$

откуда

$$\alpha^*=\frac{\beta}{\overline{X}};$$

b) считаем, что α — известно, ищем β^*.

Приравниваем моменты

$$\frac{\beta^*}{\alpha}=\overline{X},$$

откуда $\beta^*=\alpha\overline{X}$;

c) нужно 2 уравнения

$$\begin{cases}\frac{\beta^*}{\alpha^*}=\overline{X},\\ \frac{(\beta^*)^2+\beta^*}{(\alpha^*)^2}=\overline{X^2}.\end{cases}$$

Выражаем α^* из первого уравнения и подставляем во второе

$$\frac{(\beta^*)^2+\beta^*}{\beta^*}\cdot\overline{X}=\overline{X^2}.$$

Поделим числитель на знаменатель

$$\left(1+\frac{1}{\beta^*}\right)\cdot\left(\overline{X}\right)^2=\overline{X^2}.$$

Оставляем в левой части только скобку

$$1+\frac{1}{\beta^*}=\frac{\overline{X^2}}{\left(\overline{X}\right)^2}.$$

Переносим единицу вправо

$$\frac{1}{\beta^*}=\frac{\overline{X^2}}{\left(\overline{X}\right)^2}-1.$$

Выражаем параметр

$$\beta^*=\frac{1}{\frac{\overline{X^2}}{\left(\overline{X}\right)^2}-1}=\frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}.$$

Соответственно находим

$$\alpha^* = \frac{\beta^*}{\overline{X}} = \frac{\frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2}}{\overline{X}} = \frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\left(\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2\right)\overline{X}} = \frac{\overline{X}}{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2}.$$

3.15

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 2, p. Пользуясь методом моментов с пробной функцией

$$g(y) = y,$$

оцените параметр $\theta = e^{2p}$.

Решение. $Mg(X_1) = \overline{g(X)}$ — метод моментов.

Ищем теоретический момент, зная распределение

$$MX_1 = \sum_{k=0}^{2} k \cdot P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{2} k \cdot C_2^k p^k (1-p)^{2-k}.$$

При $k = 0$ первое слагаемое зануляется, поэтому можно суммировать от единицы

$$\sum_{k=0}^{2} k \cdot C_2^k p^k (1-p)^{2-k} = \sum_{k=1}^{2} k \cdot C_2^k \cdot p^k (1-p)^{2-k} = 1 \cdot C_2^1 p (1-p) + 2 \cdot C_2^2 \cdot p^2.$$

Распишем биномиальные коэффициенты, раскроем скобки и приведём подобные

$$1 \cdot C_2^1 p (1-p) + 2 \cdot C_2^2 \cdot p^2 = 2p(1-p) + 2p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p.$$

Должны решить уравнение $2p^* = \overline{X}$.

Отсюда

$$p^* = \frac{\overline{X}}{2}.$$

Оценим параметр $\theta^* = e^{2p^*} = e^{\frac{2\overline{X}}{2}} = e^{\overline{X}}$.

3.16

Задание. При нейтронном бомбардировании ядер урана начинается расщепление ядра, при котором ядро урана распадается на две части разного типа. В камере Вильсона это явление наблюдается в виде двух траекторий, которые выходят из одной точки. Эти траектории вскоре разделяются на несколько веток, которые получаются от столкновения частиц с молекулами газа в камере. Можно показать, что количество веток в одной траектории имеет так называемое «двойное» распределение Пуассона, то есть

$$P(X = k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}\right),\ k = 0, 1, \ldots,$$

где $\lambda_1 < \lambda_2$ — некоторые положительные постоянные. Пользуясь методом моментов, оцените векторный параметр (λ_1, λ_2).

Решение.

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\left(X = k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right).$$

Разобьём на две суммы

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}.$$

Слагаемые при $k = 0$ равны нулю

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2}.$$

Вынесем λ_i за скобку и сократим k, где $i \in \{1, 2\}$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} = \\ = \frac{\lambda_1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} = \\ = \frac{\lambda_1}{2} \cdot e^{\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{2} \cdot e^{\lambda_2} \cdot e^{-\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \end{aligned}$$

Одного теоретического момента мало.

Нужно найти второй теоретический момент

$$MX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right).$$

Одно k сокращаем, записываем через две суммы

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda_2^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{(k-2)!} \cdot e^{-\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{(k-2)!} \cdot e^{-\lambda_2} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot e^{\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2^2 \cdot e^{-\lambda_2} \cdot e^{\lambda_2} + \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 + \lambda_2 \right).$$

Составим уравенения с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1^* + \lambda_2^*}{2} = \overline{X}, \\ \frac{1}{2} \cdot \left((\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2 + \lambda_1^* + \lambda_2^* \right) = \overline{X^2}. \end{cases}$$

Возведём первое уравнение в квадрат, предварительно умножив на 2. Получим $(\lambda_1^* + \lambda_2^*)^2 = (\lambda_1^*)^2 + 2\lambda_1^*\lambda_2^* + (\lambda_2^*)^2 = 4 \left(\overline{X}\right)^2$, откуда

$$(\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2 = 4 \left(\overline{X}\right)^2 - 2\lambda_1^*\lambda_2^*.$$

Подставим это выражение во второе уравнение

$$\frac{1}{2} \cdot \left[4 \left(\overline{X}\right)^2 - 2\lambda_1^*\lambda_2^* + \lambda_1^* + \lambda_2^* \right] = \overline{X^2}.$$

Раскроем скобки

$$2 \left(\overline{X}\right)^2 - \lambda_1^*\lambda_2^* + \frac{1}{2} (\lambda_1^* + \lambda_2^*) = \overline{X^2}.$$

Подставим сумму оценок из первого уравнения

$$2\left(\overline{X}\right)^2 - \lambda_1^*\lambda_2^* + \frac{1}{2}\cdot 2\overline{X} = \overline{X^2}.$$

Выразим произведение оценок и сократим двойки $\lambda_1^*\lambda_2^* = 2\left(\overline{X}\right)^2 + \overline{X} - \overline{X^2}$.

Из первого уравнения подставим $\lambda_2^* = 2\overline{X} - \lambda_1^*$ в полученное уравнение $\lambda_1^*\left(2\overline{X} - \lambda_1^*\right) = 2\left(\overline{X}\right)^2 + \overline{X} - \overline{X^2}$.

Раскроем скобки и поменяем знаки в обеих частях

$$\left(\lambda_1^*\right)^2 - 2\overline{X}\lambda_1^* = -2\left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X} + \overline{X^2}.$$

Перенесём всё влево $\left(\lambda_1^*\right)^2 - 2\overline{X}\lambda_1^* + 2\left(\overline{X}\right)^2 + \overline{X} - \overline{X^2} = 0$.

Получили квадратное уравнение относительно λ_1^*. Найдём его дискриминант

$$D = 4\left(\overline{X}\right)^2 - 4\left(2\left(\overline{X}\right)^2 + \overline{X} - \overline{X^2}\right) = 4\left(\overline{X}\right)^2 - 8\left(\overline{X}\right)^2 - 4\overline{X} + 4\overline{X^2}.$$

Приведём подобные

$$4\left(\overline{X}\right)^2 - 8\left(\overline{X}\right)^2 - 4\overline{X} + 4\overline{X^2} = 4\overline{X^2} - 4\left(\overline{X}\right)^2 - 4\overline{X}.$$

Найдём корень

$$\lambda_1^* = \frac{2\overline{X} - 2\sqrt{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X}}}{2} = \overline{X} - \sqrt{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X}}.$$

Тогда оценка второго параметра равна $\lambda_2^* = \overline{X} + \sqrt{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X}}$.

Занятие 4. Оценка максимального правдоподобия

Контрольные вопросы и задания

Как построить оценку максимального правдоподобия?

Плотность распределения выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ имеет вид

$$L\left(\vec{X}, \theta\right) = \prod_{k=1}^{n} p\left(X_k, \theta\right),$$

как плотность вектора с независимыми координатами. $L\left(\vec{X}, \theta\right)$ — функция правдоподобия.

Оценка максимаьлного правдоподобия $\hat{\theta}$ — такое значение параметра θ, при котором функция правдоподобия достикает своего максимального значения $\hat{\theta} = \underset{\theta}{argmax} L\left(\vec{X}, \theta\right)$.

Сформулируйте свойства оценки максимального правдоподобия.

Оценка максимального правдоподобия, как правило, сильно состоятельная.

Аудиторные задачи

4.3

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия векторного параметра $\left(a, \sigma^2\right)$ нормального распределения.

Решение. Выборка $x_1, \ldots, x_n \sim N\left(a, \sigma^2\right)$. Сейчас θ будет векторным параметром, состоящим из двух элементов: a, σ^2.

Плотность имеет вид

$$p\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Произведение этих плотностей даёт

$$L\left(\vec{x},a,\sigma^2\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}.$$

Обозначим $\sigma^2=\sigma^*$, чтобы было удобней брать производную

$$\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}}\sigma^2}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^*\right)^{\frac{n}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^*}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}.$$

Поскольку есть экспонента, стоит брать логарифм

$$l\left(\vec{x},a,\sigma^*\right)=lnL\left(\vec{x},a,\sigma^*\right)=-\frac{n}{2}\cdot ln\left(2\pi\sigma^*\right)-\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Распишем логарифм произведения через сумму логарифмов

$$-\frac{n}{2}\cdot ln\left(2\pi\sigma^*\right)-\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=-\frac{n}{2}\cdot ln\left(2\pi\right)-\frac{n}{2}\cdot ln\sigma^*-\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Берём производную

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^*}l=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^*}+\frac{1}{2\left(\sigma^*\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=0.$$

Теперь надо по a продифференцировать и тоже приравнять к нулю

$$\frac{\partial}{\partial a}l=\frac{1}{\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)=0=\frac{n\overline{X}-na}{\sigma^*}.$$

Распишем сумму в явном виде $(x_1-a)+(x_2-a)+\ldots+(x_n-a)=0$.
Отсюда

$$a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Оценка равна $\hat{a}=\overline{x}$.
Тогда оценка второго параметра равна

$$\hat{\sigma^*}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2.$$

Проверили только необходимое условие для максимума. Теперь нужно проверить достаточность.

Имеем матрицу $n \times n$. Матрица положительно определена тогда и только тогда, когда каждый минор положительный. Матрица отрицательно определена тогда и только тогда, когда каждый минор отрицательный.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial a^2} & \frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma^*} \\ \frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma^*} & \frac{\partial^2}{\partial (\sigma^*)^2} \end{bmatrix}.$$

Найдём последний элемент матрицы

$$\frac{\partial^2}{\partial \left(\sigma^*\right)^2} l = \frac{n}{2\left(\sigma^*\right)^2} - \frac{1}{\left(\sigma^*\right)^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)^2.$$

Найдём смешанную производную

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma^*} l = -\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right) \cdot \frac{1}{\left(\sigma^*\right)^2} = \frac{n\overline{x} - na}{\left(\sigma^*\right)^2}.$$

Найдём первый элемент матрицы

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} l = -\frac{n}{\sigma^*}.$$

Теорема Шварца. Если

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

и они непрерывны в точке (x_0, y_0), то они совпадают в этой точке.

Первый определитель строго отрицательный.

Второй определитель

$$M_2 = -\frac{n^2}{2\left(\sigma^*\right)^3} + \frac{n}{\left(\sigma^*\right)^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right) - \frac{n}{\left(\sigma^*\right)^4} \cdot \left(\overline{x} - a\right)^2.$$

Последнее слагаемое равно нулю. Нужно проверять это значение в точке $\hat{a} = \overline{x}$. Имеем

$$-\frac{n^2}{2\left(\sigma^*\right)^3} + \frac{n}{\left(\sigma^*\right)^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right) - \frac{n}{\left(\sigma^*\right)^4} \cdot \left(\overline{x} - a\right)^2 =$$
$$= -\frac{n}{\left(\sigma^*\right)^3} \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{\sigma^*} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)\right) > 0.$$

Нужно проверить в точке $\sigma^* = \hat{\sigma}$. Имеем

$$\frac{n}{2} < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)^2}{\sigma^*}.$$

Отсюда выражаем значение оценки

$$\sigma^* = \hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{n}{2} < n,$$

то есть $M_2 < 0$. По критерию Сильвестра $\hat{A} < 0$ тогда и только тогда, когда $\left(\hat{a}, \hat{\sigma^*}\right)$ — точка максимума.

4.5

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра θ показательного распределения.

Решение. $p\left(x, \theta\right) = \theta e^{-\theta x} \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\}$.

Нужно найти функцию правдобоподия как произведение плотностей $L\left(\vec{x}, \theta\right) = \theta^n \cdot e^{-n\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\left\{\vec{x} \in \left[0, +\infty\right)^n\right\}$. Предполагаем, что все $x_i \geq 0$, то есть индикатор можно отбросить. Если какой-то элемент выборки сильно отрицательный, то не имеет смысла говорить о равномерном распределении. Если какой-то элемент выборки близок к нулю и при этом отрицательный, то на него повлияла ошибка, и его не учитываем

$$\theta^n \cdot e^{-n\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\left\{\vec{x} \in \left[0, +\infty\right)^n\right\} = \theta^n e^{-n\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Удобнее будет рассмотреть

$$lnL\left(\vec{x}, \theta\right) = l\left(\theta\right) = -\theta \sum_{i=1}^{n} x_i + nln\theta.$$

Нужно взять производную и приравнять к нулю

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l\left(\theta\right) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{\theta} = 0.$$

Переносим сумму вправо

$$\frac{n}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Получаем оценку

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Выразим через выборочное среднее

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Остаётся проверить, что $\hat{\theta}$ будет действительно максимумом функции l. Нужно найти вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l\left(\theta\right) = -\frac{n}{\theta^n} < 0.$$

Отсюда следует, что фунция выпуклая ввекх, соответственно это точка максимума.

4.6

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$ равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$.

Решение. Плотность равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ имеет вид

$$p_\theta\left(x\right) = \frac{\mathbb{1}\left\{x \in [0, \theta]\right\}}{\theta}.$$

По этой плотности строим функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{x}, \theta\right) = \frac{\mathbb{1}\left\{\vec{x} \in [0, \theta]^n\right\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min\limits_i x_i \geq 0,\ \max\limits_i x_i \leq \theta\right\}}{\theta^n}.$$

Если какой-то элемент выборки сильно отрицательный, то не имеет смысла говорить о равномерном распределении, если близок к нулю, то на него повлияла ошибка, и его не учитываем

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\min\limits_i x_i \geq 0,\ \max\limits_i x_i \leq \theta\right\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\max\limits_i x_i \leq \theta\right\}}{\theta}.$$

Нарисуем график получившейся функции как функции от θ (рис. 4).

Точка максимума такой функции — это $\max\limits_i x_i$.

Значит, $\hat{\theta} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$.

4.7

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра сдвига $\beta \in \mathbb{R}$ показательного распределения с плотностью

$$f_\beta\left(y\right) = \begin{cases} e^{\beta - y}, & y \geq \beta, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

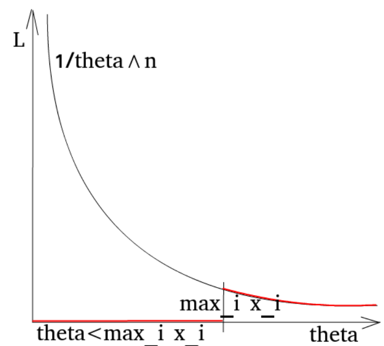

Рис. 4: График функции $L(\theta)$

Проверьте состоятельность этой оценки.
Решение. $f_\beta(y) = e^{\beta - y} \cdot \mathbb{1}\{y \geq \beta\}$.
Запишем функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \beta) = e^{n\beta - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\{\vec{x} \in [\beta, +\infty)^n\} = e^{n\beta - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\left\{\min_{1 \leq i \leq n} x_i \geq \beta\right\}.$$

Рисуем схематический график (рис. 5).

Рис. 5: График функции $L(\beta)$

Из графика видно, что $\hat{\beta} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$. Проверяем состоятельность:

$$\hat{\beta} \xrightarrow{P} \beta, \; n \to \infty.$$

По определению $P\left(\left|\hat{\beta} - \beta\right| > \varepsilon\right) \to 0$, $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$. Подставляем оценку в функцию правдоподобия

$$e^{n\beta - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathbb{1}\left\{\min_{1 \leq i \leq n} x_i \geq \beta\right\} = P\left(\left|\min_{1 \leq i \leq n} x_i - \beta\right| > \varepsilon\right).$$

Минимальный член выборки не может быть меньше β из-за распределения. $P\left(\left|\min\limits_{1\le i\le n} x_i-\beta\right|>\varepsilon\right)=P\left(\min\limits_{1\le i\le n} x_i>\beta+\varepsilon\right)$. Запишем через вероятность пересечения событий $\{x_i>\beta+\varepsilon\}$. Получим

$$P\left(\min_{1\le i\le n} x_i>\beta+\varepsilon\right)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{x_i>\beta+\varepsilon\}\right).$$

Случайные величины независимы и одинаково распределены

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{x_i>\beta+\varepsilon\}\right)=\left[P\left(x_1>\beta+\varepsilon\right)\right]^n\to 0,\, n\to\infty,$$

так как такая вероятность меньше единицы.

Достаточно показать, что $P\left(x_1>\beta+\varepsilon\right)\ne 1$. Тогда $l^n\to 0$.

Запишем интеграл от плотности со сдвигом

$$\int\limits_{\beta+\varepsilon}^{+\infty} p_\beta\left(y\right)dy=1-\int\limits_{\beta}^{\beta+\varepsilon} p_\beta\left(y\right)dy<1,$$

так как второй интеграл больше нуля (забрали кусок $\beta+\varepsilon$).

4.8

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра сдвига $\mu\in\mathbb{R}$ распределения Лапласа с плотностью $f_\mu\left(y\right)=e^{-\frac{|y-\mu|}{2}}$.

Решение. Записываем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{X},\mu\right)=\prod_{i=1}^{n} f_\mu\left(X_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot e^{-|X_i-\mu|}=\frac{1}{2^n}\cdot e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-\mu|}.$$

Находим логарифм

$$l\left(\vec{X},\mu\right)=c-\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|,$$

где $c=const$. Дифференцировать по μ не можем. Хотим максимизировать эту функцию правдоподобия. Нужно минимизировать сумму X_i — точки на оси. $|X_i-\mu|$ — расстояние.

Вариационный ряд имеет понятие медианы. Это приблизительно средина вариационного ряда.

$$\mu^*=\begin{cases}X_{(m+1)}, & n=2m+1,\\ \frac{X_{(m)}+X_{(m+1)}}{2}, & n=2m\end{cases}$$

— аналогия с центром масс треугольника, который задаётся как точка пересечения медиан.

4.9

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра p распределения Бернулли.

Решение. Распределение Бернулли не имеет плотности. Есть выборка $x_1, \ldots, x_n \sim B(1, p)$.

Сформулируем метод максимального правдоподобия в общем случае.

$X_1, \ldots, X_n$ — выборка с параметром θ.

$X_1, \ldots, X_n$ имеют плотность распределения $p_\theta(y)$. Тогда

$$L\left(\vec{X}, \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(X_i).$$

Отсюда находим $\hat{\theta} = argmaxL\left(\vec{X}, \theta\right)$.

В дискретном случае плотность заменяем функцией $f(x) = P\{Y = x\}$.

Имеем распределение $P(X = k) = p^k \cdot (1-p)^{1-k}$, $k = 0, 1$. Следовательно,

$$L\left(\vec{X}, p\right) = \prod_{i=1}^{n} p^{X_i} (1-p)^{1-X_i} = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} \cdot (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n} (1-X_i)} = p^{n\overline{X}} \cdot (1-p)^{n\left(1-\overline{X}\right)}.$$

Функцию непрерывна по p. Можем продифференцировать

$$l\left(\vec{X}, p\right) = n\overline{X} lnp + n\left(1 - \overline{X}\right) ln(1-p).$$

Берём производную и приравниваем к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n\overline{X}}{p} - \frac{n\left(1-\overline{X}\right)}{1-p} = 0.$$

Сокращаем на n и переносим второе слагаемое вправо

$$\frac{\overline{X}}{p} = \frac{1-\overline{X}}{1-p}.$$

Перемножаем как пропорцию $\overline{X} - p\overline{X} = p\left(1-\overline{X}\right)$. Отсюда следует, что $p^* = \overline{X}$.

Проверим это, взяв вторую производную и посмотрев на её знак

$$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{n\overline{X}}{p^2} - \frac{n\left(1-\overline{X}\right)}{(1-p)^2} < 0,$$

следовательно, $p^* = argmaxl\left(\vec{X}, p\right)$.

4.10

Задание. Пусть задана выборка из нормального распределения с единичной дисперсией и математическим ожиданием a, которое может принимать только два значения: 1 или 2. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра a.

Решение. Записываем общую функцию правдоподобия, как функцию параметра a.

Запишем для этого плотность распределения каждого элемента

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}.$$

Теперь

$$L\left(\vec{X}, a\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(X_i-a)^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum (X_i-a)^2}.$$

Записываем логарифм

$$l\left(\vec{X}, a\right) = -\frac{n}{2} \cdot ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a).$$

Подставим возможные значения a и найдём разность логарифмов двух соответствующих функций правдоподобия

$$l\left(\vec{X}, 2\right) - l\left(\vec{X}, 1\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2.$$

Запишем под одну сумму

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-2)^2 - (X_i-1)^2\right].$$

Разложим на 2 множителя

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-2)^2 - (X_i-1)^2\right] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - 2 - X_i + 1)(X_i - 2 + X_i - 1).$$

Приведём подобные

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - 2 - X_i + 1)(X_i - 2 + X_i - 1) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(2X_i - 3)(-1).$$

Выносим n за скобки

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(2X_i - 3)(-1) = n\left(\frac{3}{2} - \vec{X}\right).$$

Знак разности будет зависеть от значения $\vec{X}$.

Если
$$\vec{X} < \frac{3}{2},$$
то $a^* = 1$, если
$$\vec{X} \geq \frac{3}{2},$$
то $a^* = 2$.

Домашнее задание

4.14

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия дисперсии σ^2 нормального распределения, если математическое ожидание a известно. Выясните, не является ли оценка состоятельной оценкой параметра σ^2.

Решение.
$$p_{\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Запишем функцию правдоподобия
$$L\left(\vec{x}, \sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}.$$

Обозначим $\sigma^2 = \sigma^*$, чтобы было удобнее брать производную
$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^*)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^*} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}.$$

Поскольку есть экспонента, стоит брать логарифм
$$l\left(\vec{x}, \sigma^2\right) = lnL\left(\vec{x}, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2} \cdot ln\left(2\pi\sigma^*\right) - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2.$$

Распишем логарифм произведения через сумму логарифмов в первом слагаемом
$$-\frac{n}{2} \cdot ln\left(2\pi\sigma^*\right) - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = -\frac{n}{2} \cdot ln\left(2\pi\right) - \frac{n}{2} \cdot ln\sigma^* - \frac{1}{2\sigma^*} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2.$$

Берём производную и приравниваем её к нулю
$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^*} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^*} + \frac{1}{2\left(\sigma^*\right)^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = 0.$$

Выносим в знаменателе σ^* за скобку, сокращаем и переносим первое слагаемое вправо

$$\frac{1}{2\sigma^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=\frac{n}{2}.$$

Выражаем оценку

$$\sigma^*=\hat{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2}{n}.$$

Проверили необходимое условие для максимума. Теперь нужно проверить достаточное.

Найдём вторую производную

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\left(\sigma^*\right)^2}=\frac{\partial}{\partial\sigma^*}\left[-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^*}+\frac{1}{2\left(\sigma^*\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]=\frac{n}{2\left(\sigma^*\right)^2}-\frac{1}{\left(\sigma^*\right)^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Подставим найденное значение оценки

$$\frac{n}{2\left(\sigma^*\right)^2}-\frac{1}{\left(\sigma^*\right)^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=\frac{n\cdot n^2}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^2}-\frac{n^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Упростим

$$\frac{n\cdot n^2}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^2}-\frac{n^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2=$$

$$=\frac{n^3}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^2}-\frac{n^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^2}=\frac{n^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^3}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)=$$

$$=-\frac{n^3}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right]^3}<0,$$

следовательно, $\hat{\sigma^2}$ — точка максимума функции. Проверим состоятельность, то есть $\hat{\sigma^2}\xrightarrow{P}\sigma^2$, $n\to\infty$.

По закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\xrightarrow{P}M\left(x_1-a\right)^2=Dx_1=\sigma^2,\ n\to\infty,$$

то есть оценка состоятельная.

4.15

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра $\lambda > 0$ распределения Пуассона.

Решение. Распределение Пуассона не имеет плотности. Есть выборка $x_1, \ldots, x_n \sim Pois\left(\lambda\right),\ \lambda > 0.$

Функция правдоподобия, когда есть плотность, выглядит так

$$L\left(\vec{x}, \lambda\right) = \prod_{i=1}^{n} p_\lambda\left(x_i\right).$$

Введём функцию $f_\lambda\left(x\right) = P\left\{x_1 = x\right\} = P\left\{\omega \middle| x_1\left(\omega\right) = x\right\}$, где

$$x \in \left\{0, 1, \ldots\right\}.$$

В этом случае функция правдоподобия примет вид

$$L\left(\vec{x}, \lambda\right) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda\left(x_i\right).$$

Ищем максимум функции правдоподобия. Нужно записать

$$f_\lambda\left(x\right) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Подставляем в функцию правдоподобия

$$\prod_{i=1}^{n} f_\lambda\left(x_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda}\right) = \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!} \cdot e^{-\lambda n}.$$

Так как есть экспонента, возьмём логарифм

$$l\left(\vec{x}, \lambda\right) = lnL\left(\vec{x}, \lambda\right) = ln\left(\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!} \cdot e^{-\lambda n}\right) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot ln\lambda - ln\prod_{i=1}^{n} x_i!.$$

Берём производную по λ, приравниваем её к нулю

$$\frac{\partial l\left(\vec{x}, \lambda\right)}{\partial \lambda} = -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Ищем оценку

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\lambda} = n,$$

откуда

$$\lambda^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}.$$

Проверили необходимое условие максимума. Проверим достаточное, то есть найдём вторую производную логарифма функции правдоподобия и посмотрим на её знак

$$\frac{\partial^2 l\left(\vec{x}, \lambda\right)}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial \lambda^{-1}}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\lambda^2} < 0,$$

то есть точка $\lambda^* = \overline{x}$ — точка максимума функции правдоподобия, то есть оценка максимального правдоподобия.

4.16

Задание. Постройте оценку максимального прадоподобия параметра

$$p \in (0, 1)$$

геометрического распределения.

Решение. Геометрическое распределение не имеет плотности.

Сформирулируем метод максимального правдоподобия в общем случае.

$X_1, \ldots, X_n$ — выборка с параметром θ.

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют плотность распределения $p_\theta\left(y\right)$. Тогда

$$L\left(\vec{X}, \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta\left(X_i\right).$$

Отсюда находим $\hat{\theta} = argmax L\left(\vec{X}, \theta\right)$.

В дискретном случае плотность заменяется функцией $f\left(x\right) = P\left\{Y = x\right\}$.

Имеем распределение $P\left(X = k\right) = p\left(1 - p\right)^k$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$L\left(\vec{X}, p\right) = \prod_{i=1}^{n} p\left(1 - p\right)^{X_i} = p^n\left(1 - p\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = p^n\left(1 - p\right)^{n\overline{X}}.$$

Функция непрерывна по p, можем дифференцировать.

$l\left(\vec{X}, p\right) = nlnp + n\overline{X}ln\left(1 - p\right)$.

Берём производную и приравниваем к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{n\overline{X}}{1 - p} = 0.$$

Сокращаем на n и переновим второе слагаемое вправо

$$\frac{1}{p} = \frac{\overline{X}}{1 - p}.$$

Перемножаем как пропорцию $1 - p = p\overline{X}$. Отсюда слудует, что

$$1 = p + p\overline{X} = p\left(1 + \overline{X}\right),$$

и

$$p^* = \frac{1}{1 + \overline{X}}.$$

Проверим это, взяв вторую производную и посмотрев на её знак

$$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{n}{p^2} - \frac{n\overline{X}}{(1-p)^2} < 0,$$

следовательно, $p^* = argmaxl\left(\vec{X}, p\right)$.

4.17

Задание. Пусть задана выборка из биномиального распределения с параметрами $p \in (0, 1)$ и m. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра:

a) p, если значение параметра m известно;

b) m по выборке объёма $n = 1$, если значение p известно.

Решение. Биномиальное распределение не имеет плотности.

Сформулируем метод максимального правдоподобия в общем случае.

$X_1, \ldots, X_n$ — выборка с параметром θ.

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют плотность распределения $p_\theta(y)$. Тогда

$$L\left(\vec{X}, \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(X_i).$$

Отсюда находим $\hat{\theta} = argmaxL\left(\vec{X}, \theta\right)$.

В дискретном случае плотность заменяется функцией $f(x) = P\{Y = x\}$.

Имеем распределение $P(X = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$, $k = \overline{0, m}$. Следовательно,

$$L\left(\vec{X}, p, m\right) = \prod_{i=1}^{n} C_m^{X_i} p^{X_i} (1-p)^{m-X_i} = \prod_{i=1}^{n} C_m^{X_i} \cdot p^{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} \cdot (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m-X_i)}.$$

Записываем через выборочное среднее

$$\prod_{i=1}^{n} C_m^{X_i} \cdot p^{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} \cdot (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m-X_i)} = \prod_{i=1}^{n} C_m^{X_i} \cdot p^{n\overline{X}} (1-p)^{n\left(m-\overline{X}\right)}.$$

a) Функция непрерывна по p. Можем дифференцировать.

$l\left(\vec{X}, p, m\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_m^{X_i} + n\overline{X} lnp + n\left(m - \overline{X}\right) ln\left(1-p\right)$.

Берём производную и приравниваем к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n\overline{X}}{p} - \frac{n\left(m-\overline{X}\right)}{1-p} = 0.$$

Сокращаем на n и переносим вправо второе слагаемое

$$\frac{\overline{X}}{p} = \frac{m-\overline{X}}{1-p}.$$

Перемножим как пропорцию $\overline{X} - p\overline{X} = p\left(m - \overline{X}\right)$. Отсюда следует, что $p\left(m-\overline{X}\right) + p\overline{X} = \overline{X}$, и оценка равна

$$p^* = \frac{\overline{X}}{m - \overline{X} + \overline{X}} = \frac{\overline{X}}{m}.$$

Проверим это, взяв вторую производную и посмотрев на её знак

$$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{m\overline{X}}{p^2} - \frac{m\left(m-\overline{X}\right)}{\left(1-p\right)^2} < 0,$$

следовательно, $p^* = argmax\, l\left(\vec{X}, p\right)$;

b) в данном случае $\vec{X} = X_1$. Имеем функцию правдоподобия

$$L_m = C_m^{X_1} p^{X_1} \left(1-p\right)^{m-X_1} = L\left(X_1, m\right) = L\left(\vec{X}, m\right),$$

соответственно $L_{m-1} = C_{m-1}^{X_1} p^{X_1} \left(1-p\right)^{m-1-X_1}$.

Найдём отношение

$$\frac{L_m}{L_{m-1}} = \frac{C_m^{X_1} p^{X_1} \left(1-p\right)^{m-X_1}}{C_{m-1}^{X_1} p^{X_1} \left(1-p\right)^{m-1-X_1}} = \frac{m!\left(1-p\right) X_1!\left(m-X_1-1\right)!}{X_1!\left(m-X_1\right)!\left(m-1\right)!}.$$

Сокращаем факториалы

$$\frac{m!\left(1-p\right) X_1!\left(m-X_1-1\right)!}{X_1!\left(m-X_1\right)!\left(m-1\right)!} = \frac{m\left(1-p\right)}{m-X_1}.$$

Возможны 2 случая

$$\begin{cases} \frac{m(1-p)}{m-X_1} \geq 1, \\ \frac{m(1-p)}{m-X_1} \leq 1. \end{cases}$$

Переносим знаменатель вправо

$$\begin{cases} m\left(1-p\right) \geq m - X_1, \\ m\left(1-p\right) \leq m - X_1. \end{cases}$$

Переносим слагаемые с m в одну сторону

$$\begin{cases} m - m\left(1-p\right) \leq X_1, \\ m - m\left(1-p\right) \geq X_1. \end{cases}$$

Выносим m за скобки

$$\begin{cases} m\left(1-1+p\right) \leq X_1, \\ m\left(1-1+p\right) \geq X_1. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} m \leq \frac{X_1}{p}, \\ m \geq \frac{X_1}{p}. \end{cases}$$

Отсюда оценка равна

$$m^* = \left[\frac{X_1}{p}\right].$$

4.18

Задание. Постройте оценку максимального правдоподобия параметра θ равномерного распределения на отрезке:

a) $[-\theta, 0]$, $\theta > 0$;

b) $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$;

c) $[\theta, \theta + 2]$, $\theta \in \mathbb{R}$;

d) $[\theta, 2\theta]$, $\theta > 0$.

Решение.

a) Плотность равномерного распределения а отрезке $[-\theta, 0]$, $\theta > 0$ имеет вид

$$p_\theta\left(x\right) = \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\left\{x \in [-\theta, 0]\right\}.$$

По этой плотности строим функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{x}, \theta\right) = \frac{\mathbb{1}\left\{\vec{x} \in [-\theta, 0]^n\right\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min\limits_i x_i \geq -\theta,\ \max\limits_i x_i \leq 0\right\}}{\theta^n}.$$

Если какой-то элемент выборки сильно положительный, то не имеет смысла говорить о равномерном распределении, если положительный, но близок к нулю, то на него повлияла ошибка, и его не учитываем

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq -\theta,\, \max_i x_i \leq 0\right\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq -\theta\right\}}{\theta^n}.$$

Нарисуем график получившейся функции, как функции от θ (рис. 6).

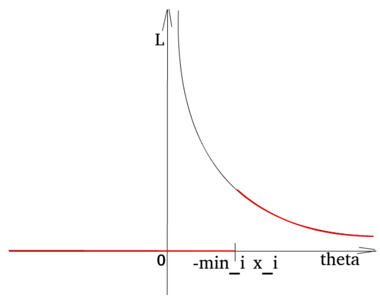

Рис. 6: График функции $L(\theta)$

Точка максимума этой функции — это $\left(-\min_i x_i\right)$.

Значит, $\hat{\theta} = -\min_{1 \leq i \leq n} x_i$;

b) плотность равномерного распределения на отрезке $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$ имеет вид

$$p_\theta(x) = \frac{\mathbb{1}\{x \in [-\theta, \theta]\}}{2\theta}.$$

По этой функции строим функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \frac{\mathbb{1}\{\vec{x} \in [-\theta, \theta]^n\}}{(2\theta)^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq -\theta,\, \max_i x_i \leq \theta\right\}}{(2\theta)^n}.$$

Меняем знак для минимального элемента выборки

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \geq -\theta,\, \max_i x_i \leq \theta\right\}}{(2\theta)^n} = \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1}\left\{\max_i x_i \leq \theta,\, -\min_i x_i \leq \theta\right\}.$$

Берём максимум

$$\frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1}\left\{\max_i x_i \leq \theta,\, -\min_i x_i \leq \theta\right\} =$$
$$= \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1}\left\{\max\left(\max_i x_i,\, -\min_i x_i\right) \leq \theta\right\}.$$

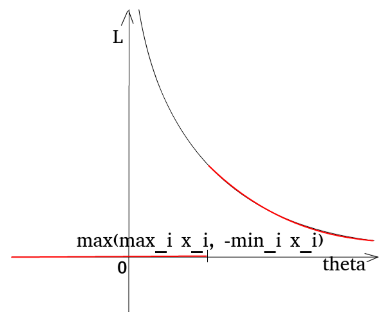

Рис. 7: График функции $L(\theta)$

Нарисуем график этой функции, как функции от θ (рис. 7).

Точка максимума такой функции — это $\max\left(\max_i x_i, -\min_i x_i\right)$.

Значит, $\hat{\theta} = \max\left(\max_{1\le i\le n} x_i, -\min_{1\le i\le n} x_i\right)$;

c) плотность равномерного распределения на отрезке $[\theta, \theta+2]$, $\theta \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$p_\theta(x) = \frac{\mathbb{1}\{x \in [\theta, \theta+2]\}}{2}.$$

По этой плотности строим функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \frac{\mathbb{1}\{\vec{x} \in [\theta, \theta+2]^n\}}{2^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \ge \theta,\, \max_i x_i \le \theta+2\right\}}{2^n}.$$

Переносим 2 влево

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \ge \theta,\, \max_i x_i \le \theta+2\right\}}{2^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \ge \theta,\, \max_i x_i - 2 \le \theta\right\}}{2^n}.$$

Значит, $\max_{1\le i\le n} x_i - 2 \le \hat{\theta} \le \min_{1\le i\le n} x_i$;

d) плотность равномерного распределения на отрезке Значит, $\max_{1\le i\le n} x_i - 2 \le \hat{\theta} \le \min_{1\le i\le n} x_i$; $[\theta, 2\theta]$, $\theta > 0$ имеет вид

$$p_\theta(x) = \frac{\mathbb{1}\{x \in [\theta, 2\theta]\}}{\theta}.$$

По этой функции строим функцию правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \frac{\mathbb{1}\{\vec{x} \in [\theta, 2\theta]^n\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min_i x_i \ge \theta,\, \max_i x_i \le 2\theta\right\}}{\theta^n}.$$

Делим неравенство с максимумом на 2

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\min\limits_i x_i \geq \theta,\, \max\limits_i x_i \leq 2\theta\right\}}{\theta^n} = \frac{\mathbb{1}\left\{\min\limits_i x_i \geq \theta,\, \frac{\max\limits_i x_i}{2} \leq \theta\right\}}{\theta^n}.$$

Остюда следует, что

$$\frac{\max\limits_i x_i}{2} \leq \theta \leq \min\limits_i x_i.$$

Нарисуем график полученной функции, как функции от θ (рис. 8).

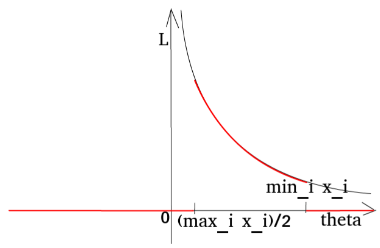

Рис. 8: График функции $L(\theta)$

Точка максимума такой функции — это

$$\frac{\max\limits_i x_i}{2}.$$

Значит,

$$\hat{\theta} = \frac{\max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i}{2}.$$

4.19

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из друхпараметрического показательного распределения с плотностью

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \alpha^{-1} e^{-\frac{y-\beta}{\alpha}}, & y \geq \beta, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Постройте оценку максимального правдоподобия двумерного параметра (α, β). Проверьте состоятельность этой оценки.

Решение. Сейчас θ будет векторным параметром, состоящим из двух элементов: α, β.

Плотность имеет вид

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{y}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}} \cdot \mathbb{1}\{y \geq \beta\}.$$

Произведение этих плотностей даёт

$$L\left(\vec{X},\alpha,\beta\right)=\frac{1}{\alpha^n}\cdot e^{-\frac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\beta)}\cdot\mathbb{1}\left\{\vec{X}\in[\beta,+\infty)^n\right\}.$$

Все элементы выборки не меньше, чем β. Запишем это условие через минимальный элемент

$$\frac{1}{\alpha^n}\cdot e^{-\frac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\beta)}\cdot\mathbb{1}\left\{\vec{X}\in[\beta,+\infty)^n\right\}=\frac{1}{\alpha^n}\cdot e^{-\frac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\beta)}\cdot\mathbb{1}\left\{\min_{1\le i\le n}X_i\ge\beta\right\}.$$

Найдём β^*. При фиксированном α нарисуем график функции правдоподобия как функции от β (рис. 9).

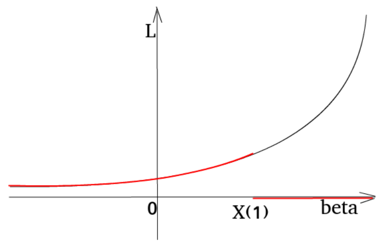

Рис. 9: График функции $L(\beta)$

Из графика видно, что точка максимума этой функции — это точка $\min\limits_{1\le i\le n}X_i=\beta^*$.

Так как есть экспонента, удобнее взять логарифм от функции правдоподобия

$$ln\left(\vec{X},\alpha,\beta\right)=l\left(\vec{X},\alpha,\beta\right)=-nln\alpha+\frac{n\beta-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\alpha}.$$

Возьмём производную по α и приравняем её к нулю

$$\frac{\partial l}{\partial\alpha}=-n\cdot\frac{1}{\alpha}-\frac{n\beta-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\alpha^2}=0.$$

Умножим на $\left(-\alpha^2\right)$ левую и правую части уравнения

$$n\alpha+n\beta-\sum_{i=1}^{n}X_i=0.$$

Отсюда выражаем оценку

$$\alpha^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\beta^*=\overline{X}-\min_{1\le i\le n}X_i.$$

Проверим состоятельность. Нужно проверить, выполняется ли

$$(\alpha^*, \beta^*) \xrightarrow{P} (\alpha, \beta)\,,\, n \to \infty.$$

По определению $P\left(|\beta^* - \beta| > \varepsilon\right) \to 0$, $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

Подставим в вероятность оценку

$$P\left(|\beta^* - \beta| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\min_{1\leq i\leq n} X_i - \beta\right| > \varepsilon\right).$$

Из распределения $\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i \geq \beta$, следовательно, можем убрать модуль $P\left(\left|\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i - \beta\right| > \varepsilon\right) = P\left(\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i - \beta > \varepsilon\right) = P\left(\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i > \beta + \varepsilon\right) =$ $= P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i > \beta + \varepsilon\}\right)$. Случайные величины независимые и одинаково распределённые $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i > \beta + \varepsilon\}\right) = \left[P\left(X_1 > \beta + \varepsilon\right)\right]^n \to 0$, $n \to \infty$, так как $P\left(X_1 > \beta + \varepsilon\right) \neq 1$.

Значит, β^* — состоятельная оценка. Тогда по закону больших чисел

$$\alpha^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \beta^* \xrightarrow{P} MX_1 - \beta = \int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{-y}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha}} y dy - \beta.$$

Возьмём интеграл по частям

$$u = y,\, du = dy,\, dv = e^{-\frac{y}{\alpha}} dy,\, v = \int e^{-\frac{y}{\alpha}} dy = -\alpha e^{-\frac{y}{\alpha}}.$$

Получим

$$\int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{-y}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha}} y dy - \beta = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{\beta}{\alpha}} (-\alpha)\, y e^{-\frac{y}{\alpha}} \Big|_{\beta}^{+\infty} + \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha \cdot \int\limits_{\beta}^{+\infty} e^{-\frac{y}{\alpha}} dy - \beta.$$

Подставим пределы интегрирования и возьмём интеграл

$$\frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{\beta}{\alpha}} (-\alpha)\, y e^{-\frac{y}{\alpha}} \Big|_{\beta}^{+\infty} + \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha \cdot \int\limits_{\beta}^{+\infty} e^{-\frac{y}{\alpha}} dy - \beta = e^{\frac{\beta}{\alpha}} \beta \cdot e^{-\frac{\beta}{\alpha}} - e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha e^{-\frac{y}{\alpha}} \Big|_{\beta}^{+\infty} - \beta.$$

Сократим экспоненты и подставим пределы интегрирования во втором слагаемом

$$e^{\frac{\beta}{\alpha}} \beta \cdot e^{-\frac{\beta}{\alpha}} - e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha e^{-\frac{y}{\alpha}} \Big|_{\beta}^{+\infty} - \beta = \beta + \alpha e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{\beta}{\alpha}} - \beta = \alpha.$$

Получили, что оценка α^* — тоже состоятельная.

4.20

Задание. Пусть задана выборка из двухпараметричного распределения Лапласа с плотностью

$$f_{\mu,\sigma}(y) = \frac{e^{-\frac{|y-\mu|}{\sigma}}}{2\sigma},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

Постройте оценку максимального правдоподобия двумерного параметра (μ, σ).

Решение. Записываем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{X}, \mu, \sigma\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{\mu,\sigma}(X_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma} \cdot e^{-\frac{|X_i-\mu|}{\sigma}} = \frac{1}{(2\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-\mu|}.$$

Находим логарифм

$$l\left(\vec{X}, \mu, \sigma\right) = -n\,ln\,(2\sigma) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu| = -n\,ln2 - n\,ln\sigma - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu|\,.$$

Дифференцировать по μ не можем. Хотим максимизировать функцию правдоподобия. Нужно минимизировать сумму X_i — точки на оси. $|X_i - \mu|$ — расстояние.

Вариационный ряд имеет понятие медианы. Это приблизительно средина вариационного ряда

$$\mu^* = \begin{cases} X_{(m+1)}, & n = 2m+1, \\ \frac{X_{(m)}+X_{(m+1)}}{2}, & n = 2m \end{cases}$$

— аналог с центром масс треугольника, который задаётся как точка пересечения медиан.

Найдём оценку второго параметра. Нужно взять производную и приравнять к нулю

$$\frac{\partial l\left(\vec{X}, \mu, \sigma\right)}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu| = \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu| - n\right) = 0.$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu| = n.$$

Отсюда оценка равна

$$\sigma^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i - \mu^*|}{n} = \left|\overline{X - \mu^*}\right|.$$

Занятие 5. Достаточные статистики

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение условного распределения, определение достаточной статистики.

$P\left(\xi \in \Delta \mid \mathcal{F}'\right) = M\left[\mathbb{1}_{\Delta}\left(\xi\right) \mid \mathcal{F}'\right]$.

Статистика T называется достаточной для параметра θ, если условное распределение при известном T не зависит от параметра θ.

Сформулируйте теорему про характеризацию достаточной статистики.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$p\left(x, \theta\right), \ \theta \in \Theta.$$

Статистика T является достаточной тогда и только тогда, когда функция правдоподобия $L\left(\vec{x}, \theta\right)$ допускает факторизацию, то есть может быть представлена произведением двух функций следующего вида

$$L\left(\vec{x}, \theta\right) = h\left(T, \theta\right) \cdot g\left(\vec{x}\right).$$

Аудиторные задачи

5.3

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Бернулли с параметром p. Выясните, является ли $\overline{X}$ достаточной статистикой для параметра p.

Решение. Записываем условное распределение.

Пусть $k_i = 0$ или 1.

По определению условной вероятности

$$P\left\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n | \,\overline{X} = y\right\} =$$
$$= \frac{P\left\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n, \overline{X} = y\right\}}{P\left\{\overline{X} = y\right\}}.$$

Выборочное среднее $\overline{X}$ выражаем через сумму

$$\frac{P\left\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n, \overline{X} = y\right\}}{P\left\{\overline{X} = y\right\}} =$$
$$= \frac{P\left\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = ny\right\}}{P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = ny\right\}}.$$

Все X_i — независимы, следовательно, будет произведение вероятностей событий

$$\frac{P\left\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = ny\right\}}{P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = ny\right\}} =$$
$$= \frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = ny\right\} P\left\{X_1 = k_1\right\} \cdot \ldots \cdot P\left\{X_n = k_n\right\}}{P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = ny\right\}}.$$

Сумма распределена по биномиальному распределению с параметрами n, p. Подставляем значения вероятностей

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = ny\right\} P\left\{X_1 = k_1\right\} \cdot \ldots \cdot P\left\{X_n = k_n\right\}}{P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = ny\right\}} =$$
$$= \frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = ny\right\} p^{k_1} (1-p)^{1-k_1} \cdot \ldots \cdot p^{k_n} (1-p)^{1-k_n}}{C_n^{ny} p^{ny} (1-p)^{n+ny}}.$$

Воспользуемся индикатором

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = ny\right\} \cdot p^{k_1} (1-p)^{1-k_1} \cdot \ldots \cdot p^{k_n} (1-p)^{1-k_n}}{C_n^{ny} p^{ny} (1-p)^{n+ny}} =$$
$$= \frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = ny\right\} \cdot p^{ny} (1-p)^{n-ny}}{C_n^{ny} p^{ny} (1-p)^{n-ny}}.$$

Всё, что связано с p, пропадает

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = ny\right\} \cdot p^{ny} \left(1-p\right)^{n-ny}}{C_n^{ny} p^{ny} \left(1-p\right)^{n-ny}} = \frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = ny\right\}}{C_n^{ny}}.$$

Зависимости от p нет. Отсюда следует, что $\overline{X}$ — достаточная статистика.

5.4

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Найдите условное распределение выборки при условии

$$X_1 + \ldots + X_n = k.$$

Выясните, является ли $\overline{X}$ достаточной статистикой для параметра λ.

Решение. Это дискретное распределение

$$P\left\{X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i = k\right\} = \frac{P\left\{X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right\}}{P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right\}}.$$

Случайные величины X_i — независимы

$$\frac{P\left\{X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right\}}{P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right\}} = \frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k\right\} P\left\{X_1 = k_1\right\} \cdot \ldots \cdot P\left\{X_n = k_n\right\}}{P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right\}}.$$

Имеем распределение Пуассона. Сумма независимых случайных величин имеет распределение Пуассона с параметром λn. Подставляем значения вероятностей

$$\frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k\right\} P\left\{X_1 = k_1\right\} \cdot \ldots \cdot P\left\{X_n = k_n\right\}}{P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right\}} =$$

$$= \mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^{n} k_i = k\right\} \cdot \frac{\frac{\lambda^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{k_n}}{k_n!} \cdot e^{-\lambda}}{\frac{(\lambda n)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k\right\} k!}{k_1! \ldots k_n! n^k}.$$

Видим, что нет зависимости от λ, следовательно, выборочное среднее $\overline{X}$ — достаточная статистика для неизвестного λ.

5.5

Задание. Пусть $X_1, \ldots X_n$ — выборка из нормального распределение со средним a и единичной дисперсией. Найдите условное совместное распределение выборки при условии $X_1 + \ldots + X_n = y$. Выясните, является ли $\overline{X}$ достаточной статистикой для параметра a.

Решение. Нужно записать функцию правдоподобия

$$L\left(X_1, \ldots, X_n, a\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(X_i-a)^2}{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \cdot e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(X_i-a)^2}{2}}.$$

Откроем квадрат и запишем в статистических обозначениях

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \cdot e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(X_i-a)^2}{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \cdot e^{-\frac{n\overline{X^2}}{2} an\overline{X} - \frac{a^2 n}{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \cdot e^{-\frac{n\overline{X^2}}{2}} \cdot e^{an\overline{X} - \frac{a^2 n}{2}},$$

где

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \cdot e^{-\frac{n\overline{X^2}}{2}} = h\left(X_1, \ldots, X_n\right), \; e^{an\overline{X} - \frac{a^2 n}{2}} = g\left(a, \overline{X}\right).$$

Предьявляем функции, о которых идёт речь в теореме.

По теореме про характеризацию достаточной статистики $\overline{X}$ — достаточная статистика.

5.6

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения с нулевым средним и дисперсией σ^2. Найдите достаточную статистику со значениями в $\mathbb{R}$ для параметра σ^2.

Решение.

$$L\left(\vec{X}, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{X_i^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \cdot e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \cdot e^{-\frac{n\overline{X^2}}{2\sigma^2}}.$$

Достаточной статистикой будет второй выборочный момент.

$h\left(X_1, \ldots, X_n\right) = 1$, тогда

$$g\left(\sigma^2, \overline{X^2}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \cdot e^{-\frac{n\overline{X^2}}{2\sigma^2}}.$$

Для σ^2 достаточная статистика — $\hat{\sigma^2} = \overline{X^2}$.

5.7

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$. Найдите достаточную статистику со значениями в $\mathbb{R}$ для параметра θ.

Решение.

$$L\left(\vec{X}, \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\left\{X_i \in [0, \theta]\right\}.$$

Все X_i должны быть не меньше нуля и не больше θ. Получаем

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\left\{X_i \in [0, \theta]\right\} = \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq 0, X_{(n)} \leq \theta\right\}.$$

Разделим индекатор на 2

$$\frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq 0, X_{(n)} \leq \theta\right\} = \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq 0\right\} \cdot \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(n)} \leq \theta\right\},$$

где первый индикатор — это функция $h\left(\vec{X}\right)$, всё остальное — $g\left(\theta, X_{(n)}\right)$.

Вывод: $X_{(n)}$ — достаточная статистика для θ.

5.8

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[a, b]$. Выясните, какие из статистик $\overline{X}$, $X_{(n)}$, $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ являются достаточными для двумерного параметра (a, b).

Решение. Для оценки (a, b) будет достаточно $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$.

Информацию про средину отрезка даёт $\overline{X}$. Этой информации недостаточно для оценки концов .

Зная $X_{(n)}$, будем знать, где правая граница, следовательно, этой информации недостаточно.

Ищем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{X}, a, b\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left\{X_i \in [a, b]\right\} = \frac{1}{(b-a)^n} \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq a, X_{(n)} \leq b\right\}.$$

Записываем через функции, которые используются в теореме о характеризации достаточной статистики

$$\frac{1}{(b-a)^n} \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq a, X_{(n)} \leq b\right\} = g\left(a, b, X_{(1)}, X_{(n)}\right),\ h\left(\vec{X}\right) = 1.$$

По теореме о характеризации, $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ — достаточная статистика для (a, b).

Допустим, $\overline{X}$ — достаточная статистика, значит должно выполняться $L\left(\vec{X}, a, b\right) = h\left(\vec{X}\right) \cdot g\left(a, b, \overline{X}\right)$.

Пусть имеем две выборки: $X_1^1, \ldots, X_n^1$ и $X_1^2, \ldots, X_n^2$, причём

$$\overline{X^1} = \overline{X^2} = c.$$

Допустим, что $X_{(1)}^1 = a$, $X_{(n)}^1 = b$, следовательно, $X_i^1 \sim U\left([a, b]\right)$.

Вторую выборку подбираем так, чтобы наблюдаемое значение выходило за пределы $[a, b]$, например, $X_{(1)}^2 < a$, но $X_{(i)}^2 \in (a, b)$ при $i \neq 1$.

Ищем функции правдоподобия для этих двух выборок

$$L\left(\vec{X^1}\right) = \frac{1}{(b-a)^n} = h\left(\vec{X^1}\right) \cdot g\left(a, b, c\right),\ L\left(\vec{X^2}\right) = 0 = h\left(\vec{X^2}\right) g\left(a, b, c\right).$$

Ноль — реакция на индикатор.

Если бы взяли выборку внутри (a, b), то ничего бы не поменялось.

Но как только пересекаем границу, то есть реакция, то есть h уже зависит от концов отрезка, h зависит от a, b.

Для статистики $X_{(n)}$ — аналогично.

5.9

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[a(\theta\ ), b(\theta)]$. Докажите, что если $a(\theta) \uparrow$, $b(\theta) \downarrow$ с возрастанием θ, то статистика $T = \min\left(a^{-1}\left(X_{(1)}\right), b^{-1}\left(X_{(n)}\right)\right)$ достаточная для параметра θ.

Решение. Записываем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{X}, a(\theta), b(\theta)\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b(\theta) - a(\theta)} \cdot \mathbb{1}\left\{X_i \in [a(\theta), b(\theta)]\right\}.$$

Вычисляем произведение

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b(\theta) - a(\theta)} \cdot \mathbb{1}\left\{X_i \in [a(\theta), b(\theta)]\right\} =$$
$$= \frac{1}{\left[b(\theta) - a(\theta)\right]^n} \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq a(\theta),\ X_{(n)} \leq b(\theta)\right\}.$$

Это строго монотонные функции. Можем решить неравенства относительно θ. Получим

$$\frac{1}{\left[b(\theta) - a(\theta)\right]^n} \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq a(\theta),\ X_{(n)} \leq b(\theta)\right\} =$$
$$= \frac{1}{\left[b(\theta) - a(\theta)\right]^n} \cdot \mathbb{1}\left\{\theta \leq a^{-1}\left(X_{(1)}\right),\ \theta \leq b^{-1}\left(X_{(n)}\right)\right\} =$$
$$= \frac{1}{\left[b(\theta) - a(\theta)\right]^n} \cdot \mathbb{1}\left\{\theta \leq T\right\} = g(\theta, T),$$

а $h \equiv 1$.

Отсюда T — достаточная статистика для θ.

Домашнее задание

5.11

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами m и p. Найдите условное распределение выборки при условии $X_1 + \ldots, X_n = k$. Выясните, является ли $\overline{X}$ достаточной статистикой для параметра p при известном m.

Решение. Это дискретное распределение

$$P\left(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \\ = \frac{P\left(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right)}.$$

Имеем биномиальное распределение. Сумма независимых случайных величин имеет биномиальное распределение с параметрами mn и p. Подставляем значения вероятностей

$$\frac{P\left(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k\right)} = \\ = \frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k\right\} C_m^{k_1} p^{k_1} q^{m-k_1} \cdot \ldots \cdot C_m^{k_n} p^{k_n} q^{m-k_n}}{C_{mn}^{k} p^k q^{mn-k}} = \\ = \frac{\mathbb{1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k\right\} C_m^{k_1} \cdot \ldots C_m^{k_n}}{C_{mn}^{k}}.$$

Видим, что нет зависимости от p, следовательно, выборочное среднее $\overline{X}$ — достаточная статистика для неизвестного p.

5.12

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения со средним a и дисперсией σ^2. Найдите достаточную статистику со значениями в $\mathbb{R}^2$ для двумерного параметра $\left(a, \sigma^2\right)$.

Решение. Ищем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{X}, a, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(X_i - a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}.$$

Раскрываем квадрат

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2aX_i+a^2\right)}.$$

Записываем через статистические величины

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2aX_i+a^2\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}\cdot e^{-\frac{n\overline{X^2}}{2\sigma^2}}\cdot e^{\frac{n\overline{X}a}{2\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{a^2n}{2\sigma^2}}.$$

Эта величина равна $g\left(a,\sigma^2,\overline{X},\overline{X^2}\right)$, $h\left(\vec{X}\right)=1$.

По теореме о характеризации, $\left(\overline{X},\overline{X^2}\right)$ — достаточная статистика для $\left(a,\sigma^2\right)$.

5.13

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке

a) $[\theta,\theta+1]$;

b) $[\theta,2\theta]$.

Найдите достаточную для параметра θ статистику со значениями в $\mathbb{R}^2$.

Решение.

a) Ищем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{X},\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}\left\{X_i\in[\theta,\theta+1]\right\}.$$

Все X_i должны быть не меньше θ и не больше $(\theta+1)$. Получаем

$$\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}\left\{X_i\in[\theta,\theta+1]\right\}=\mathbb{1}\left\{X_{(1)}\ge\theta,X_{(n)}\le\theta+1\right\}.$$

Это равно $g\left(\theta,X_{(1)},X_{(n)}-1\right)$, $h\left(\vec{X}\right)=1$.

Вывод: $\left(X_{(1)},X_{(n)}-1\right)$ — достаточная статистика для θ;

b) ищем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{X},\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\cdot\mathbb{1}\left\{X_i\in[\theta,2\theta]\right\}.$$

Все X_i должны быть не меньше чем θ, не больше 2θ. Получим

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\cdot\mathbb{1}\left\{X_i\in[\theta,2\theta]\right\}=\frac{1}{\theta^n}\cdot\mathbb{1}\left\{X_{(1)}\ge\theta,X_{(n)}\le2\theta\right\}.$$

Это равно
$$g\left(\theta, X_{(1)}, \frac{X_{(n)}}{2}\right),\ h\left(\vec{X}\right) = 1.$$
Вывод:
$$\left(X_{(1)}, \frac{X_{(n)}}{2}\right)$$
— достаточная статистика для θ.

5.14

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[-\theta, \theta]$. Найдите достаточную статистику для параметра θ со значениями в $\mathbb{R}$.

Решение.
$$L\left(\vec{X}, \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta} \cdot \mathbb{1}\left\{X_i \in [-\theta, \theta]\right\}.$$
Все X_i должны быть не меньше $(-\theta)$ и не больше θ. Получим
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta} \cdot \mathbb{1}\left\{X_i \in [-\theta, \theta]\right\} = \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq -\theta, X_{(n)} \leq \theta\right\}.$$
Умножим первое неравенство на (-1). Получим
$$\frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq -\theta, X_{(n)} \leq \theta\right\} =$$
$$= \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot \mathbb{1}\left\{-X_{(1)} \leq \theta, X_{(n)} \leq \theta\right\}.$$
По теореме о характеризации это равно $h\left(\vec{X}\right) \cdot g\left(\theta, \max\left(-X_{(1)}, X_{(n)}\right)\right)$.

Вывод: $\max\left(-X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ — достаточная статистика для θ.

5.15

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из Γ-распределения с плотностью
$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot y^{\beta-1} e^{-\alpha y}, & y \geq 0, \\ 0, \quad y < 0, \end{cases} \qquad \alpha, \beta > 0.$$
Найдите достаточную статистику для параметра (α, β).

Решение. Запишем функцию правдоподобия данной выборки
$$L(X_1, \ldots, X_n, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n} f_{\alpha,\beta}(X_i) = \frac{\alpha^{n\beta}}{\Gamma^n(\beta)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(X_i^{\beta-1} e^{-\alpha X_i}\right) \cdot \mathbb{1}\left\{X_{(1)} \geq 0\right\}.$$

Раскроем скобки в произведении

$$\frac{\alpha^{n\beta}}{\Gamma^n(\beta)}\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(X_i^{\beta-1}e^{-\alpha X_i}\right)\cdot\mathbb{1}\left\{X_{(1)}\geq 0\right\}=\frac{\alpha^{n\beta}}{\Gamma^n(\beta)}\cdot\prod_{i=1}^{n}X_i^{\beta-1}\cdot e^{-\alpha\overline{X}n}\cdot\mathbb{1}\left\{X_{(1)}\geq 0\right\}.$$

Видно, что функция правдоподобия подаётся в виде произведения функции $h(X_1,\ldots,X_n)=\mathbb{1}\left\{X_{(1)}\geq 0\right\}$, которая не зависит от неизвестных параметров, и функции

$$g(X_1,\ldots,X_n,\alpha,\beta)=\frac{\alpha^{n\beta}}{\Gamma^n(\beta)}\cdot\prod_{i=1}^{n}X_i^{\beta-1}\cdot e^{-\alpha\overline{X}n},$$

которая зависит от неизвестных параметров и от функции выборки

$$T_1(X_1,\ldots,X_n)=\overline{X}$$

и

$$T_2(X_1,\ldots,X_n)=\prod_{i=1}^{n}X_i.$$

Тогда, по теореме о характеризации достаточной статистики, двумерная функция

$$T(X_1,\ldots,X_n)=(T_1(X_1,\ldots,X_n),T_2(X_1,\ldots,X_n))=\left(\overline{X},\prod_{i=1}^{n}X_i\right)$$

является достаточной статистикой для параметра (α,β).

5.16

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[a(\theta),b(\theta)]$. Докажите, что если $a(\theta)\downarrow$, $b(\theta)\uparrow$ с возрастанием θ, то статистика $T=\max\left(a^{-1}\left(X_{(1)}\right),b^{-1}\left(X_{(n)}\right)\right)$ достаточная для параметра θ. По выборке с равномерным распределением на $[-\theta,\theta]$ найдите достаточную статистику для параметра θ со значениями в $\mathbb{R}$.

Решение. Запишем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{X},a(\theta),b(\theta)\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{b(\theta)-a(\theta)}\cdot\mathbb{1}\left\{X_i\in[a(\theta),b(\theta)]\right\}.$$

Вычисляем произведение

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{b(\theta)-a(\theta)}\cdot\mathbb{1}\left\{X_i\in[a(\theta),b(\theta)]\right\}=$$
$$=\frac{1}{[b(\theta)-a(\theta)]^n}\cdot\mathbb{1}\left\{X_{(1)}\geq a(\theta),\ X_{(n)}\leq b(\theta)\right\}.$$

Это строго монотонные функции. Можем решить неравенства относительно θ. Получим

$$\frac{1}{\left[b\left(\theta\right)-a\left(\theta\right)\right]^{n}}\cdot\mathbb{1}\left\{X_{(1)\geq a(\theta),\, X_{(n)}\leq b(\theta)}\right\}=$$
$$=\frac{1}{\left[b\left(\theta\right)-a\left(\theta\right)\right]^{n}}\cdot\mathbb{1}\left\{\theta\geq a^{-1}\left(X_{(1)}\right),\,\theta\geq b^{-1}\left(X_{(n)}\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{\left[b\left(\theta\right)-a\left(\theta\right)\right]^{n}}\cdot\mathbb{1}\left\{\theta\geq T\right\}=g\left(\theta,T\right),$$

а $h\equiv 1$.

Значит, T — достаточная статистика для θ.

Для отрезка $[-\theta,\theta]$ получаем $b\left(\theta\right)=\theta$, $a\left(\theta\right)=-\theta$. Имеем неравенства $X_{(1)}\geq-\theta$, $X_{(n)}\leq\theta$, откуда $\theta\geq-X_{(1)}$, $\theta\geq X_{(n)}$, то есть

$$T=\max\left(-X_{(1)},X_{(n)}\right).$$

Занятие 6. Теорема Колмогорова про улучшение оценок. Неравенство Рао-Крамера

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение достаточной статистики.

Статистика T называется достаточной для параметра θ, если условное распределение при известном T не зависит от параметра θ.

Сформулируйте теорему про характеризацию достаточной статистики.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$p(x, \theta), \ \theta \in \Theta.$$

Статистика T является достаточной тогда и только тогда, когда функция правдоподобия $L(\vec{x}, \theta)$ допускает факторизацию, то есть может быть представлена произведением двух функций следующего вида

$$L(\vec{x}, \theta) = h(T, \theta) \cdot g(\vec{x}).$$

Сформулируйте теорему Колмогорова про улучшение оценки с помощью достаточной статистики.

Оптимальная оценка единственная (в том случае, когда она существует).

Что называется количеством информации Фишера?

$$D_\theta U(\vec{x}, \theta) = n D_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} ln\, p(x, \theta) \right) = n I_0,$$

где nI_0 — количество информации Фишера.

Запишите неравенство Рао-Крамера.

Пусть $\hat{\theta}$ — несмещённая оценка для параметра θ. Тогда

$$\forall\theta \in \Theta:\, D_\theta\hat{\theta} \geq \frac{1}{nI_0}.$$

Как угодно лучшую оценку взять нельзя.

Какая оценка называется эффективной?

Если $\hat{\theta}$ такова, что $\hat{\theta}$ — несмещённая и

$$D_\theta\hat{\theta} = \frac{1}{nI_0},\, \theta \in \Theta,$$

то $\hat{\theta}$ называется эффективной оценкой.

Приведите определение экспоненциальной семьи распределений.

Аудиторные задачи

6.3

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$. Найдите несмещённую оценку неизвестного параметра $\tau(\theta, y) = P(X_1 > y)$ и улучшите её усреднением по достаточной для параметра θ статистике.

Решение. $X_{(n)}$ — достаточная статистика для θ.

Нужно найти $\hat{\tau}$ из условия, что она была бы несмещённой, что

$$M\hat{\tau} = \tau = P(X_1 > y).$$

Берём в качестве $\hat{\tau} = \mathbb{1}\{X_1 > y\}$ — это несмещённая оценка для τ. Теперь улучшаем эту оценку. $\tau^* = M\left(\hat{\tau} \mid X_{(n)}\right) = M\left\{\mathbb{1}\{X_1 < y\} \mid X_{(n)}\right\}$. Индикатор может принимать значения 0 и 1, значит

$$M\left\{\mathbb{1}\{X_1 < y\} \mid X_{(n)}\right\} = \\ = 0 \cdot P\left(\mathbb{1}\{X_1 > y\} = 0 \mid X_{(n)}\right) + 1 \cdot P\left(\mathbb{1}\{X_1 > y\} = 1 \mid X_{(n)}\right).$$

Первое слагаемое пропадает

$$0 \cdot P\left(\mathbb{1}\{X_1 > y\} = 0 \mid X_{(n)}\right) + 1 \cdot P\left(\mathbb{1}\{X_1 > y\} = 1 \mid X_{(n)}\right) = \\ = P\left(X_1 > y \,\middle|X_{(n)}\right) = f\left(X_{(n)}\right).$$

Ищем $f(z) = P\left(X_1 > y \mid X_{(n)} = z\right)$. Выборка имеет равномерное распределение, то есть распределение, которое имеет плотность. Вероятность попадания в точку равна нулю

$$P\left(X_1 > y \mid X_{(n)} = z\right) = \lim_{h\to 0} P\left\{X_1 > y \mid X_{(n)} \in [z, z+h]\right\}.$$

Воспользуемся определением условной вероятности

$$\lim_{h\to 0} P\left\{X_1 > y \mid X_{(n)} \in [z, z+h]\right\} = \lim_{h\to 0} \frac{P\left\{X_1 > y, X_{(n)} \in [z, z+h]\right\}}{P\left\{X_{(n)} \in [z, z+h]\right\}}.$$

Это нужно рассматривать при $y < z$. Разбиваем на разность двух вероятностей в числителе и знаменателе

$$\lim_{h\to 0} \frac{P\left\{X_1 > y, X_{(n)} \in [z, z+h]\right\}}{P\left\{X_{(n)} \in [z, z+h]\right\}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{P\left\{X_1 > y, X_{(n)} \le z+h\right\}}{P\left\{X_{(n)} \le z+h\right\} - P\left\{X_{(n)} \le z\right\}} - \frac{P\left\{X_1 > y, X_{(n)} \le z\right\}}{P\left\{X_{(n)} \le z+h\right\} - P\left\{X_{(n)} \le z\right\}}\right].$$

Переходим к функции распределения выборки

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{P\left\{X_1 > y, X_{(n)} \le z+h\right\}}{P\left\{X_{(n)} \le z+h\right\} - P\left\{X_{(n)} \le z\right\}} - \frac{P\left\{X_1 > y, X_{(n)} \le z\right\}}{P\left\{X_{(n)} \le z+h\right\} - P\left\{X_{(n)} \le z\right\}}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{[F(z+h) - F(y)]\,[F(z+h)]^{n-1}}{[F(z+h)]^n - [F(z)]^n} - \frac{[F(z) - F(y)]\,[F(z)]^{n-1}}{[F(z+h)]^n - [F(z)]^n}\right\}.$$

Знаменатель и числитель стремятся к нулю. Дифференцируем по h числитель и знаменатель. Это правило Лопиталя

$$\lim_{h\to 0} \left\{\frac{[F(z+h) - F(y)]\,[F(z+h)]^{n-1}}{[F(z+h)]^n - [F(z)]^n} - \frac{[F(z) - F(y)]\,[F(z)]^{n-1}}{[F(z+h)]^n - [F(z)]^n}\right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{p(z+h)\,[F(z+h)]^{n-1}}{n\,[F(z+h)]^{n-1}\,p(z+h)} + \frac{(n+1)\,[F(z+h)]^{n-2}\,p(z+h)\,[F(z+h) - F(y)]}{n\,[F(z+h)]^{n-1}\,p(z+h)}\right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) + (n-1)\,[F(z+h) - F(y)]}{nF(z+h)}.$$

Переходим к пределу

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) + (n-1)\,[F(z+h) - F(y)]}{nF(z+h)} = \frac{F(z) + (n+1)\,[F(z) - F(y)]}{nF(z)}.$$

Приводим подобные

$$\frac{F(z) + (n+1)\,[F(z) - F(y)]}{nF(z)} = \frac{nF(z) - (n-1)\,F(y)}{nF(z)}.$$

Почленно поделим числитель на знаменатель

$$\frac{nF(z)-(n-1)F(y)}{nF(z)}=1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{F(y)}{F(z)}.$$

Подставляем значения функции равномерного распределения на отрезке $[0,\theta]$. Получаем

$$1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{F(y)}{F(z)}=1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{y}{z}.$$

Окончательно

$$f\left(X_{(n)}\right)=1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{y}{X_{(n)}}.$$

6.4

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. В качестве оценки параметра $\theta=e^{-\lambda}$ рассматривают статистику $\hat{\theta}=\mathbb{1}\{X_1=0\}$. Вычислите смещение $b_n(\theta)=M\hat{\theta}-\theta$ этой оценки и улучшите её усреднением по достаточной статистике для параметра θ статистикой.

Решение. Неизвестный параметр — это $e^{-\lambda}=\theta$.

Ищем смещение $M\hat{\theta}=M\mathbb{1}\{X_1=0\}=P\{X_1=0\}=e^{-\lambda}=\theta$, значит, смещение $b_n(\theta)=0$. Это несмещённая оценка.

Займёмся поиском достаточной статистики

$$L\left(\vec{X},\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}\cdot e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{n\overline{X}}}{X_1!\ldots X_n!}\cdot e^{-\lambda n}=\frac{1}{X_1!\ldots X_n!}\cdot\lambda^{n\overline{X}}e^{-\lambda n}.$$

Вывод: $\overline{X}$ — достаточная статистика для λ, а значит и для θ, как функции от λ.

Нудно найти условное математическое ожидание $M\left(\hat{\theta}\,\middle|\,\overline{X}\right)=f\left(\overline{X}\right)$. Начнём с $f(y)=M\left(\hat{\theta}\,\middle|\,\overline{X}=y\right)=M\left(\mathbb{1}\{X_1=0\}\,\middle|\,\overline{X}=y\right)$. Индикатор — это дискретная случайная величина, которая принимает 2 значения

$$M\left(\mathbb{1}\{X_1=0\}\,\middle|\,\overline{X}=y\right)=1\cdot P\left(X_1=0\,\middle|\,\overline{X}=y\right)=\frac{P\left(X_1=0,\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=ny\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=ny\right)}.$$

В числителе стоит случайное событие $X_1=0$. Оно означает, что суммировать можно от двух

$$\frac{P\left(X_1=0,\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=ny\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=ny\right)}=\frac{P(X_1=0)\,P\left(\sum\limits_{i=2}^{n}X_i=ny\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=ny\right)}.$$

Сумма независимых пуассоновских случайных величин имеет распределение Пуассона с параметром, который равен сумме параметров

$$\frac{P\left(X_1=0\right)P\left(\sum\limits_{i=2}^{n}X_i=ny\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=ny\right)}=\frac{e^{-\lambda}\cdot\frac{((n-1)\lambda)^{ny}}{(ny)!}\cdot e^{-\lambda(n-1)}}{\frac{(n\lambda)^{ny}}{(ny)!}\cdot e^{-\lambda n}}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{ny}.$$

Чтобы записать ответ, нужно вместо y записать $\overline{X}$. Получим

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\overline{X}}.$$

Когда $n\to\infty$, эта оценка стремится к $e^{-\overline{X}}$.

6.5

Задание. Пользуясь неравенством Рао-Крамера, выясните, является ли эффективной оценка $\overline{X}$ параметра p распределения Бернулли.

Решение. $X_1,\ldots,X_n$ — выборка.

Несмещённой оценкой для параметра является $\hat{p}=\overline{X}$. Формально в этом убедимся. Итак,

$$M\hat{p}=M\overline{X}=\frac{1}{n}\cdot M\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

Все случайные величины одинаково распределены, следовательно, все математические ожидания совпадают

$$\frac{1}{n}\cdot M\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{n}\cdot nMX_1=MX_1=p.$$

Ищем дисперсию

$$D\hat{p}=D\overline{X}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot D\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

Дисперсии равны. Случайные величины независимы, следовательно, дисперсия суммы — это сумма дисперсий

$$\frac{1}{n^2}\cdot D\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{n^2}\cdot nDX_1=\frac{1}{n}\cdot p\left(1-p\right).$$

Сначала нужна функция правдоподобия для одного наблюдения

$$L\left(X_1,p\right)=p^{X_1}\left(1-p\right)^{1-X_1}.$$

Логарифмируем $ln\, L\,(X_1, p) = X_1\, ln\, p + (1-p)\, ln\, (1-p)$. Ищем первую производную

$$\frac{\partial}{\partial p} ln\, L\,(X_1, p) = \frac{X_1}{p} - \frac{1-X_1}{1-p}.$$

Ищем вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} ln\, L\,(X_1, p) = -\frac{X_1}{p^2} - \frac{1-X_1}{(1-p)^2}.$$

Пишем количество информации. Берём математическое ожидание со знаком «минус»

$$I\,(\theta) = M\left(\frac{X_1}{p} + \frac{1-X_1}{(1-p)^2}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1-p}{(1-p)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1-p+p}{p\,(1-p)} = \frac{1}{p\,(1-p)}.$$

Ищем обратную величину, делённую на n. Получаем

$$\frac{1}{nI\,(\theta)} = \frac{1}{n\,[p\,(1-p)]^{-1}} = \frac{p\,(1-p)}{n} = D\hat{p},$$

следовательно, $\hat{p}$ — эффективная оценка параметра p.

6.6

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного рпспределения с параметром p. Выясните, является ли эффективной оценка $\hat{\theta} = 1 + \overline{X}$ параметра

$$\theta = \frac{1}{p}.$$

Решение. Берём дисперсию

$$D\hat{\theta} = D\left(1 + \overline{X}\right) = D\overline{X} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n^2} \cdot nDX_1.$$

Сократим n и подставим значение дисперсии равномерного распределения

$$\frac{1}{n^2} \cdot nDX_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-p}{p^2}.$$

Можем записать это как функцию от θ. Получим

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{n} \cdot \left(\theta^2 - \theta\right).$$

Можно θ вынести за скобки

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\theta^2-\theta\right)=\frac{\theta}{n}\cdot(\theta-1)\,.$$

Записываем функцию правдоподобия для одного наблюдения

$$L\left(X_1,p\right)=p\left(1-p\right)^{X_1}.$$

Подставим оценку параметра

$$L\left(X_1,\theta\right)=\frac{1}{\theta}\cdot\left(1-\frac{1}{\theta}\right)^{X_1}=\frac{1}{\theta^{X_1+1}}\cdot(\theta-1)^{X_1}.$$

Логарифмируем $ln\,L\left(X_1,\theta\right)=-\left(X_1+1\right)ln\,\theta+X_1ln\left(\theta-1\right)$. Берём первую производную

$$\frac{\partial}{\partial\theta}ln\,L\left(X_1,\theta\right)=-\frac{X_1+1}{\theta}+\frac{X_1}{\theta-1}.$$

Берём вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}ln\,L\left(X_1,\theta\right)=\frac{X_1+1}{\theta^2}-\frac{X_1}{\left(\theta-1\right)^2}.$$

Берём математическое ожидание

$$MX_1=\frac{1-p}{p}.$$

Почленно поделим числитель на знаменатель

$$\frac{1-p}{p}=\theta-1.$$

Берём математическое ожидание второй производной функции правдоподобия со знаком «минус»

$$-M\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}ln\,L\left(X_1,\theta\right)\right]=-\frac{\theta}{\theta^2}+\frac{\theta-1}{\left(\theta-1\right)^2}=-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta-1}=\frac{-\theta+1+\theta}{\theta\left(\theta-1\right)}.$$

Приводим подобные

$$\frac{-\theta+1+\theta}{\theta\left(\theta-1\right)}=\frac{1}{\theta\left(\theta-1\right)}=I\left(\theta\right).$$

Формируем обратную величину и делим на n. Значит,

$$\frac{1}{nI\left(\theta\right)}=\frac{\theta\left(\theta-1\right)}{n}=D\hat{\theta}.$$

Получили, что оценка эффективная.

6.7

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $N\left(\theta, \sigma^2\right)$ с неизвестным параметром θ и известной дисперсией. Выясните, является ли статистика $\theta^* = \overline{X}$ эффективной оценкой параметра θ.

Решение. Проверим несмещённость

$$M\theta^* = M\overline{X} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot M\sum_{i=1}^{n} X_1 = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = \theta.$$

Несмещённость есть. Ищем дисперсию

$$D\theta^* = D\overline{X} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Воспользуемся независимостью случайных величин в выборке

$$\frac{1}{n^2} \cdot D\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n^2} \cdot nDX_1.$$

Случайные величины в выборке одинаково распределены, значит

$$\frac{1}{n^2} \cdot nDX_1 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Переходим к функции правдоподобия и оценке количества информации. Смотрим на одно наблюдение

$$L\left(X_1, \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{\left(X_1 - \theta\right)}{2\sigma^2}}.$$

Логарифмируем

$$ln\, L\left(X_1, \theta\right) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) - \left(X_1 - \theta\right)^2 \cdot \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Ищем первую производную

$$\frac{\partial}{\partial\theta} ln\, L\left(X_1, \theta\right) = 2\left(X_1 - \theta\right) \cdot \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{X_1 - \theta}{\sigma^2}.$$

Ищем вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} ln\, L\left(X_1, \theta\right) = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

Таким образом,

$$I\left(\theta\right) = -M\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Формируем величину

$$\frac{1}{nI\left(\theta\right)} = \frac{\sigma^2}{n} = D\theta^*,$$

значит, оценка эффективная.

6.8

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из экспоненциального распределения с плотностью

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Убедитесь, что оценка $\theta^* = \overline{X}$ — эффективная по Рао-Крамеру оценка неизвестного параметра θ.

Решение.

$$M\theta^* = M\overline{X} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot M\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = \theta,$$

значит, имеем несмещённость.

Теперь ищем дисперсию

$$D\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot DX_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2} = \frac{\theta^2}{n}.$$

Ищем количество информации. Начнём с функции правдоподобия

$$L(X_1, \theta) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{X_1}{\theta}} \cdot \mathbb{1}\{X_1 \geq 0\}.$$

Пусть $X_1 \geq 0$. Тогда берём логарифм

$$ln\, L(X_1, \theta) = -ln\, \theta - \frac{X_1}{\theta}.$$

Берём первую производную от логарифма функции прадоподобия

$$\frac{\partial ln\, L}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{X_1}{\theta^2}.$$

Берём вторую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial^2 ln\, L}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2X_1}{\theta^3}.$$

Ищем количество информации

$$I(\theta) = -M\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2X_1}{\theta^3}\right) = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \cdot MX_1 = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}.$$

Ищем обратную величину к количеству информации и делим на n. Получаем

$$\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta^2}{n} = D\theta^*.$$

Значит, выборочное среднее — эффективная оценка.

Домашнее задание

6.10

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения с параметрами $(a, 1)$. Улучшите оценку $\hat{a} = X_1$ усреднением по фиксированному значению достаточной статистики $\overline{X}$. Найдите распределение, математическое ожидание и дисперсию улучшенной оценки.

Решение. Улучшаем оценку

$$a^* = M\left(\hat{a} \mid \overline{X}\right) = M\left(X_1 \mid \overline{X}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_i \mid \overline{X}\right) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, \overline{X}\right).$$

Запишем через выборочное среднее

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, \overline{X}\right) = M\left(\overline{X} \mid \overline{X}\right) = \overline{X}.$$

Математическое ожидание равно

$$Ma^* = M\overline{X} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n} \cdot na = a,$$

дисперсия —

$$Da^* = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot nDX_1 = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

Она имеет нормальное распределение

$$a^* \sim N\left(a, \frac{1}{n}\right).$$

Так как $Ma^* = a$, то оценка несмещённая.

6.11

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. В качестве оценки параметра $\theta = e^{-\lambda}$ рассматривают статистику

$$\hat{\theta} = \overline{\mathbb{1}\left\{X = 0\right\}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{X_i = 0\right\}.$$

Вычислите смещение $b_n(\theta) = M\hat{\theta} - \theta$ этой оценки и выясните, является ли она эффективной.

Решение.

$$M\hat{\theta} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{X_i = 0\right\}\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{X_i = 0\right\}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} P\left(X_i = 0\right).$$

Подставляем значение вероятности для распределения Пуассона

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} P\left(X_i = 0\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1}{n} \cdot e^{-\lambda} \cdot n = e^{-\lambda}.$$

Подставляем полученное значение в формулу для смещения

$$b_n\left(\theta\right) = M\hat{\theta} - \theta = e^{-\lambda} - e^{-\lambda} = 0.$$

6.12

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выбока из распределения с плотностью $f_\theta\left(y\right) = \theta y^{\theta-1}$, $y \in (0,1)$, где $\theta > 0$. Докажите, что статистика $-\overline{\ln X}$ несмещённая и эффективная оценка для параметра

$$\tau = \frac{1}{\theta}.$$

Решение.

$$M\left(-\overline{\ln X}\right) = M\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right) = -\frac{1}{n} \cdot M\sum_{i=1}^{n}\ln X_i = -\frac{1}{n} \cdot nM\ln X_1.$$

Сократим константы

$$-\frac{1}{n} \cdot nM\ln X_1 = -M\ln X_1.$$

Найдём математическое ожидание логарифма случайной величины выборки

$$M\ln X_1 = \int\limits_0^1 \ln x \cdot \theta x^{\theta-1}dx = \theta\int\limits_0^1 x^{\theta-1}\ln x dx.$$

Возьмём интеграл по частям

$$u = \ln x,\ dv = x^{\theta-1}dx,\ du = \frac{dx}{x},\ v = \frac{x^\theta}{\theta},$$

получим

$$\theta\int\limits_0^1 x^{\theta-1}\ln x dx = \theta \cdot \ln x \cdot \left.\frac{x^\theta}{\theta}\right|_0^1 - \theta\int\limits_0^1 \frac{x^\theta}{\theta} \cdot \frac{dx}{x} = -\int\limits_0^1 x^{\theta-1}dx = -\left.\frac{x^\theta}{\theta}\right|_0^1 = -\frac{1}{\theta}.$$

Запишем через параметр

$$-\frac{1}{\theta} = -\tau.$$

Подставляем найденное значение математического ожидания в математическое ожидание оценки $-M\ln X_1 = -\left(-\tau\right) = \tau$, значит, имеем несмещённость.

Теперь ищем дисперсию

$$D\left(-\overline{ln\,X}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot D\sum_{i=1}^{n}ln\,X_i=\frac{1}{n}\left[M\left(ln\,X_1\right)^2-\left(M\,ln\,X_1\right)^2\right].$$

Вычислим первое слагаемое из скобки

$$M\,ln^2X_1=\int\limits_0^1 ln^2x\cdot\theta x^{\theta-1}dx=\theta\int\limits_0^1 x^{\theta-1}ln^2xdx.$$

Возьмём интеграл по частям

$$u=ln^2x,\,dv=x^{\theta-1}dx,\,du=2ln\,x\cdot\frac{dx}{x},\,v=\frac{x^\theta}{\theta}.$$

Получим

$$\theta\int\limits_0^1 x^{\theta-1}ln^2xdx=\theta\cdot ln^2x\cdot\left.\frac{x^\theta}{\theta}\right|_0^1-\theta\int\limits_0^1\frac{x^\theta}{\theta}\cdot 2ln\,x\cdot\frac{dx}{x}.$$

Первое слагаемое зануляется, во втором сокращаем θ и выносим двойку за знак интеграла

$$\theta\int\limits_0^1\frac{x^\theta}{\theta}\cdot 2ln\,x\cdot\frac{dx}{x}=-2\int\limits_0^1 x^{\theta-1}ln\,xdx.$$

Возьмём интеграл по частям

$$u=ln\,x,\,dv=x^{\theta-1}dx,\,du=\frac{dx}{x},\,v=\frac{x^\theta}{\theta}.$$

Получим

$$-2\int\limits_0^1 x^{\theta-1}ln\,xdx=-2\cdot ln\,x\cdot\left.\frac{x^\theta}{\theta}\right|_0^1+2\int\limits_0^1\frac{x^\theta}{\theta}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{2}{\theta}\int\limits_0^1 x^{\theta-1}dx=\frac{2}{\theta^2}.$$

Дисперсия оценки равна

$$\frac{1}{n}\left[M\left(ln\,X_1\right)^2-\left(M\,ln\,X_1\right)^2\right]=\frac{1}{n}\left(\frac{2}{\theta^2}-\frac{1}{\theta^2}\right)=\frac{1}{n\theta^2}=\frac{\tau^2}{n}.$$

Ищем количество информации. Начинаем с функции правдоподобия

$$L\left(X_1,\tau\right)=\frac{1}{\tau}\cdot X_1^{\frac{1}{\tau-1}}\cdot\mathbb{1}\left\{X_1\in(0,1)\right\}.$$

Пусть $X_1 \in (0,1)$. Тогда берём логарифм

$$ln\, L\left(X_1,\tau\right) = -ln\,\tau + \left(\frac{1}{\tau}-1\right) ln\, X_1 = -ln\,\tau + \frac{1}{\tau}\cdot ln\, X_1 - ln\, X_1.$$

Берём первую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial ln\, L\left(X_1,\tau\right)}{\partial\tau} = -\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}\cdot ln\, X_1.$$

Берём вторую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial^2 ln\, L\left(X_1,\tau\right)}{\partial\tau^2} = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^3}\cdot ln\, X_1.$$

Ищем количество информации

$$I\left(\tau\right) = -M\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{2}{\tau^3}\cdot ln\, X_1\right) = -\frac{1}{\tau^2} - \frac{2}{\tau^3}\cdot M\, ln\, X_1 = -\frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^3}\cdot\tau = \frac{1}{\tau^2}.$$

Ищем обратную величину к количеству информации и делим на n. Получим

$$\frac{1}{nI\left(\tau\right)} = \frac{\tau^2}{n} = D\left(-\overline{ln\, X}\right).$$

Значит, $-\overline{ln\, X}$ — эффективная оценка.

6.13

Задание. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения $N\left(\mu,\theta\right)$ с неизвестным параметром θ и известным математическим ожиданием. Докажите, что статистика

$$\theta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$$

является эффективной по Рао-Крамеру оценкой параметра θ.

Решение. Проверим несмещённость

$$M\theta^* = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\right] = \frac{1}{n}\cdot M\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot nM\left(X_1-\mu\right)^2.$$

Сократим n и раскроем квадрат

$$\frac{1}{n}\cdot nM\left(X_1-\mu\right)^2 = M\left(X_1^2-2\mu X_1+\mu^2\right) = MX_1^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2.$$

По свойствам дисперсии

$$MX_1^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2 = DX_1 + \left(MX_1\right)^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2 = \theta + \mu^2 - 2\mu\cdot\mu + \mu^2 = \theta.$$

Несмещённость есть. Ищем дисперсию

$$D\theta^* = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right] = \frac{1}{n^2}\cdot D\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\cdot D\left(X_1-\mu\right)^2.$$

Вычислим отдельно дисперсию $D\left(X_1-\mu\right)^2 = M\left(X_1-\mu\right)^4 - \left[M\left(X_1-\mu\right)^2\right]^2$. Случайная величина $X_1-\mu$ имеет распределение $N(0,\theta)$. Если X имеет нормальное распределение $N\left(0,\sigma^2\right)$, то для неё существуют (конечные) моменты при всех p с действительной частью больше -1. Для неотрицательных целых p, центральные моменты таковы

$$MX^p = \begin{cases} 0, & p = 2n+1, \\ \sigma^p\,(p-1)!!, & p = 2n. \end{cases}$$

В данной задаче $\sigma^2 = \theta$, следовательно $\sigma = \sqrt{\theta}$. Подставим значения математических ожиданий четвёртого и второго моментов

$$M\left(X_1-\mu\right)^4 - \left[M\left(X_1-\mu\right)^2\right]^2 = \left(\sqrt{\theta}\right)^4(4-1)!! - \left[\left(\sqrt{\theta}\right)^2(2-1)!!\right]^2.$$

Упростим

$$\left(\sqrt{\theta}\right)^4(4-1)!! - \left[\left(\sqrt{\theta}\right)^2(2-1)!!\right]^2 = 3!!\theta^2 - \theta^2 = 3\theta^2 - \theta^2 = 2\theta^2.$$

Тогда дисперсия оценки равна

$$\frac{1}{n}\cdot D\left(X_1-\mu\right)^2 = \frac{2\theta^2}{n}.$$

Переходим к функции правдоподобия и оценке количества информации. Смотрим на одно наблюдение

$$L\left(X_1,\theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\cdot e^{-\frac{(X_1-\mu)^2}{2\theta}}.$$

Логарифмируем

$$ln\,L\left(X_1,\theta\right) = -\frac{1}{2}\cdot ln\,(2\pi\theta) - \frac{\left(X_1-\mu\right)^2}{2\theta} = -\frac{1}{2}\cdot ln\,(2\pi) - \frac{1}{2}\cdot ln\theta - \frac{\left(X_1-\mu\right)^2}{2\theta}.$$

Ищем первую производную

$$\frac{\partial\, ln\,L\left(X_1,\theta\right)}{\partial\theta} = -\frac{1}{2\theta} + \frac{\left(X_1-\mu\right)^2}{2\theta^2}.$$

Ищем вторую производную

$$\frac{\partial^2 ln\,L\left(X_1,\theta\right)}{\partial\theta^2} = \frac{1}{2\theta^2} - \frac{\left(X_1-\mu\right)^2}{\theta^3}.$$

Таким образом,

$$I(\theta) = -M\left(\frac{1}{2\theta^2} - \frac{(X_1-\mu)^2}{\theta^3}\right) = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\left(MX_1^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2\right).$$

По свойствам дисперсии

$$-\frac{1}{2\theta^2}+\frac{1}{\theta^3}\left(MX_1^2 - 2\mu MX_1 + \mu^2\right) = -\frac{1}{2\theta^2}+\frac{1}{\theta^3}\left(DX_1 + (MX_1)^2 - 2\mu\mu + \mu^2\right).$$

Подставим значение математического ожидания и дисперсии

$$-\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\left(DX_1 + (MX_1)^2 - 2\mu\mu + \mu^2\right) = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\left(\theta + \mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2\right).$$

Упростим

$$-\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\left(\theta + \mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2\right) = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{2\theta^2}.$$

Формируем величину

$$\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{2\theta^2}{n} = D\theta^*,$$

значит, оценка эффективная.

6.14

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0, \\ 0, \quad x < 0, \end{cases}$$

где σ — известный параметр. Убедитесь, что статистика

$$\theta_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\, X_i$$

является несмещённой оценкой параметра θ и докажите, что θ_n^* является эффективной по Рао-Крамеру оценкой параметра θ.

Решение.

$$M\theta_n^* = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\, X_i\right) = \frac{1}{n}\cdot M\sum_{i=1}^{n} ln\, X_i = \frac{1}{n}\cdot nM\, ln\, X_1 = M\, ln\, X_1.$$

Запишем математическое ожидание случайной величины, имеющей плотность, по определению

$$M\, ln\, X_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} ln\, x \cdot p(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} ln\, x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\}\, dx.$$

Вынесем константу из-под знака интеграла и воспользуемся индикатором

$$\int\limits_{\mathbb{R}} ln\, x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{ln\, x}{x} \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Внесём x^{-1} под знак дифференциала

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{ln\, x}{x} \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} ln\, x \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} d\left(ln\, x\right).$$

Делаем замену $ln\, x = t$. Получаем

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} ln\, x \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} d\left(ln\, x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{(t-\theta)^2}{2\sigma^2}} dt = Mt = \theta,$$

значит, имеем несмещённость.

Теперь ищем дисперсию

$$D\theta_n^* = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\, X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D\sum_{i=1}^{n} ln\, X_i = \frac{1}{n} \cdot D\, ln\, X_1.$$

По свойствам дисперсии

$$\frac{1}{n} \cdot D\, ln\, X_1 = \frac{1}{n}\left\{M\left(ln\, X_1\right)^2 - \left[M\, ln\, X_1\right]^2\right\}.$$

Найдём отдельно второй момент

$$M\left(ln\, X_1\right)^2 = \int\limits_0^{+\infty} ln^2 x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Внесём x^{-1} под знак дифференциала

$$\int\limits_0^{+\infty} ln^2 x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} ln^2 x \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} d\left(ln\, x\right).$$

Делаем замену как и в предыдущем случае

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} ln^2 x \cdot e^{-\frac{(ln\, x-\theta)^2}{2\sigma^2}} d\left(ln\, x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2\sigma^2}} dt = \theta^2 + \sigma^2.$$

Подставляем в найденное выражение для дисперсии оценки

$$D\theta_n^* = \frac{1}{n}\left(\theta^2 + \sigma^2 - \theta^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Ищем количество информации. Начнём с функции правдоподобия

$$L(X_1, \theta) = \frac{1}{X_1 \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(ln\, X_1 - \theta)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}\{X_1 \geq 0\}.$$

Пусть $X_1 \geq 0$. Тогда берём логарифм

$$ln\, L(X_1, \theta) = -ln\left(X_1 \sigma \sqrt{2\pi}\right) - \frac{(ln\, X_1 - \theta)^2}{2\sigma^2}.$$

Берём первую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial ln\, L(X_1, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2(ln\, X_1 - \theta)}{2\sigma^2} = \frac{ln\, X_1 - \theta}{\sigma^2}.$$

Берём вторую производную от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial^2 ln\, L(X_1, \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

Ищем количество информации

$$I(\theta) = -M\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Ищем обратную величину к количеству информации и делим на n. Получаем

$$\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\sigma^2}{n} = D\theta_n^*,$$

значит,

$$\theta_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln\, X_i$$

— эффективная оценка.

Занятие 7. Гауссовые системы

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение гауссового случайного вектора, ковариационной матрицы гауссового случаайного вектора.

$\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — гауссовый, если

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k$$

— гауссовская случайная величина.

$A = cov_{\vec{\xi}\vec{\xi}}$, $A_{ij} = cov\,(\xi_i, \xi_j) = M\,(\xi_i \xi_j) - M\xi_i M\xi_j$.

Какими свойствами владеет ковариационная матрица?

$A_{ii} = D\xi_i \geq 0$ — на диагонале — неотрицательные числа.
Матрица симметрична: $A_{ij} = A_{ji}$.
Матрица неотрицательно определена.

Как изменяются характеристики гауссового случайного вектора при действии на него линейного оператора?

Пускай $\vec{\xi}$ случайный n-элементный вектор, имеющий гауссовское распределение с параметрами $\vec{a}$ и A, $\vec{\xi} \sim N\,(\vec{a}, A)\,,\, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Тогда $T\vec{\xi} + \vec{b} \sim N\left(T\vec{a} + \vec{b}, TAT^*\right)$.

При каких условиях гауссовский случайный вектор имеет плотность распределения?

Плотность можно записать только в случае, когда $det\,A \neq 0$.

Запишите плотность распределения гауссового случайного вектора.

$$p_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{det\, A}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\vec{x}-\vec{a}, A^{-1}(\vec{x}-\vec{a})\right]}.$$

Сформулируйте теорему про нормальную корреляцию.

Есть гауссоский вектор $\vec{\xi} \circ \vec{\eta}$ с ненулевой ковариацией $cov_{\vec{\xi}\circ\vec{\eta}, \vec{\xi}\circ\vec{\eta}} \neq 0$. Определитель ковариационной матрицы вектора η положителен

$$det\, cov_{\vec{\eta}, \vec{\eta}} \geq 0.$$

Тогда вектор $\vec{\xi}$ при условии $\vec{\eta}$ — гауссовский случайный вектор

$$\vec{\xi}\Big| \vec{\eta} \sim N(\vec{m}, D).$$

Параметры $\vec{m}$ и D имеют следующий вид

$$\vec{m} = M\vec{\xi} + cov_{\vec{\xi}, \vec{\eta}} cov_{\vec{\eta}, \vec{\eta}^{-1}} (\eta - M\vec{\eta}),\ D = cov_{\vec{\xi}, \vec{\xi}} - cov_{\vec{\xi}, \vec{\eta}} cov^{-1}_{\vec{\eta}, \vec{\eta}} cov_{\vec{\eta}, \vec{\xi}}.$$

Аудиторные задачи

7.3

Задание. Может ли матрица A быть ковариационной матрицей гауссового случайного вектора, если:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$;

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix}$;

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

Если так, то предъявите такой вектор.

Решение.

a) Нет (матрица не квадратная);

b) нет (матрица не симметрична);

c) нет (на диагонали отрицательные числа);

d) матрица квадратная, симметричная, неотрицательно определённая, на диагонали — неотрицательные числа;

e) матрица квадратная, симметричная, на диагонали — неотрицательные числа. Первый минор $M_1 = 1 \geq 0$, второй минор $M_2 = 6 - 4 = 2 \geq 0$, третий минор

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (72 - 1) - 2 \cdot (24 + 1) + 1 \cdot (-2 - 6) = 13 \geq 0,$$

значит, матрица неотрицательно определена, то есть может быть ковариационной матрицей гауссового случайного вектора;

f) матрица квадратная, симметричная, на диагонали — неотрицательные чиста. Первый минор $M_1 = 1 \geq 0$, второй минор $M_2 = 5 - 2 = 3 \geq 0$, третий минор

$$M_3 = 1 \cdot (50 - 0) - 2 \cdot (20 - 0) + 1 \cdot (0 - 5) = 50 - 40 - 5 = 5 \geq 0,$$

значит, матрица неотрицательно определена, то есть может быть ковариационной матрицей гауссового случайного вектора.

7.5

Задание. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — гауссовый вектор с математическим ожиданием $(-1, 0, 2)$ и матрицей ковариаций из задачи 7.3 e).

a) Выпишите плотность распределения и характеристическую фукнцию для ξ_1, (ξ_1, ξ_2), ξ.

b) Найдите матрицу ковариаций и математическое ожидание для вектора (η_1, η_2, η_3), где $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3$, $\eta_3 = \xi_3$.

c) Вычислите $M\eta_2^2$, $M\eta_2^3$, $M\eta_2^4$.

d) Выясните, являются ли случайные величины η_1 и η_2 независимыми.

e) Найдите $M(\xi \mid (\xi_1, \xi_3))$, $M(\xi_1 \mid \xi_2)$.

Решение.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix}$$

а) Начинаем со случайной величины ξ_1. Запишем её как линейную комбинацию гауссового вектора $\xi_1 = 1 \cdot \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 + 0 \cdot \xi_3$. Следовательно, $\xi_1 \sim N(-1, 1)$, где -1 — это первый элемент $\vec{a}$, а 1 — элемент a_{11} матрицы ковариации.

Записываем плотность

$$p_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$$

и характеристическую функцию $\varphi_{\xi_1}(t) = e^{-it-\frac{t^2}{2}}$.

Переходим к вектору (ξ_1, ξ_2). Это гауссовый вектор, потому что произвольная линейная комбинация $\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + 0 \cdot \xi_3$ — это случайная величина, которая должна иметь нормальное распределение. Отсюда следует, что $(\xi_1, \xi_2) = \vec{\xi}$ — гауссовый вектор.

$M\vec{\xi} = (-1, 0)$, а ковариационная матрица данного вектора — это сужение исходной ковариационной матрицы на соответствующие вектора

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Записываем характеристическую функцию и плотность. Матрица коавриации невырождена, так что плотность можем записать

$$p_{(\xi_1,\xi_2)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_1+1\ x_2)\cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix}}.$$

Определитель этой матрицы $det\, R = 6 - 4 = 2$. Обратная матрица

$$R^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Подставим полученное в выражение для плотности

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} x_1+1 & x_2 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} \cdot exp\left\{-\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} x_1 + 6 - 2 \cdot x_2 & -2x_1 - 2 + 2x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} \cdot exp\left\{-\frac{1}{4} \cdot \left[6\,x_1(x_1+1) - 2x_1(x_1-1) - 2x_1x_2 + 2x_2^2\right]\right\}.$$

Для вектора ξ математическое ожидание равно $(-1, 0, 2)$, а матрица ковариаций совпадает с исходной;

b) задача: выписать матрицу, с помощью которой получим вектор

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\,.$$

В условии задачи дано, что

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix},$$

а $\vec{m}_\xi = (-1, 0, 2)$.

Посмотрим, с помощью какой матрицы получаются преобразования.

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Это матрица B. Находим математическое ожидание вектора η. Получаем

$$\vec{m}_\eta = B\vec{m}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Теперь ищем матрицу ковариации

$$A_\eta = BA_\xi B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемножим две последние матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \\ 2 & 35 & 12 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \\ 2 & 35 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -3 & 135 & 35 \\ 2 & 35 & 12 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица ковариаций, значит, она симметричная;

c) случайная величина η_2 имеет распределение Гаусса, как компонент гауссового вектора. Нужно указать параметры, то есть её математическое ожидание и дисперсию. $\eta_2 \sim N(5, 135)$. У нас нецентрированная случайная величина. Значит, $\eta_2 - 5 \sim N(0, 135)$. Поэтому $M(\eta_2 - 5)^2 = 135$, потому что это её дисперсия. Раскрываем слева скобки, пользуемся линейностью математического ожидания и находим второй момент $M\eta_2^2 - 25M\eta_2 + 25 = 135$. Математическое ожидание η_2 мы знаем, выражаем второй момент $M\eta_2^2 = 10 \cdot 5 + 110 = 160$.

Третий момент этой случайной величины равен $M\left(\eta_2 - 5\right)^3 = 0$. Так же раскрываем скобки слева $M\eta_2^3 - 15M\eta_2^2 + 75M\eta_2 - 125 = 0$, откуда $M\eta_2^3 = 15 \cdot 160 - 75 \cdot 5 + 125 = 2400 - 250 = 2150$.

Четвёртый момент находится аналогично;

d) если бы они были независимыми, ковариация была бы равна нулю. Это элемент матрицы $(1,2)$. Он равен $Cov\left(\eta_1, \eta_2\right) = -3 \neq 0$. Отсюда следует, что случайные величины зависимы.

   Компопненты гауссового вектора независимы тогда и только тогда, когда они некоррелируемы;

e) пользуемся теоремой о нормальной корреляции.

   Записываем, как в теореме,

$$M\left[\xi_1 \mid \left(\xi_2, \xi_3\right)\right] =$$
$$= M\xi_1 + Cov\left[\xi_1, \left(\xi_2, \xi_3\right)\right] \cdot \left\{Cov\left[\left(\xi_2, \xi_3\right), \left(\xi_2, \xi_3\right)\right]\right\}^{-1} \left[\left(\xi_2, \xi_3\right) - M\left(\xi_2, \xi_3\right)\right]^T.$$

   Подставляем

$$M\xi_1 + Cov\left[\xi_1, \left(\xi_2, \xi_3\right)\right] \cdot \left\{Cov\left[\left(\xi_2, \xi_3\right), \left(\xi_2, \xi_3\right)\right]\right\}^{-1} \left[\left(\xi_2, \xi_3\right) - M\left(\xi_2, \xi_3\right)\right]^T =$$
$$= -1 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_2 - 0 \\ \xi_3 - 2 \end{bmatrix} =$$
$$= -1 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{71} \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 - 2 \end{bmatrix} = -1 + \begin{bmatrix} 25 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{71} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 - 2 \end{bmatrix} =$$
$$= -1 + \frac{1}{71}\left(25\xi_2 + 8\xi_3 - 16\right)$$

   — оценка ξ_1 по вектору $\left(\xi_2, \xi_3\right)$.

   Аналогично

$$M\left(\xi_1 \mid \xi_2\right) = M\xi_1 + Cov\left(\xi_1, \xi_2\right)\left[Cov\left(\xi_2, \xi_2\right)\right]^{-1} \cdot \left(\xi_2 - M\xi_2\right).$$

   Подставляем известные значения

$$M\xi_1 + Cov\left(\xi_1, \xi_2\right)\left[Cov\left(\xi_2, \xi_2\right)\right]^{-1} \cdot \left(\xi_2 - M\xi_2\right) = -1 + 2 \cdot \frac{1}{6}\left(\xi_2 - 0\right).$$

   Сократим

$$-1 + 2 \cdot \frac{1}{6}\left(\xi_2 - 0\right) = -1 + \frac{1}{3} \cdot \xi_2.$$

7.6

Задание. Пусть (ξ_1, ξ_2) — гауссовый вектор с вектором средних $(1, -1)$ и ковариационной матрицей из примера задачи 7.3 d). Найдите такое c, что случайные величины ξ_1 и $\xi_2 + c\xi_1$ являются независимыми.

Решение.

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)\,,\; vecm_\xi = (1, -1)\,,\; A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Хотим найти c, при котором ξ_1 и $\xi_2 + c\xi_1$ — независимы. Сначала нужно показать, что $(\xi_1, \xi_2 + c\xi_1)$ является гауссовым вектором, чтобы применить теорему. Берём какую-то комбинацию и группируем

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2(\xi_2 + c\xi_1) = \xi_1(\lambda_1 + \lambda_2 c) + \xi_2\lambda_2.$$

Видим, что это линейная комбинация координат гауссового вектора, которая имеет нормальное распределение. Значит, веткор гауссовый. Тогда независимость координат эквивалентна их некоррелируемости

$$Cov(\xi_1, \xi_2 + c\xi_1) = 0.$$

Воспользуемся линейностью ковариации

$$Cov(\xi_1, \xi_2 + c\xi_1) = Cov(\xi_1, \xi_2) + c \cdot Cov(\xi_1, \xi_1) = 2 + c \cdot 1 = 2 + c = 0,$$

следовательно, $c = -2$.

7.7

Задание. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределение каждая. Найдите:

a) распределние вектора $(\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1)$;

b) плотность $p(x_1, x_2)$ распределения вектора $\left(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(1)}\right)$.

Решение. $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \sim N(0, 1)$.

a) Вектор $\vec{\eta} = (\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1)$.

   Если они независимы, то их ковариация равна нулю.

   Сформируем вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и покажем, что это гауссовский вектор

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \; \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \xi_i \sim N\left(0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right).$$

   Значит, вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) является гауссовским. Поэтому вектор $\vec{\eta}$ — гауссовский. Покажем это.

$$\forall \lambda_1, \lambda_2,\; \lambda_1\xi_2 - \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_3 - \lambda_2\xi_1 = \xi_1(-\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1\xi_2 + \lambda_2\xi_3.$$

Видим, что это линейная комбинация координат гауссового вектора, значит, вектор действительно гауссовый. Чтобы указать распределние, нужны параметры, то есть вектор математических ожиданий и матрица ковариации

$$\vec{\eta} = B\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \xi_3 - \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Матрицей B действуем на вектор математических ожиданий и на ковариационную матрицу $\vec{m}_\eta = B\vec{m}_\xi = 0$, $A_\eta = BA_\xi B^T$, где A_ξ — единичная матрица, потому что они все независимы, некоррелируемы, значит,

$$BA_\xi B^T = BB^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Должна быть симметричная матрица

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

— матрица ковариации;

b) скобками обозначена упорядоченность. $\vec{\eta} = \left(\xi_{(2)} - \xi_{(1)},\, \xi_{(3)} - \xi_{(1)}\right)$.

Если бы знали плотность распределения $\left(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)}\right)$ (знаем из задачи 1.10) $p_{\left(\xi_{(1)},\xi_{(2)},\xi_{(3)}\right)}(x_1, x_2, x_3)$, можем сказать, что вектор $\vec{\eta}$ получается линейным преобразованием с помощью матрицы B.

Формула замены переменных

$$p_{B\vec{\xi}}(\vec{x}) = \frac{1}{det\, B} \cdot p_{\vec{\xi}}\left(B^{-1}\vec{x}\right).$$

Значит, матрица B должна быть только квадратной. Найдём плотность вектора $\left(\xi_{(2)} - \xi_{(1)},\, \xi_{(3)} - \xi_{(1)},\, \xi_{(1)}\right)$ $p\,(u_1, u_2, u_3)$.

Далее проинтегрируем по u_3. Это делают, когда размерность не совпадает.

$p_{\left(\xi_{(1)},\xi_{(2)},\xi_{(3)}\right)} = 3! p_{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2, x_3\}$. Запишем для нашего случая. ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимы, значит, плотность вектора — это произведение плотностей

$$\begin{aligned} 3! p_{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2, x_3\} = \\ = 6 p_{\xi_1}(x_1)\, p_{\xi_2}(x_2)\, p_{\xi_3}(x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\} = \\ = 6 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)} \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\}. \end{aligned}$$

Записываем преобразование

$$\begin{bmatrix} \xi_{(2)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(3)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \\ \xi_{(3)} \end{bmatrix}.$$

Значит, матрица

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Чтобы применить формулу замены переменных, нужны определитель и обратная матрица. Раскладываем по последней строке

$$det\, B = 1, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(2)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(3)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \\ \xi_{(3)} \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Действуем матрицей на вектор

$$B^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$p_{B\left(\xi_{(1)},\xi_{(2)},\xi_{(3)}\right)}\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{det\, B} \cdot p_{\left(\xi_{(1)},\xi_{(2)},\xi_{(3)}\right)}\left(B^{-1}\vec{x}\right).$$

Подставляем значение плотности

$$\frac{1}{det\, B} \cdot p_{\left(\xi_{(1)},\xi_{(2)},\xi_{(3)}\right)}\left(B^{-1}\vec{x}\right) =$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[x_3^2 + (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2\right]} \cdot \mathbb{1}\left\{x_3 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3\right\}.$$

Можем везде отнять x_3. Получим

$$6 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[x_3^2 + (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2\right]} \cdot \mathbb{1}\left\{x_3 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3\right\} =$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[x_3^2 + (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2\right]} \cdot \mathbb{1}\left\{0 < x_1 < x_2\right\}.$$

Нужно проинтегрировать по x_3, то есть выделить полный квадрат по x_3.

Получаем

$$3x_32+2x_1x_3+2x_2x_3+x_1^2+x_2^2=\left(\sqrt{3}x_3+\frac{x_1+x_2}{\sqrt{3}}\right)^2+x_1^2+x_2^2-\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Нужная плотность вектора

$$p_{\left(\xi_{(2)}-\xi_{(1)},\xi_{(3)}-\xi_{(1)}\right)}(x_1,x_2)=$$
$$=\frac{6}{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[x_1^2+x_2^2-\frac{(x_1+x_2)^2}{3}\right]}\cdot \mathbb{1}\{0<x_1<x_2\}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\sqrt{3}x_3+\frac{(x_1+x_2)^2}{3}\right]}dx_3=\frac{6}{2\sqrt{3}\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[x_1^2+x_2^2-\frac{(x_1+x_2)^2}{3}\right]}.$$

7.8

Задание. Пусть ξ и η — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Докажите, что величины $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$ являются независимыми гауссовскими случайными величинами.

Решение. $\xi,\eta\sim N(0,1)$ — независимы. Хотим показать, что $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$ — независимые. Стандартный способ — через характеристические функции. Формируем вектор $(\xi+\eta,\xi-\eta)$. Должно быть

$$\varphi_{(\xi+\eta,\xi-\eta)}(t_1,t_2)=\varphi_{\xi+\eta}(t_1)\cdot\varphi_{\xi-\eta}(t_2)$$

тогда и только тогда, когда $\xi-\eta$, $\xi+\eta$ — независимы — критерий.

Заметим, что раз ξ,η — независимы, то вектор (ξ,η) — гауссовский. Можно убедиться, что $(\xi+\eta,\xi-\eta)$ — гауссовский. Тогда достаточно показать, что $Cov(\xi+\eta,\xi-\eta)=0$.

Случайная величина $\xi+\eta$ имеет распределение $N(0,2)$.

Её характеристическая функция равна $\varphi_{\xi+\eta}(t_1)=e^{-t_1^2}$.

Случайная величина $\xi-\eta$ имеет распределение $N(0,2)$, потому что «минус» из дисперсии выносится с квадратом.

Она имеет характеристическую функцию $\varphi_{\xi-\eta}(t_2)=e^{-t_2^2}$.

Значит, произведение $\varphi_{\xi+\eta}(t_1)\varphi_{\xi-\eta}(t_2)=e^{-\left(t_1^2+t_2^2\right)}$.

Переходим к характеристической функции вектора. По опрделению

$$\varphi_{(\xi+\eta,\xi-\eta)}(t_1,t_2)=Me^{i[t_1(\xi+\eta)+t_2(\xi-\eta)]}.$$

Группируем ξ и η, получаем

$$Me^{i[t_1(\xi+\eta)+t_2(\xi-\eta)]}=Me^{i(t_1\xi+t_1\eta+t_2\xi-t_2\eta)}=Me^{i[\xi(t_1+t_2)+\eta(t_1-t_2)]}.$$

Случайные величины ξ и η — независимы, значит,

$$Me^{i[\xi(t_1+t_2)+\eta(t_1-t_2)]}=\varphi_\xi(t_1+t_2)\,\varphi_\eta(t_1-t_2).$$

Подставляем явный вид. Это стандартное нормальное распределение, следовательно, $\varphi_\xi(t_1+t_2)\varphi_\eta(t_1-t_2) = e^{-\frac{(t_1+t_2)^2}{2}} e^{-\frac{(t_1-t_2)^2}{2}} = e^{-\left(t_1^2+t_2^2\right)}$.

Случайный вектор (ξ, η) — гауссовкий, потому что

$$\forall \alpha, \beta \; \alpha\xi + \beta\eta \sim N\left(0, \alpha^2+\beta^2\right)$$

— нормальное распределение. Отсюда следует, что $(\xi+\eta, \xi-\eta)$ — гауссовский, потому что

$$\forall \alpha, \beta \; \alpha(\xi+\eta) + \beta(\xi-\eta) = \alpha\xi + \alpha\eta + \beta\xi - \beta\eta = (\alpha+\beta)\xi + (\alpha-\beta)\eta$$

— линейная комбинация элементов гауссовского вектора, или в явном виде $N\left(0, (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2\right)$. Они будет независимыми, если некоррелируемы.

Из линейности следует, что

$$Cov(\xi+\eta, \xi-\eta) = Cov(\xi,\xi) - Cov(\xi,\eta) + Cov(\eta,\xi) - Cov(\eta,\eta).$$

Случайные величины ξ и η — независимые, и тем более некоррелируемы, $Cov(\xi,\xi)$ — это её дисперсия, значит, $Cov(\eta,\xi) - Cov(\eta,\eta) = 1 - 1 = 0$, следовательно, они некоррелируемые и независимые.

7.9

Задание. Пусть положительная случайная величина R имеет распределение Рэлея с плотностью распределения:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \; r > 0,$$

где $\sigma^2 > 0$, и пусть θ — независимая от неё случайная величина с равномерным распределением на $(0, 2\pi)$. Докажите, что величины $X = R\cos\theta$ и $Y = R\sin\theta$ являются независимыми и имеют нормальное расределение $N\left(0, \sigma^2\right)$.

Решение. Пусть есть вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и допустим, что $p_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)$ — известно.

$\vec{\eta} = \varphi\left(\vec{\xi}\right)$.

Будет замена

$$\begin{cases} z_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ z_2 = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Тогда

$$p_{\vec{\eta}}(\vec{z}) = p_{\vec{\eta}}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{J(z)} \cdot p_{\vec{\xi}}\left(\varphi^{-1}(\vec{x})\right),$$

где $\varphi^{-1}(\vec{z})$ — обратное отображение, а

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

— определитель Якобиана.

Сформируем вектор (R, θ).

Запишем плотность этого вектора $p_{(R,\theta)}(x, y)$.

Рассматриваем замену переменных.

Нужно перевести $(R, \theta) \to (\varphi)(R\cos\theta, R\sin\theta)$.

Имеем замену

$$\begin{cases} z_1 = x\cos y, \\ z_2 = x\sin y. \end{cases}$$

Такая замена координат приводит к такому преобразованию. После этого согласно с формулой замены переменных нужно записать плотность нового вектора.

$\theta \sim U([0, 2\pi])$.

Случайные величины R, θ — независимы между собой. Запишем плотность вектора как произведение плотностей, потому что они независимы $p_{(R,\theta)}(x, y) = p_R(x)\, p_\theta(y)$. Подставляем явный вид, включая индикаторы

$$p_R(x)\, p_\theta(y) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}\{x > 0\} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \mathbb{1}\{y \in [0, 2\pi]\}.$$

Записываем

$$J(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix} = x\cos^2 y + x\sin^2 y = x = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

По сути это полярная замена координат.

Пишем плотность в новых переменных, индикаторы никаких ограничений на z_1, z_2 не дают

$$p_{(R\cos\theta, R\sin\theta)}(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{\sigma^2} \cdot e^{-\left(z_1^2 + x_2^2\right) \cdot \frac{1}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2\sigma^2}}.$$

Это похоже на гауссовское распределение

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{z_1^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{z_2^2}{2\sigma^2}}\right) = p_{R\cos\theta}(z_1)\, p_{R\sin\theta}(z_2).$$

Из этого следует независимость.

Домашнее задание

7.11

Задание. Может ли матрица A быть ковариационной матрицей гауссовского случайного вектора, если:

a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение.

a) Матрица квадратная, симметричная, на диагонали — неотрицательные числа. Первый минор $M_1 = 1 \geq 0$, второй минор
$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \geq 0,$$
третий минор
$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \geq 0,$$
значит матрица неотрицательно определённная, то есть может быть ковариационной матрицей гауссовского случайного вектора;

b) матрица квадратная, симметричная, на диагонали — неотрицательные числа. Первый минор $M_1 = 1 \geq 0$, второй минор
$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \geq 0,$$
третий минор
$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 5\,(5 - 4) = 0,$$
значит матрица неотрицательно определённая, то есть может быть ковариационной матрицей гауссовского случайного вектора.

7.12

Задание. Пусть (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — гауссовский вектор со средним $(1, 2, 5)$ и матрицей коварииаций из задачи 7.3 f).

a) Запишите плотность распределения и характеристическую функцию для вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

b) Найдите матрицу ковариаций и среднее для вектора (η_1, η_2, η_3), где $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2 + \xi_3$, $\eta_3 = \xi_1 + \xi_3$.

c) Выясните, являются ли случайные величины η_2, η_3 независимыми.

d) Найдите условные математические ожидания

$$M\left(\xi_2 \mid (\xi_1, \xi_3)\right),\ M\left(\xi_1 \mid \xi_2\right).$$

e) Вычислите $M\eta_1^2, M\eta_1^3, M\eta_1^4$.

Решение.

a) $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{\xi}$ — гауссовский вектор с математическим ожиданием $M\vec{\xi} = (1, 2, 5)$ и ковариационной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Записываем характеристическую функцию и плотность.

$$det\, A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 10\,(5 - 4) = 5.$$

Матрица ковариаций невырождена, так что может записать

$$p_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 - 5 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 5 \end{bmatrix}}.$$

Найдём обратную матрицу к матрице ковариаций

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 50 & -10 & -5 \\ -10 & 9 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемножив вектора и матрицы в степени экспоненты, получим

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}x_1-1 & x_2-2 & x_3-5\end{bmatrix}\cdot A^{-1}\cdot\begin{bmatrix}x_1-1\\x_2-2\\x_3-5\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{5}}\cdot e^{50x_1^2+9x_2^2+x_3^2-40x_1x_2-10x_1x_3+4x_2x_3+30x_1-16x_2-8x_3+21}.$$

Запишем характеристическую функцию

$$\varphi_{\vec{\xi}}\left(\vec{\lambda}\right)=exp\left\{i\left(\vec{\lambda},M\vec{\xi}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(A\vec{\lambda},\vec{\lambda}\right)\right\};$$

b) задача: выписать матрицу, с помощью которой получается вектор

$$\vec{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\,.$$

В условии задачи дано, что

$$A_\xi=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&0\\1&0&10\end{bmatrix},$$

а $\vec{m}_\xi=(1,2,5)$.

Посмотрим, с помощью какой матрицы получается преобразование

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}.$$

Это матрица B. Находим математическое ожидание вектора η. Получаем

$$\vec{m}_\eta=B\vec{m}_\xi=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2\\2+5\\1+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\\6\end{bmatrix}.$$

Теперь ищем матрицу ковариаций

$$A_\eta=BA_\xi B^T=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&0\\1&0&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

Перемножим две последние матрицы

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&0\\1&0&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3&2\\7&5&2\\1&10&11\end{bmatrix}.$$

Перемножаем матрицы

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ 7 & 5 & 2\\ 1 & 10 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 8 & 4\\ 8 & 15 & 13\\ 4 & 13 & 13\end{bmatrix}.$$

Это матрица ковариаций, значит, она симметрична;

c) если бы они были независимыми, ковариация была бы равна нулю.

Это элемент матрицы $(2,3)$. Он равен $Cov\,(\eta_2,\eta_3)=13\neq 0$. Отсюда следует, что случайные величины зависимы.

Компоненты гауссовского вектора независимы тогда и только тогда, когда они некоррелированные;

d) пользуемся теоремой о нормальной корреляции.

Записываем, как в теореме,

$$\begin{gathered} M\left[\xi_2 \mid (\xi_1,\xi_3)\right]= \\ =M\xi_2+ \\ +Cov\left[\xi_2,(\xi_1,\xi_3)\right]\cdot\left\{Cov\left[(\xi_1,\xi_3),(\xi_1,\xi_3)\right]\right\}^{-1}\cdot\left[(\xi_1,\xi_3)-M\left(\xi_1,\xi_3\right)\right]^T. \end{gathered}$$

Подставим

$$\begin{gathered} M\xi_2+Cov\left[\xi_2,(\xi_1,\xi_3)\right]\cdot\left\{Cov\left[(\xi_1,\xi_3),(\xi_1,\xi_3)\right]\right\}^{-1}\cdot\left[(\xi_1,\xi_3)-M\left(\xi_1,\xi_3\right)\right]^T= \\ =7+\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 10\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1-1\\ \xi_3-5\end{bmatrix}=7+\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix}10 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1-1\\ \xi_3-5\end{bmatrix}= \\ =7+\begin{bmatrix}20 & -2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix}\xi_1-1\\ \xi_3-5\end{bmatrix}=7+\frac{1}{9}\left(20\xi_1-20-2\xi_3+10\right)= \\ =7+\frac{1}{9}\left(20\xi_1-2\xi_2-10\right) \end{gathered}$$

— оценка ξ_2 по вектору (ξ_1,ξ_3).

Аналогично $M\left(\xi_1 \mid \xi_2\right)=M\xi_1+Cov\left(\xi_1,\xi_2\right)\cdot\left[Cov\left(\xi_2,\xi_2\right)\right]^{-1}\left(\xi_2-M\xi_2\right).$ Подставим известные значения

$$M\xi_1+Cov\left(\xi_1,\xi_2\right)\cdot\left[Cov\left(\xi_2,\xi_2\right)\right]^{-1}\left(\xi_2-M\xi_2\right)=1+2\cdot\frac{1}{5}\left(\xi_2-2\right).$$

Сократим

$$1+2\cdot\frac{1}{5}\left(\xi_2-2\right)=1+\frac{2}{5}\cdot\xi_2-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\cdot\xi_2;$$

e) случайная величина η_1 имеет распределение Гаусса, как компонента гауссовского вектора. Нужно указать параметры, то есть её математическое ожидание и дисперсию $\eta_1\sim N\left(3,10\right)$. У нас смещённая случайная величина. Значит, $\eta_1-3\sim N\left(0,10\right)$. Поэтому

$$M\left(\eta_1-3\right)^2=10,$$

потому что это её дисперсия. Раскроем слева скобки, пользуемся линейностью математического ожидания и находим второй момент

$$M\eta_1^2 - 6M\eta_1 + 9 = 10.$$

Математическое ожидание η_1 мы знаем, выражаем второй момент $M\eta_1^2 = 6 \cdot 3 - 9 + 10 = 18 + 1 = 19$.

Третий момент этой случайной величины $M\left(\eta_1 - 3\right)^3 = 0$.

Так же раскрываем скобки слева $M\eta_1^3 - 3M\eta_1^2 \cdot 3 + 3M\eta_1 \cdot 9 - 27 = 0$, откуда $M\eta_3^2 = 9 \cdot 19 - 27 \cdot 3 + 27 = 117$.

Четвёртый момент находим аналогично

$$M\left(\eta_1 - 3\right)^4 = M\eta_1^4 - 4M\eta_1^3 \cdot 3 + 6 \cdot M\eta_1^2 \cdot 9 - 4M\eta_1 \cdot 27 + 81.$$

Подставляем известные значения моментов

$$M\eta_1^4 - 4M\eta_1^3 \cdot 3 + 6 \cdot M\eta_1^2 \cdot 9 - 4M\eta_1 \cdot 27 + 81 = M\eta_1^4 - 12 \cdot 117 + 54 \cdot 19 - 108 \cdot 3 + 81.$$

Умножаем и складываем константы

$$M\eta_1^4 - 12 \cdot 117 + 54 \cdot 19 - 108 \cdot 3 + 81 = M\eta_1^4 - 621 = 10^2 \cdot 3! = 100 \cdot 6 = 600,$$

откуда $M\eta_1^4 = 600 + 621 = 1221$.

7.13

Задание. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределние каждая. Найдите:

a) распределение вектора $(\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2)$;

b) плотность $p\left(x_1, x_2\right)$ распределения вектора $\left(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(2)}\right)$.

Решение.

a) Вектор $\vec{\eta} = (\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2)$.

Если случайные величины независимы, то их ковариация равна нулю.

Сформируем вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и покажем, что это гауссовский вектор

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ \sum_{i=1}^{3} \lambda_1 \xi_i \sim N\left(0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right).$$

Значит, вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) является гауссовским. Поэтому вектор $\vec{\eta}$ — гауссовский.

Покажем это

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \ \lambda_1\xi_2 - \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_3 - \lambda_2\xi_2 = \xi_1\left(-\lambda_1 - \lambda_2\right) + \lambda_1\xi_2 + \lambda_2\xi_3.$$

Видим, что это линейная комбинация координат гауссовского вектора, значит, вектор действительно гауссовский. Чтобы указать распределение, нужны параметры, то есть вектор математических ожиданий и матрица ковариаций.

$$\vec{\eta} = B\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \xi_3 - \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Матрицей B действуем на вектор математических ожидаий и на ковариационную матрицу $\vec{m}_\eta = B\vec{m}_\xi = 0$, $A_\eta = BA_\xi B^T$, где A_ξ — еденичная матрица, потому что все они независимы, некоррелируемы, значит,

$$BA_\xi B^T = BB^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Должна быть симметрическая матрица

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

— матрица ковариаций;

b) скобками обозначена упорядоченность $\vec{\eta} = \left(\xi_{(2)} - \xi_{(1)},\, \xi_{(3)} - \xi_{(2)}\right)$.

Если бы знали плотность распределения $\left(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)}\right)$ (знаем из задачи 1.10) $p_{\left(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)}\right)}(x_1, x_2, x_3)$, могли бы сказать, что вектор $\vec{\eta}$ получен линейным преобразованием с помощью матрицы B.

Формула замены переменных

$$p_{B\vec{\xi}}(\vec{x}) = \frac{1}{det\, B} \cdot p_{\vec{\xi}}\left(B^{-1}\vec{x}\right).$$

Значит, матрица B должна быть только квадратной. Найдём плотность вектора $\left(\xi_{(2)} - \xi_{(1)},\, \xi_{(3)} - \xi_{(2)}\right)$ $p(u_1, u_2, u_3)$.

Должны проинтегрировать по u_3. Это делают, когда размерности не совпадают.

$p_{\left(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)}\right)}(x_1, x_2, x_3) = 3! p_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\}$. Запишем для нашего случая. ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые, значит, плотность вектора — это произведение плотностей

$$\begin{aligned} &3! p_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\} = \\ &= 6 p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) p_{\xi_3}(x_3) \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\} = \\ &= \frac{6}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)} \cdot \mathbb{1}\{x_1 < x_2 < x_3\}. \end{aligned}$$

Записываем преобразование

$$\begin{bmatrix} \xi_{(2)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(3)} - \xi_{(2)} \\ \xi_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \\ \xi_{(3)} \end{bmatrix}.$$

Значит, матрица

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Чтобы применить формулу замены переменных, нужны определитель и обратная матрица. Раскладываем по последней строке

$$det\, B = 1, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(2)} - \xi_{(1)} \\ \xi_{(3)} - \xi_{(2)} \\ \xi_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \\ \xi_{(3)} \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Действуем матрицей на вектор

$$B^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$p_{B\left(\xi_{(1)},\xi_{(2)},\xi_{(3)}\right)}\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{det\, B} \cdot p_{\left(\xi_{(1)},\xi_{(2)},\xi_{(3)}\right)}\left(B^{-1}\vec{x}\right).$$

Подставим значения плотностей

$$\frac{1}{det\, B} \cdot p_{\left(\xi_{(1)},\xi_{(2)},\xi_{(3)}\right)}\left(B^{-1}\vec{x}\right) =$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[x_3^2 + (x_1+x_3)^2 + (x_1+x_2+x_3)^2\right]} \times$$
$$\times \mathbb{1}\left\{x_3 < x_1 + x_3 < x_1 + x_2 + x_3\right\}.$$

Можем везде отнять x_3 в индикаторе

$$6 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[x_3^2 + (x_1+x_3)^2 + (x_1+x_2+x_3)^2\right]} \times$$
$$\times \mathbb{1}\left\{x_3 < x_1 + x_3 < x_1 + x_2 + x_3\right\} =$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[x_3^2 + (x_1+x_3)^2 + (x_1+x_2+x_3)^2\right]} \cdot \mathbb{1}\left\{0 < x_1 < x_1 + x_2\right\}.$$

Нужно проинтегрировать по x_3, то есть для начала выделить полный квадрат по x_3.

Получим

$$\begin{aligned}
x_3^2+x_1^2+2x_1x_3+x_3^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3=\\
=3x_3^2+2x_1^2+x_2^2+4x_1x_3+2x_1x_2+2x_2x_3=\\
=3x_3^2+2x_3\left(2x_1+x_2\right)+2x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=\\
=\left(\sqrt{3}x_3+\frac{2x_1+x_2}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{\left(2x_1+x_2\right)^2}{3}+2x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=\\
=\left(\sqrt{3}x_3+\frac{2x_1+x_2}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{2}{3}\left(x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right).
\end{aligned}$$

Нужная плотность вектора

$$\begin{aligned}
p_{\left(\xi(2)-\xi_{(1)},\xi_{(3)}-\xi_{(2)}\right)}\left(x_1,x_2\right)=\\
=\frac{6}{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)}\cdot\mathbb{1}\left\{0<x_1<x_1+x_2\right\}\times\\
\times\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x_3+\frac{2x_1+x_2}{\sqrt{3}}\right)^2}dx_3=\\
=\frac{6}{2\pi\sqrt{3}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\left(x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\cdot e^{-\frac{1}{3}\left(x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)}.
\end{aligned}$$

7.14

Задание. Пусть $Z=XY$, где X и Y независимы, $X\sim N\left(0,1\right)$, а

$$P\left(Y=1\right)=P\left(Y=-1\right)=\frac{1}{2}.$$

Докажите, что $Z\sim N\left(0,1\right)$. Найдите распределение пар $\left(X,Z\right),\left(Y,Z\right)$ и распределение случайной величины $X+Z$. Убедитесь в том, что X и Z являются некоррелируемыми, но зависимыми случайными величинами.

Решение.

$$\varphi_Z\left(t\right)=Me^{itZ}=Me^{itXY}=Me^{-itX}\cdot P\left(Y=-1\right)+Me^{itX}\cdot P\left(Y=1\right).$$

По определению характеристической функции

$$Me^{-itX}\cdot P\left(Y=-1\right)+Me^{itX}\cdot P\left(Y=1\right)=\varphi_X\left(-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\varphi_X\left(t\right)\cdot\frac{1}{2}.$$

Подставляем значения характеристической функции

$$\varphi_X\left(-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\varphi_X\left(t\right)\cdot\frac{1}{2}=e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}+e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

значит, $Z \sim N(0,1)$.

Найдём
$$\varphi_{(X,Z)}(t_1,t_2) = Me^{it_1X+it_2Z} = Me^{it_1X+it_2XY}.$$
Подставляем возможные значения Y и умножаем полученные выражения на соответствующие вероятности
$$Me^{it_1X+it_2XY} = Me^{it_1X+it_2X} \cdot P(Y=1) + Me^{it_1X-it_2X} \cdot P(Y=-1).$$
Группируем степени экспонент и подставляем значения вероятностей
$$Me^{it_1X+it_2X} \cdot P(Y=1) + Me^{it_1X-it_2X} \cdot P(Y=-1) =$$
$$= Me^{iX(t_1+t_2)} \cdot \frac{1}{2} + Me^{iX(t_1-t_2)} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \varphi_X(t_1+t_2) \cdot \frac{1}{2} + \varphi_X(t_1-t_2) \cdot \frac{1}{2} = e^{-\frac{(t_1+t_2)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{(t_1-t_2)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t_1^2+2t_1t_2+t_2^2}{2}} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t_1^2-2t_1t_2+t_2^2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t_1^2+t_2^2}{2}} \left(e^{-t_1t_2} + e^{t_1t_2}\right).$$

Подобным образом находим
$$\varphi_{(Y,Z)}(t_1,t_2) = Me^{it_1Y+it_2Z} = Me^{it_1Y+it_2XY}.$$
Подставляем возможные значения Y и умножаем полученные выражения на соответствующие вероятности
$$Me^{it_1Y+it_2XY} = Me^{-it_1-it_2X} \cdot P(Y=-1) + Me^{it_1+it_2X} \cdot P(Y=1).$$
Разбиваем экспоненты на две
$$Me^{-it_1-it_2X} \cdot P(Y=-1) + Me^{it_1+it_2X} \cdot P(Y=1) =$$
$$= M\left(e^{-it_1}e^{-it_2X}\right) \cdot \frac{1}{2} + M\left(e^{it_1}e^{it_2X}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= e^{-it_1} \cdot \varphi_X(-t_2) \cdot \frac{1}{2} + e^{it_1}\varphi_X(t_2) \cdot \frac{1}{2} = e^{-it_1} \cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{it_1} \cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}} \left(e^{-it_1} + e^{it_1}\right).$$

По такому же принципу находим
$$\varphi_{X+Z}(t) = Me^{it(X+Z)} = Me^{itX+itZ} = Me^{itX+itXY}.$$
Подставляем возможные значения Y и умножаем полученные выражения на соответствующие вероятности
$$Me^{itX+itXY} = Me^{itX-itX} \cdot P(Y=-1) + Me^{itX+itX} \cdot P(Y=1).$$
Приводим подобные в степенях экспонент и подставляем значения вероятностей
$$Me^{itX-itX} \cdot P(Y=-1) + Me^{itX+itX} \cdot P(Y=1) = \frac{1}{2} + Me^{2itX} \cdot \frac{1}{2}.$$

По определению характеристической функции

$$\frac{1}{2}+Me^{2itX}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\varphi_X\left(2t\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+e^{-\frac{4t^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+e^{-2t^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2t^2}\right).$$

Характеристическая функция независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций.

$\varphi_X\left(t\right)=Me^{itX}=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Найдём произведение характеристических функций случайных величин

$$\varphi_X\left(t\right)\varphi_Z\left(t\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}=e^{-t^2}\neq\frac{1}{2}\left(1+e^{-2t^2}\right)=\varphi_{X+Z}\left(t\right),$$

значит, случайные величины X и Z — зависимы.

$M\left(XZ\right)=M\left(XXY\right)=M\left(X^2Y\right)=MX^2\cdot MY=-1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=0$, значит, они некоррелируемые.

7.15

Задание. Пусть ξ — случайная величина со стандартным нормальным распределением, и пусть

$$\eta_\alpha=\begin{cases}\xi, & if\,|\xi|\leq\alpha,\\ -\xi, & if\,|\xi|\geq\alpha.\end{cases}$$

Докажите, что $\eta_\alpha\sim N\left(0,1\right)$ и что при α таком, что

$$\int\limits_0^\alpha x^2f_\xi\left(x\right)dx=\frac{1}{4}$$

величины ξ и η_α являются некоррелируемыми, но зависимыми гауссовскими случайными величинами.

Решение. $\xi\sim N\left(0,1\right)$.

Запишем η_α через индикаторы $\eta_\alpha=\xi\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\leq\alpha\right\}-\xi\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\geq\alpha\right\}$.

Характеристическая функция

$$\varphi_{\eta_\alpha}\left(t\right)=Me^{it\eta_\alpha}=Me^{it\left(\xi\cdot\mathbb{1}\{|\xi|\leq\alpha\}-\xi\cdot\mathbb{1}\{|\xi|\geq\alpha\}\right)}.$$

Раскрываем скобки

$$Me^{it\left(\xi\cdot\mathbb{1}\{|\xi|\leq\alpha\}-\xi\cdot\mathbb{1}\{|\xi|\geq\alpha\}\right)}=Me^{it\xi}\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\leq\alpha\right\}+Me^{-it\xi}\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\geq\alpha\right\}.$$

Подставляем значения характеристической функции стандартной нормальной случайной величины

$$Me^{it\xi}\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\leq\alpha\right\}+Me^{-it\xi}\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\geq\alpha\right\}=e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\leq\alpha\right\}+e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\geq\alpha\right\}.$$

Объединим индикаторы

$$e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\leq\alpha\right\}+e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\mathbb{1}\left\{|\xi|\geq\alpha\right\}=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

следовательно, $\eta_\alpha \sim N(0,1)$.

Покажем, что случайные величины ξ и η_α некоррелируемы при

$$\int\limits_0^\alpha x^2 f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{4}.$$

Нужно показать, что $Cov(\xi,\eta_\alpha) = M(\xi\eta_\alpha) - M\xi \cdot M\eta_\alpha = M(\xi\eta_\alpha) = 0$.

Покажем это

$$M(\xi\eta_\alpha) = M\left[\xi\left(\xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \le \alpha\} - \xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \ge \alpha\}\right)\right].$$

Раскроем скобки и воспользуемся линейностью математического ожидания

$$\begin{aligned}
&M\left[\xi\left(\xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \le \alpha\} - \xi \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \ge \alpha\}\right)\right] = \\
&= M\left(\xi^2 \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \le \alpha\}\right) - M\left(\xi^2 \cdot \mathbb{1}\{|\xi| \ge \alpha\}\right) = \\
&= \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f_\xi(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{\alpha} x^2 f_\xi(x)\,dx - \int\limits_{\alpha}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx = \\
&= \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f_\xi(x)\,dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx - \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f_\xi(x)\,dx\right) = \\
&= -1 + 2\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f_\xi(x)\,dx = -1 + 4\int\limits_{0}^{\alpha} x^2 f_\xi(x)\,dx = -1 + 4 \cdot \frac{1}{4} = -1 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Значит, $Cov(\xi,\eta_\alpha) = 0$, то есть они некоррелируемые.

ξ и η_α зависимы, так как η_α выражается через ξ.

Занятие 8. Основные распределения, связанные с нормальным законом

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение распределения Пирсона $\left(\chi^2\right)$ с n степенями свободы, распределения Стьюдента (t-распределения) с n степенями свободы, распределения Фишера (F-распределения) с (m, n) степенями свободы.

Считаем, что $\vec{\xi}$ — стандартный гауссовский вектор.

Случайная величина $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ имеет распределение χ_n^2.

Есть $n+1$ независимая стандартная гауссовская случайная величина $\xi_0, \ldots, \xi_n$. Отношение первой (нулевой) случайной величины к корню суммы квадратов остальных, делённой на n, имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2}} \sim t_n.$$

Отношение независимых случайных величин $\chi_{k_1}^2$ и $\chi_{k_2}^2$ называется распределением Фишера

$$F_{k_1,k_2} = \frac{\chi_{k_1}^2}{\chi_{k_2}^2}.$$

Аудиторные задачи

8.3

Задание. Пусть $X_1, \ldots, x_n$ — выборка из распределения $N\left(a, \sigma^2\right)$. Докажите, что величина

$$\frac{\left(\overline{X} - a\right)\sqrt{n}}{\sigma}$$

имеет распределение $N(0,1)$.

Решение. $\varphi_{\overline{X}}(t) = Me^{it\overline{X}} = Me^{it\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = Me^{it\cdot\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)}$. Воспользуемся независимостью

$$Me^{it\cdot\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)} = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right).$$

Воспользуемся одинаковой распределённостью

$$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = exp\left\{\left(\frac{iat}{n} - \frac{t^2\sigma^2}{2n^2}\right)n\right\} = exp\left\{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2n}\right\},$$

значит,

$$\overline{X} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

После этого центрированием следует, что

$$\overline{X} - a \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Получаем, что

$$\frac{\left(\overline{X} - a\right)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1).$$

8.4

Задание. Пусть χ_n^2 — случайная величина, распределённая по закону χ^2 с n степенями свободы. Вычислите её математическое ожидание $M\chi_n^2$ и дисперсию $D\chi_n^2$.

Решение. Раз эта случайная величина имеет распределение χ^2 с n степенями свободы, изобразим её как

$$\chi_n^2 = \sum_{\xi_i^2},$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые, имеющие распределение $N(0,1)$. Тогда

$$M\chi_n^2 = M\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 = nM\xi_1^2 = n\left[M\xi_1^2 + (D\xi_1)^2\right] = n.$$

Теперь ищем дисперсию

$$D\chi_n^2 = D\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2.$$

Случайные величины независимы

$$D\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 = nD\xi_1^2 = n\left[M\xi_1^4 - \left(M\xi_1^2\right)^2\right].$$

Случайная величина $\xi \sim N(0,1)$. Если $\xi \sim N\left(0,\sigma^2\right)$, то

$$M\xi^{2n} = (2n-1)!!\left(\sigma^2\right)^n,$$

значит, $n\left[M\xi_1^4 - \left(M\xi_1^2\right)^2\right] = n(3-1) = 2n$.

8.5

Задание. Пусть χ_n^2 — случайная величина, распределённая по закону χ^2 с n степенями свободы. Докажите, что

$$\frac{1}{n}\cdot\chi_n^2 \xrightarrow{P} 1$$

при $n \to \infty$.

Решение.

$$\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \xrightarrow{P} 1,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением $N(0,1)$.

Такая сумма похожа на закон больших чисел. Раз ξ_i — независимы, то их квадраты тоже независимы между собой.

Тогда

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n} \xrightarrow{P} M\xi_i^2 = 1$$

по закону больших чисел.

8.6

Задание. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, причём ξ_i имеет распределение χ^2 с m_i степенями свободы. Докажите, что сумма $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ этих случайных величин имеет распределение χ^2 с

$$m = m_1 + \ldots + m_n$$

степенями свободы.

Решение. $\xi_i \sim \chi_{m_i}^2$ — знаем. Нужно доказать, что тогда

$$\xi = \sum_{i=1}^{n}\xi_i \sim \chi_m^2,$$

где $m = m_1 + \ldots + m_n$.

Сумма квадратов m_1-й случайной величины

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^{m_1}\theta_{1i}^2,$$

где $\theta_{1i} \sim N(0,1)$, и они независимы между собой, соответственно

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^{m_2} \theta_{2i}^2,$$

где $\theta_{2i} \sim N(0,1)$, и они независимы между собой и так далее,

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{m_n} \theta_{ni}^2,$$

где $\theta_{2i} \sim N(0,1)$, и они независимы между собой.

Всего будет $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ слагаемых. Случайные величины

$$\theta_{1i}, \ldots, \theta_{ni}$$

— независимы между собой.

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \theta_{ij}^2.$$

8.9

Задание. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром λ. Докажите, что статистика $T_n = 2n\lambda\overline{X}$ имеет распределение χ^2 с $2n$ стеепенями свободы.

Решение.

$$T_n = 2n\lambda\overline{X} = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где $X_i \sim Exp(\lambda)$, тогда статистика $T_n \overset{d}{\sim} \xi_1^2 + \ldots + \xi_{2n}^2$, где ξ_i^2 — независимые одинаково распределённые случайные величины, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$.

Имеем n пар $\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) + \left(\xi_3^2 + \xi_4^2\right) + \ldots + \left(\xi_{2n-1}^2 + \xi_{2n}^2\right)$, имеющих распределение

$$Exp\left(\frac{1}{2}\right).$$

Будет сумма n одинаково распределённых показательных случайных величин с параметром 0.5.

Для распределения Эрланга

$$p_{X_1+X_2}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_{X_1}(v)\, p_{X_2}(x-v)\, dv.$$

Распределение показательное, следовательно, $v \leq x$. Получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} p_{X_1}(v)\, p_{X_2}(x-v)\, dv = \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda v} \lambda e^{-\lambda(x-v)} dv = \lambda^2 \int\limits_0^x e^{-\lambda v + \lambda v - \lambda x} dv.$$

Упрощаем степень экспоненты

$$\lambda^2 \int\limits_0^x e^{-\lambda v+\lambda v-\lambda x} dv = \lambda^2 \int\limits_0^x e^{-\lambda x} dv = \lambda^2 e^{-\lambda x} x.$$

Плотность суммы n слагаемых равна (по предположению индукции)

$$p_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} e^{-\lambda x}.$$

Делаем шаг индукции

$$p_{\sum\limits_{i=1}^{n+1}}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_{X_1+\ldots+X_n}(v)\, p_{X_{n+1}}(x-v)\, dv.$$

Подставляем явный вид плотностей

$$\int\limits_{\mathbb{R}} p_{X_1+\ldots+X_n}(v)\, p_{X_{n+1}}(x-v)\, dv = \int\limits_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot v^{n-1} e^{-\lambda v} \lambda \cdot e^{-\lambda(x-v)} dv.$$

Выносим константы и берём интеграл

$$\int\limits_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot v^{n-1} e^{-\lambda v} \lambda \cdot e^{-\lambda(x-v)} dv = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \cdot e^{-\lambda x} x^n.$$

Функция распределения

$$F_{T_n}(x) = P(T_n \le x) = P\left(\sum_{X_i} \le \frac{x}{2\lambda}\right) = F_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}\left(\frac{x}{2\lambda}\right).$$

Плотность распределения получается дифференцированием функции распределения

$$p_{T_n}(x) = \frac{1}{2\lambda} \cdot p_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}\left(\frac{x}{2\lambda}\right).$$

Подставим

$$\frac{x}{2\lambda}$$

в соответствующее выражение

$$p_{T_n}(x) = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{x}{2\lambda}\right)^{n-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x^{n-1}}{2^n (n-1)!} \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

Если бы знали плотность ξ_1^2 или ξ_2^2, было бы удобно

$$p_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_{\xi_1^2}(v)\, p_{\xi_2^2}(x-v)\, dv.$$

По определению $F_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x) = P\left(\xi_1^2+\xi_2^2 \le x\right) = M\mathbb{1}\left\{\xi_1^2+\xi_2^2 \le x\right\}$. По правилу вычисления математического ожидания, если есть две случайные величины, будет 2 интеграла

$$M\mathbb{1}\left\{\xi_1^2+\xi_2^2 \le x\right\} = \iint \mathbb{R}^2 \mathbb{1}\left\{v^2+u^2 \le x\right\} \cdot p_{(\xi_1,\xi_2)} dudv.$$

Они независимы, значит, совместная плотность — это произведение плотностей, которые мы знаем. Подставляем в явном виде. Каждая имеет стандартное нормальное распределение

$$\iint \mathbb{R}^2 \mathbb{1}\left\{v^2+u^2 \le x\right\} \cdot p_{(\xi_1,\xi_2)} dudv = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}\left\{v^2+u^2 \le x\right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{v^2+u^2}{2}} dudv.$$

Замена: $u = \rho\cos\phi$, $v = \rho\sin\phi$. Получаем

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}\left\{v^2+u^2 \le x\right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{v^2+u^2}{2}} dudv = \int\limits_0^{\sqrt{x}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho d\phi.$$

По ϕ можем проинтегрировать сразу

$$\int\limits_0^{\sqrt{x}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho d\phi = \frac{2\pi}{2\pi} \cdot \int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = -e^{-\frac{\rho^2}{2}}\Big|_0^{\sqrt{x}} = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

— функция показательного распределения с параметром 0.5.

$$p_{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Такая же плотность была у случайной величины T_n.

Домашнее задание

Контрольная работа

Вариант 1

1

Задание. На таможню ежедневно приходит в среднем 10 грузовиков. Среднее квадратическое отклонение количества грузовиков равно 3. Используя центральную предельную теорему, найдите такое x, что вероятность того, что за год через таможню пройдёт больше чем x грузовиков, примерно равна 0.99.

Решение. Обозначим через ξ_n количество грузовиков, которые прибыли на таможню в n-ый день года. Тогда $S = \xi_1 + \ldots + \xi_{365}$ является количеством грузовиков, которые прибыли на таможню за год. Чтобы найти такое x, что $P(S > x) \approx 0.99$, воспользуемся аппроксимацией нормальным распределением:

$$P(S > x) = P\left(\frac{S - MS}{\sqrt{DS}} > \frac{x - MS}{\sqrt{DS}}\right) \approx \Phi_t\left(\frac{x - MS}{\sqrt{DS}}\right),$$

где Φ_t — функция распределения стандартного нормального распределения. Значит x находим из условия

$$\Phi_t\left(\frac{MS - x}{\sqrt{DS}}\right) \approx 0.01.$$

Воспользовавшись таблицей значений функции Φ_t, находим, что

$$\frac{MS - x}{\sqrt{DS}} \approx 2.32.$$

По условию $MS = 365 \cdot M\xi_1 = 3650$, $\sqrt{DS} = \sqrt{365 \cdot D\xi_1} = 3\sqrt{365}$ и значит $-x + 3650 \approx 2.32 \cdot 3\sqrt{365} \approx 132.97$, откуда $x = -132.97 + 3650 \approx 2517$.