Оглавление

Занятие 2. Характеристики случайного процесса

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$ — это параметризированная совокупность случайных величин.

Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?

$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n};\, t_1,\ldots,t_n \in T,\, n \geq 1\}$ — набор конечномерных распределений процесса ξ, где $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ — распределение вектора $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))$ в $\mathbb{R}^n$, то есть для борелевского $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)) \in \Delta\}$.

Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.

$m(t) = M\xi(t)$, $t \in T$ — функция среднего.
$D\xi(t)$, $t \in T$ — функция дисперсии.
$K(t,s) = M[\xi(t) - m(t)]\cdot[\xi(s) - m(s)]$, $t, s \in T$ — функция ковариации.

Аудиторные задачи

2.2

Задание. Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t},\ t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами a, σ^2. Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса $\xi = \{\xi(t),\, t > 0\}$.

Решение. Сейчас $T = (0, \infty)$.

Случайная величина X имеет распределение $N\left(a,\sigma^2\right)$. Нужно найти $M\xi\left(t\right) = m\left(t\right)$, $D\xi\left(t\right)$, ковариационную функцию $K\left(t,s\right)$ и одномерную плотность распределения $p_\xi\left(t\right)$.

Найчнём с математического ожидания

$$m\left(t\right) = M\left(X\cdot e^{-t}\right) = e^{-t}MX = e^{-t}\cdot a.$$

Далее — функция дисперсии $D\xi\left(t\right) = D\left(X\cdot e^{-t}\right) = e^{-2t}\cdot DX$. Дисперсия X — известная: $e^{-2t}\cdot DX = e^{-2t}\cdot\sigma^2$.

Далее — ковариационная функция

$$K\left(t,s\right) = M\left[\xi\left(t\right) - m\left(t\right)\right]\cdot\left[\xi\left(s\right) - m\left(s\right)\right] = cov\left[\xi\left(t\right),\xi\left(s\right)\right].$$

Вместо $\xi\left(t\right)$, $\xi\left(s\right)$ подставляем их значения

$$cov\left[\xi\left(t\right),\xi\left(s\right)\right] = cov\left(Xe^{-t}, Xe^{-s}\right).$$

Множители выносятся

$$cov\left(Xe^{-t}, Xe^{-s}\right) = e^{-t-s}cov\left(X,X\right) = e^{-t-s}DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность $\xi\left(t\right)\sim N\left(e^{-t}a,\ e^{-2t}\sigma^2\right)$.

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{\left(x-e^{-t}a\right)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины X.

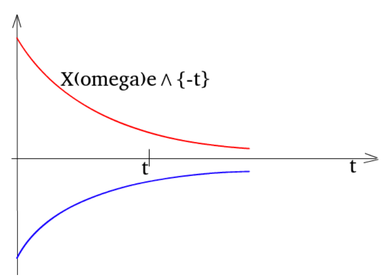

Рис. 1: Траектория процесса

2.3

Задание. Пусть

$$\xi\left(t\right) = e^{-Xt},\ t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром λ. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t > 0\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = e^{-Xt}$, где $X \sim Exp(\lambda), t > 0$.

Нужно найти $m(t), K(t,s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t. По определению

$$m(t) = Me^{-Xt} = \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше X, тем быстрее эта функция убывает.

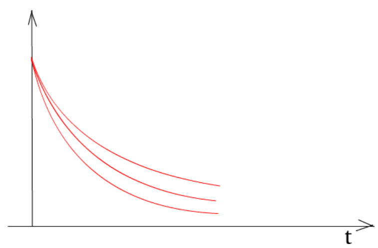

Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) = Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda+t}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

Подставим найденное значение фунцкии математического ожидания

$$Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda+t}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s} = \frac{\lambda}{\lambda+t+s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda+t)(\lambda+s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1),\dots,\xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \le x_1, \dots, \xi(t_n) \le x_n\}$. Вместо ξ напишем формулу $P\{\xi(t_1) \le x_1, \dots, \xi(t_n) \le x_n\} = P\left(e^{-Xt_1} \le x_1, \dots, e^{-Xt_n} \le x_n\right)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X. Все неравенства решаем относительно X

$$P\left(e^{-Xt_1} \le x_1, \dots, e^{-Xt_n} \le x_n\right) = P\left\{X \ge -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \dots, X \ge -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \ge -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \dots, X \ge -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \ge \max\left(-\frac{ln\, x_1}{t_1}, \dots, -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right)\right\}.$$

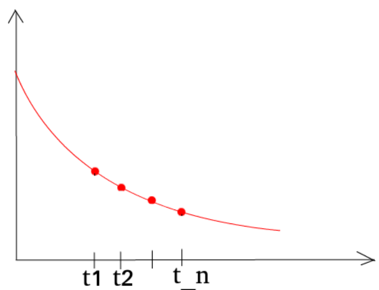

Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой m

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right)\right\} = \int\limits_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(ln\, x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, ln\, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(ln\, x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, ln\, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \ldots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда $0 < x_1, \ldots, x_n < 1$.

Плотности у такого векора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ быть не может, потому что $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$. Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$, $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$.

С вероятностью 1 $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$ — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

2.4

Задание. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A\cos(\varphi + \lambda t),$$

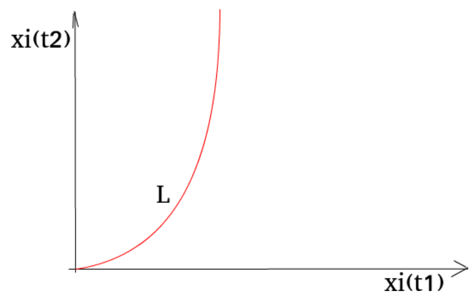

Рис. 4: $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где A и φ являются независимыми случайными величинами такими, что $MA^2 < \infty$, а φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

Решение. $\varphi \sim U([0, 2\pi])$.

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.

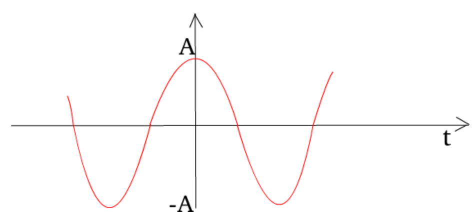

Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A\cos(\varphi + \lambda t)]$. Случайные величины A и φ — независимые. $M[A\cos(\varphi + \lambda t)] = MAM\cos(\varphi + \lambda t)$. Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у φ известна плотность

$$MAM\cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$ Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M\left[A^2\cos(\varphi + \lambda t)\cos(\varphi + \lambda s)\right] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t)(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M\left\{\frac{1}{2} \cdot \cos\left[2\varphi + \lambda\left(t+s\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right]\right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

2.5

Задание. Пусть τ — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, и пусть $\{X\left(t\right), t \in [0,1]\}$ — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X\left(t\right) = \mathbb{1}\left\{t \geq \tau\right\}, t \in [0,1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X\left(t\right), t \in [0,1]\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. τ — случайная величина с распределением $U\left([0,1]\right)$.

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное τ выпало.

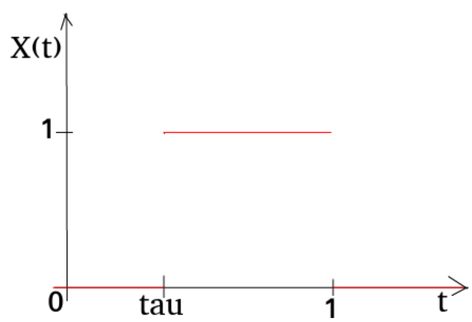

Рис. 6: Траектория процесса

$$m\left(t\right) = MX\left(t\right) = M\mathbb{1}\left\{t \geq \tau\right\} = P\left(t \geq \tau\right) = F_\tau\left(t\right) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция $K\left(t,s\right) = M\left[X\left(t\right)X\left(s\right)\right] - MX\left(t\right)MX\left(s\right)$. Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M\left[X\left(t\right)X\left(s\right)\right] - MX\left(t\right)MX\left(s\right) = P\left\{\tau \leq \min\left(t,s\right)\right\} - ts = \min\left(t,s\right) - t \cdot s.$$

Конечномерные распределения — распределение вектора $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$. Каждый X — это 0 или 1.

$$P\{(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = (0, \ldots, 0)\} = P\{\tau \in (t_n, 1]\} = 1 - t_n.$$

Точки t_n изображены на рисунке 7.

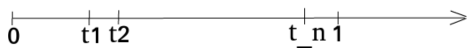

Рис. 7: Временная ось

У вектора получается $(n+1)$-но значение

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \ldots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \ldots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \ldots, \\ (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \ldots, \\ (1, \ldots, 1), & t_1. \end{cases}$$

2.6

Задание. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения F, и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le t\}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le t\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$cov(X(t), X(s)) = cov\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le t\}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le s\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} cov(\mathbb{1}\{\xi_i \le t, \mathbb{1}\{\xi_j \le s\}\}) =$$

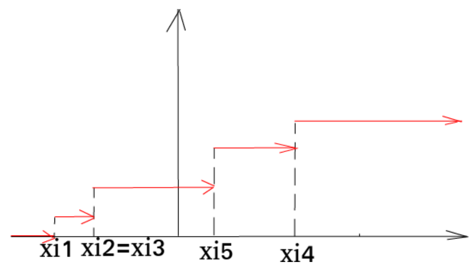

Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}\left\{\xi_i \leq t\right\}, \mathbb{1}\left\{\xi_i \leq s\right\} \right).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$cov\left(\mathbb{1}\left\{\xi_i \leq t\right\}, \mathbb{1}\left\{\xi_i \leq s\right\} \right) = M\mathbb{1}\left\{\xi_i \leq t \wedge s\right\} - F\left(t\right) F\left(s\right) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F\left(t \wedge s\right) - F\left(t\right) F\left(s\right),$$

где $\wedge$ означает минимум.

Все слагаемые в сумме раны этому выражению

$$K\left(t, s\right) = \frac{1}{n} \left[F\left(t \wedge s\right) - F\left(t\right) F\left(s\right) \right].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем $t_1, t_2, \ldots, t_m$ (рис. 9).

$$X\left(t\right) \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 \right\}.$$

По t, X увеличивается. Эта функция монотонна.

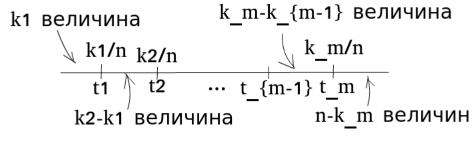

Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_m \leq n.$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P\left\{X\left(t_1\right)=\frac{k_1}{n},\, X\left(t_2\right)=\frac{k_2}{n},\dots,X\left(t_m\right)=\frac{k_m}{n}\right\}=$$

$P($для k_1 наблюдений $\xi\le t_1$, для k_2-k_1 наблюдений $t_1<\xi\le t_2,\dots,$ для $n-k_m$ наблюдений $\xi>t_m)$ Имеем мультиномиальное распределение

$$=\frac{n!}{k_1!\left(k_2-k_1\right)!\dots\left(n-k_m\right)!}\cdot F\left(t_1\right)^{k_1}\cdot\left[F\left(t_2\right)-F\left(t_1\right)\right]^{k_2-k_1}\cdot\dots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить n величин на группы.

2.7

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $X\left(\eta\right)$, где $\left\{X\left(t\right),\, t\in[0,1]\right\}$ — процесс из задачи 2.5, а η — независимая от X случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно.

Решение. $X\left(t\right)=\mathbb{1}\left\{t\ge\tau\right\}$.

Задана случайная величина

$$\eta=\begin{cases}0, & \frac{1}{3},\\ 1, & \frac{2}{3}.\end{cases}$$

Интересуемся $\varphi_{X(\eta)}$. Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.

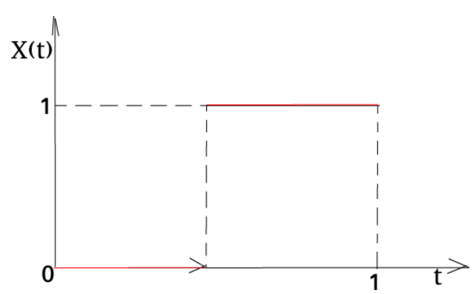

Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1: $X\left(0\right)=0$, $X\left(1\right)=1$, значит, $X\left(\eta\right)=\eta$.

$$\varphi_{X(\eta)}\left(\lambda\right)=\varphi_{\eta}\left(\lambda\right)=Me^{i\lambda\eta}=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

Домашнее задание

2.12

Задание. Пусть

$$\xi(t) = Xt + a,\ t \in \mathbb{R},$$

где X — равномерно распределённая на отрезке (a, b) случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = Xt + a$, $t \in \mathbb{R}$, где $X \sim U(a, b)$.

Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изоражены на рисунке 11: чем больше X, тем больше угол наклона прямой к оси $0t$.

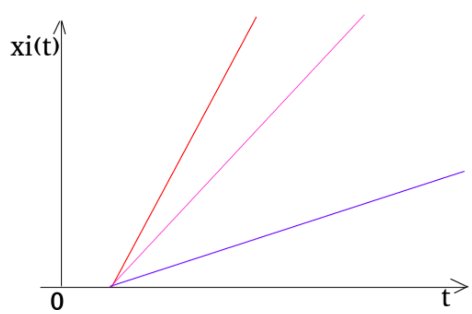

Рис. 11: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt + a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t) M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и вычисляем математическое ожидание

$$= M\left[(Xt+a)(Xs+a)\right] - M(Xt+a)\,M(Xs+a) =$$

$$= M\left[X^2ts + Xa(t+s) + a^2\right] - \left(t\cdot\frac{a+b}{2}+a\right)\left(s\cdot\frac{a+b}{2}+a\right) =$$

$$= ts\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{3} + a(t+s)\cdot\frac{a+b}{2} + a^2 - ts\cdot\frac{(a+b)^2}{4} - ta\cdot\frac{a+b}{2} - a^2 -$$

$$-as\cdot\frac{a+b}{2} =$$

$$= ts\left(\frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) + (t+s)\,a\cdot\frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2}\cdot a(t+s) =$$

$$= ts\cdot\frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = ts\cdot\frac{a^2-2ab+b^2}{12} = ts\cdot\frac{(a-b)^2}{12}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))$ — рис. 12.

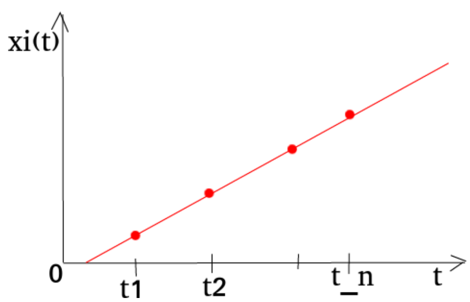

Рис. 12: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1)\le x_1,\ldots,\xi(t_n)\le x_n\}$. Вместо ξ напишем формулу $P\{\xi(t_1)\le x_1,\ldots,\xi(t_n)\le x_n\} = P(Xt_1+a\le x_1,\ldots,Xt_n+a\le x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X. Все неравенства решаем относительно X

$$P(Xt_1+a\le x_1,\ldots,Xt_n+a\le x_n) = P(Xt_1\le x_1-a,\ldots,Xt_n\le x_n-a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X\le\frac{x_1-a}{t_1},\ldots,X\le\frac{x_n-a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P\left\{X\le\min\left(\frac{x_1-a}{t_1},\ldots,\frac{x_n-a}{t_n}\right)\right\} =$$

Обозначим минимум буквой m для удобства

$$= P(X \leq m) = \int\limits_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{X \in (a,b)\}\, dX = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X\Big|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\min\left(\frac{x_1-a}{t_1}, \ldots, \frac{x_n-a}{t_n}\right) - a\right]$$

при $m \in (a,b)$, иначе — ноль.