

Оглавление

Занятие 2. Характеристики случайного процесса	1
Контрольные вопросы и задания	3
Аудиторные задачи	3
Домашнее задание	16
Занятие 3. Процесс Пуассона	25
Контрольные вопросы и задания	27
Аудиторные задачи	28
Домашнее задание	36
Занятие 4. Гауссовские процессы	43
Контрольные вопросы и задания	45
Домашнее задание	60
Занятие 5. Винеровский процесс	66
Контрольные вопросы и задания	67
Аудиторные задачи	68
Домашнее задание	77

Занятие 2. Характеристики случайного процесса

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$ — это параметризованная совокупность случайных величин.

Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?

$\{\mu_{t_1, \dots, t_n}; t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$ — набор конечномерных распределений процесса ξ , где μ_{t_1, \dots, t_n} — распределение вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ в \mathbb{R}^n , то есть для борелевского $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_{t_1, \dots, t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) \in \Delta\}$.

Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.

$m(t) = M\xi(t)$, $t \in T$ — функция среднего.

$D\xi(t)$, $t \in T$ — функция дисперсии.

$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)]$, $t, s \in T$ — функция ковариации.

Аудиторные задачи

2.2

Задание. Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t}, t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами a , σ^2 . Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса $\xi = \{\xi(t), t > 0\}$.

Решение. Сейчас $T = (0, \infty)$.

Случайная величина X имеет распределение $N(a, \sigma^2)$. Нужно найти $M\xi(t) = m(t)$, $D\xi(t)$, ковариационную функцию $K(t, s)$ и одномерную плотность распределения $p_\xi(t)$.

Начнём с математического ожидания

$$m(t) = M(X \cdot e^{-t}) = e^{-t}MX = e^{-t} \cdot a.$$

Далее — функция дисперсии $D\xi(t) = D(X \cdot e^{-t}) = e^{-2t} \cdot DX$. Дисперсия X — известная: $e^{-2t} \cdot DX = e^{-2t} \cdot \sigma^2$.

Далее — ковариационная функция

$$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)] = cov[\xi(t), \xi(s)].$$

Вместо $\xi(t)$, $\xi(s)$ подставляем их значения

$$cov[\xi(t), \xi(s)] = cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}).$$

Множители выносятся

$$cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}) = e^{-t-s}cov(X, X) = e^{-t-s}DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность $\xi(t) \sim N(e^{-t}a, e^{-2t}\sigma^2)$.

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x - e^{-t}a)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины X .



Рис. 1: Траектория процесса

2.3

Задание. Пусть

$$\xi(t) = e^{-Xt}, t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром λ . Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t > 0\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = e^{-Xt}$, где $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $t > 0$.

Нужно найти $m(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t . По определению

$$m(t) = M e^{-Xt} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше X , тем быстрее эта функция убывает.



Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M \xi(t) \xi(s) - M \xi(t) M \xi(s) = M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Подставим найденное значение функции математического ожидания

$$M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s} = \frac{\lambda}{\lambda + t + s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda + t)(\lambda + s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$. Вместо ξ напомним формулу $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X . Все неравенства решаем относительно X

$$P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n) = P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\}.$$



Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой m

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\} = \int_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \dots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда $0 < x_1, \dots, x_n < 1$.

Плотности у такого векора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ быть не может, потому что $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$. Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$, $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$.

С вероятностью 1 $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$ — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

2.4

Задание. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A \cos(\varphi + \lambda t),$$



Рис. 4: $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где A и φ являются независимыми случайными величинами такими, что $MA^2 < \infty$, а φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

Решение. $\varphi \sim U([0, 2\pi])$.

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.



Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A \cos(\varphi + \lambda t)]$. Случайные величины A и φ — независимые. $M[A \cos(\varphi + \lambda t)] = MAM \cos(\varphi + \lambda t)$. Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у φ известна плотность

$$MAM \cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$
Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M[A^2 \cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos [2\varphi + \lambda (t + s)] + \frac{1}{2} \cdot \cos [\lambda (t - s)] \right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos [\lambda (t - s)].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

2.5

Задание. Пусть τ — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, и пусть $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}, t \in [0, 1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), t \in [0, 1]\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. τ — случайная величина с распределением $U([0, 1])$.

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное τ выпало.



Рис. 6: Траектория процесса

$$m(t) = MX(t) = M\mathbb{1}\{t \geq \tau\} = P(t \geq \tau) = F_\tau(t) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция $K(t, s) = M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s)$. Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s) = P\{\tau \leq \min(t, s)\} - ts = \min(t, s) - t \cdot s.$$

Конечномерные распределения — распределение вектора $(X(t_1), \dots, X(t_n))$.
Каждый X — это 0 или 1.

$$P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) = (0, \dots, 0)\} = P\{\tau \in (t_n, 1]\} = 1 - t_n.$$

Точки t_n изображены на рисунке 7.



Рис. 7: Временная ось

У вектора получается $(n + 1)$ -но значение

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \dots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \dots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \dots, \\ (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \dots, \\ (1, \dots, 1), & t_1. \end{cases}$$

2.6

Задание. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения F , и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq s\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \mathbb{1}\{\xi_j \leq s\}) =$$



Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$\text{cov} (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}) = M \mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \wedge s \} - F(t) F(s) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F(t \wedge s) - F(t) F(s),$$

где \wedge означает минимум.

Все слагаемые в сумме равны этому выражению

$$K(t, s) = \frac{1}{n} [F(t \wedge s) - F(t) F(s)].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем t_1, t_2, \dots, t_m (рис. 9).

$$X(t) \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}.$$

По t , X увеличивается. Эта функция монотонна.



Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq n.$$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P \left\{ X(t_1) = \frac{k_1}{n}, X(t_2) = \frac{k_2}{n}, \dots, X(t_m) = \frac{k_m}{n} \right\} =$$

P (для k_1 наблюдений $\xi \leq t_1$, для $k_2 - k_1$ наблюдений $t_1 < \xi \leq t_2, \dots$, для $n - k_m$ наблюдений $\xi > t_m$) Имеем мультиномиальное распределение

$$= \frac{n!}{k_1! (k_2 - k_1)! \dots (n - k_m)!} \cdot F(t_1)^{k_1} \cdot [F(t_2) - F(t_1)]^{k_2 - k_1} \cdot \dots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить n величин на группы.

2.7

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $X(\eta)$, где $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ — процесс из задачи 2.5, а η — независимая от X случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно.

Решение. $X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}$.

Задана случайная величина

$$\eta = \begin{cases} 0, & \frac{1}{3}, \\ 1, & \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Интересуемся $\varphi_{X(\eta)}$. Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.



Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1: $X(0) = 0, X(1) = 1$, значит, $X(\eta) = \eta$.

$$\varphi_{X(\eta)}(\lambda) = \varphi_{\eta}(\lambda) = M e^{i\lambda\eta} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

2.8

Задание. Значение случайного телеграфного сигнала $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ в произвольный момент времени с одинаковыми вероятностями равно 0 или 1. Прыжки происходят случайным и независимым образом. Вероятность $P(k, T)$ того, что в интервале времени длины T произойдёт k прыжков, задаётся распределением Пуассона, то есть:

$$P(k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T},$$

где λ — среднее количество прыжков за единицу времени. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса ξ .

Решение.

$$P\{\xi(t) = 1\} = P\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{2}.$$

Одномерные распределения даны. Это распределение Бернулли.

$P(k, T)$ — это вероятность того, что на отрезке времени длины T было k прыжков (распределение Пуассона), то есть траектория процесса выглядит как на рисунке 11.



Рис. 11: Траектория случайного процесса

В каждой точке будет 0 или 1.

Математическое ожидание тут ищется просто

$$M\xi(t) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Теперь нужно ещё найти ковариационную функцию такого процесса

$$K(s, t) = M[(\xi(t) - M\xi(t)) \cdot (\xi(s) - M\xi(s))] = M\xi(s)\xi(t) - \frac{1}{4}.$$

Нужно математическое ожидание совместного процесса. $\xi(s)$ и $\xi(t)$ независимы.

Попробуем найти математическое ожидание произведения. $\xi(t)\xi(s)$ принимают значения 0 и 1. Произведение принимает значения 0 и 1. Получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = 0 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 0\} + 1 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 1\} =$$

Слагаемое с нулём пропадает

$$= P\{\xi(s) = 1, \xi(t) = 1\}.$$

Значения в точках совпадают, если между ними произошло чётное количество скачков $M\xi(t)\xi(s) = P\{\xi(s) = 1\}P$ (на отрезке $[s, t]$ будет чётное количество прыжков) $= \frac{1}{2} \cdot P$ (на отрезке $[s, t]$ будет чётное число прыжков). Мы знаем, с какой вероятностью происходит число прыжков.

Подходят любые чётные прыжки, то есть это вероятность объединения. Число скачков обозначим буквой N . Тогда P (на $[s, t]$ чётное число скачков) $= P(N_{[s,t]} \text{ чётное}) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(2k = N_{[s,t]}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(2k, t-s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-s)]^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Экспонента выносится за сумму. Остаётся сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Для того, чтобы это было экспонента, нужны ещё и нечётные степени

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^x.$$

Если мы вычтем вторую сумму, то получится

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-x}.$$

Теперь нужно сложить эти два выражения и поделить на 2, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x = \lambda(t-s).$$

Получили гиперболический косинус.

$$= \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{-\lambda(t-s)}}{2} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Умножим один сомножитель на другой, $e^{\lambda(t-s)} \cdot e^{-\lambda(t-s)}$ дают единицу. Получаем

$$= \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{2}.$$

Это вероятность чётного числа скачков.

Выпишем, чему равна ковариационная функция. Математическое ожидание произведения нужно умножить на $\frac{1}{2}$ и отнять $\frac{1}{4}$. Получится

$$K(t, s) = \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^{-2\lambda(t-s)}}{4}, \quad s < t.$$

Окончательный ответ:

$$K(t, s) = \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda|t-s|}.$$

2.9

Задание. Пусть η_1 и η_2 — независимые случайные величины, которые имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найдите значения a , при которых почти все реализации случайной функции $t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$ монотонно возрастают по t .

Решение. $\xi(t) = t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$ — процесс, который задан при $t > 0$. Известно, что траектория этого процесса монотонно возрастает по t с вероятностью 1. Нужно найти $a = \text{const}$.

Реализация такого процесса выглядит как прямая линия (рис. 12), при этом $\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0$. Это случайная величина, так что коэффициент наклона должен быть положительным

$$P\{\xi(t) \nearrow\} = P\{\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0\} = 1 =$$

Число a должно быть таким, чтобы вероятность была единицей.

Рисуем траекторию процесса, считая, что все случайные величины неслучайны. Нужно, чтобы все реализации (прямые) возрастали.

Про η_1 и η_2 мы всё знаем. Это независимые случайные величины. Получаем двукратный интеграл

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}\{x + a(y + 2a) > 0\} dx dy,$$

где первые два множителя — плотности.



Рис. 12: Траектория случайного процесса

1. При $a = 0$ $\eta_1 > 0$ — правая часть квадрата. Тогда событие выполняется с вероятностью

$$\frac{1}{2} \neq 1,$$

то есть $a \neq 0$.

2. Следующий случай: пусть $a > 0$. Получается, что условие переписывается в виде

$$\eta_2 + 2a \geq -\frac{\eta_1}{a},$$

откуда

$$\eta_2 \geq -\frac{\eta_1}{a} - 2a,$$

то есть на картинке это будет прямая. Мы возьмём всё, что над этой прямой

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Наша вероятность — это площадь квадрата над прямой. Вероятность не будет равна 1. a должно быть таким, чтобы прямая прошла через точку $(-1, -1)$, то есть $-1 + a(2a - 1) \geq 0$. Теперь можно найти a из неравенства $2a^2 - a - 1 \geq 0$. Сейчас скажем, при каких a это выполнено. Нужно найти корни уравнения. $D = 1 + 8 = 9 = 3^2$, значит

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 1,$$

то есть то, что нужно выбрать изображено на рисунке 13.



Рис. 13: Решение неравенства

Задавали $a > 0$, то есть при $a \geq 1$ вероятность такого события — единица.

3. Теперь нужно задать $a < 0$. Отличие будет в том, как пройдёт прямая. Когда поделим на a , знак поменяется.

$$-\frac{\eta_1}{a} - 2a \geq \eta_2,$$

то есть нужно нарисовать прямую

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Прямая пройдёт через такие же точки: $(-2a, -2a^2)$, только если a — отрицательное, то $-2a$ — положительное. Нужно будет выбрать всё, что ниже этой прямой.

Нужно, чтобы прямая прошла над точкой $(-1, 1)$. Имеем неравенство $-1 + a(1 + 2a) \geq 0$, откуда

$$a^1 + \frac{1}{2} \cdot a - 1 \geq 0.$$

Решая соответствующее уравнение находим, что

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1.$$

Получаем всё, что за корнями (рис. 14).

При $a < 0$ получаем ответ: $a \leq -1$.



Рис. 14: Решение неравенства

Ответ к задаче: $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, то есть $|a| > 1$. Тогда все реализации процесса будут возрастать.

2.10

Задание. Пусть случайная величина $\tau \in (0, 1)$ имеет непрерывное распределение и пусть

$$\xi(t) \equiv 0; \eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Изобразите траектории этих процессов. Докажите, что эти процессы являются стохастически эквивалентными, то есть $\forall t \in [0, 1] : P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = 0$.

Решение. τ — это случайная величина с непрерывным распределением — та, у которой функция распределения F_τ — непрерывна.

Скачок функции распределения в точке x — это $\Delta F_\tau(x) = P(\tau = x) = 0$, где

$$F_\tau(x) = P(\tau \leq x),$$

а $F_\tau(-x) = P(\tau < x)$. В нашем случае нет скачков, то есть в фиксированный x случайная величина τ не попадёт. Рассматривается 2 процесса: один процесс — это $\xi(t) \equiv 0$, второй процесс — это

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau. \end{cases}$$

Посмотрим, какие траектории у этих процессов (рис. 15). Процессы заданы на

$$t \in [0, 1].$$

Стохастически эквивалентные означает, что если зафиксировать момент времени t , то в этот момент $P\{\xi(t) = \eta(t)\} = P\{\eta(t) = 0\} = P(\tau \neq t) = 1$. С точки зрения анализа это разные функции. У η всегда есть скачок, у ξ никогда скачков нет. Помним, что $\xi(t) \equiv 0$. Тем не менее, вероятность $P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = P\{\eta(t) \neq 0\} = P(\tau = t) = 0$, а это значит, что в фиксированной точке процессы с вероятностью 1 совпадают. Если зафиксируем несколько точек t_1, t_2, \dots, t_n , то вероятность

$$P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) = (\eta(t_1), \dots, \eta(t_n))\} = 1.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}^\xi = \mu_{t_1, \dots, t_n}^\eta.$$

Конечномерные распределения не определяют траектории процесса.



Рис. 15: Траектория случайных процессов

Домашнее задание

2.12

Задание. Пусть

$$\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R},$$

где X — равномерно распределённая на отрезке (a, b) случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R}$, где $X \sim U(a, b)$.

Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 16: чем больше X , тем больше угол наклона прямой к оси $0t$.



Рис. 16: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt + a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и вычисляем математическое ожидание

$$\begin{aligned} &= M[(Xt + a)(Xs + a)] - M(Xt + a)M(Xs + a) = \\ &= M[X^2ts + Xa(t + s) + a^2] - \left(t \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) \left(s \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) = \\ &= ts \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3} + a(t + s) \cdot \frac{a+b}{2} + a^2 - ts \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - ta \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 - \\ &\quad - as \cdot \frac{a+b}{2} = \\ &= ts \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right) + (t + s)a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot a(t + s) = \\ &= ts \cdot \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = ts \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = ts \cdot \frac{(a-b)^2}{12}. \end{aligned}$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ — рис. 17.



Рис. 17: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$. Вместо ξ напомним формулу $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X . Все неравенства решаем относительно X

$$P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n) = P(Xt_1 \leq x_1 - a, \dots, Xt_n \leq x_n - a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X \leq \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, X \leq \frac{x_n - a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P \left\{ X \leq \min \left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) \right\} =$$

Обозначим минимум буквой m для удобства

$$= P(X \leq m) = \int_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{X \in (a, b)\} dX = \frac{1}{b-a} \int_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\min \left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) - a \right]$$

при $m \in (a, b)$, иначе — ноль.

2.13

Задание. Пусть

$$\xi(t) = U \cos \theta t + V \sin \theta t, \quad t \in T,$$

где U, V — независимые случайные величины с заданными характеристиками: $MU = MV = 0$, $DU = DV = \sigma^2$, θ — неслучайная величина. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса $\{\xi(t), t \in T\}$.

Решение. Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$.

Найдём математическое ожидание в момент t . По свойствам

$$m(t) = M\xi(t) = M(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos \theta t \cdot MU + \sin \theta t \cdot MV = 0.$$

Можно сделать преобразование $U \cos \theta t + V \sin \theta t = C \sin(\theta t + \omega)$, где $C = \sqrt{U^2 + V^2}$. Траектории такого процесса изображены на рисунке 18: график синуса сжимается к оси ординат, когда модули случайных величин U и V растут.



Рис. 18: Траектория процесса

Найдём дисперсию в момент t . По свойствам

$$D\xi(t) = D(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos^2 \theta t \cdot DU + \sin^2 \theta t \cdot DV =$$

Подставим известные значения дисперсии

$$= \cos^2 \theta t \cdot \sigma^2 + \sin^2 \theta t \cdot \sigma^2 = \sigma^2 (\cos^2 \theta t + \sin^2 \theta t) = \sigma^2.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставим выражения для случайного процесса в первое слагаемое, а второе равно нулю

$$= M[(U \cos \theta t + V \sin \theta t) \cdot (U \cos \theta s + V \sin \theta s)] =$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} &= M(U^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + UV \cos \theta t \cdot \sin \theta s + VU \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + V^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \\ &= DU \cdot \cos \theta t \cdot \cos \theta s + MU \cdot MV \cdot \cos \theta t \cdot \sin \theta s + MV \cdot MU \cdot \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + DV \cdot \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \sigma^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sigma^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \\ &= \sigma^2 \cdot (\cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \sigma^2 \cos(\theta t - \theta s) = \sigma^2 \cos[\theta(t - s)]. \end{aligned}$$

2.14

Задание. Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса

$$\xi(t) = 2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5, \quad t \in T,$$

где ν — известный неслучайный параметр, а u, v — случайные величины с известными характеристиками:

$$Mu = 1, \quad Mv = 2, \quad Du = 0.1, \quad Dv = 0.9, \quad cov(u, v) = -0.3.$$

Решение. Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$.

Найдём математическое ожидание в момент t . По свойствам

$$m(t) = M(2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) = 2 \sin \nu t \cdot Mu + 3t^2 Mv + 5 = 2 \sin \nu t + 6t^2 + 5.$$

Траектория такого процесса изображена на рисунке 19 при $\nu = 1$, $u = 1$, $v = 2$.

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t) \cdot M\xi(s) =$$



Рис. 19: Траектория процесса

Подставим выражения для случайного процесса и его математические ожидания

$$\begin{aligned}
 &= M \left[(2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) (2u \sin \nu s + 3vs^2 + 5) \right] - \\
 &\quad - (2 \sin \nu t + 6t^2 + 5) (2 \sin \nu s + 6s^2 + 5) = \\
 &= M(4u^2 \sin \nu t \cdot \sin \nu s + 6uv \sin \nu t \cdot s^2 + 10u \sin \nu t + 6vt^2 u \sin \nu s + 9v^2 t^2 s^2 + \\
 &\quad + 15vt^2 + 10u \sin \nu s + 15vs^2 + 25) - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - \\
 &\quad - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 = \\
 &= 4 \sin \nu t \cdot Mu^2 + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + 10 \sin \nu t \cdot Mu + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + \\
 &\quad + 9t^2 s^2 Mv^2 + 15t^2 Mv + 10 \sin \nu s \cdot Mu + 15s^2 \cdot Mv + 25 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - \\
 &\quad - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 =
 \end{aligned}$$

Вычислим вторые моменты

$$Mu^2 = Du + (Mu)^2 = 0.1 + 1 = 1.1, \quad Mv^2 = Dv + (Mv)^2 = 0.9 + 4 = 4.9.$$

По определению ковариации $cov(u, v) = M(uv) - Mu \cdot Mv$, откуда

$$M(uv) = cov(u, v) + Mu \cdot Mv = -0.3 + 1 \cdot 2 = 2 - 0.3 = 1.7.$$

Подставим полученные значения в функцию ковариации

$$\begin{aligned}
 &= 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s \cdot 1.1 + 6 \sin \nu t \cdot s^2 \cdot 1.7 + 10 \sin \nu t + 6t^2 \sin \nu s \cdot 1.7 + \\
 &\quad + 9t^2 s^2 \cdot 4.9 + 15t^2 \cdot 2 + 10 \sin \nu s + 15s^2 \cdot 2 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - \\
 &\quad - 10 \sin \nu t - 12t^2 \cdot \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 = \\
 &= 0.4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 1.8 \sin \nu t \cdot s^2 - 1.8t^2 \sin \nu s + 8.1t^2 s^2.
 \end{aligned}$$

Найдём дисперсию в момент t . Из формулы для ковариации

$$D\xi(t) = K(t, t) = 0.4 \sin^2 \nu t - 3.6 \sin \nu t \cdot t^2 + 8.1t^4.$$

2.15

Задание. Найдите ковариационную функцию процесса

$$Y(t) = \psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n,$$

где ψ_1, \dots, ψ_n — произвольные числовые функции от t , а X_1, \dots, X_n — некоррелируемые случайные величины с дисперсиями D_1, \dots, D_n .

Решение. Нужно найти

$$K(t, s) = \text{cov}(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n, \psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) =$$

Распишем по определению

$$\begin{aligned} &= M[(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n)(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n)] - \\ &- M(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n) \cdot M(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M(X_i X_j) - \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M X_i \cdot M X_j = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D X_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D X_n = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D_n. \end{aligned}$$

2.16

Задание. Пусть η и ζ — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $1/2$. Найдите конечномерные распределения случайного процесса

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}, \quad t > 0.$$

Решение. Для произвольных натуральных $n \geq 1$, произвольных моментов времени $t_1, \dots, t_n \in T$ и произвольных действительных чисел x_1, \dots, x_n находим

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} =$$

Подставляем выражения для случайного процесса

$$= P\left(\frac{\eta + \zeta}{t_1} \leq x_1, \frac{\eta + \zeta}{t_2} \leq x_2, \dots, \frac{\eta + \zeta}{t_n} \leq x_n\right) =$$

Переносим моменты времени вправо

$$= P(\eta + \zeta \leq x_1 t_1, \eta + \zeta \leq x_2 t_2, \dots, \eta + \zeta \leq x_n t_n) =$$

Независимые случайные величины η и ζ имеют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

Их сумма имеет стандартное нормальное распределение. Пусть

$$\eta + \zeta = X \sim N(0, 1).$$

Тогда

$$= P(X \leq x_1 t_1, X \leq x_2 t_2, \dots, X \leq x_n t_n) = P\left(X \leq \min_{i=1, n} x_i t_i\right) =$$

Запишем через плотность

$$= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где обозначено

$$z = \min_{i=1, n} x_i t_i.$$

2.17

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi(\tau)$, где $\{\xi(t), t \geq 0\}$ — процесс из предыдущей задачи, а τ — независимая от ξ случайная величина, которая принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями $1/2$.

Решение.

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}.$$

Задана случайная величина

$$\tau = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Интересует

$$\varphi_{\xi(\tau)}(\lambda) = M e^{i\xi(\tau)\lambda} = M e^{i \cdot \frac{\eta + \zeta}{\tau} \cdot \lambda} =$$

Как и в предыдущей задаче $\eta + \zeta = X \sim N(0, 1)$. Получаем

$$= M e^{i \cdot \frac{X}{\tau} \cdot \lambda} = M e^{-\frac{\lambda^2}{2\tau^2}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

2.18

Задание. Пусть ξ и η — случайные величины, причём η имеет симметричное относительно нуля распределение и $P(\eta = 0) = 0$. Найдите вероятность того, что реализации случайного процесса $\zeta(t) = \xi + t(\eta + t)$, $t \geq 0$ возрастают.

Решение. Известно, что траектории процесса возрастают по t при $t \geq 0$.



Рис. 20: Траектория процесса

Реализация такого процесса выглядит как парабола (рис. 20) с вершиной в точке с координатами

$$t_0 = -\frac{\eta}{2}, \zeta_0 = t_0^2 + \eta t_0 + \xi = \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^2}{2} + \xi = \xi - \frac{\eta^2}{4}$$

Это случайная величина, так что

$$\begin{aligned} P\{\zeta(t) \geq 0, t \geq 0\} &= P\{\xi + t(\eta + t) \geq 0, t \geq 0\} = \\ &= P(\text{вершина параболы } \zeta = t^2 + \eta t + \xi \text{ лежит слева от нуля}) = \\ &= P\left(-\frac{\eta}{2} \leq 0\right) = P(\eta \geq 0) = \end{aligned}$$

Случайная величина η имеет симметричное распределение

$$= \frac{1}{2}.$$

2.19

Задание. Случайный эксперимент состоит в двухразовом подбрасывании монеты. Обозначим через $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ результат эксперимента и обозначим процессы $\{X(t), 0 \leq t < 2\}$ и $\{Y(t), 0 \leq t < 2\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathbb{1}_{[0,1)}(t) \cdot \mathbb{1}\{\omega_1 = P\} + \mathbb{1}_{[1,2)}(t) \cdot \mathbb{1}\{\omega_2 = P\}, 0 \leq t < 2, \\ Y(t) &= 1 - X(t), 0 \leq t < 2. \end{aligned}$$

Докажите, что процессы $X(t)$ и $Y(t)$ имеют одинаковые конечномерные распределения, но не являются стохастически эквивалентными.

Решение. Рассматривается 2 процесса. Процессы заданы на $t \in [0, 2)$.

Это разные функции. Вероятность

$$P\{X(t) \neq Y(t)\} = P\{X(t) \neq 1 - X(t)\} = 1,$$

а это значит, что процессы с вероятностью 1 не совпадают. Зафиксируем несколько точек t_1, t_2, \dots, t_n . Обозначим через $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik}$ моменты t , которые лежат между 0 и 1, и $t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{j(n-k)}$ — все остальные. Найдём

вероятность

$$\begin{aligned}
& P\{X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n\} = \\
& = P\{X(t_{i1}) = x_{i1}, \dots, X(t_{ik}) = x_{ik}, X(t_{j1}) = x_{j1}, \dots, \\
& \quad X(t_{j(n-k)}) = x_{j(n-k)}\} = \\
& = P(\mathbb{1}\{\omega_1 = P\} = x_{i1}, \dots, \mathbb{1}\{\omega_1 = P\} = x_{ik}, \\
& \quad \mathbb{1}\{\omega_2 = P\} = x_{j1}, \dots, \mathbb{1}\{\omega_2 = P\} = x_{j(n-k)}) .
\end{aligned}$$

Рассматриваем только случай, когда x_{i1}, \dots, x_{ik} одинаковые, и

$$x_{j1}, \dots, x_{j(n-k)}$$

одинаковые.

$$P\{X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично

$$P\{Y(t_1) = x_1, \dots, Y(t_n) = x_n\} = \frac{1}{4}.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения.

Занятие 3. Процесс Пуассона

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение процесса Пуассона.

$\{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона, если

1. $N(0) = 0$;
2. при $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ события

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

— независимые;

3. число событий на интервале зависит только от длины интервала, то есть есть однородность приращений

$$N(t+s) - N(t) \stackrel{d}{=} N(s) \sim \text{Pois}(\lambda s).$$

Запишите конечномерные распределения процесса Пуассона.

Одномерные распределения

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Двумерные распределения: $t_1 < t_2$. Перейдём к приращениям

$$P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2\} = P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} =$$

Случайная величина $N(t_1) \sim \text{Pois}(\lambda t_1)$, а $N(t_2) - N(t_1) \sim \text{Pois}(\lambda(t_2 - t_1))$. Совместная вероятность — это произведение вероятностей

$$= e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdot \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!}.$$



Рис. 21: График пуассоновского процесса

Какой вид имеют траектории процесса Пуассона?

Траектория изображена на рисунке 21.

Какое содержание имеет параметр процесса Пуассона?

$N(t)$ — число событий, произошедших до момента времени t .

Аудиторные задачи

3.2

Задание. Пусть $\{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda = 2$.

Вычислите вероятности:

- a) $P(N(6) = 3)$;
- b) $P(N(6) = 3, N(9) = 7, N(15) = 10)$;
- c) $P(N(6) = 3 \mid N(9) = 7)$;
- d) $P(N(9) = 7 \mid N(6) = 3)$.

Решение.

- a) $N(6) \sim \text{Pois}(6 \cdot 2)$, поэтому

$$P(N(6) = 3) = \frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12};$$

- b) нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{aligned} & P(N(6) = 3, N(9) = 7, N(15) = 10) = \\ & = P\{N(6) = 3, N(9) - N(6) = 4, N(15) - N(9) = 3\} = \\ & = \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12} \right) \cdot \left(\frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6} \right) \cdot \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12} \right); \end{aligned}$$

с) по определению условной вероятности

$$\begin{aligned} P(N(6) = 3 \mid N(9) = 7) &= \frac{P(N(6) = 3, N(9) = 7)}{P(N(9) = 7)} = \\ &= \frac{\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12} \cdot \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}}{\frac{18^7}{7!} \cdot e^{-18}} = \frac{12^3 \cdot 6^4 \cdot 7!}{3! \cdot 4! \cdot 18^7}; \end{aligned}$$

д) аналогично предыдущему пункту

$$\begin{aligned} P(N(9) = 7 \mid N(6) = 3) &= \frac{P(N(9) = 7, N(6) = 3)}{P(N(6) = 3)} = \\ &= \frac{\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12} \cdot \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}}{\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}} = \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6} = \frac{P(N(6) = 3) P(N(3) = 4)}{P(N(6) = 3)}. \end{aligned}$$

3.3

Задание. Пусть $\{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ . Вычислите условное математическое ожидание $M[N(s) \mid N(t)]$ для

$$0 \leq s \leq t.$$

Решение. Что ж такое условное математическое ожидание? $N(s)$ и $N(t)$ — дискретные величины, то есть

$$M[N(s) \mid N(t)] = \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot P\{N(s) = l \mid N(t) = k\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\{N(s) = l \mid N(t) = k\} = \frac{P\{N(t) - N(s) = k - l\} P\{N(s) = l\}}{P\{N(t) = k\}} =$$

подставляем пуассоновские вероятности

$$= \frac{\frac{[\lambda(t-s)]^{k-l}}{(k-l)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}} \cdot \frac{(\lambda s)^l}{l!} \cdot e^{-\lambda s} = \frac{k! (t-s)^{k-l} s^l}{(k-l)! l! t^k} = C_k^l \cdot \left(\frac{t-s}{t}\right)^{k-l} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^l.$$

Имеем биномиальное распределение с параметрами k и $\frac{s}{t}$.

Вывод: при условии $N(t) = k$ мы нашли распределение

$$N(s) \sim B\left(k, \frac{s}{t}\right).$$

Условное математическое ожидание

$$M[N(s) \mid N(t) = k] = \frac{ks}{t}.$$

Ответ: $\frac{N(t) \cdot s}{t}$. Куда пропала сумма?

$$M[N(s) | N(t) = k] = \sum_l l \cdot P[N(s) = l | N(t) = k] =$$

Нашли эту вероятность

$$= \sum_l l \cdot P\left\{Bin\left(k, \frac{s}{t}\right) = l\right\} = MBin\left(k, \frac{s}{t}\right) = k \cdot \frac{s}{t}.$$

Условное математическое ожидание — это математическое ожидание по условному распределению.

3.4

Задание. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ . Найдите вероятность того, что первый прыжок процесса N произошёл до момента времени $s \in [0, t]$ при условии, что на отрезке $[0, t]$ произошло ровно n прыжков.

Решение. Нужно найти вероятность $P(\text{первый прыжок произошёл до момента } s \in [0, t] | N(t) = n)$. Нужно это условие переписать через пуассоновский процесс. Получаем $P(\text{первый прыжок произошёл до момента } s \in [0, t] | N(t) = n) = P\{N(s) \geq 1 | N(t) = n\}$. Значения зависимые

$$P\{N(s) \geq 1 | N(t) = n\} = 1 - P\{N(s) = 0 | N(t) = n\} =$$

Условное распределение биномиальное

$$= 1 - P\left\{Bin\left(n, \frac{s}{t}\right) = 0\right\} = 1 - C_n^0 \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-0} = 1 - \left(1 - \frac{s}{t}\right)^n.$$

3.5

Задание. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ является процессом Пуассона с параметром λ . Докажите, что при условии, что N имеет ровно 1 прыжок на отрезке $[a, b]$, момент этого прыжка является равномерно распределённой на отрезке $[a, b]$ случайной величиной.

Решение. Обозначим τ — момент прыжка на отрезке $[a, b]$. Нужно найти $P\{\tau \leq t | N(b) - N(a) = 1\} = P\{N(t) - N(a) = 1 | N(b) - N(a) = 1\}$.

Изобразим процесс на графике 22.

У пуассоновского процесса есть однородность приращений

$$\begin{aligned} P\{N(t) - N(a) = 1 | N(b) - N(a) = 1\} &= P\{N(t - a) = 1 | N(b - a) = 1\} = \\ &= P\left\{Bin\left(1, \frac{t - a}{b - a}\right) = 1\right\} = \end{aligned}$$

Это бернуллиевская величина

$$= \frac{t - a}{b - a}.$$

Получилось равномерное распределение, что и требовалось доказать.



Рис. 22: График пуассоновского процесса

3.6

Задание. Пусть $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$ — последовательность независимых показатель-но распределённых случайных величин с параметром λ . Положим

$$T_0 = 0, T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k, n \geq 1; \nu(t) = \max(n : T_n \leq t), t \geq 0.$$

а) Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$$

почти наверное.

б) Докажите, что случайная величина $\tau_1 = T_{\nu(t)+1} - t$ имеет показатель-ное распределение с параметром λ .

с) Докажите, что $\{\nu(t), t \geq 0\}$ является процессом Пуассона с интенсив-ностью λ .

Решение. $\nu(t) = \max(n : T_n \leq t)$ — случайный процесс.

Посмотрим, как этот процесс выглядит (рис. 23).

T_n — это накопительные суммы.

В момент T_1 только $T_1 \leq t$, то есть от T_1 до T_2 значение процесса будет равно единице.



Рис. 23: График процесса

Тут расставили стрелочки, то есть ν — это непрерывная справа функция. То есть ν — это модификация пуассоновского процесса. Конечномерные распределения несут ещё не всю информацию.

а) Нужно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$$

почти наверное.

Это равенство — это просто закон больших чисел, потому что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k = T_n \rightarrow M\tau_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Сумма T_n сходится к бесконечности. Это нужно для того, чтобы определить процесс на всей оси. То есть вывод из пункта а) следующий

$$T_n = n \cdot \frac{T_n}{n} \rightarrow \infty \cdot \frac{1}{\lambda} = \infty$$

и $\nu(t)$ определено при всех t .

б) $\tilde{\tau}_1$ — это величина до следующего прыжка.

Этот пункт означает, что процесс ν имеет однородные приращения.

Докажем, что $\tilde{\tau}_1$ имеет действительно показательное распределение. Проще всего для показательного распределения посчитать

$$P(\tilde{\tau}_1) = 1 - F = 1 - (1 - e^{-\lambda s}) = e^{-\lambda s},$$

где F — функция распределения. Вопрос: есть ли такое равенство.

Значит, $P(\tilde{\tau}_1 > s) = P(T_{\nu(t)+1} > t + s)$. Величина T берётся в случайный момент. Такая вероятность может быть записана через сумму по всем возможным T , то есть

$$P(T_{\nu(t)+1} > t + s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \leq t < T_{n+1}, T_{n+1} > t + s) =$$

Одно условие убирается

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(T_n \leq t, T_{n+1} \leq t + s) =$$

Момент T_{n+1} — это момент следующего скачка после T_n . Тогда

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \leq t, T_n + \tau_{n+1} > t + s) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t, \tau_{n+1} \geq (t - T_n) + s\} = \end{aligned}$$

Моменты τ_{n+1} и T_n — независимые величины.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} MP[T_n \leq t, \tau_{n+1} > (t - T_n) + s | T_n] =$$

Вспомним, какая вероятность $P(\tau > x) = e^{-\lambda x}$. Тогда

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

Для показательных величин выполнено соотношение

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda y} P(\tau > x)$$

— свойство отсутствия последействия.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda s} P(T_n \leq t, \tau_{n+1} > t - T_n) = e^{-\lambda s} \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \leq t < T_{n+1}) =$$

Такая сумма равна единице, потому что t всегда попадает между T_n и T_{n+1} при каком-то n , потому

$$= e^{-\lambda s},$$

так что такая величина $\tilde{\tau}_1$ действительно имеет показательное распределение.

с) Найдём конечномерные распределения $\nu(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} & P\{\nu(t_1) = k_1, \nu(t_2) = k_2, \dots, \nu(t_n) = k_n\} = \\ & = P\left(\sum_{l=1}^{k_1} \tau_l \leq t_1 < \sum_{l=1}^{k_1+1} \tau_l, \dots, \sum_{l=1}^{k_n} \tau_l \leq t_n < \sum_{l=1}^{k_n+1} \tau_l\right) = \\ & = \int \dots \int_{k_n+1} \lambda^{k_n+1} e^{-\lambda(x_{k_1} + \dots + x_{k_n} + 1)} dx_{k_n+1} \dots dx_1 = \\ & = \lambda^{k_n+1} \cdot \int \dots \int_{k_n, 0 < x_{k_1} + \dots + x_{k_n} \leq t, t = \sum t_i} e^{-\lambda(x_{k_1} + \dots + x_{k_n})} \times \\ & \quad \times \int_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{k_n} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} \dots dx_1 = \end{aligned}$$

Возьмём последний интеграл

$$\int_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{k_n} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x_{k_n+1}} \Big|_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{+\infty}.$$

Подставляем и получаем

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lambda^{k_n+1}}{\lambda} \int \dots \int_{k_n, 0 < x_{k_1} + \dots + x_{k_n} \leq t} e^{-\lambda \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i} e^{-\lambda t + \lambda \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i} dx_{k_n} \dots dx_{k_1} = \\
 &= \lambda^{k_n} e^{-\lambda t} \int \dots \int_{0 < \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i \leq 1} dx_{k_n} \dots dx_{k_1} =
 \end{aligned}$$

Чтобы понять, чему будет равен этот интеграл, рассмотрим частные случаи:

(а) когда есть двойной интеграл

$$\begin{aligned}
 \iint_{0 < x_1 + x_2 \leq t} dx_2 dx_1 &= \int_0^t \int_0^{t-x_1} dx_2 dx_1 = \int_0^t x_2 \Big|_0^{t-x_1} dx_1 = \\
 &= \int_0^t (t - x_1) dx_1 = t \int_0^t dx_1 - \int_0^t x_1 dx_1 = t^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} = \\
 &= \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2!};
 \end{aligned}$$

(b) когда есть тройной интеграл

$$\begin{aligned}
\iiint_{0 < x_1 + x_2 + x_3 \leq t} dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^t \int_0^{t-x_1} \int_0^{t-x_1-x_2} dx_3 dx_2 dx_1 = \\
&= \int_0^t \int_0^{t-x_1} (t-x_1-x_2) dx_2 dx_1 = \\
&= \int_0^t \left(t \int_0^{t-x_1} dx_2 - x_1 \int_0^{t-x_1} dx_2 - \int_0^{t-x_1} x_2 dx_2 \right) dx_1 = \\
&= \int_0^t \left[t(t-x_1) - x_1(t-x_1) - \frac{(t-x_1)^2}{2} \right] dx_1 = \\
&= \int_0^t \frac{2t^2 - 2tx_1 - 2tx_1 + 2x_1^2 - t^2 + 2tx_1 - x_1^2}{2} dx_1 \times \\
&\times \int_0^t \frac{t^2 - 2x_1t + x_1^2}{2} dx_1 = \int_0^t \frac{(t-x_1)^2}{2} dx_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(t-x_1)^3}{3} \Big|_0^t = \\
&= \frac{t^3}{2 \cdot 3} = \frac{t^3}{3!}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\int \cdots \int_{0 < \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i \leq 1} dx_{k_n} \dots dx_{k_1} = \frac{t^{k_n}}{k_n!}.$$

Тогда вероятность равна

$$= \frac{\lambda^{k_n} e^{-\lambda t} t^{k_n}}{k_n!} = \frac{(\lambda t)^{k_n}}{k_n!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Получился процесс Пуассона с интенсивностью λ .

3.7

Задание. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с параметром λ и пусть $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ — независимая от N последовательность независимых бернуллиевских случайных величин с параметром $p \in (0, 1)$. Положим

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

Докажите, что процесс $\xi = \{S_{N(t)}, t \geq 0\}$ является процессом Пуассона с параметром λt .

Решение. Пуассоновский процесс

$$N(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} 1$$

— число событий до момента $N(t)$. В ξ складываем не 1, а $Y_i = 0$ или 1.

Начнём с того, что посчитаем одномерные распределения и посмотрим, что это тоже пуассоновские величины. Есть сумма случайного числа слагаемых. Нужно перебирать все возможные значения $N(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} P\{S_{N(t)} = k\} &= P\{Y_1 + \dots + Y_{N(t)} = k\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n, Y_1 + \dots + Y_n = k\} = \end{aligned}$$

Сумма $Y_1 + \dots + Y_n$ — биномиальная величина

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

Преобразуем

$$= e^{-\lambda t} p^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot C_n^k (1-p)^{n-k} =$$

Распишем C_n^k явно

$$= e^{-\lambda t} p^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda t} p^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

Имеем ряд для экспоненты. Заменим $n-k$ на новый индекс суммирования

$$= \frac{e^{-\lambda t} p^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+k} (1-p)^n}{n!} =$$

Выносим $(\lambda t)^k$ за знак суммы

$$= \frac{e^{-\lambda t} p^k (\lambda t)^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n (1-p)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda t} (p\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{\lambda t(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^k}{k!}$$

— пуассоновская вероятность.

Вывод: $S_{N(t)} \sim Pois(\lambda p t)$, то есть у такого процесса одномерные распределения такие же, как у пуассоновского с параметром $\lambda p t$.

Домашнее задание

3.11

Задание. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda = 5$. Вычислите вероятности:

- a) $P(N(2) \geq 3, N(5) \leq 4)$;
- b) $P(N(2) \geq 3, N(3) \geq 4, N(5) \leq 3)$;
- c) $P(N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) \leq 6)$;
- d) $P(N(2) = 3 | N(3) = 5)$;
- e) $P(N(3) = 5 | N(2) = 3)$.

Решение.

- a) Рассмотрим все возможные случаи

$$\begin{aligned} P(N(2) \geq 3, N(5) \leq 4) &= \\ &= P\{N(2) = 3, N(5) = 3\} + P\{N(2) = 3, N(5) = 4\} + \\ &+ P\{N(2) = 4, N(5) = 4\} = \end{aligned}$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{aligned} &= P\{N(2) = 2, N(5) - N(2) = 3 - 3\} + \\ &+ P\{N(2) = 3, N(5) - N(2) = 4 - 3\} + \\ &+ P\{N(2) = 4, N(5) - N(2) = 4 - 4\} = \\ &= P\{N(2) = 3\} P\{N(3) = 0\} + P\{N(2) = 3\} P\{N(3) = 1\} + \\ &+ P\{N(2) = 4\} P\{N(3) = 0\} = \\ &= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^0}{0!} \cdot e^{-15} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^1}{1!} \cdot e^{-15} + \\ &+ \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^0}{0!} \cdot e^{-15} = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} \cdot 15 + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-25} = \\ &= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} \cdot 16 + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-25}; \end{aligned}$$

- b) с ростом времени значение процесса Пуассона не должно уменьшаться
 $P(N(2) \geq 3, N(3) \geq 4, N(5) \leq 3) = 0$;
- c) как в первом пункте рассмотрим все возможные случаи

$$\begin{aligned} P(N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) \leq 6) &= \\ &= P\{N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) = 5\} + \\ &+ P\{N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) = 6\} = \end{aligned}$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{aligned}
&= P\{N(2) = 3, N(3) - N(2) = 5 - 3, N(4) - N(3) = 5 - 5\} + \\
&+ P\{N(2) = 3, N(3) - N(2) = 5 - 3, N(4) - N(3) = 6 - 5\} = \\
&= P\{N(2) = 3\} \cdot P\{N(1) = 2\} \cdot P\{N(1) = 0\} + \\
&+ P\{N(2) = 3\} \cdot P\{N(1) = 2\} \cdot P\{N(1) = 1\} = \\
&= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} = \\
&= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^3}{2!} = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot 6;
\end{aligned}$$

d) по определению условной вероятности

$$P(N(2) = 3 \mid N(3) = 5) = \frac{P\{N(2) = 3, N(3) = 5\}}{P\{N(3) = 5\}} =$$

Перейдём к приращениям и подставим выражения для вероятностей

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}}{\frac{15^5}{5!} \cdot e^{-15}} =
\end{aligned}$$

Экспоненты сокращаются

$$= \frac{10^3 \cdot 5^2 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 15^5};$$

e) аналогично предыдущему пункту

$$P(N(3) = 5 \mid N(2) = 3) = \frac{P\{N(3) = 5, N(2) = 3\}}{P\{N(2) = 3\}} =$$

Перейдём к приращениям

$$= \frac{P\{N(2) = 3, N(1) = 2\}}{P\{N(2) = 3\}} = P\{N(1) = 2\} = \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}.$$

3.12

Задание. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda = 1$. Найдите характеристическую функцию случайной величины

$$N(3) - N(2) + N(1).$$

Решение. $N(t) \sim Pois(t)$. Процесс Пуассона имеет однородность приращений $N(3) - N(2) \sim N(3 - 2) = N(1) \sim Pois(1)$, а $N(1) \sim Pois(1)$.

Приращения $N(3) - N(2)$ и $N(1)$ — независимы, следовательно,

$$N(3) - N(2) + N(1) \sim Pois(1 + 1) = Pois(2).$$

Тогда характеристическая функция $\varphi_{N(3)-N(2)+N(1)}(t) = e^{2(e^{it}-1)}$.

3.13

Задание. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ . Найдите условную вероятность $P(N(s) = k | N(t) = n)$ при $s > t$ и вычислите условное математическое ожидание $M[N(s) | N(t)]$ для $s > t$.

Решение. $N(t) \sim Pois(\lambda t)$.

Что такое условное математическое ожидание?

$N(s)$ и $N(t)$ — дискретные величины, то есть

$$M[N(s) | N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\{N(s) = k | N(t) = n\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\{N(s) = k | N(t) = n\} = \frac{P\{N(s) = k, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Перепишем через приращения и воспользуемся их независимостью

$$= \frac{P\{N(t) = n\} P\{N(s-t) = k-n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Сократим одинаковые множители в числителе и знаменателе

$$= P\{N(s-t) = k-n\} =$$

Подставим пуассоновские вероятности

$$= \frac{[\lambda(s-t)]^{k-n}}{(k-n)!} \cdot e^{-\lambda(s-t)}.$$

Имеем пуассоновское распределение с параметром $\lambda(s-t)$.

Вывод: при условии $N(t) = n$ мы нашли распределение

$$N(s) \sim Pois(\lambda(s-t)).$$

Условное математическое ожидание

$$M[N(s) | N(t)] = MPois(\lambda(s-t)) = \lambda(s-t).$$

3.14

Задание. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$, $\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$ являются независимыми процессами Пуассона с параметрами λ и μ соответственно. Положим $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$. Докажите, что процесс $\zeta = \{\zeta(t), t \geq 0\}$ является процессом Пуассона с параметром $\lambda + \mu$.

Решение.

$$\varphi_{\zeta}(t) = \varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \varphi_{\eta}(t) = e^{\lambda t(e^{it}-1)} e^{\mu t(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)t(e^{it}-1)}.$$

Следовательно, $\zeta \sim Pois(\lambda + \mu)$.

3.15

Задание. Пусть $\{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ . Выясните, какой из следующих процессов является пуассоновским:

$$\{N_1(t) = 2N(t), t \geq 0\}; \{N_2(t) = N(2t), t \geq 0\}; \{N_3(t) = N(t^2), t \geq 0\}; \\ \{N_4(t) = N(t+s) - N(s), t \geq 0\},$$

где $s > 0$ — фиксированное число. Для пуассоновских процессов укажите их интенсивность.

Решение.

$$P\{N_1(t) = k\} = P\{2N(t) = k\} = P\left\{N(t) = \frac{k}{2}\right\} = 0,$$

так как пуассоновский процесс принимает только неотрицательные целые значения. Следовательно, $\{N_1(t), t \geq 0\}$ — не процесс Пуассона.

$$P\{N_2(t) = k\} = P\{N(2t) = k\} = \frac{(\lambda \cdot 2t)^k}{k!} \cdot e^{-2\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью 2λ . Независимость и однородность приращений выполняются.

Перейдём к третьему процессу

$$P\{N_3(t) = k\} = P\{N(t^2) = k\} = \frac{(\lambda t^2)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t^2} \sim Pois(\lambda t^2) \not\sim Pois(\mu t),$$

значит, процесс не пуассоновский.

$$P\{N_4(t) = k\} = P\{N(t+s) - N(s) = k\} = P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью λ .

3.16

Задание. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ и пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые от процесса N независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием m . Пусть

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i.$$

Докажите, что $M[X(t)] = m\lambda t$.

Решение. $N(t) \sim Pois(\lambda t)$.

Вычислим математическое ожидание

$$MX(t) = M\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i\right) = M\sum_{i=1}^{\infty} (\mathbb{1}\{N(t) = i\} \xi_i) =$$

Математическое ожидание индикатора — вероятность

$$= m \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P\{N(t) = i\} = mMN(t) = m\lambda t.$$

3.17

Задание. Пусть $\{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ . Используя пункт а) задачи 3.6 докажите, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda \text{ a.s.}$$

Решение. Надо проверить, что для пуассоновского процесса

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda \text{ a.s.}$$

В задаче 3.6 доказали, что

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$$

с помощью закона больших чисел.

$N(T_n) = n$ — значение T_n -го скачка (рис. 24).

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{T_n}{N(T_n)} \rightarrow \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда

$$\frac{N(T_n)}{T_n} \rightarrow \lambda.$$

Из такой сходимости следует сходимость по всем моментам времени. Нужно вывести, что

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \lambda.$$



Рис. 24: График пуассоновского процесса

3.18

Задание. Прибытие посетителей в магазин является процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda = 20$ посетителей в час. Вычислите среднее количество продаж на протяжении одного восьмичасового рабочего дня, если вероятность того, что посетитель магазина сделает покупку равна 0.3.

Решение. $N(t)$ — количество покупок за время $[0, t]$.

Обозначим количество покупок как

$$n(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} y_k,$$

где $y_k = 1\{k\text{-й посетитель магазина сделает покупку}\}$.

При этом $P\{y_k = 1\} = 0.3$, а $P\{y_k = 0\} = 1 - 0.3 = 0.7$.

То есть y_k имеет распределение Бернулли.

Из задачи 3.7 получает, что $n(t) \sim Pois(0.3\lambda)$.

Среднее количество покупок за 8 часов $Mn(8) = 8 \cdot 0.3\lambda = 8 \cdot 0.3 \cdot 20 = 48$.

3.19

Задание. Большой супермаркет имеет три входа. Прибытие посетителей через каждые двери образуют процессы Пуассона с интенсивностями $\lambda_1 = 110$, $\lambda_2 = 90$, $\lambda_3 = 160$ посетителей в час. 30% посетителей составляют мужчины. Вероятность того, что посетитель-мужчина сделает покупку, равна 0.8, а вероятность того, что женщина-посетитель сделает покупку, равна 0.1. Средняя цена покупки составляет 100 грн.

- Вычислите среднюю выручку супермаркета за 10-часовой рабочий день.
- Вычислите вероятность того, что третья женщина-посетитель, которая сделает покупку, прибудет в магазин в первые 15 минут. Вычислите среднее время её прибытия в магазин.

Решение.

- $t = 10$.

Найдём общую интенсивность $\lambda = 110 + 90 + 160 = 360$ посетителей в час.

Найдём $\lambda_m = 360 \cdot 0.3 = 108$ посетителей-мужчин в час и

$$\lambda_w = 360 \cdot 0.7 = 252$$

посетителей-женщин в час.

Пусть $n(t)$ — число покупок в день. Тогда

$$Mn(t = 10) = M[n_m(10) + n_w(10)] = 10 \cdot 108 \cdot 0.8 + 10 \cdot 252 \cdot 0.1 = 1116.$$

Следовательно, средняя выручка равна

$$100Mn(t=10) = 100 \cdot 1116 = 111600.$$

b) Пусть λ'_w — интенсивность покупок, сделанных женщинами.

$$\lambda'_w = \lambda_w \cdot 0.1 = 25.2 \text{ покупки в час.}$$

Пусть $N(t) \sim Pois(\lambda'_w t)$ — количество женщин-посетителей, прибывших в магазин до момента времени t .

Тогда

$$\begin{aligned} P\{N(15minutes) = 3\} &= P\left\{N\left(\frac{1}{4}\right) = 3\right\} = e^{-25.2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4} \cdot 25.2\right)^3}{3!} = \\ &= e^{-6.3} \cdot \frac{250}{6} = 0.0019 \cdot 41.6 = 0.08. \end{aligned}$$

Тогда среднее время её прибытия в магазин

$$M\tau = \frac{3}{\lambda'_w} = \frac{3}{25.2} = 0.12$$

часов.

Занятие 4. Гауссовские процессы

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение гауссовского процесса.

Процесс $\{X(t), t \in T\}$ — гауссовский, если

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k X(t_k)$$

— гауссовская случайная величина $\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ и $\forall t_1, \dots, t_n \in T$.

Эквивалентно: $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$ — гауссовский вектор.

Запишите плотность конечномерных распределений гауссовского процесса.

$$p = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det A}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[A^{-1}(\vec{x}-\vec{a}), \vec{x}-\vec{a}]},$$

если $\det A > 0$. Квадратные скобки в степени экспоненты — это скалярное произведение, или квадратичная форма матрицы, обратной к ковариации.

Приведите определение и сформулируйте основные свойства ковариационной функции.

$$K(t, s) = \text{cov}[X(t), X(s)].$$

Гауссовский процесс существует, из теоремы Колмогорова, с функциями m и K тогда и только тогда, когда функция $K(s, t) = K(t, s)$ — симметричная, и K — неотрицательно определённая, то есть

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j K(t_k, t_j) \geq 0.$$

Тут неравенство возможно для любых $c_1, \dots, c_n, t_1, \dots, t_n$.

4.2

Задание. Выясните, существует ли случайный процесс с ковариационной функцией

a) $K(t, s) = \min(t, s);$

b) $K(t, s) = (1 - |t - s|) \cdot \mathbb{1}\{|t - s| < 1\}; t, s \in \mathbb{R}.$

Решение.

a) $K(t, s) = \min(t, s).$

Такой процесс есть. Какой? Винеровский;

b) $K(t, s) = (1 - |t - s|) \cdot \mathbb{1}\{|t - s| < 1\}; t, s \in \mathbb{R}.$

Если такой процесс есть, то мы его не встречали раньше. Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определена?

Функция зависит только от разности. Сейчас $K(t, s) = \varphi(t - s)$, где

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Так что

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^n c_k c_j \varphi(t_k - t_j) \geq 0$$

— это условие неотрицательной определённости для характеристической функции. Будет ли эта функция φ характеристической? То есть вопрос в задаче равносильен следующему: будет ли

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

характеристической функцией? Эта функция изображена на рисунке [25](#).

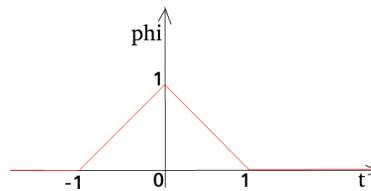


Рис. 25: График функции $\varphi(t)$

Она непрерывная, симметричная, в нуле — единица. Если бы это была характеристическая функция

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$$

— преобразование Фурье плотности $p(x)$. Плотность можно найти через обратное преобразование Фурье

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-itx} (1 - |t|) dt =$$

Раскроем модуль

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-1}^1 e^{-itx} dt + \int_{-1}^0 e^{-itx} t dt - \int_0^1 e^{-itx} t dt \right) =$$

Берём первый интеграл

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{e^{-itx}}{ix} \Big|_{-1}^1 - \int_0^1 e^{itx} t dt - \int_0^1 e^{-itx} t dt \right) =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{e^{-ix}}{ix} + \frac{e^{ix}}{ix} - \int_0^1 (e^{-itx} + e^{itx}) t dt \right] =$$

Из формулы Эйлера следует, что $e^{-itx} + e^{itx} = 2 \cos(tx)$. Тогда

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - 2 \int_0^1 \cos(tx) t dt \right] =$$

Интегрируем по частям, то есть

$$u = t, du = dt, dv = \cos(tx) dt, c = \int \cos(tx) dt = \frac{1}{x} \cdot \sin(xt).$$

Получаем

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - 2 \cdot \frac{t}{x} \cdot \sin(xt) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \sin(xt) dt \right] =$$

Подставляем пределы интегрирования и берём интеграл от синуса

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - \frac{2}{x} \cdot \sin x - \frac{2}{x^2} \cdot \cos(xt) \right]_0^1 =$$

Снова подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - \frac{2}{x} \cdot \sin x - \frac{2}{x^2} \cdot \cos x + \frac{2}{x^2} \right) =$$

Из формулы Эйлера следует, что $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$. Тогда

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2 \sin x}{x} - \frac{2 \sin x}{x} + \frac{2}{x^2} (-\cos x + 1) \right] = \frac{1}{\pi x^2} (1 - \cos x).$$

Нашли обратное преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$$

и $p(x) \geq 0$.

Должно выполняться условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \varphi(0) = 1.$$

Так что p — плотность, φ — это её преобразование Фурье, так что φ — характеристическая функция.

4.3

Задание. Пусть $K(t, s)$, $t, s \in T$ — ковариационная функция некоторого случайного процесса, $Q(t)$ — полином с положительными коэффициентами. Докажите, что функция $K_1(t, s) = Q(K(t, s))$ тоже является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

Решение. $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$, $a_0, a_1, \dots, a_n \geq 0$. Доказать, что если в этот многочлен подставить ковариационную функцию, то снова получится ковариационная функция.

Явно запишем, что такое

$$K_1(t, s) = a_0 + a_1 K(t, s) + a_2 K(t, s)^2 + \dots + a_n K(t, s)^n.$$

Симметричность есть, так как $K(t, s)$ — симметрична.

Задачу можно разбить на две подзадачи:

1. если $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$ — ковариационные функции, то и

$$\sum_{j=0}^n a_j R_j(t, s)$$

— ковариационная функция. Это утверждение проверить просто.

Доказательство. Берём двойную сумму

$$\sum_{k,i=1}^n c_k c_i \left(\sum_{j=0}^n a_j R_j(t_k, t_i) \right) =$$

Меняем суммы местами

$$= \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k,i=1}^n R_j(t_k, t_i) c_k c_i \right) \geq 0,$$

так как внутренняя сумма неотрицательна. Так что 1. проверили;

2. чтобы 1. применить, достаточно проверить, что степень ковариационной функции — это тоже ковариационная функция. Достаточно проверить, что если R_1, R_2 — ковариационные функции, то и произведение $R_1(t, s) R_2(t, s)$ — тоже ковариационная функция.

Условие неотрицательности сейчас записывается так

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j R_1(t_k, t_j) R_2(t_k, t_j) \geq 0?,$$

где $R_1(t_k, t_j) = M[X(t_k) X(t_j)]$, $R_2(t_k, t_j) = M[Y(t_k) Y(t_j)]$.

Раз R_1 — ковариационная и R_2 — ковариационная, то существуют независимые процессы $X(t)$ и $Y(t)$, такие, что

$$R_1(t, s) = M[X(t) X(s)], R_2(t, s) = M[Y(t) Y(s)].$$

Тогда если возьмём новый процесс

$$Z(t) = X(t) Y(t),$$

то $M[Z(t) Z(s)] = M[X(t) Y(t) X(s) Y(s)]$. Группируем первый множитель с третьим, второй — с четвёртым, пользуемся независимостью $M[X(t) Y(t) X(s) Y(s)] = M[X(t) X(s)] \cdot M[Y(t) Y(s)]$. По введённым обозначениям $M[X(t) X(s)] \cdot M[Y(t) Y(s)] = R_1(t, s) R_2(t, s)$.

4.4

Задание. Пусть $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ является простым случайным блужданием, что определяется следующим образом $S_0 = 0$; $S_{n+1} = S_n + \varepsilon_{n+1}$, где $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что

$$P(\varepsilon_i = 1) = P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Вычислите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Докажите, что

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), n \rightarrow \infty.$$

Решение. Процесс сейчас обозначается как $\{S_n, n \geq 0\}$ и S_n определяется как $S_0 = 0$, $S_{n+1} = S_n + \varepsilon_{n+1}$, то есть S_n — это накопительные суммы. Сейчас $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ — это независимые одинаково распределённые случайные величины с распределением Бернулли

$$P(\varepsilon_i = 1) = P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Это простое случайное блуждание (рис. 26).



Рис. 26: График случайного блуждания

$$S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Найдём математическое ожидание этого процесса

$$MS_n = M \sum_{i=1}^n \varepsilon_i =$$

Пользуемся независимостью

$$= \sum_{i=1}^n M\varepsilon_i = 0,$$

так как

$$M\varepsilon_i = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Теперь найдём ковариационную функцию, то есть нужно найти

$$\text{cov}(S_m, S_t) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \sum_{j=1}^t \varepsilon_j\right) =$$

Вынесем суммы за ковариацию

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i,j=1}^{n,t} M(\varepsilon_i \varepsilon_j) =$$

Такое математическое ожидание равно

$$M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Тут пар одинаковых чисел $\min(n, t)$, так что

$$= \min(n, t).$$

По центральной предельной теореме

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

потому что S_n — сумма независимых одинаково распределённых случайных величин.

4.5

Задание. Рассмотрим двумерные случайные векторы

$$X^k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k \right), \quad k = 2, 4, 6, \dots,$$

где $\{S_n\}_{n \geq 1}$ является простым случайным блужданием.

а) Убедитесь, что характеристическая функция вектора X^k имеет вид

$$\varphi_{X^k}(\theta_1, \theta_2) = \left[\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}}\right) \right]^{\frac{k}{2}} \left[\cos\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right) \right]^{\frac{k}{2}}.$$

б) Воспользовавшись тем, что

$$\varepsilon^{-2} \ln(\cos(\varepsilon)) \rightarrow -\frac{1}{2}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, найдите предел $\varphi_{X^k}(\theta_1, \theta_2)$ при $k \rightarrow \infty$ и укажите распределение случайного вектора X , к которому слабо сходятся X^k при $k \rightarrow \infty$.

Решение.

- а) Сначала нужно найти характеристическую функцию такого вектора $\varphi_{X^k}(\theta_1, \theta_2) = Me^{i(\theta_1 X_1^k + \theta_2 X_2^k)}$. Подставим компоненты

$$Me^{i(\theta_1 X_1^k + \theta_2 X_2^k)} = Me^{i\left(\theta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}} + \theta_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k\right)}.$$

Можно вынести дробь с корнем от k , вместо S будем писать сумму $Me^{i\left(\theta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}} + \theta_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k\right)} = Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\theta_1 \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i + \theta_2 \sum_{i=1}^k \varepsilon_i\right)}$. Вторую сумму можно разложить на две

$$Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\theta_1 \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i + \theta_2 \sum_{i=1}^k \varepsilon_i\right)} = Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i (\theta_1 + \theta_2) + \theta_2 \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k \varepsilon_i\right)} =$$

Суммы и слагаемые в суммах независимы

$$= Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i (\theta_1 + \theta_2)} Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k \varepsilon_i \theta_2} =$$

Все слагаемые в суммах независимы. Первое и второе математическое ожидания - произведение $k/2$ характеристических функций

$$= \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varphi_{\varepsilon_i} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}} \right) \cdot \prod_{i=\frac{k}{2}+1}^k \varphi_{\varepsilon_i} \left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}} \right) =$$

Осталось понять, что такое $\varphi_{\varepsilon_i}(\lambda) = Me^{i\lambda\varepsilon_i}$. Случайная величина ε_i принимает значения -1 и 1 с вероятностями 0.5 , потому

$$Me^{i\lambda\varepsilon_i} = \frac{1}{2} \cdot e^{i\lambda} + \frac{1}{2} \cdot e^{-i\lambda} = \cos \lambda.$$

Тогда

$$= \cos^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}} \right) \cos^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}} \right).$$

- б) Найдём предел этой характеристической функции, когда $k \rightarrow \infty$.

Оказывается, что

$$\varepsilon^{-2} \ln(\cos \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Когда $\varepsilon \rightarrow 0$, $\cos \varepsilon \rightarrow 1$ и $\ln(\cos \varepsilon) \rightarrow 0$ — это неопределённость 0 на 0 . Она раскрывается с помощью правила Лопиталя

$$\frac{\ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2} \approx -\frac{1}{2 \cos \varepsilon} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{2},$$

где

$$\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$$

— замечательный предел.

$$\left(\cos \frac{x}{\sqrt{k}} \right)^k = e^{k \ln \cos \frac{x}{\sqrt{k}}} =$$

Заметим, что

$$\frac{x}{\sqrt{k}} = \varepsilon \rightarrow 0,$$

тогда

$$= e^{\frac{k \varepsilon^2 \ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2}} =$$

Здесь

$$\frac{\ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{x^2 \varepsilon^{-2} \ln(\cos \varepsilon)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теперь нужно эту сходимость использовать

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}} \right) \cos^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}} \right) &= e^{-\frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{4}} e^{-\frac{\theta_2^2}{4}} = e^{-\frac{\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 - \theta_2^2 - \theta_2^2}{4}} = \\ &= e^{-\frac{\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2^2}{4}}. \end{aligned}$$

Вывод:

$$\varphi_{X^k}(\theta_1, \theta_2) \rightarrow e^{-\frac{1}{4}(\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2^2)} =$$

Это характеристическая функция нормального распределения. Оно характеризуется средним и ковариационной матрицей. Среднее тут 0, потому что i нет в пределе

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} (A\vec{\theta}, \vec{\theta}) \right\},$$

где

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

— ковариационная матрица.

Двумерный случай блуждания сходится к двумерному гауссовскому вектору (рис. 27)

$$X^k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k \right) = \frac{1}{\sqrt{k}} (S_{k \cdot \frac{1}{2}}, S_{k \cdot 1}).$$



Рис. 27: Двумерный случай блуждания

Если брать не 2 значения, а n , то это сходится к

$$N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} \right)$$

— винеровский процесс.

4.6

Задание. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ — гауссовский процесс с функцией математического ожидания $m(t) = t$ и ковариационной функцией

$$K(t, s) = \begin{cases} 1 - |t - s|, & |t - s| < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{5} - \frac{|t-s|}{5}, & \frac{1}{2} \leq |t - s| < 3, \\ 0, & |t - s| \geq 3; \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

- Запишите плотность распределения вектора $(\xi(1), \xi(3), \xi(4))$.
- Найдите условное математическое ожидание $M(\xi(1) | (\xi(3), \xi(4)))$.

Решение.

- Нужно найти плотность трёхмерного вектора $(\xi(1), \xi(3), \xi(4))$. Процесс гауссовский, значит, такой вектор тоже гауссовский. Он характеризуется математическим ожиданием и ковариационной матрицей $cov(\xi(1), \xi(1)) = K(1, 1)$. Будем считать по первой строчке. Разность равна нулю $K(1, 1) = 1$. Аналогично считаем

$$cov(\xi(1), \xi(3)) = K(1, 3) = \frac{1}{5}.$$

Тогда

$$(\xi(1), \xi(3), \xi(4)) \sim N \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \right),$$

где $cov(\xi(1), \xi(4)) = K(1, 4) = 0$ и

$$cov(\xi(3), \xi(4)) = K(3, 4) = \frac{2}{5}.$$

Плотность по определению равна

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sqrt{\det A}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\vec{x} - \vec{m}), A^{-1}(\vec{x} - \vec{m})] \right\} =$$

Чтобы плотность написать, нужно найти определитель матрицы и обратную

$$\det A = 1 - \frac{4}{25} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{21}{25} - \frac{1}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{5}{4} \begin{bmatrix} \frac{21}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{25} \\ -\frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{25} & \frac{2}{5} & \frac{24}{25} \end{bmatrix}.$$

Тогда плотность равна

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 \cdot \frac{4}{5}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{5}{8} \left(\frac{21}{25} (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + \frac{24}{25} (x_3 - 4)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{5} (x_1 - 1)(x_2 - 3) + \frac{2}{25} (x_1 - 1)(x_3 - 4) + \frac{4}{5} (x_2 - 3)(x_3 - 4) \right) \right\}.$$

Здесь

$$\vec{x} - \vec{m} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 3 \\ x_3 - 4 \end{bmatrix}.$$

b) По определению

$$M(\xi(1) | (\xi(3), \xi(4))) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p(x_1, \xi(3), \xi(4)) dx_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \xi(3), \xi(4)) dx_1}.$$

По теореме о нормальной корреляции

$$M(\xi(1) | (\xi(3), \xi(4))) = \\ = M\xi(1) + cov_{\xi(1), (\xi(3), \xi(4))} \cdot cov_{(\xi(3), \xi(4)), (\xi(3), \xi(4))}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \xi(3) - M\xi(3) \\ \xi(4) - M\xi(4) \end{bmatrix} =$$

Здесь

$$\text{cov}_{\xi(1),(\xi(3),\xi(4))} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}, \text{cov}_{(\xi(3),\xi(4)),(\xi(3),\xi(4))}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &= 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 \\ \xi(4) - 4 \end{bmatrix} = \\ &= 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{25}{21} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 \\ \xi(4) - 4 \end{bmatrix} = \\ &= 1 + \begin{bmatrix} \frac{5}{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 - \frac{2}{5} \cdot \xi(4) + \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} \cdot \xi(3) + \frac{6}{5} + \xi(4) - 4 \end{bmatrix} = \frac{5}{21} \cdot \xi(3) - \frac{2}{21} \cdot \xi(4) - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4.7

Задание. Пусть

$$Y_n = \sum_{i=1}^n \xi_i V_i,$$

где $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ является последовательностью независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2},$$

а $\{V_n\}_{n \geq 1}$ является независимой от последовательности $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ последовательностью независимых одинаково распределённых случайных величин со стандартным нормальным законом распределения.

- Найдите распределение случайной величины $\xi_1 V_1$.
- Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\{Y_n, n \geq 1\}$.
- Докажите, что процесс $\{Y_n, n \geq 1\}$ имеет независимые приращения. Найдите распределение приращений.
- Докажите, что процесс $\{Y_n, n \geq 1\}$ является гауссовским.
- Запишите совместную плотность распределения $f_{Y_n, Y_{2n}}(x, y)$ случайных величин Y_n и Y_{2n} .

Решение.

- $\xi_1 V_1$ — это произведение нормальной величины на бернуллиевскую, они независимы.

Найдём характеристическую функцию такого произведения

$$\varphi_{\xi_1 V_1}(t) = M e^{it \xi_1 V_1} =$$

Переберём значения ξ_1 . Имеем

$$= M(e^{itV_1} \cdot \mathbb{1}\{\xi_1 = 1\} + e^{-itV_1} \cdot \mathbb{1}\{\xi_1 = -1\}) =$$

Пользуемся независимостью

$$= Me^{itV_1} \cdot P(\xi_1 = 1) + Me^{-itV_1} \cdot P(\xi_1 = -1).$$

Математическое ожидание — это характеристическая функция стандартного нормального распределения

$$Me^{itV_1} \cdot P(\xi_1 = 1) + Me^{-itV_1} \cdot P(\xi_1 = -1) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Получилось такое же распределение $\xi_1 V_1 \sim N(0, 1)$.

Случайные величины V_1 и $-V_1$ имеют одинаковое распределение, потому что плотность симметрична $z_i = \xi_i V_i \sim N(0, 1)$, при этом z_1, z_2, \dots — независимы и

$$Y_n = \sum_{i=1}^n z_i.$$

b) Найдём математическое ожидание процесса

$$MY_n = M \sum_{i=1}^n z_i =$$

Пользуемся независимостью

$$= \sum_{i=1}^n Mz_i = 0.$$

Ищем ковариационную функцию процесса

$$K(Y_n, Y_m) = \text{cov}(Y_n, Y_m) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n z_i, \sum_{j=1}^m z_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{cov}(z_i, z_j) =$$

При $i \neq j$ $\text{cov}(z_i, z_j) = 0$, при $i = j$ $\text{cov}(z_i, z_i) = Dz_i = 1$.
Двойная сумма — это количество пар с одинаковыми индексами

$$= \min(n, m).$$

c) Запишем приращения Y_n , то есть $Y_{n_1}, Y_{n_2} - Y_{n_1}, Y_{n_3} - Y_{n_2}, \dots$, индексы $1 \leq n_1 \leq n_2 < n_3 < \dots$. Запишем через суммы

$$Y_{n_1}, Y_{n_2} - Y_{n_1}, Y_{n_3} - Y_{n_2}, \dots = \sum_{i=1}^{n_1} z_i, \sum_{i=n_1+1}^{n_2} z_i, \sum_{i=n_2+1}^{n_3} z_i, \dots$$

В каждой такой сумме разные z , они независимы, следовательно, приращения независимы.

Пусть

$$Y_n - Y_m = \sum_{i=m+1}^n z_i \sim$$

Сумма независимых нормальных величин — это тоже нормальная величина

$$\sim N(0, n - m).$$

d) Процесс гауссовский, если линейная комбинация

$$\sum_{r=1}^k c_r \cdot I_{n_k} =$$

— гауссовские. Перепишем через приращения

$$= \sum_{r=1}^n d_r (Y_{n_r} - Y_{n_{r-1}}).$$

В такой сумме разности гауссовские и независимы.

Значит и процесс будет гауссовским.

e)

$$f_{Y_n, Y_{2n}}(x, y) = \frac{1}{2\pi n} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2n} (2x^2 - 2xy + y^2) \right\}.$$

Ковариация — это матрица из минимумов

$$\text{cov} \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{2n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & n \\ n & 2n \end{bmatrix} = A.$$

Определитель этой матрицы $\det A = 2n^2 - n^2 = n^2$.

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2} \begin{bmatrix} 2n & -n \\ -n & n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.8

Задание. Пусть X и Y являются независимыми случайными величинами, причём Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$, а X имеет плотность распределения $f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}\{x \geq 0\}$.

a) Докажите, что случайные величины $X \cos Y$, $X \sin Y$ являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределение.

- b) Докажите, что процесс $\xi(t) = X \cos(2\pi t + Y)$, $t \in \mathbb{R}$ является гауссовским. Найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

- a) Нужно доказать, что $X \cos Y$ и $X \sin Y$ — независимые с распределением $N(0, 1)$, то есть нужно описать распределение двух таким величин.

Найдём характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \varphi_{(X \cos Y, X \sin Y)}(\theta_1, \theta_2) &= M \exp \{i(\theta_1 X \cos Y + \theta_2 X \sin Y)\} = \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i(\theta_1 x \cos y + \theta_2 x \sin y)} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dy dx = \end{aligned}$$

Это двойной интеграл, записанный в полярных координатах

$$u = x \cos y, v = x \sin y, dudv = x dx dy.$$

Получаем

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\theta_1 u + \theta_2 v)} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dudv =$$

Здесь

$$\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}}$$

— это совместная плотность $(X \cos Y, X \sin Y)$ — это произведение стандартных плотностей

$$= e^{-\frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2}},$$

то есть такие две величины — это независимые стандартные гауссовские случайные величины.

- b) $\xi(t) = X \cos(2\pi t + Y)$. Распишем косинус суммы

$$\begin{aligned} X \cos(2\pi t + Y) &= X \cos(2\pi t) \cos Y - X \sin(2\pi t) \sin Y = \\ &= \cos(2\pi t) (X \cos Y) - \sin(2\pi t) (X \sin Y), \end{aligned}$$

следовательно, ξ — гауссовский процесс.

Нужно проверять, что любые суммы

$$\sum_{r=1}^k c_r \xi(t_r) = \alpha \cdot X \cos Y + \beta X \sin Y$$

— гауссовская величина, где $X \cos Y$, $X \sin Y$ — независимые гауссовские величины.

Математическое ожидание

$$\begin{aligned} M\xi(t) &= M[\cos(2\pi t)(X \cos Y) - \sin(2\pi t)(X \sin Y)] = \\ &= \cos(2\pi t)M(X \cos Y) - \sin(2\pi t)M(X \sin Y) = 0. \end{aligned}$$

Ковариационная функция

$$\begin{aligned} K(\xi(t), \xi(s)) &= M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t) \cdot M\xi(s) = \\ &= M[X \cos(2\pi t + Y)X \cos(2\pi s + Y)] - \\ &\quad - M[X \cos(2\pi t + Y)]M[X \cos(2\pi s + Y)] = \\ &= M\{\cos(2\pi t)(X \cos Y) - \sin(2\pi t)(X \sin Y)\} \times \\ &\quad \times [\cos(2\pi s)(X \cos Y) - \sin(2\pi s)(X \sin Y)] - \\ &\quad - M[\cos(2\pi t)(X \cos Y) - \sin(2\pi t)(X \sin Y)] \times \\ &\quad \times M[\cos(2\pi s)(X \cos Y) - \sin(2\pi s)(X \sin Y)] = \\ &= M[\cos(2\pi t)\cos(2\pi s)(X \cos Y)^2 - \\ &\quad - \cos(2\pi t)\sin(2\pi s)X \cos Y \cdot X \sin Y - \\ &\quad - \sin(2\pi t)\cos(2\pi s)X \sin Y \cdot X \cos Y + \sin(2\pi t)\sin(2\pi s)(X \sin Y)^2] = \\ &= \cos(2\pi t)\cos(2\pi s) + \sin(2\pi t)\sin(2\pi s) = \cos[2\pi(t-s)]. \end{aligned}$$

Домашнее задание

4.10

Задание. Выясните, существует ли случайный процесс с ковариационной функцией

a) $K(t, s) = \min(t, s) - ts, t, s \in [0, 1];$

b) $K(t, s) = e^{-|t-s|}, t, s \in \mathbb{R}.$

Решение.

a) $K(t, s) = \min(t, s) - ts, t, s \in [0, 1].$

Такой процесс есть. Это броуновский мост;

b) $K(t, s) = e^{-|t-s|}, t, s \in \mathbb{R}.$

Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определена?

Функция зависит только от разности. Сейчас $K(t, s) = \varphi(t-s)$, где $\varphi(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}.$

Так что

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^n c_k c_j \varphi(t_k - t_j) \geq 0$$

— это условие неотрицательной определённости для характеристической функции. Будет ли эта функция φ характеристической? То есть вопрос в задаче равносильно следующему: будет ли $\varphi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ характеристической функцией? Это характеристическая функция для распределения Коши.

4.11

Задание. Докажите, что функция $K(t, s) = e^{ts}$ является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

Решение. Симметричность есть. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определённой

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^n c_k c_j e^{t_k t_j} = \sum_{k,j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_k^i t_j^i}{i!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k,j=1}^n c_k c_j t_k^i t_j^i =$$

Разобьём двойную сумму на две

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^n c_k t_k^i \sum_{j=1}^n c_j t_j^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=1}^n c_k t_k \right)^i \geq 0,$$

следовательно, $K(t, s) = e^{ts}$ — ковариационная функция.

4.12

Задание. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — произвольные действительные функции, c_1, \dots, c_n — неотрицательные числа. Докажите, что функция

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) \varphi_i(s)$$

является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

Решение. Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определённой?

$$\sum_{k,j=1}^n \lambda_k \lambda_j \sum_{i=1}^n K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^n \lambda_k \lambda_j \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t_k) \varphi_i(t_j) =$$

Поменяем суммы местами и двойную сумму распишем как две отдельные

$$= \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_i(t_k) \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_i(t_j) = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^n (\lambda_k \varphi_i(t_k))^2 \geq 0.$$

Значит, функция ковариационная.

4.13

Задание. Пусть случайные величины X и Y имеют совместное гауссовское распределение. Докажите, что процесс $\xi(t) = tX + Y$, $t \geq 0$ гауссовский. Найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t)$ — гауссовский, если

$$\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\xi} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$$

— гауссовская случайная величина, то есть

$$\sum_{i=1}^n \xi(t_i) \alpha_i = \sum_{i=1}^n (t_i X + Y) \alpha_i = X \sum_{i=1}^n t_i \alpha_i + Y \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

— сумма гауссовских случайных величин, гауссовская, $\forall t_1, \dots, t_n \geq 0$.

Математическое ожидание $M\xi(t) = M(tX + Y) = tMX + MY$.

Ковариационная функция

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \\ &= M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) = M[(tX + Y)(sX + Y)] - \\ &\quad - M(tX + Y)M(sX + Y) = \\ &= tsMX^2 + tM(XY) + sM(XY) + MY^2 - (tMX + MY)(sMX + MY) = \\ &= tsMX^2 + (t + s)M(XY) + MY^2 - ts(MX)^2 - tMX \cdot MY - sMY \cdot MX - \\ &\quad - (MY)^2 = tsDX + DY + (t + s)D(XY). \end{aligned}$$

4.14

Задание. Пусть $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ является случайным блужданием, которое определяется следующим образом: $S_0 = 0$; $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$, где $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что $M[\xi] = 0$, $M[\xi^2] = 1$. Докажите, что для произвольного фиксированного

$$t \in [0, 1] \quad \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение.

$$S_1 = S_0 + \xi_1 = 0 + \xi_1 = \xi_1,$$

$$S_2 = S_1 + \xi_2 = \xi_1 + \xi_2,$$

$$S_3 = S_2 + \xi_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,$$

$\dots,$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Математическое ожидание

$$MS_n = M \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n M \xi_i = n M \xi_i = 0.$$

Дисперсия

$$DS_n = D \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n D \xi_i = n D \xi_i = n.$$

Значит, по центральной предельной теореме

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, t), \quad n \rightarrow \infty.$$

4.15

Задание. Пусть

$$\hat{S}_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k (\mathbb{1}\{\omega_i = P\} - \mathbb{1}\{\omega_i = \Gamma\})$$

является нормированной разность между количеством решек и гербов, которые выпали при k подбрасываниях монеты. Докажите, что характеристическая функция \hat{S}_k имеет вид

$$\varphi_{\hat{S}_k}(\theta) = \left[\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right) \right]^k.$$

Вычислите предел $\varphi_{\hat{S}_k}(\theta)$ при $k \rightarrow \infty$. Укажите распределение случайной величины \hat{S} , к которой слабо сходятся \hat{S}_k при $k \rightarrow \infty$.

Решение. Сначала нужно найти характеристическую функцию

$$\varphi_{\hat{S}_k}(\theta) = M e^{i\theta \hat{S}_k}.$$

Подставим $M e^{i\theta \hat{S}_k} = M e^{i\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^k (\mathbb{1}\{\omega_j = P\} - \mathbb{1}\{\omega_j = \Gamma\})} = M e^{i\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^k \eta_j}$. Все слагаемые η_1, \dots, η_k в суммах независимы,

$$P(\eta_j = 1) = \frac{1}{2} = P(\eta_j = -1).$$

Тогда

$$M e^{i\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^k \eta_j} = \prod_{j=1}^k \varphi_{\eta_j}\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right) =$$

Осталось понять, что такое $\varphi_{\eta_j}(\lambda) = M e^{-\lambda \eta_j}$. Случайная величина η_j принимает значения -1 и 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$. Тогда

$$M e^{-\lambda \eta_j} = \frac{1}{2} \cdot e^{i\lambda} + \frac{1}{2} \cdot e^{-i\lambda} = \cos \lambda.$$

Значит,

$$= \cos^k \left(\frac{\theta}{\sqrt{k}} \right).$$

Найдём предел этой характеристической функции, когда $k \rightarrow \infty$.

Оказывается, что

$$\varepsilon^{-2} \ln(\cos \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Когда $\varepsilon \rightarrow 0$, $\cos \varepsilon \rightarrow 1$ и $\ln(\cos \varepsilon) \rightarrow 0$ — это неопределённость 0 на 0. Она раскрывается с помощью правила Лопиталя

$$\frac{\ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2} \approx -\frac{1}{2 \cos \varepsilon} \cdot \frac{\sim \varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{2},$$

где отношение синуса к его аргументу — замечательный предел.

$$\left(\cos \frac{x}{\sqrt{k}} \right)^k = e^{k \ln \cos \frac{x}{\sqrt{k}}} =$$

Аргумент косинуса — это $\varepsilon \rightarrow 0$. Значит,

$$= e^{\frac{k \varepsilon^2 \ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{x^2 \varepsilon^{-2} \ln(\cos \varepsilon)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теперь нужно эту сходимости использовать

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos^k \left(\frac{\theta}{\sqrt{k}} \right) = e^{-\frac{\theta^2}{2}}.$$

Вывод: $\varphi_{\hat{S}_k}(\theta) \rightarrow e^{-\frac{\theta^2}{2}}$.

Это характеристическая функция нормального распределения. Оно характеризуется средним и дисперсией. Среднее тут 0, потому что нет i в пределе, дисперсия — 1.

\hat{S}_k сходится к $\hat{S} \sim N(0, 1)$.

4.16

Задание. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$K(t, s) = \begin{cases} 1 - |t - s|, & |t - s| < \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3} - \frac{|t - s|}{3}, & \frac{1}{2} \leq |t - s| < 2, \\ 0, & |t - s| \geq 2. \end{cases} \quad ; t, s \in \mathbb{R}$$

- Запишите плотность распределения вектора $(\xi(4), \xi(5), \xi(6))$.
- Найдите условное математическое ожидание $M(\xi(5) | (\xi(4), \xi(6)))$.

Решение. $M(t) = 0$.

а) Нужно найти плотность трёхмерного вектора $(\xi(4), \xi(5), \xi(6))$.

Процесс гауссовский, значит, такой вектор тоже гауссовский. Он характеризуется математическим ожиданием и ковариационной матрицей $cov[\xi(4), \xi(4)] = cov[\xi(5), \xi(5)] = cov[\xi(6), \xi(6)] = K(4, 4)$. Будем считать по первой строке. Разность равна нулю $K(4, 4) = 1$.

Аналогично считаем

$$cov[\xi(4), \xi(3)] = K(4, 5) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

По последней строке находим, что $cov[\xi(4), \xi(6)] = K(4, 6) = 0$, а

$$cov[\xi(5), \xi(6)] = K(5, 6) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Тогда распределение вектора имеет вид

$$(\xi(4), \xi(5), \xi(6)) \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Плотность имеет вид

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sqrt{\det A}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\vec{x} - \vec{m}), A^{-1}(\vec{x} - \vec{m})] \right\} =$$

Чтобы написать плотность, нужно найти определитель матрицы и обратную

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{9}{7} \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}.$$

Подставим определитель и обратную матрицу в выражение для плотности

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 \cdot \frac{7}{9}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{9}{14} \left(\frac{8}{9} \cdot x_1^2 - \frac{2}{3} \cdot x_1 x_2 + \frac{2}{9} \cdot x_1 x_3 + x_2^2 + \frac{8}{9} \cdot x_3^2 - \frac{2}{3} \cdot x_2 x_3 \right) \right\}.$$

Здесь

$$\vec{x} - \vec{m} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

б) По определению условного математического ожидания

$$M(\xi(5) | (\xi(4), \xi(6))) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 p(\xi(4), x_2, \xi(6)) dx_2}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi(4), x_2, \xi(6)) dx_2}.$$

Теорема о нормальной корреляции

$$\begin{aligned} & M(\xi(5) | (\xi(4), \xi(6))) = \\ & = M\xi(5) + cov_{\xi(5), (\xi(4), \xi(6))} \cdot cov_{(\xi(4), \xi(6)), (\xi(4), \xi(6))}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \xi(4) - M\xi(4) \\ \xi(6) - M\xi(6) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

Здесь Первая ковариация равна

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

а вторая —

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(4) \\ \xi(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(4) \\ \xi(6) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} [\xi(4) + \xi(6)].$$

4.17

Задание. Рассмотрим случайный процесс $\{X(t), t \in T\}$ такой, что случайные величины $X(t)$ являются независимыми с одинаковым распределением $N(0, \sigma^2)$. Докажите, что процесс $\{X(t), t \in T\}$ является гауссовским и найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. Процесс гауссовский, если линейная комбинация

$$\sum_{r=1}^k c_r X(t_r)$$

— гауссовская.

В такой сумме слагаемые гауссовские и независимые, значит, процесс будет гауссовским.

$$MX(t) = 0.$$

Ковариационная функция

$$K(t, s) = M[X(t)X(s)] - MX(t) \cdot MX(s) = M[X(t)X(s)] = \sigma^2 \cdot \mathbb{1}\{t = s\}.$$

Занятие 5. Винеровский процесс

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение винеровского процесса.

$\{w(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, если обладает рядом свойств:

1. $w(0) = 0$;
2. однородные приращения. Рассмотрим приращение винеровского процесса на t . Тогда $w(s+t) - w(s) \stackrel{\text{def}}{=} w(t) \sim N(0, t)$, то есть распределение процесса зависит только от длины отрезка;
3. независимые приращения на непересекающихся отрезках. Выберем $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Тогда $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ — независимые в совокупности случайные величины.

Запишите плотность винеровского процесса.

Напишем плотность распределения вектора $(w(t_1), \dots, w(t_n)) = \vec{\xi}$.

Будем использовать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом $\vec{\xi}$ имеет плотность

$$q(A^{-1}\vec{u}) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{j+1} - t_j)}} \cdot e^{-\frac{u_{j+1} - u_j}{2t_{j+1} - t_j}}.$$

В этой плотности считаем, что $t_0 = 0, u_0 = 0$.

Запишите ковариационную функцию винеровского процесса.

Произведение математических ожиданий — это 0, потому

$$K(t, s) = Mw(s)w(t) =$$

Используем независимость приращений

$$= M\{w(s) \cdot [w(s) + (w(t) - w(s))]\} =$$

Раскрываем скобки

$$= M\{w^2(s) + Mw(s)[w(t) - w(s)]\} =$$

Первое слагаемое равно s , а второе — нулю, так как это независимые центрированные случайные величины (математическое произведение — это произведение математических ожиданий, а они равны нулю)

$$= s, \quad s < t.$$

$$K(t, s) = \min(s, t).$$

Аудиторные задачи

5.2

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что $M(W(t) - W(s))^{2n+1} = 0$, $M(W(t) - W(s))^{2n} = (2n-1)!!(t-s)^n$.

Решение. Приращение гауссовское. Обозначим

$$\xi = W(t) - W(s) \stackrel{\text{def}}{=} W(t-s).$$

Значит, $\xi \sim N(0, t-s)$, где $t-s = \sigma^2$. Нужны формулы для моментов центрированной гауссовской случайной величины, то есть Знаем, что $M\xi^{2n+1} = 0$, $M\xi^{2n} = (2n-1)!!\sigma^n$.

5.3

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите:

- $M[(W(5) - 2W(1) + 2)^3];$
- характеристическую функцию случайной величины $W(2) + 2W(1);$
- $M[\sin(2W(1) + W(2))];$
- $M[\cos(2W(1) + W(2))].$

Решение. Есть винеровский процесс.

- а) $W(5) - 2W(1) + 2 = \xi \sim N(2, 5)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет

$$D\xi = D[W(5) - 2W(1)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= \text{cov}[W(5) - 2W(1) + 2, W(5) - 2W(1) + 2] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(5, 5) - 2K(5, 1) - 2K(5, 1) + 4K(1, 1) = 5 - 2 - 2 + 4 = 5.$$

Нужно найти третий момент. ξ не центрирована. Нужно её центрировать $M\xi^3 = M[(\xi - 2) + 2]^3$. Раскрываем скобки

$$M\xi^3 = M(\xi - 2)^3 + 6M(\xi - 2)^2 + 12M(\xi - 2) + 8.$$

По предыдущей задаче первое слагаемое $= 0$, так как величина центрирована, второй момент $= 5$, так как это дисперсия, первый момент $= 0$. Тогда $M\xi^3 = 0 + 6 \cdot 5 + 12 \cdot 0 + 8 = 38$.

Величины $W(5)$ и $W(1)$ — зависимы, а приращения в винеровском процессе — независимы, потому имеем сумму дисперсий

$$D[W(5) - 2W(1)] = D\{[W(5) - W(1)] + [-W(1)]\}.$$

Дисперсия первого слагаемого равна 4, а второго $= 1$. Слагаемые независимы $D[W(5) - 2W(1)] = 5$;

- б) нужно найти характеристическую функцию $W(2) + 2W(1)$.

Математическое ожидание такой величины равно нулю, а дисперсия $D[W(2) + 2W(1)] = D\{[W(2) - W(1)] + 3W(1)\}$. Это независимые величины, поэтому $D\{[W(2) - W(1)] + 3W(1)\} = 1 + 9 = 10$. Значит, получается $\varphi_{W(2)+2W(1)}(\lambda) = \varphi_{N(0,10)}(\lambda) = e^{-\frac{10\lambda^2}{2}}$;

- в) $M[\sin(2W(1) + W(2))] = 0$.

Характеристическая функция случайной величины — это

$$\varphi_\xi(\lambda) = Me^{i\lambda\xi} = M\cos\lambda\xi + iM\sin\lambda\xi, \lambda = 1;$$

- г) $M[\cos(2W(1) + W(2))] = e^{-5}$.

5.4

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что процессы

- а) $\{-W(t), t \geq 0\}$;

b) $\{W(s+t) - W(s), t \geq 0\};$

c) $\tilde{W}(t) = tW\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \mathbb{1}\{t > 0\}$

тоже являются винеровскими.

Решение. $\{W(t), t \geq 0\}$ — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Если выберем моменты времени $t_1 < \dots < t_n$ и возьмём вектор

$$(W(t_1), \dots, W(t_n))$$

— гауссовский. Нужно знать, что в каждой точке $MW(t) = 0$ и

$$K(t, s) = \min(t, s).$$

Если процесс удовлетворит этим трём свойствам, то это винеровский процесс.

$$M[-W(t)] = -MW(t) = 0.$$

Найдём ковариационную функцию

$$K(t, s) = M[W(t)W(s)] = \min(t, s).$$

Вектор значений этого процесса должен быть гауссовским. Возьмём $(-W(t_1), \dots, -W(t_n))$. Нужно сказать, что это гауссовский вектор. Почему?

Этот вектор — это линейное преобразование вектора

$$(W(t_1), \dots, W(t_n)).$$

Линейные преобразования оставляют вектор гауссовским;

b) сначала нужно сказать, что у него гауссовские конечномерные распределения.

Берём n значений этого процесса

$$(W(s+t_1) - W(s), \dots, W(s+t_n) - W(s))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора $(W(t_1+s), \dots, W(t_n+s), W(s))$. Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s+t_1) \\ W(s+t_2) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s+t_1) - W(s) \\ W(s+t_2) - W(s) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t_1, t_2) = M\{[W(s+t_1) - W(s)] \cdot [W(s+t_2) - W(s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M\left[W(s+t_1)W(s+t_2) - W(s+t_1)W(s) - W(s)W(s+t_2) + W(s)^2\right] =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация винеровского процесса. Она равна минимуму. Математическое ожидание последнего слагаемого — ковариация в точке (s, s) . Получаем

$$= \min(s+t_1, s+t_2) - s - s + s = \min(s+t_1, s+t_2) - s.$$

Можем вынести и сократить $\min(s+t_1, s+t_2) - s = \min(t_1, t_2)$. Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

с) берём конечномерные распределения

$$\left(t_1 W\left(\frac{1}{t_1}\right), \dots, t_n W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса $\left(W\left(\frac{1}{t_1}\right), \dots, W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$.

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t, s) = M\left[tW\left(\frac{1}{t}\right)sW\left(\frac{1}{s}\right)\right] =$$

Выносим t и s . Получаем

$$= ts \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) =$$

Множитель ts — положительный. Он вносится

$$= \min(t, s).$$

Получилось.

5.5

Задание. Пусть $\{W^i(t), t \geq 0\}_{i \geq 1}$ — независимые винеровские процессы. Найдите константу c_n так, чтобы процесс

$$\tilde{W}(t) = c_n \sum_{i=1}^n W^i(t), t \geq 0$$

был винеровским.

Решение. Сложили n независимых винеровских процессов так, чтобы процесс был винеровским.

Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{W}(t_1), \dots, \tilde{W}(t_n) \right) = \\ & = \left(c_n \left(W^1(t_1), \dots, W^n(t_n) \right), \dots, c_n \left(W^1(t_m), \dots, W^n(t_m) \right) \right) \end{aligned}$$

— это линейное преобразование.

$$\begin{bmatrix} W^1(t_1) \\ \vdots \\ W^1(t_m) \\ W^2(t_1) \\ \vdots \\ W^2(t_m) \end{bmatrix}$$

— гауссовский вектор, где обе части — независимые гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию и скажем, какой должна быть c_n . Ковариация линейна по каждому аргументу. Это значит, что множители и суммы выносятся

$$\text{cov} \left(c_n \sum_{i=1}^n W^i(t), c_n \sum_{i=1}^n W^i(s) \right) = c_n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov} [W^i(t), W^j(s)] =$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= c_n^2 \sum_{i=1}^n \min(t, s) =$$

Имеем n одинаковых слагаемых

$$= c_n^2 \cdot n \cdot \min(t, s).$$

Отсюда получаем

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

тогда процесс винеровский.

5.6

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Для $0 < t \leq s$ вычислите вероятность $q_t = P(W(s) > W(s-t) > W(s+t))$.

Решение. Начнём с того, что нарисуем график винеровского процесса (рис. 28).

Есть 3 случайные величины.



Рис. 28: График винеровского процесса

У такого вектора есть плотность. Случайные величины независимы

$$q_t = \iiint_{x>y>z} p_{(W(s), W(s-t), W(s+t))} (x, y, z) dx dy dz.$$

Вектор имеет нормальное распределение

$$\begin{bmatrix} W(s) \\ W(s-t) \\ W(s+t) \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & s-t & s \\ s-t & s-t & s-t \\ s & s-t & s+t \end{pmatrix} \right).$$

Нужно использовать какие-то свойства винеровского процесса. Здесь нужно взять 2 приращения. Эти приращения будут независимыми величинами с известным распределением $N(0, t)$.

Вводим в рассмотрение приращения

$$\begin{cases} X = W(s) - W(s-t), \\ Y = W(s+t) - W(s). \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $W(s-t) = W(s) - X$, а из второго — $W(s+t) = W(s) + Y$. Отнимем два последние уравнения

$$W(s+t) - W(s-t) = X + Y.$$

От всех частей неравенства в искомой вероятности вычтем $W(s-t)$ и заменим полученные выражения на введённые приращения

$$q_t = P\{W(s) - W(s-t) > 0 > W(s+t) - W(s-t)\} = P(X > 0 > X + Y).$$

Плотность вектора — это произведение плотностей

$$P(X > 0 > X + Y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{2\pi t} \cdot e^{-\frac{1}{2t}(x^2+y^2)} dy dx =$$

Перейдём в полярную систему координат

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi.$$

Получим

$$= \frac{1}{2\pi t} \int_0^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} d\varphi dr =$$

Изобразим область интегрирования (рис. 29).



Рис. 29: Область интегрирования

По φ можем сразу проинтегрировать. Интеграл по φ даст просто $\frac{\pi}{4}$.
Получаем

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} \cdot \frac{dr^2}{2t} =$$

Интеграл равен единице

$$= \frac{1}{8}$$

5.7

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процессов:

- а) $W^0(t) = W(t) - tW(1), 0 \leq t \leq 1$ (броуновский мост);
- б) $U(t) = e^{-\frac{t}{2}} W(e^t)$ (процесс Орнштейна-Уленбека).

Выясните, какой из этих процессов является гауссовским.

Решение.

- а) $MW^0(t) = 0$, потому что у винеровского процесса математическое ожидание 0. Найдём ковариационную функцию

$$K(t, s) = \text{cov}[W(t) - tW(1), W(s) - sW(1)] = \min(t, s) - ts - st + st =$$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничтожаются

$$= \min(t, s) - st.$$

Если возьмём вектор конечномерных распределений

$$(W^0(t_1), \dots, W^0(t_n)),$$

то этот вектор будет гауссовским. Такой процесс называется броуновский мост (рис. 30);



Рис. 30: Броуновский мост

b) $MU(t) = 0$, потому что винеровский. Ковариационная функция

$$K(t, s) = \text{cov} \left[e^{-\frac{t}{2}} W(e^t), e^{-\frac{s}{2}} W(e^s) \right] =$$

Выносим экспоненты (множители)

$$= e^{-\frac{t}{2} - \frac{s}{2}} \min(e^t, e^s) =$$

Экспонента — монотонная функция

$$= e^{-\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \min(t, s)} = e^{-\frac{1}{2}[t + s - 2 \min(s, t)]} = e^{-\frac{1}{2} \cdot |t - s|}.$$

Значение процесса $U(t)$ — это линейное преобразование значений винеровского процесса, только в других точках. Процесс гауссовский.

5.8

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$B(t) = (1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), \quad 0 \leq t < 1; \quad B(1) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

Решение. Конечномерные распределения такого процесса

$$(B(t_1), \dots, B(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$$MB(t) = 0.$$

Найдём ковариацию

$$\text{cov}[B(t), B(s)] = \text{cov} \left[(1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), (1-s) W\left(\frac{s}{1-s}\right) \right] =$$

Множители выносим

$$= (1-t)(1-s) \min\left(\frac{t}{1-t}, \frac{s}{1-s}\right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min (t - ts, s - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min (t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

5.9

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание $M(W(s) | W(t))$ при $s > t$.

Решение. Есть формула

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x p_{W(s), W(t)}(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_{W(s), W(t)}(x, y) dx}.$$

Свойства условного математического ожидания: $M(\xi | \mathcal{F}) = \xi$, если ξ измерима относительно \mathcal{F} и $M(\xi | \mathcal{F}) = M\xi$, если ξ не зависит от \mathcal{F} .

Нужно, чтобы появилось приращение

$$M[W(s) | W(t)] = M[W(s) - W(t) + W(t) | W(t)] =$$

Распишем как 2 условных математических ожидания

$$= M[W(s) - W(t) | W(t)] + M[W(t) | W(t)].$$

Первое слагаемое равно нулю, как как имеются независимые величины $M[W(s) - W(t) | W(t)] + M[W(t) | W(t)] = W(t)$.

5.10

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, и пусть τ — независимая от процесса W случайная величина, показательно распределённая с параметром λ . Найдите характеристическую функцию случайной величины $W(\tau)$.

Решение. $\varphi_{W(\tau)}(\lambda) = Me^{i\lambda W(\tau)}$. В винеровский процесс подставляется случайное время. Похожая ситуация

$$Me^{i\lambda \sum_{k=0}^{\tau} \xi_k} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau = k) \cdot M\left(e^{i\lambda \sum_{k=0}^{\tau} \xi_k} \middle| \tau = k\right).$$

Получаем

$$Me^{i\lambda W(\tau)} = MM\left[e^{i\lambda W(\tau)} \middle| \tau\right] = Me^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot \tau^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} p_{\tau}(x) dx =$$

Подставим выражение для плотности показательного распределения

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2} - \lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x \left(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda \right)} dx =$$

Вынесем λ за скобки

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x \lambda \left(\frac{\lambda}{2} + 1 \right)} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x \lambda \cdot \frac{\lambda+2}{2}} dx = -\lambda \cdot \frac{2}{\lambda+2} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x \cdot \frac{\lambda+2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda+2}.$$

Домашнее задание

5.12

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите:

- $M \left[(W(4) - 2W(1) + 2W(2))^2 \right];$
- $M \left[(W(1) + 2W(2) + 1)^3 \right];$
- $M \left[e^{W(3) - 2W(2)} \right];$
- характеристическую функцию случайной величины $W(1) + 2W(2) + 1$.

Решение.

- $W(4) - 2W(1) + W(2) = \xi \sim N(0, 6)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(4) - 2W(1) + W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= \text{cov}[W(4) - 2W(1) + W(2), W(4) - 2W(1) + W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$\begin{aligned} &= K(4, 4) - 2K(4, 1) + K(4, 2) - 2K(1, 4) + 4K(1, 1) - 2K(1, 2) + \\ &\quad + K(2, 4) - 2K(2, 1) + K(2, 2) = \\ &= 4 - 2 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 1 + 2 = 4 + 4 - 2 = 6. \end{aligned}$$

Нужно найти второй момент. ξ центрирована $M\xi^2 = D\xi = 6$;

- b) $W(1) + 2W(2) + 1 = \xi \sim N(1, 13)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет $D\xi = D[W(1) - 2W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi)$. Подставим выражения для случайной величины

$$\text{cov}(\xi, \xi) = \text{cov}[W(1) + 2W(2) + 1, W(1) + 2W(2) + 1] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(1, 1) + 2K(1, 2) + 2K(2, 1) + 4K(2, 2) = 1 + 2 + 2 + 8 = 13.$$

Нужно найти третий момент. ξ не центрирована. Нужно её центрировать $M\xi^3 = M[(\xi - 1) + 1]^3$. Раскрываем скобки

$$M[(\xi - 1) + 1]^3 = M(\xi - 1)^3 + 3M(\xi - 1)^2 + 3M(\xi - 1) + 1 =$$

По задаче 5.2 первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 13, так как это дисперсия, первый момент — ноль. Тогда

$$= 0 + 3 \cdot 13 + 3 \cdot 0 + 1 = 39 + 1 = 40;$$

- c) $W(3) - 2W(2) = \xi \sim N(0, 3)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(3) - 2W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражение для случайной величины

$$= \text{cov}[W(3) - 2W(2), W(3) - 2W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(3, 3) - 2K(3, 2) - 2K(2, 3) + 4K(2, 2) = 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 3.$$

Нужно найти

$$Me^\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^x \cdot p_\xi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 3}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{6}} dx.$$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты

$$\frac{x^2}{6} - x = \frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6} + \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\right)^2 =$$

Три первых слагаемых образуют полный квадрат

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{(x-3)^2}{2 \cdot 3} - \frac{3}{2}.$$

Подставим полученное выражение в экспоненту

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{6}} dx = e^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{6}} dx =$$

Подинтегральная функция — плотность нормального распределения, потому такой интеграл равен единице

$$= e^{\frac{3}{2}};$$

d) нужно найти характеристическую функцию $W(1) + 2W(2) + 1$.

Математическое ожидание такой величины равно 1, а дисперсия — 13.

Значит, получается $\varphi_{W(1)+2W(2)+1}(\lambda) = \varphi_{N(1,13)}(\lambda) = e^{i\lambda - \frac{13\lambda^2}{2}}$.

5.13

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что процессы:

a) $\{W(T) - W(T-t), 0 \leq t \leq T\}, T = \text{const} > 0;$

b) $\{\sqrt{c}W(\frac{t}{c}), t \geq 0\}, c = \text{const} > 0$

тоже являются винеровскими.

Решение. $\{W(t), t \geq 0\}$ — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Сначала нужно сказать, что у процесса гауссовские конечномерные распределения.

Берём n значений этого процесса

$$(W(T) - W(T-t_1), \dots, W(T) - W(T-t_n))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора $(W(T-t_1), \dots, W(T-t_n), W(T))$.

Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(T-t_1) \\ W(T-t_2) \\ W(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(T) - W(T-t_1) \\ W(T) - W(T-t_2) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t, s) = M\{[W(T) - W(T-t)] \cdot [W(T) - W(T-s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M \left[W(T)^2 - W(T)W(T-s) - W(T-t)W(T) + W(T-t)W(T-s) \right] =$$

Математическое ожидание трёх последних слагаемых — ковариационные функции винеровского процесса. Они равны минимуму. Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация в точке (T, T) . Получаем

$$= T - T + s - T + t + \min(T-s, T-t) = s + t - \max(s, t) = \min(t, s).$$

Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

b) берём конечномерные распределения

$$\left(\sqrt{c}W\left(\frac{t_1}{c}\right), \dots, \sqrt{x}W\left(\frac{t_n}{c}\right) \right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса

$$\left(W\left(\frac{t_1}{c}\right), \dots, W\left(\frac{t_n}{c}\right) \right).$$

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t, s) = M \left[\sqrt{c}W\left(\frac{t}{c}\right) \sqrt{c}W\left(\frac{s}{c}\right) \right] =$$

Выносим \sqrt{c} . Получим

$$= cM \left[W\left(\frac{t}{c}\right) W\left(\frac{s}{c}\right) \right] = c \cdot \min\left(\frac{t}{c}, \frac{s}{c}\right) =$$

Множитель c — положительный. Он вносится

$$= \min(t, s).$$

5.14

Задание. Для фиксированного $\rho \in [-1, 1]$ положим

$$W(t) = \rho W^1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t),$$

где $\{W^1(t), t \geq 0\}$, $\{W^2(t), t \geq 0\}$ — независимые винеровские процессы. Докажите, что процесс $\{W(t), t \geq 0\}$ является винеровским и найдите математическое ожидание $M[W^1(t) \cdot W(t)]$.

Решение. Сложили 2 независимых винеровских процесса так, чтобы процесс был винеровским.

Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\begin{aligned} & (W(t_1), \dots, W(t_n)) = \\ & = \left(\rho W^1(t_1) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t_1), \dots, \rho W^1(t_n) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t_n) \right) \end{aligned}$$

— это линейное преобразование $(W^1(t_1), \dots, W^1(t_n))$ и

$$(W^2(t_1), \dots, W^2(t_n))$$

— гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию. Ковариация линейна по каждому аргументу

$$\begin{aligned} & \text{cov} \left[\rho W^1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t), \rho W^1(s) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(s) \right] = \\ & = \rho^2 \cdot \text{cov} [W^1(t), W^1(s)] + \rho \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \text{cov} [W^1(t), W^2(s)] + \\ & + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho \cdot \text{cov} [W^2(t), W^1(s)] + (1 - \rho^2) \cdot \text{cov} [W^2(t), W^2(s)] = \end{aligned}$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= \rho^2 \cdot \min(t, s) + (1 - \rho^2) \cdot \min(t, s) = \min(t, s),$$

тогда процесс винеровский.

$$M [W^1(t) \cdot W(t)] = M \left\{ W^1(t) \cdot \left[\rho W^1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t) \right] \right\} =$$

Раскроем скобки

$$= \rho M W^1(t)^2 + \sqrt{1 - \rho^2} M [W^1(t) W^2(t)] = \rho t.$$

5.15

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$X(t) = x + \mu t + \sigma W(t),$$

который называется винеровским со сдвигом $\mu \in \mathbb{R}$, коэффициентом диффузии $\sigma > 0$, который стартует из точки $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Из определения винеровского процесса следует, что случайная величина $W(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией t . Таким образом

$$MX(t) = M[x + \mu t + \sigma W(t)] = Mx + M(\mu t) + \sigma MW(t) = x + \mu t.$$

Вычислим теперь $MX(t)X(s)$. Имеем

$$MX(t)X(s) = M\{[x + \mu t + \sigma W(t)] \cdot [x + \mu s + \sigma W(s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M[x^2 + x\mu s + x\sigma W(s) + \mu tx + \mu^2 ts + \mu t\sigma W(s) + \sigma W(t)x + \sigma W(t)\mu s + \\ + \sigma^2 W(t)W(s)] =$$

Математическое ожидание константы — это сама константа, а математическое ожидание винеровского процесса равно нулю

$$= x^2 + x\mu s + \mu tx + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s).$$

Тогда

$$\text{cov}[X(t), X(s)] = M[X(t)X(s)] - MX(t) \cdot MX(s) =$$

Подставим найденные выражения для математических ожиданий

$$= x^2 + x\mu s + \mu tx + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - (x + \mu t)(x + \mu s) =$$

Перемножим скобки

$$= x^2 + x\mu s + \mu ts + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - x^2 - x\mu s - \mu tx - \mu^2 ts =$$

Сократим

$$= \sigma^2 \cdot \min(t, s).$$

5.16

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$Z(t) = tW\left(\frac{1}{t} - 1\right), 0 < t \leq 1; Z(0) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

Решение. Конечномерные распределения такого процесса

$$(Z(t_1), \dots, Z(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$$MZ(t) = 0.$$

Найдём ковариацию

$$\text{cov}[Z(t), Z(s)] = \text{cov}\left[tW\left(\frac{1}{t} - 1\right), sW\left(\frac{1}{s} - 1\right)\right] =$$

Множители выносим

$$= ts \cdot \min \left(\frac{1}{t} - 1, \frac{1}{s} - 1 \right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min (s - ts, t - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min (t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

5.17

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание $M(W(s) | W(t))$ при $s < t$.

Решение.

$$\begin{aligned} M[W(s) | W(t)] &= \\ &= MW(s) + \text{cov}[W(s), W(t)] \cdot \text{cov}^{-1}[W(t), W(t)] \cdot [W(t) - MW(t)] = \end{aligned}$$

Математическое ожидание винеровского процесса равно нулю, а ковариация — минимуму

$$= \min(s, t) \cdot \frac{1}{t} \cdot W(t) =$$

По условию $s < t$, потому

$$= \frac{s}{t} \cdot W(t).$$

5.18

Задание. Пусть W и N — независимые между собой винеровский процесс и пуассоновский процесс с интенсивностью λ соответственно. Найдите характеристическую функцию случайной величины $X(t) = W(N(t))$.

Решение. Нужно найти $\varphi_{W(N(t))}$. Характеристическая функция — это $Me^{isW(N(t))}$. Имеем винеровский процесс, в который подставляется случайное время. Нужно перебрать все возможные значения случайного времени. Пуассоновский процесс принимает значения от нуля до бесконечности

$$Me^{isW(N(t))} = M \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{N(t) = k\} \cdot e^{isW(k)} =$$

Математическое ожидание суммы можем написать как сумму математических ожиданий

$$= \sum_{k=0}^{\infty} M \mathbb{1}\{N(t) = k\} e^{isW(k)} =$$

Индикатор зависит от пуассоновского процесса, а экспонента — от винеровского, а они независимы

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = k\} M e^{isW(k)} =$$

Оба множителя нам известны. Второй — это характеристическая функция гауссовской величины

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot k} =$$

Случайная величина $N(t) \sim Pois(\lambda t)$, $W(k) \sim N(0, k)$. Получаем

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda t e^{-\frac{s^2}{2}}\right)^k}{k!} = e^{\lambda t \left(e^{-\frac{s^2}{2}} - 1\right)}.$$

Тогда $M e^{isW(N(t))} = M \left(M e^{isW(t)} \right) \Big|_{k=N(t)} = M \left[e^{isW(N(t))} \mid N(t) = k \right]$.

Свойство условного математического ожидания $MM(\xi \mid \mathcal{F}) = M\xi$.