

Оглавление

Занятие 2. Характеристики случайного процесса	1
Контрольные вопросы и задания	3
Аудиторные задачи	3
Домашнее задание	16
Занятие 5. Винеровский процесс	25
Контрольные вопросы и задания	27
Аудиторные задачи	28
Домашнее задание	36

Занятие 2. Характеристики случайного процесса

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$ — это параметризованная совокупность случайных величин.

Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?

$\{\mu_{t_1, \dots, t_n}; t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$ — набор конечномерных распределений процесса ξ , где μ_{t_1, \dots, t_n} — распределение вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ в \mathbb{R}^n , то есть для борелевского $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_{t_1, \dots, t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) \in \Delta\}$.

Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.

$m(t) = M\xi(t)$, $t \in T$ — функция среднего.

$D\xi(t)$, $t \in T$ — функция дисперсии.

$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)]$, $t, s \in T$ — функция ковариации.

Аудиторные задачи

2.2

Задание. Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t}, t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами a , σ^2 . Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса $\xi = \{\xi(t), t > 0\}$.

Решение. Сейчас $T = (0, \infty)$.

Случайная величина X имеет распределение $N(a, \sigma^2)$. Нужно найти $M\xi(t) = m(t)$, $D\xi(t)$, ковариационную функцию $K(t, s)$ и одномерную плотность распределения $p_\xi(t)$.

Начнём с математического ожидания

$$m(t) = M(X \cdot e^{-t}) = e^{-t}MX = e^{-t} \cdot a.$$

Далее — функция дисперсии $D\xi(t) = D(X \cdot e^{-t}) = e^{-2t} \cdot DX$. Дисперсия X — известная: $e^{-2t} \cdot DX = e^{-2t} \cdot \sigma^2$.

Далее — ковариационная функция

$$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)] = cov[\xi(t), \xi(s)].$$

Вместо $\xi(t)$, $\xi(s)$ подставляем их значения

$$cov[\xi(t), \xi(s)] = cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}).$$

Множители выносятся

$$cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}) = e^{-t-s}cov(X, X) = e^{-t-s}DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность $\xi(t) \sim N(e^{-t}a, e^{-2t}\sigma^2)$.

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x - e^{-t}a)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины X .



Рис. 1: Траектория процесса

2.3

Задание. Пусть

$$\xi(t) = e^{-Xt}, t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром λ . Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t > 0\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = e^{-Xt}$, где $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $t > 0$.

Нужно найти $m(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t . По определению

$$m(t) = M e^{-Xt} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше X , тем быстрее эта функция убывает.



Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M \xi(t) \xi(s) - M \xi(t) M \xi(s) = M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Подставим найденное значение функции математического ожидания

$$M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s} = \frac{\lambda}{\lambda + t + s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda + t)(\lambda + s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$. Вместо ξ напомним формулу $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X . Все неравенства решаем относительно X

$$P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n) = P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\}.$$



Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой m

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\} = \int_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \dots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда $0 < x_1, \dots, x_n < 1$.

Плотности у такого вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ быть не может, потому что $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$. Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$, $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$.

С вероятностью 1 $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$ — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

2.4

Задание. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A \cos(\varphi + \lambda t),$$



Рис. 4: $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где A и φ являются независимыми случайными величинами такими, что $MA^2 < \infty$, а φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

Решение. $\varphi \sim U([0, 2\pi])$.

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.



Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A \cos(\varphi + \lambda t)]$. Случайные величины A и φ — независимые. $M[A \cos(\varphi + \lambda t)] = MAM \cos(\varphi + \lambda t)$. Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у φ известна плотность

$$MAM \cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$ Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M[A^2 \cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos [2\varphi + \lambda (t + s)] + \frac{1}{2} \cdot \cos [\lambda (t - s)] \right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos [\lambda (t - s)].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

2.5

Задание. Пусть τ — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, и пусть $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}, t \in [0, 1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), t \in [0, 1]\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. τ — случайная величина с распределением $U([0, 1])$.

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное τ выпало.



Рис. 6: Траектория процесса

$$m(t) = MX(t) = M\mathbb{1}\{t \geq \tau\} = P(t \geq \tau) = F_\tau(t) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция $K(t, s) = M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s)$. Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s) = P\{\tau \leq \min(t, s)\} - ts = \min(t, s) - t \cdot s.$$

Конечномерные распределения — распределение вектора $(X(t_1), \dots, X(t_n))$.
Каждый X — это 0 или 1.

$$P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) = (0, \dots, 0)\} = P\{\tau \in (t_n, 1]\} = 1 - t_n.$$

Точки t_n изображены на рисунке 7.



Рис. 7: Временная ось

У вектора получается $(n + 1)$ -но значение

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \dots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \dots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \dots, \\ (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \dots, \\ (1, \dots, 1), & t_1. \end{cases}$$

2.6

Задание. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения F , и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq s\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \mathbb{1}\{\xi_j \leq s\}) =$$



Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$\text{cov} (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}) = M \mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \wedge s \} - F(t) F(s) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F(t \wedge s) - F(t) F(s),$$

где \wedge означает минимум.

Все слагаемые в сумме раны этому выражению

$$K(t, s) = \frac{1}{n} [F(t \wedge s) - F(t) F(s)].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем t_1, t_2, \dots, t_m (рис. 9).

$$X(t) \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}.$$

По t , X увеличивается. Эта функция монотонна.



Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq n.$$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P \left\{ X(t_1) = \frac{k_1}{n}, X(t_2) = \frac{k_2}{n}, \dots, X(t_m) = \frac{k_m}{n} \right\} =$$

P (для k_1 наблюдений $\xi \leq t_1$, для $k_2 - k_1$ наблюдений $t_1 < \xi \leq t_2, \dots$, для $n - k_m$ наблюдений $\xi > t_m$) Имеем мультиномиальное распределение

$$= \frac{n!}{k_1! (k_2 - k_1)! \dots (n - k_m)!} \cdot F(t_1)^{k_1} \cdot [F(t_2) - F(t_1)]^{k_2 - k_1} \cdot \dots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить n величин на группы.

2.7

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $X(\eta)$, где $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ — процесс из задачи 2.5, а η — независимая от X случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно.

Решение. $X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}$.

Задана случайная величина

$$\eta = \begin{cases} 0, & \frac{1}{3}, \\ 1, & \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Интересуемся $\varphi_{X(\eta)}$. Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.



Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1: $X(0) = 0, X(1) = 1$, значит, $X(\eta) = \eta$.

$$\varphi_{X(\eta)}(\lambda) = \varphi_{\eta}(\lambda) = M e^{i\lambda\eta} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

2.8

Задание. Значение случайного телеграфного сигнала $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ в произвольный момент времени с одинаковыми вероятностями равно 0 или 1. Прыжки происходят случайным и независимым образом. Вероятность $P(k, T)$ того, что в интервале времени длины T произойдёт k прыжков, задаётся распределением Пуассона, то есть:

$$P(k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T},$$

где λ — среднее количество прыжков за единицу времени. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса ξ .

Решение.

$$P\{\xi(t) = 1\} = P\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{2}.$$

Одномерные распределения даны. Это распределение Бернулли.

$P(k, T)$ — это вероятность того, что на отрезке времени длины T было k прыжков (распределение Пуассона), то есть траектория процесса выглядит как на рисунке 11.



Рис. 11: Траектория случайного процесса

В каждой точке будет 0 или 1.

Математическое ожидание тут ищется просто

$$M\xi(t) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Теперь нужно ещё найти ковариационную функцию такого процесса

$$K(s, t) = M[(\xi(t) - M\xi(t)) \cdot (\xi(s) - M\xi(s))] = M\xi(s)\xi(t) - \frac{1}{4}.$$

Нужно математическое ожидание совместного процесса. $\xi(s)$ и $\xi(t)$ независимы.

Попробуем найти математическое ожидание произведения. $\xi(t)\xi(s)$ принимают значения 0 и 1. Произведение принимает значения 0 и 1. Получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = 0 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 0\} + 1 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 1\} =$$

Слагаемое с нулём пропадает

$$= P\{\xi(s) = 1, \xi(t) = 1\}.$$

Значения в точках совпадают, если между ними произошло чётное количество скачков $M\xi(t)\xi(s) = P\{\xi(s) = 1\}P$ (на отрезке $[s, t]$ будет чётное количество прыжков) $= \frac{1}{2} \cdot P$ (на отрезке $[s, t]$ будет чётное число прыжков). Мы знаем, с какой вероятностью происходит число прыжков.

Подходят любые чётные прыжки, то есть это вероятность объединения. Число скачков обозначим буквой N . Тогда P (на $[s, t]$ чётное число скачков) $= P(N_{[s,t]} \text{ чётное}) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(2k = N_{[s,t]}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(2k, t-s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-s)]^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Экспонента выносится за сумму. Остаётся сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Для того, чтобы это было экспонента, нужны ещё и нечётные степени

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^x.$$

Если мы вычтем вторую сумму, то получится

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-x}.$$

Теперь нужно сложить эти два выражения и поделить на 2, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x = \lambda(t-s).$$

Получили гиперболический косинус.

$$= \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{-\lambda(t-s)}}{2} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Умножим один сомножитель на другой, $e^{\lambda(t-s)} \cdot e^{-\lambda(t-s)}$ дают единицу. Получаем

$$= \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{2}.$$

Это вероятность чётного числа скачков.

Выпишем, чему равна ковариационная функция. Математическое ожидание произведения нужно умножить на $\frac{1}{2}$ и отнять $\frac{1}{4}$. Получится

$$K(t, s) = \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^{-2\lambda(t-s)}}{4}, \quad s < t.$$

Окончательный ответ:

$$K(t, s) = \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda|t-s|}.$$

2.9

Задание. Пусть η_1 и η_2 — независимые случайные величины, которые имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найдите значения a , при которых почти все реализации случайной функции $t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$ монотонно возрастают по t .

Решение. $\xi(t) = t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$ — процесс, который задан при $t > 0$. Известно, что траектория этого процесса монотонно возрастает по t с вероятностью 1. Нужно найти $a = \text{const}$.

Реализация такого процесса выглядит как прямая линия (рис. 12), при этом $\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0$. Это случайная величина, так что коэффициент наклона должен быть положительным

$$P\{\xi(t) \nearrow\} = P\{\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0\} = 1 =$$

Число a должно быть таким, чтобы вероятность была единицей.

Рисуем траекторию процесса, считая, что все случайные величины неслучайны. Нужно, чтобы все реализации (прямые) возрастали.

Про η_1 и η_2 мы всё знаем. Это независимые случайные величины. Получаем двукратный интеграл

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}\{x + a(y + 2a) > 0\} dx dy,$$

где первые два множителя — плотности.



Рис. 12: Траектория случайного процесса

1. При $a = 0$ $\eta_1 > 0$ — правая часть квадрата. Тогда событие выполняется с вероятностью

$$\frac{1}{2} \neq 1,$$

то есть $a \neq 0$.

2. Следующий случай: пусть $a > 0$. Получается, что условие переписывается в виде

$$\eta_2 + 2a \geq -\frac{\eta_1}{a},$$

откуда

$$\eta_2 \geq -\frac{\eta_1}{a} - 2a,$$

то есть на картинке это будет прямая. Мы возьмём всё, что над этой прямой

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Наша вероятность — это площадь квадрата над прямой. Вероятность не будет равна 1. a должно быть таким, чтобы прямая прошла через точку $(-1, -1)$, то есть $-1 + a(2a - 1) \geq 0$. Теперь можно найти a из неравенства $2a^2 - a - 1 \geq 0$. Сейчас скажем, при каких a это выполнено. Нужно найти корни уравнения. $D = 1 + 8 = 9 = 3^2$, значит

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 1,$$

то есть то, что нужно выбрать изображено на рисунке 13.



Рис. 13: Решение неравенства

Задавали $a > 0$, то есть при $a \geq 1$ вероятность такого события — единица.

3. Теперь нужно задать $a < 0$. Отличие будет в том, как пройдёт прямая. Когда поделим на a , знак поменяется.

$$-\frac{\eta_1}{a} - 2a \geq \eta_2,$$

то есть нужно нарисовать прямую

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Прямая пройдёт через такие же точки: $(-2a, -2a^2)$, только если a — отрицательное, то $-2a$ — положительное. Нужно будет выбрать всё, что ниже этой прямой.

Нужно, чтобы прямая прошла над точкой $(-1, 1)$. Имеем неравенство $-1 + a(1 + 2a) \geq 0$, откуда

$$a^1 + \frac{1}{2} \cdot a - 1 \geq 0.$$

Решая соответствующее уравнение находим, что

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1.$$

Получаем всё, что за корнями (рис. 14).

При $a < 0$ получаем ответ: $a \leq -1$.



Рис. 14: Решение неравенства

Ответ к задаче: $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, то есть $|a| > 1$. Тогда все реализации процесса будут возрастать.

2.10

Задание. Пусть случайная величина $\tau \in (0, 1)$ имеет непрерывное распределение и пусть

$$\xi(t) \equiv 0; \eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Изобразите траектории этих процессов. Докажите, что эти процессы являются стохастически эквивалентными, то есть $\forall t \in [0, 1] : P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = 0$.

Решение. τ — это случайная величина с непрерывным распределением — та, у которой функция распределения F_τ — непрерывна.

Скачок функции распределения в точке x — это $\Delta F_\tau(x) = P(\tau = x) = 0$, где

$$F_\tau(x) = P(\tau \leq x),$$

а $F_\tau(-x) = P(\tau < x)$. В нашем случае нет скачков, то есть в фиксированный x случайная величина τ не попадёт. Рассматривается 2 процесса: один процесс — это $\xi(t) \equiv 0$, второй процесс — это

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau. \end{cases}$$

Посмотрим, какие траектории у этих процессов (рис. 15). Процессы заданы на

$$t \in [0, 1].$$

Стохастически эквивалентные означает, что если зафиксировать момент времени t , то в этот момент $P\{\xi(t) = \eta(t)\} = P\{\eta(t) = 0\} = P(\tau \neq t) = 1$. С точки зрения анализа это разные функции. У η всегда есть скачок, у ξ никогда скачков нет. Помним, что $\xi(t) \equiv 0$. Тем не менее, вероятность $P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = P\{\eta(t) \neq 0\} = P(\tau = t) = 0$, а это значит, что в фиксированной точке процессы с вероятностью 1 совпадают. Если зафиксируем несколько точек t_1, t_2, \dots, t_n , то вероятность

$$P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) = (\eta(t_1), \dots, \eta(t_n))\} = 1.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}^\xi = \mu_{t_1, \dots, t_n}^\eta.$$

Конечномерные распределения не определяют траектории процесса.



Рис. 15: Траектория случайных процессов

Домашнее задание

2.12

Задание. Пусть

$$\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R},$$

где X — равномерно распределённая на отрезке (a, b) случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R}$, где $X \sim U(a, b)$.

Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 16: чем больше X , тем больше угол наклона прямой к оси $0t$.



Рис. 16: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt + a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и вычисляем математическое ожидание

$$\begin{aligned} &= M[(Xt + a)(Xs + a)] - M(Xt + a)M(Xs + a) = \\ &= M[X^2ts + Xa(t + s) + a^2] - \left(t \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) \left(s \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) = \\ &= ts \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3} + a(t + s) \cdot \frac{a+b}{2} + a^2 - ts \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - ta \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 - \\ &\quad - as \cdot \frac{a+b}{2} = \\ &= ts \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right) + (t + s)a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot a(t + s) = \\ &= ts \cdot \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = ts \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = ts \cdot \frac{(a-b)^2}{12}. \end{aligned}$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ — рис. 17.



Рис. 17: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$. Вместо ξ напомним формулу $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X . Все неравенства решаем относительно X

$$P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n) = P(Xt_1 \leq x_1 - a, \dots, Xt_n \leq x_n - a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X \leq \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, X \leq \frac{x_n - a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P \left\{ X \leq \min \left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) \right\} =$$

Обозначим минимум буквой m для удобства

$$= P(X \leq m) = \int_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{X \in (a, b)\} dX = \frac{1}{b-a} \int_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\min \left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) - a \right]$$

при $m \in (a, b)$, иначе — ноль.

2.13

Задание. Пусть

$$\xi(t) = U \cos \theta t + V \sin \theta t, \quad t \in T,$$

где U, V — независимые случайные величины с заданными характеристиками: $MU = MV = 0$, $DU = DV = \sigma^2$, θ — неслучайная величина. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса $\{\xi(t), t \in T\}$.

Решение. Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$.

Найдём математическое ожидание в момент t . По свойствам

$$m(t) = M\xi(t) = M(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos \theta t \cdot MU + \sin \theta t \cdot MV = 0.$$

Можно сделать преобразование $U \cos \theta t + V \sin \theta t = C \sin(\theta t + \omega)$, где $C = \sqrt{U^2 + V^2}$. Траектории такого процесса изображены на рисунке 18: график синуса сжимается к оси ординат, когда модули случайных величин U и V растут.



Рис. 18: Траектория процесса

Найдём дисперсию в момент t . По свойствам

$$D\xi(t) = D(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos^2 \theta t \cdot DU + \sin^2 \theta t \cdot DV =$$

Подставим известные значения дисперсии

$$= \cos^2 \theta t \cdot \sigma^2 + \sin^2 \theta t \cdot \sigma^2 = \sigma^2 (\cos^2 \theta t + \sin^2 \theta t) = \sigma^2.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставим выражения для случайного процесса в первое слагаемое, а второе равно нулю

$$= M[(U \cos \theta t + V \sin \theta t) \cdot (U \cos \theta s + V \sin \theta s)] =$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} &= M(U^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + UV \cos \theta t \cdot \sin \theta s + VU \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + V^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \\ &= DU \cdot \cos \theta t \cdot \cos \theta s + MU \cdot MV \cdot \cos \theta t \cdot \sin \theta s + MV \cdot MU \cdot \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + DV \cdot \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \sigma^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sigma^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \\ &= \sigma^2 \cdot (\cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \sigma^2 \cos(\theta t - \theta s) = \sigma^2 \cos[\theta(t - s)]. \end{aligned}$$

2.14

Задание. Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса

$$\xi(t) = 2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5, \quad t \in T,$$

где ν — известный неслучайный параметр, а u, v — случайные величины с известными характеристиками:

$$Mu = 1, \quad Mv = 2, \quad Du = 0.1, \quad Dv = 0.9, \quad cov(u, v) = -0.3.$$

Решение. Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$.

Найдём математическое ожидание в момент t . По свойствам

$$m(t) = M(2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) = 2 \sin \nu t \cdot Mu + 3t^2 Mv + 5 = 2 \sin \nu t + 6t^2 + 5.$$

Траектория такого процесса изображена на рисунке 19 при $\nu = 1$, $u = 1$, $v = 2$.

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t) \cdot M\xi(s) =$$



Рис. 19: Траектория процесса

Подставим выражения для случайного процесса и его математические ожидания

$$\begin{aligned}
 &= M \left[(2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) (2u \sin \nu s + 3vs^2 + 5) \right] - \\
 &\quad - (2 \sin \nu t + 6t^2 + 5) (2 \sin \nu s + 6s^2 + 5) = \\
 &= M(4u^2 \sin \nu t \cdot \sin \nu s + 6uv \sin \nu t \cdot s^2 + 10u \sin \nu t + 6vt^2 u \sin \nu s + 9v^2 t^2 s^2 + \\
 &\quad + 15vt^2 + 10u \sin \nu s + 15vs^2 + 25) - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - \\
 &\quad - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 = \\
 &= 4 \sin \nu t \cdot Mu^2 + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + 10 \sin \nu t \cdot Mu + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + \\
 &\quad + 9t^2 s^2 Mv^2 + 15t^2 Mv + 10 \sin \nu s \cdot Mu + 15s^2 \cdot Mv + 25 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - \\
 &\quad - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 =
 \end{aligned}$$

Вычислим вторые моменты

$$Mu^2 = Du + (Mu)^2 = 0.1 + 1 = 1.1, \quad Mv^2 = Dv + (Mv)^2 = 0.9 + 4 = 4.9.$$

По определению ковариации $cov(u, v) = M(uv) - Mu \cdot Mv$, откуда

$$M(uv) = cov(u, v) + Mu \cdot Mv = -0.3 + 1 \cdot 2 = 2 - 0.3 = 1.7.$$

Подставим полученные значения в функцию ковариации

$$\begin{aligned}
 &= 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s \cdot 1.1 + 6 \sin \nu t \cdot s^2 \cdot 1.7 + 10 \sin \nu t + 6t^2 \sin \nu s \cdot 1.7 + \\
 &\quad + 9t^2 s^2 \cdot 4.9 + 15t^2 \cdot 2 + 10 \sin \nu s + 15s^2 \cdot 2 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - \\
 &\quad - 10 \sin \nu t - 12t^2 \cdot \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 = \\
 &= 0.4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 1.8 \sin \nu t \cdot s^2 - 1.8t^2 \sin \nu s + 8.1t^2 s^2.
 \end{aligned}$$

Найдём дисперсию в момент t . Из формулы для ковариации

$$D\xi(t) = K(t, t) = 0.4 \sin^2 \nu t - 3.6 \sin \nu t \cdot t^2 + 8.1t^4.$$

2.15

Задание. Найдите ковариационную функцию процесса

$$Y(t) = \psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n,$$

где ψ_1, \dots, ψ_n — произвольные числовые функции от t , а X_1, \dots, X_n — некоррелируемые случайные величины с дисперсиями D_1, \dots, D_n .

Решение. Нужно найти

$$K(t, s) = \text{cov}(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n, \psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) =$$

Распишем по определению

$$\begin{aligned} &= M[(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n)(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n)] - \\ &- M(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n) \cdot M(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M(X_i X_j) - \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M X_i \cdot M X_j = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D X_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D X_n = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D_n. \end{aligned}$$

2.16

Задание. Пусть η и ζ — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $1/2$. Найдите конечномерные распределения случайного процесса

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}, \quad t > 0.$$

Решение. Для произвольных натуральных $n \geq 1$, произвольных моментов времени $t_1, \dots, t_n \in T$ и произвольных действительных чисел x_1, \dots, x_n находим

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} =$$

Подставляем выражения для случайного процесса

$$= P\left(\frac{\eta + \zeta}{t_1} \leq x_1, \frac{\eta + \zeta}{t_2} \leq x_2, \dots, \frac{\eta + \zeta}{t_n} \leq x_n\right) =$$

Переносим моменты времени вправо

$$= P(\eta + \zeta \leq x_1 t_1, \eta + \zeta \leq x_2 t_2, \dots, \eta + \zeta \leq x_n t_n) =$$

Независимые случайные величины η и ζ имеют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

Их сумма имеет стандартное нормальное распределение. Пусть

$$\eta + \zeta = X \sim N(0, 1).$$

Тогда

$$= P(X \leq x_1 t_1, X \leq x_2 t_2, \dots, X \leq x_n t_n) = P\left(X \leq \min_{i=1, n} x_i t_i\right) =$$

Запишем через плотность

$$= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где обозначено

$$z = \min_{i=1, n} x_i t_i.$$

2.17

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi(\tau)$, где $\{\xi(t), t \geq 0\}$ — процесс из предыдущей задачи, а τ — независимая от ξ случайная величина, которая принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями $1/2$.

Решение.

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}.$$

Задана случайная величина

$$\tau = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Интересует

$$\varphi_{\xi(\tau)}(\lambda) = M e^{i \xi(\tau) \lambda} = M e^{i \cdot \frac{\eta + \zeta}{\tau} \cdot \lambda} =$$

Как и в предыдущей задаче $\eta + \zeta = X \sim N(0, 1)$. Получаем

$$= M e^{i \cdot \frac{X}{\tau} \cdot \lambda} = M e^{-\frac{\lambda^2}{2\tau^2}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

2.18

Задание. Пусть ξ и η — случайные величины, причём η имеет симметричное относительно нуля распределение и $P(\eta = 0) = 0$. Найдите вероятность того, что реализации случайного процесса $\zeta(t) = \xi + t(\eta + t)$, $t \geq 0$ возрастают.

Решение. Известно, что траектории процесса возрастают по t при $t \geq 0$.

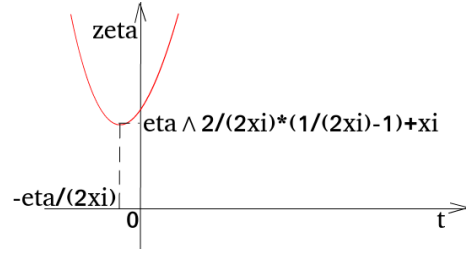


Рис. 20: Траектория процесса

Реализация такого процесса выглядит как парабола (рис. 20) с вершиной в точке с координатами

$$t_0 = -\frac{\eta}{2\xi}, \quad \zeta_0 = t_0^2 + \eta t_0 + \xi = \frac{\eta^2}{4\xi^2} - \frac{\eta^2}{2\xi} + \xi.$$

Это случайная величина, так что

$$\begin{aligned} P\{\zeta(t) \geq 0, t \geq 0\} &= P\{\xi + t(\eta + t) \geq 0, t \geq 0\} = \\ &= P(\text{вершина параболы } \zeta = t^2 + \eta t + \xi \text{ лежит слева от нуля}) = \\ &= P\left(-\frac{\eta}{2\xi} \leq 0\right) = P(\eta \geq 0) = \end{aligned}$$

Случайная величина η имеет симметричное распределение

$$= \frac{1}{2}.$$

2.19

Задание. Случайный эксперимент состоит в двухразовом подбрасывании монеты. Обозначим через $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ результат эксперимента и обозначим процессы $\{X(t), 0 \leq t < 2\}$ и $\{Y(t), 0 \leq t < 2\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathbb{1}_{[0,1)}(t) \cdot \mathbb{1}_{\{\omega_1 = P\}} + \mathbb{1}_{[1,2)}(t) \cdot \mathbb{1}_{\{\omega_2 = P\}}, \quad 0 \leq t < 2, \\ Y(t) &= 1 - X(t), \quad 0 \leq t < 2. \end{aligned}$$

Докажите, что процессы $X(t)$ и $Y(t)$ имеют одинаковые конечномерные распределения, но не являются стохастически эквивалентными.

Решение. Рассматривается 2 процесса. Процессы заданы на $t \in [0, 2)$.

Это разные функции. Вероятность

$$P\{X(t) \neq Y(t)\} = P\{X(t) \neq 1 - X(t)\} = 1,$$

а это значит, что процессы с вероятностью 1 не совпадают. Зафиксируем несколько точек t_1, t_2, \dots, t_n . Обозначим через $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik}$ моменты t , которые лежат между 0 и 1, и $t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{j(n-k)}$ — все остальные. Найдём

вероятность

$$\begin{aligned}
& P\{X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n\} = \\
& = P\{X(t_{i1}) = x_{i1}, \dots, X(t_{ik}) = x_{ik}, X(t_{j1}) = x_{j1}, \dots, \\
& \quad X(t_{j(n-k)}) = x_{j(n-k)}\} = \\
& = P(\mathbb{1}\{\omega_1 = P\} = x_{i1}, \dots, \mathbb{1}\{\omega_1 = P\} = x_{ik}, \\
& \quad \mathbb{1}\{\omega_2 = P\} = x_{j1}, \dots, \mathbb{1}\{\omega_2 = P\} = x_{j(n-k)}) .
\end{aligned}$$

Рассматриваем только случай, когда x_{i1}, \dots, x_{ik} одинаковые, и

$$x_{j1}, \dots, x_{j(n-k)}$$

одинаковые.

$$P\{X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично

$$P\{Y(t_1) = x_1, \dots, Y(t_n) = x_n\} = \frac{1}{4}.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения.

Занятие 5. Винеровский процесс

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение винеровского процесса.

$\{w(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, если обладает рядом свойств:

1. $w(0) = 0$;
2. однородные приращения. Рассмотрим приращение винеровского процесса на t . Тогда $w(s+t) - w(s) \stackrel{\text{def}}{=} w(t) \sim N(0, t)$, то есть распределение процесса зависит только от длины отрезка;
3. независимые приращения на непересекающихся отрезках. Выберем $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Тогда $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ — независимые в совокупности случайные величины.

Запишите плотность винеровского процесса.

Напишем плотность распределения вектора $(w(t_1), \dots, w(t_n)) = \vec{\xi}$.

Будем использовать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом $\vec{\xi}$ имеет плотность

$$q(A^{-1}\vec{u}) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{j+1} - t_j)}} \cdot e^{-\frac{u_{j+1} - u_j}{2t_{j+1} - t_j}}.$$

В этой плотности считаем, что $t_0 = 0, u_0 = 0$.

Запишите ковариационную функцию винеровского процесса.

Произведение математических ожиданий — это 0, потому

$$K(t, s) = Mw(s)w(t) =$$

Используем независимость приращений

$$= M\{w(s) \cdot [w(s) + (w(t) - w(s))]\} =$$

Раскрываем скобки

$$= M\{w^2(s) + Mw(s)[w(t) - w(s)]\} =$$

Первое слагаемое равно s , а второе — нулю, так как это независимые центрированные случайные величины (математическое произведение — это произведение математических ожиданий, а они равны нулю)

$$= s, s < t.$$

$$K(t, s) = \min(s, t).$$

Аудиторные задачи

5.2

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что $M(W(t) - W(s))^{2n+1} = 0$, $M(W(t) - W(s))^{2n} = (2n-1)!!(t-s)^n$.

Решение. Приращение гауссовское. Обозначим

$$\xi = W(t) - W(s) \stackrel{\text{def}}{=} W(t-s).$$

Значит, $\xi \sim N(0, t-s)$, где $t-s = \sigma^2$. Нужны формулы для моментов центрированной гауссовской случайной величины, то есть Знаем, что $M\xi^{2n+1} = 0$, $M\xi^{2n} = (2n-1)!!\sigma^n$.

5.3

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите:

- a) $M[(W(5) - 2W(1) + 2)^3]$;
- b) характеристическую функцию случайной величины $W(2) + 2W(1)$;
- c) $M[\sin(2W(1) + W(2))]$;
- d) $M[\cos(2W(1) + W(2))]$.

Решение. Есть винеровский процесс.

- а) $W(5) - 2W(1) + 2 = \xi \sim N(2, 5)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет

$$D\xi = D[W(5) - 2W(1)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= \text{cov}[W(5) - 2W(1) + 2, W(5) - 2W(1) + 2] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(5, 5) - 2K(5, 1) - 2K(5, 1) + 4K(1, 1) = 5 - 2 - 2 + 4 = 5.$$

Нужно найти третий момент. ξ не центрирована. Нужно её центрировать $M\xi^3 = M[(\xi - 2) + 2]^3$. Раскрываем скобки

$$M\xi^3 = M(\xi - 2)^3 + 6M(\xi - 2)^2 + 12M(\xi - 2) + 8.$$

По предыдущей задаче первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 5, так как это дисперсия, первый момент — 0. Тогда $M\xi^3 = 0 + 6 \cdot 5 + 12 \cdot 0 + 8 = 38$.

Величины $W(5)$ и $W(1)$ — зависимы, а приращения в винеровском процессе — независимы, потому имеем сумму дисперсий

$$D[W(5) - 2W(1)] = D\{[W(5) - W(1)] + [-W(1)]\}.$$

Дисперсия первого слагаемого равна 4, а второго — 1. Слагаемые независимы $D[W(5) - 2W(1)] = 5$;

- б) нужно найти характеристическую функцию $W(2) + 2W(1)$.

Математическое ожидание такой величины равно нулю, а дисперсия $D[W(2) + 2W(1)] = D\{[W(2) - W(1)] + 3W(1)\}$. Это независимые величины, поэтому $D\{[W(2) - W(1)] + 3W(1)\} = 1 + 9 = 10$. Значит, получается $\varphi_{W(2)+2W(1)}(\lambda) = \varphi_{N(0,10)}(\lambda) = e^{-\frac{10\lambda^2}{2}}$;

- с) $M[\sin(2W(1) + W(2))] = 0$.

Характеристическая функция случайной величины — это

$$\varphi_\xi(\lambda) = Me^{i\lambda\xi} = M\cos\lambda\xi + iM\sin\lambda\xi, \lambda = 1;$$

- д) $M[\cos(2W(1) + W(2))] = e^{-5}$.

5.4

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что процессы

- а) $\{-W(t), t \geq 0\}$;

b) $\{W(s+t) - W(s), t \geq 0\};$

c) $\tilde{W}(t) = tW\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \mathbb{1}\{t > 0\}$

тоже являются винеровскими.

Решение. $\{W(t), t \geq 0\}$ — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Если выберем моменты времени $t_1 < \dots < t_n$ и возьмём вектор

$$(W(t_1), \dots, W(t_n))$$

— гауссовский. Нужно знать, что в каждой точке $MW(t) = 0$ и

$$K(t, s) = \min(t, s).$$

Если процесс удовлетворит этим трём свойствам, то это винеровский процесс.

$$M[-W(t)] = -MW(t) = 0.$$

Найдём ковариационную функцию

$$K(t, s) = M[W(t)W(s)] = \min(t, s).$$

Вектор значений этого процесса должен быть гауссовским. Возьмём $(-W(t_1), \dots, -W(t_n))$. Нужно сказать, что это гауссовский вектор. Почему?

Этот вектор — это линейное преобразование вектора

$$(W(t_1), \dots, W(t_n)).$$

Линейные преобразования оставляют вектор гауссовским;

b) сначала нужно сказать, что у него гауссовские конечномерные распределения.

Берём n значений этого процесса

$$(W(s+t_1) - W(s), \dots, W(s+t_n) - W(s))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора $(W(t_1+s), \dots, W(t_n+s), W(s))$. Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s+t_1) \\ W(s+t_2) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s+t_1) - W(s) \\ W(s+t_2) - W(s) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t_1, t_2) = M\{[W(s+t_1) - W(s)] \cdot [W(s+t_2) - W(s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M\left[W(s+t_1)W(s+t_2) - W(s+t_1)W(s) - W(s)W(s+t_2) + W(s)^2\right] =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация винеровского процесса. Она равна минимуму. Математическое ожидание последнего слагаемого — ковариация в точке (s, s) . Получаем

$$= \min(s+t_1, s+t_2) - s - s + s = \min(s+t_1, s+t_2) - s.$$

Можем вынести и сократить $\min(s+t_1, s+t_2) - s = \min(t_1, t_2)$. Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

с) берём конечномерные распределения

$$\left(t_1 W\left(\frac{1}{t_1}\right), \dots, t_n W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса $\left(W\left(\frac{1}{t_1}\right), \dots, W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$.

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t, s) = M\left[tW\left(\frac{1}{t}\right)sW\left(\frac{1}{s}\right)\right] =$$

Выносим t и s . Получаем

$$= ts \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) =$$

Множитель ts — положительный. Он вносится

$$= \min(t, s).$$

Получилось.

5.5

Задание. Пусть $\{W^i(t), t \geq 0\}_{i \geq 1}$ — независимые винеровские процессы. Найдите константу c_n так, чтобы процесс

$$\tilde{W}(t) = c_n \sum_{i=1}^n W^i(t), t \geq 0$$

был винеровским.

Решение. Сложили n независимых винеровским процессов так, чтобы процесс был винеровским.

Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{W}(t_1), \dots, \tilde{W}(t_n) \right) = \\ & = \left(c_n \left(W^1(t_1), \dots, W^n(t_n) \right), \dots, c_n \left(W^1(t_m), \dots, W^n(t_m) \right) \right) \end{aligned}$$

— это линейное преобразование.

$$\begin{bmatrix} W^1(t_1) \\ \vdots \\ W^1(t_m) \\ W^2(t_1) \\ \vdots \\ W^2(t_m) \end{bmatrix}$$

— гауссовский вектор, где обе части — независимые гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию и скажем, како должна быть c_n . Ковариация линейна по каждому аргументу. Это значит, что множители и суммы выносятся

$$\text{cov} \left(c_n \sum_{i=1}^n W^i(t), c_n \sum_{i=1}^n W^i(s) \right) = c_n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov} [W^i(t), W^j(s)] =$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= c_n^2 \sum_{i=1}^n \min(t, s) =$$

Имеем n одинаковых слагаемых

$$= c_n^2 \cdot n \cdot \min(t, s).$$

Отсюда получаем

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

тогда процесс винеровский.

5.6

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Для $0 < t \leq s$ вычислите вероятность $q_t = P(W(s) > W(s-t) > W(s+t))$.

Решение. Начнём с того, что нарисуем график винеровского процесса (рис. 21).

Есть 3 случайные величины.



Рис. 21: График винеровского процесса

У такого вектора есть плотность. Случайные величины независимы

$$q_t = \iiint_{x>y>z} p_{(W(s), W(s-t), W(s+t))} (x, y, z) dx dy dz.$$

Вектор имеет нормальное распределение

$$\begin{bmatrix} W(s) \\ W(s-t) \\ W(s+t) \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & s-t & s \\ s-t & s-t & s-t \\ s & s-t & s+t \end{pmatrix} \right).$$

Нужно использовать какие-то свойства винеровского процесса. Здесь нужно взять 2 приращения. Эти приращения будут независимыми величинами с известным распределением $N(0, t)$.

Вводим в рассмотрение приращения

$$\begin{cases} X = W(s) - W(s-t), \\ Y = W(s+t) - W(s). \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $W(s-t) = W(s) - X$, а из второго — $W(s+t) = W(s) + Y$. Отнимем два последние уравнения

$$W(s+t) - W(s-t) = X + Y.$$

От всех частей неравенства в искомой вероятности вычтем $W(s-t)$ и заменим полученные выражения на введённые приращения

$$q_t = P\{W(s) - W(s-t) > 0 > W(s+t) - W(s-t)\} = P(X > 0 > X + Y).$$

Плотность вектора — это произведение плотностей

$$P(X > 0 > X + Y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{2\pi t} \cdot e^{-\frac{1}{2t}(x^2+y^2)} dy dx =$$

Перейдём в полярную систему координат

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi.$$

Получим

$$= \frac{1}{2\pi t} \int_0^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} d\varphi dr =$$

Изобразим область интегрирования (рис. 22).



Рис. 22: Область интегрирования

По φ можем сразу проинтегрировать. Интеграл по φ даст просто $\frac{\pi}{4}$.
Получаем

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} \cdot \frac{dr^2}{2t} =$$

Интеграл равен единице

$$= \frac{1}{8}$$

5.7

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процессов:

- а) $W^0(t) = W(t) - tW(1), 0 \leq t \leq 1$ (броуновский мост);
- б) $U(t) = e^{-\frac{t}{2}} W(e^t)$ (процесс Орнштейна-Уленбека).

Выясните, какой из этих процессов является гауссовским.

Решение.

- а) $MW^0(t) = 0$, потому что у винеровского процесса математическое ожидание 0. Найдём ковариационную функцию

$$K(t, s) = \text{cov}[W(t) - tW(1), W(s) - sW(1)] = \min(t, s) - ts - st + st =$$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничтожаются

$$= \min(t, s) - st.$$

Если возьмём вектор конечномерных распределений

$$(W^0(t_1), \dots, W^0(t_n)),$$

то этот вектор будет гауссовским. Такой процесс называется броуновский мост (рис. 23);



Рис. 23: Броуновский мост

b) $MU(t) = 0$, потому что винеровский. Ковариационная функция

$$K(t, s) = \text{cov} \left[e^{-\frac{t}{2}} W(e^t), e^{-\frac{s}{2}} W(e^s) \right] =$$

Выносим экспоненты (множители)

$$= e^{-\frac{t}{2} - \frac{s}{2}} \min(e^t, e^s) =$$

Экспонента — монотонная функция

$$= e^{-\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \min(t, s)} = e^{-\frac{1}{2}[t + s - 2 \min(s, t)]} = e^{-\frac{1}{2} \cdot |t - s|}.$$

Значение процесса $U(t)$ — это линейное преобразование значений винеровского процесса, только в других точках. Процесс гауссовский.

5.8

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$B(t) = (1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), \quad 0 \leq t < 1; \quad B(1) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

Решение. Конечномерные распределения такого процесса

$$(B(t_1), \dots, B(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$$MB(t) = 0.$$

Найдём ковариацию

$$\text{cov}[B(t), B(s)] = \text{cov} \left[(1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), (1-s) W\left(\frac{s}{1-s}\right) \right] =$$

Множители выносим

$$= (1-t)(1-s) \min\left(\frac{t}{1-t}, \frac{s}{1-s}\right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min (t - ts, s - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min (t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

5.9

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание $M(W(s) | W(t))$ при $s > t$.

Решение. Есть формула

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x p_{W(s), W(t)}(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_{W(s), W(t)}(x, y) dx}.$$

Свойства условного математического ожидания: $M(\xi | \mathcal{F}) = \xi$, если ξ измерима относительно \mathcal{F} и $M(\xi | \mathcal{F}) = M\xi$, если ξ не зависит от \mathcal{F} .

Нужно, чтобы появилось приращение

$$M(W(s) | W(t)) = M(W(s) - W(t) + W(t) | W(t)) =$$

Распишем как 2 условных математических ожидания

$$= M(W(s) - W(t) | W(t)) + M(W(t) | W(t)).$$

Первое слагаемое равно нулю, как как имеются независимые величины $M(W(s) - W(t) | W(t)) + M(W(t) | W(t)) = W(t)$.

5.10

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, и пусть τ — независимая от процесса W случайная величина, показательно распределённая с параметром λ . Найдите характеристическую функцию случайной величины $W(\tau)$.

Решение. $\varphi_{W(\tau)}(\lambda) = Me^{i\lambda W(\tau)}$. В винеровский процесс подставляется случайное время. Похожая ситуация

$$Me^{i\lambda \sum_{k=0}^{\tau} \xi_k} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau = k) \cdot M\left(e^{i\lambda \sum_{k=0}^{\tau} \xi_k} \middle| \tau = k\right).$$

Получаем $Me^{i\lambda W(\tau)} = MM[e^{i\lambda W(\tau)} | \tau] = Me^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot \tau}$.

Домашнее задание

5.12

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите:

- a) $M[(W(4) - 2W(1) + 2W(2))^2];$
- b) $M[(W(1) + 2W(2) + 1)^3];$
- c) $M[e^{W(3) - 2W(2)}];$
- d) характеристическую функцию случайной величины $W(1) + 2W(2) + 1$.

Решение.

- a) $W(4) - 2W(1) + W(2) = \xi \sim N(0, 6)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(4) - 2W(1) + W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= \text{cov}[W(4) - 2W(1) + W(2), W(4) - 2W(1) + W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$\begin{aligned} &= K(4, 4) - 2K(4, 1) + K(4, 2) - 2K(1, 4) + 4K(1, 1) - 2K(1, 2) + \\ &\quad + K(2, 4) - 2K(2, 1) + K(2, 2) = \\ &= 4 - 2 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 1 + 2 = 4 + 4 - 2 = 6. \end{aligned}$$

Нужно найти второй момент. ξ центрирована $M\xi^2 = D\xi = 6$;

- b) $W(1) + 2W(2) + 1 = \xi \sim N(1, 5)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет $D\xi = D[W(1) + 2W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi)$. Подставим выражения для случайной величины

$$\text{cov}(\xi, \xi) = \text{cov}[W(1) + 2W(2) + 1, W(1) + 2W(2) + 1] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= (1, 1) + 2K(1, 2) + 2K(2, 1) + 4K(2, 2) = 1 + 2 + 2 + 8 = 13.$$

Нужно найти третий момент. ξ не центрирована. Нужно её центрировать $M\xi^3 = M[(\xi - 1) + 1]^3$. Раскрываем скобки

$$M[(\xi - 1) + 1]^3 = M(\xi - 1)^3 + 3M(\xi - 1) + 3M(\xi - 1) + 1 =$$

По задаче 5.2 первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 5, так как это дисперсия, первый момент — ноль. Тогда

$$= 0 + 3 \cdot 13 + 3 \cdot 0 + 1 = 38 + 1 = 40;$$

- с) $W(3) - 2W(2) = \xi \sim N(0, 3)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(3) - 2W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражение для случайной величины

$$= \text{cov}[W(3) - 2W(2), W(3) - 2W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(3, 3) - 2K(3, 2) - 2K(2, 3) + 4K(2, 2) = 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 3.$$

Нужно найти

$$Me^\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^x \cdot p_\xi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{6\pi} \cdot e^x \cdot \frac{1}{6\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 9}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{18}} dx.$$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты

$$\frac{x^2}{18} - x = \frac{x^2}{(3\sqrt{2})^2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (2\sqrt{2})^2 =$$

Три первых слагаемых образуют полный квадрат

$$= \left(\frac{x}{3\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{9 \cdot 2}{4} = \left(\frac{x}{3\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{9}{2} = \frac{(x-9)^2}{2 \cdot 3} + \frac{9}{2}.$$

Подставим полученное выражение в экспоненту

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{18}} dx = e^{-\frac{9}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-9)^2}{2 \cdot 9}} dx =$$

Умножим и поделим на $\sqrt{3}$ чтобы получить гауссовскую плотность

$$= \sqrt{3} e^{-\frac{9}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 9}} \cdot e^{-\frac{(x-9)^2}{2 \cdot 9}} dx =$$

Подинтегральная функция — плотность нормального распределения, потому такой интеграл равен единице

$$= \sqrt{3} e^{-\frac{9}{2}};$$

- d) нужно найти характеристическую функцию $W(1) + 2W(2) + 1$.

Математическое ожидание такой величины равно 1, а дисперсия — 13.

Значит, получается $\varphi_{W(1)=2W(2)+1}(\lambda) = \varphi_{N(1,13)}(\lambda) = e^{it - \frac{13t^2}{2}}$.