

# Оглавление

<b>Занятие 2. Характеристики случайного процесса</b>	<b>1</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	3
Аудиторные задачи . . . . .	3
Домашнее задание . . . . .	16
<b>Занятие 3. Процесс Пуассона</b>	<b>25</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	27
Аудиторные задачи . . . . .	28
Домашнее задание . . . . .	36
<b>Занятие 4. Гауссовские процессы</b>	<b>43</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	45
Аудиторные задачи . . . . .	45
Домашнее задание . . . . .	60
<b>Занятие 5. Винеровский процесс</b>	<b>66</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	67
Аудиторные задачи . . . . .	68
Домашнее задание . . . . .	77
<b>Занятие 6. Стохастическая непрерывность случайного процесса. Существование непрерывной модификации</b>	<b>84</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	85
Аудиторные задачи . . . . .	85
Домашнее задание . . . . .	89
<b>Занятие 7. <math>L_2</math> теория</b>	<b>92</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	93
Аудиторные задачи . . . . .	94
Домашнее задание . . . . .	100



# Занятие 2. Характеристики случайного процесса

## Контрольные вопросы и задания

**Приведите определение случайного процесса.**

Случайный процесс  $\xi(t)$ ,  $t \in T$  — это параметризованная совокупность случайных величин.

**Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?**

$\{\mu_{t_1, \dots, t_n}; t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$  — набор конечномерных распределений процесса  $\xi$ , где  $\mu_{t_1, \dots, t_n}$  — распределение вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  в  $\mathbb{R}^n$ , то есть для борелевского  $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mu_{t_1, \dots, t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) \in \Delta\}$ .

**Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.**

$m(t) = M\xi(t)$ ,  $t \in T$  — функция среднего.

$D\xi(t)$ ,  $t \in T$  — функция дисперсии.

$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)]$ ,  $t, s \in T$  — функция ковариации.

## Аудиторные задачи

### 2.2

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t}, t > 0,$$

где  $X$  — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами  $a$ ,  $\sigma^2$ . Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса  $\xi = \{\xi(t), t > 0\}$ .

*Решение.* Сейчас  $T = (0, \infty)$ .

Случайная величина  $X$  имеет распределение  $N(a, \sigma^2)$ . Нужно найти  $M\xi(t) = m(t)$ ,  $D\xi(t)$ , ковариационную функцию  $K(t, s)$  и одномерную плотность распределения  $p_\xi(t)$ .

Начнём с математического ожидания

$$m(t) = M(X \cdot e^{-t}) = e^{-t}MX = e^{-t} \cdot a.$$

Далее — функция дисперсии  $D\xi(t) = D(X \cdot e^{-t}) = e^{-2t} \cdot DX$ . Дисперсия  $X$  — известная:  $e^{-2t} \cdot DX = e^{-2t} \cdot \sigma^2$ .

Далее — ковариационная функция

$$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)] = cov[\xi(t), \xi(s)].$$

Вместо  $\xi(t)$ ,  $\xi(s)$  подставляем их значения

$$cov[\xi(t), \xi(s)] = cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}).$$

Множители выносятся

$$cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}) = e^{-t-s}cov(X, X) = e^{-t-s}DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность  $\xi(t) \sim N(e^{-t}a, e^{-2t}\sigma^2)$ .

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x - e^{-t}a)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины  $X$ .



Рис. 1: Траектория процесса

## 2.3

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = e^{-Xt}, t > 0,$$

где  $X$  — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром  $\lambda$ . Запишите конечномерные распределения случайного процесса  $\{\xi(t), t > 0\}$ . Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\xi(t) = e^{-Xt}$ , где  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $t > 0$ .

Нужно найти  $m(t)$ ,  $K(t, s)$ , конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент  $t$ . По определению

$$m(t) = M e^{-Xt} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше  $X$ , тем быстрее эта функция убывает.



Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M \xi(t) \xi(s) - M \xi(t) M \xi(s) = M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Подставим найденное значение функции математического ожидания

$$M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s} = \frac{\lambda}{\lambda + t + s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda + t)(\lambda + s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$ . Вместо  $\xi$  напомним формулу  $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n)$ . Величины зависимы, потому что все они выражаются через  $X$ . Все неравенства решаем относительно  $X$

$$P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n) = P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\}.$$



Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой  $m$

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\} = \int_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \dots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда  $0 < x_1, \dots, x_n < 1$ .

Плотности у такого вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  быть не может, потому что  $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$ . Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как  $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$ ,  $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$ .

С вероятностью 1  $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$  — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

## 2.4

*Задание.* Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A \cos(\varphi + \lambda t),$$



Рис. 4:  $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где  $A$  и  $\varphi$  являются независимыми случайными величинами такими, что  $MA^2 < \infty$ , а  $\varphi$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

*Решение.*  $\varphi \sim U([0, 2\pi])$ .

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.



Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A \cos(\varphi + \lambda t)]$ . Случайные величины  $A$  и  $\varphi$  — независимые.  $M[A \cos(\varphi + \lambda t)] = MAM \cos(\varphi + \lambda t)$ . Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у  $\varphi$  известна плотность

$$MAM \cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция  $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$  Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M[A^2 \cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos [2\varphi + \lambda (t + s)] + \frac{1}{2} \cdot \cos [\lambda (t - s)] \right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos [\lambda (t - s)].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

## 2.5

*Задание.* Пусть  $\tau$  — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ , и пусть  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$  — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}, t \in [0, 1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ , найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\tau$  — случайная величина с распределением  $U([0, 1])$ .

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное  $\tau$  выпало.



Рис. 6: Траектория процесса

$$m(t) = MX(t) = M\mathbb{1}\{t \geq \tau\} = P(t \geq \tau) = F_\tau(t) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция  $K(t, s) = M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s)$ . Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s) = P\{\tau \leq \min(t, s)\} - ts = \min(t, s) - t \cdot s.$$



Конечномерные распределения — распределение вектора  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ .  
Каждый  $X$  — это 0 или 1.

$$P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) = (0, \dots, 0)\} = P\{\tau \in (t_n, 1]\} = 1 - t_n.$$

Точки  $t_n$  изображены на рисунке 7.



Рис. 7: Временная ось

У вектора получается  $(n + 1)$ -но значение

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \dots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \dots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \dots, \\ (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \dots, \\ (1, \dots, 1), & t_1. \end{cases}$$

## 2.6

*Задание.* Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения  $F$ , и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ , найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

*Решение.*

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq s\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \mathbb{1}\{\xi_j \leq s\}) =$$



Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$\text{cov} (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}) = M \mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \wedge s \} - F(t) F(s) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F(t \wedge s) - F(t) F(s),$$

где  $\wedge$  означает минимум.

Все слагаемые в сумме раны этому выражению

$$K(t, s) = \frac{1}{n} [F(t \wedge s) - F(t) F(s)].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем  $t_1, t_2, \dots, t_m$  (рис. 9).

$$X(t) \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}.$$

По  $t$ ,  $X$  увеличивается. Эта функция монотонна.



Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq n.$$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P \left\{ X(t_1) = \frac{k_1}{n}, X(t_2) = \frac{k_2}{n}, \dots, X(t_m) = \frac{k_m}{n} \right\} =$$

$P$ (для  $k_1$  наблюдений  $\xi \leq t_1$ , для  $k_2 - k_1$  наблюдений  $t_1 < \xi \leq t_2, \dots$ , для  $n - k_m$  наблюдений  $\xi > t_m$ ) Имеем мультиномиальное распределение

$$= \frac{n!}{k_1! (k_2 - k_1)! \dots (n - k_m)!} \cdot F(t_1)^{k_1} \cdot [F(t_2) - F(t_1)]^{k_2 - k_1} \cdot \dots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить  $n$  величин на группы.

## 2.7

*Задание.* Найдите характеристическую функцию случайной величины  $X(\eta)$ , где  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$  — процесс из задачи 2.5, а  $\eta$  — независимая от  $X$  случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$  соответственно.

*Решение.*  $X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}$ .

Задана случайная величина

$$\eta = \begin{cases} 0, & \frac{1}{3}, \\ 1, & \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Интересуемся  $\varphi_{X(\eta)}$ . Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.



Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1:  $X(0) = 0, X(1) = 1$ , значит,  $X(\eta) = \eta$ .

$$\varphi_{X(\eta)}(\lambda) = \varphi_{\eta}(\lambda) = M e^{i\lambda\eta} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

## 2.8

*Задание.* Значение случайного телеграфного сигнала  $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$  в произвольный момент времени с одинаковыми вероятностями равно 0 или 1. Прыжки происходят случайным и независимым образом. Вероятность  $P(k, T)$  того, что в интервале времени длины  $T$  произойдёт  $k$  прыжков, задаётся распределением Пуассона, то есть:

$$P(k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T},$$

где  $\lambda$  — среднее количество прыжков за единицу времени. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi$ .

*Решение.*

$$P\{\xi(t) = 1\} = P\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{2}.$$

Одномерные распределения даны. Это распределение Бернулли.

$P(k, T)$  — это вероятность того, что на отрезке времени длины  $T$  было  $k$  прыжков (распределение Пуассона), то есть траектория процесса выглядит как на рисунке 11.



Рис. 11: Траектория случайного процесса

В каждой точке будет 0 или 1.

Математическое ожидание тут ищется просто

$$M\xi(t) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Теперь нужно ещё найти ковариационную функцию такого процесса

$$K(s, t) = M[(\xi(t) - M\xi(t)) \cdot (\xi(s) - M\xi(s))] = M\xi(s)\xi(t) - \frac{1}{4}.$$

Нужно математическое ожидание совместного процесса.  $\xi(s)$  и  $\xi(t)$  независимы.

Попробуем найти математическое ожидание произведения.  $\xi(t)\xi(s)$  принимают значения 0 и 1. Произведение принимает значения 0 и 1. Получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = 0 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 0\} + 1 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 1\} =$$

Слагаемое с нулём пропадает

$$= P\{\xi(s) = 1, \xi(t) = 1\}.$$

Значения в точках совпадают, если между ними произошло чётное количество скачков  $M\xi(t)\xi(s) = P\{\xi(s) = 1\}P$  (на отрезке  $[s, t]$  будет чётное количество прыжков)  $= \frac{1}{2} \cdot P$  (на отрезке  $[s, t]$  будет чётное число прыжков). Мы знаем, с какой вероятностью происходит число прыжков.

Подходят любые чётные прыжки, то есть это вероятность объединения. Число скачков обозначим буквой  $N$ . Тогда  $P$  (на  $[s, t]$  чётное число скачков)  $= P(N_{[s,t]} \text{ чётное}) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(2k = N_{[s,t]}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(2k, t-s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-s)]^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Экспонента выносится за сумму. Остаётся сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Для того, чтобы это было экспонента, нужны ещё и нечётные степени

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^x.$$

Если мы вычтем вторую сумму, то получится

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-x}.$$

Теперь нужно сложить эти два выражения и поделить на 2, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x = \lambda(t-s).$$

Получили гиперболический косинус.

$$= \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{-\lambda(t-s)}}{2} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Умножим один сомножитель на другой,  $e^{\lambda(t-s)} \cdot e^{-\lambda(t-s)}$  дают единицу. Получаем

$$= \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{2}.$$

Это вероятность чётного числа скачков.

Выпишем, чему равна ковариационная функция. Математическое ожидание произведения нужно умножить на  $\frac{1}{2}$  и отнять  $\frac{1}{4}$ . Получится

$$K(t, s) = \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^{-2\lambda(t-s)}}{4}, \quad s < t.$$

Окончательный ответ:

$$K(t, s) = \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda|t-s|}.$$

## 2.9

*Задание.* Пусть  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — независимые случайные величины, которые имеют равномерное распределение на отрезке  $[-1, 1]$ . Найдите значения  $a$ , при которых почти все реализации случайной функции  $t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$  монотонно возрастают по  $t$ .

*Решение.*  $\xi(t) = t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$  — процесс, который задан при  $t > 0$ . Известно, что траектория этого процесса монотонно возрастает по  $t$  с вероятностью 1. Нужно найти  $a = \text{const}$ .

Реализация такого процесса выглядит как прямая линия (рис. 12), при этом  $\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0$ . Это случайная величина, так что коэффициент наклона должен быть положительным

$$P\{\xi(t) \nearrow\} = P\{\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0\} = 1 =$$

Число  $a$  должно быть таким, чтобы вероятность была единицей.

Рисуем траекторию процесса, считая, что все случайные величины неслучайны. Нужно, чтобы все реализации (прямые) возрастали.

Про  $\eta_1$  и  $\eta_2$  мы всё знаем. Это независимые случайные величины. Получаем двукратный интеграл

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}\{x + a(y + 2a) > 0\} dx dy,$$

где первые два множителя — плотности.



Рис. 12: Траектория случайного процесса

1. При  $a = 0$   $\eta_1 > 0$  — правая часть квадрата. Тогда событие выполняется с вероятностью

$$\frac{1}{2} \neq 1,$$

то есть  $a \neq 0$ .

2. Следующий случай: пусть  $a > 0$ . Получается, что условие переписывается в виде

$$\eta_2 + 2a \geq -\frac{\eta_1}{a},$$

откуда

$$\eta_2 \geq -\frac{\eta_1}{a} - 2a,$$

то есть на картинке это будет прямая. Мы возьмём всё, что над этой прямой

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Наша вероятность — это площадь квадрата над прямой. Вероятность не будет равна 1.  $a$  должно быть таким, чтобы прямая прошла через точку  $(-1, -1)$ , то есть  $-1 + a(2a - 1) \geq 0$ . Теперь можно найти  $a$  из неравенства  $2a^2 - a - 1 \geq 0$ . Сейчас скажем, при каких  $a$  это выполнено. Нужно найти корни уравнения.  $D = 1 + 8 = 9 = 3^2$ , значит

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 1,$$

то есть то, что нужно выбрать изображено на рисунке 13.



Рис. 13: Решение неравенства

Задавали  $a > 0$ , то есть при  $a \geq 1$  вероятность такого события — единица.

3. Теперь нужно задать  $a < 0$ . Отличие будет в том, как пройдёт прямая. Когда поделим на  $a$ , знак поменяется.

$$-\frac{\eta_1}{a} - 2a \geq \eta_2,$$

то есть нужно нарисовать прямую

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Прямая пройдёт через такие же точки:  $(-2a, -2a^2)$ , только если  $a$  — отрицательное, то  $-2a$  — положительное. Нужно будет выбрать всё, что ниже этой прямой.

Нужно, чтобы прямая прошла над точкой  $(-1, 1)$ . Имеем неравенство  $-1 + a(1 + 2a) \geq 0$ , откуда

$$a^1 + \frac{1}{2} \cdot a - 1 \geq 0.$$

Решая соответствующее уравнение находим, что

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1.$$

Получаем всё, что за корнями (рис. 14).

При  $a < 0$  получаем ответ:  $a \leq -1$ .



Рис. 14: Решение неравенства

Ответ к задаче:  $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , то есть  $|a| > 1$ . Тогда все реализации процесса будут возрастать.

## 2.10

*Задание.* Пусть случайная величина  $\tau \in (0, 1)$  имеет непрерывное распределение и пусть

$$\xi(t) \equiv 0; \eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Изобразите траектории этих процессов. Докажите, что эти процессы являются стохастически эквивалентными, то есть  $\forall t \in [0, 1] : P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = 0$ .

*Решение.*  $\tau$  — это случайная величина с непрерывным распределением — та, у которой функция распределения  $F_\tau$  — непрерывна.

Скачок функции распределения в точке  $x$  — это  $\Delta F_\tau(x) = P(\tau = x) = 0$ , где

$$F_\tau(x) = P(\tau \leq x),$$

а  $F_\tau(-x) = P(\tau < x)$ . В нашем случае нет скачков, то есть в фиксированный  $x$  случайная величина  $\tau$  не попадёт. Рассматривается 2 процесса: один процесс — это  $\xi(t) \equiv 0$ , второй процесс — это

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau. \end{cases}$$

Посмотрим, какие траектории у этих процессов (рис. 15). Процессы заданы на

$$t \in [0, 1].$$

Стохастически эквивалентные означает, что если зафиксировать момент времени  $t$ , то в этот момент  $P\{\xi(t) = \eta(t)\} = P\{\eta(t) = 0\} = P(\tau \neq t) = 1$ . С точки зрения анализа это разные функции. У  $\eta$  всегда есть скачок, у  $\xi$  никогда скачков нет. Помним, что  $\xi(t) \equiv 0$ . Тем не менее, вероятность  $P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = P\{\eta(t) \neq 0\} = P(\tau = t) = 0$ , а это значит, что в фиксированной точке процессы с вероятностью 1 совпадают. Если зафиксируем несколько точек  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , то вероятность

$$P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) = (\eta(t_1), \dots, \eta(t_n))\} = 1.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}^\xi = \mu_{t_1, \dots, t_n}^\eta.$$

Конечномерные распределения не определяют траектории процесса.





Рис. 15: Траектория случайных процессов

## Домашнее задание

### 2.12

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R},$$

где  $X$  — равномерно распределённая на отрезке  $(a, b)$  случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса  $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ . Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R}$ , где  $X \sim U(a, b)$ .

Нужно найти  $m(t)$ ,  $D\xi(t)$ ,  $K(t, s)$ , конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент  $t$

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 16: чем больше  $X$ , тем больше угол наклона прямой к оси  $0t$ .

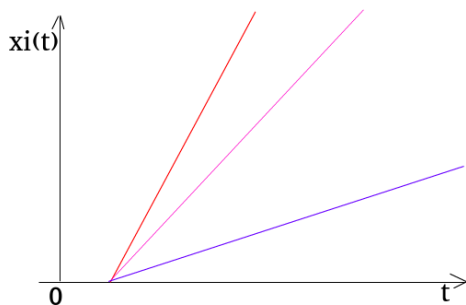


Рис. 16: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt + a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и вычисляем математическое ожидание

$$\begin{aligned} &= M[(Xt + a)(Xs + a)] - M(Xt + a)M(Xs + a) = \\ &= M[X^2ts + Xa(t + s) + a^2] - \left(t \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) \left(s \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) = \\ &= ts \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3} + a(t + s) \cdot \frac{a+b}{2} + a^2 - ts \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - ta \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 - \\ &\quad - as \cdot \frac{a+b}{2} = \\ &= ts \left( \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right) + (t + s)a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot a(t + s) = \\ &= ts \cdot \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = ts \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = ts \cdot \frac{(a-b)^2}{12}. \end{aligned}$$

Считаем функцию распределения случайного вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  — рис. 17.



Рис. 17: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$ . Вместо  $\xi$  напомним формулу  $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n)$ . Величины зависимы, потому что все они выражаются через  $X$ . Все неравенства решаем относительно  $X$

$$P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n) = P(Xt_1 \leq x_1 - a, \dots, Xt_n \leq x_n - a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X \leq \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, X \leq \frac{x_n - a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P \left\{ X \leq \min \left( \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) \right\} =$$

Обозначим минимум буквой  $m$  для удобства

$$= P(X \leq m) = \int_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{X \in (a, b)\} dX = \frac{1}{b-a} \int_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[ \min \left( \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) - a \right]$$

при  $m \in (a, b)$ , иначе — ноль.

## 2.13

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = U \cos \theta t + V \sin \theta t, \quad t \in T,$$

где  $U, V$  — независимые случайные величины с заданными характеристиками:  $MU = MV = 0$ ,  $DU = DV = \sigma^2$ ,  $\theta$  — неслучайная величина. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\{\xi(t), t \in T\}$ .

*Решение.* Нужно найти  $m(t)$ ,  $D\xi(t)$ ,  $K(t, s)$ .

Найдём математическое ожидание в момент  $t$ . По свойствам

$$m(t) = M\xi(t) = M(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos \theta t \cdot MU + \sin \theta t \cdot MV = 0.$$

Можно сделать преобразование  $U \cos \theta t + V \sin \theta t = C \sin(\theta t + \omega)$ , где  $C = \sqrt{U^2 + V^2}$ . Траектории такого процесса изображены на рисунке 18: график синуса сжимается к оси ординат, когда модули случайных величин  $U$  и  $V$  растут.



Рис. 18: Траектория процесса

Найдём дисперсию в момент  $t$ . По свойствам

$$D\xi(t) = D(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos^2 \theta t \cdot DU + \sin^2 \theta t \cdot DV =$$

Подставим известные значения дисперсии

$$= \cos^2 \theta t \cdot \sigma^2 + \sin^2 \theta t \cdot \sigma^2 = \sigma^2 (\cos^2 \theta t + \sin^2 \theta t) = \sigma^2.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставим выражения для случайного процесса в первое слагаемое, а второе равно нулю

$$= M[(U \cos \theta t + V \sin \theta t) \cdot (U \cos \theta s + V \sin \theta s)] =$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} &= M(U^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + UV \cos \theta t \cdot \sin \theta s + VU \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + V^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \\ &= DU \cdot \cos \theta t \cdot \cos \theta s + MU \cdot MV \cdot \cos \theta t \cdot \sin \theta s + MV \cdot MU \cdot \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + DV \cdot \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \sigma^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sigma^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \\ &= \sigma^2 \cdot (\cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \sigma^2 \cos(\theta t - \theta s) = \sigma^2 \cos[\theta(t - s)]. \end{aligned}$$

## 2.14

*Задание.* Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса

$$\xi(t) = 2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5, \quad t \in T,$$

где  $\nu$  — известный неслучайный параметр, а  $u, v$  — случайные величины с известными характеристиками:

$$Mu = 1, \quad Mv = 2, \quad Du = 0.1, \quad Dv = 0.9, \quad cov(u, v) = -0.3.$$

*Решение.* Нужно найти  $m(t)$ ,  $D\xi(t)$ ,  $K(t, s)$ .

Найдём математическое ожидание в момент  $t$ . По свойствам

$$m(t) = M(2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) = 2 \sin \nu t \cdot Mu + 3t^2 Mv + 5 = 2 \sin \nu t + 6t^2 + 5.$$

Траектория такого процесса изображена на рисунке 19 при  $\nu = 1$ ,  $u = 1$ ,  $v = 2$ .

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t) \cdot M\xi(s) =$$



Рис. 19: Траектория процесса

Подставим выражения для случайного процесса и его математические ожидания

$$\begin{aligned}
 &= M \left[ (2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) (2u \sin \nu s + 3vs^2 + 5) \right] - \\
 &\quad - (2 \sin \nu t + 6t^2 + 5) (2 \sin \nu s + 6s^2 + 5) = \\
 &= M(4u^2 \sin \nu t \cdot \sin \nu s + 6uv \sin \nu t \cdot s^2 + 10u \sin \nu t + 6vt^2 u \sin \nu s + 9v^2 t^2 s^2 + \\
 &\quad + 15vt^2 + 10u \sin \nu s + 15vs^2 + 25) - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - \\
 &\quad - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 = \\
 &= 4 \sin \nu t \cdot Mu^2 + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + 10 \sin \nu t \cdot Mu + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + \\
 &\quad + 9t^2 s^2 Mv^2 + 15t^2 Mv + 10 \sin \nu s \cdot Mu + 15s^2 \cdot Mv + 25 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - \\
 &\quad - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 =
 \end{aligned}$$

Вычислим вторые моменты

$$Mu^2 = Du + (Mu)^2 = 0.1 + 1 = 1.1, \quad Mv^2 = Dv + (Mv)^2 = 0.9 + 4 = 4.9.$$

По определению ковариации  $cov(u, v) = M(uv) - Mu \cdot Mv$ , откуда

$$M(uv) = cov(u, v) + Mu \cdot Mv = -0.3 + 1 \cdot 2 = 2 - 0.3 = 1.7.$$

Подставим полученные значения в функцию ковариации

$$\begin{aligned}
 &= 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s \cdot 1.1 + 6 \sin \nu t \cdot s^2 \cdot 1.7 + 10 \sin \nu t + 6t^2 \sin \nu s \cdot 1.7 + \\
 &\quad + 9t^2 s^2 \cdot 4.9 + 15t^2 \cdot 2 + 10 \sin \nu s + 15s^2 \cdot 2 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - \\
 &\quad - 10 \sin \nu t - 12t^2 \cdot \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 = \\
 &= 0.4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 1.8 \sin \nu t \cdot s^2 - 1.8t^2 \sin \nu s + 8.1t^2 s^2.
 \end{aligned}$$

Найдём дисперсию в момент  $t$ . Из формулы для ковариации

$$D\xi(t) = K(t, t) = 0.4 \sin^2 \nu t - 3.6 \sin \nu t \cdot t^2 + 8.1t^4.$$

### 2.15

*Задание.* Найдите ковариационную функцию процесса

$$Y(t) = \psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n,$$

где  $\psi_1, \dots, \psi_n$  — произвольные числовые функции от  $t$ , а  $X_1, \dots, X_n$  — некоррелируемые случайные величины с дисперсиями  $D_1, \dots, D_n$ .

*Решение.* Нужно найти

$$K(t, s) = \text{cov}(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n, \psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) =$$

Распишем по определению

$$\begin{aligned} &= M[(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n)(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n)] - \\ &- M(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n) \cdot M(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M(X_i X_j) - \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M X_i \cdot M X_j = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D X_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D X_n = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D_n. \end{aligned}$$

### 2.16

*Задание.* Пусть  $\eta$  и  $\zeta$  — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями  $1/2$ . Найдите конечномерные распределения случайного процесса

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}, \quad t > 0.$$

*Решение.* Для произвольных натуральных  $n \geq 1$ , произвольных моментов времени  $t_1, \dots, t_n \in T$  и произвольных действительных чисел  $x_1, \dots, x_n$  находим

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} =$$

Подставляем выражения для случайного процесса

$$= P\left(\frac{\eta + \zeta}{t_1} \leq x_1, \frac{\eta + \zeta}{t_2} \leq x_2, \dots, \frac{\eta + \zeta}{t_n} \leq x_n\right) =$$

Переносим моменты времени вправо

$$= P(\eta + \zeta \leq x_1 t_1, \eta + \zeta \leq x_2 t_2, \dots, \eta + \zeta \leq x_n t_n) =$$

Независимые случайные величины  $\eta$  и  $\zeta$  имеют нормальное распределение с параметрами  $a = 0$  и

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

Их сумма имеет стандартное нормальное распределение. Пусть

$$\eta + \zeta = X \sim N(0, 1).$$

Тогда

$$= P(X \leq x_1 t_1, X \leq x_2 t_2, \dots, X \leq x_n t_n) = P\left(X \leq \min_{i=1, n} x_i t_i\right) =$$

Запишем через плотность

$$= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где обозначено

$$z = \min_{i=1, n} x_i t_i.$$

## 2.17

*Задание.* Найдите характеристическую функцию случайной величины  $\xi(\tau)$ , где  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  — процесс из предыдущей задачи, а  $\tau$  — независимая от  $\xi$  случайная величина, которая принимает значения  $+1$  и  $-1$  с вероятностями  $1/2$ .

*Решение.*

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}.$$

Задана случайная величина

$$\tau = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Интересует

$$\varphi_{\xi(\tau)}(\lambda) = M e^{i\xi(\tau)\lambda} = M e^{i \cdot \frac{\eta + \zeta}{\tau} \cdot \lambda} =$$

Как и в предыдущей задаче  $\eta + \zeta = X \sim N(0, 1)$ . Получаем

$$= M e^{i \cdot \frac{X}{\tau} \cdot \lambda} = M e^{-\frac{\lambda^2}{2\tau^2}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

## 2.18

*Задание.* Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — случайные величины, причём  $\eta$  имеет симметричное относительно нуля распределение и  $P(\eta = 0) = 0$ . Найдите вероятность того, что реализации случайного процесса  $\zeta(t) = \xi + t(\eta + t)$ ,  $t \geq 0$  возрастают.

*Решение.* Известно, что траектории процесса возрастают по  $t$  при  $t \geq 0$ .

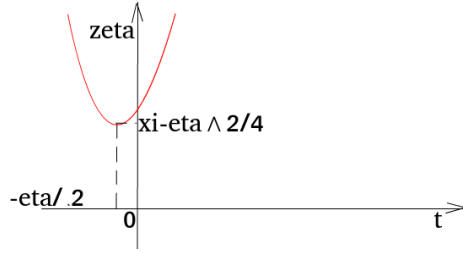


Рис. 20: Траектория процесса

Реализация такого процесса выглядит как парабола (рис. 20) с вершиной в точке с координатами

$$t_0 = -\frac{\eta}{2}, \zeta_0 = t_0^2 + \eta t_0 + \xi = \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^2}{2} + \xi = \xi - \frac{\eta^2}{4}$$

Это случайная величина, так что

$$\begin{aligned} P\{\zeta(t) \geq 0, t \geq 0\} &= P\{\xi + t(\eta + t) \geq 0, t \geq 0\} = \\ &= P(\text{вершина параболы } \zeta = t^2 + \eta t + \xi \text{ лежит слева от нуля}) = \\ &= P\left(-\frac{\eta}{2} \leq 0\right) = P(\eta \geq 0) = \end{aligned}$$

Случайная величина  $\eta$  имеет симметричное распределение

$$= \frac{1}{2}.$$

## 2.19

*Задание.* Случайный эксперимент состоит в двухразовом подбрасывании монеты. Обозначим через  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  результат эксперимента и обозначим процессы  $\{X(t), 0 \leq t < 2\}$  и  $\{Y(t), 0 \leq t < 2\}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathbb{1}_{[0,1)}(t) \cdot \mathbb{1}\{\omega_1 = P\} + \mathbb{1}_{[1,2)}(t) \cdot \mathbb{1}\{\omega_2 = P\}, 0 \leq t < 2, \\ Y(t) &= 1 - X(t), 0 \leq t < 2. \end{aligned}$$

Докажите, что процессы  $X(t)$  и  $Y(t)$  имеют одинаковые конечномерные распределения, но не являются стохастически эквивалентными.

*Решение.* Рассматривается 2 процесса. Процессы заданы на  $t \in [0, 2)$ .

Это разные функции. Вероятность

$$P\{X(t) \neq Y(t)\} = P\{X(t) \neq 1 - X(t)\} = 1,$$

а это значит, что процессы с вероятностью 1 не совпадают. Зафиксируем несколько точек  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Обозначим через  $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik}$  моменты  $t$ , которые лежат между 0 и 1, и  $t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{j(n-k)}$  — все остальные. Найдём



вероятность

$$\begin{aligned}
& P\{X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n\} = \\
& = P\{X(t_{i1}) = x_{i1}, \dots, X(t_{ik}) = x_{ik}, X(t_{j1}) = x_{j1}, \dots, \\
& \quad X(t_{j(n-k)}) = x_{j(n-k)}\} = \\
& = P(\mathbb{1}\{\omega_1 = P\} = x_{i1}, \dots, \mathbb{1}\{\omega_1 = P\} = x_{ik}, \\
& \quad \mathbb{1}\{\omega_2 = P\} = x_{j1}, \dots, \mathbb{1}\{\omega_2 = P\} = x_{j(n-k)}) .
\end{aligned}$$

Рассматриваем только случай, когда  $x_{i1}, \dots, x_{ik}$  одинаковые, и

$$x_{j1}, \dots, x_{j(n-k)}$$

одинаковые.

$$P\{X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично

$$P\{Y(t_1) = x_1, \dots, Y(t_n) = x_n\} = \frac{1}{4}.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения.



# Занятие 3. Процесс Пуассона

## Контрольные вопросы и задания

Приведите определение процесса Пуассона.

$\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона, если

1.  $N(0) = 0$ ;
2. при  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  события

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

— независимые;

3. число событий на интервале зависит только от длины интервала, то есть есть однородность приращений

$$N(t+s) - N(t) \stackrel{d}{=} N(s) \sim \text{Pois}(\lambda s).$$

Запишите конечномерные распределения процесса Пуассона.

Одномерные распределения

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Двумерные распределения:  $t_1 < t_2$ . Перейдём к приращениям

$$P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2\} = P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} =$$

Случайная величина  $N(t_1) \sim \text{Pois}(\lambda t_1)$ , а  $N(t_2) - N(t_1) \sim \text{Pois}(\lambda(t_2 - t_1))$ . Совместная вероятность — это произведение вероятностей

$$= e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdot \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!}.$$



Рис. 21: График пуассоновского процесса

**Какой вид имеют траектории процесса Пуассона?**

Траектория изображена на рисунке 21.

**Какое содержание имеет параметр процесса Пуассона?**

$N(t)$  — число событий, произошедших до момента времени  $t$ .

## Аудиторные задачи

### 3.2

*Задание.* Пусть  $\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda = 2$ .

Вычислите вероятности:

- a)  $P(N(6) = 3)$ ;
- b)  $P(N(6) = 3, N(9) = 7, N(15) = 10)$ ;
- c)  $P(N(6) = 3 \mid N(9) = 7)$ ;
- d)  $P(N(9) = 7 \mid N(6) = 3)$ .

*Решение.*

- a)  $N(6) \sim \text{Pois}(6 \cdot 2)$ , поэтому

$$P(N(6) = 3) = \frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12};$$

- b) нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{aligned} & P(N(6) = 3, N(9) = 7, N(15) = 10) = \\ &= P\{N(6) = 3, N(9) - N(6) = 4, N(15) - N(9) = 3\} = \\ &= \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}\right) \cdot \left(\frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}\right) \cdot \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}\right); \end{aligned}$$

с) по определению условной вероятности

$$\begin{aligned} P(N(6) = 3 \mid N(9) = 7) &= \frac{P(N(6) = 3, N(9) = 7)}{P(N(9) = 7)} = \\ &= \frac{\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12} \cdot \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}}{\frac{18^7}{7!} \cdot e^{-18}} = \frac{12^3 \cdot 6^4 \cdot 7!}{3! \cdot 4! \cdot 18^7}; \end{aligned}$$

д) аналогично предыдущему пункту

$$\begin{aligned} P(N(9) = 7 \mid N(6) = 3) &= \frac{P(N(9) = 7, N(6) = 3)}{P(N(6) = 3)} = \\ &= \frac{\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12} \cdot \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}}{\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}} = \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6} = \frac{P(N(6) = 3) P(N(3) = 4)}{P(N(6) = 3)}. \end{aligned}$$

### 3.3

*Задание.* Пусть  $\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Вычислите условное математическое ожидание  $M[N(s) \mid N(t)]$  для

$$0 \leq s \leq t.$$

*Решение.* Что ж такое условное математическое ожидание?  $N(s)$  и  $N(t)$  — дискретные величины, то есть

$$M[N(s) \mid N(t)] = \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot P\{N(s) = l \mid N(t) = k\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\{N(s) = l \mid N(t) = k\} = \frac{P\{N(t) - N(s) = k - l\} P\{N(s) = l\}}{P\{N(t) = k\}} =$$

подставляем пуассоновские вероятности

$$= \frac{\frac{[\lambda(t-s)]^{k-l}}{(k-l)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}} \cdot \frac{(\lambda s)^l}{l!} \cdot e^{-\lambda s} = \frac{k! (t-s)^{k-l} s^l}{(k-l)! l! t^k} = C_k^l \cdot \left(\frac{t-s}{t}\right)^{k-l} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^l.$$

Имеем биномиальное распределение с параметрами  $k$  и  $\frac{s}{t}$ .

Вывод: при условии  $N(t) = k$  мы нашли распределение

$$N(s) \sim B\left(k, \frac{s}{t}\right).$$

Условное математическое ожидание

$$M[N(s) \mid N(t) = k] = \frac{ks}{t}.$$

Ответ:  $\frac{N(t) \cdot s}{t}$ . Куда пропала сумма?

$$M[N(s) | N(t) = k] = \sum_l l \cdot P[N(s) = l | N(t) = k] =$$

Нашли эту вероятность

$$= \sum_l l \cdot P\left\{Bin\left(k, \frac{s}{t}\right) = l\right\} = MBin\left(k, \frac{s}{t}\right) = k \cdot \frac{s}{t}.$$

Условное математическое ожидание — это математическое ожидание по условному распределению.

### 3.4

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Найдите вероятность того, что первый прыжок процесса  $N$  произошёл до момента времени  $s \in [0, t]$  при условии, что на отрезке  $[0, t]$  произошло ровно  $n$  прыжков.

*Решение.* Нужно найти вероятность  $P(\text{первый прыжок произошёл до момента } s \in [0, t] | N(t) = n)$ . Нужно это условие переписать через пуассоновский процесс. Получаем  $P(\text{первый прыжок произошёл до момента } s \in [0, t] | N(t) = n) = P\{N(s) \geq 1 | N(t) = n\}$ . Значения зависимые

$$P\{N(s) \geq 1 | N(t) = n\} = 1 - P\{N(s) = 0 | N(t) = n\} =$$

Условное распределение биномиальное

$$= 1 - P\left\{Bin\left(n, \frac{s}{t}\right) = 0\right\} = 1 - C_n^0 \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-0} = 1 - \left(1 - \frac{s}{t}\right)^n.$$

### 3.5

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  является процессом Пуассона с параметром  $\lambda$ . Докажите, что при условии, что  $N$  имеет ровно 1 прыжок на отрезке  $[a, b]$ , момент этого прыжка является равномерно распределённой на отрезке  $[a, b]$  случайной величиной.

*Решение.* Обозначим  $\tau$  — момент прыжка на отрезке  $[a, b]$ . Нужно найти  $P\{\tau \leq t | N(b) - N(a) = 1\} = P\{N(t) - N(a) = 1 | N(b) - N(a) = 1\}$ .

Изобразим процесс на графике 22.

У пуассоновского процесса есть однородность приращений

$$P\{N(t) - N(a) = 1 | N(b) - N(a) = 1\} = P\{N(t - a) = 1 | N(b - a) = 1\} = \\ = P\left\{Bin\left(1, \frac{t - a}{b - a}\right) = 1\right\} =$$

Это бернуллиевская величина

$$= \frac{t - a}{b - a}.$$

Получилось равномерное распределение, что и требовалось доказать.

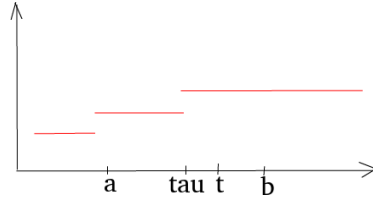


Рис. 22: График пуассоновского процесса

### 3.6

*Задание.* Пусть  $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$  — последовательность независимых показатель-но распределённых случайных величин с параметром  $\lambda$ . Положим

$$T_0 = 0, T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k, n \geq 1; \nu(t) = \max(n : T_n \leq t), t \geq 0.$$

а) Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$$

почти наверное.

б) Докажите, что случайная величина  $\tau_1 = T_{\nu(t)+1} - t$  имеет показатель-ное распределение с параметром  $\lambda$ .

с) Докажите, что  $\{\nu(t), t \geq 0\}$  является процессом Пуассона с интенсив-ностью  $\lambda$ .

*Решение.*  $\nu(t) = \max(n : T_n \leq t)$  — случайный процесс.

Посмотрим, как этот процесс выглядит (рис. 23).

$T_n$  — это накопительные суммы.

В момент  $T_1$  только  $T_1 \leq t$ , то есть от  $T_1$  до  $T_2$  значение процесса будет равно единице.

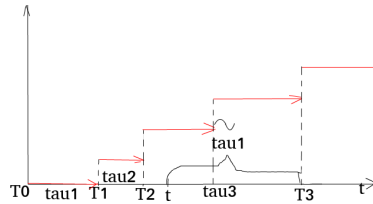


Рис. 23: График процесса

Тут расставили стрелочки, то есть  $\nu$  — это непрерывная справа функция. То есть  $\nu$  — это модификация пуассоновского процесса. Конечномерные распределения несут ещё не всю информацию.

а) Нужно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$$

почти наверное.

Это равенство — это просто закон больших чисел, потому что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k = T_n \rightarrow M\tau_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Сумма  $T_n$  сходится к бесконечности. Это нужно для того, чтобы определить процесс на всей оси. То есть вывод из пункта а) следующий

$$T_n = n \cdot \frac{T_n}{n} \rightarrow \infty \cdot \frac{1}{\lambda} = \infty$$

и  $\nu(t)$  определено при всех  $t$ .

б)  $\tilde{\tau}_1$  — это величина до следующего прыжка.

Этот пункт означает, что процесс  $\nu$  имеет однородные приращения.

Докажем, что  $\tilde{\tau}_1$  имеет действительно показательное распределение. Проще всего для показательного распределения посчитать

$$P(\tilde{\tau}_1) = 1 - F = 1 - (1 - e^{-\lambda s}) = e^{-\lambda s},$$

где  $F$  — функция распределения. Вопрос: есть ли такое равенство.

Значит,  $P(\tilde{\tau}_1 > s) = P(T_{\nu(t)+1} > t + s)$ . Величина  $T$  берётся в случайный момент. Такая вероятность может быть записана через сумму по всем возможным  $T$ , то есть

$$P(T_{\nu(t)+1} > t + s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \leq t < T_{n+1}, T_{n+1} > t + s) =$$

Одно условие убирается

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(T_n \leq t, T_{n+1} \leq t + s) =$$

Момент  $T_{n+1}$  — это момент следующего скачка после  $T_n$ . Тогда

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \leq t, T_n + \tau_{n+1} > t + s) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t, \tau_{n+1} \geq (t - T_n) + s\} = \end{aligned}$$



Моменты  $\tau_{n+1}$  и  $T_n$  — независимые величины.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} MP[T_n \leq t, \tau_{n+1} > (t - T_n) + s | T_n] =$$

Вспомним, какая вероятность  $P(\tau > x) = e^{-\lambda x}$ . Тогда

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

Для показательных величин выполнено соотношение

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda y} P(\tau > x)$$

— свойство отсутствия последствия.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda s} P(T_n \leq t, \tau_{n+1} > t - T_n) = e^{-\lambda s} \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \leq t < T_{n+1}) =$$

Такая сумма равна единице, потому что  $t$  всегда попадает между  $T_n$  и  $T_{n+1}$  при каком-то  $n$ , потому

$$= e^{-\lambda s},$$

так что такая величина  $\tilde{\tau}_1$  действительно имеет показательное распределение.

с) Найдём конечномерные распределения  $\nu(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} & P\{\nu(t_1) = k_1, \nu(t_2) = k_2, \dots, \nu(t_n) = k_n\} = \\ & = P\left(\sum_{l=1}^{k_1} \tau_l \leq t_1 < \sum_{l=1}^{k_1+1} \tau_l, \dots, \sum_{l=1}^{k_n} \tau_l \leq t_n < \sum_{l=1}^{k_n+1} \tau_l\right) = \\ & = \int \dots \int_{k_n+1} \lambda^{k_n+1} e^{-\lambda(x_{k_1} + \dots + x_{k_n} + 1)} dx_{k_n+1} \dots dx_1 = \\ & = \lambda^{k_n+1} \cdot \int \dots \int_{k_n, 0 < x_{k_1} + \dots + x_{k_n} \leq t, t = \sum t_i} e^{-\lambda(x_{k_1} + \dots + x_{k_n})} \times \\ & \quad \times \int_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{k_n} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} \dots dx_1 = \end{aligned}$$

Возьмём последний интеграл

$$\int_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{k_n} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x_{k_n+1}} \Big|_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{+\infty}.$$

Подставляем и получаем

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lambda^{k_n+1}}{\lambda} \int \dots \int_{k_n, 0 < x_{k_1} + \dots + x_{k_n} \leq t} e^{-\lambda \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i} e^{-\lambda t + \lambda \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i} dx_{k_n} \dots dx_{k_1} = \\
 &= \lambda^{k_n} e^{-\lambda t} \int \dots \int_{0 < \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i \leq 1} dx_{k_n} \dots dx_{k_1} =
 \end{aligned}$$

Чтобы понять, чему будет равен этот интеграл, рассмотрим частные случаи:

(а) когда есть двойной интеграл

$$\begin{aligned}
 \iint_{0 < x_1 + x_2 \leq t} dx_2 dx_1 &= \int_0^t \int_0^{t-x_1} dx_2 dx_1 = \int_0^t x_2 \Big|_0^{t-x_1} dx_1 = \\
 &= \int_0^t (t - x_1) dx_1 = t \int_0^t dx_1 - \int_0^t x_1 dx_1 = t^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} = \\
 &= \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2!};
 \end{aligned}$$

(b) когда есть тройной интеграл

$$\begin{aligned}
\iiint_{0 < x_1 + x_2 + x_3 \leq t} dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^t \int_0^{t-x_1} \int_0^{t-x_1-x_2} dx_3 dx_2 dx_1 = \\
&= \int_0^t \int_0^{t-x_1} (t-x_1-x_2) dx_2 dx_1 = \\
&= \int_0^t \left( t \int_0^{t-x_1} dx_2 - x_1 \int_0^{t-x_1} dx_2 - \int_0^{t-x_1} x_2 dx_2 \right) dx_1 = \\
&= \int_0^t \left[ t(t-x_1) - x_1(t-x_1) - \frac{(t-x_1)^2}{2} \right] dx_1 = \\
&= \int_0^t \frac{2t^2 - 2tx_1 - 2tx_1 + 2x_1^2 - t^2 + 2tx_1 - x_1^2}{2} dx_1 \times \\
&\times \int_0^t \frac{t^2 - 2x_1t + x_1^2}{2} dx_1 = \int_0^t \frac{(t-x_1)^2}{2} dx_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(t-x_1)^3}{3} \Big|_0^t = \\
&= \frac{t^3}{2 \cdot 3} = \frac{t^3}{3!}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\int \cdots \int_{0 < \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i \leq 1} dx_{k_n} \dots dx_{k_1} = \frac{t^{k_n}}{k_n!}.$$

Тогда вероятность равна

$$= \frac{\lambda^{k_n} e^{-\lambda t} t^{k_n}}{k_n!} = \frac{(\lambda t)^{k_n}}{k_n!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Получился процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ .

### 3.7

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с параметром  $\lambda$  и пусть  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  — независимая от  $N$  последовательность независимых бернуллиевских случайных величин с параметром  $p \in (0, 1)$ . Положим

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

Докажите, что процесс  $\xi = \{S_{N(t)}, t \geq 0\}$  является процессом Пуассона с параметром  $\lambda t$ .

Решение. Пуассоновский процесс

$$N(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} 1$$

— число событий до момента  $N(t)$ . В  $\xi$  складываем не 1, а  $Y_i = 0$  или 1.

Начнём с того, что посчитаем одномерные распределения и посмотрим, что это тоже пуассоновские величины. Есть сумма случайного числа слагаемых. Нужно перебирать все возможные значения  $N(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} P\{S_{N(t)} = k\} &= P\{Y_1 + \dots + Y_{N(t)} = k\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n, Y_1 + \dots + Y_n = k\} = \end{aligned}$$

Сумма  $Y_1 + \dots + Y_n$  — биномиальная величина

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

Преобразуем

$$= e^{-\lambda t} p^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot C_n^k (1-p)^{n-k} =$$

Распишем  $C_n^k$  явно

$$= e^{-\lambda t} p^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda t} p^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

Имеем ряд для экспоненты. Заменим  $n-k$  на новый индекс суммирования

$$= \frac{e^{-\lambda t} p^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+k} (1-p)^n}{n!} =$$

Выносим  $(\lambda t)^k$  за знак суммы

$$= \frac{e^{-\lambda t} p^k (\lambda t)^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n (1-p)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda t} (p\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{\lambda t(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^k}{k!}$$

— пуассоновская вероятность.

Вывод:  $S_{N(t)} \sim Pois(\lambda p t)$ , то есть у такого процесса одномерные распределения такие же, как у пуассоновского с параметром  $\lambda p t$ .

## Домашнее задание

### 3.11

Задание. Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda = 5$ . Вычислите вероятности:

- a)  $P(N(2) \geq 3, N(5) \leq 4)$ ;
- b)  $P(N(2) \geq 3, N(3) \geq 4, N(5) \leq 3)$ ;
- c)  $P(N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) \leq 6)$ ;
- d)  $P(N(2) = 3 \mid N(3) = 5)$ ;
- e)  $P(N(3) = 5 \mid N(2) = 3)$ .

*Решение.*

- a) Рассмотрим все возможные случаи

$$\begin{aligned} P(N(2) \geq 3, N(5) \leq 4) &= \\ &= P\{N(2) = 3, N(5) = 3\} + P\{N(2) = 3, N(5) = 4\} + \\ &\quad + P\{N(2) = 4, N(5) = 4\} = \end{aligned}$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{aligned} &= P\{N(2) = 2, N(5) - N(2) = 3 - 3\} + \\ &\quad + P\{N(2) = 3, N(5) - N(2) = 4 - 3\} + \\ &\quad + P\{N(2) = 4, N(5) - N(2) = 4 - 4\} = \\ &= P\{N(2) = 3\} P\{N(3) = 0\} + P\{N(2) = 3\} P\{N(3) = 1\} + \\ &\quad + P\{N(2) = 4\} P\{N(3) = 0\} = \\ &= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^0}{0!} \cdot e^{-15} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^1}{1!} \cdot e^{-15} + \\ &\quad + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^0}{0!} \cdot e^{-15} = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} \cdot 15 + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-25} = \\ &= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} \cdot 16 + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-25}; \end{aligned}$$

- b) с ростом времени значение процесса Пуассона не должно уменьшаться  
 $P(N(2) \geq 3, N(3) \geq 4, N(5) \leq 3) = 0$ ;

- c) как в первом пункте рассмотрим все возможные случаи

$$\begin{aligned} P(N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) \leq 6) &= \\ &= P\{N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) = 5\} + \\ &\quad + P\{N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) = 6\} = \end{aligned}$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{aligned}
 &= P\{N(2) = 3, N(3) - N(2) = 5 - 3, N(4) - N(3) = 5 - 5\} + \\
 &+ P\{N(2) = 3, N(3) - N(2) = 5 - 3, N(4) - N(3) = 6 - 5\} = \\
 &= P\{N(2) = 3\} \cdot P\{N(1) = 2\} \cdot P\{N(1) = 0\} + \\
 &+ P\{N(2) = 3\} \cdot P\{N(1) = 2\} \cdot P\{N(1) = 1\} = \\
 &= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} = \\
 &= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^3}{2!} = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot 6 = 10^{-20} \cdot 12500;
 \end{aligned}$$

d) по определению условной вероятности

$$P(N(2) = 3 \mid N(3) = 5) = \frac{P\{N(2) = 3, N(3) = 5\}}{P\{N(3) = 5\}} =$$

Перейдём к приращениям и подставим выражения для вероятностей

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}}{\frac{15^5}{5!} \cdot e^{-15}} =
 \end{aligned}$$

Экспоненты сокращаются

$$= \frac{10^3 \cdot 5^2 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 15^5} = \frac{80}{243};$$

e) аналогично предыдущему пункту

$$P(N(3) = 5 \mid N(2) = 3) = \frac{P\{N(3) = 5, N(2) = 3\}}{P\{N(2) = 3\}} =$$

Перейдём к приращениям

$$= \frac{P\{N(2) = 3\} P\{N(1) = 2\}}{P\{N(2) = 3\}} = P\{N(1) = 2\} = \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}.$$

### 3.12

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda = 1$ . Найдите характеристическую функцию случайной величины

$$N(3) - N(2) + N(1).$$

*Решение.*  $N(t) \sim Pois(t)$ . Процесс Пуассона имеет однородность приращений  $N(3) - N(2) \sim N(3 - 2) = N(1) \sim Pois(1)$ , а  $N(1) \sim Pois(1)$ .

Приращения  $N(3) - N(2)$  и  $N(1)$  — независимы, следовательно,

$$N(3) - N(2) + N(1) \sim Pois(1 + 1) = Pois(2).$$

Тогда характеристическая функция  $\varphi_{N(3)-N(2)+N(1)}(t) = e^{2(e^{it}-1)}$ .

### 3.13

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Найдите условную вероятность  $P(N(s) = k | N(t) = n)$  при  $s > t$  и вычислите условное математическое ожидание  $M[N(s) | N(t)]$  для  $s > t$ .

*Решение.*  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ .

Что такое условное математическое ожидание?

$N(s)$  и  $N(t)$  — дискретные величины, то есть

$$M[N(s) | N(t) = n] = \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot P\{N(s) = k | N(t) = n\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\{N(s) = k | N(t) = n\} = \frac{P\{N(s) = k, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Перепишем через приращения и воспользуемся их независимостью

$$= \frac{P\{N(t) = n\} P\{N(s-t) = k-n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Сократим одинаковые множители в числителе и знаменателе

$$= P\{N(s-t) = k-n\} =$$

Подставим пуассоновские вероятности

$$= \frac{[\lambda(s-t)]^{k-n}}{(k-n)!} \cdot e^{-\lambda(s-t)}.$$

Имеем пуассоновское распределение с параметром  $\lambda(s-t)$ .

Вывод: при условии  $N(t) = n$  мы нашли распределение

$$N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(s-t)).$$

Условное математическое ожидание

$$M[N(s) | N(t) = n] = M\text{Pois}(\lambda(s-t)) + n = \lambda(s-t) + n.$$

Тогда

$$M[N(s) | N(t)] = \lambda(s-t) + N(t).$$

### 3.14

*Задание.* Пусть  $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ ,  $\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$  являются независимыми процессами Пуассона с параметрами  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно. Положим  $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$ . Докажите, что процесс  $\zeta = \{\zeta(t), t \geq 0\}$  является процессом Пуассона с параметром  $\lambda + \mu$ .

*Решение.*

$$\varphi_{\zeta}(t) = \varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \varphi_{\eta}(t) = e^{\lambda t(e^{it}-1)} e^{\mu t(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)t(e^{it}-1)}.$$

Это доказывает только то, что  $\zeta \sim Pois((\lambda + \mu)t)$  для каждого  $t \geq 0$ , чего недостаточно.

$\{\zeta(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона, так как

$$1. \zeta(t) = \xi(t) + \eta(t) = 0;$$

2. при  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  события

$$\begin{aligned} \zeta(t_1) = \xi(t_1) + \eta(t_1), \zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \xi(t_2) + \eta(t_2) - \xi(t_1) - \eta(t_1), \dots, \\ \zeta(t_n) - \zeta(t_{n-1}) = \xi(t_n) + \eta(t_n) - \xi(t_{n-1}) - \eta(t_{n-1}) \end{aligned}$$

— независимы;

3. число событий на интервале зависит только от длины интервала, то есть есть однородность приращений

$$\begin{aligned} \zeta(t+s) - \zeta(t) = \xi(t+s) + \eta(t+s) - \xi(t) - \eta(t) \stackrel{d}{=} \xi(s) + \eta(s) = \\ = \zeta(s) \sim Pois((\lambda + \mu)t). \end{aligned}$$

### 3.15

*Задание.* Пусть  $\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Выясните, какой из следующих процессов является пуассоновским:

$$\begin{aligned} \{N_1(t) = 2N(t), t \geq 0\}; \{N_2(t) = N(2t), t \geq 0\}; \{N_3(t) = N(t^2), t \geq 0\}; \\ \{N_4(t) = N(t+s) - N(s), t \geq 0\}, \end{aligned}$$

где  $s > 0$  — фиксированное число. Для пуассоновских процессов укажите их интенсивность.

*Решение.*

$$P\{N_1(t) = k\} = P\{2N(t) = k\} = P\left\{N(t) = \frac{k}{2}\right\} = 0,$$

так как пуассоновский процесс принимает только неотрицательные целые значения. Следовательно,  $\{N_1(t), t \geq 0\}$  — не процесс Пуассона.

$$P\{N_2(t) = k\} = P\{N(2t) = k\} = \frac{(\lambda \cdot 2t)^k}{k!} \cdot e^{-2\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью  $2\lambda$ . Независимость и однородность приращений выполняются.

Перейдём к третьему процессу

$$P\{N_3(t) = k\} = P\{N(t^2) = k\} = \frac{(\lambda t^2)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t^2} \sim Pois(\lambda t^2) \not\sim Pois(\mu t),$$



значит, процесс не пуассоновский.

$$P\{N_4(t) = k\} = P\{N(t+s) - N(s) = k\} = P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ .

### 3.16

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$  и пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые от процесса  $N$  независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием  $m$ . Пусть

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i.$$

Докажите, что  $M[X(t)] = m\lambda t$ .

*Решение.*  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ .

Вычислим математическое ожидание

$$MX(t) = M\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i\right) = M\sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathbb{1}\{N(t) = i\} \sum_{j=1}^i \xi_j\right) =$$

Математическое ожидание индикатора — вероятность

$$= m \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P\{N(t) = i\} = mMN(t) = m\lambda t.$$

### 3.17

*Задание.* Пусть  $\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Используя пункт а) задачи 3.6 докажите, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda \text{ a.s.}$$

*Решение.* Надо проверить, что для пуассоновского процесса

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda \text{ a.s.}$$

В задаче 3.6 доказали, что

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$$

с помощью закона больших чисел.

$N(T_n) = n$  — значение  $T_n$ -го скачка (рис. 24).

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{T_n}{N(T_n)} \rightarrow \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда

$$\frac{N(T_n)}{T_n} \rightarrow \lambda.$$

Из такой сходимости следует сходимость по всем моментам времени. Нужно вывести, что

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \lambda.$$



Рис. 24: График пуассоновского процесса

### 3.18

*Задание.* Прибытие посетителей в магазин является процессом Пуассона с интенсивностью  $\lambda = 20$  посетителей в час. Вычислите среднее количество продаж на протяжении одного восьмичасового рабочего дня, если вероятность того, что посетитель магазина сделает покупку равна 0.3.

*Решение.*  $N(t)$  — количество покупок за время  $[0, t]$ . Обозначим количество покупок как

$$n(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} y_k,$$

где  $y_k = 1\{k\text{-й посетитель магазина сделает покупку}\}$ .

При этом  $P\{y_k = 1\} = 0.3$ , а  $P\{y_k = 0\} = 1 - 0.3 = 0.7$ .

То есть  $y_k$  имеет распределение Бернулли.

Из задачи 3.7 получаем, что  $n(t) \sim Pois(0.3\lambda)$ .

Среднее количество покупок за 8 часов  $Mn(8) = 8 \cdot 0.3\lambda = 8 \cdot 0.3 \cdot 20 = 48$ .

### 3.19

*Задание.* Большой супермаркет имеет три входа. Прибытие посетителей через каждые двери образуют процессы Пуассона с интенсивностями

$\lambda_1 = 110$ ,  $\lambda_2 = 90$ ,  $\lambda_3 = 160$  посетителей в час. 30% посетителей составляют мужчины. Вероятность того, что посетитель-мужчина сделает покупку, равна 0.8, а вероятность того, что женщина-посетитель сделает покупку, равна 0.1. Средняя цена покупки составляет 100 грн.

- a) Вычислите среднюю выручку супермаркета за 10-часовой рабочий день.
- b) Вычислите вероятность того, что третья женщина-посетитель, которая сделает покупку, прибудет в магазин в первые 15 минут. Вычислите среднее время её прибытия в магазин.

*Решение.*

- a)  $t = 10$ .

Найдём общую интенсивность  $\lambda = 110 + 90 + 160 = 360$  посетителей в час.

Найдём  $\lambda_m = 360 \cdot 0.3 = 108$  посетителей-мужчин в час и

$$\lambda_w = 360 \cdot 0.7 = 252$$

посетителей-женщин в час.

Пусть  $n(t)$  — число покупок в день. Тогда

$$Mn(t=10) = M[n_m(10) + n_w(10)] = 10 \cdot 108 \cdot 0.8 + 10 \cdot 252 \cdot 0.1 = 1116.$$

Следовательно, средняя выручка равна

$$100Mn(t=10) = 100 \cdot 1116 = 111600.$$

- b) Пусть  $\lambda'_w$  — интенсивность покупок, сделанных женщинами.

$$\lambda'_w = \lambda_w \cdot 0.1 = 25.2 \text{ покупки в час.}$$

Пусть  $N(t) \sim Pois(\lambda'_w t)$  — количество женщин-посетителей, прибывших в магазин до момента времени  $t$ .

Тогда

$$\begin{aligned} P\{N(15minutes) = 3\} &= P\left\{N\left(\frac{1}{4}\right) = 3\right\} = e^{-25.2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4} \cdot 25.2\right)^3}{3!} = \\ &= e^{-6.3} \cdot \frac{250}{6} = 0.0019 \cdot 41.6 = 0.08. \end{aligned}$$

Тогда среднее время её прибытия в магазин

$$M\tau = \frac{3}{\lambda'_w} = \frac{3}{25.2} = 0.12$$

часа.



# Занятие 4. Гауссовские процессы

## Контрольные вопросы и задания

Приведите определение гауссовского процесса.

Процесс  $\{X(t), t \in T\}$  — гауссовский, если

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k X(t_k)$$

— гауссовская случайная величина  $\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$  и  $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ .

Эквивалентно:  $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$  — гауссовский вектор.

Запишите плотность конечномерных распределений гауссовского процесса.

$$p = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det A}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[A^{-1}(\vec{x}-\vec{a}), \vec{x}-\vec{a}]},$$

если  $\det A > 0$ . Квадратные скобки в степени экспоненты — это скалярное произведение, или квадратичная форма матрицы, обратной к ковариации.

Приведите определение и сформулируйте основные свойства ковариационной функции.

$$K(t, s) = \text{cov}[X(t), X(s)].$$

Гауссовский процесс существует, из теоремы Колмогорова, с функциями  $m$  и  $K$  тогда и только тогда, когда функция  $K(s, t) = K(t, s)$  — симметричная, и  $K$  — неотрицательно определённая, то есть

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j K(t_k, t_j) \geq 0.$$

Тут неравенство возможно для любых  $c_1, \dots, c_n, t_1, \dots, t_n$ .

## Аудиторные задачи

### 4.2

*Задание.* Выясните, существует ли случайный процесс с ковариационной функцией

a)  $K(t, s) = \min(t, s);$

b)  $K(t, s) = (1 - |t - s|) \cdot \mathbb{1}\{|t - s| < 1\}; t, s \in \mathbb{R}.$

*Решение.*

a)  $K(t, s) = \min(t, s).$

Такой процесс есть. Какой? Винеровский;

b)  $K(t, s) = (1 - |t - s|) \cdot \mathbb{1}\{|t - s| < 1\}; t, s \in \mathbb{R}.$

Если такой процесс есть, то мы его не встречали раньше. Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определена?

Функция зависит только от разности. Сейчас  $K(t, s) = \varphi(t - s)$ , где

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Так что

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^n c_k c_j \varphi(t_k - t_j) \geq 0$$

— это условие неотрицательной определённости для характеристической функции. Будет ли эта функция  $\varphi$  характеристической? То есть вопрос в задаче равносильен следующему: будет ли

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

характеристической функцией? Эта функция изображена на рисунке [25](#).



Рис. 25: График функции  $\varphi(t)$

Она непрерывная, симметричная, в нуле — единица. Если бы это была характеристическая функция

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$$

— преобразование Фурье плотности  $p(x)$ . Плотность можно найти через обратное преобразование Фурье

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-itx} (1 - |t|) dt =$$

Раскроем модуль

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-1}^1 e^{-itx} dt + \int_{-1}^0 e^{-itx} t dt - \int_0^1 e^{-itx} t dt \right) =$$

Берём первый интеграл

$$= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{e^{-itx}}{ix} \Big|_{-1}^1 - \int_0^1 e^{itx} t dt - \int_0^1 e^{-itx} t dt \right) =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{e^{-ix}}{ix} + \frac{e^{ix}}{ix} - \int_0^1 (e^{-itx} + e^{itx}) t dt \right] =$$

Из формулы Эйлера следует, что  $e^{-itx} + e^{itx} = 2 \cos(tx)$ . Тогда

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - 2 \int_0^1 \cos(tx) t dt \right] =$$

Интегрируем по частям, то есть

$$u = t, du = dt, dv = \cos(tx) dt, c = \int \cos(tx) dt = \frac{1}{x} \cdot \sin(xt).$$

Получаем

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - 2 \cdot \frac{t}{x} \cdot \sin(xt) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \sin(xt) dt \right] =$$

Подставляем пределы интегрирования и берём интеграл от синуса

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - \frac{2}{x} \cdot \sin x - \frac{2}{x^2} \cdot \cos(xt) \right]_0^1 =$$

Снова подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - \frac{2}{x} \cdot \sin x - \frac{2}{x^2} \cdot \cos x + \frac{2}{x^2} \right) =$$

Из формулы Эйлера следует, что  $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$ . Тогда

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2 \sin x}{x} - \frac{2 \sin x}{x} + \frac{2}{x^2} (-\cos x + 1) \right] = \frac{1}{\pi x^2} (1 - \cos x).$$

Нашли обратное преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$$

и  $p(x) \geq 0$ .

Должно выполняться условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \varphi(0) = 1.$$

Так что  $p$  — плотность,  $\varphi$  — это её преобразование Фурье, так что  $\varphi$  — характеристическая функция.

### 4.3

*Задание.* Пусть  $K(t, s)$ ,  $t, s \in T$  — ковариационная функция некоторого случайного процесса,  $Q(t)$  — полином с положительными коэффициентами. Докажите, что функция  $K_1(t, s) = Q(K(t, s))$  тоже является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

*Решение.*  $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \geq 0$ . Доказать, что если в этот многочлен подставить ковариационную функцию, то снова получится ковариационная функция.

Явно запишем, что такое

$$K_1(t, s) = a_0 + a_1 K(t, s) + a_2 K(t, s)^2 + \dots + a_n K(t, s)^n.$$

Симметричность есть, так как  $K(t, s)$  — симметрична.

Задачу можно разбить на две подзадачи:



1. если  $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$  — ковариационные функции, то и

$$\sum_{j=0}^n a_j R_j(t, s)$$

— ковариационная функция. Это утверждение проверить просто.

Доказательство. Берём двойную сумму

$$\sum_{k,i=1}^n c_k c_i \left( \sum_{j=0}^n a_j R_j(t_k, t_i) \right) =$$

Меняем суммы местами

$$= \sum_{j=0}^n a_j \left( \sum_{k,i=1}^n R_j(t_k, t_i) c_k c_i \right) \geq 0,$$

так как внутренняя сумма неотрицательна. Так что 1. проверили;

2. чтобы 1. применить, достаточно проверить, что степень ковариационной функции — это тоже ковариационная функция. Достаточно проверить, что если  $R_1, R_2$  — ковариационные функции, то и произведение  $R_1(t, s) R_2(t, s)$  — тоже ковариационная функция.

Условие неотрицательности сейчас записывается так

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j R_1(t_k, t_j) R_2(t_k, t_j) \geq 0?,$$

где  $R_1(t_k, t_j) = M[X(t_k) X(t_j)]$ ,  $R_2(t_k, t_j) = M[Y(t_k) Y(t_j)]$ .

Раз  $R_1$  — ковариационная и  $R_2$  — ковариационная, то существуют независимые процессы  $X(t)$  и  $Y(t)$ , такие, что

$$R_1(t, s) = M[X(t) X(s)], R_2(t, s) = M[Y(t) Y(s)].$$

Тогда если возьмём новый процесс

$$Z(t) = X(t) Y(t),$$

то  $M[Z(t) Z(s)] = M[X(t) Y(t) X(s) Y(s)]$ . Группируем первый множитель с третьим, второй — с четвёртым, пользуемся независимостью  $M[X(t) Y(t) X(s) Y(s)] = M[X(t) X(s)] \cdot M[Y(t) Y(s)]$ . По введённым обозначениям  $M[X(t) X(s)] \cdot M[Y(t) Y(s)] = R_1(t, s) R_2(t, s)$ .

#### 4.4

*Задание.* Пусть  $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  является простым случайным блужданием, что определяется следующим образом  $S_0 = 0$ ;  $S_{n+1} = S_n + \varepsilon_{n+1}$ , где  $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что

$$P(\varepsilon_i = 1) = P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Вычислите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса  $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ . Докажите, что

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), n \rightarrow \infty.$$

*Решение.* Процесс сейчас обозначается как  $\{S_n, n \geq 0\}$  и  $S_n$  определяется как  $S_0 = 0$ ,  $S_{n+1} = S_n + \varepsilon_{n+1}$ , то есть  $S_n$  — это накопительные суммы. Сейчас  $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$  — это независимые одинаково распределённые случайные величины с распределением Бернулли

$$P(\varepsilon_i = 1) = P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Это простое случайное блуждание (рис. 26).



Рис. 26: График случайного блуждания

$$S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Найдём математическое ожидание этого процесса

$$MS_n = M \sum_{i=1}^n \varepsilon_i =$$

Пользуемся независимостью

$$= \sum_{i=1}^n M\varepsilon_i = 0,$$

так как

$$M\varepsilon_i = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Теперь найдём ковариационную функцию, то есть нужно найти

$$\text{cov}(S_m, S_t) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \sum_{j=1}^t \varepsilon_j\right) =$$

Вынесем суммы за ковариацию

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i,j=1}^{n,t} M(\varepsilon_i \varepsilon_j) =$$

Такое математическое ожидание равно

$$M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Тут пар одинаковых чисел  $\min(n, t)$ , так что

$$= \min(n, t).$$

По центральной предельной теореме

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

потому что  $S_n$  — сумма независимых одинаково распределённых случайных величин.

#### 4.5

*Задание.* Рассмотрим двумерные случайные векторы

$$X^k = \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k \right), \quad k = 2, 4, 6, \dots,$$

где  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  является простым случайным блужданием.

а) Убедитесь, что характеристическая функция вектора  $X^k$  имеет вид

$$\varphi_{X^k}(\theta_1, \theta_2) = \left[ \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}}\right) \right]^{\frac{k}{2}} \left[ \cos\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right) \right]^{\frac{k}{2}}.$$

б) Воспользовавшись тем, что

$$\varepsilon^{-2} \ln(\cos(\varepsilon)) \rightarrow -\frac{1}{2}$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , найдите предел  $\varphi_{X^k}(\theta_1, \theta_2)$  при  $k \rightarrow \infty$  и укажите распределение случайного вектора  $X$ , к которому слабо сходятся  $X^k$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Решение.

- а) Сначала нужно найти характеристическую функцию такого вектора  $\varphi_{X^k}(\theta_1, \theta_2) = Me^{i(\theta_1 X_1^k + \theta_2 X_2^k)}$ . Подставим компоненты

$$Me^{i(\theta_1 X_1^k + \theta_2 X_2^k)} = Me^{i\left(\theta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}} + \theta_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k\right)}.$$

Можно вынести дробь с корнем от  $k$ , вместо  $S$  будем писать сумму  $Me^{i\left(\theta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}} + \theta_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k\right)} = Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\theta_1 \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i + \theta_2 \sum_{i=1}^k \varepsilon_i\right)}$ . Вторую сумму можно разложить на две

$$Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\theta_1 \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i + \theta_2 \sum_{i=1}^k \varepsilon_i\right)} = Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i (\theta_1 + \theta_2) + \theta_2 \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k \varepsilon_i\right)} =$$

Суммы и слагаемые в суммах независимы

$$= Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i (\theta_1 + \theta_2)} Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k \varepsilon_i \theta_2} =$$

Все слагаемые в суммах независимы. Первое и второе математическое ожидания - произведение  $k/2$  характеристических функций

$$= \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varphi_{\varepsilon_i} \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}} \right) \cdot \prod_{i=\frac{k}{2}+1}^k \varphi_{\varepsilon_i} \left( \frac{\theta_2}{\sqrt{k}} \right) =$$

Осталось понять, что такое  $\varphi_{\varepsilon_i}(\lambda) = Me^{i\lambda\varepsilon_i}$ . Случайная величина  $\varepsilon_i$  принимает значения  $-1$  и  $1$  с вероятностями  $0.5$ , потому

$$Me^{i\lambda\varepsilon_i} = \frac{1}{2} \cdot e^{i\lambda} + \frac{1}{2} \cdot e^{-i\lambda} = \cos \lambda.$$

Тогда

$$= \cos^{\frac{k}{2}} \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}} \right) \cos^{\frac{k}{2}} \left( \frac{\theta_2}{\sqrt{k}} \right).$$

- б) Найдём предел этой характеристической функции, когда  $k \rightarrow \infty$ .

Оказывается, что

$$\varepsilon^{-2} \ln(\cos \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\cos \varepsilon \rightarrow 1$  и  $\ln(\cos \varepsilon) \rightarrow 0$  — это неопределённость  $0$  на  $0$ . Она раскрывается с помощью правила Лопиталя

$$\frac{\ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2} \approx -\frac{1}{2 \cos \varepsilon} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{2},$$

где

$$\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$$

— замечательный предел.

$$\left( \cos \frac{x}{\sqrt{k}} \right)^k = e^{k \ln \cos \frac{x}{\sqrt{k}}} =$$

Заметим, что

$$\frac{x}{\sqrt{k}} = \varepsilon \rightarrow 0,$$

тогда

$$= e^{\frac{k \varepsilon^2 \ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2}} =$$

Здесь

$$\frac{\ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{x^2 \varepsilon^{-2} \ln(\cos \varepsilon)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теперь нужно эту сходимость использовать

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^{\frac{k}{2}} \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}} \right) \cos^{\frac{k}{2}} \left( \frac{\theta_2}{\sqrt{k}} \right) &= e^{-\frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{4}} e^{-\frac{\theta_2^2}{4}} = e^{-\frac{\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 - \theta_2^2 - \theta_2^2}{4}} = \\ &= e^{-\frac{\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2^2}{4}}. \end{aligned}$$

Вывод:

$$\varphi_{X^k}(\theta_1, \theta_2) \rightarrow e^{-\frac{1}{4}(\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2^2)} =$$

Это характеристическая функция нормального распределения. Оно характеризуется средним и ковариационной матрицей. Среднее тут 0, потому что  $i$  нет в пределе

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} (A\vec{\theta}, \vec{\theta}) \right\},$$

где

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

— ковариационная матрица.

Двумерный случай блуждания сходится к двумерному гауссовскому вектору (рис. 27)

$$X^k = \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k \right) = \frac{1}{\sqrt{k}} (S_{k \cdot \frac{1}{2}}, S_{k \cdot 1}).$$



Рис. 27: Двумерный случай блуждания

Если брать не 2 значения, а  $n$ , то это сходится к

$$N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} \right)$$

— винеровский процесс.

#### 4.6

*Задание.* Пусть  $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$  — гауссовский процесс с функцией математического ожидания  $m(t) = t$  и ковариационной функцией

$$K(t, s) = \begin{cases} 1 - |t - s|, & |t - s| < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{5} - \frac{|t-s|}{5}, & \frac{1}{2} \leq |t - s| < 3, \\ 0, & |t - s| \geq 3; \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

- Запишите плотность распределения вектора  $(\xi(1), \xi(3), \xi(4))$ .
- Найдите условное математическое ожидание  $M(\xi(1) | (\xi(3), \xi(4)))$ .

*Решение.*

- Нужно найти плотность трёхмерного вектора  $(\xi(1), \xi(3), \xi(4))$ . Процесс гауссовский, значит, такой вектор тоже гауссовский. Он характеризуется математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $cov(\xi(1), \xi(1)) = K(1, 1)$ . Будем считать по первой строчке. Разность равна нулю  $K(1, 1) = 1$ . Аналогично считаем

$$cov(\xi(1), \xi(3)) = K(1, 3) = \frac{1}{5}.$$

Тогда

$$(\xi(1), \xi(3), \xi(4)) \sim N \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \right),$$

где  $cov(\xi(1), \xi(4)) = K(1, 4) = 0$  и

$$cov(\xi(3), \xi(4)) = K(3, 4) = \frac{2}{5}.$$

Плотность по определению равна

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sqrt{\det A}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\vec{x} - \vec{m}), A^{-1}(\vec{x} - \vec{m})] \right\} =$$

Чтобы плотность написать, нужно найти определитель матрицы и обратную

$$\det A = 1 - \frac{4}{25} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{21}{25} - \frac{1}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{5}{4} \begin{bmatrix} \frac{21}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{25} \\ -\frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{25} & \frac{2}{5} & \frac{24}{25} \end{bmatrix}.$$

Тогда плотность равна

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 \cdot \frac{4}{5}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{5}{8} \left( \frac{21}{25} (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + \frac{24}{25} (x_3 - 4)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{5} (x_1 - 1)(x_2 - 3) + \frac{2}{25} (x_1 - 1)(x_3 - 4) + \frac{4}{5} (x_2 - 3)(x_3 - 4) \right) \right\}.$$

Здесь

$$\vec{x} - \vec{m} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 3 \\ x_3 - 4 \end{bmatrix}.$$

b) По определению

$$M(\xi(1) | (\xi(3), \xi(4))) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p(x_1, \xi(3), \xi(4)) dx_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \xi(3), \xi(4)) dx_1}.$$

По теореме о нормальной корреляции

$$M(\xi(1) | (\xi(3), \xi(4))) = \\ = M\xi(1) + cov_{\xi(1), (\xi(3), \xi(4))} \cdot cov_{(\xi(3), \xi(4)), (\xi(3), \xi(4))}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \xi(3) - M\xi(3) \\ \xi(4) - M\xi(4) \end{bmatrix} =$$

Здесь

$$\text{cov}_{\xi(1),(\xi(3),\xi(4))} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}, \text{cov}_{(\xi(3),\xi(4)),(\xi(3),\xi(4))}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &= 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 \\ \xi(4) - 4 \end{bmatrix} = \\ &= 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{25}{21} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 \\ \xi(4) - 4 \end{bmatrix} = \\ &= 1 + \begin{bmatrix} \frac{5}{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 - \frac{2}{5} \cdot \xi(4) + \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} \cdot \xi(3) + \frac{6}{5} + \xi(4) - 4 \end{bmatrix} = \frac{5}{21} \cdot \xi(3) - \frac{2}{21} \cdot \xi(4) - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

#### 4.7

*Задание.* Пусть

$$Y_n = \sum_{i=1}^n \xi_i V_i,$$

где  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  является последовательностью независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2},$$

а  $\{V_n\}_{n \geq 1}$  является независимой от последовательности  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  последовательностью независимых одинаково распределённых случайных величин со стандартным нормальным законом распределения.

- Найдите распределение случайной величины  $\xi_1 V_1$ .
- Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса  $\{Y_n, n \geq 1\}$ .
- Докажите, что процесс  $\{Y_n, n \geq 1\}$  имеет независимые приращения. Найдите распределение приращений.
- Докажите, что процесс  $\{Y_n, n \geq 1\}$  является гауссовским.
- Запишите совместную плотность распределения  $f_{Y_n, Y_{2n}}(x, y)$  случайных величин  $Y_n$  и  $Y_{2n}$ .

*Решение.*

- $\xi_1 V_1$  — это произведение нормальной величины на бернуллиевскую, они независимы.

Найдём характеристическую функцию такого произведения

$$\varphi_{\xi_1 V_1}(t) = M e^{it \xi_1 V_1} =$$



Переберём значения  $\xi_1$ . Имеем

$$= M(e^{itV_1} \cdot \mathbb{1}\{\xi_1 = 1\} + e^{-itV_1} \cdot \mathbb{1}\{\xi_1 = -1\}) =$$

Пользуемся независимостью

$$= Me^{itV_1} \cdot P(\xi_1 = 1) + Me^{-itV_1} \cdot P(\xi_1 = -1).$$

Математическое ожидание — это характеристическая функция стандартного нормального распределения

$$Me^{itV_1} \cdot P(\xi_1 = 1) + Me^{-itV_1} \cdot P(\xi_1 = -1) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Получилось такое же распределение  $\xi_1 V_1 \sim N(0, 1)$ .

Случайные величины  $V_1$  и  $-V_1$  имеют одинаковое распределение, потому что плотность симметрична  $z_i = \xi_i V_i \sim N(0, 1)$ , при этом  $z_1, z_2, \dots$  — независимы и

$$Y_n = \sum_{i=1}^n z_i.$$

b) Найдём математическое ожидание процесса

$$MY_n = M \sum_{i=1}^n z_i =$$

Пользуемся независимостью

$$= \sum_{i=1}^n Mz_i = 0.$$

Ищем ковариационную функцию процесса

$$K(Y_n, Y_m) = \text{cov}(Y_n, Y_m) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n z_i, \sum_{j=1}^m z_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{cov}(z_i, z_j) =$$

При  $i \neq j$   $\text{cov}(z_i, z_j) = 0$ , при  $i = j$   $\text{cov}(z_i, z_i) = Dz_i = 1$ .  
Двойная сумма — это количество пар с одинаковыми индексами

$$= \min(n, m).$$

c) Запишем приращения  $Y_n$ , то есть  $Y_{n_1}, Y_{n_2} - Y_{n_1}, Y_{n_3} - Y_{n_2}, \dots$ , индексы  $1 \leq n_1 \leq n_2 < n_3 < \dots$ . Запишем через суммы

$$Y_{n_1}, Y_{n_2} - Y_{n_1}, Y_{n_3} - Y_{n_2}, \dots = \sum_{i=1}^{n_1} z_i, \sum_{i=n_1+1}^{n_2} z_i, \sum_{i=n_2+1}^{n_3} z_i, \dots$$

В каждой такой сумме разные  $z$ , они независимы, следовательно, приращения независимы.

Пусть

$$Y_n - Y_m = \sum_{i=m+1}^n z_i \sim$$

Сумма независимых нормальных величин — это тоже нормальная величина

$$\sim N(0, n - m).$$

d) Процесс гауссовский, если линейная комбинация

$$\sum_{r=1}^k c_r \cdot I_{n_k} =$$

— гауссовские. Перепишем через приращения

$$= \sum_{r=1}^n d_r (Y_{n_r} - Y_{n_{r-1}}).$$

В такой сумме разности гауссовские и независимы.

Значит и процесс будет гауссовским.

e)

$$f_{Y_n, Y_{2n}}(x, y) = \frac{1}{2\pi n} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2n} (2x^2 - 2xy + y^2) \right\}.$$

Ковариация — это матрица из минимумов

$$\text{cov} \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{2n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & n \\ n & 2n \end{bmatrix} = A.$$

Определитель этой матрицы  $\det A = 2n^2 - n^2 = n^2$ .

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2} \begin{bmatrix} 2n & -n \\ -n & n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 4.8

*Задание.* Пусть  $X$  и  $Y$  являются независимыми случайными величинами, причём  $Y$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 2\pi]$ , а  $X$  имеет плотность распределения  $f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}\{x \geq 0\}$ .

a) Докажите, что случайные величины  $X \cos Y$ ,  $X \sin Y$  являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределение.

- b) Докажите, что процесс  $\xi(t) = X \cos(2\pi t + Y)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  является гауссовским. Найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

*Решение.*

- a) Нужно доказать, что  $X \cos Y$  и  $X \sin Y$  — независимые с распределением  $N(0, 1)$ , то есть нужно описать распределение двух таким величин.

Найдём характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \varphi_{(X \cos Y, X \sin Y)}(\theta_1, \theta_2) &= M \exp\{i(\theta_1 X \cos Y + \theta_2 X \sin Y)\} = \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i(\theta_1 x \cos y + \theta_2 x \sin y)} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dy dx = \end{aligned}$$

Это двойной интеграл, записанный в полярных координатах

$$u = x \cos y, v = x \sin y, dudv = x dx dy.$$

Получаем

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\theta_1 u + \theta_2 v)} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dudv =$$

Здесь

$$\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}}$$

— это совместная плотность  $(X \cos Y, X \sin Y)$  — это произведение стандартных плотностей

$$= e^{-\frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2}},$$

то есть такие две величины — это независимые стандартные гауссовские случайные величины.

- b)  $\xi(t) = X \cos(2\pi t + Y)$ . Распишем косинус суммы

$$\begin{aligned} X \cos(2\pi t + Y) &= X \cos(2\pi t) \cos Y - X \sin(2\pi t) \sin Y = \\ &= \cos(2\pi t) (X \cos Y) - \sin(2\pi t) (X \sin Y), \end{aligned}$$

следовательно,  $\xi$  — гауссовский процесс.

Нужно проверять, что любые суммы

$$\sum_{r=1}^k c_r \xi(t_r) = \alpha \cdot X \cos Y + \beta X \sin Y$$

— гауссовская величина, где  $X \cos Y$ ,  $X \sin Y$  — независимые гауссовские величины.

Математическое ожидание

$$\begin{aligned} M\xi(t) &= M[\cos(2\pi t)(X \cos Y) - \sin(2\pi t)(X \sin Y)] = \\ &= \cos(2\pi t)M(X \cos Y) - \sin(2\pi t)M(X \sin Y) = 0. \end{aligned}$$

Ковариационная функция

$$\begin{aligned} K(\xi(t), \xi(s)) &= M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t) \cdot M\xi(s) = \\ &= M[X \cos(2\pi t + Y)X \cos(2\pi s + Y)] - \\ &\quad - M[X \cos(2\pi t + Y)]M[X \cos(2\pi s + Y)] = \\ &= M\{\cos(2\pi t)(X \cos Y) - \sin(2\pi t)(X \sin Y)\} \times \\ &\quad \times [\cos(2\pi s)(X \cos Y) - \sin(2\pi s)(X \sin Y)] - \\ &\quad - M[\cos(2\pi t)(X \cos Y) - \sin(2\pi t)(X \sin Y)] \times \\ &\quad \times M[\cos(2\pi s)(X \cos Y) - \sin(2\pi s)(X \sin Y)] = \\ &= M[\cos(2\pi t)\cos(2\pi s)(X \cos Y)^2 - \\ &\quad - \cos(2\pi t)\sin(2\pi s)X \cos Y \cdot X \sin Y - \\ &\quad - \sin(2\pi t)\cos(2\pi s)X \sin Y \cdot X \cos Y + \sin(2\pi t)\sin(2\pi s)(X \sin Y)^2] = \\ &= \cos(2\pi t)\cos(2\pi s) + \sin(2\pi t)\sin(2\pi s) = \cos[2\pi(t-s)]. \end{aligned}$$

## Домашнее задание

### 4.10

*Задание.* Выясните, существует ли случайный процесс с ковариационной функцией

a)  $K(t, s) = \min(t, s) - ts, t, s \in [0, 1];$

b)  $K(t, s) = e^{-|t-s|}, t, s \in \mathbb{R}.$

*Решение.*

a)  $K(t, s) = \min(t, s) - ts, t, s \in [0, 1].$

Такой процесс есть. Это броуновский мост;

b)  $K(t, s) = e^{-|t-s|}, t, s \in \mathbb{R}.$

Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определена?

Функция зависит только от разности. Сейчас  $K(t, s) = \varphi(t-s)$ , где  $\varphi(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}.$

Так что

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^n c_k c_j \varphi(t_k - t_j) \geq 0$$

— это условие неотрицательной определённости для характеристической функции. Будет ли эта функция  $\varphi$  характеристической? То есть вопрос в задаче равносильно следующему: будет ли  $\varphi(t) = e^{-|t|}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  характеристической функцией? Это характеристическая функция для распределения Коши.

#### 4.11

*Задание.* Докажите, что функция  $K(t, s) = e^{ts}$  является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

*Решение.* Симметричность есть. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определённой

$$\sum_{k,j=1}^n c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^n c_k c_j e^{t_k t_j} = \sum_{k,j=1}^n \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_k^i t_j^i}{i!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k,j=1}^n c_k c_j t_k^i t_j^i =$$

Разобьём двойную сумму на две

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^n c_k t_k^i \sum_{j=1}^n c_j t_j^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left( \sum_{k=1}^n c_k t_k \right)^i \geq 0,$$

следовательно,  $K(t, s) = e^{ts}$  — ковариационная функция.

#### 4.12

*Задание.* Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — произвольные действительные функции,  $c_1, \dots, c_n$  — неотрицательные числа. Докажите, что функция

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) \varphi_i(s)$$

является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

*Решение.* Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определённой?

$$\sum_{k,j=1}^n \lambda_k \lambda_j \sum_{i=1}^n K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^n \lambda_k \lambda_j \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t_k) \varphi_i(t_j) =$$

Поменяем суммы местами и двойную сумму распишем как две отдельные

$$= \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_i(t_k) \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_i(t_j) = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^n (\lambda_k \varphi_i(t_k))^2 \geq 0.$$

Значит, функция ковариационная.

#### 4.13

*Задание.* Пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  имеют совместное гауссовское распределение. Докажите, что процесс  $\xi(t) = tX + Y$ ,  $t \geq 0$  гауссовский. Найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\xi(t)$  — гауссовский, если

$$\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n \quad \left( \vec{\alpha}, \vec{\xi} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$$

— гауссовская случайная величина, то есть

$$\sum_{i=1}^n \xi(t_i) \alpha_i = \sum_{i=1}^n (t_i X + Y) \alpha_i = X \sum_{i=1}^n t_i \alpha_i + Y \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

— сумма гауссовских случайных величин, гауссовская,  $\forall t_1, \dots, t_n \geq 0$ .

Математическое ожидание  $M\xi(t) = M(tX + Y) = tMX + MY$ .

Ковариационная функция

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \\ &= M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) = M[(tX + Y)(sX + Y)] - \\ &\quad - M(tX + Y)M(sX + Y) = \\ &= tsMX^2 + tM(XY) + sM(XY) + MY^2 - (tMX + MY)(sMX + MY) = \\ &= tsMX^2 + (t + s)M(XY) + MY^2 - ts(MX)^2 - tMX \cdot MY - sMY \cdot MX - \\ &\quad - (MY)^2 = tsDX + DY + (t + s)D(XY). \end{aligned}$$

#### 4.14

*Задание.* Пусть  $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  является случайным блужданием, которое определяется следующим образом:  $S_0 = 0$ ;  $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$ , где  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что  $M[\xi] = 0$ ,  $M[\xi^2] = 1$ . Докажите, что для произвольного фиксированного

$$t \in [0, 1] \quad \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, t), \quad n \rightarrow \infty.$$

*Решение.*

$$S_1 = S_0 + \xi_1 = 0 + \xi_1 = \xi_1,$$

$$S_2 = S_1 + \xi_2 = \xi_1 + \xi_2,$$

$$S_3 = S_2 + \xi_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,$$

$\dots,$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Математическое ожидание

$$MS_n = M \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n M \xi_i = n M \xi_i = 0.$$

Дисперсия

$$DS_n = D \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n D \xi_i = n D \xi_i = n.$$

Значит, по центральной предельной теореме

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, t), \quad n \rightarrow \infty.$$

#### 4.15

*Задание.* Пусть

$$\hat{S}_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k (\mathbb{1}\{\omega_i = P\} - \mathbb{1}\{\omega_i = \Gamma\})$$

является нормированной разность между количеством решек и гербов, которые выпали при  $k$  подбрасываниях монеты. Докажите, что характеристическая функция  $\hat{S}_k$  имеет вид

$$\varphi_{\hat{S}_k}(\theta) = \left[ \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right) \right]^k.$$

Вычислите предел  $\varphi_{\hat{S}_k}(\theta)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Укажите распределение случайной величины  $\hat{S}$ , к которой слабо сходятся  $\hat{S}_k$  при  $k \rightarrow \infty$ .

*Решение.* Сначала нужно найти характеристическую функцию

$$\varphi_{\hat{S}_k}(\theta) = M e^{i\theta \hat{S}_k}.$$

Подставим  $M e^{i\theta \hat{S}_k} = M e^{i\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^k (\mathbb{1}\{\omega_j = P\} - \mathbb{1}\{\omega_j = \Gamma\})} = M e^{i\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^k \eta_j}$ . Все слагаемые  $\eta_1, \dots, \eta_k$  в суммах независимы,

$$P(\eta_j = 1) = \frac{1}{2} = P(\eta_j = -1).$$

Тогда

$$M e^{i\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^k \eta_j} = \prod_{j=1}^k \varphi_{\eta_j}\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right) =$$

Осталось понять, что такое  $\varphi_{\eta_j}(\lambda) = M e^{-\lambda \eta_j}$ . Случайная величина  $\eta_j$  принимает значения  $-1$  и  $1$  с вероятностями  $\frac{1}{2}$ . Тогда

$$M e^{-\lambda \eta_j} = \frac{1}{2} \cdot e^{i\lambda} + \frac{1}{2} \cdot e^{-i\lambda} = \cos \lambda.$$

Значит,

$$= \cos^k \left( \frac{\theta}{\sqrt{k}} \right).$$

Найдём предел этой характеристической функции, когда  $k \rightarrow \infty$ .

Оказывается, что

$$\varepsilon^{-2} \ln(\cos \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\cos \varepsilon \rightarrow 1$  и  $\ln(\cos \varepsilon) \rightarrow 0$  — это неопределённость 0 на 0. Она раскрывается с помощью правила Лопиталя

$$\frac{\ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2} \approx -\frac{1}{2 \cos \varepsilon} \cdot \frac{\sim \varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{2},$$

где отношение синуса к его аргументу — замечательный предел.

$$\left( \cos \frac{x}{\sqrt{k}} \right)^k = e^{k \ln \cos \frac{x}{\sqrt{k}}} =$$

Аргумент косинуса — это  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Значит,

$$= e^{\frac{k \varepsilon^2 \ln(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{x^2 \varepsilon^{-2} \ln(\cos \varepsilon)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теперь нужно эту сходимости использовать

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos^k \left( \frac{\theta}{\sqrt{k}} \right) = e^{-\frac{\theta^2}{2}}.$$

Вывод:  $\varphi_{\hat{S}_k}(\theta) \rightarrow e^{-\frac{\theta^2}{2}}$ .

Это характеристическая функция нормального распределения. Оно характеризуется средним и дисперсией. Среднее тут 0, потому что нет  $i$  в пределе, дисперсия — 1.

$\hat{S}_k$  сходится к  $\hat{S} \sim N(0, 1)$ .

#### 4.16

*Задание.* Пусть  $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$  — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$K(t, s) = \begin{cases} 1 - |t - s|, & |t - s| < \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3} - \frac{|t - s|}{3}, & \frac{1}{2} \leq |t - s| < 2, \\ 0, & |t - s| \geq 2. \end{cases} \quad ; t, s \in \mathbb{R}$$

а) Запишите плотность распределения вектора  $(\xi(4), \xi(5), \xi(6))$ .

б) Найдите условное математическое ожидание  $M(\xi(5) | (\xi(4), \xi(6)))$ .

*Решение.*  $M(t) = 0$ .



а) Нужно найти плотность трёхмерного вектора  $(\xi(4), \xi(5), \xi(6))$ .

Процесс гауссовский, значит, такой вектор тоже гауссовский. Он характеризуется математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $cov[\xi(4), \xi(4)] = cov[\xi(5), \xi(5)] = cov[\xi(6), \xi(6)] = K(4, 4)$ . Будем считать по первой строке. Разность равна нулю  $K(4, 4) = 1$ .

Аналогично считаем

$$cov[\xi(4), \xi(3)] = K(4, 5) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

По последней строке находим, что  $cov[\xi(4), \xi(6)] = K(4, 6) = 0$ , а

$$cov[\xi(5), \xi(6)] = K(5, 6) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Тогда распределение вектора имеет вид

$$(\xi(4), \xi(5), \xi(6)) \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Плотность имеет вид

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sqrt{\det A}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\vec{x} - \vec{m}), A^{-1}(\vec{x} - \vec{m})] \right\} =$$

Чтобы написать плотность, нужно найти определитель матрицы и обратную

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{9}{7} \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}.$$

Подставим определитель и обратную матрицу в выражение для плотности

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 \cdot \frac{7}{9}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{9}{14} \left( \frac{8}{9} \cdot x_1^2 - \frac{2}{3} \cdot x_1 x_2 + \frac{2}{9} \cdot x_1 x_3 + x_2^2 + \frac{8}{9} \cdot x_3^2 - \frac{2}{3} \cdot x_2 x_3 \right) \right\}.$$

Здесь

$$\vec{x} - \vec{m} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

б) По определению условного математического ожидания

$$M(\xi(5) | (\xi(4), \xi(6))) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 p(\xi(4), x_2, \xi(6)) dx_2}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi(4), x_2, \xi(6)) dx_2}.$$

Теорема о нормальной корреляции

$$\begin{aligned} & M(\xi(5) | (\xi(4), \xi(6))) = \\ & = M\xi(5) + cov_{\xi(5), (\xi(4), \xi(6))} \cdot cov_{(\xi(4), \xi(6)), (\xi(4), \xi(6))}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \xi(4) - M\xi(4) \\ \xi(6) - M\xi(6) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

Здесь Первая ковариация равна

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

а вторая —

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(4) \\ \xi(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(4) \\ \xi(6) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} [\xi(4) + \xi(6)].$$

#### 4.17

*Задание.* Рассмотрим случайный процесс  $\{X(t), t \in T\}$  такой, что случайные величины  $X(t)$  являются независимыми с одинаковым распределением  $N(0, \sigma^2)$ . Докажите, что процесс  $\{X(t), t \in T\}$  является гауссовским и найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

*Решение.* Процесс гауссовский, если линейная комбинация

$$\sum_{r=1}^k c_r X(t_r)$$

— гауссовская.

В такой сумме слагаемые гауссовские и независимые, значит, процесс будет гауссовским.

$$MX(t) = 0.$$

Ковариационная функция

$$K(t, s) = M[X(t)X(s)] - MX(t) \cdot MX(s) = M[X(t)X(s)] = \sigma^2 \cdot \mathbb{1}\{t = s\}.$$

# Занятие 5. Винеровский процесс

## Контрольные вопросы и задания

**Приведите определение винеровского процесса.**

$\{w(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс, если обладает рядом свойств:

1.  $w(0) = 0$ ;
2. однородные приращения. Рассмотрим приращение винеровского процесса на  $t$ . Тогда  $w(s+t) - w(s) \stackrel{\text{def}}{=} w(t) \sim N(0, t)$ , то есть распределение процесса зависит только от длины отрезка;
3. независимые приращения на непересекающихся отрезках. Выберем  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Тогда  $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$  — независимые в совокупности случайные величины.

**Запишите плотность винеровского процесса.**

Напишем плотность распределения вектора  $(w(t_1), \dots, w(t_n)) = \vec{\xi}$ .

Будем использовать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом  $\vec{\xi}$  имеет плотность

$$q(A^{-1}\vec{u}) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{j+1} - t_j)}} \cdot e^{-\frac{u_{j+1} - u_j}{2t_{j+1} - t_j}}.$$

В этой плотности считаем, что  $t_0 = 0, u_0 = 0$ .

**Запишите ковариационную функцию винеровского процесса.**

Произведение математических ожиданий — это 0, потому

$$K(t, s) = Mw(s)w(t) =$$

Используем независимость приращений

$$= M\{w(s) \cdot [w(s) + (w(t) - w(s))]\} =$$

Раскрываем скобки

$$= Mw^2(s) + M\{w(s)[w(t) - w(s)]\} =$$

Первое слагаемое равно  $s$ , а второе — нулю, так как это независимые центрированные случайные величины (математическое произведение — это произведение математических ожиданий, а они равны нулю)

$$= s, \quad s < t.$$

$$K(t, s) = \min(s, t).$$

## Аудиторные задачи

### 5.2

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите, что  $M(W(t) - W(s))^{2n+1} = 0$ ,  $M(W(t) - W(s))^{2n} = (2n-1)!!(t-s)^n$ .

*Решение.* Приращение гауссовское. Обозначим

$$\xi = W(t) - W(s) \stackrel{\text{def}}{=} W(t-s).$$

Значит,  $\xi \sim N(0, t-s)$ , где  $t-s = \sigma^2$ . Нужны формулы для моментов центрированной гауссовской случайной величины, то есть Знаем, что  $M\xi^{2n+1} = 0$ ,  $M\xi^{2n} = (2n-1)!!\sigma^n$ .

### 5.3

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Вычислите:

- $M[(W(5) - 2W(1) + 2)^3];$
- характеристическую функцию случайной величины  $W(2) + 2W(1);$
- $M[\sin(2W(1) + W(2))];$
- $M[\cos(2W(1) + W(2))].$

*Решение.* Есть винеровский процесс.

- а)  $W(5) - 2W(1) + 2 = \xi \sim N(2, 5)$ , потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет

$$D\xi = D[W(5) - 2W(1)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= \text{cov}[W(5) - 2W(1) + 2, W(5) - 2W(1) + 2] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(5, 5) - 2K(5, 1) - 2K(5, 1) + 4K(1, 1) = 5 - 2 - 2 + 4 = 5.$$

Нужно найти третий момент.  $\xi$  не центрирована. Нужно её центрировать  $M\xi^3 = M[(\xi - 2) + 2]^3$ . Раскрываем скобки

$$M\xi^3 = M(\xi - 2)^3 + 6M(\xi - 2)^2 + 12M(\xi - 2) + 8.$$

По предыдущей задаче первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 5, так как это дисперсия, первый момент — 0. Тогда  $M\xi^3 = 0 + 6 \cdot 5 + 12 \cdot 0 + 8 = 38$ .

Величины  $W(5)$  и  $W(1)$  — зависимы, а приращения в винеровском процессе — независимы, потому имеем сумму дисперсий

$$D[W(5) - 2W(1)] = D\{[W(5) - W(1)] + [-W(1)]\}.$$

Дисперсия первого слагаемого равна 4, а второго — 1. Слагаемые независимы  $D[W(5) - 2W(1)] = 5$ ;

- б) нужно найти характеристическую функцию  $W(2) + 2W(1)$ .

Математическое ожидание такой величины равно нулю, а дисперсия  $D[W(2) + 2W(1)] = D\{[W(2) - W(1)] + 3W(1)\}$ . Это независимые величины, поэтому  $D\{[W(2) - W(1)] + 3W(1)\} = 1 + 9 = 10$ . Значит, получается  $\varphi_{W(2)+2W(1)}(\lambda) = \varphi_{N(0,10)}(\lambda) = e^{-\frac{10\lambda^2}{2}}$ ;

- с)  $M[\sin(2W(1) + W(2))] = 0$ .

Характеристическая функция случайной величины — это

$$\varphi_\xi(\lambda) = Me^{i\lambda\xi} = M\cos\lambda\xi + iM\sin\lambda\xi, \lambda = 1;$$

- д)  $M[\cos(2W(1) + W(2))] = e^{-5}$ .

## 5.4

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите, что процессы

- а)  $\{-W(t), t \geq 0\}$ ;

b)  $\{W(s+t) - W(s), t \geq 0\};$

c)  $\tilde{W}(t) = tW\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \mathbb{1}\{t > 0\}$

тоже являются винеровскими.

*Решение.*  $\{W(t), t \geq 0\}$  — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Если выберем моменты времени  $t_1 < \dots < t_n$  и возьмём вектор

$$(W(t_1), \dots, W(t_n))$$

— гауссовский. Нужно знать, что в каждой точке  $MW(t) = 0$  и

$$K(t, s) = \min(t, s).$$

Если процесс удовлетворит этим трём свойствам, то это винеровский процесс.

$$M[-W(t)] = -MW(t) = 0.$$

Найдём ковариационную функцию

$$K(t, s) = M[W(t)W(s)] = \min(t, s).$$

Вектор значений этого процесса должен быть гауссовским. Возьмём  $(-W(t_1), \dots, -W(t_n))$ . Нужно сказать, что это гауссовский вектор. Почему?

Этот вектор — это линейное преобразование вектора

$$(W(t_1), \dots, W(t_n)).$$

Линейные преобразования оставляют вектор гауссовским;

b) сначала нужно сказать, что у него гауссовские конечномерные распределения.

Берём  $n$  значений этого процесса

$$(W(s+t_1) - W(s), \dots, W(s+t_n) - W(s))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора  $(W(t_1+s), \dots, W(t_n+s), W(s))$ . Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s+t_1) \\ W(s+t_2) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s+t_1) - W(s) \\ W(s+t_2) - W(s) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t_1, t_2) = M \{ [W(s + t_1) - W(s)] \cdot [W(s + t_2) - W(s)] \} =$$

Перемножим скобки

$$= M \left[ W(s + t_1) W(s + t_2) - W(s + t_1) W(s) - W(s) W(s + t_2) + W(s)^2 \right] =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация винеровского процесса. Она равна минимуму. Математическое ожидание последнего слагаемого — ковариация в точке  $(s, s)$ . Получаем

$$= \min(s + t_1, s + t_2) - s - s + s = \min(s + t_1, s + t_2) - s.$$

Можем вынести и сократить  $\min(s + t_1, s + t_2) - s = \min(t_1, t_2)$ . Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

с) берём конечномерные распределения

$$\left( t_1 W\left(\frac{1}{t_1}\right), \dots, t_n W\left(\frac{1}{t_n}\right) \right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса  $\left( W\left(\frac{1}{t_1}\right), \dots, W\left(\frac{1}{t_n}\right) \right)$ .

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t, s) = M \left[ t W\left(\frac{1}{t}\right) s W\left(\frac{1}{s}\right) \right] =$$

Выносим  $t$  и  $s$ . Получаем

$$= ts \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) =$$

Множитель  $ts$  — положительный. Он вносится

$$= \min(t, s).$$

Получилось.

## 5.5

*Задание.* Пусть  $\{W^i(t), t \geq 0\}_{i \geq 1}$  — независимые винеровские процессы. Найдите константу  $c_n$  так, чтобы процесс

$$\tilde{W}(t) = c_n \sum_{i=1}^n W^i(t), t \geq 0$$

был винеровским.

*Решение.* Сложили  $n$  независимых винеровских процессов так, чтобы процесс был винеровским.

Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{W}(t_1), \dots, \tilde{W}(t_n) \right) = \\ & = \left( c_n \left( W^1(t_1), \dots, W^n(t_n) \right), \dots, c_n \left( W^1(t_m), \dots, W^n(t_m) \right) \right) \end{aligned}$$

— это линейное преобразование.

$$\begin{bmatrix} W^1(t_1) \\ \vdots \\ W^1(t_m) \\ W^2(t_1) \\ \vdots \\ W^2(t_m) \end{bmatrix}$$

— гауссовский вектор, где обе части — независимые гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию и скажем, какой должна быть  $c_n$ . Ковариация линейна по каждому аргументу. Это значит, что множители и суммы выносятся

$$\text{cov} \left( c_n \sum_{i=1}^n W^i(t), c_n \sum_{i=1}^n W^i(s) \right) = c_n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov} [W^i(t), W^j(s)] =$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= c_n^2 \sum_{i=1}^n \min(t, s) =$$

Имеем  $n$  одинаковых слагаемых

$$= c_n^2 \cdot n \cdot \min(t, s).$$

Отсюда получаем

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

тогда процесс винеровский.

## 5.6

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Для  $0 < t \leq s$  вычислите вероятность  $q_t = P(W(s) > W(s-t) > W(s+t))$ .

*Решение.* Начнём с того, что нарисуем график винеровского процесса (рис. 28).

Есть 3 случайные величины.





Рис. 28: График винеровского процесса

У такого вектора есть плотность. Случайные величины независимы

$$q_t = \iiint_{x>y>z} p_{(W(s), W(s-t), W(s+t))} (x, y, z) dx dy dz.$$

Вектор имеет нормальное распределение

$$\begin{bmatrix} W(s) \\ W(s-t) \\ W(s+t) \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & s-t & s \\ s-t & s-t & s-t \\ s & s-t & s+t \end{pmatrix} \right).$$

Нужно использовать какие-то свойства винеровского процесса. Здесь нужно взять 2 приращения. Эти приращения будут независимыми величинами с известным распределением  $N(0, t)$ .

Вводим в рассмотрение приращения

$$\begin{cases} X = W(s) - W(s-t), \\ Y = W(s+t) - W(s). \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения  $W(s-t) = W(s) - X$ , а из второго —  $W(s+t) = W(s) + Y$ . Отнимем два последние уравнения

$$W(s+t) - W(s-t) = X + Y.$$

От всех частей неравенства в искомой вероятности вычтем  $W(s-t)$  и заменим полученные выражения на введённые приращения

$$q_t = P\{W(s) - W(s-t) > 0 > W(s+t) - W(s-t)\} = P(X > 0 > X + Y).$$

Плотность вектора — это произведение плотностей

$$P(X > 0 > X + Y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{2\pi t} \cdot e^{-\frac{1}{2t}(x^2+y^2)} dy dx =$$

Перейдём в полярную систему координат

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi.$$

Получим

$$= \frac{1}{2\pi t} \int_0^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} d\varphi dr =$$

Изобразим область интегрирования (рис. 29).



Рис. 29: Область интегрирования

По  $\varphi$  можем сразу проинтегрировать. Интеграл по  $\varphi$  даст просто  $\frac{\pi}{4}$ .  
Получаем

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} \cdot \frac{dr^2}{2t} =$$

Интеграл равен единице

$$= \frac{1}{8}$$

## 5.7

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процессов:

- а)  $W^0(t) = W(t) - tW(1)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  (броуновский мост);
- б)  $U(t) = e^{-\frac{t}{2}} W(e^t)$  (процесс Орнштейна-Уленбека).

Выясните, какой из этих процессов является гауссовским.

*Решение.*

- а)  $MW^0(t) = 0$ , потому что у винеровского процесса математическое ожидание 0. Найдём ковариационную функцию

$$K(t, s) = \text{cov}[W(t) - tW(1), W(s) - sW(1)] = \min(t, s) - ts - st + st =$$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничтожаются

$$= \min(t, s) - st.$$

Если возьмём вектор конечномерных распределений

$$(W^0(t_1), \dots, W^0(t_n)),$$

то этот вектор будет гауссовским. Такой процесс называется броуновский мост (рис. 30);



Рис. 30: Броуновский мост

b)  $MU(t) = 0$ , потому что винеровский. Ковариационная функция

$$K(t, s) = \text{cov} \left[ e^{-\frac{t}{2}} W(e^t), e^{-\frac{s}{2}} W(e^s) \right] =$$

Выносим экспоненты (множители)

$$= e^{-\frac{t}{2} - \frac{s}{2}} \min(e^t, e^s) =$$

Экспонента — монотонная функция

$$= e^{-\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \min(t, s)} = e^{-\frac{1}{2}[t + s - 2 \min(s, t)]} = e^{-\frac{1}{2} \cdot |t - s|}.$$

Значение процесса  $U(t)$  — это линейное преобразование значений винеровского процесса, только в других точках. Процесс гауссовский.

## 5.8

*Задание.* Докажите, что случайный процесс

$$B(t) = (1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), 0 \leq t < 1; B(1) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

*Решение.* Конечномерные распределения такого процесса

$$(B(t_1), \dots, B(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$$MB(t) = 0.$$

Найдём ковариацию

$$\text{cov}[B(t), B(s)] = \text{cov} \left[ (1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), (1-s) W\left(\frac{s}{1-s}\right) \right] =$$

Множители выносим

$$= (1-t)(1-s) \min\left(\frac{t}{1-t}, \frac{s}{1-s}\right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min (t - ts, s - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min (t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

## 5.9

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание  $M(W(s) | W(t))$  при  $s > t$ .

*Решение.* Есть формула

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x p_{W(s), W(t)}(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_{W(s), W(t)}(x, y) dx}.$$

Свойства условного математического ожидания:  $M(\xi | \mathcal{F}) = \xi$ , если  $\xi$  измерима относительно  $\mathcal{F}$  и  $M(\xi | \mathcal{F}) = M\xi$ , если  $\xi$  не зависит от  $\mathcal{F}$ .

Нужно, чтобы появилось приращение

$$M[W(s) | W(t)] = M[W(s) - W(t) + W(t) | W(t)] =$$

Распишем как 2 условных математических ожидания

$$= M[W(s) - W(t) | W(t)] + M[W(t) | W(t)].$$

Первое слагаемое равно нулю, как как имеются независимые величины  $M[W(s) - W(t) | W(t)] + M[W(t) | W(t)] = W(t)$ .

## 5.10

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс, и пусть  $\tau$  — независимая от процесса  $W$  случайная величина, показательно распределённая с параметром  $\lambda$ . Найдите характеристическую функцию случайной величины  $W(\tau)$ .

*Решение.*  $\varphi_{W(\tau)}(\lambda) = Me^{i\lambda W(\tau)}$ . В винеровский процесс подставляется случайное время. Похожая ситуация

$$Me^{i\lambda \sum_{k=0}^{\tau} \xi_k} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau = k) \cdot M\left(e^{i\lambda \sum_{k=0}^{\tau} \xi_k} \middle| \tau = k\right).$$

Получаем

$$Me^{i\lambda W(\tau)} = MM\left[e^{i\lambda W(\tau)} \middle| \tau\right] = Me^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot \tau^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} p_{\tau}(x) dx =$$

Подставим выражение для плотности показательного распределения

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2} - \lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda)} dx =$$

Вынесем  $\lambda$  за скобки

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x\lambda(\frac{\lambda}{2} + 1)} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x\lambda \cdot \frac{\lambda+2}{2}} dx = -\lambda \cdot \frac{2}{\lambda+2} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x \cdot \frac{\lambda+2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda+2}.$$

## Домашнее задание

### 5.12

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Вычислите:

- $M[(W(4) - 2W(1) + 2W(2))^2];$
- $M[(W(1) + 2W(2) + 1)^3];$
- $M[e^{W(3) - 2W(2)}];$
- характеристическую функцию случайной величины  $W(1) + 2W(2) + 1$ .

*Решение.*

- $W(4) - 2W(1) + W(2) = \xi \sim N(0, 6)$ , потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(4) - 2W(1) + W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= \text{cov}[W(4) - 2W(1) + W(2), W(4) - 2W(1) + W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$\begin{aligned} &= K(4, 4) - 2K(4, 1) + K(4, 2) - 2K(1, 4) + 4K(1, 1) - 2K(1, 2) + \\ &\quad + K(2, 4) - 2K(2, 1) + K(2, 2) = \\ &= 4 - 2 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 1 + 2 = 4 + 4 - 2 = 6. \end{aligned}$$

Нужно найти второй момент.  $\xi$  центрирована  $M\xi^2 = D\xi = 6$ ;

- b)  $W(1) + 2W(2) + 1 = \xi \sim N(1, 13)$ , потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет  $D\xi = D[W(1) - 2W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi)$ . Подставим выражения для случайной величины

$$\text{cov}(\xi, \xi) = \text{cov}[W(1) + 2W(2) + 1, W(1) + 2W(2) + 1] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(1, 1) + 2K(1, 2) + 2K(2, 1) + 4K(2, 2) = 1 + 2 + 2 + 8 = 13.$$

Нужно найти третий момент.  $\xi$  не центрирована. Нужно её центрировать  $M\xi^3 = M[(\xi - 1) + 1]^3$ . Раскрываем скобки

$$M[(\xi - 1) + 1]^3 = M(\xi - 1)^3 + 3M(\xi - 1)^2 + 3M(\xi - 1) + 1 =$$

По задаче 5.2 первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 13, так как это дисперсия, первый момент — ноль. Тогда

$$= 0 + 3 \cdot 13 + 3 \cdot 0 + 1 = 39 + 1 = 40;$$

- c)  $W(3) - 2W(2) = \xi \sim N(0, 3)$ , потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(3) - 2W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражение для случайной величины

$$= \text{cov}[W(3) - 2W(2), W(3) - 2W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(3, 3) - 2K(3, 2) - 2K(2, 3) + 4K(2, 2) = 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 3.$$

Нужно найти

$$Me^\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^x \cdot p_\xi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 3}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{6}} dx.$$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты

$$\frac{x^2}{6} - x = \frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6} + \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\right)^2 =$$

Три первых слагаемых образуют полный квадрат

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{(x - 3)^2}{2 \cdot 3} - \frac{3}{2}.$$

Подставим полученное выражение в экспоненту

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{6}} dx = e^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{6}} dx =$$

Подинтегральная функция — плотность нормального распределения, потому такой интеграл равен единице

$$= e^{\frac{3}{2}};$$

d) нужно найти характеристическую функцию  $W(1) + 2W(2) + 1$ .

Математическое ожидание такой величины равно 1, а дисперсия — 13.

Значит, получается  $\varphi_{W(1)+2W(2)+1}(\lambda) = \varphi_{N(1,13)}(\lambda) = e^{i\lambda - \frac{13\lambda^2}{2}}$ .

### 5.13

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите, что процессы:

a)  $\{W(T) - W(T-t), 0 \leq t \leq T\}, T = \text{const} > 0;$

b)  $\{\sqrt{c}W(\frac{t}{c}), t \geq 0\}, c = \text{const} > 0$

тоже являются винеровскими.

*Решение.*  $\{W(t), t \geq 0\}$  — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Сначала нужно сказать, что у процесса гауссовские конечномерные распределения.

Берём  $n$  значений этого процесса

$$(W(T) - W(T-t_1), \dots, W(T) - W(T-t_n))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора  $(W(T-t_1), \dots, W(T-t_n), W(T))$ .

Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(T-t_1) \\ W(T-t_2) \\ W(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(T) - W(T-t_1) \\ W(T) - W(T-t_2) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t, s) = M\{[W(T) - W(T-t)] \cdot [W(T) - W(T-s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M \left[ W(T)^2 - W(T)W(T-s) - W(T-t)W(T) + W(T-t)W(T-s) \right] =$$

Математическое ожидание трёх последних слагаемых — ковариационные функции винеровского процесса. Они равны минимуму. Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация в точке  $(T, T)$ . Получаем

$$= T - T + s - T + t + \min(T-s, T-t) = s + t - \max(s, t) = \min(t, s).$$

Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

b) берём конечномерные распределения

$$\left( \sqrt{c}W\left(\frac{t_1}{c}\right), \dots, \sqrt{x}W\left(\frac{t_n}{c}\right) \right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса

$$\left( W\left(\frac{t_1}{c}\right), \dots, W\left(\frac{t_n}{c}\right) \right).$$

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t, s) = M \left[ \sqrt{c}W\left(\frac{t}{c}\right) \sqrt{c}W\left(\frac{s}{c}\right) \right] =$$

Выносим  $\sqrt{c}$ . Получим

$$= cM \left[ W\left(\frac{t}{c}\right) W\left(\frac{s}{c}\right) \right] = c \cdot \min\left(\frac{t}{c}, \frac{s}{c}\right) =$$

Множитель  $c$  — положительный. Он вносится

$$= \min(t, s).$$

## 5.14

*Задание.* Для фиксированного  $\rho \in [-1, 1]$  положим

$$W(t) = \rho W^1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t),$$

где  $\{W^1(t), t \geq 0\}$ ,  $\{W^2(t), t \geq 0\}$  — независимые винеровские процессы. Докажите, что процесс  $\{W(t), t \geq 0\}$  является винеровским и найдите математическое ожидание  $M[W^1(t) \cdot W(t)]$ .

*Решение.* Сложили 2 независимых винеровских процесса так, чтобы процесс был винеровским.



Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\begin{aligned} & (W(t_1), \dots, W(t_n)) = \\ & = \left( \rho W^1(t_1) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t_1), \dots, \rho W^1(t_n) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t_n) \right) \end{aligned}$$

— это линейное преобразование  $(W^1(t_1), \dots, W^1(t_n))$  и

$$(W^2(t_1), \dots, W^2(t_n))$$

— гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию. Ковариация линейна по каждому аргументу

$$\begin{aligned} & \text{cov} \left[ \rho W^1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t), \rho W^1(s) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(s) \right] = \\ & = \rho^2 \cdot \text{cov} [W^1(t), W^1(s)] + \rho \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \text{cov} [W^1(t), W^2(s)] + \\ & + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho \cdot \text{cov} [W^2(t), W^1(s)] + (1 - \rho^2) \cdot \text{cov} [W^2(t), W^2(s)] = \end{aligned}$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= \rho^2 \cdot \min(t, s) + (1 - \rho^2) \cdot \min(t, s) = \min(t, s),$$

тогда процесс винеровский.

$$M [W^1(t) \cdot W(t)] = M \left\{ W^1(t) \cdot \left[ \rho W^1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t) \right] \right\} =$$

Раскроем скобки

$$= \rho M W^1(t)^2 + \sqrt{1 - \rho^2} M [W^1(t) W^2(t)] = \rho t.$$

## 5.15

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$X(t) = x + \mu t + \sigma W(t),$$

который называется винеровским со сдвигом  $\mu \in \mathbb{R}$ , коэффициентом диффузии  $\sigma > 0$ , который стартует из точки  $x \in \mathbb{R}$ .

*Решение.* Из определения винеровского процесса следует, что случайная величина  $W(t)$  имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $t$ . Таким образом

$$MX(t) = M[x + \mu t + \sigma W(t)] = Mx + M(\mu t) + \sigma MW(t) = x + \mu t.$$

Вычислим теперь  $MX(t)X(s)$ . Имеем

$$MX(t)X(s) = M\{[x + \mu t + \sigma W(t)] \cdot [x + \mu s + \sigma W(s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M[x^2 + x\mu s + x\sigma W(s) + \mu tx + \mu^2 ts + \mu t\sigma W(s) + \sigma W(t)x + \sigma W(t)\mu s + \sigma^2 W(t)W(s)] =$$

Математическое ожидание константы — это сама константа, а математическое ожидание винеровского процесса равно нулю

$$= x^2 + x\mu s + \mu tx + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s).$$

Тогда

$$\text{cov}[X(t), X(s)] = M[X(t)X(s)] - MX(t) \cdot MX(s) =$$

Подставим найденные выражения для математических ожиданий

$$= x^2 + x\mu s + \mu tx + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - (x + \mu t)(x + \mu s) =$$

Перемножим скобки

$$= x^2 + x\mu s + \mu ts + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - x^2 - x\mu s - \mu tx - \mu^2 ts =$$

Сократим

$$= \sigma^2 \cdot \min(t, s).$$

## 5.16

*Задание.* Докажите, что случайный процесс

$$Z(t) = tW\left(\frac{1}{t} - 1\right), 0 < t \leq 1; Z(0) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

*Решение.* Конечномерные распределения такого процесса

$$(Z(t_1), \dots, Z(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$$MZ(t) = 0.$$

Найдём ковариацию

$$\text{cov}[Z(t), Z(s)] = \text{cov}\left[tW\left(\frac{1}{t} - 1\right), sW\left(\frac{1}{s} - 1\right)\right] =$$

Множители выносим

$$= ts \cdot \min \left( \frac{1}{t} - 1, \frac{1}{s} - 1 \right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min (s - ts, t - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min (t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

### 5.17

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание  $M(W(s) | W(t))$  при  $s < t$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} M[W(s) | W(t)] &= \\ &= MW(s) + \text{cov}[W(s), W(t)] \cdot \text{cov}^{-1}[W(t), W(t)] \cdot [W(t) - MW(t)] = \end{aligned}$$

Математическое ожидание винеровского процесса равно нулю, а ковариация — минимуму

$$= \min(s, t) \cdot \frac{1}{t} \cdot W(t) =$$

По условию  $s < t$ , потому

$$= \frac{s}{t} \cdot W(t).$$

### 5.18

*Задание.* Пусть  $W$  и  $N$  — независимые между собой винеровский процесс и пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$  соответственно. Найдите характеристическую функцию случайной величины  $X(t) = W(N(t))$ .

*Решение.* Нужно найти  $\varphi_{W(N(t))}$ . Характеристическая функция — это  $Me^{isW(N(t))}$ . Имеем винеровский процесс, в который подставляется случайное время. Нужно перебрать все возможные значения случайного времени. Пуассоновский процесс принимает значения от нуля до бесконечности

$$Me^{isW(N(t))} = M \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{N(t) = k\} \cdot e^{isW(k)} =$$

Математическое ожидание суммы можем написать как сумму математических ожиданий

$$= \sum_{k=0}^{\infty} M \mathbb{1}\{N(t) = k\} e^{isW(k)} =$$

Индикатор зависит от пуассоновского процесса, а экспонента — от винеровского, а они независимы

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = k\} M e^{isW(k)} =$$

Оба множителя нам известны. Второй — это характеристическая функция гауссовской величины

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot k} =$$

Случайная величина  $N(t) \sim Pois(\lambda t)$ ,  $W(k) \sim N(0, k)$ . Получаем

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda t e^{-\frac{s^2}{2}}\right)^k}{k!} = e^{\lambda t \left(e^{-\frac{s^2}{2}} - 1\right)}.$$

Тогда  $M e^{isW(N(t))} = M \left( M e^{isW(t)} \right) \Big|_{k=N(t)} = M \left[ e^{isW(N(t))} \mid N(t) = k \right]$ .

Свойство условного математического ожидания  $MM(\xi \mid \mathcal{F}) = M\xi$ .

# Занятие 6. Стохастическая непрерывность случайного процесса. Существование непрерывной модификации

## Контрольные вопросы и задания

Приведите определение стохастически непрерывного процесса.

Стохастически непрерывный процесс:  $\xi(t) \xrightarrow{P} \xi(t_0), t \rightarrow t_0$ .  
Это означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi(t) - \xi(t_0)| > \varepsilon) \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$ .

Сформулируйте достаточное условие существования непрерывной модификации случайного процесса.

Пусть  $\xi(t), t \in [0, 1]$  удовлетворяет условию

$$\exists \alpha, \beta, C > 0 : \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 1] \quad M |\xi(t_1) - \xi(t_2)|^\alpha \leq C |t_1 - t_2|^{1+\beta}.$$

Тогда  $\xi$  имеет непрерывную модификацию.

## Аудиторные задачи

### 6.4

*Задание.* Пусть  $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$  — случайный процесс, все значения которого являются независимыми и имеют одинаковое невырожденное распределение. Докажите, что этот процесс не является стохастически непрерывным ни в какой точке.

*Решение.* Распределения невырождены в том смысле, что это не константа (рис. 31).



Рис. 31: График функции  $\xi(t)$

Стохастическая непрерывность означает, что вероятность

$$P\{|\xi(s) - \xi(t)| > \varepsilon\} \rightarrow 0.$$

Предположим, что распределение равномерное на отрезке  $[0, 1]$ . Тогда такая вероятность равна

$$P\{|\xi(s) - \xi(t)| > \varepsilon\} = (1 - \varepsilon)^2 \not\rightarrow 0, \quad t \rightarrow s$$

(рис. 32).



Рис. 32: Площадь квадрата со стороной  $1 - \varepsilon$

Для такого процесса вероятность — это постоянная и она не может стремиться к нулю.

## 6.5

*Задание.* Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  — стохастически непрерывный случайный процесс. Докажите, что для произвольной непрерывной ограниченной функции  $g$  функция  $M[g(X(t))]$  является непрерывной по  $t$ .

*Решение.* Нужно проверить, что если  $t \rightarrow t_0$ , то

$$M[g(X(t))] \rightarrow M[g(X(t_0))].$$

Знаем, что если  $t \rightarrow t_0$ , то

$$X(t) \xrightarrow{P} X(t_0).$$

Следовательно, есть слабая сходимость. Она как раз и означает, что такие математические ожидания должны сходиться.

## 6.7

*Задание.* Пусть  $\{\xi(t), t \in [a, b]\}$  — стохастически непрерывный процесс, а  $f$  — неслучайная функция, определённая на  $[a, b]$ . Докажите, что случайный процесс  $\eta(t) = \xi(t) + f(t), t \in [a, b]$  является стохастически непрерывным в тех и только тех точках отрезка  $[a, b]$ , где является непрерывной функция  $f$ .

*Решение.* Нужно доказывать в обе стороны.

Сначала предположим, что  $f$  — непрерывная. Пусть  $f$  — непрерывная в точке  $t_0$ . Будем сейчас проверять, что сумма стохастически непрерывна.

Если  $\xi(t)$  — стохастически непрерывна, то

$$\xi(t) \xrightarrow{P} \xi(t_0)$$

при  $t \rightarrow t_0$ .

Сходимость по вероятности сохраняется при непрерывных операциях. Сумма — непрерывная операция.

Знаем, что  $f$  — непрерывна, то есть если  $t \rightarrow t_0$ , то  $f(t) \rightarrow f(t_0)$ . От  $\omega$  тут зависимости нет. Эту сходимость можно интерпретировать как сходимость почти наверное, следовательно,

$$f(t) \xrightarrow{P} f(t_0).$$

Значит и сумма будет сходиться. Значит, отсюда следует, что  $\eta$  — стохастически непрерывен.

Теперь предположим, что вся сумма стохастически непрерывна.

Пусть  $\eta$  — стохастически непрерывен в  $t_0$ . Это значит, что

$$\eta(t) \xrightarrow{P} \eta(t_0), t \rightarrow t_0.$$

Для  $\eta$  и  $\xi$  мы знаем, что есть сходимость по вероятности. Надо взять разность. Разность — это  $f$ , то есть

$$\begin{cases} \xi(t) + f(t) \xrightarrow{P} \xi(t_0) + f(t_0), \\ \xi(t) \xrightarrow{P} \xi(t_0). \end{cases}$$

Вычтем из первого второе

$$f(t) \xrightarrow{P} f(t_0).$$

Нужно проверить, что для неслучайной функции сходимость по вероятности и просто сходимость — одно и то же. Сходимость по вероятности:  $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon\} \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$ . Это есть. Просто сходимость:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , чтобы выполнялось соотношение  $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$  при  $|t - t_0| < \delta$ . Это нужно проверить.

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \alpha > 0 \exists \delta > 0 \quad P\{|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon\} < \alpha \text{ при } |t - t_0| < \delta.$$

Функция  $f$  — неслучайная функция, то есть событие неслучайно. Его вероятность равна или нулю, или единице. Если  $\alpha > 1$ , то вероятность равна нулю. Значит,  $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$  при  $|t - t_0| < \delta$ . То есть  $\alpha < 1$ .

Тогда  $P\{|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon\} = 0$ . Из этого следует, что при  $|t - t_0| < \delta$  выполняется дополнение  $|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$ . Это и значит непрерывность в точке  $t_0$ . Таким образом, для неслучайных величин все сходимости равносильны.

## 6.8

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите, что для произвольного  $A > 0$

$$P\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \left|W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right)\right| > A\right\} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

*Решение.* Приращения — нормальные независимые величины

$$W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

Сумма одинаково распределённых случайных величин

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left|W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right)\right| \cdot \sqrt{n} \xrightarrow{a.s.} M|W(1)|, n \rightarrow \infty$$

по усиленному закону больших чисел, так как

$$\sqrt{n} \left[W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right)\right] \sim N(0, 1).$$

Тогда вероятность

$$P\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \left|W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right)\right| \cdot \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt{n}} > A\right\} = P\{M|W(1)| > 0\} = 1.$$

## 6.9

*Задание.* Пусть  $\{X(t), t \in T\}$  — случайный процесс такой, что

$$MX(t) = 0, MX^2(t) = 1$$

для произвольного  $t \in T$ .

- а) Докажите, что  $|MX(t)X(t+h)| \leq 1$  для произвольного  $h > 0$  и произвольного  $t \in [0, T-h]$ .



б) Допустим, что для некоторых  $\lambda < \infty$ ,  $p > 1$  и  $h_0 > 0$

$$M[X(t)X(t+h)] \geq 1 - \lambda h^p$$

для произвольного  $h \in (0, h_0]$ . Докажите, что  $\{X(t), t \in T\}$  имеет непрерывную модификацию.

*Решение.*

а) Пусть  $X(t) = \xi$  и  $X(t+h) = \eta$ . Тогда

$$|M\xi\eta| \leq M|\xi\eta| \leq (M|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (M|\eta|^q)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(неравенство Гёльдера). Возьмём  $p = q = 2$ .

Получаем неравенство Коши-Буняковского

$$M[X(t)X(t+h)] \leq \left\{M|X(t)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{M|X(t+h)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

б) Будем пользоваться достаточным условием Колмогорова

$$\exists \alpha, \beta, C > 0 : \forall t_1, t_2 \in [0, 1] \quad M|\xi(t_1) - \xi(t_2)|^\alpha \leq C|t_1 - t_2|^{1-\beta}.$$

Тогда у процесса будут непрерывные модификации. Нужно оценить

$$M|X(t+h) - X(t)|^2 = M[X^2(t+h) - 2X(t+h)X(t) + X^2(t)] =$$

Воспользуемся линейностью математического ожидания

$$= MX^2(t+h) - 2M[X(t+h)X(t)] + MX^2(t).$$

Здесь первое и последнее слагаемые равны единице, а второе не меньше  $1 - \lambda h^p$ . Тогда

$$MX^2(t+h) - 2M[X(t+h)X(t)] + MX^2(t) \geq 2 - 2(1 - \lambda h^p) = 2\lambda h^p,$$

где  $2\lambda = \text{const}$ ,  $p = 1 + \beta$ .

Теорема Колмогорова работает с  $\alpha = 2$ ,  $C = 2\lambda$  и  $\beta = p - 1$ .

Значит, такой процесс имеет непрерывные модификации.

## Домашнее задание

### 6.17

*Задание.* Пусть все значения процесса  $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$  являются независимыми и равномерно распределёнными на  $[0, 1]$ . Выясните, имеет ли этот процесс непрерывную модификацию.

*Решение.* Из задачи 6.4  $X(t)$  не стохастически непрерывен в каждой точке.

Стохастическая непрерывность означает, что  $X(t) \xrightarrow{P} X(t_0)$  при  $t \rightarrow t_0$ .

Пусть процесс  $X(t)$  имеет непрерывную модификацию. Тогда

$$\begin{cases} X(t) = \tilde{X}(t) \text{ a.s.}, \\ \tilde{X}(t) \rightarrow \tilde{X}(t_0), t \rightarrow t_0, & \Rightarrow X(t) \rightarrow X(t_0) \text{ a.s.}, \\ X(t_0) = \hat{X}(t_0) \text{ a.s.} \end{cases}$$

то есть процесс  $X(t)$  стохастически непрерывен — противоречие с условием. Значит,  $X(t)$  не имеет непрерывной модификации.

### 6.18

*Задание.* Пусть  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$  — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией  $K(t, s)$ , которая равна

- а)  $e^{-|t-s|}$ ,
- б)  $(t^\alpha + s^\alpha - |t-s|^\alpha)/2, \alpha \in (0, 2]$ .

Докажите, что  $X$  имеет непрерывную модификацию.

*Решение.* Нам нужно доказать, что существуют такие константы

$$\alpha > 0, \beta > 0, C > 0,$$

что  $M|X(t+h) - X(t)|^\alpha \leq C|h|^{1+\beta}$  для произвольных  $t, t+h \in \mathbb{R}^+, h > 0$ .

Поскольку процесс  $X$  является гауссовским, то для произвольных

$$t, t+h \in \mathbb{R}^+$$

вектор  $(X(t), X(t+h))$  является гауссовским. Поэтому случайная величина  $X(t+h) - X(t)$ , как линейная комбинация компонент гауссовского вектора, имеет нормальное распределение. Найдём параметры этого распределения. Имеем  $M[X(t+h) - X(t)] = MX(t+h) - MX(t) = 0$ ,

а)  $D[X(t+h) - X(t)] = M[X(t+h) - X(t)]^2$ . Раскроем квадрат

$$M[X(t+h) - X(t)]^2 = K(t+h, t+h) - 2K(t+h, t) + K(t, t) =$$

Подставим выражения для ковариационной функции

$$= e^{-|t+h-t-h|} - 2e^{-|t+h-t|} + e^{-|t-t|} = 1 - 2e^{-|h|} + 1 = 2 - 2e^{-h}.$$

Тогда любой чётный момент случайной величины  $X(t+h) - X(t)$  равен  $M[X(t+h) - X(t)]^{2n} = (2n-1)!! (2 - 2e^{-h})^n$ .

Поскольку  $1 - e^{-h} \leq h$  для  $h > 0$ , то  $M[X(t+h) - X(t)]^4 \leq 12h^2$  и, значит, достаточное условие Колмогорова существования непрерывной модификации выполняется при  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $C = 12$ .

b) Имеем

$$D[X(t+h) - X(t)] = M[X(t+h) - X(t)]^2 =$$

Раскроем квадрат

$$\begin{aligned} &= K(t+h, t+h) - 2K(t+h, t) + K(t, t) = \\ &= \frac{(t+h)^\alpha + (t+h)^\alpha - |t+h-t-h|^\alpha}{2} - \\ &- 2 \cdot \frac{(t+h)^\alpha + t^\alpha - |t+h-t|^\alpha}{2} + \frac{t^\alpha + t^\alpha - |t-t|^\alpha}{2} = \\ &= (t+h)^\alpha - (t+h)^\alpha - t^\alpha - h^\alpha + t^\alpha = -h^\alpha. \end{aligned}$$

Тогда любой чётный момент случайной величины  $X(t+h) - X(t)$  равен  $M[X(t+h) - X(t)]^{2n} = (2n-1)!! (-h^\alpha)^n$ .

В частности,  $M[X(t+h) - X(t)]^2 = 3!! (-h^\alpha) = 3h^\alpha$  и, значит, достаточное условие Колмогорова существования непрерывной модификации выполняется при  $\alpha = 2$ ,  $\beta = \alpha - 1 = 2 - 1 = 1$ ,  $C = 3$ .

## 6.19

*Задание.* Для процесса Пуассона найдите предел с вероятностью единица последовательности случайных величин

$$\sum_{i=0}^{n-1} (N(t_{i+1}) - N(t_i))^2$$

при  $\max(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$ , где  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  — разбиение отрезка  $[0, 1]$ .

*Решение.*

$$P \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} [N(t_{i+1}) - N(t_i)]^2 > \varepsilon \right\} \leq \frac{M \sum_{i=0}^{n-1} [N(t_{i+1}) - N(t_i)]^2}{\varepsilon} =$$

Пользуемся независимостью приращений

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} M[N(t_{i+1}) - N(t_i)]^2}{\varepsilon} =$$

Пользуемся однородностью приращений

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} MN^2(t_{i+1} - t_i)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{n-1} [DN(t_{i+1} - t_i) + M^2 N(t_{i+1} - t_i)] =$$

Пусть случайная величина  $X(t)$  с распределением Пуассона имеет параметр  $\lambda$ . Тогда

$$= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{n-1} [\lambda(t_{i+1} - t_i) + \lambda^2(t_{i+1} - t_i)^2] = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(t_{i+1} - t_i) [1 + \lambda(t_{i+1} - t_i)] \leq$$

Оценим сумму максимумом

$$\leq \frac{n}{\varepsilon} \cdot \{\lambda \max(t_{i+1} - t_i) [1 + \lambda \max(t_{i+1} - t_i)]\} \rightarrow 0$$

при  $\max(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$ , следовательно, предел по вероятности равен нулю.

# Занятие 7. $L_2$ теория

## Контрольные вопросы и задания

Приведите определение непрерывного в среднем квадратическом случайного процесса.

$\xi$  непрерывен в среднем квадратическом в точке  $t_0$ , если

$$\xi(t) \xrightarrow{L_2} \xi(t_0)$$

при  $t \rightarrow t_0$ , то есть  $M[\xi(t) - \xi(t_0)]^2 \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$ .

Случайный процесс  $\xi$  непрерывен в среднем квадратическом на  $T$ , если  $\xi$  непрерывен в среднем квадратическом в каждой точке  $t_0 \in T$ .

Как определяются производная случайного процесса, интеграл случайного процесса?

$\xi$  дифференцируем в среднем квадратическом в точке  $t_0$ , если

$$\exists L_2 - \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} = \xi'(t_0).$$

Случайный процесс  $\xi$  интегрируем в среднем квадратическом на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\exists L_2 - \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(t_k) \Delta t_k,$$

где  $\pi$  — разбиение:  $a = t_0 < \dots < t_n = b$ .

Модуль разбиения — это максимальная разность между соседними точками.

Как изменяются характеристики случайного процесса при дифференцировании, интегрировании?

$$\xi \in L_2 : M|\xi|^2 < \infty, (\xi, \eta) = M\xi\bar{\eta}, (\xi, \xi) = M|\xi|^2.$$

**Приведите условия непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости случайного процесса в терминах его ковариационной функции.**

$\xi$  непрерывен в среднем квадратическом на интервале  $T$  тогда и только тогда, когда  $m \in C(T)$ ,  $K \in C(T \times T)$ .

Случайный процесс  $\xi$  дифференцируем в среднем квадратическом в точке  $t_0$  тогда и только тогда, когда  $m$  дифференцируема в точке  $t_0$  и

$$\exists \lim_{s, t \rightarrow t_0} \frac{K(t, s) - K(t, t_0) - K(t_0, s) + K(t_0, t_0)}{(s - t_0)(t - t_0)}.$$

Непрерывный в среднем квадратическом на отрезке  $[a, b]$  процесс  $\xi$  интегрируем в среднем квадратическом на этом отрезке.

## Аудиторные задачи

### 7.2

*Задание.* Пусть  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  — интегрируемые с квадратом случайные величины. Докажите, что случайный процесс

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^n \zeta_k e^{kt}$$

имеет производную в среднем квадратическом и найдите её.

*Решение.*  $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in L_2$ , то есть есть  $n$  величин, и процесс определяется как

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^n \zeta_k e^{kt}.$$

Нужно проверить, что этот процесс дифференцируем и найти его производную в  $L_2$ .

Время  $t$  входит только в экспоненту, которую мы умеем дифференцировать. Нужно проверить, что

$$\left\| \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} - \sum_{k=1}^n \zeta_k k e^{kt_0} \right\| \rightarrow 0,$$

когда  $t \rightarrow t_0$ .

Будем это проверять. Можно  $\xi(t)$  расписать.

$\xi(t)$  — это сумма

$$\left\| \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} - \sum_{k=1}^n \zeta_k k e^{kt_0} \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n \zeta_k e^{kt} - \sum_{k=1}^n \zeta_k e^{kt_0}}{t - t_0} - \sum_{k=1}^n \zeta_k k e^{kt_0} \right\| =$$

Во всех слагаемых есть сумма и  $\zeta_k$ . Так что приведём подобные, и будет одна сумма

$$= \left\| \sum_{k=1}^n \zeta_k \left( \frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{t - t_0} - ke^{kt_0} \right) \right\| \leq$$

Первое слагаемое в скобках стремится к производной, а второе и есть производная. Их разность стремится к нулю. Используем неравенство треугольника

$$\leq \sum_{k=1}^n \left\| \zeta_k \left( \frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{t - t_0} - ke^{kt_0} \right) \right\| =$$

С помощью свойства  $\|\alpha\xi\| \leq |\alpha| \cdot \|\xi\|$  коэффициент выносится из нормы

$$= \sum_{k=1}^n \left| \frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{t - t_0} - ke^{kt_0} \right| \cdot \|\zeta_k\| \rightarrow$$

Под модулем стоят числа, которые сходятся к нулю, под нормой — числа

$$\rightarrow 0.$$

### 7.3

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите, что случайный процесс

$$\left\{ \eta(t) = \int_0^t W(s) ds, t \geq 0 \right\}$$

является дифференцируемым в среднем квадратическом и что

$$\eta'(t) = W(t)$$

для произвольного  $t \geq 0$ .

*Решение.* Дифференцируем интеграл по верхнему пределу.

Должна получиться подинтегральная функция. Нужно проверить, что

$$\frac{\eta(t) - \eta(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow{L_2} W(t_0).$$

Проверяем. Вместо  $\eta$  подставляем интеграл

$$M \left[ \frac{\eta(t) - \eta(t_0)}{t - t_0} - W(t_0) \right]^2 = M \left[ \frac{\int_0^t W(s) ds - \int_0^{t_0} W(s) ds}{t - t_0} - W(t_0) \right]^2 =$$

Разность интегралов — это интеграл от  $t_0$  до  $t$ . Так что

$$= M \left[ \frac{\int_{t_0}^t W(s) ds}{t - t_0} - W(t_0) \right]^2 =$$

Случайную величину  $W(t_0)$  можно внести под интеграл, потому что он не зависит от  $s$ . Знаменатель вынесем из-под интеграла

$$= M \left\{ \int_{t_0}^t [W(s) - W(t_0)] ds \right\}^2 \cdot \frac{1}{(t - t_0)^2} =$$

Найдём дисперсию

$$D \int_a^b \xi(s) ds = cov \left( \int_a^b \xi(s) ds, \int_a^b \xi(r) dr \right).$$

Ковариация — это линейная функция, оба интеграла выносятся

$$cov \left( \int_a^b \xi(s) ds, \int_a^b \xi(r) dr \right) = \int_a^b \int_a^b cov[\xi(s), \xi(t)] ds dr.$$

Тогда

$$= \frac{1}{(t - t_0)^2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t cov[W(s) - W(t_0), W(r) - W(t_0)] ds dr =$$

Ковариацию винеровского процесса мы знаем

$$= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t [\min(s, r) - t_0 - t_0 + t_0] ds dr \cdot \frac{1}{(t - t_0)^2} =$$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничтожаются

$$= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t [\min(s, r) - t_0] ds dr \cdot \frac{1}{(t - t_0)^2} \leq \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t (t - t_0) ds dr \cdot \frac{1}{(t - t_0)^2} =$$

Величина  $t - t_0 = const$ , она вносится

$$= t - t_0 \rightarrow 0.$$

Это и надо было проверить.



#### 7.4

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите существование интеграла в среднем квадратическом

$$\int_0^{\infty} e^{-t} W(t) dt = L_2 - \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-t} W(t) dt$$

и найдите его распределение.

*Решение.* Рассматриваются интегралы

$$\int_0^T e^{-t} W(t) dt.$$

Нужно доказать, что у этих интегралов есть предел, то есть

$$\int_0^T e^{-t} W(t) dt \xrightarrow{L_2, T \rightarrow \infty} ?$$

Что нужно проверять, чтобы доказать, что этот интеграл сходится? Надо брать математическое ожидание разностей в квадрате. Предела мы не знаем.

Гильбертово пространство обладает свойством полноты

$$\xi_n \xrightarrow{L_2, n \rightarrow \infty} \xi$$

тогда и только тогда, когда  $\{\xi_n\}$  фундаментальная, то есть

$$M(\xi_n - \xi_m)^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Предположим, что  $T_1 < T_2$ . Из полноты следует, что нам достаточно проверить такое

$$M \left[ \int_0^{T_1} e^{-t} W(t) dt - \int_0^{T_2} e^{-t} W(t) dt \right]^2 = M \left[ \int_{T_1}^{T_2} e^{-t} W(t) dt \right]^2 =$$

Это двойной интеграл от ковариации

$$= \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} \text{cov}[e^{-t} W(t), e^{-s} W(s)] dt ds = \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} e^{-t-s} \min(t, s) dt ds =$$

Нужно проверить, что это выражение стремится к нулю, когда  $T_1, T_2 \rightarrow \infty$ . Распишем для всех случаев

$$= \int_{T_1}^{T_2} \left( \int_{T_1}^s e^{-t-s} t dt \right) ds + \int_{T_1}^{T_2} \left( \int_s^{T_2} e^{-t-s} s dt \right) ds \leq$$

Пусть  $t < s$ . Тогда

$$\leq \int_{T_1}^{T_2} \left( \int_{T_1}^s e^{-t-s} s dt \right) ds + \int_{T_1}^{T_2} \left( \int_s^{T_2} e^{-t-s} s dt \right) ds = \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} e^{-s} e^{-t} s dt ds =$$

Интегрируем по  $y$ , получаем

$$= \int_{T_1}^{T_2} s e^{-s} ds \int_{T_1}^{T_2} e^{-t} dt = \int_{T_1}^{T_2} s e^{-s} ds \cdot (e^{-T_2} - e^{-T_1}) =$$

Берём интеграл по частям

$$= (e^{-T_2} - e^{-T_1}) \left( -e^{-s} s \Big|_{T_1}^{T_2} - e^{-s} \Big|_{T_1}^{T_2} \right) =$$

Подставим пределы интегрирования

$$= (e^{-T_2} - e^{-T_1}) (-T_2 e^{-T_2} + T_1 e^{-T_1} - e^{-T_2} + e^{-T_1}) \xrightarrow{T_1, T_2 \rightarrow \infty} 0,$$

Так как каждое слагаемое стремится к нулю, то есть мы посчитали расстояние между двумя интегралами и показали, что оно стремится к нулю

$$\exists \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-t} W(t) dt = \int_0^\infty e^{-t} W(t) dt.$$

Теперь скажем, какое распределение у этого предела.

$W$  — это винеровский процесс, а интеграл — это предельные суммы, так что

$$\int_0^T e^{-t} W(t) dt \sim N \left( 0, \int_0^T \int_0^T e^{-t-s} \min(t, s) dt ds \right).$$

Предел гауссовской величины — это тоже нормальная величина

$$\int_0^\infty e^{-t} W(t) dt \sim N \left( 0, \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-s} \min(t, s) dt ds \right).$$

## 7.5

*Задание.* Докажите, что случайный процесс

$$\eta(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} W(s) ds$$

является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \eta'(t) = -\eta(t) + W(t), \\ \eta(0) = 1. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\eta(0) = e^0 + \int_0^0 e^{-(t-s)} \cdot W(s) ds = 1.$$

Чтобы проверить, что уравнение выполняется, надо написать производную

$$\eta'(t) = -e^{-t} - \int_0^t e^{-(t-s)} W(s) ds + e^{-(t-t)} W(t) =$$

Первые 2 слагаемых равны  $-\eta(t)$ , второе — подынтегральная функция в точке  $t$ . Тогда

$$= -\eta(t) + W(t).$$

## 7.6

*Задание.* Пусть процесс  $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$  имеет функцию математического ожидания  $m(t) = t^2$  и ковариационную функцию  $K(t, s) = e^{ts}$ . Вычислите:

- а)  $M[\xi(1) + \xi(2)]^2$ ;
- б)  $M\xi(1)\xi'(2)$ ;
- в)

$$M \left[ \xi(1) + \int_0^1 \xi(s) ds \right]^2.$$

*Решение.*

- а) Посчитаем

$$\begin{aligned} M[\xi(1) + \xi(2)]^2 &= D[\xi(1) + \xi(2)] + \{M[\xi(1) + \xi(2)]\}^2 = \\ &= cov[\xi(1) + \xi(2), \xi(1) + \xi(2)] + (1 + 4)^2 = \\ &= K(1, 1) + K(1, 2) + K(2, 1) + K(2, 2) + 5^2 = e + e^2 + e^2 + e^4 + 25 = \\ &= e + 2e^2 + e^4 + 25; \end{aligned}$$

- б) посчитаем  $M\xi(1)\xi'(2) = cov[\xi(1), \xi'(2)] + M\xi(1) \cdot M\xi'(2)$ . Запишем общую формулу. Ковариация линейная, и производная выносится вперёд

$$cov[\xi(t), \xi'(t)] = \frac{\partial K}{\partial s}(t, s).$$

$$\text{Тогда } cov[\xi(1), \xi'(2)] + M\xi(1) \cdot M\xi'(2) = te^{ts}|_{t=1, s=2} + 1 \cdot 2t|_{t=2} = t^2 + 4;$$

с) посчитаем

$$\begin{aligned}
 & M \left[ \xi(1) + \int_0^1 \xi(s) ds \right]^2 = \\
 &= D \left[ \xi(1) + \int_0^1 \xi(s) ds \right] + \left\{ M \left[ \xi(1) + \int_0^1 \xi(s) ds \right] \right\}^2 = \\
 &= D\xi(1) + 2cov \left[ \xi(1), \int_0^1 \xi(s) ds \right] + D \left[ \int_0^1 \xi(s) ds \right] + \left( 1 + \int_0^1 s^2 ds \right)^2 = \\
 &= e + 2 \int_0^1 cov[\xi(1), \xi(s)] ds + \int_0^1 \int_0^1 e^{ts} dt ds + \left( \frac{4}{3} \right)^2.
 \end{aligned}$$

## Домашнее задание

### 7.10

*Задание.* Для винеровского процесса вычислите:

а)

$$cov \left( W(2), \int_0^4 W(s) ds + W(3) \right);$$

б)

$$cov \left( W(3) + 2W(1), \int_1^3 W(s) ds \right).$$

*Решение.*

a)

$$\begin{aligned}
& \operatorname{cov} \left( W(2), \int_0^4 W(s) ds + W(3) \right) = \\
& = \operatorname{cov} \left[ W(2), \int_0^4 W(s) ds \right] + \operatorname{cov} [W(2), W(3)] = \\
& = \int_0^4 \operatorname{cov} [W(2), W(s)] ds + \min(2, 3) = \int_0^4 \min(2, s) ds + \min(2, 3) = \\
& = \int_0^2 \min(2, s) ds + \int_2^4 \min(2, s) ds + 2 = \int_0^2 s ds + \int_2^4 2 ds + 2 = \\
& = \frac{s^2}{2} \Big|_0^2 + 2s \Big|_2^4 + 2 = \frac{4}{2} + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 2 = 2 + 8 - 4 + 2 = 8;
\end{aligned}$$

b) посчитаем

$$\begin{aligned}
& \operatorname{cov} \left( W(3) + 2W(1), \int_1^3 W(s) ds \right) = \\
& = \operatorname{cov} \left[ W(3), \int_1^3 W(s) ds \right] + \operatorname{cov} \left[ 2W(1), \int_1^3 W(s) ds \right] = \\
& = \int_1^3 \operatorname{cov} [W(3), W(s)] ds + 2 \int_1^3 \operatorname{cov} [W(1), W(s)] ds = \\
& = \int_1^3 \min(3, s) ds + 2 \int_1^3 \min(1, s) ds = \int_1^3 s ds + 2 \int_1^3 1 ds = \frac{s^2}{2} \Big|_1^3 + 2s \Big|_1^3 = \\
& = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 6 - 2 = \frac{8}{2} + 4 = 4 + 4 = 8.
\end{aligned}$$

## 7.11

*Задание.* Пусть  $\tau \geq 0$  — случайная величина, которая имеет положительную непрерывную плотность распределения, и пусть  $X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}$  — процесс ожидания, связанный с  $\tau$ . Докажите, что  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$  не дифференцируем в среднем квадратическом.

*Решение.* Допустим, что процесс ожидания дифференцируем в среднем квадратическом. Это означает, что для произвольного  $t \in [0, 1]$  существова-

ла бы такая случайная величина  $X'(t)$ , что

$$M \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right|^2 \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$$

Если бы такой предел существовал, то величина

$$M \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right|^2$$

должна была бы быть ограниченной при  $h \rightarrow 0$ . Но непосредственным вычислением показываем, что

$$M \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right|^2 = M \left| \frac{\mathbb{1}\{t+h \geq \tau\} - \mathbb{1}\{t \geq \tau\}}{h} \right|^2 =$$

Возводим в квадрат

$$= \frac{1}{h^2} \cdot M \left[ (\mathbb{1}\{t+h \geq \tau\})^2 - 2 \cdot \mathbb{1}\{t+h \geq \tau\} \mathbb{1}\{t \geq \tau\} + (\mathbb{1}\{t \geq \tau\})^2 \right] =$$

Произведение индикаторов событий — это индикатор пересечения этих событий

$$= \frac{1}{h^2} \cdot [M \mathbb{1}\{t+h \geq \tau\} - 2M \mathbb{1}\{t+h \geq \tau\} \cap \{t \geq \tau\} + M \mathbb{1}\{t \geq \tau\}] =$$

Математическое ожидание индикатора события — это вероятность этого события

$$= \frac{1}{h^2} \cdot [P(t+h \geq \tau) - 2P(t+h \geq \tau) + P(t \geq \tau)] =$$

Приведём подобные

$$= \frac{1}{h^2} \cdot [-P(t+h \geq \tau) + P(t \geq \tau)] = \frac{1}{h^2} \cdot [P(\tau \leq t) - P(\tau \leq t+h)] =$$

Запишем через интеграл от плотности

$$= \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \tau(x) p_\tau(x) dx \rightarrow \infty, h \rightarrow 0.$$

Это противоречие доказывает недифференцируемость в среднем квадратическом процесса ожидания.

## 7.12

*Задание.* Пусть  $\xi$  — дифференцируемый в среднем квадратическом процесс,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  — детерминированная функция. Докажите, что процесс

$\{f(t)\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$  имеет производную в среднем квадратическом и найдите её.

*Решение.* Нужно проверить, что

$$\left\| \frac{f(t)\xi(t) - f(t_0)\xi(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0)\xi(t_0) - f(t_0)\xi'(t_0) \right\| \rightarrow 0,$$

когда  $t \rightarrow t_0$ .

Будем это проверять

$$M \left| \frac{f(t)\xi(t) - f(t_0)\xi(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0)\xi(t_0) - f(t_0)\xi'(t_0) \right|^2 =$$

Поделим числитель на знаменатель

$$\begin{aligned} &= M \left| \frac{f(t)\xi(t)}{t - t_0} - \frac{f(t_0)\xi(t_0)}{t - t_0} - \frac{f(t)\xi(t_0)}{t - t_0} + \frac{f(t)\xi(t_0)}{t - t_0} - \right. \\ &\quad \left. - f'(t_0)\xi(t_0) - f(t_0)\xi'(t_0) \right|^2 = \\ &= M \left| f(t) \cdot \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} + \xi(t_0) \cdot \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0)\xi(t_0) - f(t_0)\xi'(t_0) \right|^2 = \\ &= M |f(t)\xi'(t_0) + \xi(t_0)f'(t_0) - f'(t_0)\xi(t_0) - f(t_0)\xi'(t_0)|^2 = \\ &= M |f(t)\xi'(t_0) - f(t_0)\xi'(t_0)|^2 = M |\xi'(t_0)[f(t) - f(t_0)]|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $t \rightarrow t_0$ .

### 7.13

*Задание.* Пусть  $\eta$  — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \eta'(t) = -\eta(t) + W(t), \\ \eta(0) = 1. \end{cases}$$

Докажите, что

$$L_2 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t)}{t} = 0.$$

*Решение.* Надо проверить, что

$$M \left[ \frac{\eta(t)}{t} \right]^2 \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow +\infty$ .

Из задачи 7.5 решением такой задачи Коши есть

$$\eta(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} W(s) ds.$$

Тогда

$$M \left[ \frac{\eta(t)}{t} \right]^2 = M \left[ \frac{e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} W(s) ds}{t} \right]^2 =$$

Возведём в квадрат

$$= M \left\{ \frac{e^{-2t}}{t^2} + \frac{2e^{-2t}}{t^2} \int_0^t e^s W(s) ds + \frac{e^{-2t}}{t^2} \left[ \int_0^t e^s W(s) ds \right]^2 \right\} =$$

Вынесем константу и внесём математическое ожидание

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2} \left\{ 1 + \int_0^t e^s M W(s) ds + M \left[ \int_0^t e^s W(s) ds \right]^2 \right\} =$$

Математическое ожидание винеровского процесса равно нулю

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-2t}}{t^2} \left[ 1 + \int_0^t \int_0^t e^{s_1+s_2} \min(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right] = \\ &= \frac{e^{-2t}}{t^2} \left( 1 + \int_0^t \int_{s_1}^t e^{s_1} e^{s_2} s_1 ds_1 ds_2 \right) = \frac{e^{-2t}}{t^2} \left( 1 + \int_0^t e^{s_1} s_1 e^{s_2} \Big|_{s_1}^t ds_1 \right) = \\ &= \frac{e^{-2t}}{t^2} \left[ 1 + \int_0^t e^{s_1} s_1 (t - s_1) ds_1 \right] = \\ &= \frac{e^{-2t}}{t^2} \left( 1 + t \int_0^t e^{s_1} s_1 ds_1 - \int_0^t e^{s_1} s_1^2 ds_1 \right) = \end{aligned}$$

Оба интеграла берём по частям. Для первого интеграла

$$u = s_1, dv = e^{s_1} ds_1, du = ds_1, v = \int e^{s_1} ds_1 = e^{s_1}.$$

Для второго интеграла

$$u = s_1^2, dv = e^{s_1} ds_1, du = 2s_1 ds_1, v = e^{s_1}.$$

Тогда

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2} \left( 1 + t s_1 e^{s_1} \Big|_0^t - t \int_0^t e^{s_1} ds_1 - e^{s_1} s_1^2 \Big|_0^t + 2 \int_0^t e^{s_1} s_1 ds_1 \right) =$$



Подставим пределы интегрирования и возьмём интегралы

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2} \left( 1 + t^2 e^t - t e^{s_1} \Big|_0^t - e^t t^2 + 2 s_1 e^{s_1} \Big|_0^t - 2 \int_0^t e^{s_1} ds_1 \right) =$$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничтожаются, снова берём интеграл и подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2} \left( 1 - t e^t + t + 2 t e^t - 2 e^{s_1} \Big|_0^t \right) = \frac{e^{-2t}}{t^2} (1 + t e^t + t - 2 e^t) =$$

Раскроем скобки

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2} + \frac{e^{-3t}}{t} + \frac{e^{-2t}}{t} - \frac{2e^{-t}}{t^2} \approx -\frac{2e^{-2t}}{2t} - 3e^{-3t} - 2e^{-2t} + 2e^{-t} \approx$$

Снова используем правило Лопиталя

$$\approx 2e^{-2t} - 3e^{-3t} - 2e^{-2t} + 2e^{-t} \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow +\infty$ .

## 7.14

*Задание.* Докажите, что случайный процесс

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (\lambda m(s) + W(s)) ds, \quad t \geq 0$$

является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \eta'(t) = -\lambda(\eta(t) - m(t)) + W(t), \\ \eta(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Здесь  $m(t)$  — детерминированная функция.

*Решение.*

$$\eta(0) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda \cdot 0} + \int_0^0 e^{-\lambda(0-s)} [\lambda m(s) + W(s)] ds = \frac{1}{2}.$$

Чтобы проверить, что уравнение выполняется, надо написать производную

$$\begin{aligned} \eta'(t) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-\lambda) e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} [\lambda m(s) + W(s)] ds + e^{-\lambda(t-t)} [\lambda m(t) + W(t)] = \\ &= -\lambda \left\{ \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda t} - \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} [\lambda m(s) + W(s)] ds - m(t) \right\} + W(t) = \\ &= -\lambda [\eta(t) - m(t)] + W(t). \end{aligned}$$