Оглавление

Занятие 2. Характеристики случайного процесса

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(t),\ t \in T$ — это параметризированная совокупность случайных величин.

Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?

$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n};\ t_1,\ldots,t_n \in T,\ n \geq 1\}$ — набор конечномерных распределений процесса ξ, где $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ — распределение вектора $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))$ в $\mathbb{R}^n$, то есть для борелевского $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)) \in \Delta\}$.

Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.

$m(t) = M\xi(t),\ t \in T$ — функция среднего.
$D\xi(t),\ t \in T$ — функция дисперсии.
$K(t,s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)],\ t,s \in T$ — функция ковариации.

Аудиторные задачи

2.2

Задание. Пусть
$$\xi(t) = X \cdot e^{-t},\ t > 0,$$
где X — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами a, σ^2. Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса $\xi = \{\xi(t),\ t > 0\}$.

Решение. Сейчас $T = (0,\infty)$.

Случайная величина X имеет распределение $N\left(a, \sigma^2\right)$. Нужно найти $M\xi(t) = m(t)$, $D\xi(t)$, ковариационную функцию $K(t,s)$ и одномерную плотность распределения $p_\xi(t)$.

Найчнём с математического ожидания

$$m(t) = M\left(X \cdot e^{-t}\right) = e^{-t} MX = e^{-t} \cdot a.$$

Далее — функция дисперсии $D\xi(t) = D\left(X \cdot e^{-t}\right) = e^{-2t} \cdot DX$. Дисперсия X — известная: $e^{-2t} \cdot DX = e^{-2t} \cdot \sigma^2$.

Далее — ковариационная функция

$$K(t,s) = M\left[\xi(t) - m(t)\right] \cdot \left[\xi(s) - m(s)\right] = cov\left[\xi(t), \xi(s)\right].$$

Вместо $\xi(t)$, $\xi(s)$ подставляем их значения

$$cov\left[\xi(t), \xi(s)\right] = cov\left(Xe^{-t}, Xe^{-s}\right).$$

Множители выносятся

$$cov\left(Xe^{-t}, Xe^{-s}\right) = e^{-t-s} cov(X, X) = e^{-t-s} DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность $\xi(t) \sim N\left(e^{-t}a,\, e^{-2t}\sigma^2\right)$.

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{\left(x - e^{-t}a\right)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины X.

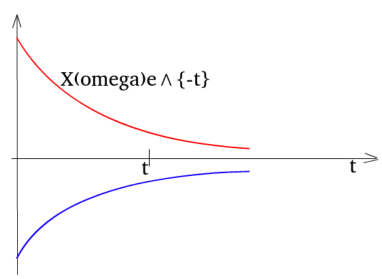

Рис. 1: Траектория процесса

2.3

Задание. Пусть

$$\xi(t) = e^{-Xt},\ t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром λ. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t > 0\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = e^{-Xt}$, где $X \sim Exp(\lambda)$, $t > 0$.

Нужно найти $m(t)$, $K(t,s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t. По определению

$$m(t) = Me^{-Xt} = \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше X, тем быстрее эта функция убывает.

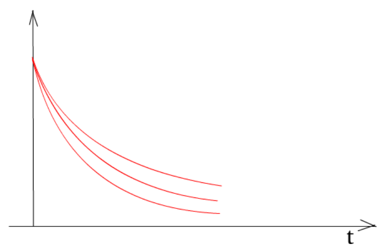

Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) = Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda+t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

Подставим найденное значение фунцкии математического ожидания

$$Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda+t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s} = \frac{\lambda}{\lambda+t+s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda+t)(\lambda+s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\}$. Вместо ξ напишем формулу $P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\} = P\left(e^{-Xt_1} \le x_1, \ldots, e^{-Xt_n} \le x_n\right)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X. Все неравенства решаем относительно X

$$P\left(e^{-Xt_1} \le x_1, \ldots, e^{-Xt_n} \le x_n\right) = P\left\{X \ge -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, X \ge -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \ge -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, X \ge -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \ge \max\left(-\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right)\right\}.$$

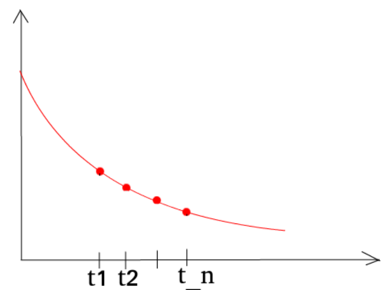

Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой m

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{ln\,x_1}{t_1},\ldots,-\frac{ln\,x_n}{t_n}\right)\right\} = \int\limits_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(ln\,x_1^{-\frac{1}{t_1}},\ldots,ln\,x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(ln\,x_1^{-\frac{1}{t_1}},\ldots,ln\,x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}},\ldots,x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}},\ldots,x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}},\ldots,x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}},\ldots,x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда $0 < x_1, \ldots, x_n < 1$.

Плотности у такого векора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ быть не может, потому что $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$. Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$, $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$.

С вероятностью 1 $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$ — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

2.4

Задание. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A\cos(\varphi + \lambda t),$$

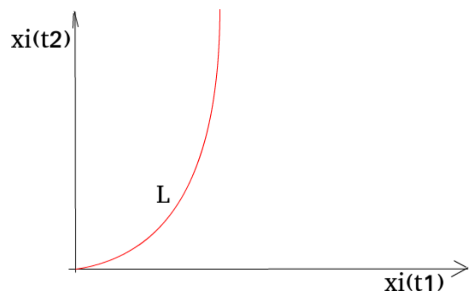

Рис. 4: $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где A и φ являются независимыми случайными величинами такими, что $MA^2 < \infty$, а φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

Решение. $\varphi \sim U([0, 2\pi])$.

Траектория такого процесса изображена на рисунке **??**.

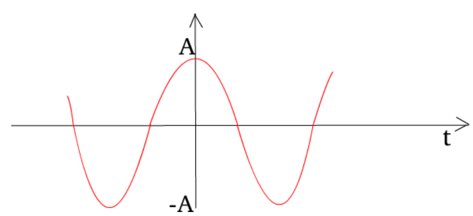

Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A\cos(\varphi + \lambda t)]$. Случайные величины A и φ — независимые. $M[A\cos(\varphi + \lambda t)] = MAM\cos(\varphi + \lambda t)$. Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у φ известна плотность

$$MAM\cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$ Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M\left[A^2\cos(\varphi + \lambda t)\cos(\varphi + \lambda s)\right] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t)(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos\left[2\varphi + \lambda\left(t+s\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right] \right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

Домашнее задание