

# Оглавление



# Занятие 2. Характеристики случайного процесса

## Контрольные вопросы и задания

**Приведите определение случайного процесса.**

Случайный процесс  $\xi(t)$ ,  $t \in T$  — это параметризованная совокупность случайных величин.

**Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?**

$\{\mu_{t_1, \dots, t_n}; t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$  — набор конечномерных распределений процесса  $\xi$ , где  $\mu_{t_1, \dots, t_n}$  — распределение вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  в  $\mathbb{R}^n$ , то есть для борелевского  $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mu_{t_1, \dots, t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) \in \Delta\}$ .

**Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.**

$m(t) = M\xi(t)$ ,  $t \in T$  — функция среднего.

$D\xi(t)$ ,  $t \in T$  — функция дисперсии.

$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)]$ ,  $t, s \in T$  — функция ковариации.

## Аудиторные задачи

### 2.2

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t}, t > 0,$$

где  $X$  — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами  $a$ ,  $\sigma^2$ . Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса  $\xi = \{\xi(t), t > 0\}$ .

*Решение.* Сейчас  $T = (0, \infty)$ .

Случайная величина  $X$  имеет распределение  $N(a, \sigma^2)$ . Нужно найти  $M\xi(t) = m(t)$ ,  $D\xi(t)$ , ковариационную функцию  $K(t, s)$  и одномерную плотность распределения  $p_\xi(t)$ .

Начнём с математического ожидания

$$m(t) = M(X \cdot e^{-t}) = e^{-t}MX = e^{-t} \cdot a.$$

Далее — функция дисперсии  $D\xi(t) = D(X \cdot e^{-t}) = e^{-2t} \cdot DX$ . Дисперсия  $X$  — известная:  $e^{-2t} \cdot DX = e^{-2t} \cdot \sigma^2$ .

Далее — ковариационная функция

$$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)] = cov[\xi(t), \xi(s)].$$

Вместо  $\xi(t)$ ,  $\xi(s)$  подставляем их значения

$$cov[\xi(t), \xi(s)] = cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}).$$

Множители выносятся

$$cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}) = e^{-t-s}cov(X, X) = e^{-t-s}DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность  $\xi(t) \sim N(e^{-t}a, e^{-2t}\sigma^2)$ .

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x - e^{-t}a)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины  $X$ .



Рис. 1: Траектория процесса

## 2.3

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = e^{-Xt}, t > 0,$$

где  $X$  — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром  $\lambda$ . Запишите конечномерные распределения случайного процесса  $\{\xi(t), t > 0\}$ . Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\xi(t) = e^{-Xt}$ , где  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $t > 0$ .

Нужно найти  $m(t)$ ,  $K(t, s)$ , конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент  $t$ . По определению

$$m(t) = M e^{-Xt} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше  $X$ , тем быстрее эта функция убывает.



Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M \xi(t) \xi(s) - M \xi(t) M \xi(s) = M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Подставим найденное значение функции математического ожидания

$$M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s} = \frac{\lambda}{\lambda + t + s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda + t)(\lambda + s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$ . Вместо  $\xi$  напомним формулу  $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n)$ . Величины зависимы, потому что все они выражаются через  $X$ . Все неравенства решаем относительно  $X$

$$P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n) = P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\}.$$



Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой  $m$

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\} = \int_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \dots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда  $0 < x_1, \dots, x_n < 1$ .

Плотности у такого векора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  быть не может, потому что  $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$ . Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как  $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$ ,  $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$ .

С вероятностью 1  $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$  — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

## 2.4

*Задание.* Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A \cos(\varphi + \lambda t),$$



Рис. 4:  $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где  $A$  и  $\varphi$  являются независимыми случайными величинами такими, что  $MA^2 < \infty$ , а  $\varphi$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

*Решение.*  $\varphi \sim U([0, 2\pi])$ .

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.



Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A \cos(\varphi + \lambda t)]$ . Случайные величины  $A$  и  $\varphi$  — независимые.  $M[A \cos(\varphi + \lambda t)] = MAM \cos(\varphi + \lambda t)$ . Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у  $\varphi$  известна плотность

$$MAM \cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция  $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$   
Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M[A^2 \cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos [2\varphi + \lambda (t + s)] + \frac{1}{2} \cdot \cos [\lambda (t - s)] \right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos [\lambda (t - s)].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

## 2.5

*Задание.* Пусть  $\tau$  — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ , и пусть  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$  — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}, t \in [0, 1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ , найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\tau$  — случайная величина с распределением  $U([0, 1])$ .

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное  $\tau$  выпало.



Рис. 6: Траектория процесса

$$m(t) = MX(t) = M\mathbb{1}\{t \geq \tau\} = P(t \geq \tau) = F_\tau(t) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция  $K(t, s) = M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s)$ . Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s) = P\{\tau \leq \min(t, s)\} - ts = \min(t, s) - t \cdot s.$$



Конечномерные распределения — распределение вектора  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ .  
Каждый  $X$  — это 0 или 1.

$$P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) = (0, \dots, 0)\} = P\{\tau \in (t_n, 1]\} = 1 - t_n.$$

Точки  $t_n$  изображены на рисунке 7.



Рис. 7: Временная ось

У вектора получается  $(n + 1)$ -но значение

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \dots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \dots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \dots, \\ (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \dots, \\ (1, \dots, 1), & t_1. \end{cases}$$

## 2.6

*Задание.* Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения  $F$ , и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ , найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

*Решение.*

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq s\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \mathbb{1}\{\xi_j \leq s\}) =$$



Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$\text{cov} (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}) = M \mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \wedge s \} - F(t) F(s) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F(t \wedge s) - F(t) F(s),$$

где  $\wedge$  означает минимум.

Все слагаемые в сумме раны этому выражению

$$K(t, s) = \frac{1}{n} [F(t \wedge s) - F(t) F(s)].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем  $t_1, t_2, \dots, t_m$  (рис. 9).

$$X(t) \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}.$$

По  $t$ ,  $X$  увеличивается. Эта функция монотонна.



Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq n.$$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P \left\{ X(t_1) = \frac{k_1}{n}, X(t_2) = \frac{k_2}{n}, \dots, X(t_m) = \frac{k_m}{n} \right\} =$$

$P$ (для  $k_1$  наблюдений  $\xi \leq t_1$ , для  $k_2 - k_1$  наблюдений  $t_1 < \xi \leq t_2, \dots$ , для  $n - k_m$  наблюдений  $\xi > t_m$ ) Имеем мультиномиальное распределение

$$= \frac{n!}{k_1! (k_2 - k_1)! \dots (n - k_m)!} \cdot F(t_1)^{k_1} \cdot [F(t_2) - F(t_1)]^{k_2 - k_1} \cdot \dots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить  $n$  величин на группы.

## 2.7

*Задание.* Найдите характеристическую функцию случайной величины  $X(\eta)$ , где  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$  — процесс из задачи 2.5, а  $\eta$  — независимая от  $X$  случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$  соответственно.

*Решение.*  $X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}$ .

Задана случайная величина

$$\eta = \begin{cases} 0, & \frac{1}{3}, \\ 1, & \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Интересуемся  $\varphi_{X(\eta)}$ . Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.



Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1:  $X(0) = 0, X(1) = 1$ , значит,  $X(\eta) = \eta$ .

$$\varphi_{X(\eta)}(\lambda) = \varphi_{\eta}(\lambda) = M e^{i\lambda\eta} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

## 2.8

*Задание.* Значение случайного телеграфного сигнала  $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$  в произвольный момент времени с одинаковыми вероятностями равно 0 или 1. Прыжки происходят случайным и независимым образом. Вероятность  $P(k, T)$  того, что в интервале времени длины  $T$  произойдёт  $k$  прыжков, задаётся распределением Пуассона, то есть:

$$P(k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T},$$

где  $\lambda$  — среднее количество прыжков за единицу времени. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi$ .

*Решение.*

$$P\{\xi(t) = 1\} = P\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{2}.$$

Одномерные распределения даны. Это распределение Бернулли.

$P(k, T)$  — это вероятность того, что на отрезке времени длины  $T$  было  $k$  прыжков (распределение Пуассона), то есть траектория процесса выглядит как на рисунке 11.

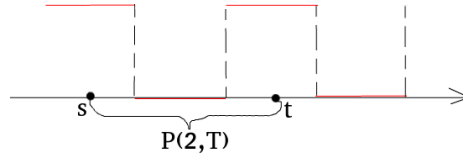


Рис. 11: Траектория случайного процесса

В каждой точке будет 0 или 1.

Математическое ожидание тут ищется просто

$$M\xi(t) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Теперь нужно ещё найти ковариационную функцию такого процесса

$$K(s, t) = M[(\xi(t) - M\xi(t)) \cdot (\xi(s) - M\xi(s))] = M\xi(s)\xi(t) - \frac{1}{4}.$$

Нужно математическое ожидание совместного процесса.  $\xi(s)$  и  $\xi(t)$  независимы.

Попробуем найти математическое ожидание произведения.  $\xi(t)\xi(s)$  принимают значения 0 и 1. Произведение принимает значения 0 и 1. Получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = 0 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 0\} + 1 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 1\} =$$

Слагаемое с нулём пропадает

$$= P\{\xi(s) = 1, \xi(t) = 1\}.$$

Значения в точках совпадают, если между ними произошло чётное количество скачков  $M\xi(t)\xi(s) = P\{\xi(s) = 1\}P$  (на отрезке  $[s, t]$  будет чётное количество прыжков)  $= \frac{1}{2} \cdot P$  (на отрезке  $[s, t]$  будет чётное число прыжков). Мы знаем, с какой вероятностью происходит число прыжков.

Подходят любые чётные прыжки, то есть это вероятность объединения. Число скачков обозначим буквой  $N$ . Тогда  $P$  (на  $[s, t]$  чётное число скачков)  $= P(N_{[s,t]} \text{ чётное}) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(2k = N_{[s,t]}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(2k, t-s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-s)]^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Экспонента выносится за сумму. Остаётся сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Для того, чтобы это было экспонента, нужны ещё и нечётные степени

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^x.$$

Если мы вычтем вторую сумму, то получится

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-x}.$$

Теперь нужно сложить эти два выражения и поделить на 2, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x = \lambda(t-s).$$

Получили гиперболический косинус.

$$= \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{-\lambda(t-s)}}{2} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Умножим один сомножитель на другой,  $e^{\lambda(t-s)} \cdot e^{-\lambda(t-s)}$  дают единицу. Получаем

$$= \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{2}.$$

Это вероятность чётного числа скачков.

Выпишем, чему равна ковариационная функция. Математическое ожидание произведения нужно умножить на  $\frac{1}{2}$  и отнять  $\frac{1}{4}$ . Получится

$$K(t, s) = \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^{-2\lambda(t-s)}}{4}, \quad s < t.$$

Окончательный ответ:

$$K(t, s) = \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda|t-s|}.$$

## 2.9

*Задание.* Пусть  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — независимые случайные величины, которые имеют равномерное распределение на отрезке  $[-1, 1]$ . Найдите значения  $a$ , при которых почти все реализации случайной функции  $t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$  монотонно возрастают по  $t$ .

*Решение.*  $\xi(t) = t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$  — процесс, который задан при  $t > 0$ . Известно, что траектория этого процесса монотонно возрастает по  $t$  с вероятностью 1. Нужно найти  $a = \text{const}$ .

Реализация такого процесса выглядит как прямая линия (рис. 12), при этом  $\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0$ . Это случайная величина, так что коэффициент наклона должен быть положительным

$$P\{\xi(t) \nearrow\} = P\{\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0\} = 1 =$$

Число  $a$  должно быть таким, чтобы вероятность была единицей.

Рисуем траекторию процесса, считая, что все случайные величины неслучайны. Нужно, чтобы все реализации (прямые) возрастали.

Про  $\eta_1$  и  $\eta_2$  мы всё знаем. Это независимые случайные величины. Получаем двукратный интеграл

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}\{x + a(y + 2a) > 0\} dx dy,$$

где первые два множителя — плотности.



Рис. 12: Траектория случайного процесса

1. При  $a = 0$   $\eta_1 > 0$  — правая часть квадрата. Тогда событие выполняется с вероятностью

$$\frac{1}{2} \neq 1,$$

то есть  $a \neq 0$ .

2. Следующий случай: пусть  $a > 0$ . Получается, что условие переписывается в виде

$$\eta_2 + 2a \geq -\frac{\eta_1}{a},$$

откуда

$$\eta_2 \geq -\frac{\eta_1}{a} - 2a,$$

то есть на картинке это будет прямая. Мы возьмём всё, что над этой прямой

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Наша вероятность — это площадь квадрата над прямой. Вероятность не будет равна 1.  $a$  должно быть таким, чтобы прямая прошла через точку  $(-1, -1)$ , то есть  $-1 + a(2a - 1) \geq 0$ . Теперь можно найти  $a$  из неравенства  $2a^2 - a - 1 \geq 0$ . Сейчас скажем, при каких  $a$  это выполнено. Нужно найти корни уравнения.  $D = 1 + 8 = 9 = 3^2$ , значит

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 1,$$

то есть то, что нужно выбрать изображено на рисунке 13.



Рис. 13: Решение неравенства

Задавали  $a > 0$ , то есть при  $a \geq 1$  вероятность такого события — единица.

3. Теперь нужно задать  $a < 0$ . Отличие будет в том, как пройдёт прямая. Когда поделим на  $a$ , знак поменяется.

$$-\frac{\eta_1}{a} - 2a \geq \eta_2,$$

то есть нужно нарисовать прямую

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Прямая пройдёт через такие же точки:  $(-2a, -2a^2)$ , только если  $a$  — отрицательное, то  $-2a$  — положительное. Нужно будет выбрать всё, что ниже этой прямой.

Нужно, чтобы прямая прошла над точкой  $(-1, 1)$ . Имеем неравенство  $-1 + a(1 + 2a) \geq 0$ , откуда

$$a^1 + \frac{1}{2} \cdot a - 1 \geq 0.$$

Решая соответствующее уравнение находим, что

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1.$$

Получаем всё, что за корнями (рис. 14).

При  $a < 0$  получаем ответ:  $a \leq -1$ .



Рис. 14: Решение неравенства

Ответ к задаче:  $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , то есть  $|a| > 1$ . Тогда все реализации процесса будут возрастать.

## 2.10

*Задание.* Пусть случайная величина  $\tau \in (0, 1)$  имеет непрерывное распределение и пусть

$$\xi(t) \equiv 0; \eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Изобразите траектории этих процессов. Докажите, что эти процессы являются стохастически эквивалентными, то есть  $\forall t \in [0, 1] : P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = 0$ .

*Решение.*  $\tau$  — это случайная величина с непрерывным распределением — та, у которой функция распределения  $F_\tau$  — непрерывна.

Скачок функции распределения в точке  $x$  — это  $\Delta F_\tau(x) = P(\tau = x) = 0$ , где

$$F_\tau(x) = P(\tau \leq x),$$

а  $F_\tau(-x) = P(\tau < x)$ . В нашем случае нет скачков, то есть в фиксированный  $x$  случайная величина  $\tau$  не попадёт. Рассматривается 2 процесса: один процесс — это  $\xi(t) \equiv 0$ , второй процесс — это

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau. \end{cases}$$

Посмотрим, какие траектории у этих процессов (рис. 15). Процессы заданы на

$$t \in [0, 1].$$

Стохастически эквивалентные означает, что если зафиксировать момент времени  $t$ , то в этот момент  $P\{\xi(t) = \eta(t)\} = P\{\eta(t) = 0\} = P(\tau \neq t) = 1$ . С точки зрения анализа это разные функции. У  $\eta$  всегда есть скачок, у  $\xi$  никогда скачков нет. Помним, что  $\xi(t) \equiv 0$ . Тем не менее, вероятность  $P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = P\{\eta(t) \neq 0\} = P(\tau = t) = 0$ , а это значит, что в фиксированной точке процессы с вероятностью 1 совпадают. Если зафиксируем несколько точек  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , то вероятность

$$P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) = (\eta(t_1), \dots, \eta(t_n))\} = 1.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}^\xi = \mu_{t_1, \dots, t_n}^\eta.$$

Конечномерные распределения не определяют траектории процесса.





Рис. 15: Траектория случайных процессов

## Домашнее задание

### 2.12

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R},$$

где  $X$  — равномерно распределённая на отрезке  $(a, b)$  случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса  $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ . Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R}$ , где  $X \sim U(a, b)$ .

Нужно найти  $m(t)$ ,  $D\xi(t)$ ,  $K(t, s)$ , конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент  $t$

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 16: чем больше  $X$ , тем больше угол наклона прямой к оси  $0t$ .



Рис. 16: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt + a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и вычисляем математическое ожидание

$$\begin{aligned} &= M[(Xt + a)(Xs + a)] - M(Xt + a)M(Xs + a) = \\ &= M[X^2ts + Xa(t + s) + a^2] - \left(t \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) \left(s \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) = \\ &= ts \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3} + a(t + s) \cdot \frac{a+b}{2} + a^2 - ts \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - ta \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 - \\ &\quad - as \cdot \frac{a+b}{2} = \\ &= ts \left( \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right) + (t + s)a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot a(t + s) = \\ &= ts \cdot \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = ts \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = ts \cdot \frac{(a-b)^2}{12}. \end{aligned}$$

Считаем функцию распределения случайного вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  — рис. 17.



Рис. 17: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$ . Вместо  $\xi$  напомним формулу  $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n)$ . Величины зависимы, потому что все они выражаются через  $X$ . Все неравенства решаем относительно  $X$

$$P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n) = P(Xt_1 \leq x_1 - a, \dots, Xt_n \leq x_n - a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X \leq \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, X \leq \frac{x_n - a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P \left\{ X \leq \min \left( \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) \right\} =$$

Обозначим минимум буквой  $m$  для удобства

$$= P(X \leq m) = \int_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{X \in (a, b)\} dX = \frac{1}{b-a} \int_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[ \min \left( \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) - a \right]$$

при  $m \in (a, b)$ , иначе — ноль.

## 2.13

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = U \cos \theta t + V \sin \theta t, \quad t \in T,$$

где  $U, V$  — независимые случайные величины с заданными характеристиками:  $MU = MV = 0$ ,  $DU = DV = \sigma^2$ ,  $\theta$  — неслучайная величина. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\{\xi(t), t \in T\}$ .

*Решение.* Нужно найти  $m(t)$ ,  $D\xi(t)$ ,  $K(t, s)$ .

Найдём математическое ожидание в момент  $t$ . По свойствам

$$m(t) = M\xi(t) = M(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos \theta t \cdot MU + \sin \theta t \cdot MV = 0.$$

Можно сделать преобразование  $U \cos \theta t + V \sin \theta t = C \sin(\theta t + \omega)$ , где  $C = \sqrt{U^2 + V^2}$ . Траектории такого процесса изображены на рисунке 18: график синуса сжимается к оси ординат, когда модули случайных величин  $U$  и  $V$  растут.



Рис. 18: Траектория процесса

Найдём дисперсию в момент  $t$ . По свойствам

$$D\xi(t) = D(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos^2 \theta t \cdot DU + \sin^2 \theta t \cdot DV =$$

Подставим известные значения дисперсии

$$= \cos^2 \theta t \cdot \sigma^2 + \sin^2 \theta t \cdot \sigma^2 = \sigma^2 (\cos^2 \theta t + \sin^2 \theta t) = \sigma^2.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставим выражения для случайного процесса в первое слагаемое, а второе равно нулю

$$= M[(U \cos \theta t + V \sin \theta t) \cdot (U \cos \theta s + V \sin \theta s)] =$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} &= M(U^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + UV \cos \theta t \cdot \sin \theta s + VU \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + V^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \\ &= DU \cdot \cos \theta t \cdot \cos \theta s + MU \cdot MV \cdot \cos \theta t \cdot \sin \theta s + MV \cdot MU \cdot \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + DV \cdot \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \sigma^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sigma^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \\ &= \sigma^2 \cdot (\cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \sigma^2 \cos(\theta t - \theta s) = \sigma^2 \cos[\theta(t - s)]. \end{aligned}$$

## 2.14

*Задание.* Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса

$$\xi(t) = 2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5, \quad t \in T,$$

где  $\nu$  — известный неслучайный параметр, а  $u, v$  — случайные величины с известными характеристиками:

$$Mu = 1, \quad Mv = 2, \quad Du = 0.1, \quad Dv = 0.9, \quad cov(u, v) = -0.3.$$

*Решение.* Нужно найти  $m(t)$ ,  $D\xi(t)$ ,  $K(t, s)$ .

Найдём математическое ожидание в момент  $t$ . По свойствам

$$m(t) = M(2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) = 2 \sin \nu t \cdot Mu + 3t^2 Mv + 5 = 2 \sin \nu t + 6t^2 + 5.$$

Траектория такого процесса изображена на рисунке 19 при  $\nu = 1$ ,  $u = 1$ ,  $v = 2$ .

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t) \cdot M\xi(s) =$$



Рис. 19: Траектория процесса

Подставим выражения для случайного процесса и его математические ожидания

$$\begin{aligned}
 &= M \left[ (2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) (2u \sin \nu s + 3vs^2 + 5) \right] - \\
 &\quad - (2 \sin \nu t + 6t^2 + 5) (2 \sin \nu s + 6s^2 + 5) = \\
 &= M(4u^2 \sin \nu t \cdot \sin \nu s + 6uv \sin \nu t \cdot s^2 + 10u \sin \nu t + 6vt^2 u \sin \nu s + 9v^2 t^2 s^2 + \\
 &\quad + 15vt^2 + 10u \sin \nu s + 15vs^2 + 25) - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - \\
 &\quad - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 = \\
 &= 4 \sin \nu t \cdot Mu^2 + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + 10 \sin \nu t \cdot Mu + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + \\
 &\quad + 9t^2 s^2 Mv^2 + 15t^2 Mv + 10 \sin \nu s \cdot Mu + 15s^2 \cdot Mv + 25 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - \\
 &\quad - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 =
 \end{aligned}$$

Вычислим вторые моменты

$$Mu^2 = Du + (Mu)^2 = 0.1 + 1 = 1.1, \quad Mv^2 = Dv + (Mv)^2 = 0.9 + 4 = 4.9.$$

По определению ковариации  $cov(u, v) = M(uv) - Mu \cdot Mv$ , откуда

$$M(uv) = cov(u, v) + Mu \cdot Mv = -0.3 + 1 \cdot 2 = 2 - 0.3 = 1.7.$$

Подставим полученные значения в функцию ковариации

$$\begin{aligned}
 &= 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s \cdot 1.1 + 6 \sin \nu t \cdot s^2 \cdot 1.7 + 10 \sin \nu t + 6t^2 \sin \nu s \cdot 1.7 + \\
 &\quad + 9t^2 s^2 \cdot 4.9 + 15t^2 \cdot 2 + 10 \sin \nu s + 15s^2 \cdot 2 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - \\
 &\quad - 10 \sin \nu t - 12t^2 \cdot \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 = \\
 &= 0.4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 1.8 \sin \nu t \cdot s^2 - 1.8t^2 \sin \nu s + 8.1t^2 s^2.
 \end{aligned}$$

Найдём дисперсию в момент  $t$ . Из формулы для ковариации

$$D\xi(t) = K(t, t) = 0.4 \sin^2 \nu t - 3.6 \sin \nu t \cdot t^2 + 8.1t^4.$$

### 2.15

*Задание.* Найдите ковариационную функцию процесса

$$Y(t) = \psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n,$$

где  $\psi_1, \dots, \psi_n$  — произвольные числовые функции от  $t$ , а  $X_1, \dots, X_n$  — некоррелируемые случайные величины с дисперсиями  $D_1, \dots, D_n$ .

*Решение.* Нужно найти

$$K(t, s) = \text{cov}(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n, \psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) =$$

Распишем по определению

$$\begin{aligned} &= M[(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n)(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n)] - \\ &- M(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n) \cdot M(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M(X_i X_j) - \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M X_i \cdot M X_j = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D X_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D X_n = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D_n. \end{aligned}$$

### 2.16

*Задание.* Пусть  $\eta$  и  $\zeta$  — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями  $1/2$ . Найдите конечномерные распределения случайного процесса

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}, \quad t > 0.$$

*Решение.* Для произвольных натуральных  $n \geq 1$ , произвольных моментов времени  $t_1, \dots, t_n \in T$  и произвольных действительных чисел  $x_1, \dots, x_n$  находим

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} =$$

Подставляем выражения для случайного процесса

$$= P\left(\frac{\eta + \zeta}{t_1} \leq x_1, \frac{\eta + \zeta}{t_2} \leq x_2, \dots, \frac{\eta + \zeta}{t_n} \leq x_n\right) =$$

Переносим моменты времени вправо

$$= P(\eta + \zeta \leq x_1 t_1, \eta + \zeta \leq x_2 t_2, \dots, \eta + \zeta \leq x_n t_n) =$$

Независимые случайные величины  $\eta$  и  $\zeta$  имеют нормальное распределение с параметрами  $a = 0$  и

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

Их сумма имеет стандартное нормальное распределение. Пусть

$$\eta + \zeta = X \sim N(0, 1).$$

Тогда

$$= P(X \leq x_1 t_1, X \leq x_2 t_2, \dots, X \leq x_n t_n) = P\left(X \leq \min_{i=1, n} x_i t_i\right) =$$

Запишем через плотность

$$= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где обозначено

$$z = \min_{i=1, n} x_i t_i.$$

## 2.17

*Задание.* Найдите характеристическую функцию случайной величины  $\xi(\tau)$ , где  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  — процесс из предыдущей задачи, а  $\tau$  — независимая от  $\xi$  случайная величина, которая принимает значения  $+1$  и  $-1$  с вероятностями  $1/2$ .

*Решение.*

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}.$$

Задана случайная величина

$$\tau = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Интересует

$$\varphi_{\xi(\tau)}(\lambda) = M e^{i\xi(\tau)\lambda} = M e^{i \cdot \frac{\eta + \zeta}{\tau} \cdot \lambda} =$$

Как и в предыдущей задаче  $\eta + \zeta = X \sim N(0, 1)$ . Получаем

$$= M e^{i \cdot \frac{X}{\tau} \cdot \lambda} = M e^{-\frac{\lambda^2}{2\tau^2}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

## 2.18

*Задание.* Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — случайные величины, причём  $\eta$  имеет симметричное относительно нуля распределение и  $P(\eta = 0) = 0$ . Найдите вероятность того, что реализации случайного процесса  $\zeta(t) = \xi + t(\eta + t)$ ,  $t \geq 0$  возрастают.

*Решение.* Известно, что траектории процесса возрастают по  $t$  при  $t \geq 0$ .



Рис. 20: Траектория процесса

Реализация такого процесса выглядит как парабола (рис. 20) с вершиной в точке с координатами

$$t_0 = -\frac{\eta}{2}, \zeta_0 = t_0^2 + \eta t_0 + \xi = \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^2}{2} + \xi = \xi - \frac{\eta^2}{4}$$

Это случайная величина, так что

$$\begin{aligned} P\{\zeta(t) \geq 0, t \geq 0\} &= P\{\xi + t(\eta + t) \geq 0, t \geq 0\} = \\ &= P(\text{вершина параболы } \zeta = t^2 + \eta t + \xi \text{ лежит слева от нуля}) = \\ &= P\left(-\frac{\eta}{2} \leq 0\right) = P(\eta \geq 0) = \end{aligned}$$

Случайная величина  $\eta$  имеет симметричное распределение

$$= \frac{1}{2}.$$

## 2.19

*Задание.* Случайный эксперимент состоит в двухразовом подбрасывании монеты. Обозначим через  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  результат эксперимента и обозначим процессы  $\{X(t), 0 \leq t < 2\}$  и  $\{Y(t), 0 \leq t < 2\}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathbb{1}_{[0,1)}(t) \cdot \mathbb{1}\{\omega_1 = P\} + \mathbb{1}_{[1,2)}(t) \cdot \mathbb{1}\{\omega_2 = P\}, 0 \leq t < 2, \\ Y(t) &= 1 - X(t), 0 \leq t < 2. \end{aligned}$$

Докажите, что процессы  $X(t)$  и  $Y(t)$  имеют одинаковые конечномерные распределения, но не являются стохастически эквивалентными.

*Решение.* Рассматривается 2 процесса. Процессы заданы на  $t \in [0, 2)$ .

Это разные функции. Вероятность

$$P\{X(t) \neq Y(t)\} = P\{X(t) \neq 1 - X(t)\} = 1,$$

а это значит, что процессы с вероятностью 1 не совпадают. Зафиксируем несколько точек  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Обозначим через  $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik}$  моменты  $t$ , которые лежат между 0 и 1, и  $t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{j(n-k)}$  — все остальные. Найдём



вероятность

$$\begin{aligned}
& P\{X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n\} = \\
& = P\{X(t_{i1}) = x_{i1}, \dots, X(t_{ik}) = x_{ik}, X(t_{j1}) = x_{j1}, \dots, \\
& \quad X(t_{j(n-k)}) = x_{j(n-k)}\} = \\
& = P(\mathbb{1}\{\omega_1 = P\} = x_{i1}, \dots, \mathbb{1}\{\omega_1 = P\} = x_{ik}, \\
& \quad \mathbb{1}\{\omega_2 = P\} = x_{j1}, \dots, \mathbb{1}\{\omega_2 = P\} = x_{j(n-k)}) .
\end{aligned}$$

Рассматриваем только случай, когда  $x_{i1}, \dots, x_{ik}$  одинаковые, и

$$x_{j1}, \dots, x_{j(n-k)}$$

одинаковые.

$$P\{X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично

$$P\{Y(t_1) = x_1, \dots, Y(t_n) = x_n\} = \frac{1}{4}.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения.



# Занятие 3. Процесс Пуассона

## Контрольные вопросы и задания

Приведите определение процесса Пуассона.

$\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона, если

1.  $N(0) = 0$ ;
2. при  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  события

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

— независимые;

3. число событий на интервале зависит только от длины интервала, то есть есть однородность приращений

$$N(t+s) - N(t) \stackrel{d}{=} N(s) \sim \text{Pois}(\lambda s).$$

Запишите конечномерные распределения процесса Пуассона.

Одномерные распределения

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Двумерные распределения:  $t_1 < t_2$ . Перейдём к приращениям

$$P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2\} = P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} =$$

Случайная величина  $N(t_1) \sim \text{Pois}(\lambda t_1)$ , а  $N(t_2) - N(t_1) \sim \text{Pois}(\lambda(t_2 - t_1))$ . Совместная вероятность — это произведение вероятностей

$$= e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdot \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!}.$$



Рис. 21: График пуассоновского процесса

**Какой вид имеют траектории процесса Пуассона?**

Траектория изображена на рисунке 21.

**Какое содержание имеет параметр процесса Пуассона?**

$N(t)$  — число событий, произошедших до момента времени  $t$ .

## Аудиторные задачи

### 3.2

*Задание.* Пусть  $\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda = 2$ .

Вычислите вероятности:

- a)  $P(N(6) = 3)$ ;
- b)  $P(N(6) = 3, N(9) = 7, N(15) = 10)$ ;
- c)  $P(N(6) = 3 \mid N(9) = 7)$ ;
- d)  $P(N(9) = 7 \mid N(6) = 3)$ .

*Решение.*

- a)  $N(6) \sim \text{Pois}(6 \cdot 2)$ , поэтому

$$P(N(6) = 3) = \frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12};$$

- b) нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{aligned} & P(N(6) = 3, N(9) = 7, N(15) = 10) = \\ &= P\{N(6) = 3, N(9) - N(6) = 4, N(15) - N(9) = 3\} = \\ &= \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}\right) \cdot \left(\frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}\right) \cdot \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}\right); \end{aligned}$$

с) по определению условной вероятности

$$\begin{aligned} P(N(6) = 3 \mid N(9) = 7) &= \frac{P(N(6) = 3, N(9) = 7)}{P(N(9) = 7)} = \\ &= \frac{\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12} \cdot \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}}{\frac{18^7}{7!} \cdot e^{-18}} = \frac{12^3 \cdot 6^4 \cdot 7!}{3! \cdot 4! \cdot 18^7}; \end{aligned}$$

д) аналогично предыдущему пункту

$$\begin{aligned} P(N(9) = 7 \mid N(6) = 3) &= \frac{P(N(9) = 7, N(6) = 3)}{P(N(6) = 3)} = \\ &= \frac{\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12} \cdot \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}}{\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}} = \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6} = \frac{P(N(6) = 3) P(N(3) = 4)}{P(N(6) = 3)}. \end{aligned}$$

### 3.3

*Задание.* Пусть  $\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Вычислите условное математическое ожидание  $M[N(s) \mid N(t)]$  для

$$0 \leq s \leq t.$$

*Решение.* Что ж такое условное математическое ожидание?  $N(s)$  и  $N(t)$  — дискретные величины, то есть

$$M[N(s) \mid N(t)] = \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot P\{N(s) = l \mid N(t) = k\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\{N(s) = l \mid N(t) = k\} = \frac{P\{N(t) - N(s) = k - l\} P\{N(s) = l\}}{P\{N(t) = k\}} =$$

подставляем пуассоновские вероятности

$$= \frac{\frac{[\lambda(t-s)]^{k-l}}{(k-l)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}} \cdot \frac{(\lambda s)^l}{l!} \cdot e^{-\lambda s} = \frac{k! (t-s)^{k-l} s^l}{(k-l)! l! t^k} = C_k^l \cdot \left(\frac{t-s}{t}\right)^{k-l} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^l.$$

Имеем биномиальное распределение с параметрами  $k$  и  $\frac{s}{t}$ .

Вывод: при условии  $N(t) = k$  мы нашли распределение

$$N(s) \sim B\left(k, \frac{s}{t}\right).$$

Условное математическое ожидание

$$M[N(s) \mid N(t) = k] = \frac{ks}{t}.$$

Ответ:  $\frac{N(t) \cdot s}{t}$ . Куда пропала сумма?

$$M[N(s) | N(t) = k] = \sum_l l \cdot P[N(s) = l | N(t) = k] =$$

Нашли эту вероятность

$$= \sum_l l \cdot P\left\{Bin\left(k, \frac{s}{t}\right) = l\right\} = MBin\left(k, \frac{s}{t}\right) = k \cdot \frac{s}{t}.$$

Условное математическое ожидание — это математическое ожидание по условному распределению.

### 3.4

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Найдите вероятность того, что первый прыжок процесса  $N$  произошёл до момента времени  $s \in [0, t]$  при условии, что на отрезке  $[0, t]$  произошло ровно  $n$  прыжков.

*Решение.* Нужно найти вероятность  $P(\text{первый прыжок произошёл до момента } s \in [0, t] | N(t) = n)$ . Нужно это условие переписать через пуассоновский процесс. Получаем  $P(\text{первый прыжок произошёл до момента } s \in [0, t] | N(t) = n) = P\{N(s) \geq 1 | N(t) = n\}$ . Значения зависимые

$$P\{N(s) \geq 1 | N(t) = n\} = 1 - P\{N(s) = 0 | N(t) = n\} =$$

Условное распределение биномиальное

$$= 1 - P\left\{Bin\left(n, \frac{s}{t}\right) = 0\right\} = 1 - C_n^0 \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-0} = 1 - \left(1 - \frac{s}{t}\right)^n.$$

### 3.5

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  является процессом Пуассона с параметром  $\lambda$ . Докажите, что при условии, что  $N$  имеет ровно 1 прыжок на отрезке  $[a, b]$ , момент этого прыжка является равномерно распределённой на отрезке  $[a, b]$  случайной величиной.

*Решение.* Обозначим  $\tau$  — момент прыжка на отрезке  $[a, b]$ . Нужно найти  $P\{\tau \leq t | N(b) - N(a) = 1\} = P\{N(t) - N(a) = 1 | N(b) - N(a) = 1\}$ .

Изобразим процесс на графике 22.

У пуассоновского процесса есть однородность приращений

$$\begin{aligned} P\{N(t) - N(a) = 1 | N(b) - N(a) = 1\} &= P\{N(t - a) = 1 | N(b - a) = 1\} = \\ &= P\left\{Bin\left(1, \frac{t - a}{b - a}\right) = 1\right\} = \end{aligned}$$

Это бернуллиевская величина

$$= \frac{t - a}{b - a}.$$

Получилось равномерное распределение, что и требовалось доказать.



Рис. 22: График пуассоновского процесса

### 3.6

*Задание.* Пусть  $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$  — последовательность независимых показатель-но распределённых случайных величин с параметром  $\lambda$ . Положим

$$T_0 = 0, T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k, n \geq 1; \nu(t) = \max(n : T_n \leq t), t \geq 0.$$

а) Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$$

почти наверное.

б) Докажите, что случайная величина  $\tau_1 = T_{\nu(t)+1} - t$  имеет показатель-ное распределение с параметром  $\lambda$ .

с) Докажите, что  $\{\nu(t), t \geq 0\}$  является процессом Пуассона с интенсив-ностью  $\lambda$ .

*Решение.*  $\nu(t) = \max(n : T_n \leq t)$  — случайный процесс.

Посмотрим, как этот процесс выглядит (рис. 23).

$T_n$  — это накопительные суммы.

В момент  $T_1$  только  $T_1 \leq t$ , то есть от  $T_1$  до  $T_2$  значение процесса будет равно единице.



Рис. 23: График процесса

Тут расставили стрелочки, то есть  $\nu$  — это непрерывная справа функция. То есть  $\nu$  — это модификация пуассоновского процесса. Конечномерные распределения несут ещё не всю информацию.

а) Нужно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$$

почти наверное.

Это равенство — это просто закон больших чисел, потому что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k = T_n \rightarrow M\tau_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Сумма  $T_n$  сходится к бесконечности. Это нужно для того, чтобы определить процесс на всей оси. То есть вывод из пункта а) следующий

$$T_n = n \cdot \frac{T_n}{n} \rightarrow \infty \cdot \frac{1}{\lambda} = \infty$$

и  $\nu(t)$  определено при всех  $t$ .

б)  $\tilde{\tau}_1$  — это величина до следующего прыжка.

Этот пункт означает, что процесс  $\nu$  имеет однородные приращения.

Докажем, что  $\tilde{\tau}_1$  имеет действительно показательное распределение. Проще всего для показательного распределения посчитать

$$P(\tilde{\tau}_1) = 1 - F = 1 - (1 - e^{-\lambda s}) = e^{-\lambda s},$$

где  $F$  — функция распределения. Вопрос: есть ли такое равенство.

Значит,  $P(\tilde{\tau}_1 > s) = P(T_{\nu(t)+1} > t + s)$ . Величина  $T$  берётся в случайный момент. Такая вероятность может быть записана через сумму по всем возможным  $T$ , то есть

$$P(T_{\nu(t)+1} > t + s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \leq t < T_{n+1}, T_{n+1} > t + s) =$$

Одно условие убирается

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(T_n \leq t, T_{n+1} \leq t + s) =$$

Момент  $T_{n+1}$  — это момент следующего скачка после  $T_n$ . Тогда

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \leq t, T_n + \tau_{n+1} > t + s) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t, \tau_{n+1} \geq (t - T_n) + s\} = \end{aligned}$$



Моменты  $\tau_{n+1}$  и  $T_n$  — независимые величины.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} MP[T_n \leq t, \tau_{n+1} > (t - T_n) + s | T_n] =$$

Вспомним, какая вероятность  $P(\tau > x) = e^{-\lambda x}$ . Тогда

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

Для показательных величин выполнено соотношение

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda y} P(\tau > x)$$

— свойство отсутствия последействия.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda s} P(T_n \leq t, \tau_{n+1} > t - T_n) = e^{-\lambda s} \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \leq t < T_{n+1}) =$$

Такая сумма равна единице, потому что  $t$  всегда попадает между  $T_n$  и  $T_{n+1}$  при каком-то  $n$ , потому

$$= e^{-\lambda s},$$

так что такая величина  $\tilde{\tau}_1$  действительно имеет показательное распределение.

с) Найдём конечномерные распределения  $\nu(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} & P\{\nu(t_1) = k_1, \nu(t_2) = k_2, \dots, \nu(t_n) = k_n\} = \\ & = P\left(\sum_{l=1}^{k_1} \tau_l \leq t_1 < \sum_{l=1}^{k_1+1} \tau_l, \dots, \sum_{l=1}^{k_n} \tau_l \leq t_n < \sum_{l=1}^{k_n+1} \tau_l\right) = \\ & = \int \dots \int_{k_n+1} \lambda^{k_n+1} e^{-\lambda(x_{k_1} + \dots + x_{k_n} + 1)} dx_{k_n+1} \dots dx_1 = \\ & = \lambda^{k_n+1} \cdot \int \dots \int_{k_n, 0 < x_{k_1} + \dots + x_{k_n} \leq t, t = \sum t_i} e^{-\lambda(x_{k_1} + \dots + x_{k_n})} \times \\ & \quad \times \int_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{k_n} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} \dots dx_1 = \end{aligned}$$

Возьмём последний интеграл

$$\int_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{k_n} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x_{k_n+1}} \Big|_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{+\infty}.$$

Подставляем и получаем

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lambda^{k_n+1}}{\lambda} \int \dots \int_{k_n, 0 < x_{k_1} + \dots + x_{k_n} \leq t} e^{-\lambda \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i} e^{-\lambda t + \lambda \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i} dx_{k_n} \dots dx_{k_1} = \\
 &= \lambda^{k_n} e^{-\lambda t} \int \dots \int_{0 < \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i \leq 1} dx_{k_n} \dots dx_{k_1} =
 \end{aligned}$$

Чтобы понять, чему будет равен этот интеграл, рассмотрим частные случаи:

(а) когда есть двойной интеграл

$$\begin{aligned}
 \iint_{0 < x_1 + x_2 \leq t} dx_2 dx_1 &= \int_0^t \int_0^{t-x_1} dx_2 dx_1 = \int_0^t x_2 \Big|_0^{t-x_1} dx_1 = \\
 &= \int_0^t (t - x_1) dx_1 = t \int_0^t dx_1 - \int_0^t x_1 dx_1 = t^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} = \\
 &= \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2!};
 \end{aligned}$$

(b) когда есть тройной интеграл

$$\begin{aligned}
\iiint_{0 < x_1 + x_2 + x_3 \leq t} dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^t \int_0^{t-x_1} \int_0^{t-x_1-x_2} dx_3 dx_2 dx_1 = \\
&= \int_0^t \int_0^{t-x_1} (t-x_1-x_2) dx_2 dx_1 = \\
&= \int_0^t \left( t \int_0^{t-x_1} dx_2 - x_1 \int_0^{t-x_1} dx_2 - \int_0^{t-x_1} x_2 dx_2 \right) dx_1 = \\
&= \int_0^t \left[ t(t-x_1) - x_1(t-x_1) - \frac{(t-x_1)^2}{2} \right] dx_1 = \\
&= \int_0^t \frac{2t^2 - 2tx_1 - 2tx_1 + 2x_1^2 - t^2 + 2tx_1 - x_1^2}{2} dx_1 \times \\
&\times \int_0^t \frac{t^2 - 2x_1t + x_1^2}{2} dx_1 = \int_0^t \frac{(t-x_1)^2}{2} dx_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(t-x_1)^3}{3} \Big|_0^t = \\
&= \frac{t^3}{2 \cdot 3} = \frac{t^3}{3!}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\int \cdots \int_{0 < \sum_{i=k_1}^{k_n} x_i \leq 1} dx_{k_n} \cdots dx_{k_1} = \frac{t^{k_n}}{k_n!}.$$

Тогда вероятность равна

$$= \frac{\lambda^{k_n} e^{-\lambda t} t^{k_n}}{k_n!} = \frac{(\lambda t)^{k_n}}{k_n!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Получился процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ .

### 3.7

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с параметром  $\lambda$  и пусть  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  — независимая от  $N$  последовательность независимых бернуллиевских случайных величин с параметром  $p \in (0, 1)$ . Положим

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

Докажите, что процесс  $\xi = \{S_{N(t)}, t \geq 0\}$  является процессом Пуассона с параметром  $\lambda t$ .

Решение. Пуассоновский процесс

$$N(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} 1$$

— число событий до момента  $N(t)$ . В  $\xi$  складываем не 1, а  $Y_i = 0$  или 1.

Начнём с того, что посчитаем одномерные распределения и посмотрим, что это тоже пуассоновские величины. Есть сумма случайного числа слагаемых. Нужно перебирать все возможные значения  $N(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} P\{S_{N(t)} = k\} &= P\{Y_1 + \dots + Y_{N(t)} = k\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n, Y_1 + \dots + Y_n = k\} = \end{aligned}$$

Сумма  $Y_1 + \dots + Y_n$  — биномиальная величина

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

Преобразуем

$$= e^{-\lambda t} p^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot C_n^k (1-p)^{n-k} =$$

Распишем  $C_n^k$  явно

$$= e^{-\lambda t} p^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda t} p^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

Имеем ряд для экспоненты. Заменим  $n-k$  на новый индекс суммирования

$$= \frac{e^{-\lambda t} p^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+k} (1-p)^n}{n!} =$$

Выносим  $(\lambda t)^k$  за знак суммы

$$= \frac{e^{-\lambda t} p^k (\lambda t)^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n (1-p)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda t} (p\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{\lambda t(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^k}{k!}$$

— пуассоновская вероятность.

Вывод:  $S_{N(t)} \sim Pois(\lambda p t)$ , то есть у такого процесса одномерные распределения такие же, как у пуассоновского с параметром  $\lambda p t$ .

## Домашнее задание

### 3.11

Задание. Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda = 5$ . Вычислите вероятности:

- a)  $P(N(2) \geq 3, N(5) \leq 4)$ ;
- b)  $P(N(2) \geq 3, N(3) \geq 4, N(5) \leq 3)$ ;
- c)  $P(N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) \leq 6)$ ;
- d)  $P(N(2) = 3 \mid N(3) = 5)$ ;
- e)  $P(N(3) = 5 \mid N(2) = 3)$ .

*Решение.*

- a) Рассмотрим все возможные случаи

$$\begin{aligned} P(N(2) \geq 3, N(5) \leq 4) &= \\ &= P\{N(2) = 3, N(5) = 3\} + P\{N(2) = 3, N(5) = 4\} + \\ &+ P\{N(2) = 4, N(5) = 4\} = \end{aligned}$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{aligned} &= P\{N(2) = 2, N(5) - N(2) = 3 - 3\} + \\ &+ P\{N(2) = 3, N(5) - N(2) = 4 - 3\} + \\ &+ P\{N(2) = 4, N(5) - N(2) = 4 - 4\} = \\ &= P\{N(2) = 3\} P\{N(3) = 0\} + P\{N(2) = 3\} P\{N(3) = 1\} + \\ &+ P\{N(2) = 4\} P\{N(3) = 0\} = \\ &= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^0}{0!} \cdot e^{-15} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^1}{1!} \cdot e^{-15} + \\ &+ \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^0}{0!} \cdot e^{-15} = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} \cdot 15 + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-25} = \\ &= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} \cdot 16 + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-25}; \end{aligned}$$

- b) с ростом времени значение процесса Пуассона не должно уменьшаться  
 $P(N(2) \geq 3, N(3) \geq 4, N(5) \leq 3) = 0$ ;
- c) как в первом пункте рассмотрим все возможные случаи

$$\begin{aligned} P(N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) \leq 6) &= \\ &= P\{N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) = 5\} + \\ &+ P\{N(2) = 3, N(3) = 5, N(4) = 6\} = \end{aligned}$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{aligned}
&= P\{N(2) = 3, N(3) - N(2) = 5 - 3, N(4) - N(3) = 5 - 5\} + \\
&+ P\{N(2) = 3, N(3) - N(2) = 5 - 3, N(4) - N(3) = 6 - 5\} = \\
&= P\{N(2) = 3\} \cdot P\{N(1) = 2\} \cdot P\{N(1) = 0\} + \\
&+ P\{N(2) = 3\} \cdot P\{N(1) = 2\} \cdot P\{N(1) = 1\} = \\
&= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} = \\
&= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^3}{2!} = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot 6;
\end{aligned}$$

d) по определению условной вероятности

$$P(N(2) = 3 \mid N(3) = 5) = \frac{P\{N(2) = 3, N(3) = 5\}}{P\{N(3) = 5\}} =$$

Перейдём к приращениям и подставим выражения для вероятностей

$$= \frac{\frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}}{\frac{15^5}{5!} \cdot e^{-15}} =$$

Экспоненты сокращаются

$$= \frac{10^3 \cdot 5^2 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 15^5};$$

e) аналогично предыдущему пункту

$$P(N(3) = 5 \mid N(2) = 3) = \frac{P\{N(3) = 5, N(2) = 3\}}{P\{N(2) = 3\}} =$$

Перейдём к приращениям

$$= \frac{P\{N(2) = 3, N(1) = 2\}}{P\{N(2) = 3\}} = P\{N(1) = 2\} = \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}.$$

### 3.12

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda = 1$ . Найдите характеристическую функцию случайной величины

$$N(3) - N(2) + N(1).$$

*Решение.*  $N(t) \sim Pois(t)$ . Процесс Пуассона имеет однородность приращений  $N(3) - N(2) \sim N(3 - 2) = N(1) \sim Pois(1)$ , а  $N(1) \sim Pois(1)$ .

Приращения  $N(3) - N(2)$  и  $N(1)$  — независимы, следовательно,

$$N(3) - N(2) + N(1) \sim Pois(1 + 1) = Pois(2).$$

Тогда характеристическая функция  $\varphi_{N(3)-N(2)+N(1)}(t) = e^{2(e^{it}-1)}$ .

### 3.13

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Найдите условную вероятность  $P(N(s) = k | N(t) = n)$  при  $s > t$  и вычислите условное математическое ожидание  $M[N(s) | N(t)]$  для  $s > t$ .

*Решение.*  $N(t) \sim Pois(\lambda t)$ .

Что такое условное математическое ожидание?

$N(s)$  и  $N(t)$  — дискретные величины, то есть

$$M[N(s) | N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\{N(s) = k | N(t) = n\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\{N(s) = k | N(t) = n\} = \frac{P\{N(s) = k, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Перепишем через приращения и воспользуемся их независимостью

$$= \frac{P\{N(t) = n\} P\{N(s-t) = k-n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Сократим одинаковые множители в числителе и знаменателе

$$= P\{N(s-t) = k-n\} =$$

Подставим пуассоновские вероятности

$$= \frac{[\lambda(s-t)]^{k-n}}{(k-n)!} \cdot e^{-\lambda(s-t)}.$$

Имеем пуассоновское распределение с параметром  $\lambda(s-t)$ .

Вывод: при условии  $N(t) = n$  мы нашли распределение

$$N(s) \sim Pois(\lambda(s-t)).$$

Условное математическое ожидание

$$M[N(s) | N(t)] = MPois(\lambda(s-t)) = \lambda(s-t).$$

### 3.14

*Задание.* Пусть  $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ ,  $\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$  являются независимыми процессами Пуассона с параметрами  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно. Положим  $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$ . Докажите, что процесс  $\zeta = \{\zeta(t), t \geq 0\}$  является процессом Пуассона с параметром  $\lambda + \mu$ .

*Решение.*

$$\varphi_{\zeta}(t) = \varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \varphi_{\eta}(t) = e^{\lambda t(e^{it}-1)} e^{\mu t(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)t(e^{it}-1)}.$$

Следовательно,  $\zeta \sim Pois(\lambda + \mu)$ .

### 3.15

*Задание.* Пусть  $\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Выясните, какой из следующих процессов является пуассоновским:

$$\{N_1(t) = 2N(t), t \geq 0\}; \{N_2(t) = N(2t), t \geq 0\}; \{N_3(t) = N(t^2), t \geq 0\}; \\ \{N_4(t) = N(t+s) - N(s), t \geq 0\},$$

где  $s > 0$  — фиксированное число. Для пуассоновских процессов укажите их интенсивность.

*Решение.*

$$P\{N_1(t) = k\} = P\{2N(t) = k\} = P\left\{N(t) = \frac{k}{2}\right\} = 0,$$

так как пуассоновский процесс принимает только неотрицательные целые значения. Следовательно,  $\{N_1(t), t \geq 0\}$  — не процесс Пуассона.

$$P\{N_2(t) = k\} = P\{N(2t) = k\} = \frac{(\lambda \cdot 2t)^k}{k!} \cdot e^{-2\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью  $2\lambda$ . Независимость и однородность приращений выполняются.

Перейдём к третьему процессу

$$P\{N_3(t) = k\} = P\{N(t^2) = k\} = \frac{(\lambda t^2)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t^2} \sim Pois(\lambda t^2) \not\sim Pois(\mu t),$$

значит, процесс не пуассоновский.

$$P\{N_4(t) = k\} = P\{N(t+s) - N(s) = k\} = P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ .

### 3.16

*Задание.* Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$  и пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые от процесса  $N$  независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием  $m$ . Пусть

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i.$$

Докажите, что  $M[X(t)] = m\lambda t$ .

*Решение.*  $N(t) \sim Pois(\lambda t)$ .

Вычислим математическое ожидание

$$MX(t) = M\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i\right) = M \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbb{1}\{N(t) = i\} \xi_i) =$$



Математическое ожидание индикатора — вероятность

$$= m \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P\{N(t) = i\} = mMN(t) = m\lambda t.$$

### 3.17

*Задание.* Пусть  $\{N(t), t \geq 0\}$  — процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Используя пункт а) задачи 3.6 докажите, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda \text{ a.s.}$$

*Решение.* Надо проверить, что для пуассоновского процесса

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda \text{ a.s.}$$

В задаче 3.6 доказали, что

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$$

с помощью закона больших чисел.

$N(T_n) = n$  — значение  $T_n$ -го скачка (рис. ??).

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{T_n}{N(T_n)} \rightarrow \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда

$$\frac{N(T_n)}{T_n} \rightarrow \lambda.$$

Из такой сходимости следует сходимость по всем моментам времени. Нужно вывести, что

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \lambda.$$

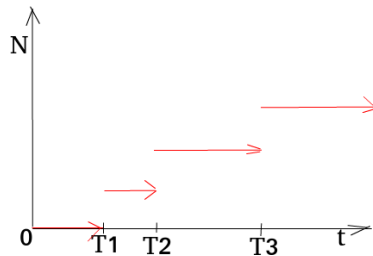


Рис. 24: График пуассоновского процесса



# Занятие 5. Винеровский процесс

## Контрольные вопросы и задания

**Приведите определение винеровского процесса.**

$\{w(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс, если обладает рядом свойств:

1.  $w(0) = 0$ ;
2. однородные приращения. Рассмотрим приращение винеровского процесса на  $t$ . Тогда  $w(s+t) - w(s) \stackrel{def}{=} w(t) \sim N(0, t)$ , то есть распределение процесса зависит только от длины отрезка;
3. независимые приращения на непересекающихся отрезках. Выберем  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Тогда  $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$  — независимые в совокупности случайные величины.

**Запишите плотность винеровского процесса.**

Напишем плотность распределения вектора  $(w(t_1), \dots, w(t_n)) = \vec{\xi}$ .

Будем использовать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом  $\vec{\xi}$  имеет плотность

$$q(A^{-1}\vec{u}) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{j+1} - t_j)}} \cdot e^{-\frac{u_{j+1} - u_j}{2t_{j+1} - t_j}}.$$

В этой плотности считаем, что  $t_0 = 0, u_0 = 0$ .

**Запишите ковариационную функцию винеровского процесса.**

Произведение математических ожиданий — это 0, потому

$$K(t, s) = M w(s) w(t) =$$

Используем независимость приращений

$$= M \{w(s) \cdot [w(s) + (w(t) - w(s))]\} =$$

Раскрываем скобки

$$= M \{w^2(s) + Mw(s)[w(t) - w(s)]\} =$$

Первое слагаемое равно  $s$ , а второе — нулю, так как это независимые центрированные случайные величины (математическое произведение — это произведение математических ожиданий, а они равны нулю)

$$= s, \quad s < t.$$

$$K(t, s) = \min(s, t).$$

## Аудиторные задачи

### 5.2

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите, что  $M(W(t) - W(s))^{2n+1} = 0$ ,  $M(W(t) - W(s))^{2n} = (2n-1)!!(t-s)^n$ .

*Решение.* Приращение гауссовское. Обозначим

$$\xi = W(t) - W(s) \stackrel{\text{def}}{=} W(t-s).$$

Значит,  $\xi \sim N(0, t-s)$ , где  $t-s = \sigma^2$ . Нужны формулы для моментов центрированной гауссовской случайной величины, то есть. Знаем, что  $M\xi^{2n+1} = 0$ ,  $M\xi^{2n} = (2n-1)!!\sigma^n$ .

### 5.3

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Вычислите:

- $M[(W(5) - 2W(1) + 2)^3];$
- характеристическую функцию случайной величины  $W(2) + 2W(1);$
- $M[\sin(2W(1) + W(2))];$
- $M[\cos(2W(1) + W(2))].$

*Решение.* Есть винеровский процесс.

- а)  $W(5) - 2W(1) + 2 = \xi \sim N(2, 5)$ , потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет

$$D\xi = D[W(5) - 2W(1)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= \text{cov}[W(5) - 2W(1) + 2, W(5) - 2W(1) + 2] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(5, 5) - 2K(5, 1) - 2K(5, 1) + 4K(1, 1) = 5 - 2 - 2 + 4 = 5.$$

Нужно найти третий момент.  $\xi$  не центрирована. Нужно её центрировать  $M\xi^3 = M[(\xi - 2) + 2]^3$ . Раскрываем скобки

$$M\xi^3 = M(\xi - 2)^3 + 6M(\xi - 2)^2 + 12M(\xi - 2) + 8.$$

По предыдущей задаче первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 5, так как это дисперсия, первый момент — 0. Тогда  $M\xi^3 = 0 + 6 \cdot 5 + 12 \cdot 0 + 8 = 38$ .

Величины  $W(5)$  и  $W(1)$  — зависимы, а приращения в винеровском процессе — независимы, потому имеем сумму дисперсий

$$D[W(5) - 2W(1)] = D\{[W(5) - W(1)] + [-W(1)]\}.$$

Дисперсия первого слагаемого равна 4, а второго — 1. Слагаемые независимы  $D[W(5) - 2W(1)] = 5$ ;

- б) нужно найти характеристическую функцию  $W(2) + 2W(1)$ .

Математическое ожидание такой величины равно нулю, а дисперсия  $D[W(2) + 2W(1)] = D\{[W(2) - W(1)] + 3W(1)\}$ . Это независимые величины, поэтому  $D\{[W(2) - W(1)] + 3W(1)\} = 1 + 9 = 10$ . Значит, получается  $\varphi_{W(2)+2W(1)}(\lambda) = \varphi_{N(0,10)}(\lambda) = e^{-\frac{10\lambda^2}{2}}$ ;

- с)  $M[\sin(2W(1) + W(2))] = 0$ .

Характеристическая функция случайной величины — это

$$\varphi_\xi(\lambda) = Me^{i\lambda\xi} = M\cos\lambda\xi + iM\sin\lambda\xi, \lambda = 1;$$

- д)  $M[\cos(2W(1) + W(2))] = e^{-5}$ .

## 5.4

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите, что процессы

- а)  $\{-W(t), t \geq 0\}$ ;

b)  $\{W(s+t) - W(s), t \geq 0\};$

c)  $\tilde{W}(t) = tW\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \mathbb{1}\{t > 0\}$

тоже являются винеровскими.

*Решение.*  $\{W(t), t \geq 0\}$  — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Если выберем моменты времени  $t_1 < \dots < t_n$  и возьмём вектор

$$(W(t_1), \dots, W(t_n))$$

— гауссовский. Нужно знать, что в каждой точке  $MW(t) = 0$  и

$$K(t, s) = \min(t, s).$$

Если процесс удовлетворит этим трём свойствам, то это винеровский процесс.

$$M[-W(t)] = -MW(t) = 0.$$

Найдём ковариационную функцию

$$K(t, s) = M[W(t)W(s)] = \min(t, s).$$

Вектор значений этого процесса должен быть гауссовским. Возьмём  $(-W(t_1), \dots, -W(t_n))$ . Нужно сказать, что это гауссовский вектор. Почему?

Этот вектор — это линейное преобразование вектора

$$(W(t_1), \dots, W(t_n)).$$

Линейные преобразования оставляют вектор гауссовским;

b) сначала нужно сказать, что у него гауссовские конечномерные распределения.

Берём  $n$  значений этого процесса

$$(W(s+t_1) - W(s), \dots, W(s+t_n) - W(s))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора  $(W(t_1+s), \dots, W(t_n+s), W(s))$ . Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s+t_1) \\ W(s+t_2) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s+t_1) - W(s) \\ W(s+t_2) - W(s) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t_1, t_2) = M\{[W(s+t_1) - W(s)] \cdot [W(s+t_2) - W(s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M\left[W(s+t_1)W(s+t_2) - W(s+t_1)W(s) - W(s)W(s+t_2) + W(s)^2\right] =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация винеровского процесса. Она равна минимуму. Математическое ожидание последнего слагаемого — ковариация в точке  $(s, s)$ . Получаем

$$= \min(s+t_1, s+t_2) - s - s + s = \min(s+t_1, s+t_2) - s.$$

Можем вынести и сократить  $\min(s+t_1, s+t_2) - s = \min(t_1, t_2)$ . Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

с) берём конечномерные распределения

$$\left(t_1 W\left(\frac{1}{t_1}\right), \dots, t_n W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса  $\left(W\left(\frac{1}{t_1}\right), \dots, W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$ .

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t, s) = M\left[tW\left(\frac{1}{t}\right)sW\left(\frac{1}{s}\right)\right] =$$

Выносим  $t$  и  $s$ . Получаем

$$= ts \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) =$$

Множитель  $ts$  — положительный. Он вносится

$$= \min(t, s).$$

Получилось.

## 5.5

*Задание.* Пусть  $\{W^i(t), t \geq 0\}_{i \geq 1}$  — независимые винеровские процессы. Найдите константу  $c_n$  так, чтобы процесс

$$\tilde{W}(t) = c_n \sum_{i=1}^n W^i(t), t \geq 0$$

был винеровским.

*Решение.* Сложили  $n$  независимых винеровских процессов так, чтобы процесс был винеровским.

Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{W}(t_1), \dots, \tilde{W}(t_n) \right) = \\ & = \left( c_n \left( W^1(t_1), \dots, W^n(t_n) \right), \dots, c_n \left( W^1(t_m), \dots, W^n(t_m) \right) \right) \end{aligned}$$

— это линейное преобразование.

$$\begin{bmatrix} W^1(t_1) \\ \vdots \\ W^1(t_m) \\ W^2(t_1) \\ \vdots \\ W^2(t_m) \end{bmatrix}$$

— гауссовский вектор, где обе части — независимые гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию и скажем, какой должна быть  $c_n$ . Ковариация линейна по каждому аргументу. Это значит, что множители и суммы выносятся

$$\text{cov} \left( c_n \sum_{i=1}^n W^i(t), c_n \sum_{i=1}^n W^i(s) \right) = c_n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov} [W^i(t), W^j(s)] =$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= c_n^2 \sum_{i=1}^n \min(t, s) =$$

Имеем  $n$  одинаковых слагаемых

$$= c_n^2 \cdot n \cdot \min(t, s).$$

Отсюда получаем

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

тогда процесс винеровский.

## 5.6

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Для  $0 < t \leq s$  вычислите вероятность  $q_t = P(W(s) > W(s-t) > W(s+t))$ .

*Решение.* Начнём с того, что нарисуем график винеровского процесса (рис. ??).

Есть 3 случайные величины.





Рис. 25: График винеровского процесса

У такого вектора есть плотность. Случайные величины независимы

$$q_t = \iiint_{x>y>z} p_{(W(s), W(s-t), W(s+t))} (x, y, z) dx dy dz.$$

Вектор имеет нормальное распределение

$$\begin{bmatrix} W(s) \\ W(s-t) \\ W(s+t) \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & s-t & s \\ s-t & s-t & s-t \\ s & s-t & s+t \end{pmatrix} \right).$$

Нужно использовать какие-то свойства винеровского процесса. Здесь нужно взять 2 приращения. Эти приращения будут независимыми величинами с известным распределением  $N(0, t)$ .

Вводим в рассмотрение приращения

$$\begin{cases} X = W(s) - W(s-t), \\ Y = W(s+t) - W(s). \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения  $W(s-t) = W(s) - X$ , а из второго —  $W(s+t) = W(s) + Y$ . Отнимем два последние уравнения

$$W(s+t) - W(s-t) = X + Y.$$

От всех частей неравенства в искомой вероятности вычтем  $W(s-t)$  и заменим полученные выражения на введённые приращения

$$q_t = P\{W(s) - W(s-t) > 0 > W(s+t) - W(s-t)\} = P(X > 0 > X + Y).$$

Плотность вектора — это произведение плотностей

$$P(X > 0 > X + Y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{2\pi t} \cdot e^{-\frac{1}{2t}(x^2+y^2)} dy dx =$$

Перейдём в полярную систему координат

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi.$$

Получим

$$= \frac{1}{2\pi t} \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} d\varphi dr =$$

Изобразим область интегрирования (рис. ??).



Рис. 26: Область интегрирования

По  $\varphi$  можем сразу проинтегрировать. Интеграл по  $\varphi$  даст просто  $\frac{\pi}{4}$ .  
Получаем

$$= \frac{1}{8} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} \cdot \frac{dr^2}{2t} =$$

Интеграл равен единице

$$= \frac{1}{8}$$

## 5.7

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процессов:

- а)  $W^0(t) = W(t) - tW(1), 0 \leq t \leq 1$  (броуновский мост);
- б)  $U(t) = e^{-\frac{t}{2}} W(e^t)$  (процесс Орнштейна-Уленбека).

Выясните, какой из этих процессов является гауссовским.

*Решение.*

- а)  $MW^0(t) = 0$ , потому что у винеровского процесса математическое ожидание 0. Найдём ковариационную функцию

$$K(t, s) = \text{cov}[W(t) - tW(1), W(s) - sW(1)] = \min(t, s) - ts - st + st =$$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничтожаются

$$= \min(t, s) - st.$$

Если возьмём вектор конечномерных распределений

$$(W^0(t_1), \dots, W^0(t_n)),$$

то этот вектор будет гауссовским. Такой процесс называется броуновский мост (рис. ??);



Рис. 27: Броуновский мост

b)  $MU(t) = 0$ , потому что винеровский. Ковариационная функция

$$K(t, s) = \text{cov} \left[ e^{-\frac{t}{2}} W(e^t), e^{-\frac{s}{2}} W(e^s) \right] =$$

Выносим экспоненты (множители)

$$= e^{-\frac{t}{2} - \frac{s}{2}} \min(e^t, e^s) =$$

Экспонента — монотонная функция

$$= e^{-\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \min(t, s)} = e^{-\frac{1}{2}[t + s - 2 \min(s, t)]} = e^{-\frac{1}{2} \cdot |t - s|}.$$

Значение процесса  $U(t)$  — это линейное преобразование значений винеровского процесса, только в других точках. Процесс гауссовский.

## 5.8

*Задание.* Докажите, что случайный процесс

$$B(t) = (1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), 0 \leq t < 1; B(1) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

*Решение.* Конечномерные распределения такого процесса

$$(B(t_1), \dots, B(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$$MB(t) = 0.$$

Найдём ковариацию

$$\text{cov}[B(t), B(s)] = \text{cov} \left[ (1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), (1-s) W\left(\frac{s}{1-s}\right) \right] =$$

Множители выносим

$$= (1-t)(1-s) \min\left(\frac{t}{1-t}, \frac{s}{1-s}\right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min (t - ts, s - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min (t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

## 5.9

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание  $M(W(s) | W(t))$  при  $s > t$ .

*Решение.* Есть формула

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x p_{W(s), W(t)}(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_{W(s), W(t)}(x, y) dx}.$$

Свойства условного математического ожидания:  $M(\xi | \mathcal{F}) = \xi$ , если  $\xi$  измерима относительно  $\mathcal{F}$  и  $M(\xi | \mathcal{F}) = M\xi$ , если  $\xi$  не зависит от  $\mathcal{F}$ .

Нужно, чтобы появилось приращение

$$M[W(s) | W(t)] = M[W(s) - W(t) + W(t) | W(t)] =$$

Распишем как 2 условных математических ожидания

$$= M[W(s) - W(t) | W(t)] + M[W(t) | W(t)].$$

Первое слагаемое равно нулю, как как имеются независимые величины  $M[W(s) - W(t) | W(t)] + M[W(t) | W(t)] = W(t)$ .

## 5.10

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс, и пусть  $\tau$  — независимая от процесса  $W$  случайная величина, показательно распределённая с параметром  $\lambda$ . Найдите характеристическую функцию случайной величины  $W(\tau)$ .

*Решение.*  $\varphi_{W(\tau)}(\lambda) = Me^{i\lambda W(\tau)}$ . В винеровский процесс подставляется случайное время. Похожая ситуация

$$Me^{i\lambda \sum_{k=0}^{\tau} \xi_k} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau = k) \cdot M\left(e^{i\lambda \sum_{k=0}^{\tau} \xi_k} \middle| \tau = k\right).$$

Получаем

$$Me^{i\lambda W(\tau)} = MM\left[e^{i\lambda W(\tau)} \middle| \tau\right] = Me^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot \tau^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} p_{\tau}(x) dx =$$

Подставим выражение для плотности показательного распределения

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2} - \lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x \left( \frac{\lambda^2}{2} + \lambda \right)} dx =$$

Вынесем  $\lambda$  за скобки

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x \lambda \left( \frac{\lambda}{2} + 1 \right)} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x \lambda \cdot \frac{\lambda+2}{2}} dx = -\lambda \cdot \frac{2}{\lambda+2} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x \cdot \frac{\lambda+2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda+2}.$$

## Домашнее задание

### 5.12

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Вычислите:

- $M \left[ (W(4) - 2W(1) + 2W(2))^2 \right];$
- $M \left[ (W(1) + 2W(2) + 1)^3 \right];$
- $M \left[ e^{W(3) - 2W(2)} \right];$
- характеристическую функцию случайной величины  $W(1) + 2W(2) + 1$ .

*Решение.*

- $W(4) - 2W(1) + W(2) = \xi \sim N(0, 6)$ , потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(4) - 2W(1) + W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= \text{cov}[W(4) - 2W(1) + W(2), W(4) - 2W(1) + W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$\begin{aligned} &= K(4, 4) - 2K(4, 1) + K(4, 2) - 2K(1, 4) + 4K(1, 1) - 2K(1, 2) + \\ &\quad + K(2, 4) - 2K(2, 1) + K(2, 2) = \\ &= 4 - 2 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 1 + 2 = 4 + 4 - 2 = 6. \end{aligned}$$

Нужно найти второй момент.  $\xi$  центрирована  $M\xi^2 = D\xi = 6$ ;

- b)  $W(1) + 2W(2) + 1 = \xi \sim N(1, 13)$ , потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет  $D\xi = D[W(1) - 2W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi)$ . Подставим выражения для случайной величины

$$\text{cov}(\xi, \xi) = \text{cov}[W(1) + 2W(2) + 1, W(1) + 2W(2) + 1] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(1, 1) + 2K(1, 2) + 2K(2, 1) + 4K(2, 2) = 1 + 2 + 2 + 8 = 13.$$

Нужно найти третий момент.  $\xi$  не центрирована. Нужно её центрировать  $M\xi^3 = M[(\xi - 1) + 1]^3$ . Раскрываем скобки

$$M[(\xi - 1) + 1]^3 = M(\xi - 1)^3 + 3M(\xi - 1)^2 + 3M(\xi - 1) + 1 =$$

По задаче 5.2 первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 13, так как это дисперсия, первый момент — ноль. Тогда

$$= 0 + 3 \cdot 13 + 3 \cdot 0 + 1 = 39 + 1 = 40;$$

- c)  $W(3) - 2W(2) = \xi \sim N(0, 3)$ , потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(3) - 2W(2)] = \text{cov}(\xi, \xi) =$$

Подставим выражение для случайной величины

$$= \text{cov}[W(3) - 2W(2), W(3) - 2W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(3, 3) - 2K(3, 2) - 2K(2, 3) + 4K(2, 2) = 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 3.$$

Нужно найти

$$Me^\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^x \cdot p_\xi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 3}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{6}} dx.$$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты

$$\frac{x^2}{6} - x = \frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6} + \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\right)^2 =$$

Три первых слагаемых образуют полный квадрат

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{(x - 3)^2}{2 \cdot 3} - \frac{3}{2}.$$

Подставим полученное выражение в экспоненту

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{6}} dx = e^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{6}} dx =$$

Подинтегральная функция — плотность нормального распределения, потому такой интеграл равен единице

$$= e^{\frac{3}{2}};$$

d) нужно найти характеристическую функцию  $W(1) + 2W(2) + 1$ .

Математическое ожидание такой величины равно 1, а дисперсия — 13.

Значит, получается  $\varphi_{W(1)+2W(2)+1}(\lambda) = \varphi_{N(1,13)}(\lambda) = e^{i\lambda - \frac{13\lambda^2}{2}}$ .

### 5.13

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите, что процессы:

a)  $\{W(T) - W(T-t), 0 \leq t \leq T\}, T = \text{const} > 0;$

b)  $\{\sqrt{c}W(\frac{t}{c}), t \geq 0\}, c = \text{const} > 0$

тоже являются винеровскими.

*Решение.*  $\{W(t), t \geq 0\}$  — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Сначала нужно сказать, что у процесса гауссовские конечномерные распределения.

Берём  $n$  значений этого процесса

$$(W(T) - W(T-t_1), \dots, W(T) - W(T-t_n))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора  $(W(T-t_1), \dots, W(T-t_n), W(T))$ .

Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(T-t_1) \\ W(T-t_2) \\ W(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(T) - W(T-t_1) \\ W(T) - W(T-t_2) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t, s) = M\{[W(T) - W(T-t)] \cdot [W(T) - W(T-s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M \left[ W(T)^2 - W(T)W(T-s) - W(T-t)W(T) + W(T-t)W(T-s) \right] =$$

Математическое ожидание трёх последних слагаемых — ковариационные функции винеровского процесса. Они равны минимуму. Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация в точке  $(T, T)$ . Получаем

$$= T - T + s - T + t + \min(T-s, T-t) = s + t - \max(s, t) = \min(t, s).$$

Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

b) берём конечномерные распределения

$$\left( \sqrt{c}W\left(\frac{t_1}{c}\right), \dots, \sqrt{x}W\left(\frac{t_n}{c}\right) \right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса

$$\left( W\left(\frac{t_1}{c}\right), \dots, W\left(\frac{t_n}{c}\right) \right).$$

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t, s) = M \left[ \sqrt{c}W\left(\frac{t}{c}\right) \sqrt{c}W\left(\frac{s}{c}\right) \right] =$$

Выносим  $\sqrt{c}$ . Получим

$$= cM \left[ W\left(\frac{t}{c}\right) W\left(\frac{s}{c}\right) \right] = c \cdot \min\left(\frac{t}{c}, \frac{s}{c}\right) =$$

Множитель  $c$  — положительный. Он вносится

$$= \min(t, s).$$

## 5.14

*Задание.* Для фиксированного  $\rho \in [-1, 1]$  положим

$$W(t) = \rho W^1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t),$$

где  $\{W^1(t), t \geq 0\}$ ,  $\{W^2(t), t \geq 0\}$  — независимые винеровские процессы. Докажите, что процесс  $\{W(t), t \geq 0\}$  является винеровским и найдите математическое ожидание  $M[W^1(t) \cdot W(t)]$ .

*Решение.* Сложили 2 независимых винеровских процесса так, чтобы процесс был винеровским.



Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\begin{aligned} & (W(t_1), \dots, W(t_n)) = \\ & = \left( \rho W^1(t_1) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t_1), \dots, \rho W^1(t_n) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t_n) \right) \end{aligned}$$

— это линейное преобразование  $(W^1(t_1), \dots, W^1(t_n))$  и

$$(W^2(t_1), \dots, W^2(t_n))$$

— гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию. Ковариация линейна по каждому аргументу

$$\begin{aligned} & \text{cov} \left[ \rho W^1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t), \rho W^1(s) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(s) \right] = \\ & = \rho^2 \cdot \text{cov} [W^1(t), W^1(s)] + \rho \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \text{cov} [W^1(t), W^2(s)] + \\ & + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho \cdot \text{cov} [W^2(t), W^1(s)] + (1 - \rho^2) \cdot \text{cov} [W^2(t), W^2(s)] = \end{aligned}$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= \rho^2 \cdot \min(t, s) + (1 - \rho^2) \cdot \min(t, s) = \min(t, s),$$

тогда процесс винеровский.

$$M [W^1(t) \cdot W(t)] = M \left\{ W^1(t) \cdot \left[ \rho W^1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^2(t) \right] \right\} =$$

Раскроем скобки

$$= \rho M W^1(t)^2 + \sqrt{1 - \rho^2} M [W^1(t) W^2(t)] = \rho t.$$

## 5.15

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$X(t) = x + \mu t + \sigma W(t),$$

который называется винеровским со сдвигом  $\mu \in \mathbb{R}$ , коэффициентом диффузии  $\sigma > 0$ , который стартует из точки  $x \in \mathbb{R}$ .

*Решение.* Из определения винеровского процесса следует, что случайная величина  $W(t)$  имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $t$ . Таким образом

$$MX(t) = M[x + \mu t + \sigma W(t)] = Mx + M(\mu t) + \sigma MW(t) = x + \mu t.$$

Вычислим теперь  $MX(t)X(s)$ . Имеем

$$MX(t)X(s) = M\{[x + \mu t + \sigma W(t)] \cdot [x + \mu s + \sigma W(s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M[x^2 + x\mu s + x\sigma W(s) + \mu tx + \mu^2 ts + \mu t\sigma W(s) + \sigma W(t)x + \sigma W(t)\mu s + \sigma^2 W(t)W(s)] =$$

Математическое ожидание константы — это сама константа, а математическое ожидание винеровского процесса равно нулю

$$= x^2 + x\mu s + \mu tx + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s).$$

Тогда

$$\text{cov}[X(t), X(s)] = M[X(t)X(s)] - MX(t) \cdot MX(s) =$$

Подставим найденные выражения для математических ожиданий

$$= x^2 + x\mu s + \mu tx + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - (x + \mu t)(x + \mu s) =$$

Перемножим скобки

$$= x^2 + x\mu s + \mu ts + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - x^2 - x\mu s - \mu tx - \mu^2 ts =$$

Сократим

$$= \sigma^2 \cdot \min(t, s).$$

## 5.16

*Задание.* Докажите, что случайный процесс

$$Z(t) = tW\left(\frac{1}{t} - 1\right), 0 < t \leq 1; Z(0) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

*Решение.* Конечномерные распределения такого процесса

$$(Z(t_1), \dots, Z(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$$MZ(t) = 0.$$

Найдём ковариацию

$$\text{cov}[Z(t), Z(s)] = \text{cov}\left[tW\left(\frac{1}{t} - 1\right), sW\left(\frac{1}{s} - 1\right)\right] =$$

Множители выносим

$$= ts \cdot \min \left( \frac{1}{t} - 1, \frac{1}{s} - 1 \right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min (s - ts, t - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min (t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

### 5.17

*Задание.* Пусть  $\{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание  $M(W(s) | W(t))$  при  $s < t$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} M[W(s) | W(t)] &= \\ &= MW(s) + \text{cov}[W(s), W(t)] \cdot \text{cov}^{-1}[W(t), W(t)] \cdot [W(t) - MW(t)] = \end{aligned}$$

Математическое ожидание винеровского процесса равно нулю, а ковариация — минимуму

$$= \min(s, t) \cdot \frac{1}{t} \cdot W(t) =$$

По условию  $s < t$ , потому

$$= \frac{s}{t} \cdot W(t).$$

### 5.18

*Задание.* Пусть  $W$  и  $N$  — независимые между собой винеровский процесс и пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$  соответственно. Найдите характеристическую функцию случайной величины  $X(t) = W(N(t))$ .

*Решение.* Нужно найти  $\varphi_{W(N(t))}$ . Характеристическая функция — это  $Me^{isW(N(t))}$ . Имеем винеровский процесс, в который подставляется случайное время. Нужно перебрать все возможные значения случайного времени. Пуассоновский процесс принимает значения от нуля до бесконечности

$$Me^{isW(N(t))} = M \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{N(t) = k\} \cdot e^{isW(k)} =$$

Математическое ожидание суммы можем написать как сумму математических ожиданий

$$= \sum_{k=0}^{\infty} M \mathbb{1}\{N(t) = k\} e^{isW(k)} =$$

Индикатор зависит от пуассоновского процесса, а экспонента — от винеровского, а они независимы

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = k\} M e^{isW(k)} =$$

Оба множителя нам известны. Второй — это характеристическая функция гауссовской величины

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot k} =$$

Случайная величина  $N(t) \sim Pois(\lambda t)$ ,  $W(k) \sim N(0, k)$ . Получаем

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda t e^{-\frac{s^2}{2}}\right)^k}{k!} = e^{\lambda t \left(e^{-\frac{s^2}{2}} - 1\right)}.$$

Тогда  $M e^{isW(N(t))} = M \left( M e^{isW(t)} \right) \Big|_{k=N(t)} = M \left[ e^{isW(N(t))} \mid N(t) = k \right]$ .

Свойство условного математического ожидания  $MM(\xi \mid \mathcal{F}) = M\xi$ .