Оглавление

Занятие 2. Характеристики случайного процесса

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(t)\,, t \in T$ — это параметризированная совокупность случайных величин.

Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?

$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n};\, t_1,\ldots,t_n \in T,\, n \geq 1\}$ — набор конечномерных распределений процесса ξ, где $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ — распределение вектора $(\xi(t_1)\,,\ldots,\xi(t_n))$ в $\mathbb{R}^n$, то есть для борелевского $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\,,\ \mu_{t_1,\ldots,t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1)\,,\ldots,\xi(t_n)) \in \Delta\}$.

Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.

$m(t) = M\xi(t)\,, t \in T$ — функция среднего.
$D\xi(t)\,, t \in T$ — функция дисперсии.
$K(t,s) = M[\xi(t) - m(t)]\cdot[\xi(s) - m(s)]\,, t,s \in T$ — функция ковариации.

Аудиторные задачи

2.2

Задание. Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t},\ t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами a, σ^2. Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса $\xi = \{\xi(t)\,, t > 0\}$.

Решение. Сейчас $T = (0,\infty)$.

Случайная величина X имеет распределение $N\left(a,\sigma^2\right)$. Нужно найти $M\xi\left(t\right) = m\left(t\right)$, $D\xi\left(t\right)$, ковариационную функцию $K\left(t,s\right)$ и одномерную плотность распределения $p_{\xi}\left(t\right)$.

Найчнём с математического ожидания

$$m\left(t\right) = M\left(X\cdot e^{-t}\right) = e^{-t}MX = e^{-t}\cdot a.$$

Далее — функция дисперсии $D\xi\left(t\right) = D\left(X\cdot e^{-t}\right) = e^{-2t}\cdot DX$. Дисперсия X — известная: $e^{-2t}\cdot DX = e^{-2t}\cdot\sigma^2$.

Далее — ковариационная функция

$$K\left(t,s\right) = M\left[\xi\left(t\right) - m\left(t\right)\right]\cdot\left[\xi\left(s\right) - m\left(s\right)\right] = cov\left[\xi\left(t\right),\xi\left(s\right)\right].$$

Вместо $\xi\left(t\right), \xi\left(s\right)$ подставляем их значения

$$cov\left[\xi\left(t\right),\xi\left(s\right)\right] = cov\left(Xe^{-t},Xe^{-s}\right).$$

Множители выносятся

$$cov\left(Xe^{-t},Xe^{-s}\right) = e^{-t-s}cov\left(X,X\right) = e^{-t-s}DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность $\xi\left(t\right)\sim N\left(e^{-t}a,\, e^{-2t}\sigma^2\right)$.

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{\left(x-e^{-t}a\right)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины X.

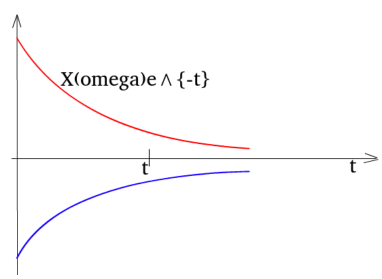

Рис. 1: Траектория процесса

2.3

Задание. Пусть

$$\xi\left(t\right) = e^{-Xt},\ t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром λ. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t > 0\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = e^{-Xt}$, где $X \sim Exp(\lambda), t > 0$.

Нужно найти $m(t), K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t. По определению

$$m(t) = Me^{-Xt} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше X, тем быстрее эта функция убывает.

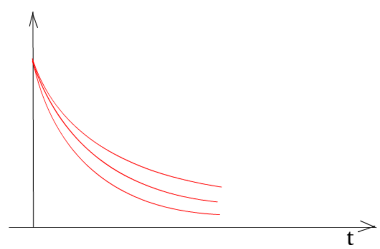

Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) = Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Подставим найденное значение фунцкии математического ожидания

$$Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s} = \frac{\lambda}{\lambda + t + s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda + t)(\lambda + s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \ldots, \xi(t_n) \leq x_n\}$. Вместо ξ напишем формулу $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \ldots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P\left(e^{-Xt_1} \leq x_1, \ldots, e^{-Xt_n} \leq x_n\right)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X. Все неравенства решаем относительно X

$$P\left(e^{-Xt_1} \leq x_1, \ldots, e^{-Xt_n} \leq x_n\right) = P\left\{X \geq -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, X \geq -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \geq -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, X \geq -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \geq \max\left(-\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right)\right\}.$$

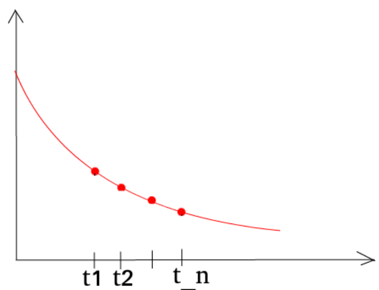

Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой m

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right)\right\} = \int\limits_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(ln\, x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, ln\, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(ln\, x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, ln\, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \ldots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда $0 < x_1, \ldots, x_n < 1$.

Плотности у такого векора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ быть не может, потому что $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$. Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$, $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$.

С вероятностью 1 $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$ — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

2.4

Задание. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A\cos(\varphi + \lambda t),$$

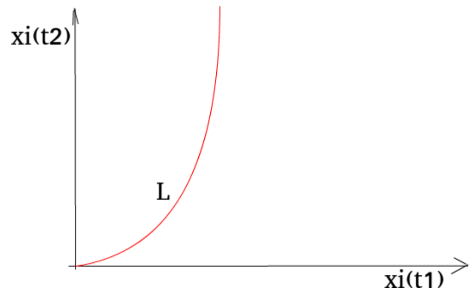

Рис. 4: $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где A и φ являются независимыми случайными величинами такими, что $MA^2 < \infty$, а φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

Решение. $\varphi \sim U([0, 2\pi])$.

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.

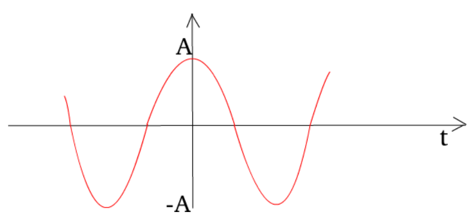

Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A\cos(\varphi + \lambda t)]$. Случайные величины A и φ — независимые. $M[A\cos(\varphi + \lambda t)] = MAM\cos(\varphi + \lambda t)$. Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у φ известна плотность

$$MAM\cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$ Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M\left[A^2\cos(\varphi + \lambda t)\cos(\varphi + \lambda s)\right] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t)(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M\left\{\frac{1}{2} \cdot \cos\left[2\varphi + \lambda\left(t+s\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right]\right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

2.5

Задание. Пусть τ — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, и пусть $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}, \; t \in [0, 1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), t \in [0, 1]\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. τ — случайная величина с распределением $U([0, 1])$.

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное τ выпало.

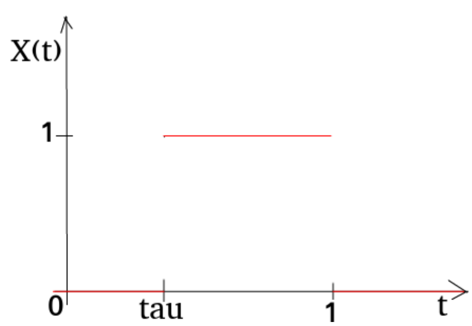

Рис. 6: Траектория процесса

$$m(t) = MX(t) = M\mathbb{1}\{t \geq \tau\} = P(t \geq \tau) = F_\tau(t) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция $K(t, s) = M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s)$. Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s) = P\{\tau \leq \min(t, s)\} - ts = \min(t, s) - t \cdot s.$$

Конечномерные распределения — распределение вектора $(X(t_1), \dots, X(t_n))$. Каждый X — это 0 или 1.

$$P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) = (0, \dots, 0)\} = P\{\tau \in (t_n, 1]\} = 1 - t_n.$$

Точки t_n изображены на рисунке 7.

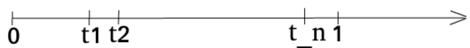

Рис. 7: Временная ось

У вектора получается $(n+1)$-но значение

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \dots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \dots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \dots, \\ (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \dots, \\ (1, \dots, 1), & t_1. \end{cases}$$

2.6

Задание. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения F, и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le t\}, \, t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), \, t \in \mathbb{R}\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le t\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$cov(X(t), X(s)) = cov\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le t\}, \, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le s\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} cov(\mathbb{1}\{\xi_i \le t, \, \mathbb{1}\{\xi_j \le s\}\}) =$$

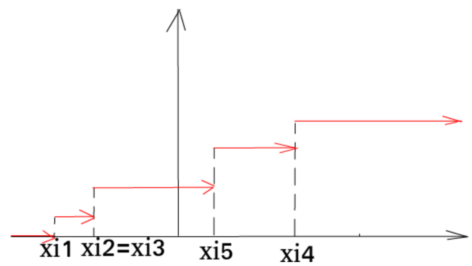

Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}\left\{\xi_i \le t\right\}, \mathbb{1}\left\{\xi_i \le s\right\} \right).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$cov\left(\mathbb{1}\left\{\xi_i \le t\right\}, \mathbb{1}\left\{\xi_i \le s\right\}\right) = M\mathbb{1}\left\{\xi_i \le t \wedge s\right\} - F(t)\, F(s) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F(t \wedge s) - F(t)\, F(s),$$

где $\wedge$ означает минимум.

Все слагаемые в сумме раны этому выражению

$$K(t, s) = \frac{1}{n}\left[F(t \wedge s) - F(t)\, F(s)\right].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем $t_1, t_2, \ldots, t_m$ (рис. 9).

$$X(t) \in \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}.$$

По t, X увеличивается. Эта функция монотонна.

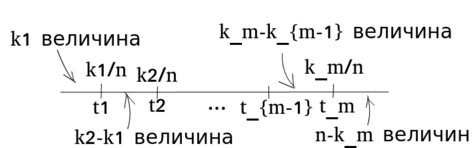

Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_m \le n.$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P\left\{X(t_1)=\frac{k_1}{n},\, X(t_2)=\frac{k_2}{n},\ldots,X(t_m)=\frac{k_m}{n}\right\}=$$

$P($для k_1 наблюдений $\xi\le t_1$, для k_2-k_1 наблюдений $t_1<\xi\le t_2,\ldots,$ для $n-k_m$ наблюдений $\xi>t_m)$ Имеем мультиномиальное распределение

$$=\frac{n!}{k_1!\,(k_2-k_1)!\ldots(n-k_m)!}\cdot F(t_1)^{k_1}\cdot\left[F(t_2)-F(t_1)\right]^{k_2-k_1}\cdot\ldots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить n величин на группы.

2.7

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $X(\eta)$, где $\{X(t),\, t\in[0,1]\}$ — процесс из задачи 2.5, а η — независимая от X случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно.

Решение. $X(t)=\mathbb{1}\{t\ge\tau\}$.

Задана случайная величина

$$\eta=\begin{cases}0, & \frac{1}{3},\\ 1, & \frac{2}{3}.\end{cases}$$

Интересуемся $\varphi_{X(\eta)}$. Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.

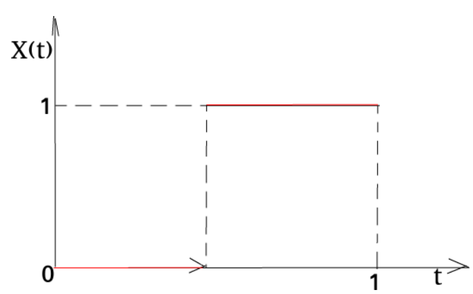

Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1: $X(0)=0$, $X(1)=1$, значит, $X(\eta)=\eta$.

$$\varphi_{X(\eta)}(\lambda)=\varphi_\eta(\lambda)=Me^{i\lambda\eta}=\frac{1}{3}\cdot1+\frac{2}{3}\cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

2.8

Задание. Значение случайного телеграфного сигнала $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ в произвольный момент времени с одинаковыми вероятностями равно 0 или 1. Прыжки происходят случайным и независимым образом. Вероятность $P(k, T)$ того, что в интервале времени длины T произойдёт k прыжков, задаётся распределением Пуассона, то есть:

$$P(k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T},$$

где λ — среднее количество прыжков за единицу времени. Найдите математическое ожидание и ковариационнуб функцию случайного процесса ξ.

Решение.

$$P\{\xi(t) = 1\} = P\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{2}.$$

Одномерные распределения даны. Это распределение Бернулли.

$P(k, T)$ — это вероятность того, что на отрезке времени длины T было k прыжков (распределение Пуассона), то есть траектория процесса выглядит как на рисунке 11.

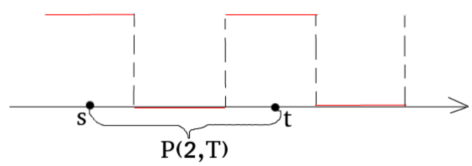

Рис. 11: Траектория случайного процесса

В каждой точке будет 0 или 1.

Математическое ожидание тут ищется просто

$$M\xi(t) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Теперь нужно ещё найти ковариационную функцию такого процесса

$$K(s, t) = M[(\xi(t) - M\xi(t)) \cdot (\xi(s) - M\xi(s))] = M\xi(s)\xi(t) - \frac{1}{4}.$$

Нужно математическое ожидание совместного процесса. $\xi(s)$ и $\xi(t)$ зависимы.

Попробуем найти математическое ожидание произведения. $\xi(t)\xi(s)$ принимают значения 0 и 1. Произведение принимает значения 0 и 1. Получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = 0 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 0\} + 1 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 1\} =$$

Слагаемое с нулём пропадает

$$= P\{\xi(s) = 1, \xi(t) = 1\}.$$

Значения в точках совпадаю, если между ними произошло чётное количество скачков $M\xi(t)\,\xi(s) = P\{\xi(s) = 1\}\,P$ (на отрезке $[s,t]$ будет чётное количество прыжков) $= \frac{1}{2} \cdot P$(на отрезке $[s,t]$ будет чётное число прыжков). Мы знаем, с какой вероятностью происходит число прыжков.

Подходят любые чётные прыжки, то есть это вероятность объединения. Число скачков обозначим буковокой N. Тогда P(на $[s,t]$ чётное число скачков) $= P(N_{[s,t]}$ чётное)=

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left(2k = N_{[s,t]}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(2k, t-s\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda\left(t-s\right)\right]^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Экспонента выносится за сумму. Остаётся сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Для того, чтобы это было экспонента, нужны ещё и нечётные степени

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{x}.$$

Если мы вычтем вторую сумму, то получится

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-x}.$$

Теперь нужно сложить эти два выражения и поделить на 2, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2},\ x = \lambda\left(t-s\right).$$

Получили гиперболический косинус.

$$= \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{-\lambda(t-s)}}{2} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Умножим один сомножитель на другой, $e^{\lambda(t-s)} \cdot e^{-\lambda(t-s)}$ дают единицу. Получаем

$$= \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{2}.$$

Это вероятность чётного числа скачков.

Выпишем, чему равна ковариационная функция. Математическое ожидание произведения нужно умножить на $\frac{1}{2}$ и отнять $\frac{1}{4}$. Получится

$$K\left(t,s\right) = \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^{-2\lambda(t-s)}}{4},\ s < t.$$

Окончательный ответ:

$$K\left(t,s\right) = \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda|t-s|}.$$

2.9

Задание. Пусть η_1 и η_2 — независимые случайные величины, которые имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найдите значения a, при которых почти все реализации случайной функции $t\left(\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right)\right)$ монотонно возрастают по t.

Решение. $\xi\left(t\right) = t\left(\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right)\right)$ — процесс, который задан при $t > 0$. Известно, что траектория этого процесса монотонно возрастает по t с вероятностью 1. Нужно найти $a = const$.

Реализация такого процесса выглядит как прямая линия (рис. 12), при этом $\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right) > 0$. Это случайная величина, так что коффициент наклона должен быть положительным

$$P\left\{\xi\left(t\right) \nearrow\right\} = P\left\{\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right) > 0\right\} = 1 =$$

Число a должно быть таким, чтобы вероятность была единицей.

Рисуем траекторию процесса, считая, что все случайные величины неслучайны. Нужно, чтобы все реализации (прямые) возрастали.

Про η_1 и η_2 мы всё знаем. Это независимые случайные величины. Получаем двукратный интеграл

$$= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}\left\{x + a\left(y + 2a\right) > 0\right\} dxdy,$$

где первые два множителя — плотности.

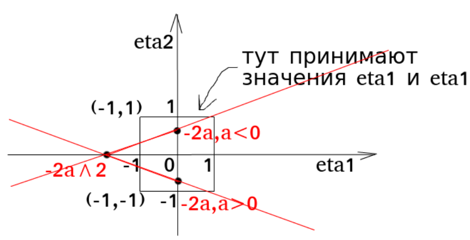

Рис. 12: Траектория случайного процесса

1. При $a = 0\, \eta_1 > 0$ — правая часть квадратика. Тогда событие выполняется с вероятностью
$$\frac{1}{2} \neq 1,$$
то есть $a \neq 0$.

2. Следующий случай: пусть $a > 0$. Получается, что условие переписывается в виде
$$\eta_2 + 2a \geq -\frac{\eta_1}{a},$$

откуда

$$\eta_2 \geq -\frac{\eta_1}{a} - 2a,$$

то есть на картинке это будет прямая. Мы возьмём всё, что над этой прямой

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Наша вероятность — это площадь квадрата над прямой. Вероятность не будет равна 1. a должно быть таким, чтобы прямая прошла через точку $(-1, -1)$, то есть $-1 + a\,(2a - 1) \geq 0$. Теперь можно найти a из неравенства $2a^2 - a - 1 \geq 0$. Сейчас скажем, при каких a это выполнено. Нужно найти корни уравнения. $D = 1 + 8 = 9 = 3^2$, значит

$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = 1,$$

то есть то, что нужно выбрать изображено на рисунке 13.

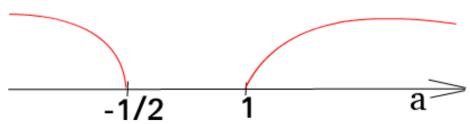

Рис. 13: Решение неравенства

Задавали $a > 0$, то есть при $a \geq 1$ вероятность такого события — единица.

3. Теперь нужно задать $a < 0$. Отличие будет в том, как пройдёт прямая. Когда поделим на a, знак поменяется.

$$-\frac{\eta_1}{a} - 2a \geq \eta_2,$$

то есть нужно нарисовать прямую

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Прямая пройдёт через такие же точки: $\left(-2a, -2a^2\right)$, только если a — отрицательное, то $-2a$ — положительное. Нужно будет выбрать всё, что ниже этой прямой.

Нужно, чтобы прямая прошла над точкой $(-1, 1)$. Имеем неравенство $-1 + a\,(1 + 2a) \geq 0$, откуда

$$a^1 + \frac{1}{2} \cdot a - 1 \geq 0.$$

Решая соответствующее уравнение находим, что

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 1.$$

Получаем всё, что за корнями (рис. 14).

При $a < 0$ получаем ответ: $a \leq -1$.

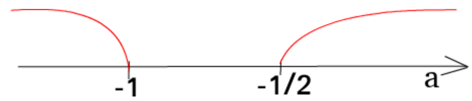

Рис. 14: Решение неравенства

Ответ к задаче: $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, то есть $|a| > 1$. Тогда все реализации процесса будут возрастать.

2.10

Задание. Пусть случайная величина $\tau \in (0, 1)$ имеет непрерывное распределение и пусть

$$\xi(t) \equiv 0;\ \eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Изобразите тракториии этих процессов. Докажите, что эти процессы являются стохастически эквивалентными, то есть $\forall t \in [0, 1] : P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = 0$.

Решение. τ — это случайная величина с непрерывным распределением — та, у которой функция распределения F_τ — непрерывна.

Скачок фукнции распределения в точке x — это $\Delta F_\tau(x) = P(\tau = x) = 0$, где

$$F_\tau(x) = P(\tau \leq x),$$

а $F_\tau(-x) = P(\tau < x)$. В нашем случае нет скачков, то есть в фиксированный x случайная величина τ не попадёт. Рассматривается 2 процесса: один процесс — это $\xi(t) \equiv 0$, второй процесс — это

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau. \end{cases}$$

Посмотрим, какие траектории у этих процессов (рис. 15). Процессы заданы на

$$t \in [0, 1].$$

Стохастически эквивалентные означает, что если зафиксировать момент времени t, то в этот момент $P\{\xi(t) = \eta(t)\} = P\{\eta(t) = 0\} = P(\tau \neq t) = 1$. С точки зрения анализа это разные функции. У η всегда есть скачок, у ξ никогда скачков нет. Помним, что $\xi(t) \equiv 0$. Тем не менее, вероятность $P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = P\{\eta(t) \neq 0\} = P(\tau = t) = 0$, а это значит, что в фиксированной точке процессы с вероятностью 1 совпадают. Если зафиксируем несколько точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$, то вероятность

$$P\{(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)) = (\eta(t_1), \ldots, \eta(t_n))\} = 1.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения

$$\mu^\xi_{t_1,\ldots,t_n} = \mu^\eta_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Конечномерные распределения не определяют траектории процесса.

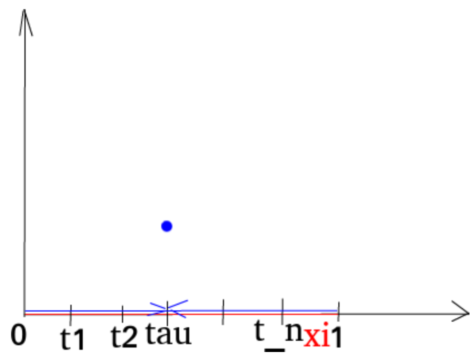

Рис. 15: Траектория случайных процессов

Домашнее задание

2.12

Задание. Пусть

$$\xi(t) = Xt + a,\ t \in \mathbb{R},$$

где X — равномерно распределённая на отрезке (a, b) случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = Xt + a$, $t \in \mathbb{R}$, где $X \sim U(a, b)$.

Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изоражены на рисунке 16: чем больше X, тем больше угол наклона прямой к оси $0t$.

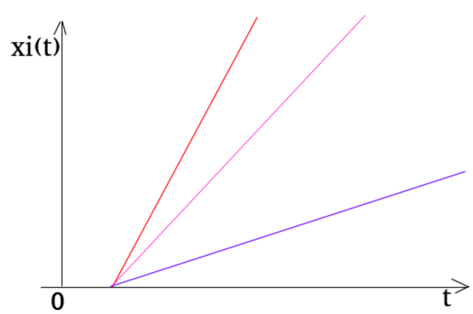

Рис. 16: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt+a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t) M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и вычисляем математическое ожидание

$$= M[(Xt+a)(Xs+a)] - M(Xt+a)M(Xs+a) =$$

$$= M\left[X^2 ts + Xa(t+s) + a^2\right] - \left(t \cdot \frac{a+b}{2} + a\right)\left(s \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) =$$

$$= ts \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3} + a(t+s) \cdot \frac{a+b}{2} + a^2 - ts \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - ta \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 -$$

$$-as \cdot \frac{a+b}{2} =$$

$$= ts\left(\frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) + (t+s)a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot a(t+s) =$$

$$= ts \cdot \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = ts \cdot \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = ts \cdot \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ — рис. 17.

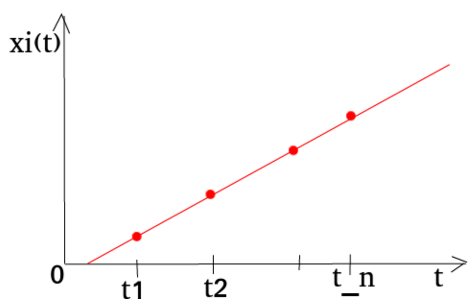

Рис. 17: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\}$. Вместо ξ напишем формулу $P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\} = P(Xt_1 + a \le x_1, \ldots, Xt_n + a \le x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X. Все неравенства решаем относительно X

$$P(Xt_1 + a \le x_1, \ldots, Xt_n + a \le x_n) = P(Xt_1 \le x_1 - a, \ldots, Xt_n \le x_n - a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X \le \frac{x_1 - a}{t_1}, \ldots, X \le \frac{x_n - a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P\left\{X \leq \min\left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \ldots, \frac{x_n - a}{t_n}\right)\right\} =$$

Обозначим минимум буквой m для удобства

$$= P\left(X \leq m\right) = \int\limits_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left\{X \in (a,b)\right\} dX = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\min\left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \ldots, \frac{x_n - a}{t_n}\right) - a\right]$$

при $m \in (a, b)$, иначе — ноль.

2.13

Задание. Пусть

$$\xi\left(t\right) = U \cos \theta t + V \sin \theta t,\ t \in T,$$

где U, V — независимые случайные величины с заданными характеристиками: $MU = MV = 0$, $DU = DV = \sigma^2$, θ — неслучайная величина. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса $\{\xi\left(t\right), t \in T\}$.

Решение. Нужно найти $m\left(t\right), D\xi\left(t\right), K\left(t, s\right)$.

Найдём математическое ожидание в момент t. По свойствам

$$m\left(t\right) = M\xi\left(t\right) = M\left(U \cos \theta t + V \sin \theta t\right) = \cos \theta t \cdot MU + \sin \theta t \cdot MV = 0.$$

Можно сделать преобразование $U \cos \theta t + V \sin \theta t = C \sin\left(\theta t + \omega\right)$, где $C = \sqrt{U^2 + V^2}$. Траектории такого процесса изображены на рисунке 18: график синуса сжимается к оси ординат, когда модули случайных величин U и V растут.

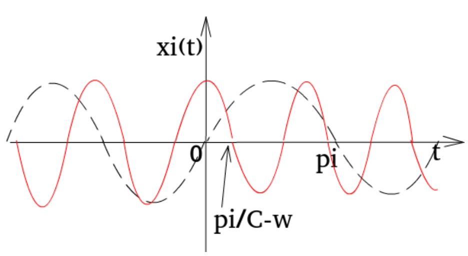

Рис. 18: Траектория процесса

Найдём дисперсию в момент t. По свойствам

$$D\xi(t) = D(U\cos\theta t + V\sin\theta t) = \cos^2\theta t \cdot DU + \sin^2\theta t \cdot DV =$$

Подставим известные значения дисперсии

$$= \cos^2\theta t \cdot \sigma^2 + \sin^2\theta t \cdot \sigma^2 = \sigma^2\left(\cos^2\theta t + \sin^2\theta t\right) = \sigma^2.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставим выражения для случайного процесса в первое слагаемое, а второе равно нулю

$$= M\left[(U\cos\theta t + V\sin\theta t)\cdot(U\cos\theta s + V\sin\theta s)\right] =$$

Раскроем скобки

$$= M(U^2\cos\theta t\cdot\cos\theta s + UV\cos\theta t\cdot\sin\theta s + VU\sin\theta t\cdot\cos\theta s +$$
$$+ V^2\sin\theta t\cdot\sin\theta s) =$$
$$= DU\cdot\cos\theta t\cdot\cos\theta s + MU\cdot MV\cdot\cos\theta t\cdot\sin\theta s + MV\cdot MU\cdot\sin\theta t\cdot\cos\theta s +$$
$$+ DV\cdot\sin\theta t\cdot\sin\theta s = \sigma^2\cos\theta t\cdot\cos\theta s + \sigma^2\sin\theta t\cdot\sin\theta s =$$
$$= \sigma^2\cdot(\cos\theta t\cdot\cos\theta s + \sin\theta t\cdot\sin\theta s) = \sigma^2\cos(\theta t - \theta s) = \sigma^2\cos\left[\theta(t-s)\right].$$

2.14

Задание. Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса

$$\xi(t) = 2u\sin\nu t + 3vt^2 + 5,\ t\in T,$$

где ν — известный неслучайный параметр, а u, v — случайные величины с известными характеристиками:

$$Mu = 1,\ Mv = 2,\ Du = 0.1,\ Dv = 0.9,\ cov(u,v) = -0.3.$$

Решение. Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t,s)$.

Найдём математическое ожидание в момент t. По свойствам

$$m(t) = M\left(2u\sin\nu t + 3vt^2 + 5\right) = 2\sin\nu t\cdot Mu + 3t^2 Mv + 5 = 2\sin\nu t + 6t^2 + 5.$$

Траектория такого процесса изображена на рисунке 19 при $\nu = 1$, $u = 1$, $v = 2$.

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)\cdot M\xi(s) =$$

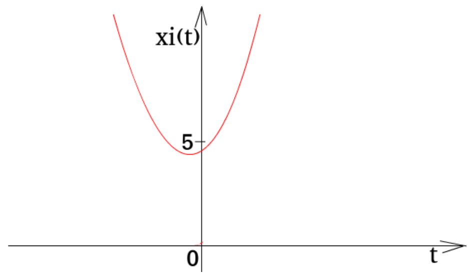

Рис. 19: Траектория процесса

Подставим выражения для случайного процесса и его математические ожидания

$$= M\left[\left(2u\sin\nu t + 3vt^2 + 5\right)\left(2u\sin\nu s + 3vs^2 + 5\right)\right] -$$
$$-\left(2\sin\nu t + 6t^2 + 5\right)\left(2\sin\nu s + 6s^2 + 5\right) =$$
$$= M(4u^2\sin\nu t\cdot\sin\nu s + 6uv\sin\nu t\cdot s^2 + 10u\sin\nu t + 6vt^2u\sin\nu s + 9v^2t^2s^2 +$$
$$+15vt^2 + 10u\sin\nu s + 15vs^2 + 25) - 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s - 12\sin\nu t\cdot s^2 - 10\sin\nu t -$$
$$-12t^2\sin\nu s - 36t^2s^2 - 30t^2 - 10\sin\nu s - 30s^2 - 25 =$$
$$= 4\sin\nu t\cdot Mu^2 + 6t^2\sin\nu s\cdot M\left(uv\right) + 10\sin\nu t\cdot Mu + 6t^2\sin\nu s\cdot M\left(uv\right) +$$
$$+9t^2s^2Mv^2 + 15t^2Mv + 10\sin\nu s\cdot Mu + 15s^2\cdot Mv + 25 - 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s -$$
$$-12\sin\nu t\cdot s^2 - 10\sin\nu t - 12t^2\sin\nu s - 36t^2s^2 - 30t^2 - 10\sin\nu s - 30s^2 - 25 =$$

Вычислим вторые моменты

$$Mu^2 = Du + \left(Mu\right)^2 = 0.1 + 1 = 1.1,\ Mv^2 = Dv + \left(Mv\right)^2 = 0.9 + 4 = 4.9.$$

По определению ковариации $cov\left(u,v\right) = M\left(uv\right) - Mu\cdot Mv$, откуда

$$M\left(uv\right) = cov\left(u,v\right) + Mu\cdot Mv = -0.3 + 1\cdot 2 = 2 - 0.3 = 1.7.$$

Подставим полученные значения в функцию ковариации

$$= 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s\cdot 1.1 + 6\sin\nu t\cdot s^2\cdot 1.7 + 10\sin\nu t + 6t^2\sin\nu s\cdot 1.7 +$$
$$+9t^2s^2\cdot 4.9 + 15t^2\cdot 2 + 10\sin\nu s + 15s^2\cdot 2 - 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s - 12\sin\nu t\cdot s^2 -$$
$$-10\sin\nu t - 12t^2\cdot\sin\nu s - 36t^2s^2 - 30t^2 - 10\sin\nu s - 30s^2 =$$
$$= 0.4\sin\nu t\cdot\sin\nu s - 1.8\sin\nu t\cdot s^2 - 1.8t^2\sin\nu s + 8.1t^2s^2.$$

Найдём дисперсию в момент t. Из формулы для ковариации

$$D\xi\left(t\right) = K\left(t,t\right) = 0.4\sin^2\nu t - 3.6\sin\nu t\cdot t^2 + 8.1t^4.$$

2.15

Задание. Найдите ковариационную функцию процесса

$$Y\left(t\right)=\psi_{1}\left(t\right)X_{1}+\ldots+\psi_{n}\left(t\right)X_{n},$$

где $\psi_1,\ldots,\psi_n$ — произвольные числовые функции от t, а $X_1,\ldots,X_n$ — некоррелируемые случайные величины с дисперсиями $D_1,\ldots,D_n$.

Решение. Нужно найти

$$K\left(t,s\right)=cov\left(\psi_{1}\left(t\right)X_{1}+\ldots+\psi_{n}\left(t\right)X_{n},\,\psi_{1}\left(s\right)X_{1}+\ldots+\psi_{n}\left(s\right)X_{n}\right)=$$

Распишем по определению

$$\begin{aligned}=M\left[\left(\psi_{1}\left(t\right)X_{1}+\ldots+\psi_{n}\left(t\right)X_{n}\right)\left(\psi_{1}\left(s\right)X_{1}+\ldots+\psi_{n}\left(s\right)X_{n}\right)\right]-\\-M\left(\psi_{1}\left(t\right)X_{1}+\ldots+\psi_{n}\left(t\right)X_{n}\right)\cdot M\left(\psi_{1}\left(s\right)X_{1}+\ldots+\psi_{n}\left(s\right)X_{n}\right)=\\=\sum_{i,j=1}^{n}\psi_{i}\left(t\right)\psi_{j}\left(s\right)M\left(X_{i}X_{j}\right)-\sum_{i,j=1}^{n}\psi_{i}\left(t\right)\psi_{j}\left(s\right)MX_{i}\cdot MX_{j}=\\=\psi_{1}\left(t\right)\psi_{1}\left(s\right)DX_{1}+\ldots+\psi_{n}\left(t\right)\psi_{n}\left(s\right)DX_{n}=\\=\psi_{1}\left(t\right)\psi_{1}\left(s\right)D_{1}+\ldots+\psi_{n}\left(t\right)\psi_{n}\left(s\right)D_{n}.\end{aligned}$$

2.16

Задание. Пусть η и ζ — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $1/2$. Найдите конечномерные распределения случайного процесса

$$\xi\left(t\right)=\frac{\eta+\zeta}{t},\;t>0.$$

Решение. Для произвольных натуральных $n\geq 1$, произвольных моментов времени $t_1,\ldots,t_n\in T$ и произвольных действительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ находим

$$F_{t_{1},t_{2},\ldots,t_{n}}\left(x_{1},x_{2},\ldots,x_{n}\right)=P\left\{\xi\left(t_{1}\right)\leq x_{1},\xi\left(t_{2}\right)\leq x_{2},\ldots,\xi\left(t_{n}\right)\leq x_{n}\right\}=$$

Подставляем выражения для случайного процесса

$$=P\left(\frac{\eta+\zeta}{t_{1}}\leq x_{1},\frac{\eta+\zeta}{t_{2}}\leq x_{2},\ldots,\frac{\eta+\zeta}{t_{n}}\leq x_{n}\right)=$$

Переносим моменты времени вправо

$$=P\left(\eta+\zeta\leq x_{1}t_{1},\eta+\zeta\leq x_{2}t_{2},\ldots,\eta+\zeta\leq x_{n}t_{n}\right)=$$

Независимые случайные величины η и ζ имеют нормальное распределение с параметрами $a=0$ и

$$\sigma^{2}=\frac{1}{2}.$$

Их сумма имеет стандартное нормальное распределение. Пусть

$$\eta + \zeta = X \sim N(0,1).$$

Тогда

$$= P(X \le x_1 t_1, X \le x_2 t_2, \ldots, X \le x_n t_n) = P\left(X \le \min_{i=\overline{1,n}} x_i t_i\right) =$$

Запишем через плотность

$$= \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где обозначено

$$z = \min_{i=\overline{1,n}} x_i t_i.$$

2.17

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi(\tau)$, где $\{\xi(t), \ , t \ge 0\}$ — процесс из предыдущей задачи, а τ — независимая от ξ случайная величина, которая принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями $1/2$.

Решение.

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}.$$

Задана случайная величина

$$\tau = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Интересует

$$\varphi_{\xi(\tau)}(\lambda) = Me^{i\xi(\tau)\lambda} = Me^{i \cdot \frac{\eta+\zeta}{\tau} \cdot \lambda} =$$

Как и в предыдущей задаче $\eta + \zeta = X \sim N(0,1)$. Получаем

$$= Me^{i \cdot \frac{X}{\tau} \cdot \lambda} = Me^{-\frac{\lambda^2}{2\tau^2}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

2.18

Задание. Пусть ξ и η — случайные величины, причём η имеет симметричное относительно нуля распределение и $P(\eta = 0) = 0$. Найдите вероятность того, что реализации случайного процесса $\zeta(t) = \xi + t(\eta + t)$, $t \ge 0$ возрастают.

Решение. Известно, что траектории процесса возрастают по t при $t \ge 0$.

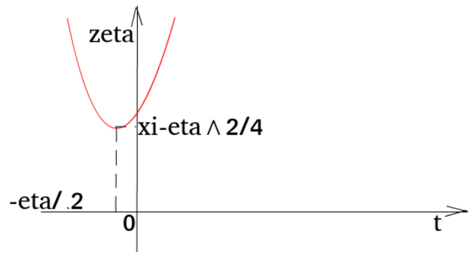

Рис. 20: Траектория процесса

Реализация такого процесса выглядит как парабола (рис. 20) с вершиной в точке с координатами

$$t_0 = -\frac{\eta}{2}, \zeta_0 = t_0^2 + \eta t_0 + \xi = \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^2}{2} + \xi = \xi - \frac{\eta^2}{4}$$

Это случайная величина, так что

$$P\left\{\zeta\left(t\right) \geq 0,\, t \geq 0\right\} = P\left\{\xi + t\left(\eta + t\right) \geq 0,\, t \geq 0\right\} =$$

$= P($вершина параболы $\zeta = t^2 + \eta t + \xi$ лежит слева от нуля$)=$

$$= P\left(-\frac{\eta}{2} \leq 0\right) = P\left(\eta \geq 0\right) =$$

Случайная величина η имеет симметричное распределение

$$= \frac{1}{2}.$$

2.19

Задание. Случайный эксперимент состоит в двухразовом подбрасывании монеты. Обозначим через $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ результат эксперимента и обозначим процессы $\{X\left(t\right),\, 0 \leq t < 2\}$ и $\{Y\left(t\right),\, 0 \leq t < 2\}$ следующим образом:

$$X\left(t\right) = \mathbb{1}_{[0,1)}\left(t\right) \cdot \mathbb{1}\left\{\omega_1 = P\right\} + \mathbb{1}_{[1,2)}\left(t\right) \cdot \mathbb{1}\left\{\omega_2 = P\right\},\, 0 \leq t < 2,$$
$$Y\left(t\right) = 1 - X\left(t\right),\, 0 \leq t < 2.$$

Докажите, что процессы $X\left(t\right)$ и $Y\left(t\right)$ имеют одинаковые конечномерные распределения, но не являются стохастически эквивалентными.

Решение. Рассматривается 2 процесса. Процессы заданы на $t \in [0, 2)$.

Это разные функции. Вероятность

$$P\left\{X\left(t\right) \neq Y\left(t\right)\right\} = P\left\{X\left(t\right) \neq 1 - X\left(t\right)\right\} = 1,$$

а это значит, что процессы с вероятностью 1 не совпадают. Зафиксируем несколько точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Обозначим через $t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{ik}$ моменты t, которые лежат между 0 и 1, и $t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_{j(n-k)}$ — все остальные. Найдём вероятность

$$\begin{aligned}
&P\{X(t_1)=x_1,\ldots,X(t_n)=x_n\}=\\
&=P\{X(t_{i1})=x_{i1},\ldots,X(t_{ik})=x_{ik},X(t_{j1})=x_{j1},\ldots,\\
&X\left(t_{j(n-k)}\right)=x_{j(n-k)}\right\}=\\
&=P\left(\mathbb{1}\{\omega_1=P\}=x_{i1},\ldots,\mathbb{1}\{\omega_1=P\}=x_{ik},\right.\\
&\left.\mathbb{1}\{\omega_2=P\}=x_{j1},\ldots,\mathbb{1}\{\omega_2=P\}=x_{j(n-k)}\right).
\end{aligned}$$

Рассматриваем только случай, когда $x_{i1},\ldots,x_{ik}$ одинаковые, и

$$x_{j1},\ldots,x_{j(n-k)}$$

одинаковые.

$$P\{X(t_1)=x_1,\ldots,X(t_n)=x_n\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Аналогично

$$P\{Y(t_1)=x_1,\ldots,Y(t_n)=x_n\}=\frac{1}{4}.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения.

Занятие 3. Процесс Пуассона

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение процесса Пуассона.

$\{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона, если

1. $N(0) = 0$;
2. при $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ события

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

— независимые;

3. число событий на интервале зависит только от длины интервала, то есть есть однородность приращений

$$N(t+s) - N(t) \stackrel{d}{=} N(s) \sim Pois(\lambda s).$$

Запишите конечномерные распределения процесса Пуассона.

Одномерные распределения

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Двумерные распределения: $t_1 < t_2$. Перейдём к приращениям

$$P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2\} = P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} =$$

Случайная величина $N(t_1) \sim Pois(\lambda t_1)$, а $N(t_2) - N(t_1) \sim Pois(\lambda(t_2 - t_1))$. Совместная вероятность — это произведение вероятностей

$$= e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdot \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!}.$$

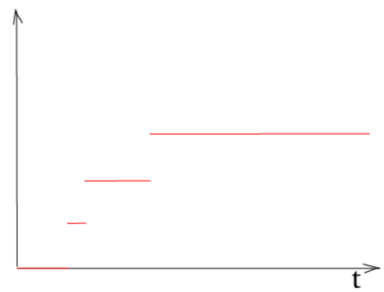

Рис. 21: График пуассоновского процесса

Какой вид имеют траектории процесса Пуассона?

Траектория изображена на рисунке 21.

Какое содержание имеет параметр процесса Пуассона?

$N(t)$ — число событий, произошедших до момента времени t.

Аудиторные задачи

3.2

Задание. Пусть $\{N(t)\,, t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью

$$\lambda = 2.$$

Вычислите вероятности:

a) $P(N(6) = 3)$;

b) $P(N(6) = 3,\, N(9) = 7,\, N(15) = 10)$;

c) $P(N(6) = 3 \mid N(9) = 7)$;

d) $P(N(9) = 7 \mid N(6) = 3)$.

Решение.

a) $N(6) \sim Pois(6 \cdot 2)$, поэтому

$$P(N(6) = 3) = \frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12};$$

b) нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$P(N(6) = 3,\, N(9) = 7,\, N(15) = 10) =$$
$$= P\{N(6) = 3,\, N(9) - N(6) = 4,\, N(15) - N(9) = 3\} =$$
$$= \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}\right) \cdot \left(\frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}\right) \cdot \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}\right);$$

c) по определению условной вероятности

$$P\left(N\left(6\right)=3\mid N\left(9\right)=7\right)=\frac{P\left(N\left(6\right)=3,\,N\left(9\right)=7\right)}{P\left(N\left(9\right)=7\right)}=$$

$$=\frac{\frac{12^3}{3!}\cdot e^{-12}\cdot\frac{6^4}{4!}\cdot e^{-6}}{\frac{18^7}{7!}\cdot e^{-18}}=\frac{12^3\cdot 6^4\cdot 7!}{3!\cdot 4!\cdot 18^7};$$

d) аналогично предыдущему пункту

$$P\left(N\left(9\right)=7\mid N\left(6\right)=3\right)=\frac{P\left(N\left(9\right)=7,\,N\left(6\right)=3\right)}{P\left(N\left(6\right)=3\right)}=$$

$$=\frac{\frac{12^3}{3!}\cdot e^{-12}\cdot\frac{6^4}{4!}\cdot e^{-6}}{\frac{12^3}{3!}\cdot e^{-12}}=\frac{6^4}{4!}\cdot e^{-6}=\frac{P\left(N\left(6\right)=3\right)P\left(N\left(3\right)=4\right)}{P\left(N\left(6\right)=3\right)}.$$

3.3

Задание. Пусть $\{N\left(t\right),\,t\geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Вычислите условное математическое ожидание $M\left[N\left(s\right)\mid N\left(t\right)\right]$ для

$$0\leq s\leq t.$$

Решение. Что ж такое условное математическое ожидание?

$N\left(s\right)$ и $N\left(t\right)$ — дискретные величины, то есть

$$M\left[N\left(s\right)\mid N\left(t\right)\right]=\sum_{l=0}^{\infty}l\cdot P\left\{N\left(s\right)=l\mid N\left(t\right)=k\right\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\left\{N\left(s\right)=l\mid N\left(t\right)=k\right\}=\frac{P\left\{N\left(t\right)-N\left(s\right)=k-l\right\}P\left\{N\left(s\right)=l\right\}}{P\left\{N\left(t\right)=k\right\}}=$$

подставляем пуассоновские вероятности

$$=\frac{\frac{\left[\lambda(t-s)\right]^{k-l}}{(k-l)!}\cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}}\cdot\frac{\left(\lambda s\right)^l}{l!}\cdot e^{-\lambda l}=\frac{k!\left(t-s\right)^{k-l}s^l}{(k-l)!l!t^k}=C_k^l\cdot\left(\frac{t-s}{t}\right)^{k-l}\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^l.$$

Имеем биномиальное распределение с параметрами k и $\frac{s}{t}$.

Вывод: при условии $N\left(t\right)=k$ мы нашли распределение

$$N\left(s\right)\sim B\left(k,\frac{s}{t}\right).$$

Условное математическое ожидание

$$M\left[N\left(s\right)|N\left(t\right)=k\right]=\frac{ks}{t}.$$

Ответ: $\frac{N(t)\cdot s}{t}$. Куда пропала сумма?

$$M\left[N\left(s\right) \mid N\left(t\right)=k\right]=\sum_{l} l\cdot P\left[N\left(s\right)=l \mid N\left(t\right)=k\right]=$$

Нашли эту вероятность

$$=\sum_{l} l\cdot P\left\{Bin\left(k,\frac{s}{t}\right)=l\right\}=MBin\left(k,\frac{s}{t}\right)=k\cdot\frac{s}{t}.$$

Условное математическое ожидание — это математическое ожидание по условному распределению.

3.4

Задание. Пусть $N=\{N\left(t\right), t\geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Найдите вероятность того, что первый прыжок процесса N произошёл до момента времени $s\in[0,t]$ при условии, что на отрезке $[0,t]$ произошло ровно n прыжков.

Решение. Нужно найти вероятность $P($первый прыжок произошёл до момента $s\in[0,t]|\,N\left(t\right)=n)$. Нужно это условие переписать через пуассоновский процесс. Получаем $P($первый прыжок произошёл до момента $s\in[0,t]|\,N\left(t\right)=n)=P\left\{N\left(s\right)\geq 1 \mid N\left(t\right)=n\right\}$. Значения зависимые

$$P\left\{N\left(s\right)\geq 1 \mid N\left(t\right)=n\right\}=1-P\left\{N\left(s\right)=0 \mid N\left(t\right)=n\right\}=$$

Условное распределение биномиальное

$$=1-P\left\{Bin\left(n,\frac{s}{t}\right)=0\right\}=1-C_n^0\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^0\cdot\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-0}=1-\left(1-\frac{s}{t}\right)^n.$$

3.5

Задание. Пусть $N=\{N\left(t\right), t\geq 0\}$ является процессом Пуассона с параметром λ. Докажите, что при условии, что N имеет ровно 1 прыжок на отрезке $[a,b]$, момент этого прыжка является равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$ случайной величиной.

Решение. Обозначим τ — момент прыжка на отрезке $[a,b]$. Нужно найти $P\left\{\tau\leq t \mid N\left(b\right)-N\left(a\right)=1\right\}=P\left\{N\left(t\right)-N\left(a\right)=1 \mid N\left(b\right)-N\left(a\right)=1\right\}$.

Изобразим процесс на графике 22.

У пуассоновского процесса есть однородность приращений

$$P\left\{N\left(t\right)-N\left(a\right)=1 \mid N\left(b\right)-N\left(a\right)=1\right\}=P\left\{N\left(t-a\right)=1 \mid N\left(b-a\right)=1\right\}=$$
$$=P\left\{Bin\left(1,\frac{t-a}{b-a}\right)=1\right\}=$$

Это бернуллиевская величина

$$=\frac{t-a}{b-a}.$$

Получилось равномерное распределение, что и требовалось доказать.

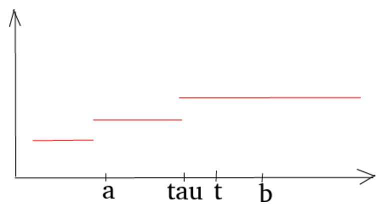

Рис. 22: График пуассоновского процесса

3.6

Задание. Пусть $\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ — последовательность независимых показательно распределённых случаных величин с параметром λ. Положим

$$T_0 = 0,\, T_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k,\, n \geq 1;\, \nu(t) = \max(n : T_n \leq t),\, t \geq 0.$$

a) Докажите, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$$
почти наверное.

b) Докажите, что случайная величина $\tau_1 = T_{\nu(t)+1} - t$ имеет показательное распределение с параметром λ.

c) Докажите, что $\{\nu(t),\, t \geq 0\}$ является процессом Пуассона с интенсивностью λ.

Решение. $\nu(t) = \max(n : T_n \leq t)$ — случайный процесс.

Посмотрим, как этот процесс выглядит (рис. 23).

T_n — это накопительные суммы.

В момент T_1 только $T_1 \leq t$, то есть от T_1 до T_2 значение процесса будет равно единице.

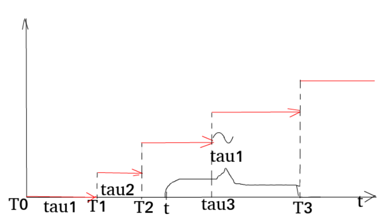

Рис. 23: График процесса

Тут расставили стрелочки, то ест ν — это непрерывная справа функция. То есть ν — это модификация пуассоновского процесса. Конечномерные распределения несут ещё не всю информацию.

a) Нужно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}=\frac{1}{\lambda}$$

почти наверное.

Это равенство — это просто закон больших чисел, потому что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k=T_n\to M\tau_1=\frac{1}{\lambda}.$$

Сумма T_n сходится к бесконечности. Это нужно для того, чтобы определить процесс на всей оси. То есть вывод из пункта а) следующий

$$T_n=n\cdot\frac{T_n}{n}\to\infty\cdot\frac{1}{\lambda}=\infty$$

и $\nu\left(t\right)$ определено при всех t.

b) $\tilde{\tau_1}$ — это величина до следующего прыжка.

Этот пункт означает, что процесс ν имеет однородные приращения.

Докажем, чо $\tilde{\tau_1}$ имеет действительно показательное распределение. Проще всего для показательного распределения посчитать

$$P\left(\tilde{\tau_1}\right)=1-F=1-\left(1-e^{-\lambda s}\right)=e^{-\lambda s},$$

где F — функция распределения. Вопрос: есть ли такое равенство.

Значит, $P\left(\tilde{\tau_1}>s\right)=P\left(T_{\nu(t)+1}>t+s\right)$. Величина T берётся в случайный момент. Такая вероятность может быть записана через сумму по всем возможным T, то есть

$$P\left(T_{\nu(t)+1}>t+s\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(T_n\le t<T_{n+1},\,T_{n+1}>t+s\right)=$$

Одно условие убирается

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\left(T_n\le t,T_{n+1}\le t+s\right)=$$

Момент T_{n+1} — это момент следующего скачка после T_n. Тогда

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(T_n\le t,\,T_n+\tau_{n+1}>t+s\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{T_n\le t,\tau_{n+1}\ge\left(t-T_n\right)+s\right\}=$$

Моменты τ_{n+1} и T_n — независимые величины.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} MP\left[T_n \le t,\, \tau_{n+1} > (t - T_n) + s \mid T_n\right] =$$

Вспомним, какая вероятность $P(\tau > x) = e^{-\lambda x}$. Тогда

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

Для показательных величин выполнено соотношение

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda y} P(\tau > x)$$

— свойство отсутствия последействия.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda s} P(T_n \le t, \tau_{n+1} > t - T_n) = e^{-\lambda s} \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \le t < T_{n+1}) =$$

Такая сумма равна единице, потому что t всегда попадает между T_n и T_{n+1} при каком-то n, потому

$$= e^{-\lambda s},$$

так что такая величина $\tilde{\tau_1}$ действительно имеет показательное распределение.

c) Найдём конечномерные распределения $\nu(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} &P\{\nu(t_1) = k_1, \nu(t_2) = k_2, \ldots, \nu(t_n) = k_n\} = \\ &= P\left(\sum_{l=1}^{k_1} \tau_l \le t_1 < \sum_{l=1}^{k_1+1} \tau_l, \ldots, \sum_{l=1}^{k_n} \tau_l \le t_n < \sum_{l=1}^{k_n+1} \tau_l\right) = \\ &= \underbrace{\int \cdots \int}_{k_n+1} \lambda^{k_n+1} e^{-\lambda\left(x_{k_1} + \ldots + x_{k_n} + 1\right)} dx_{k_n+1} \ldots dx_1 = \\ &= \lambda^{k_n+1} \cdot \underbrace{\int \cdots \int}_{k_n,\, 0 < x_{k_1} + \ldots + x_{k_n} \le t,\, t = \sum t_i} e^{-\lambda\left(x_{k_1} + \ldots + x_{k_n}\right)} \times \\ &\quad \times \int\limits_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} \ldots dx_1 = \end{aligned}$$

Возьмём последний интеграл

$$\int\limits_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x_{k_n+1}} \Big|_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{+\infty}.$$

Подставляем и получаем

$$= \frac{\lambda^{k_n+1}}{\lambda} \int\limits_{k_n,\, 0<x_{k_1}+\ldots+x_{k_n}\leq t} \cdots \int e^{-\lambda \sum\limits_{i=k_1}^{k_n} x_i} e^{-\lambda t+\lambda \sum\limits_{i=k_1}^{k_n} x_i} dx_{k_n} \ldots dx_{k_1} =$$

$$= \lambda^{k_n} e^{-\lambda t} \int\limits_{0<\sum\limits_{i=k_1}^{k_n} x_i \leq 1} \cdots \int dx_{k_n} \ldots dx_{k_1} =$$

Чтобы понять, чему будет равен этот интеграл, рассмотрим частные случаи:

(a) когда есть двойной интеграл

$$\iint\limits_{0<x_1+x_2\leq t} dx_2 dx_1 = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-x_1} dx_2 dx_1 = \int\limits_0^t x_2\big|_0^{t-x_1} dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t (t-x_1)\, dx_1 = t\int\limits_0^t dx_1 - \int\limits_0^t x_1 dx_1 = t^2 - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2!};$$

(b) когда есть тройной интеграл

$$\iiint\limits_{0<x_1+x_2+x_3\leq t} dx_3dx_2dx_1 = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-x_1} \int\limits_0^{t-x_1-x_2} dx_3dx_2dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-x_1} (t - x_1 - x_2)\, dx_2dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t \left(t \int\limits_0^{t-x_1} dx_2 - x_1 \int\limits_0^{t-x_1} dx_2 - \int\limits_0^{t-x_1} x_2dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t \left[t\,(t - x_1) - x_1\,(t - x_1) - \frac{(t - x_1)^2}{2} \right] dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{2t^2 - 2tx_1 - 2tx_1 + 2x_1^2 - t^2 + 2tx_1 - x_1^2}{2} dx_1 \times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{t^2 - 2x_1t + x_1^2}{2} dx_1 = \int\limits_0^t \frac{(t - x_1)^2}{2} dx_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(t - x_1)^3}{3} \Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{t^3}{2 \cdot 3} = \frac{t^3}{3!}.$$

Значит,

$$\int\limits_{0<\sum\limits_{i=k_1}^{k_n} x_i\leq 1} \cdots \int dx_{k_n} \ldots dx_{k_1} = \frac{t^{k_n}}{k_n!}.$$

Тогда вероятность равна

$$= \frac{\lambda^{k_n} e^{-\lambda t} t^{k_n}}{k_n!} = \frac{(\lambda t)^{k_n}}{k_n!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Получился процесс Пуассона с интенсивностью λ.

3.7

Задание. Пусть $N = \{N(t)\,,\, t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с параметром λ и пусть $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ — независимая от N последовательность независимых бернуллиевских случайных величин с парметром $p \in (0, 1)$. Положим

$$S_n = Y_1 + \ldots + Y_n.$$

Докажите, что процесс $\xi = \left\{S_{N(t)},\, t \geq 0\right\}$ является процессом Пуассона с параметром λt.

Решение. Пуассоновский процесс

$$N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{N(t)}1$$

— число событий до момента $N\left(t\right)$. В ξ складываем не 1, а $Y_i=0$ или 1.

Начнём с того, что посчитаем одномерные распределения и посмотрим, что это тоже пуассоновские величины. Есть сумма случайного числа слагаемых. Нужно перебирать все возможные значения $N\left(t\right)$. Имеем

$$P\left\{S_{N(t)}=k\right\}=P\left\{Y_1+\ldots+Y_{N(t)}=k\right\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{N\left(t\right)=n,\,Y_1+\ldots+Y_n=k\right\}=$$

Сумма $Y_1+\ldots+Y_n$ — биномиальная величина

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}\cdot C_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}=$$

Преобразуем

$$=e^{-\lambda t}p^k\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!}\cdot C_n^k\left(1-p\right)^{n-k}=$$

Распишем C_n^k явно

$$=e^{-\lambda t}p^k\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!}\cdot\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}\cdot\left(1-p\right)^{n-k}=\frac{e^{-\lambda t}p^k}{k!}\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\left(\lambda t\right)^{n+k}\left(1-p\right)^{n-k}}{\left(n-k\right)!}=$$

Имеем ряд для экспоненты. Заменим $n-k$ на новый индекс суммирования

$$=\frac{e^{-\lambda t}p^k}{k!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda t\right)^{n+k}\left(1-p\right)^n}{n!}=$$

Выносим $\left(\lambda t\right)^k$ за знак суммы

$$=\frac{e^{-\lambda t}p^k\left(\lambda t\right)^k}{k!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda t\right)^n\left(1-p\right)^n}{n!}=\frac{e^{-\lambda t}\left(p\lambda t\right)^k}{k!}\cdot e^{\lambda t(1-p)}=\frac{e^{-\lambda pt}\left(\lambda pt\right)^k}{k!}$$

— пуассоновская вероятность.

Вывод: $S_{N(t)}\sim Pois\left(\lambda pt\right)$, то есть у такого процесса одномерные распределения такие же, как у пуассоновского с параметром λpt.

Домашнее задание

3.11

Задание. Пусть $N=\left\{N\left(t\right),\,t\geq 0\right\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda=5$. Вычислите вероятности:

a) $P\left(N\left(2\right)\geq 3,\ N\left(5\right)\leq 4\right)$;

b) $P\left(N\left(2\right)\geq 3,\ N\left(3\right)\geq 4,\ N\left(5\right)\leq 3\right)$;

c) $P\left(N\left(2\right)=3,\ N\left(3\right)=5,\ N\left(4\right)\leq 6\right)$;

d) $P\left(N\left(2\right)=3\mid N\left(3\right)=5\right)$;

e) $P\left(N\left(3\right)=5\mid N\left(2\right)=3\right)$.

Решение.

a) Рассмотрим все возможные случаи

$$P\left(N\left(2\right)\geq 3,\ N\left(5\right)\leq 4\right)=$$
$$=P\left\{N\left(2\right)=3,\ N\left(5\right)=3\right\}+P\left\{N\left(2\right)=3,\ N\left(5\right)=4\right\}+$$
$$+P\left\{N\left(2\right)=4,\ N\left(5\right)=4\right\}=$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$=P\left\{N\left(2\right)=2,\ N\left(5\right)-N\left(2\right)=3-3\right\}+$$
$$+P\left\{N\left(2\right)=3,\ N\left(5\right)-N\left(2\right)=4-3\right\}+$$
$$+P\left\{N\left(2\right)=4,\ ,N\left(5\right)-N\left(2\right)=4-4\right\}=$$
$$=P\left\{N\left(2\right)=3\right\}P\left\{N\left(3\right)=0\right\}+P\left\{N\left(2\right)=3\right\}P\left\{N\left(3\right)=1\right\}+$$
$$+P\left\{N\left(2\right)=4\right\}P\left\{N\left(3\right)=0\right\}=$$
$$=\frac{10^3}{3!}\cdot e^{-10}\cdot\frac{15^0}{0!}\cdot e^{-15}+\frac{10^3}{3!}\cdot e^{-10}\cdot\frac{15^1}{1!}\cdot e^{-15}+$$
$$+\frac{10^4}{4!}\cdot e^{-10}\cdot\frac{15^0}{0!}\cdot e^{-15}=\frac{10^3}{3!}\cdot e^{-25}+\frac{10^3}{3!}\cdot e^{-25}\cdot 15+\frac{10^4}{4!}\cdot e^{-25}=$$
$$=\frac{10^3}{3!}\cdot e^{-25}\cdot 16+\frac{10^4}{4!}\cdot e^{-25};$$

b) с ростом времени значение процесса Пуассона не должно уменьшаться
$P\left(N\left(2\right)\geq 3,\ N\left(3\right)\geq 4,\ N\left(5\right)\leq 3\right)=0$;

c) как в первом пункте рассмотрим все возможные случаи

$$P\left(N\left(2\right)=3,\ N\left(3\right)=5,\ N\left(4\right)\leq 6\right)=$$
$$=P\left\{N\left(2\right)=3,\ N\left(3\right)=5,\ N\left(4\right)=5\right\}+$$
$$+P\left\{N\left(2\right)=3,\ N\left(3\right)=5,\ N\left(4\right)=6\right\}=$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$= P\{N(2) = 3,\, N(3) - N(2) = 5 - 3,\, N(4) - N(3) = 5 - 5\} +$$
$$+ P\{N(2) = 3,\, N(3) - N(2) = 5 - 3,\, N(4) - N(3) = 6 - 5\} =$$
$$= P\{N(2) = 3\} \cdot P\{N(1) = 2\} \cdot P\{N(1) = 0\} +$$
$$+ P\{N(2) = 3\} \cdot P\{N(1) = 2\} \cdot P\{N(1) = 1\} =$$
$$= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} =$$
$$= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^3}{2!} = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot 6 = 10^{-20} \cdot 12500;$$

d) по определению условной вероятности

$$P(N(2) = 3 \mid N(3) = 5) = \frac{P\{N(2) = 3,\, N(3) = 5\}}{P\{N(3) = 5\}} =$$

Перейдём к приращениям и подставим выражения для вероятностей

$$= \frac{\frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}}{\frac{15^5}{5!} \cdot e^{-15}} =$$

Экспоненты сокращаются

$$= \frac{10^3 \cdot 5^2 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 15^5} = \frac{80}{243};$$

e) аналогично предыдущему пункту

$$P(N(3) = 5 \mid N(2) = 3) = \frac{P\{N(3) = 5,\, N(2) = 3\}}{P\{N(2) = 3\}} =$$

Перейдём к приращениям

$$= \frac{P\{N(2) = 3\}\, P\{N(1) = 2\}}{P\{N(2) = 3\}} = P\{N(1) = 2\} = \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}.$$

3.12

Задание. Пусть $N = \{N(t),\, t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda = 1$. Найдите характеристическую функцию случайной величины

$$N(3) - N(2) + N(1).$$

Решение. $N(t) \sim Pois(t)$. Процесс Пуассона имеет однородность приращений $N(3) - N(2) \sim N(3-2) = N(1) \sim Pois(1)$, а $N(1) \sim Pois(1)$.

Приращения $N(3) - N(2)$ и $N(1)$ — независимы, следовательно,

$$N(3) - N(2) + N(1) \sim Pois(1+1) = Pois(2).$$

Тогда характеристическая функция $\varphi_{N(3)-N(2)+N(1)}(t) = e^{2\left(e^{it}-1\right)}$.

3.13

Задание. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Найдите условную вероятность $P(N(s) = k \mid N(t) = n)$ при $s > t$ и вычислите условное математическое ожидание $M[N(s) \mid N(t)]$ для $s > t$.

Решение. $N(t) \sim Pois(\lambda t)$.

Что такое условное математическое ожидание?

$N(s)$ и $N(t)$ — дискретные величины, то есть

$$M[N(s) \mid N(t) = n] = \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot P\{N(s) = k \mid N(t) = n\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\{N(s) = k \mid N(t) = n\} = \frac{P\{N(s) = k, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Перепишем через приращения и воспользуемся их независимостью

$$= \frac{P(N(t) = n\} P\{N(s-t) = k-n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Сократим одинаковые множители в числителе и знаменателе

$$= P\{N(s-t) = k-n\} =$$

Подставим пуассоновские вероятности

$$= \frac{[\lambda(s-t)]^{k-n}}{(k-n)!} \cdot e^{-\lambda(s-t)}.$$

Имеем пуассоновское распределение с параметром $\lambda(s-t)$.

Вывод: при условии $N(t) = n$ мы нашли распределение

$$N(s) \sim Pois(\lambda(s-t)).$$

Условное математическое ожидание

$$M[N(s) \mid N(t) = n] = MPois(\lambda(s-t)) + n = \lambda(s-t) + n.$$

Тогда

$$M[N(s) \mid N(t)] = \lambda(s-t) + N(t).$$

3.14

Задание. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$, $\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$ являются независимыми процессами Пуассона с параметрами λ и μ соответственно. Положим $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$. Докажите, что процесс $\zeta = \{\zeta(t), t \geq 0\}$ является процессом Пуассона с параметром $\lambda + \mu$.

Решение.

$$\varphi_\zeta(t) = \varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\,\varphi_\eta(t) = e^{\lambda t\left(e^{it}-1\right)} e^{\mu t\left(e^{it}-1\right)} = e^{(\lambda+\mu)t\left(e^{it}-1\right)}.$$

Это доказывает только то, что $\zeta \sim Pois\left((\lambda+\mu)\,t\right)$ для каждого $t \geq 0$, чего недостаточно.

$\{\zeta(t)\,,\, t \geq 0\}$ — процесс Пуассона, так как

1. $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t) = 0$;
2. при $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ события

$$\zeta(t_1) = \xi(t_1) + \eta(t_1)\,, \zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \xi(t_2) + \eta(t_2) - \xi(t_1) - \eta(t_1)\,, \ldots,$$
$$\zeta(t_n) - \zeta(t_{n-1}) = \xi(t_n) + \eta(t_n) - \xi(t_{n-1}) - \eta(t_{n-1})$$

— независимы;

3. число событий на интервале зависит только от длины интервала, то есть есть однородность приращений

$$\zeta(t+s) - \zeta(t) = \xi(t+s) + \eta(t+s) - \xi(t) - \eta(t) \stackrel{d}{=} \xi(s) + \eta(s) =$$
$$= \zeta(s) \sim Pois\left((\lambda+\mu)\,t\right).$$

3.15

Задание. Пусть $\{N(t)\,,\, t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Выясните, какой из следующих процессов является пуассоновским:

$$\{N_1(t) = 2N(t)\,,\, t \geq 0\}\,; \{N_2(t) = N(2t)\,,\, t \geq 0\}\,; \left\{N_3(t) = N\left(t^2\right)\,,\, t \geq 0\right\};$$
$$\{N_4(t) = N(t+s) - N(s)\,,\, t \geq 0\}\,,$$

где $s > 0$ — фиксированное число. Для пуассоновских процессов укажите их интенсивность.

Решение.

$$P\{N_1(t) = k\} = P\{2N(t) = k\} = P\left\{N(t) = \frac{k}{2}\right\} = 0,$$

так как пуассоновский процесс принимает только неотрицательные целые значения. Следовательно, $\{N_1(t)\,,\, t \geq 0\}$ — не процесс Пуассона.

$$P\{N_2(t) = k\} = P\{N(2t) = k\} = \frac{(\lambda \cdot 2t)^k}{k!} \cdot e^{-2\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью 2λ. Независимость и однородность приращений выполняются.

Перейдём к третьему процессу

$$P\{N_3(t) = k\} = P\left\{N\left(t^2\right) = k\right\} = \frac{\left(\lambda t^2\right)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t^2} \sim Pois\left(\lambda t^2\right) \nsim Pois(\mu t)\,,$$

значит, процесс не пуассоновский.

$$P\{N_4(t)=k\}=P\{N(t+s)-N(s)=k\}=P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью λ.

3.16

Задание. Пусть $N=\{N(t), t\geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ и пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots$ — независимые от процесса N независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием m. Пусть

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i.$$

Докажите, что $M[X(t)]=m\lambda t$.

Решение. $N(t)\sim Pois(\lambda t)$.

Вычислим математическое ожидание

$$MX(t)=M\left(\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i\right)=M\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mathbb{1}\{N(t)=i\}\sum_{j=1}^{i}\xi_j\right)=$$

Математическое ожидание индикатора — вероятность

$$=m\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot P\{N(t)=i\}=mMN(t)=m\lambda t.$$

3.17

Задание. Пусть $\{N(t), t\geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Используя пункт а) задачи 3.6 докажите, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\lambda\, a.s.$$

Решение. Надо проверить, что для пуассоновского процесса

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\lambda\, a.s.$$

В задаче 3.6 доказали, что

$$\frac{T_n}{n}\to\frac{1}{\lambda}$$

с помощью закона больших чисел.

$N(T_n)=n$ — значение T_n-го скачка (рис. 24).

$$\frac{T_n}{n} \to \frac{1}{\lambda} \leftrightarrow \frac{T_n}{N(T_n)} \to \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда

$$\frac{N(T_n)}{T_n} \to \lambda.$$

Из такой сходимости следует сходимость по всем моментам времени. Нужно вывести, что

$$\frac{N(t)}{t} \to \lambda.$$

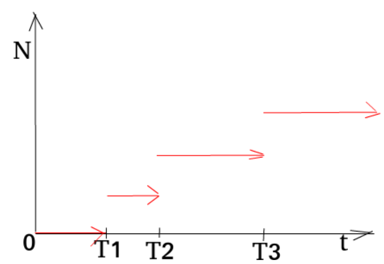

Рис. 24: График пуассоновского процесса

3.18

Задание. Прибытие посетителей в магазин является процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda = 20$ посетителей в час. Вычислите среднее количество продаж на протяжении одного восьмичасового рабочего дня, если вероятность того, что посетитель магазина сделает покупку равна 0.3.

Решение. $N(t)$ — количество покупок за время $[0, t]$.

Обозначим количество покупок как

$$n(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} y_k,$$

где $y_k = \mathbb{1}\{k\text{-й посетитель магазина сделает покупку}\}$.

При этом $P\{y_k = 1\} = 0.3$, а $P\{y_k = 0\} = 1 - 0.3 = 0.7$.

То есть y_k имеет распределение Бернулли.

Из задачи 3.7 получаем, что $n(t) \sim Pois(0.3\lambda)$.

Среднее количество покупок за 8 часов $Mn(8) = 8 \cdot 0.3\lambda = 8 \cdot 0.3 \cdot 20 = 48$.

3.19

Задание. Большой супермаркет имеет три входа. Прибытие посетителей через каждые двери образуют процессы Пуассона с интенсивностями

$\lambda_1 = 110$, $\lambda_2 = 90$, $\lambda_3 = 160$ посетителей в час. 30% посетителей составляют мужчины. Вероятность того, что посетитель-мужчина сделает покурку, равна 0.8, а вероятность того, что женщина-посетитель сделает покупку, равна 0.1. Средняя цена покупки составляет 100 грн.

a) Вычислите среднюю выручку супермаркета за 10-часовой рабочий день.

b) Вычислите вероятность того, что третья женщина-посетитель, которая сделает покупку, прибудет в магазин в первые 15 минут. Вычислите среднее время её прибытия в магазин.

Решение.

a) $t = 10$.

Найдём общую интенсивность $\lambda = 110 + 90 + 160 = 360$ посетителей в час.

Найдём $\lambda_m = 360 \cdot 0.3 = 108$ посетителей-мужчин в час и

$$\lambda_w = 360 \cdot 0.7 = 252$$

посетителей-женщин в час.

Пусть $n(t)$ — число покупок в день. Тогда

$$Mn(t = 10) = M[n_m(10) + n_w(10)] = 10 \cdot 108 \cdot 0.8 + 10 \cdot 252 \cdot 0.1 = 1116.$$

Следовательно, средняя выручка равна

$$100Mn(t = 10) = 100 \cdot 1116 = 111600.$$

b) Пусть λ'_w — интенсивность покупок, сделанных женщинами.

$\lambda'_w = \lambda_w \cdot 0.1 = 25.2$ покупки в час.

Пусть $N(t) \sim Pois(\lambda'_w t)$ — количество женщин-посетителей, прибывших в магазин до момента времени t.

Тогда

$$P\{N(15minutes) = 3\} = P\left\{N\left(\frac{1}{4}\right) = 3\right\} = e^{-25.2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4} \cdot 25.2\right)^3}{3!} =$$
$$= e^{-6.3} \cdot \frac{250}{6} = 0.0019 \cdot 41.6 = 0.08.$$

Тогда среднее время её прибытия в магазин

$$M\tau = \frac{3}{\lambda'_w} = \frac{3}{25.2} = 0.12$$

часа.

Занятие 4. Гауссовские процессы

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение гауссовского процесса.

Процесс $\{X(t)\,,\, t \in T\}$ — гауссовский, если

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X(t_k)$$

— гауссовская случайная величина $\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ и $\forall t_1, \ldots, t_n \in T$.

Эквивалентно: $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T$ — гауссовский вектор.

Запишите плотность конечномерных распределений гауссовского процесса.

$$p = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{det\, A}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[A^{-1}(\vec{x}-\vec{a}), \vec{x}-\vec{a}\right]},$$

если $det\, A > 0$. Квадратные скобки в степени экспоненты — это скалярное произведение, или квадратичная форма матрицы, обратной к ковариации.

Приведите определение и сформулируйте основные свойства ковариационной функции.

$K(t,s) = cov\,[X(t)\,, X(s)]$.

Гауссовский процесс существует, из теомеры Колмогорова, с функциями m и K тогда и только тогда, когда функция $K(s,t) = K(t,s)$ — симметричная, и K — неотрицательно определённая, то есть

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K(t_k, t_j) \geq 0.$$

Тут неравенство возможно для любых $c_1, \ldots, c_n, t_1, \ldots, t_n$.

Аудиторные задачи

4.2

Задание. Выясните, существует ли случайный процесс с ковариационной функцией

a) $K(t,s) = \min(t,s)$;

b) $K(t,s) = (1 - |t-s|) \cdot \mathbb{1}\{|t-s| < 1\}$; $t, s \in \mathbb{R}$.

Решение.

a) $K(t,s) = \min(t,s)$.

Такой процесс есть. Какой? Винеровский;

b) $K(t,s) = (1 - |t-s|) \cdot \mathbb{1}\{|t-s| < 1\}$; $t, s \in \mathbb{R}$.

Если такой процесс есть, то мы его не встречали раньше. Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определена?

Функция зависит только от разности. Сейчас $K(t,s) = \varphi(t-s)$, где

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Так что

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j \varphi(t_k - t_j) \ge 0$$

— это условие неотрицательной определённости для характеристической функции. Будет ли эта функция φ характеристической? То есть вопрос в задаче равносилен следующему: будет ли

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

характеристической функцией? Эта функция изображена на рисунке 25.

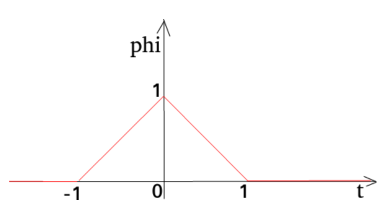

Рис. 25: График функции $\varphi(t)$

Она непрерывная, симметричная, в нуле — единица. Если бы это была характеристическая функция

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)\, dx$$

— преобразование Фурье плотности $p(x)$. Плотность можно найти через обратное преобразование Фурье

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} e^{-itx} (1 - |t|)\, dt =$$

Раскроем модуль

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-1}^{1} e^{-itx} dt + \int\limits_{-1}^{0} e^{-itx} t dt - \int\limits_{0}^{1} e^{-itx} t dt \right) =$$

Берём первый интеграл

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{e^{-itx}}{ix} \Bigg|_{-1}^{1} - \int\limits_{0}^{1} e^{itx} t dt - \int\limits_{0}^{1} e^{-itx} t dt \right) =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{e^{-ix}}{ix} + \frac{e^{ix}}{ix} - \int\limits_{0}^{1} \left(e^{-itx} + e^{itx} \right) t dt \right] =$$

Из формулы Эйлера следует, что $e^{-itx} + e^{itx} = 2\cos(tx)$. Тогда

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - 2 \int\limits_{0}^{1} \cos(tx)\, t dt \right] =$$

Интегрируем по частям, то есть

$$u = t,\ du = dt,\ dv = \cos(tx)\, dt,\ c = \int \cos(tx)\, dt = \frac{1}{x} \cdot \sin(xt)\,.$$

Получаем

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - 2 \cdot \frac{t}{x} \cdot \sin(xt) \Bigg|_{0}^{1} + 2 \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x} \cdot \sin(xt)\, dt \right] =$$

Подставляем пределы интегрирования и берём интеграл от синуса

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-e^{-ix}+e^{ix}}{ix} - \frac{2}{x}\cdot\sin x - \frac{2}{x^2}\cdot\cos(xt)\Big|_0^1\right] =$$

Снова подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-e^{-ix}+e^{ix}}{ix} - \frac{2}{x}\cdot\sin x - \frac{2}{x^2}\cdot\cos x + \frac{2}{x^2}\right) =$$

Из формулы Эйлера следует, что $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$. Тогда

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\sin x}{x} - \frac{2\sin x}{x} + \frac{2}{x^2}(-\cos x + 1)\right] = \frac{1}{\pi x^2}(1-\cos x).$$

Нашли обратное преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)\,dx$$

и $p(x) \geq 0$.

Должно выполняться условие нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \varphi(0) = 1.$$

Так что p — плотность, φ — это её преобразование Фурье, так что φ — характеристическая функция.

4.3

Задание. Пусть $K(t,s)$, $t,s \in T$ — ковариационная функция некоторого случайного процесса, $Q(t)$ — полином с положительными коэффициентами. Докажите, что функция $K_1(t,s) = Q(K(t,s))$ тоже является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

Решение. $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \geq 0$. Доказать, что если в этот многочлен подставить ковариационную функцию, то снова получится ковариационная функция.

Явно запишем, что такое

$$K_1(t,s) = a_0 + a_1 K(t,s) + a_2 K(t,s)^2 + \ldots + a_n K(t,s)^n.$$

Симметричность есть, так как $K(t,s)$ — симметрична.

Задачу можно разбить на две подзадачи:

1. если $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_n$ — ковариационные функции, то и

$$\sum_{j=0}^{n} a_j R_j(t, s)$$

— ковариационная функция. Это утверждение проверить просто.

Доказательство. Берём двойную сумму

$$\sum_{k,i=1}^{n} c_k c_i \left(\sum_{j=0}^{n} a_j R_j(t_k, t_i) \right) =$$

Меняем суммы местами

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k,i=1}^{n} R_j(t_k, t_i) c_k c_i \right) \geq 0,$$

так как внутренняя сумма неотрицательна. Так что 1. проверили;

2. чтобы 1. применить, достаточно проверить, что степень ковариационной функции — это тоже ковариационная функция. Достаточно проверить, что если R_1, R_2 — ковариационные функции, то и произведение $R_1(t, s) R_2(t, s)$ — тоже ковариационная функция.

Условие неотрицательности сейчас записывается так

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j R_1(t_k, t_j) R_2(t_k, t_j) \geq 0?,$$

где $R_1(t_k, t_j) = M[X(t_k) X(t_j)]$, $R_2(t_k, t_j) = M[Y(t_k) Y(t_j)]$.

Раз R_1 — ковариационая и R_2 — ковариационная, то существуют независимые процессы $X(t)$ и $Y(t)$, такие, что

$$R_1(t, s) = M[X(t) X(s)],\ R_2(t, s) = M[Y(t) Y(s)].$$

Тогда если возьмём новый процесс

$$Z(t) = X(t) Y(t),$$

то $M[Z(t) Z(s)] = M[X(t) Y(t) X(s) Y(s)]$. Группируем первый множитель с третьим, второй — с четвёртым, пользуемся независимостью $M[X(t) Y(t) X(s) Y(s)] = M[X(t) X(s)] \cdot M[Y(t) Y(s)]$. По введённым обозначениям $M[X(t) X(s)] \cdot M[Y(t) Y(s)] = R_1(t, s) R_2(t, s)$.

4.4

Задание. Пусть $\{S_n,\, n = 0, 1, 2, \dots\}$ являетс простым случайным блужданием, что определяется следующим образом $S_0 = 0$; $S_{n+1} = S_n + \varepsilon_{n+1}$, где $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что

$$P\left(\varepsilon_i = 1\right) = P\left(\varepsilon_i = -1\right) = \frac{1}{2}.$$

Вычислите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\{S_n,\, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Докажите, что

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N\left(0, 1\right),\, n \to \infty.$$

Решение. Процесс сейчас обозначается как $\{S_n,\, n \geq 0\}$ и S_n определяется как $S_0 = 0$, $S_{n+1} = S_n + \varepsilon_{n+1}$, то есть S_n — это накопительные суммы. Сейчас $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ — это независимые одинаково распределённые случайные величины с распределением Бернулли

$$P\left(\varepsilon_i = 1\right) = P\left(\varepsilon_i = -1\right) = \frac{1}{2}.$$

Это простое случайное блуждание (рис. 26).

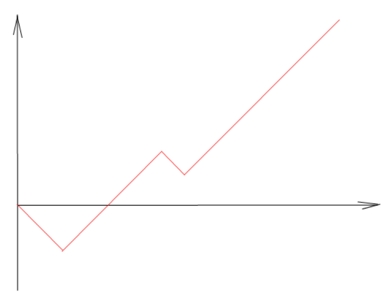

Рис. 26: График случайноо блуждания

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i.$$

Найдём математическое ожидание этого процесса

$$MS_n = M \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i =$$

Пользуемся независимостью

$$= \sum_{i=1}^{n} M\varepsilon_i = 0,$$

так как
$$M\varepsilon_i = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$
Теперь найдём ковариационную функцию, то есть нужно найти
$$cov\left(S_m, S_t\right) = cov\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j\right) =$$
Вынесем суммы за ковариацию
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} cov\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n,t} M\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) =$$
Такое математическое ожадине равно
$$M\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$
Тут пар одинаковых чисел $\min(n, t)$, так что
$$= \min\left(n, t\right).$$

По центральной предельной теореме
$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \to N\left(0, 1\right), \, n \to \infty,$$
потому что S_n — сумма независимых одинаково распределённых случайных величин.

4.5

Задание. Рассмотрим двумерные случайные векторы
$$X^k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{1}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k\right), \, k = 2, 4, 6, \ldots,$$
где $\{S_n\}_{n \geq 1}$ является простым случайным блужданием.

a) Убедитесь, что характеристическая функция вектора X^k имеет вид
$$\varphi_{X^k}\left(\theta_1, \theta_2\right) = \left[\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}}\right)\right]^{\frac{k}{2}} \left[\cos\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right)\right]^{\frac{k}{2}}.$$

b) Восплользовавшись тем, что
$$\varepsilon^{-2} ln\left(\cos\left(\varepsilon\right)\right) \to -\frac{1}{2}$$
при $\varepsilon \to 0$, найдите предел $\varphi_{X^k}\left(\theta_1, \theta_2\right)$ при $k \to \infty$ и укажите распределение случайного вектора X, к которому слабо сходятся X^k при $k \to \infty$.

Решение.

a) Сначала нужно найти характеристическую функцию такого вектора $\varphi_{X^k}(\theta_1,\theta_2) = Me^{i\left(\theta_1 X_1^k + \theta_2 X_2^k\right)}$. Подставим компоненты

$$Me^{i\left(\theta_1 X_1^k + \theta_2 X_2^k\right)} = Me^{i\left(\theta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}} + \theta_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k\right)}.$$

Можно вынести дробь с корнем от k, вместо S будем писать сумму $Me^{i\left(\theta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{2}} + \theta_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k\right)} = Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\theta_1 \sum\limits_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i + \theta + 2 \sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i\right)}$. Вторую сумму можно разложить на две

$$Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\theta_1 \sum\limits_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i + \theta + 2 \sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i\right)} = Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sum\limits_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i(\theta_1+\theta_2) + \theta_2 \sum\limits_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} \varepsilon_i\right)} =$$

Суммы и слагаемые в суммах независимы

$$= Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum\limits_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon_i(\theta_1+\theta_2)} Me^{i \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum\limits_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} \varepsilon_i \theta_2} =$$

Все слагаемые в суммах независимы. Первое и второе математическое ожидания - произведение $k/2$ характеристических функций

$$= \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}} \varphi_{\varepsilon_i}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\sqrt{k}}\right) \cdot \prod_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} \varphi_{\varepsilon_i}\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right) =$$

Осталось понять, что такое $\varphi_{\varepsilon_i}(\lambda) = Me^{i\lambda\varepsilon_i}$. Случайная величина ε_i принимает значения -1 и 1 с вероятностями 0.5, потому

$$Me^{i\lambda\varepsilon_i} = \frac{1}{2} \cdot e^{i\lambda} + \frac{1}{2} \cdot e^{-i\lambda} = \cos\lambda.$$

Тогда

$$= \cos^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\sqrt{k}}\right) \cos^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right).$$

b) Найдём предел этой характеристической функции, когда $k \to \infty$.

Оказывается, что

$$\varepsilon^{-2} ln\left(\cos\varepsilon\right) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{1}{2}.$$

Когда $\varepsilon \to 0$, $\cos\varepsilon \to 1$ и $ln\left(\cos\varepsilon\right) \to 0$ — это неопределённость 0 на 0. Она раскрывается с помощью правила Лопиталя

$$\frac{ln\left(\cos\varepsilon\right)}{\varepsilon^2} \approx -\frac{1}{2\cos\varepsilon} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \to \frac{1}{2},$$

где
$$\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$$
— замечательный предел.
$$\left(\cos\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k = e^{k\, ln\cos\frac{x}{\sqrt{k}}} =$$
Заметим, что
$$\frac{x}{\sqrt{k}} = \varepsilon \to 0,$$
тогда
$$= e^{\frac{k\varepsilon^2 ln(\cos\varepsilon)}{\varepsilon^2}} =$$
Здесь
$$\frac{ln\left(\cos\varepsilon\right)}{\varepsilon^2} \to -\frac{1}{2}.$$
Тогда
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} e^{x^2\varepsilon^{-2} ln(\cos\varepsilon)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
Теперь нужно эту сходимость использовать
$$\lim_{k\to\infty}\cos^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\sqrt{k}}\right)\cos^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right) = e^{-\frac{(\theta_1+\theta_2)^2}{4}} e^{-\frac{\theta_2^2}{4}} = e^{\frac{-\theta_1^2-2\theta_1\theta_2-\theta_2^2-\theta_2^2}{4}} =$$
$$= e^{-\frac{\theta_1^2+2\theta_1\theta_2+2\theta_2^2}{4}}.$$

Вывод:
$$\varphi_{X^k}\left(\theta_1,\theta_2\right) \to e^{-\frac{1}{4}\left(\theta_1^2+2\theta_1\theta_2+2\theta_2^2\right)} =$$
Это характеристическая функция нормального распределения. Оно характеризуется средним и ковариационной матрицей. Среднее тут 0, потому что i нет в пределе
$$= exp\left\{-\frac{1}{2}\left(A\vec{\theta},\vec{\theta}\right)\right\},$$
где
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$
— ковариационная матрица.

Двумерный случай блуждания сходится к двумерному гауссовскому вектору (рис. 27)
$$X^k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot S_{\frac{k}{2}}, \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot S_k\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(S_{k\cdot\frac{1}{2}}, S_{k\cdot 1}\right).$$

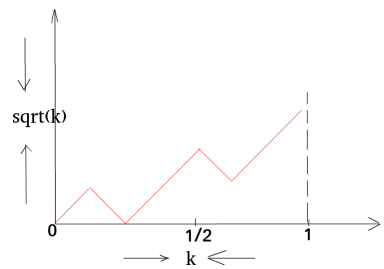

Рис. 27: Двумерный случай блуждания

Если брать не 2 значения, а n, то это сходится к

$$N\left(\begin{bmatrix}0\\ \dots\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}t_1 & t_1 & \dots & t_1\\ \dots & & & \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n\end{bmatrix}\right)$$

— винеровский процесс.

4.6

Задание. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ — гауссовский процесс с функцией математического ожидания $m(t) = t$ и ковариационной функцией

$$K(t,s) = \begin{cases} 1 - |t-s|, & |t-s| < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{5} - \frac{|t-s|}{5}, & \frac{1}{2} \leq |t-s| < 3, \quad t,s \in \mathbb{R}. \\ 0, & |t-s| \geq 3; \end{cases}$$

a) Запишите плотность распределения вектора $(\xi(1), \xi(3), \xi(4))$.

b) Найдите условное математическое ожидание $M(\xi(1) \mid (\xi(3), \xi(4)))$.

Решение.

a) Нужно найти плотность трёхмерного вектора $(\xi(1), \xi(3), \xi(4))$. Процесс гауссовский, значит, такой вектор тоже гауссовский. Он характеризуется математическим ожиданием и ковариационной матрицей $cov(\xi(1), \xi(1)) = K(1,1)$. Будем считать по первой строчке. Разность равна нулю $K(1,1) = 1$. Аналогично считаем

$$cov(\xi(1), \xi(3)) = K(1,3) = \frac{1}{5}.$$

Тогда

$$(\xi(1), \xi(3), \xi(4)) \sim N\left(\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{5} & 0\\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{2}{5} & 1\end{bmatrix}\right),$$

где $cov\left(\xi\left(1\right),\xi\left(4\right)\right)=K\left(1,4\right)=0$ и

$$cov\left(\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)=K\left(3,4\right)=\frac{2}{5}.$$

Плотность по определению равна

$$p\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^{3}\sqrt{det\,A}}\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\vec{x}-\vec{m}\right),A^{-1}\left(\vec{x}-\vec{m}\right)\right]\right\}=$$

Чтобы плотность написать, нужно найти определитель матрицы и обратную

$$det\,A=1-\frac{4}{25}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{21}{25}-\frac{1}{25}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}=\frac{5}{4}\begin{bmatrix}\frac{21}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{25}\\ -\frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{25} & \frac{2}{5} & \frac{24}{25}\end{bmatrix}.$$

Тогда плотность равна

$$=\frac{1}{\sqrt{8\pi^{3}\cdot\frac{4}{5}}}\times$$

$$\times exp\{-\frac{5}{8}(\frac{21}{25}\left(x_{1}-1\right)^{2}+\left(x_{2}-3\right)^{2}+\frac{24}{25}\left(x_{3}-4\right)^{2}-$$

$$-\frac{2}{5}\left(x_{1}-1\right)\left(x_{2}-3\right)+\frac{2}{25}\left(x_{1}-1\right)\left(x_{3}-4\right)+\frac{4}{5}\left(x_{2}-3\right)\left(x_{3}-4\right))\}.$$

Здесь

$$\vec{x}-\vec{m}=\begin{bmatrix}x_{1}-1\\ x_{2}-3\\ x_{3}-4\end{bmatrix}.$$

b) По определению

$$M\left(\xi\left(1\right)\mid\left(\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)\right)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x_{1}p\left(x_{1},\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)dx_{1}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p\left(x_{1},\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)dx_{1}}.$$

По теореме о нормальной корреляции

$$M\left(\xi\left(1\right)\mid\left(\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)\right)=$$

$$=M\xi\left(1\right)+cov_{\xi(1),(\xi(3),\xi(4))}\cdot cov_{(\xi(3),\xi(4)),(\xi(3),\xi(4))^{-1}}\cdot\begin{bmatrix}\xi\left(3\right)-M\xi\left(3\right)\\ \xi\left(4\right)-M\xi\left(4\right)\end{bmatrix}=$$

Здесь

$$cov_{\xi(1),(\xi(3),\xi(4))} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}, \, cov_{(\xi(3),\xi(4)),(\xi(3),\xi(4))^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$= 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 \\ \xi(4) - 4 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{25}{21} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 \\ \xi(4) - 4 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 + \begin{bmatrix} \frac{5}{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 - \frac{2}{5} \cdot \xi(4) + \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} \cdot \xi(3) + \frac{6}{5} + \xi(4) - 4 \end{bmatrix} = \frac{5}{21} \cdot \xi(3) - \frac{2}{21} \cdot \xi(4) - \frac{2}{3}.$$

4.7

Задание. Пусть

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i V_i,$$

где $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ является последовательностью независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2},$$

а $\{V_n\}_{n\geq 1}$ является независимой от последовательности $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ последовательностью независимых одинаково распределённых случайных величин со стандартным нормальным законом распределения.

a) Найдите распределение случайной величины $\xi_1 V_1$.

b) Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\{Y_n, \, n \geq 1\}$.

c) Докажите, что процесс $\{Y_n, \, n \geq 1\}$ имеет независимые приращения. Найдите распределение приращений.

d) Докажите, что процесс $\{Y_n, \, n \geq 1\}$ является гауссовским.

e) Запишите совместную плотность распределения $f_{Y_n, Y_{2n}}(x, y)$ случайных величин Y_n и Y_{2n}.

Решение.

a) $\xi_1 V_1$ — это произведение нормальной величины на бернуллиевскую, они независимы.

Найдём характеристическую функцию такого произведения

$$\varphi_{\xi_1 V_1}(t) = M e^{it\xi_1 V_1} =$$

Переберём значения ξ_1. Имеем

$$= M\left(e^{itV_1} \cdot \mathbb{1}\{\xi_1 = 1\} + e^{-itV_1} \cdot \mathbb{1}\{\xi_1 = -1\}\right) =$$

Пользуемся независимостью

$$= Me^{itV_1} \cdot P(\xi_1 = 1) + Me^{-itV_1} \cdot P(\xi_1 = -1).$$

Математическое ожидание — это характеристическая функция стандартного нормального распределия

$$Me^{itV_1} \cdot P(\xi_1 = 1) + Me^{-itV_1} \cdot P(\xi_1 = -1) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Получилось такое же распределение $\xi_1 V_1 \sim N(0,1)$.

Случайные величины V_1 и $-V_1$ имеют одинаковое распределение, потому что плотность симметрична $z_i = \xi_i V_i \sim N(0,1)$, при этом $z_1, z_2, \ldots$ — независимы и

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

b) Найдём математическое ожидание процесса

$$MY_n = M\sum_{i=1}^{n} z_i =$$

Пользуемся независимостью

$$= \sum_{i=1}^{n} Mz_i = 0.$$

Ищем ковариационную функцию процесса

$$K(Y_n, Y_m) = cov(Y_n, Y_m) = cov\left(\sum_{i=1}^{n} z_i, \sum_{j=1}^{m} z_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov(z_i, z_j) =$$

При $i \neq j \quad cov(z_i, z_j) = 0$, при $i = j \quad cov(z_i, z_i) = Dz_i = 1$. Двойная сумма — это количество пар с одинаковыми индексами

$$= min(n, m).$$

c) Запишем приращения Y_n, то есть $Y_{n_1}, Y_{n_2} - Y_{n_1}, Y_{n_3} - Y_{n_2}, \ldots$, индексы $1 \leq n_1 \leq n_2 < n_3 < \ldots$. Запишем через суммы

$$Y_{n_1}, Y_{n_2} - Y_{n_1}, Y_{n_3} - Y_{n_2}, \ldots = \sum_{i=1}^{n_1} z_i, \sum_{i=n_1+1}^{n_2} z_i, \sum_{i=n_2+1}^{n_3} z_i, \ldots.$$

В каждой такой сумме разные z, они независимы, следовательно, приращения независимы.

Пусть

$$Y_n - Y_m = \sum_{i=m+1}^{n} z_i \sim$$

Сумма независимых нормальных величин — это тоже нормальная величина

$$\sim N(0, n-m).$$

d) Процесс гауссовский, если линейная комбинация

$$\sum_{r=1}^{k} c_r \cdot I_{n_k} =$$

— гауссовские. Перепишем через приращения

$$= \sum_{r=1}^{n} d_r \left(Y_{n_r} - Y_{n_{r-1}}\right).$$

В такой сумме разности гауссовские и независимы.

Значит и процесс будет гауссовским.

e)

$$f_{Y_n, Y_{2n}}(x, y) = \frac{1}{2\pi n} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2n}\left(2x^2 - 2xy + y^2\right)\right\}.$$

Ковариация — это матрица из минимумов

$$cov_{\begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{2n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{2n} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} n & n \\ n & 2n \end{bmatrix} = A.$$

Определитель этой матрицы $det\, A = 2n^2 - n^2 = n^2$.

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix} 2n & -n \\ -n & n \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.8

Задание. Пусть X и Y являются независимыми случайными велчинами, причём Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$, а X имеет плотность распределения $f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}\{x \geq 0\}$.

a) Докажите, что случайные величины $X \cos Y$, $X \sin Y$ являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределение.

b) Докажите, что процесс $\xi(t) = X\cos(2\pi t + Y)$, $t \in \mathbb{R}$ является гауссовским. Найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

a) Нужно доказать, что $X\cos Y$ и $X\sin Y$ — независимые с распределением $N(0,1)$, то есть нужно описать распределение двух таким величин.

Найдём характеристическую функцию

$$\varphi_{(X\cos Y,\, X\sin Y)}(\theta_1,\theta_2) = M\, exp\left\{i\left(\theta_1 X\cos Y + \theta_2 X\sin Y\right)\right\} =$$
$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} e^{i(\theta_1 x\cos y + \theta_2 x \sin y)} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dy dx =$$

Это двойной интеграл, записанный в полярных координатах

$$u = x\cos y,\ v = x\sin y,\ dudv = xdxdy.$$

Получаем

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\theta_1 u + \theta_2 v)} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dudv =$$

Здесь

$$\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}}$$

— это совместная плотность $(X\cos Y,\ X\sin Y)$ — это произведение стандартных плотностей

$$= e^{-\frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2}},$$

то есть такие две величины — это независимые стандартные гауссовские случайные величины.

b) $\xi(t) = X\cos(2\pi t + Y)$. Распишем косинус суммы

$$X\cos(2\pi t + Y) = X\cos(2\pi t)\cos Y - X\sin(2\pi t)\sin Y =$$
$$= \cos(2\pi t)(X\cos Y) - \sin(2\pi t)(X\sin Y),$$

следовательно, ξ — гауссовский процесс.

Нужно проверять, что любые суммы

$$\sum_{r=1}^{k} c_r \xi(t_r) = \alpha \cdot X\cos Y + \beta X \sin Y$$

— гауссовская величина, где $X\cos Y$, $X\sin Y$ — независимые гауссовские величины.

Математическое ожидание

$$M\xi(t) = M[\cos(2\pi t)(X\cos Y) - \sin(2\pi t)(X\sin Y)] =$$
$$= \cos(2\pi t) M(X\cos Y) - \sin(2\pi t) M(X\sin Y) = 0.$$

Ковариационная функция

$$K(\xi(t), \xi(s)) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)\cdot M\xi(s) =$$
$$= M[X\cos(2\pi t + Y) X\cos(2\pi s + Y)] -$$
$$-M[X\cos(2\pi t + Y)] M[X\cos(2\pi s + Y)] =$$
$$= M\{[\cos(2\pi t)(X\cos Y) - \sin(2\pi s)(X\sin Y)]\times$$
$$\times[\cos(2\pi s)(X\cos Y) - \sin(2\pi s)(X\sin Y)]\}-$$
$$-M[\cos(2\pi t)(X\cos Y) - \sin(2\pi t)(X\sin Y)]\times$$
$$\times M[\cos(2\pi s)(X\cos Y) - \sin(2\pi s)(X\sin Y)] =$$
$$= M[\cos(2\pi t)\cos(2\pi s)(X\cos Y)^2 -$$
$$-\cos(2\pi t)\sin(2\pi s) X\cos Y\cdot X\sin Y -$$
$$-\sin(2\pi t)\cos(2\pi s) X\sin Y\cdot X\cos Y + \sin(2\pi t)\sin(2\pi s)(X\sin Y)^2] =$$
$$= \cos(2\pi t)\cos(2\pi s) + \sin(2\pi t)\sin(2\pi s) = \cos[2\pi(t-s)].$$

Домашнее задание

4.10

Задание. Выясните, существует ли случайный процесс с ковариационной функцией

a) $K(t,s) = \min(t,s) - ts,\ t,s\in[0,1]$;

b) $K(t,s) = e^{-|t-s|},\ t,s\in\mathbb{R}$.

Решение.

a) $K(t,s) = \min(t,s) - ts,\ t,s\in[0,1]$.

   Такой процесс есть. Это броуновский мост;

b) $K(t,s) = e^{-|t-s|},\ t,s\in\mathbb{R}$.

   Симметричность очевидна. Вопрос: буде ли такая функция неотрицательно определена?

   Функция зависит только от разности. Сейчас $K(t,s) = \varphi(t-s)$, где $\varphi(t) = e^{-|t|},\ t\in\mathbb{R}$.

   Так что
$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j \varphi(t_k - t_j) \geq 0$$

— это условие неотрицательной определённости для характеристической функции. Будет ли эта функция φ характеристической? То есть вопрос в задаче равносилен следующему: будет ли $\varphi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ характеристической функцией? Это характеристическая функция для распределения Коши.

4.11

Задание. Докажите, что функция $K(t,s) = e^{ts}$ является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

Решение. Симметричность есть. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определёной

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j e^{t_k t_j} = \sum_{k,j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_k^i t_j^i}{i!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j t_k^i t_j^i =$$

Разобьём двойную сумму на две

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^{n} c_k t_k^i \sum_{j=1}^{n} c_j t_j^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k t_k \right)^i \geq 0,$$

следовательно, $K(t,s) = e^{ts}$ — ковариационная функция.

4.12

Задание. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — произвольные действительные функции, $c_1, \ldots, c_n$ — неотрицательные числа. Докажите, что функция

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) \varphi_i(s)$$

является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

Решение. Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определённой?

$$\sum_{k,j=1}^{n} \lambda_k \lambda_j \sum_{i=1}^{n} K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^{n} \lambda_k \lambda_j \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t_k) \varphi_i(t_j) =$$

Поменяем суммы местами и двойную сумму распишем как две отдельные

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_i(t_k) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_i(t_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \varphi_i(t_k))^2 \geq 0.$$

Значит, функция ковариационная.

4.13

Задание. Пусть случайные величины X и Y имеют совместное гауссовское распределение. Докажите, что процесс $\xi(t) = tX + y$, $t \geq 0$ гауссовский. Найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t)$ — гауссовский, если

$$\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\vec{\alpha}, \vec{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$$

— гауссовская случайная величина, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} \xi(t_i) \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (t_i X + Y) \alpha_i = X \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i + Y \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

— сумма гауссовских случайных величин, гауссовская, $\forall t_1, \ldots, t_n \geq 0$.

Математическое ожидание $M\xi(t) = M(tX + Y) = tMX + My$.

Ковариационная функция

$$\begin{gathered} K(t,s) = \\ = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t) M\xi(s) M[(tX+Y)(sX+Y)] - \\ -M(tX+Y) M(sX+Y) = \\ = tsMX^2 + tM(XY) + sM(XY) + MY^2 - (tMX + MY)(sMX + MY) = \\ = tsMX^2 + (t+s) M(XY) + MY^2 - ts(MX)^2 - tMX \cdot MY - sMY \cdot MX - \\ - (MY)^2 = tsDX + DY + (t+s) D(XY). \end{gathered}$$

4.14

Задание. Пусть $\{S_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ является случайным блужданием, которое определяется следующим образом: $S_0 = 0$; $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$, где $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что $M[\xi] = 0$, $M\left[\xi^2\right] = 1$. Докажите, что для произвольного фиксированного

$$t \in [0,1] \qquad \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,t), \; n \to \infty.$$

Решение.

$$\begin{gathered} S_1 = S_0 + \xi_1 = 0 + \xi_1 = \xi_1, \\ S_2 = S_1 + \xi_2 = \xi_1 + \xi_2, \\ S_3 = S_2 + \xi_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \\ \ldots, \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i. \end{gathered}$$

Математическое ожидание

$$MS_n = M\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}M\xi_i = nM\xi_i = 0.$$

Дисперсия

$$DS_n = D\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}D\xi_i = nD\xi_i = n.$$

Значит, по центральной предельной теореме

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N\left(0,t\right), \, n \to \infty.$$

4.15

Задание. Пусть

$$\hat{S_k} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k}\left(\mathbb{1}\left\{\omega_i = P\right\} - \mathbb{1}\left\{\omega_i = \Gamma\right\}\right)$$

является нормированной разность между количеством решек и гербов, которые выпали при k подбрасываниях монеты. Докажите, что характеристическая функция $\hat{S_k}$ имеет вид

$$\varphi_{\hat{S_k}}\left(\theta\right) = \left[\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right)\right]^k.$$

Вычислите предел $\varphi_{\hat{S_k}}\left(\theta\right)$ при $k \to \infty$. Укажите распределение случайной величины $\hat{S}$, к которой слабо сходятся $\hat{S_k}$ при $k \to \infty$.

Решение. Сначала нужно найти характеристическую функцию

$$\varphi_{\hat{S_k}}\left(\theta\right) = Me^{i\theta\hat{S_k}}.$$

Подставим $Me^{i\theta\hat{S_k}} = Me^{i\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\mathbb{1}\left\{\omega_i = P\right\} - \mathbb{1}\left\{\omega_j = \Gamma\right\}\right)} = Me^{i\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\sum\limits_{j=1}^{k}\eta_j}$. Все слагаемые $\eta_1, \ldots, \eta_k$ в суммах независимы,

$$P\left(\eta_j = 1\right) = \frac{1}{2} = P\left(\eta_j = -1\right).$$

Тогда

$$Me^{i\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\sum\limits_{j=1}^{k}\eta_j} = \prod_{j=1}^{k}\varphi_{\eta_j}\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right) =$$

Осталось понять, что такое $\varphi_{\eta_j}\left(\lambda\right) = Me^{-\lambda\eta_j}$. Случайная величина η_j принимаем значения -1 и 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$. Тогда

$$Me^{-\lambda\eta_j} = \frac{1}{2}\cdot e^{i\lambda} + \frac{1}{2}\cdot e^{-i\lambda} = \cos\lambda.$$

Значит,

$$= \cos^k\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right).$$

Найдём предел этой характеристической функции, когда $k \to \infty$.

Оказывается, что

$$\varepsilon^{-2} ln\left(\cos\varepsilon\right) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{1}{2}.$$

Когда $\varepsilon \to 0$, $\cos\varepsilon \to 1$ и $ln\left(\cos\varepsilon\right) \to 0$ — это неопределённость 0 на 0. Она раскрывается с помощью правила Лопиталя

$$\frac{ln\left(\cos\varepsilon\right)}{\varepsilon^2} \approx -\frac{1}{2\cos\varepsilon}\cdot\frac{\sim\varepsilon}{\varepsilon} \to \frac{1}{2},$$

где отношение синуса к его аргументу — замечательный предел.

$$\left(\cos\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k = e^{k\, ln\cos\frac{x}{\sqrt{k}}} =$$

Аргумент косинуса — это $\varepsilon \to 0$. Значит,

$$= e^{\frac{k\varepsilon^2 ln(\cos\varepsilon)}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{x^2\varepsilon^{-2} ln(\cos\varepsilon)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теперь нужно эту сходимость использовать

$$\lim_{k\to\infty}\cos^k\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right) = e^{-\frac{\theta^2}{2}}.$$

Вывод: $\varphi_{\hat{S_k}}\left(\theta\right) \to e^{-\frac{\theta^2}{2}}$.

Это характеристическая функция нормального распределения. Оно характеризуется средним и дисперсией. Среднее тут 0, потому что нет i в пределе, дисперсия — 1.

$\hat{S_k}$ сходится к $\hat{S} \sim N\left(0, 1\right)$.

4.16

Задание. Пусть $\xi = \left\{\xi\left(t\right), t \geq 0\right\}$ — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$K\left(t,s\right) = \begin{cases} 1 - \left|t-s\right|, & \left|t-s\right| < \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3} - \frac{\left|t-s\right|}{3}, & \frac{1}{2} \leq \left|t-s\right| < 2, \\ 0, & \left|t-s\right| \geq 2. \end{cases} \quad ; t, s \in \mathbb{R}$$

a) Запишите плотноть распределения вектора $\left(\xi\left(4\right), \xi\left(5\right), \xi\left(6\right)\right)$.

b) Найдите условное математическое ожидание $M\left(\xi\left(5\right) \mid \left(\xi\left(4\right), \xi\left(6\right)\right)\right)$.

Решение. $M\left(t\right) = 0$.

а) Нужно найти плотность трёхмерного вектора $(\xi(4), \xi(5), \xi(6))$.

Процесс гауссовский, значит, такой вектор тоже гауссовский. Он характеризуется математическим ожадинием и ковариационной матрицей $cov[\xi(4), \xi(4)] = cov[\xi(5), \xi(5)] = cov[\xi(6), \xi(6)] = K(4,4)$. Будем считать по первой строке. Разность равна нулю $K(4,4) = 1$.

Аналогично считаем

$$cov[\xi(4), \xi(3)] = K(4,5) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

По последней строке находим, что $cov[\xi(4), \xi(6)] = K(4,6) = 0$, а

$$cov[\xi(5), \xi(6)] = K(5,6) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Тогда распределение вектора имеет вид

$$(\xi(4), \xi(5), \xi(6)) \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Плотность имеет вид

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sqrt{det\, A}} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\vec{x} - \vec{m}), A^{-1}(\vec{x} - \vec{m})\right]\right\} =$$

Чтобы написать плотность, нужно найти определитель матрицы и обратную

$$det\, A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{9}{7}\begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}.$$

Подставим определитель и обратную матрицу в выражение для плотности

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 \cdot \frac{7}{9}}} \times$$

$$\times exp\left\{-\frac{9}{14}\left(\frac{8}{9} \cdot x_1^2 - \frac{2}{3} \cdot x_1 x_2 + \frac{2}{9} \cdot x_1 x_3 + x_2^2 + \frac{8}{9} \cdot x_3^2 - \frac{2}{3} \cdot x_2 x_3\right)\right\}.$$

Здесь

$$\vec{x} - \vec{m} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

b) По определению условного математического ожидания

$$M\left(\xi\left(5\right) \mid \left(\xi\left(4\right), \xi\left(6\right)\right)\right) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2 p\left(\xi\left(4\right), x_2, \xi\left(6\right)\right) dx_2}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\left(\xi\left(4\right), x_2, \xi\left(6\right)\right) dx_2.}$$

Теорема о нормальной корреляции

$$M\left(\xi\left(5\right) \mid \left(\xi\left(4\right), \xi\left(6\right)\right)\right) =$$

$$= M\xi\left(5\right) + cov_{\xi(5),(\xi(4),\xi(6))} \cdot cov_{(\xi(4),\xi(6)),(\xi(4),\xi(6))^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} \xi\left(4\right) - M\xi\left(4\right) \\ \xi\left(6\right) - M\xi\left(6\right) \end{bmatrix} =$$

Здесь Первая коварияция равна

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

а вторая —

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi\left(4\right) \\ \xi\left(6\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi\left(4\right) \\ \xi\left(6\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left[\xi\left(4\right) + \xi\left(6\right)\right].$$

4.17

Задание. Рассмотрим случайный процесс $\{X\left(t\right), t \in T\}$ такой, что случайные величины $X\left(t\right)$ являются независимыми с одинаковым распределением $N\left(0, \sigma^2\right)$. Докажите, что процесс $\{X\left(t\right), t \in T\}$ является гауссовским и найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. Процесс гауссовский, если линейная комбинация

$$\sum_{r=1}^{k} c_r X\left(t_r\right)$$

— гауссовская.

В такой сумме слагаемые гауссовские и независимые, значит, процесс будет гауссовским.

$MX\left(t\right) = 0$.

Ковариационная функция

$$K\left(t, s\right) = M\left[X\left(t\right) X\left(s\right)\right] - MX\left(t\right) \cdot MX\left(s\right) = M\left[X\left(t\right) X\left(s\right)\right] = \sigma^2 \cdot \mathbb{1}\left\{t = s\right\}.$$

Занятие 5. Винеровский процесс

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение винеровского процесса.

$\{w(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, если обладает рядом свойств:

1. $w(0) = 0$;
2. однородные приращения. Рассмотрим приращение винеровского процесса на t. Тогда $w(s+t) - w(s) \stackrel{def}{=} w(t) \sim N(0,t)$, то есть распределение процесса зависит только от длины отрезка;
3. независимые приращения на непересекающихся отрезках. Выберем $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Тогда $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ — независимые в совокупности случайные величины.

Запишите плотность винеровского процесса.

Напишем плотность распределения вектора $(w(t_1), \ldots, w(t_n)) = \vec{\xi}$. Будем использовать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом $\vec{\xi}$ имеет плотность

$$q\left(A^{-1}\vec{u}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t_{j+1} - t_j\right)}} \cdot e^{-\frac{u_{j+1} - u_j}{2t_{j+1} - t_j}}.$$

В этой плотности считаем, что $t_0 = 0$, $u_0 = 0$.

Запишите коваріационную функцию винеровского процесса.

Произведение математических ожиданий — это 0, потому

$$K(t,s) = Mw(s)\,w(t) =$$

Используем независимость приращений

$$= M\{w(s)\cdot[w(s) + (w(t) - w(s))]\} =$$

Раскрываем скобки

$$= Mw^2(s) + M\{w(s)[w(t) - w(s)]\} =$$

Первое слагаемое равно s, а второе — нулю, так как это независимые центрированные случайные величины (математическое произведения — это произведение математических ожиданий, а они равны нулю)

$$= s,\ s < t.$$

$K(t,s) = \min(s,t)$.

Аудиторные задачи

5.2

Задание. Пусть $\{W(t),\ t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что $M(W(t) - W(s))^{2n+1} = 0$, $M(W(t) - W(s))^{2n} = (2n-1)!!\,(t-s)^n$.

Решение. Приращение гауссовское. Обозначим

$$\xi = W(t) - W(s) \overset{def}{=} W(t-s)\,.$$

Значит, $\xi \sim N(0, t-s)$, где $t - s = \sigma^2$. Нужны формулы для моментов центрированной гауссовской случайной величины, то есть Знаем, что $M\xi^{2n+1} = 0$, $M\xi^{2n} = (2n+1)!!\sigma^{2n}$.

5.3

Задание. Пусть $\{W(t),\ t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите:

a) $M\left[(W(5) - 2W(1) + 2)^3\right]$;

b) характеристическую функцию случайной величины $W(2) + 2W(1)$;

c) $M[\sin(2W(1) + W(2))]$;

d) $M[\cos(2W(1) + W(2))]$.

Решение. Есть винеровский процесс.

a) $W(5)-2W(1)+2=\xi\sim N(2,5)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет

$$D\xi = D\left[W(5)-2W(1)\right] = cov\left(\xi,\xi\right) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= cov\left[W(5)-2W(1)+2,\, W(5)-2W(1)+2\right] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(5,5)-2K(5,1)-2K(5,1)+4K(1,1) = 5-2-2+4 = 5.$$

Нужно найти третий момент. ξ не центрирована. Нужно её центрировать $M\xi^3 = M\left[(\xi-2)+2\right]^3$. Раскрываем скобки

$$M\xi^3 = M\left(\xi-2\right)^3 + 6M\left(\xi-2\right)^3 + 12M\left(\xi-2\right) + 8.$$

По предыдущей задаче первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 5, так как это дисперсия, первый момент — 0. Тогда $M\xi^3 = 0+6\cdot 5+12\cdot 0+8 = 38$.

Величины $W(5)$ и $W(1)$ — зависимы, а приращения в винеровском процессе — независимы, потому имеем сумму дисперсий

$$D\left[W(5)-2W(1)\right] = D\left\{\left[W(5)-W(1)\right]+\left[-W(1)\right]\right\}.$$

Дисперсия первого слагаемого равна 4, а второго — 1. Слагаемые независимы $D\left[W(5)-2W(1)\right]=5$;

b) нужно найти характеристическую функцию $W(2)+2W(1)$.

Математическое ожидание такой величины равно нулю, а дисперсия $D\left[W(2)+2W(1)\right] = D\left\{\left[W(2)-W(1)\right]+3W(1)\right\}$. Это независимые величины, поэтому $D\left\{\left[W(2)-W(1)\right]+3W(1)\right\} = 1+9 = 10$. Значит, получается $\varphi_{W(2)+2W(1)}(\lambda) = \varphi_{N(0,10)}(\lambda) = e^{-\frac{10\lambda^2}{2}}$;

c) $M\left[\sin\left(2W(1)+W(2)\right)\right]=0$.

Характеристическая функция случайной величины — это

$$\varphi_\xi(\lambda) = Me^{i\lambda\xi} = M\cos\lambda\xi + iM\sin\lambda\xi,\ \lambda=1;$$

d) $M\left[\cos\left(2W(1)+W(2)\right)\right]=e^{-5}$.

5.4

Задание. Пусть $\{W(t),\, t\geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что процессы

a) $\{-W(t),\, t\geq 0\}$;

b) $\{W(s+t) - W(s), t \geq 0\}$;

c) $\tilde{W}(t) = tW\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \mathbb{1}\{t > 0\}$

тоже являются винеровскими.

Решение. $\{W(t), t \geq 0\}$ — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Если выберем моменты времени $t_1 < \ldots < t_n$ и возьмём вектор

$$(W(t_1), \ldots, W(t_n))$$

— гауссовский. Нужно знать, что в каждой точке $MW(t) = 0$ и

$$K(t,s) = \min(t,s).$$

Если процесс удовлетворит этим трём свойствам, то это винеровский процесс.

$M[-W(t)] = -MW(t) = 0.$

Найдём ковариационную функцию

$$K(t,s) = M[W(t)W(s)] = \min(t,s).$$

Вектор значений этого процесса должен быть гауссовским. Возьмём $(-W(t_1), \ldots, -W(t_n))$. Нужно сказать, что это гауссовский вектор. Почему?

Этот вектор — это линейное преобразование вектора

$$(W(t_1), \ldots, W(t_n)).$$

Линейные преобразования оставляют вектор гауссовским;

b) сначала нужно сказать, что у него гауссовские конечномерные распределения.

Берём n значений этого процесса

$$(W(s+t_1) - W(s), \ldots, W(s+t_n) - W(s))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора $(W(t_1+s), \ldots, W(t_n+s), W(s))$. Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s+t_1) \\ W(s+t_2) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s+t_1) - W(s) \\ W(s+t_2) - W(s) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t_1, t_2) = M\left\{[W(s+t_1) - W(s)] \cdot [W(s+t_2) - W(s)]\right\} =$$

Перемножим скобки

$$= M\left[W(s+t_1) W(s+t_2) - W(s+t_1) W(s) - W(s) W(s+t_2) + W(s)^2\right] =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация винеровского процесса. Она равна минимуму. Математическое ожидание последнего слагаемого — ковариация в точке (s, s). Получаем

$$= \min(s+t_1, s+t_2) - s - s + s = \min(s+t_1, s+t_2) - s.$$

Можем вынести и сократить $\min(s+t_1, s+t_2) - s = \min(t_1, t_2)$. Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

c) берём конечномерные распределения

$$\left(t_1 W\left(\frac{1}{t_1}\right), \ldots, t_n W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса $\left(W\left(\frac{1}{t_1}\right), \ldots, W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$.

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t, s) = M\left[tW\left(\frac{1}{t}\right) sW\left(\frac{1}{s}\right)\right] =$$

Выносим t и s. Получаем

$$= ts \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) =$$

Множитель ts — положительный. Он вносится

$$= \min(t, s).$$

Получилось.

5.5

Задание. Пусть $\left\{W^i(t), \, t \geq 0\right\}_{i \geq 1}$ — независимые винеровские процессы. Найдите константу c_n так, чтобы процесс

$$\tilde{W}(t) = c_n \sum_{i=1}^{n} W^i(t), \, t \geq 0$$

был винеровским.

Решение. Сложили n независимых винеровских процессов так, чтобы процесс был винеровским.

Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\left(\tilde{W}(t_1), \ldots, \tilde{W}(t_n)\right) =$$
$$= \left(c_n \left(W^1(t_1), \ldots, W^n(t_n)\right), \ldots, c_n \left(W^1(t_m), \ldots, W^n(t_m)\right)\right)$$

— это линейное преобразование.

$$\begin{bmatrix} W^1(t_1) \\ \ldots \\ W^1(t_m) \\ W^2(t_1) \\ \ldots \\ W^2(t_m) \end{bmatrix}$$

— гауссовский вектор, где обе части — независимые гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию и скажем, какой должна быть c_n. Ковариация линейна по каждому аргументу. Это значит, что множители и суммы выносятся

$$cov\left(c_n \sum_{i=1}^{n} W^i(t),\, c_n \sum_{i=1}^{n} W^i(s)\right) = c_n^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} cov\left[W^i(t),\, W^j(s)\right] =$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= c_n^2 \sum_{i=1}^{n} \min(t, s) =$$

Имеем n одинаковых слагаемых

$$= c_n^2 \cdot n \cdot \min(t, s).$$

Отсюда получаем

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

тогда процесс винеровский.

5.6

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Для $0 < t \leq s$ вычислите вероятность $q_t = P(W(s) > W(s-t) > W(s+t))$.

Решение. Начнём с того, что нарисуем график винеровского процесса (рис. 28).

Есть 3 случайные величины.

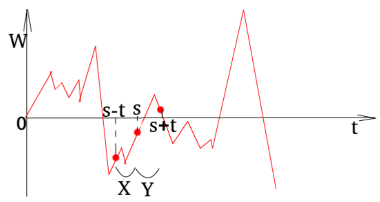

Рис. 28: График винеровского процесса

У такого вектора есть плотность. Случайные величины независимы

$$q_t = \iiint\limits_{x>y>z} p_{(W(s),W(s-t),W(s+t))}\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

Вектор имеет нормальное распределение

$$\begin{bmatrix} W(s) \\ W(s-t) \\ W(s+t) \end{bmatrix} \sim N\left(\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} s & s-t & s \\ s-t & s-t & s-t \\ s & s-t & s+t \end{bmatrix}\right)\right).$$

Нужно использовать какие-то свойства винеровского процесса. Здесь нужно взять 2 приращения. Эти приращения будут независимыми величинами с известным распределением $N(0,t)$.

Вводим в рассмотрение приращения

$$\begin{cases} X = W(s) - W(s-t), \\ Y = W(s+t) - W(s). \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $W(s-t) = W(s) - X$, а из второго — $W(s+t) = W(s) + Y$. Отнимем два последние уравнения

$$W(s+t) - W(s-t) = X + Y.$$

От всех частей неравенства в искомой вероятности вычтем $W(s-t)$ и заменим полученные выражения на введённые приращения

$$q_t = P\left\{W(s) - W(s-t) > 0 > W(s+t) - W(s-t)\right\} = P\left(X > 0 > X+Y\right).$$

Плотность вектора — это произведение плотностей

$$P\left(X > 0 > X+Y\right) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-x} \frac{1}{2\pi t}\cdot e^{-\frac{1}{2t}\left(x^2+y^2\right)}dydx =$$

Перейдём в полярную систему координат

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = rdrd\varphi.$$

Получим

$$= \frac{1}{2\pi t} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} re^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} d\varphi dr =$$

Изобразим область интегрирования (рис. 29).

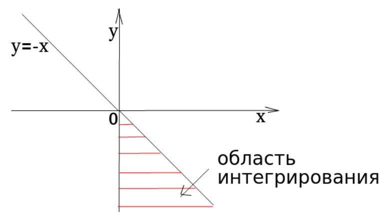

Рис. 29: Область интегрирования

По φ можем сразу проинтегрировать. Интеграл по φ даст просто $\frac{\pi}{4}$. Получаем

$$= \frac{1}{8} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} \cdot \frac{dr^2}{2t} =$$

Интеграл равен единице

$$= \frac{1}{8}$$

5.7

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процессов:

a) $W^0(t) = W(t) - tW(1), 0 \leq t \leq 1$ (броуновский мост);

b) $U(t) = e^{-\frac{t}{2}} W(e^t)$ (процесс Орнштейна-Уленбека).

Выясните, какой из этих процессов является гауссовским.

Решение.

a) $MW^0(t) = 0$, потому что у винеровского процесса математическое ожидание 0. Найдём ковариационную функцию

$K(t, s) = cov[W(t) - tW(1), W(s) - sW(1)] = \min(t, s) - ts - st + st =$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничтожаются

$$= \min(t, s) - st.$$

Если возьмём вектор конечномерных распределений

$$\left(W^0(t_1), \ldots, W^0(t_n)\right),$$

то этот вектор будет гауссовским. Такой процесс называется броуновский мост (рис. 30);

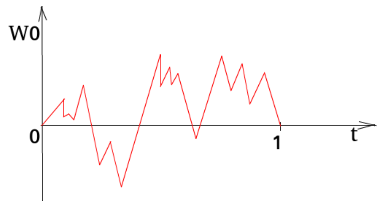

Рис. 30: Броуновский мост

b) $MU(t) = 0$, потому что винеровский. Ковариационная функция

$$K(t,s) = cov\left[e^{-\frac{t}{2}} W\left(e^t\right), e^{-\frac{s}{2}} W\left(e^s\right)\right] =$$

Выносим экспоненты (множители)

$$= e^{-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}} \min\left(e^t, e^s\right) =$$

Экспонента — монотонная функция

$$= e^{-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}+\min(t,s)} = e^{-\frac{1}{2}[t+s-2\min(s,t)]} = e^{-\frac{1}{2}\cdot|t-s|}.$$

Значение процесса $U(t)$ — это линейное преобразование значений винеровского процесса, только в других точках. Процесс гауссовский.

5.8

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$B(t) = (1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), \ 0 \le t < 1; \ B(1) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

Решение. Конечномерные распределения такого процесса

$$(B(t_1), \ldots, B(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$MB(t) = 0$.

Найдём ковариацию

$$cov[B(t), B(s)] = cov\left[(1-t) W\left(\frac{t}{1-t}\right), (1-s) W\left(\frac{s}{1-s}\right)\right] =$$

Множители выносим

$$= (1-t)(1-s)\min\left(\frac{t}{1-t}, \frac{s}{1-s}\right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min(t - ts, s - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min(t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

5.9

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание $M(W(s)|W(t))$ при $s > t$.

Решение. Есть формула

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_{W(s),W(t)}(x, y)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{W(s),W(t)}(x, y)\, dx}.$$

Свойства условного математического ожидания: $M(\xi|\mathcal{F}) = \xi$, если ξ измерима относительно $\mathcal{F}$ и $M(\xi|\mathcal{F}) = M\xi$, если ξ не зависит от $\mathcal{F}$.

Нужно, чтобы появилось приращение

$$M[W(s)|W(t)] = M[W(s) - W(t) + W(t)|W(t)] =$$

Распишем как 2 условных математических ожидания

$$= M[W(s) - W(t)|W(t)] + M[W(t)|W(t)].$$

Первое слагаемое равно нулю, как как имеются независимые величины $M[W(s) - W(t)|W(t)] + M[W(t)|W(t)] = W(t)$.

5.10

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, и пусть τ — независимая от процесса W случайная величина, показательно распределённая с параметром λ. Найдите характеристическую функцию случайной величины $W(\tau)$.

Решение. $\varphi_{W(\tau)}(\lambda) = Me^{i\lambda W(\tau)}$. В винеровский процесс подставляется случайное время. Похожая ситуация

$$Me^{i\lambda \sum\limits_{k=0}^{\tau} \xi_k} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau = k) \cdot M\left(e^{i\lambda \sum\limits_{k=0}^{\tau} \xi_k} \middle| \tau = k\right).$$

Получаем

$$Me^{i\lambda W(\tau)} = MM\left[e^{i\lambda W(\tau)} \middle| \tau\right] = Me^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot \tau^2} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} p_\tau(x)\, dx =$$

Подставим выражение для плотности показательного распределения

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2} - \lambda x} dx = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda\right)} dx =$$

Вынесем λ за скобки

$$= \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\lambda\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)} dx = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\lambda\cdot\frac{\lambda+2}{2}} dx = -\lambda \cdot \frac{2}{\lambda+2} \cdot \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x\cdot\frac{\lambda+2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda+2}.$$

Домашнее задание

5.12

Задание. Пусть $\{W(t),\, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите:

a) $M\left[(W(4) - 2W(1) + 2W(2))^2\right]$;

b) $M\left[(W(1) + 2W(2) + 1)^3\right]$;

c) $M\left[e^{W(3) - 2W(2)}\right]$;

d) характеристическую функцию случайной величины $W(1)+2W(2)+1$.

Решение.

a) $W(4) - 2W(1) + W(2) = \xi \sim N(0, 6)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперссию

$$D\xi = D[W(4) - 2W(1) + W(2)] = cov(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= cov[W(4) - 2W(1) + W(2), W(4) - 2W(1) + W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$\begin{gathered} = K(4,4) - 2K(4,1) + K(4,2) - 2K(1,4) + 4K(1,1) - 2K(1,2) + \\ +K(2,4) - 2K(2,1) + K(2,2) = \\ = 4 - 2\cdot 1 + 2 - 2\cdot 1 + 4\cdot 1 - 2\cdot 1 + 2 - 2\cdot 1 + 2 = 4 + 4 - 2 = 6. \end{gathered}$$

Нужно найти второй момент. ξ центрирована $M\xi^2 = D\xi = 6$;

b) $W(1)+2W(2)+1 = \xi \sim N(1, 13)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет $D\xi = D[W(1) - 2W(2)] = cov(\xi, \xi)$. Подставим выражения для случайной величины

$$cov(\xi, \xi) = cov[W(1) + 2W(2) + 1, W(1) + 2W(2) + 1] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(1,1) + 2K(1,2) + 2K(2,1) + 4K(2,2) = 1 + 2 + 2 + 8 = 13.$$

Нужно найти третий момент. ξ не центрирована. Нужно её центрировать $M\xi^3 = M[(\xi - 1) + 1]^3$. Раскрываем скобки

$$M[(\xi - 1) + 1]^3 = M(\xi - 1)^3 + 3M(\xi - 1)^2 + 3M(\xi - 1) + 1 =$$

По задаче 5.2 первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 13, так как это дисперсия, первый момент — ноль. Тогда

$$= 0 + 3 \cdot 13 + 3 \cdot 0 + 1 = 39 + 1 = 40;$$

c) $W(3) - 2W(2) = \xi \sim N(0, 3)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(3) - 2W(2)] = cov(\xi, \xi) =$$

Подставим выражение для случайной величины

$$= cov[W(3) - 2W(2), W(3) - 2W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(3,3) - 2K(3,2) - 2K(2,3) + 4K(2,2) = 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 3.$$

Нужно найти

$$Me^{\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^x \cdot p_\xi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot 3}} dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{6}} dx.$$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты

$$\frac{x^2}{6} - x = \frac{x^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6} + \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\right)^2 =$$

Три первых слагаемых образуют полный квадрат

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{(x-3)^2}{2 \cdot 3} - \frac{3}{2}.$$

Подставим полученное выражение в экспоненту

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x-\frac{x^2}{6}} dx = e^{\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{6}} dx =$$

Подинтергальная функция — плотность нормального распределения, потому такой интеграл равен единице

$$= e^{\frac{3}{2}};$$

d) нужно найти характеристическую функцию $W(1) + 2W(2) + 1$.

Математическое ожидание такой величины равно 1, а дисперсия — 13. Значит, получается $\varphi_{W(1)+2W(2)+1}(\lambda) = \varphi_{N(1,13)}(\lambda) = e^{i\lambda - \frac{13\lambda^2}{2}}$.

5.13

Задание. Пусть $\{W(t),\, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что процессы:

a) $\{W(T) - W(T-t),\, 0 \leq t \leq T\},\ T = const > 0$;

b) $\left\{\sqrt{c}W\left(\frac{t}{c}\right),\, t \geq 0\right\},\ c = const > 0$

тоже являются винеровскими.

Решение. $\{W(t),\, t \geq 0\}$ — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Сначала нужно сказать, что у процесса гауссовские конечномерные распределения.

Берём n значений этого процесса

$$(W(T) - W(T-t_1), \ldots, W(T) - W(T-t_n))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора $(W(T-t_1), \ldots, W(T-t_n), W(T))$.

Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(T-t_1) \\ W(T-t_2) \\ W(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(T) - W(T-t_1) \\ W(T) - W(T-t_2) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t,s) = M\{[W(T) - W(T-t)] \cdot [W(T) - W(T-s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M\left[W(T)^2 - W(T)W(T-s) - W(T-t)W(T) + W(T-t)W(T-s)\right] =$$

Математическое ожидание трёх последних слагаемых — ковариационные функции винеровского процесса. Они равны минимуму. Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация в точке (T, T). Получаем

$$= T - T + s - T + t + \min(T-s, T-t) = s + t - \max(s,t) = \min(t,s).$$

Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

b) берём конечномерные распределения

$$\left(\sqrt{c}W\left(\frac{t_1}{c}\right), \ldots, \sqrt{x}W\left(\frac{t_n}{c}\right)\right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса

$$\left(W\left(\frac{t_1}{c}\right), \ldots, W\left(\frac{t_n}{c}\right)\right).$$

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t,s) = M\left[\sqrt{c}W\left(\frac{t}{c}\right)\sqrt{c}W\left(\frac{s}{c}\right)\right] =$$

Выносим $\sqrt{c}$. Получим

$$= cM\left[W\left(\frac{t}{c}\right)W\left(\frac{s}{c}\right)\right] = c \cdot \min\left(\frac{t}{c}, \frac{s}{c}\right) =$$

Множитель c — положительный. Он вносится

$$= \min(t,s).$$

5.14

Задание. Для фиксированного $\rho \in [-1, 1]$ положим

$$W(t) = \rho W^1(t) + \sqrt{1-\rho^2}W^2(t),$$

где $\left\{W^1(t), t \geq 0\right\}$, $\left\{W^2(t), t \geq 0\right\}$ — независимые винеровские процессы. Докажите, что процесс $\{W(t), t \geq 0\}$ является винеровским и найдите математическое ожидание $M\left[W^1(t) \cdot W(t)\right]$.

Решение. Сложили 2 независимых винеровских процесса так, чтобы процесс был винеровским.

Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\left(W\left(t_1\right),\ldots,W\left(t_n\right)\right)=$$
$$=\left(\rho W^1\left(t_1\right)+\sqrt{1-\rho^2}W^2\left(t_1\right),\ldots,\rho W^1\left(t_n\right)+\sqrt{1-\rho^2}W^2\left(t_n\right)\right)$$

— это линейное преобразование $\left(W^1\left(t_1\right),\ldots,W^1\left(t_n\right)\right)$ и

$$\left(W^2\left(t_1\right),\ldots,W^2\left(t_n\right)\right)$$

— гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию. Ковариация линейна по каждому аргументу

$$cov\left[\rho W^1\left(t\right)+\sqrt{1-\rho^2}W^2\left(t\right),\,\rho W^1\left(s\right)+\sqrt{1-\rho^2}W^2\left(s\right)\right]=$$
$$=\rho^2\cdot cov\left[W^1\left(t\right),W^1\left(s\right)\right]+\rho\sqrt{1-\rho^2}\cdot cov\left[W^1\left(t\right),W^2\left(s\right)\right]+$$
$$+\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\cdot cov\left[W^2\left(t\right),W^1\left(s\right)\right]+\left(1-\rho^2\right)\cdot cov\left[W^2\left(t\right),W^2\left(s\right)\right]=$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$=\rho^2\cdot\min\left(t,s\right)+\left(1-\rho^2\right)\cdot\min\left(t,s\right)=\min\left(t,s\right),$$

тогда процесс винеровский.

$$M\left[W^1\left(t\right)\cdot W\left(t\right)\right]=M\left\{W^1\left(t\right)\cdot\left[\rho W^1\left(t\right)+\sqrt{1-\rho^2}W^2\left(t\right)\right]\right\}=$$

Раскроем скобки

$$=\rho MW^1\left(t\right)^2+\sqrt{1-\rho^2}M\left[W^1\left(t\right)W^2\left(t\right)\right]=\rho t.$$

5.15

Задание. Пусть $\{W\left(t\right),\,t\geq 0\}$ — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$X\left(t\right)=x+\mu t+\sigma W\left(t\right),$$

который называется винеровским со сдвигом $\mu\in\mathbb{R}$, коэффициентом диффузии $\sigma>0$, который стартует из точки $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Из определения винеровского процесса следует, что случайная величина $W\left(t\right)$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией t. Таким образом

$$MX\left(t\right)=M\left[x+\mu t+\sigma W\left(t\right)\right]=Mx+M\left(\mu t\right)+\sigma MW\left(t\right)=x+\mu t.$$

Вычислим теперь $MX(t)X(s)$. Имеем

$$MX(t)X(s) = M\{[x + \mu t + \sigma W(t)] \cdot [x + \mu s + \sigma W(s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M[x^2 + x\mu s + x\sigma W(s) + \mu tx + \mu^2 ts + \mu t\sigma W(s) + \sigma W(t)x + \sigma W(t)\mu s+ \\ +\sigma^2 W(t)W(s)] =$$

Математическое ожидание константы — это сама константа, а математическое ожидание винеровского процесса равно нулю

$$= x^2 + x\mu s + \mu tx + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s).$$

Тогда

$$cov[X(t), X(s)] = M[X(t)X(s)] - MX(t) \cdot MX(s) =$$

Подставим найденные выражения для математических ожиданий

$$= x^2 + x\mu s + \mu tx + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - (x + \mu t)(x + \mu s) =$$

Перемножим скобки

$$= x^2 + x\mu s + \mu ts + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - x^2 - x\mu s - \mu tx - \mu^2 ts =$$

Сократим

$$= \sigma^2 \cdot \min(t, s).$$

5.16

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$Z(t) = tW\left(\frac{1}{t} - 1\right), \; 0 < t \leq 1; \; Z(0) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

Решение. Конечномерные распределения такого процесса

$$(Z(t_1), \ldots, Z(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$MZ(t) = 0$.

Найдём ковариацию

$$cov[Z(t), Z(s)] = cov\left[tW\left(\frac{1}{t} - 1\right), sW\left(\frac{1}{s} - 1\right)\right] =$$

Множители выносим

$$= ts \cdot \min\left(\frac{1}{t} - 1, \frac{1}{s} - 1\right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min(s - ts, t - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min(t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

5.17

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание $M(W(s)| W(t))$ при $s < t$.

Решение.

$$M[W(s) \mid W(t)] =$$
$$= MW(s) + cov[W(s), W(t)] \cdot cov^{-1}[W(t), W(t)] \cdot [W(t) - MW(t)] =$$

Математическое ожидание винеровского процесса равно нулю, а ковариация — минимуму

$$= \min(s, t) \cdot \frac{1}{t} \cdot W(t) =$$

По условию $s < t$, потому

$$= \frac{s}{t} \cdot W(t).$$

5.18

Задание. Пусть W и N — независимые между собой винеровский процесс и пуассоновский процесс с интенсивностью λ соответственно. Найдите характеристическую функцию случайной величны $X(t) = W(N(t))$.

Решение. Нужно найти $\varphi_{W(N(t))}$. Характеристическая функция — это $Me^{isW(N(t))}$. Имеемв винеровский процесс, в который подставляется случайное время. Нужно перебрать все возможные значения случайного времени. Пуассоновский процесс принимает значения от нуля до бесконечности

$$Me^{isW(N(t))} = M\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{N(t) = k\} \cdot e^{isW(k)} =$$

Математическое ожидание суммы можем написать как сумму математических ожиданий

$$= \sum_{k=0}^{\infty} M\mathbb{1}\{N(t) = k\} e^{isW(k)} =$$

Индикатор зависит от пуассоновского процесса, а экспонента — от винеровского, а они независимы

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{N\left(t\right)=k\right\} Me^{isW(k)} =$$

Оба множителя нам известны. Второй — это характеристическая функция гауссовской величины

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot k} =$$

Случайная величина $N\left(t\right) \sim Pois\left(\lambda t\right), W\left(k\right) \sim N\left(0, k\right)$. Получаем

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda t e^{-\frac{s^2}{2}}\right)^k}{k!} = e^{\lambda t\left(e^{-\frac{s^2}{2}}-1\right)}.$$

Тогда $Me^{isW(N(t))} = M\left(Me^{isW(t)}\right)\Big|_{k=N(t)} = M\left[e^{isW(N(t))} \;\middle|\; N\left(t\right)=k\right]$.
Свойство условного математического ожидания $MM\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) = M\xi$.

Занятие 6. Стохастическая непрерывность случайного процесса. Существование непрерывной модификации

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение стохастически непрерывного процесса.

Стохастически непрерывный процесс: $\xi(t) \overset{P}{\xi}(t_0), \, t \to t_0$.
Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \qquad P(|\xi(t) - \xi(t_0)| > \varepsilon) \to 0, \, t \to t_0$.

Сформулируйте достаточное условие существования непрерывной модификации случайного процесса.

Пусть $\xi(t), \, t \in [0,1]$ удовлетворяет условию

$$\exists \alpha, \beta, C > 0 : \qquad \forall t_1, t_2 \in [0,1] \qquad M|\xi(t_1) = \xi(t_2)|^{\alpha} \leq C|t_1 - t_2|^{1+\beta}.$$

Тогда ξ имеет непрерывную модификацию.

Аудиторные задачи

6.4

Задание. Пусть $\{\xi(t), \, t \in [0,1]\}$ — случайный процесс, все значения которого являются независимыми и имеют одинаковое невырожденное распределение. Докажите, что этот процесс не является стохастически непрерывным ни в какой точке.

Решение. Распределения невырождены в том смысле, что это не константа (рис. 31).

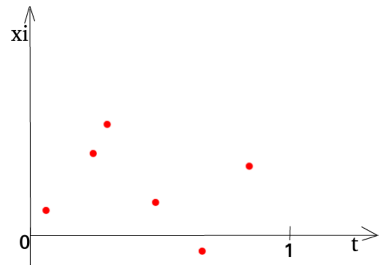

Рис. 31: График функции $\xi\left(t\right)$

Стохастическая непрерывность означает, что вероятность

$$P\left\{\left|\xi\left(s\right)-\xi\left(t\right)\right|>\varepsilon\right\}\to 0.$$

Предположим, что распределение равномерное на отрезке $[0,1]$.

Тогда такая вероятность равна

$$P\left\{\left|\xi\left(s\right)-\xi\left(t\right)\right|>\varepsilon\right\}=\left(1-\varepsilon\right)^{2}\not\to 0,\, t\to s$$

(рис. 32).

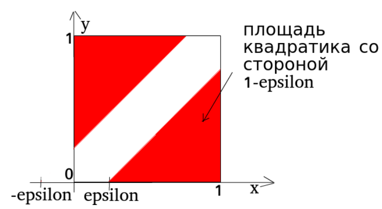

Рис. 32: Площадь квадратика со стороной $1-\varepsilon$

Для такого процесса вероятность — это постоянная и она не может стремиться к нулю.

6.7

Задание. Пусть $\left\{\xi\left(t\right),\, t\in[a,b]\right\}$ — стохастически непрерывный процесс, а f — неслучайная функция, определённая на $[a,b]$. Докажите, что случайный процесс $\eta\left(t\right)=\xi\left(t\right)+f\left(t\right),\, t\in[a,b]$ является стохастически непрерывным в тех и только тех точках отрезка $[a,b]$, где является непрерывной функция f.

Решение. Нужно доказывать в обе стороны.

Сначала предположим, что f — непрерывная. Пусть f — непрерывная в точке t_0. Будем сейчас проверять, что сумма стохастически непрерывна.

Если $\xi\left(t\right)$ — стохастически непрерывна, то

$$\xi\left(t\right)\xrightarrow{P}\xi\left(t_0\right)$$

при $t \to t_0$.

Сходимость по вероятности сохраняется при непрерывных операциях. Сумма — непрерывная операция.

Знаем, что f — непрерывна, то есть если $t \to t_0$, то $f(t) \to f(t_0)$. От ω тут зависимости нет. Эту сходимость можно интерпретировать как сходимость почти наверное, следовательно,

$$f(t) \xrightarrow{P} f(t_0).$$

Значит и сумма будет сходиться. Значит, отсюда следует, что η — стохастически непрерывен.

Теперь предоложим, что вся сумма стохастически непрерывна.

Пусть η — стохастически непрерывен в t_0. Это значит, что

$$\eta(t) \xrightarrow{P} \eta(t_0), \, t \to t_0.$$

Для η и ξ мы знаем, что есть сходимость по вероятности. Надо взять разность. Разность — это f, то есть

$$\begin{cases} \xi(t) + f(t) \xrightarrow{P} \xi(t_0) + f(t_0), \\ \xi(t) \xrightarrow{P} \xi(t_0). \end{cases}$$

Вычтем из первого второе

$$f(t) \xrightarrow{P} f(t_0).$$

Нужно проверить, что для неслучайной функции сходимость по вероятности и просто сходимость — одно и то же. Сходимость по вероятности: $\forall \varepsilon > 0 \qquad P\{|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon\} \to 0$, $t \to t_0$. Это есть. Просто сходимость: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$, чтобы выполнялось соотношение $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ при $|t - t_0| < \delta$. Это нужно проверить.

$\forall \varepsilon > 0 \, \forall \alpha > 0 \, \exists \delta > 0 \qquad P\{|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon\} < \alpha$ при $|t - t_0| < \delta$.

Функция f — неслучайная функция, то есть событие неслучайно. Его вероятность равна или нулю, или единице. Если $\alpha > 1$, то вероятность равна нулю. Значит, $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ при $|t - t_0| < \delta$. То есть $\alpha < 1$.

Тогда $P\{|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon\} = 0$. Из этого следует, что при $|t - t_0| < \delta$ выполняется дополнение $|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$. Это и значит непрерывность в точке t_0. Таким образом, для неслучайных величин все сходимости равносильны.

6.8

Задание. Пусть $\{W(t), \, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что для произвольного $A > 0$

$$P\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \left| W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right) \right| > A \right\} \to 1, \, n \to \infty.$$

Решение. Приращения — нормальные независимые величины

$$W\left(\frac{i+1}{n}\right)-W\left(\frac{i}{n}\right)\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right).$$

Сумма одинаково распределённых случайных величин

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left|W\left(\frac{i+1}{n}\right)-W\left(\frac{1}{n}\right)\right|\cdot\sqrt{n}\overset{a.s.}{\to}M\left|W\left(1\right)\right|,\,n\to\infty$$

по усиленному закону больших чисел, так как

$$\sqrt{n}\left[W\left(\frac{i+1}{n}\right)-W\left(\frac{i}{n}\right)\right]\sim N\left(0,1\right).$$

Тогда вероятность

$$P\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\left|W\left(\frac{i+1}{n}\right)-W\left(\frac{i}{n}\right)\right|\cdot\frac{\sqrt{n}}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt{n}}>A\right\}=P\left\{M\left|W\left(1\right)\right|>0\right\}=1.$$

6.9

Задание. Пусть $\{X\left(t\right),\,t\in T\}$ — случайный процесс такой, что

$$MX\left(t\right)=0,\;MX^{2}\left(t\right)=1$$

для произвольного $t\in T$.

a) Докажите, что $\left|MX\left(t\right)X\left(t+h\right)\right|\leq 1$ для произвольного $h>0$ и произвольного $t\in[0,T-h]$.

b) Допустим, что для некоторых $\lambda<\infty$, $p>1$ и $h_0>0$

$$M\left[X\left(t\right)X\left(t+h\right)\right]\geq 1-\lambda h^{p}$$

для произвольного $h\in(0,h_0]$. Докажите, что $\{X\left(t\right),\,t\in T\}$ имеет непрерывную модификацию.

Решение.

a) Пусть $X\left(t\right)=\xi$ и $X\left(t+h\right)=\eta$. Тогда

$$\left|M\xi\eta\right|\leq M\left|\xi\eta\right|\leq\left(M\left|\xi\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(M\left|\eta\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

(неравенство Гёльдера). Возьмём $p=q=2$.

Получаем неравенство Коши-Буняковского

$$M\left[X\left(t\right)X\left(t+h\right)\right]\leq\left\{M\left|X\left(t\right)\right|^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{M\left|X\left(t+h\right)\right|^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}=1\cdot 1=1.$$

b) Будем пользоваться достаточным условием Колмогорова

$$\exists \alpha, \beta, C > 0 \, : \, \forall t_1, t_2 \in [0,1] \qquad M \left| \xi \left(t_1 \right) - \xi \left(t_2 \right) \right|^{\alpha} \leq C \left| t_1 - t_2 \right|^{1-\beta}.$$

Тогда у процесса будут непрерывные модификации. Нужно оценить

$$M \left| X \left(t+h \right) - X \left(t \right) \right|^2 = M \left[X^2 \left(t+h \right) - 2X \left(t+h \right) X \left(t \right) + X^2 \left(t \right) \right] =$$

Воспользуемся линейностью математического ожидания

$$= MX^2 \left(t+h \right) - 2M \left[X \left(t+h \right) X \left(t \right) \right] + MX^2 \left(t \right).$$

Здесь первое и последнее слагаемые равны единице, а второе не меньше $1 - \lambda h^p$. Тогда

$$MX^2 \left(t+h \right) - 2M \left[X \left(t+h \right) X \left(t \right) \right] + MX^2 \left(t \right) \geq 2 - 2 \left(1 - \lambda h^p \right) = 2 \lambda h^p,$$

где $2\lambda = const$, $p = 1 + \beta$.

Теорема Колмогорова работает с $\alpha = 2$, $C = 2\lambda$ и $\beta = p - 1$.

Значит, такой процесс имеет непрерывные модификации.

Домашнее задание

6.17

Задание. Пусть все значения процесса $\left\{ X \left(t \right), \, t \in \mathbb{R}^+ \right\}$ являются независимыми и равномерно распределёнными на $[0,1]$. Выясните, имеет ли этот процесс непрерывную модификацию.

Решение. Из задачи 6.4 $X \left(t \right)$ не стохастически непрерывен в каждой точке.

Стохастическая непрерывность означает, что $X \left(t \right) \xrightarrow{P} X \left(t_0 \right)$ при $t \to t_0$.

Пусть процесс $X \left(t \right)$ имеет непрерывную модификацию. Тогда

$$\begin{cases} X \left(t \right) = \tilde{X} \left(t \right) \; a.s., \\ \tilde{X} \left(t \right) \to \tilde{X} \left(t_0 \right), \, t \to t_0, \\ X \left(t_0 \right) = \hat{X} \left(t_0 \right) \; a.s. \end{cases} \qquad \Rightarrow X \left(t \right) \to X \left(t_0 \right) \; a.s.,$$

то есть процесс $X \left(t \right)$ стохастически непрерывен — противоречие с условием. Значит, $X \left(t \right)$ не имеет непрерывной модификации.

6.18

Задание. Пусть $X = \left\{ X \left(t \right), \, t \in \mathbb{R}^+ \right\}$ — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K \left(t, s \right)$, которая равна

a) $e^{-|t-s|}$,

b) $(t^\alpha + s^\alpha - |t-s|^\alpha)/2$, $\alpha \in (0,2]$.

Докажите, что X имеет непрерывную модификацию.

Решение. Нам нужно доказать, что существуют такие константы

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ C > 0,$$

что $M\left|X(t+h) - X(t)\right|^\alpha \le C\left|h\right|^{1+\beta}$ для произвольных $t,\ t+h \in \mathbb{R}^+$, $h > 0$.

Поскольку процесс X является гауссовским, то для произвольных

$$t,\ t+h \in \mathbb{R}^+$$

вектор $(X(t), X(t+h))$ является гауссовским. Поэтому случайная величина $X(t+h) - X(t)$, как линейная комбинация компонент гауссовского вектора, имеет нормальное распределение. Найдём параметры этого распределения. Имеем $M[X(t+h) - X(t)] = MX(t+h) - MX(t) = 0$,

a) $D[X(t+h) - X(t)] = M[X(t+h) - X(t)]^2$. Раскроем квадрат

$$M[X(t+h) - X(t)]^2 = K(t+h, t+h) - 2K(t+h, t) + K(t,t) =$$

Подставим выражения для ковариационной функции

$$= e^{-|t+h-t-h|} - 2e^{-|t+h-t|} + e^{-|t-t|} = 1 - 2e^{-|h|} + 1 = 2 - 2e^{-h}.$$

Тогда любой чётный момент случайной величины $X(t+h) - X(t)$ равен $M[X(t+h) - X(t)]^{2n} = (2n-1)!!\left(2 - 2e^{-h}\right)^n$.

Поскольку $1 - e^{-h} \le h$ для $h > 0$, то $M[X(t+h) - X(t)]^4 \le 12h^2$ и, значит, достаточное условие Колмогорова существования непрерывной модификации выполняется при $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $C = 12$.

b) Имеем

$$D[X(t+h) - X(t)] = M[X(t+h) - X(t)]^2 =$$

Раскроем квадрат

$$\begin{gathered} = K(t+h, t+h) - 2K(t+h, t) + K(t,t) = \\ = \frac{(t+h)^\alpha + (t+h)^\alpha - |t+h-t-h|^\alpha}{2} - \\ -2 \cdot \frac{(t+h)^\alpha + t^\alpha - |t+h-t|^\alpha}{2} + \frac{t^\alpha + t^\alpha - |t-t|^\alpha}{2} = \\ = (t+h)^\alpha - (t+h)^\alpha - t^\alpha - h^\alpha + t^\alpha = -h^\alpha. \end{gathered}$$

Тогда любой чётный момент случайной величины $X(t+h) - X(t)$ равен $M[X(t+h) - X(t)]^{2n} = (2n-1)!!\,(-h^\alpha)^n$.

В частности, $M[X(t+h) - X(t)]^2 = 3!!\,(-h^\alpha) = 3h^\alpha$ и, значит, достаточное условие Колмогорова существования непрерывной модификации выполняется при $\alpha = 2$, $\beta = \alpha - 1 = 2 - 1 = 1$, $C = 3$.

6.19

Задание. Для процесса Пуассона найдите предел с вероятностью единица последовательности случайных величин

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(N\left(t_{i+1}\right)-N\left(t_i\right)\right)^2$$

при $\max\left(t_{i+1}-t_i\right)\to 0$, где $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$ — разбиение отрезка $[0,1]$.

Решение.

$$P\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\left[N\left(t_{i+1}\right)-N\left(t_i\right)\right]^2>\varepsilon\right\}\leq\frac{M\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left[N\left(t_{i+1}\right)-N\left(t_i\right)\right]^2}{\varepsilon}=$$

Пользуемся независимостью приращений

$$=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}M\left[N\left(t_{i+1}\right)-N\left(t_i\right)\right]^2}{\varepsilon}=$$

Пользуемся однородностью приращений

$$=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}MN^2\left(t_{i+1}-t_i\right)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}\left[DN\left(t_{i+1}-t_i\right)+M^2N\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]=$$

Пусть случайная величина $X\left(t\right)$ с распределением Пуассона имеет параметр λ. Тогда

$$=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\lambda\left(t_{i+1}-t_i\right)+\lambda^2\left(t_{i+1}-t_i\right)^2\right]=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda\left(t_{i+1}-t_i\right)\left[1+\lambda\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]\leq$$

Оценим сумму максимумом

$$\leq\frac{n}{\varepsilon}\cdot\left\{\lambda\max\left(t_{i+1}-t_i\right)\left[1+\lambda\max\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]\right\}\to 0$$

при $\max\left(t_{i+1}-t_i\right)\to 0$, следовательно, предел по вероятности равен нулю.

Занятие 7. L_2 теория

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение непрерывного в среднем квадратическом случайного процесса.

ξ непрерывен в среднем квадратическом в точке t_0, если

$$\xi(t) \xrightarrow{L_2} \xi(t_0)$$

при $t \to t_0$, то есть $M\left[\xi(t) - \xi(t_0)\right]^2 \to 0$, $t \to t_0$.

Случайный процесс ξ непрерывен в среднем квадратическом на T, если ξ непрерывен в среднем квадратическом в каждой точке $t_0 \in T$.

Как определяются производная случайного процесса, интеграл случайного процесса?

ξ дифференцируем в среднем квадратическом в точке t_0, если

$$\exists L_2 - \lim_{t \to t_0} \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} = \xi'(t_0).$$

Случайный процесс ξ интегрируем в среднем квадратическом на отрезке $[a, b]$, если

$$\exists L_2 - \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(t_k)\, \Delta t_k,$$

где π — разбиение: $a = t_0 < \ldots < t_n = b$.

Модуль разбиения — это максимумальная разность между соседними точками.

Как изменяются характеристики случайного процесса при дифференцировании, интегрировании?

$\xi \in L_2 : M|\xi|^2 < \infty$, $(\xi, \eta) = M\xi\overline{\eta}$, $(\xi, \xi) = M|\xi|^2$.

Приведите условия непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости случайного процесса в терминах его ковариационной функции.

ξ непрерывен в среднем квадратическом на интервале T тогда и только тогда, когда $m \in C(T)$, $K \in C(T \times T)$.

Случайный процесс ξ дифференцируем в среднем квадратическои в точке t_0 тогда и только тогда, когда m дифференцируема в точке t_0 и

$$\exists \lim_{s,t \to t_0} \frac{K(t,s) - K(t,t_0) - K(t_0,s) + K(t_0,t_0)}{(s-t_0)(t-t_0)}.$$

Непрерывный в среднем квадратическом на отрезке $[a,b]$ процесс ξ интегрируем в среднем квадратическом на этом отрезке.

Аудиторные задачи

7.2

Задание. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — интегрируемые с квадратом случайные величины. Докажите, что случайный процесс

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e^{kt}$$

имеет производную в среднем квадратическом и найдите её.

Решение. $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in L_2$, то есть есть n величин, и процесс определяется как

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_l e^{kt}.$$

Нужно проверить, что этот процесс дифференцируем и найти его производную в L_2.

Время t входит только в экспоненту, которую мы умеем дифференцировать. Нужно проверить, что

$$\left\| \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k k e^{kt_0} \right\| \to 0,$$

когда $t \to t_0$.

Будем это проверять. Можно $\xi(t)$ расписать.

$\xi(t)$ — это сумма

$$\left\| \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k k e^{kt_0} \right\| = \left\| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \zeta_k e^{kt} - \sum\limits_{k=1}^{n} \zeta_k e^{kt_0}}{t - t_0} - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k k e^{kt_0} \right\| =$$

Во всех слагаемых есть сумма и ζ_k. Так что приведём подобные, и будет одна сумма

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \left(\frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{t - t_0} - k e^{kt_0} \right) \right\| \leq$$

Первое слагаемое в скобках стремится к производной, а второе и есть производная. Их разность стремится к нулю. Используем неравенство треугольника

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left\| \zeta_k \left(\frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{t - t_0} - k e^{kt_0} \right) \right\| =$$

С помощью свойства $\|\alpha\xi\| \leq |\alpha| \cdot \|\xi\|$ коэффициент выносится из нормы

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{t - t_0} - k e^{kt_0} \right| \cdot \|\zeta_k\| \to$$

Под модулем стоят числа, которые сходятся к нулю, под нормой — числа

$$\to 0.$$

7.3

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что случайный процесс

$$\left\{ \eta(t) = \int\limits_0^t W(s)\, ds,\, t \geq 0 \right\}$$

являются дифференцируемым в среднем квадратическом и что

$$\eta'(t) = W(t)$$

для произвольного $t \geq 0$.

Решение. Дифференцируем интеграл по верхнему пределу.

Должна получиться подинтегральная функция. Нужно проверить, что

$$\frac{\eta(t) - \eta(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow{L_2} W\left(t_)\right).$$

Проверяем. Вместо η подставляем интеграл

$$M \left[\frac{\eta(t) - \eta(t_0)}{t - t_0} - W(t_0) \right]^2 = M \left[\frac{\int\limits_0^t W(s)\, ds - \int\limits_0^{t_0} W(s)\, ds}{t - t_0} - W(t_0) \right]^2 =$$

Разность интегралов — это интеграл от t_0 до t. Так что

$$= M\left[\frac{\int\limits_{t_0}^{t} W(s)\,ds}{t-t_0} - W(t_0)\right]^2 =$$

Случайную величину $W(t_0)$ можно внести под интеграл, потому что он не зависит от s. Знаменатель вынесем из-под интеграла

$$= M\left\{\int\limits_{t_0}^{t}[W(s)-W(t_0)]\,ds\right\}^2 \cdot \frac{1}{(t-t_0)^2} =$$

Найдём дисперсию

$$D\int\limits_a^b \xi(s)\,ds = cov\left(\int\limits_a^b \xi(s)\,ds, \int\limits_a^b \xi(r)\,dr\right).$$

Ковариация — это линейная функция, оба интеграла выносятся

$$cov\left(\int\limits_a^b \xi(s)\,ds, \int\limits_a^b \xi(r)\,dr\right) = \int\limits_a^b\int\limits_a^b cov\left[\xi(s), \xi(t)\right]dsdr.$$

Тогда

$$= \frac{1}{(t-t_0)^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} cov\left[W(s)-W(t_0), W(r)-W(t_0)\right]dsdr =$$

Ковариацию винеровского процесса мы знаем

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\min(s,r)-t_0-t_0+t_0\right]dsdr \cdot \frac{1}{(t-t_0)^2} =$$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничножаются

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\min(s,r)-t_0\right]dsdr \cdot \frac{1}{(t-t_0)^2} \le \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}(t-t_0)\,dsdr \cdot \frac{1}{(t-t_0)^2} =$$

Величина $t-t_0 = const$, она вносится

$$= t - t_0 \to 0.$$

Это и надо было проверить.

7.4

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите существование интеграла в среднем квадратическом

$$\int_0^\infty e^{-t} W(t)\, dt = L_2 - \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-t} W(t)\, dt$$

и найдите его распределение.

Решение. Рассматриваются интегралы

$$\int_0^T e^{-t} W(t)\, dt.$$

Нужно доказать, что у этих интегралов есть предел, то есть

$$\int_0^T e^{-t} W(t)\, dt \overset{L_2,\, T\to\infty}{\to} ?$$

Что нужно проверять, чтобы доказать, что этот интеграл сходится? Надо брать математическое ожидание разностей в квадрате. Предела мы не знаем.

Гильбертово пространство обладает свойством полноты

$$\xi_n \overset{L_2,\, n\to\infty}{\to} \xi$$

тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ фундаментальная, то есть

$$M(\xi_n - \xi_m)^3 \overset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

Предположим, что $T_1 < T_2$. Из полноты следует, что нам достаточно проверить такое

$$M\left[\int_0^{T_1} e^{-t} W(t)\, dt - \int_0^{T_2} e^{-t} W(t)\, dt\right]^2 = M\left[\int_{T_1}^{T_2} e^{-t} W(t)\, dt\right]^2 =$$

Это двойной интеграл от коварiации

$$= \int_{T_1}^{T_2}\int_{T_1}^{T_2} cov\left[e^{-t} W(t), e^{-s} W(s)\right] dtds = \int_{T_1}^{T_2}\int_{T_1}^{T_2} e^{-t-s} \min(t,s)\, dtds =$$

Нужно проверить, что это выражение стремится к нулю, когда $T_1, T_2 \to \infty$. Распишем для всех случаев

$$= \int_{T_1}^{T_2}\left(\int_{T_1}^{s} e^{-t-s} t dt\right) ds + \int_{T_1}^{T_2}\left(\int_{s}^{T_2} e^{-t-s} s dt\right) ds \leq$$

Пусть $t < s$. Тогда

$$\leq \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\int\limits_{T_1}^{s} e^{-t-s} s dt \right) ds + \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\int\limits_{s}^{T_2} e^{-t-s} s dt \right) ds = \int\limits_{T_1}^{T_2} \int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-s} e^{-t} s dt ds =$$

Интегрируем по y, получаем

$$= \int\limits_{T_1}^{T_2} s e^{-s} ds \int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-t} dt = \int\limits_{T_1}^{T_2} s e^{-s} ds \cdot \left(e^{-T_2} - e^{-T_1} \right) =$$

Берём интеграл по частям

$$= \left(e^{-T_2} - e^{-T_1} \right) \left(-e^{-s} s \Big|_{T_1}^{T_2} - e^{-s} \Big|_{T1}^{T_2} \right) =$$

Подставим пределы интегрирования

$$= \left(e^{-T_2} - e^{-T_1} \right) \left(-T_2 e^{-T_2} + T_1 e^{-T_1} - e^{-T_2} + e^{-T_1} \right) \overset{T_1, T_2 \to \infty}{\to} 0,$$

Так как каждое слагаемое стремится к нулю, то есть мы посчитали расстояние между двумя интегралами и показали, что оно стремится к нулю

$$\exists \lim_{T \to \infty} \int\limits_{0}^{T} e^{-t} W(t)\, dt = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} W(t)\, dt.$$

Теперь скажем, какое распределение у этого предела.

W — это винеровский процесс, а интеграл — это предельные суммы, так что

$$\int\limits_{0}^{T} e^{-t} W(t)\, dt \sim N \left(0, \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{0}^{T} e^{-t-s} \min(t, s)\, dt ds \right).$$

Предел гауссовской величины — это тоже нормальная величина

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} W(t)\, dt \sim N \left(0, \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t-s} \min(t, s)\, dt ds \right).$$

7.5

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$\eta(t) = e^{-t} + \int\limits_{0}^{t} e^{-(t-s)} W(s)\, ds$$

является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \eta'(t) = -\eta(t) + W(t), \\ \eta(0) = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\eta(0) = e^0 + \int\limits_0^0 e^{-(t-s)} \cdot W(s)\, ds = 1.$$

Чтобы проверить, что уравенение выполняется, надо написать производную

$$\eta'(t) = -e^{-t} - \int\limits_0^t e^{-(t-s)} W(s)\, ds + e^{-(t-t)} W(t) =$$

Первые 2 стагаемых равны $-\eta(t)$, второе — подынтегральная функция в точке t. Тогда

$$= -\eta(t) + W(t).$$

7.6

Задание. Пусть процесс $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ имеет функцию математического ожидания $m(t) = t^2$ и ковариационную функцию $K(t,s) = e^{ts}$. Вычислите:

a) $M[\xi(1) + \xi(2)]^2$;

b) $M\xi(1)\xi'(2)$;

c)
$$M\left[\xi(1) + \int\limits_0^1 \xi(s)\, ds\right]^2.$$

Решение.

a) Посчитаем

$$M[\xi(1) + \xi(2)]^2 = D[\xi(1) + \xi(2)] + \{M[\xi(1) + \xi(2)]\}^2 =$$
$$= cov[\xi(1) + \xi(2), \xi(1) + \xi(2)] + (1+4)^2 =$$
$$= K(1,1) + K(1,2) + K(2,1) + K(2,2) + 5^2 = e + e^2 + e^2 + e^4 + 25 =$$
$$= e + 2e^2 + e^4 + 25;$$

b) посчитаем $M\xi(1)\xi'(2) = cov[\xi(1), \xi'(2)] + M\xi(1) \cdot M\xi'(2)$. Запишем общую формулу. Ковариация линейная, и производная выносится вперёд

$$cov[\xi(t), \xi'(t)] = \frac{\partial K}{\partial s}(t,s).$$

Тогда $cov[\xi(1), \xi'(2)] + M\xi(1) \cdot M\xi'(2) = te^{ts}|_{t=1,s=2} + 1 \cdot 2t|_{t=2} = t^2 + 4$;

c) посчитаем

$$M\left[\xi\left(1\right)+\int\limits_0^1\xi\left(s\right)ds\right]^2=$$

$$=D\left[\xi\left(1\right)+\int\limits_0^1\xi\left(s\right)ds\right]+\left\{M\left[\xi\left(1\right)+\int\limits_0^1\xi\left(s\right)ds\right]\right\}^2=$$

$$=D\xi\left(1\right)+2cov\left[\xi\left(1\right),\int\limits_0^1\xi\left(s\right)ds\right]+D\left[\int\limits_0^1\xi\left(s\right)ds\right]+\left(1+\int\limits_0^1 s^2ds\right)^2=$$

$$=e+2\int\limits_0^1 cov\left[\xi\left(1\right),\xi\left(s\right)\right]ds+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e^{ts}dtds+\left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Домашнее задание

7.10

Задание. Для винеровского процесса вычислите:

a)

$$cov\left(W\left(2\right),\int\limits_0^4 W\left(s\right)ds+W\left(3\right)\right);$$

b)

$$cov\left(W\left(3\right)+2W\left(1\right),\int\limits_1^3 W\left(s\right)ds\right).$$

Решение.

a)

$$cov\left(W(2), \int_0^4 W(s)\,ds + W(3)\right) =$$

$$= cov\left[W(2), \int_0^4 W(s)\,ds\right] + cov\left[W(2), W(3)\right] =$$

$$= \int_0^4 cov\left[W(2), W(s)\right] ds + \min(2,3) = \int_0^4 \min(2,s)\,ds + \min(2,3) =$$

$$= \int_0^2 \min(2,s)\,ds + \int_2^4 \min(2,s)\,ds + 2 = \int_0^2 s ds + \int_2^4 2ds + 2 =$$

$$= \left.\frac{s^2}{2}\right|_0^2 + \left.2s\right|_2^4 + 2 = \frac{4}{2} + 2\cdot 4 - 2\cdot 2 + 2 = 2 + 8 - 4 + 2 = 8;$$

b) посчитаем

$$cov\left(W(3) + 2W(1), \int_1^3 W(s)\,ds\right) =$$

$$= cov\left[W(3), \int_1^3 W(s)\,ds\right] + cov\left[2W(1), \int_1^3 W(s)\,ds\right] =$$

$$= \int_1^3 cov\left[W(3), W(s)\right] ds + 2\int_1^3 cov\left[W(1), W(s)\right] ds =$$

$$= \int_1^3 \min(3,s)\,ds + 2\int_1^3 \min(1,s)\,ds = \int_1^3 s ds + 2\int_1^3 ds = \left.\frac{s^2}{2}\right|_1^3 + \left.2s\right|_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 6 - 2 = \frac{8}{2} + 4 = 4 + 4 = 8.$$

7.11

Задание. Пусть $\tau \geq 0$ — случайная величина, которая имеет положительную непрерывную плотность распределения, и пусть $X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}$ — процесс ожидания, связанный с τ. Докажите, что $\{X(t), t \in [0,1]\}$ не дифференцируем в среднем квадратическом.

Решение. Допустим, что процесс ожидания дифференцируем в среднем квадратическом. Это означает, что для произвольного $t \in [0,1]$ существовала бы такая случайная величина $X'(t)$, что

$$M\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-X'(t)\right|^2 \to 0,\ h\to 0.$$

Если бы такой предел существовал, то величина

$$M\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right|^2$$

должна была бы быть ограниченной при $h\to 0$. Но непосредственным вычислением показываем, что

$$M\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right|^2 = M\left|\frac{\mathbb{1}\{t+h\geq\tau\}-\mathbb{1}\{t\geq\tau\}}{h}\right|^2 =$$

Возводим в квадрат

$$=\frac{1}{h^2}\cdot M\left[(\mathbb{1}\{t+h\geq\tau\})^2-2\cdot\mathbb{1}\{t+h\geq\tau\}\,\mathbb{1}\{t\geq\tau\}+(\mathbb{1}\{t\geq\tau\})^2\right]=$$

Произведение индикаторов событий — это индикатор пересечения этих событий

$$=\frac{1}{h^2}\cdot[M\mathbb{1}\{t+h\geq\tau\}-2M\mathbb{1}\{\{t+h\geq\tau\}\cap\{t\geq\tau\}\}+M\mathbb{1}\{t\geq\tau\}]=$$

Математическое ожидание индикатора события — это вероятность этого события

$$=\frac{1}{h^2}\cdot[P(t+h\geq\tau)-2P(t+h\geq\tau)+P(t\geq\tau)]=$$

Приведём подобные

$$=\frac{1}{h^2}\cdot[-P(t+h\geq\tau)+P(t\geq\tau)]=\frac{1}{h^2}\cdot[P(\tau\leq t)-P(\tau\leq t+h)]=$$

Запишем через интеграл от плотности

$$=\frac{1}{h^2}\int\limits_t^{t+h}\tau(x)\,p_\tau(x)\,dx\to\infty,\ h\to 0.$$

Это противоречие доказывает недифференцируемость в среднем квадратическом процесса ожидания.

7.12

Задание. Пусть ξ — дифференцируемый в среднем квадратическом процесс, $f\in C^1(\mathbb{R})$ — детерминированная функция. Докажите, что процесс

$\{f(t)\,\xi(t)\,,\, t\in\mathbb{R}\}$ имеет производную в среднем квадратическом и найдите её.

Решение. Нужно проверить, что

$$\left\|\frac{f(t)\,\xi(t)-f(t_0)\,\xi(t_0)}{t-t_0}-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right\|\to 0,$$

когда $t\to t_0$.

Будем это проверять

$$M\left|\frac{f(t)\,\xi(t)-f(t_0)\,\xi(t_0)}{t-t_0}-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right|^2=$$

Поделим числитель на знаменатель

$$=M|\frac{f(t)\,\xi(t)}{t-t_0}-\frac{f(t_0)\,\xi(t_0)}{t-t_0}-\frac{f(t)\,\xi(t_0)}{t-t_0}+\frac{f(t)\,\xi(t_0)}{t-t_0}-$$
$$-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\,|^2=$$
$$=M\left|f(t)\cdot\frac{\xi(t)-\xi(t_0)}{t-t_0}+\xi(t_0)\cdot\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right|^2=$$
$$=M\left|f(t)\,\xi'(t_0)+\xi(t_0)\,f'(t_0)-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right|^2=$$
$$=M\left|f(t)\,\xi'(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right|^2=M\left|\xi'(t_0)\,[f(t)-f(t_0)]\right|^2\to 0$$

при $t\to t_0$.