

# Оглавление

<b>Занятие 2. Характеристики случайного процесса</b>	<b>1</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	3
Аудиторные задачи . . . . .	3
Домашнее задание . . . . .	11



# Занятие 2. Характеристики случайного процесса

## Контрольные вопросы и задания

**Приведите определение случайного процесса.**

Случайный процесс  $\xi(t)$ ,  $t \in T$  — это параметризованная совокупность случайных величин.

**Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?**

$\{\mu_{t_1, \dots, t_n}; t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$  — набор конечномерных распределений процесса  $\xi$ , где  $\mu_{t_1, \dots, t_n}$  — распределение вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  в  $\mathbb{R}^n$ , то есть для борелевского  $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mu_{t_1, \dots, t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) \in \Delta\}$ .

**Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.**

$m(t) = M\xi(t)$ ,  $t \in T$  — функция среднего.

$D\xi(t)$ ,  $t \in T$  — функция дисперсии.

$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)]$ ,  $t, s \in T$  — функция ковариации.

## Аудиторные задачи

### 2.2

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t}, t > 0,$$

где  $X$  — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами  $a$ ,  $\sigma^2$ . Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса  $\xi = \{\xi(t), t > 0\}$ .

*Решение.* Сейчас  $T = (0, \infty)$ .

Случайная величина  $X$  имеет распределение  $N(a, \sigma^2)$ . Нужно найти  $M\xi(t) = m(t)$ ,  $D\xi(t)$ , ковариационную функцию  $K(t, s)$  и одномерную плотность распределения  $p_\xi(t)$ .

Начнём с математического ожидания

$$m(t) = M(X \cdot e^{-t}) = e^{-t}MX = e^{-t} \cdot a.$$

Далее — функция дисперсии  $D\xi(t) = D(X \cdot e^{-t}) = e^{-2t} \cdot DX$ . Дисперсия  $X$  — известная:  $e^{-2t} \cdot DX = e^{-2t} \cdot \sigma^2$ .

Далее — ковариационная функция

$$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)] = cov[\xi(t), \xi(s)].$$

Вместо  $\xi(t)$ ,  $\xi(s)$  подставляем их значения

$$cov[\xi(t), \xi(s)] = cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}).$$

Множители выносятся

$$cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}) = e^{-t-s}cov(X, X) = e^{-t-s}DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность  $\xi(t) \sim N(e^{-t}a, e^{-2t}\sigma^2)$ .

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x - e^{-t}a)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины  $X$ .



Рис. 1: Траектория процесса

## 2.3

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = e^{-Xt}, t > 0,$$

где  $X$  — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром  $\lambda$ . Запишите конечномерные распределения случайного процесса  $\{\xi(t), t > 0\}$ . Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\xi(t) = e^{-Xt}$ , где  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $t > 0$ .

Нужно найти  $m(t)$ ,  $K(t, s)$ , конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент  $t$ . По определению

$$m(t) = M e^{-Xt} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше  $X$ , тем быстрее эта функция убывает.



Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M \xi(t) \xi(s) - M \xi(t) M \xi(s) = M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Подставим найденное значение функции математического ожидания

$$M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s} = \frac{\lambda}{\lambda + t + s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda + t)(\lambda + s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$ . Вместо  $\xi$  напомним формулу  $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n)$ . Величины зависимы, потому что все они выражаются через  $X$ . Все неравенства решаем относительно  $X$

$$P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n) = P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\}.$$



Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой  $m$

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\} = \int_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \dots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда  $0 < x_1, \dots, x_n < 1$ .

Плотности у такого вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  быть не может, потому что  $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$ . Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как  $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$ ,  $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$ .

С вероятностью 1  $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$  — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

## 2.4

*Задание.* Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A \cos(\varphi + \lambda t),$$



Рис. 4:  $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где  $A$  и  $\varphi$  являются независимыми случайными величинами такими, что  $MA^2 < \infty$ , а  $\varphi$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

*Решение.*  $\varphi \sim U([0, 2\pi])$ .

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.



Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A \cos(\varphi + \lambda t)]$ . Случайные величины  $A$  и  $\varphi$  — независимые.  $M[A \cos(\varphi + \lambda t)] = MAM \cos(\varphi + \lambda t)$ . Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у  $\varphi$  известна плотность

$$MAM \cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция  $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$   
Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M[A^2 \cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos [2\varphi + \lambda (t + s)] + \frac{1}{2} \cdot \cos [\lambda (t - s)] \right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos [\lambda (t - s)].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

## 2.5

*Задание.* Пусть  $\tau$  — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ , и пусть  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$  — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}, t \in [0, 1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ , найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\tau$  — случайная величина с распределением  $U([0, 1])$ .

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное  $\tau$  выпало.



Рис. 6: Траектория процесса

$$m(t) = MX(t) = M\mathbb{1}\{t \geq \tau\} = P(t \geq \tau) = F_\tau(t) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция  $K(t, s) = M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s)$ . Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s) = P\{\tau \leq \min(t, s)\} - ts = \min(t, s) - t \cdot s.$$



Конечномерные распределения — распределение вектора  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ .  
Каждый  $X$  — это 0 или 1.

$$P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) = (0, \dots, 0)\} = P\{\tau \in (t_n, 1]\} = 1 - t_n.$$

Точки  $t_n$  изображены на рисунке 7.



Рис. 7: Временная ось

У вектора получается  $(n + 1)$ -но значение

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \dots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \dots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \dots, \\ (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \dots, \\ (1, \dots, 1), & t_1. \end{cases}$$

## 2.6

*Задание.* Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения  $F$ , и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ , найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

*Решение.*

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq s\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \mathbb{1}\{\xi_j \leq s\}) =$$



Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$\text{cov} (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}) = M \mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \wedge s \} - F(t) F(s) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F(t \wedge s) - F(t) F(s),$$

где  $\wedge$  означает минимум.

Все слагаемые в сумме раны этому выражению

$$K(t, s) = \frac{1}{n} [F(t \wedge s) - F(t) F(s)].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем  $t_1, t_2, \dots, t_m$  (рис. 9).

$$X(t) \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}.$$

По  $t$ ,  $X$  увеличивается. Эта функция монотонна.



Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq n.$$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P \left\{ X(t_1) = \frac{k_1}{n}, X(t_2) = \frac{k_2}{n}, \dots, X(t_m) = \frac{k_m}{n} \right\} =$$

$P$ (для  $k_1$  наблюдений  $\xi \leq t_1$ , для  $k_2 - k_1$  наблюдений  $t_1 < \xi \leq t_2, \dots$ , для  $n - k_m$  наблюдений  $\xi > t_m$ ) Имеем мультиномиальное распределение

$$= \frac{n!}{k_1! (k_2 - k_1)! \dots (n - k_m)!} \cdot F(t_1)^{k_1} \cdot [F(t_2) - F(t_1)]^{k_2 - k_1} \cdot \dots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить  $n$  величин на группы.

## 2.7

*Задание.* Найдите характеристическую функцию случайной величины  $X(\eta)$ , где  $\{X(t), t \in [0, 1]\}$  — процесс из задачи 2.5, а  $\eta$  — независимая от  $X$  случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$  соответственно.

*Решение.*  $X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}$ .

Задана случайная величина

$$\eta = \begin{cases} 0, & \frac{1}{3}, \\ 1, & \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Интересуемся  $\varphi_{X(\eta)}$ . Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.



Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1:  $X(0) = 0, X(1) = 1$ , значит,  $X(\eta) = \eta$ .

$$\varphi_{X(\eta)}(\lambda) = \varphi_{\eta}(\lambda) = M e^{i\lambda\eta} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

## Домашнее задание

### 2.12

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = Xt + a, \quad t \in \mathbb{R},$$

где  $X$  — равномерно распределённая на отрезке  $(a, b)$  случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса  $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ . Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

*Решение.*  $\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R}$ , где  $X \sim U(a, b)$ .

Нужно найти  $m(t), D\xi(t), K(t, s)$ , конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент  $t$

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 11: чем больше  $X$ , тем больше угол наклона прямой к оси  $0t$ .

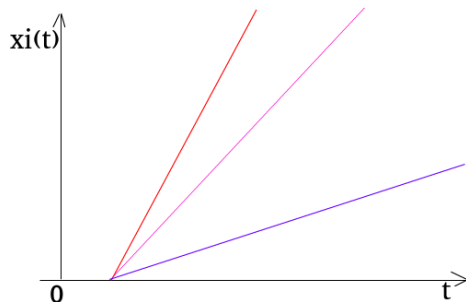


Рис. 11: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt + a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и

вычисляем математическое ожидание

$$\begin{aligned}
&= M[(Xt + a)(Xs + a)] - M(Xt + a)M(Xs + a) = \\
&= M[X^2ts + Xa(t + s) + a^2] - \left(t \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) \left(s \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) = \\
&= ts \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3} + a(t + s) \cdot \frac{a+b}{2} + a^2 - ts \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - ta \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 - \\
&\quad - as \cdot \frac{a+b}{2} = \\
&= ts \left( \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right) + (t + s)a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot a(t + s) = \\
&= ts \cdot \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = ts \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = ts \cdot \frac{(a-b)^2}{12}.
\end{aligned}$$

Считаем функцию распределения случайного вектора  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$  — рис. 12.

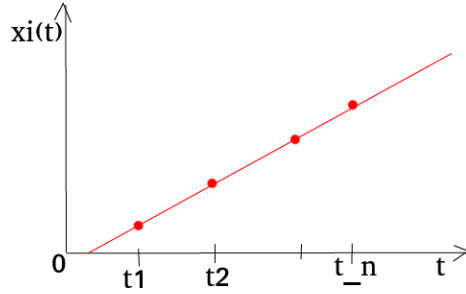


Рис. 12: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$ . Вместо  $\xi$  напомним формулу  $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n)$ . Величины зависимы, потому что все они выражаются через  $X$ . Все неравенства решаем относительно  $X$

$$P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n) = P(Xt_1 \leq x_1 - a, \dots, Xt_n \leq x_n - a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X \leq \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, X \leq \frac{x_n - a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P\left\{X \leq \min\left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n}\right)\right\} =$$

Обозначим минимум буквой  $m$  для удобства

$$= P(X \leq m) = \int_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{X \in (a, b)\} dX = \frac{1}{b-a} \int_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[ \min \left( \frac{x_1-a}{t_1}, \dots, \frac{x_n-a}{t_n} \right) - a \right]$$

при  $m \in (a, b)$ , иначе — ноль.

### 2.13

*Задание.* Пусть

$$\xi(t) = U \cos \theta t + V \sin \theta t, \quad t \in T,$$

где  $U, V$  — независимые случайные величины с заданными характеристиками:  $MU = MV = 0$ ,  $DU = DV = \sigma^2$ ,  $\theta$  — неслучайная величина. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\{\xi(t), t \in T\}$ .

*Решение.* Нужно найти  $m(t)$ ,  $D\xi(t)$ ,  $K(t, s)$ .

Найдём математическое ожидание в момент  $t$ . По свойствам

$$m(t) = M\xi(t) = M(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos \theta t \cdot MU + \sin \theta t \cdot MV = 0.$$

Можно сделать преобразование  $U \cos \theta t + V \sin \theta t = C \sin(\theta t + \omega)$ , где  $C = \sqrt{U^2 + V^2}$ . Траектории такого процесса изображены на рисунке 13: график синуса сжимается к оси ординат, когда модули случайных величин  $U$  и  $V$  растут.

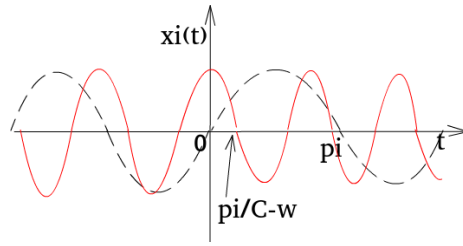


Рис. 13: Траектория процесса

Найдём дисперсию в момент  $t$ . По свойствам

$$D\xi(t) = D(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos^2 \theta t \cdot DU + \sin^2 \theta t \cdot DV =$$

Подставим известные значения дисперсии

$$= \cos^2 \theta t \cdot \sigma^2 + \sin^2 \theta t \cdot \sigma^2 = \sigma^2 (\cos^2 \theta t + \sin^2 \theta t) = \sigma^2.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставим выражения для случайного процесса в первое слагаемое, а второе равно нулю

$$= M[(U \cos \theta t + V \sin \theta t) \cdot (U \cos \theta s + V \sin \theta s)] =$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} &= M(U^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + UV \cos \theta t \cdot \sin \theta s + VU \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + V^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \\ &= DU \cdot \cos \theta t \cdot \cos \theta s + MU \cdot MV \cdot \cos \theta t \cdot \sin \theta s + MV \cdot MU \cdot \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + DV \cdot \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \sigma^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sigma^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \\ &= \sigma^2 \cdot (\cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \sigma^2 \cos(\theta t - \theta s) = \sigma^2 \cos[\theta(t - s)]. \end{aligned}$$