Оглавление

Занятие 2. Характеристики случайного процесса

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(t)\,,\, t \in T$ — это параметризированная совокупность случайных величин.

Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?

$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n};\, t_1,\ldots,t_n \in T,\, n \geq 1\}$ — набор конечномерных распределений процесса ξ, где $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ — распределение вектора $(\xi(t_1)\,,\ldots,\xi(t_n))$ в $\mathbb{R}^n$, то есть для борелевского $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\,,\, \mu_{t_1,\ldots,t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1)\,,\ldots,\xi(t_n)) \in \Delta\}$.

Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.

$m(t) = M\xi(t)\,,\, t \in T$ — функция среднего.
$D\xi(t)\,,\, t \in T$ — функция дисперсии.
$K(t,s) = M[\xi(t) - m(t)]\cdot[\xi(s) - m(s)]\,,\, t,s \in T$ — функция ковариации.

Аудиторные задачи

2.2

Задание. Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t},\, t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами a, σ^2. Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса $\xi = \{\xi(t)\,,\, t > 0\}$.

Решение. Сейчас $T = (0,\infty)$.

Случайная величина X имеет распределение $N\left(a, \sigma^2\right)$. Нужно найти $M\xi(t) = m(t)$, $D\xi(t)$, ковариационную функцию $K(t,s)$ и одномерную плотность распределения $p_\xi(t)$.

Найчнём с математического ожидания

$$m(t) = M\left(X \cdot e^{-t}\right) = e^{-t} MX = e^{-t} \cdot a.$$

Далее — функция дисперсии $D\xi(t) = D\left(X \cdot e^{-t}\right) = e^{-2t} \cdot DX$. Дисперсия X — известная: $e^{-2t} \cdot DX = e^{-2t} \cdot \sigma^2$.

Далее — ковариационная функция

$$K(t,s) = M\left[\xi(t) - m(t)\right] \cdot \left[\xi(s) - m(s)\right] = cov\left[\xi(t), \xi(s)\right].$$

Вместо $\xi(t)$, $\xi(s)$ подставляем их значения

$$cov\left[\xi(t), \xi(s)\right] = cov\left(Xe^{-t}, Xe^{-s}\right).$$

Множители выносятся

$$cov\left(Xe^{-t}, Xe^{-s}\right) = e^{-t-s} cov(X, X) = e^{-t-s} DX = e^{-t-s} \sigma^2.$$

Последнее — это плотность $\xi(t) \sim N\left(e^{-t}a,\, e^{-2t}\sigma^2\right)$.

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{\left(x - e^{-t}a\right)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины X.

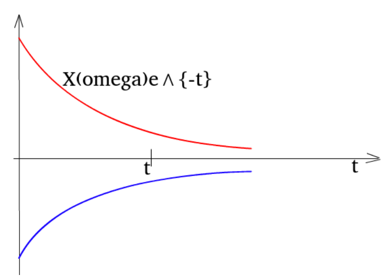

Рис. 1: Траектория процесса

2.3

Задание. Пусть

$$\xi(t) = e^{-Xt},\ t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром λ. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t > 0\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = e^{-Xt}$, где $X \sim Exp(\lambda), t > 0$.

Нужно найти $m(t), K(t,s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t. По определению

$$m(t) = Me^{-Xt} = \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше X, тем быстрее эта функция убывает.

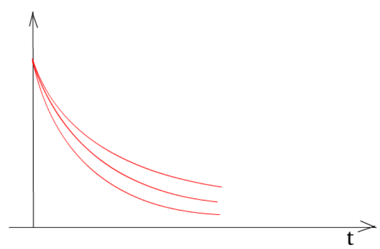

Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) = Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda+t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

Подставим найденное значение фунцкии математического ожидания

$$Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda+t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s} = \frac{\lambda}{\lambda+t+s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda+t)(\lambda+s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\}$. Вместо ξ напишем формулу $P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\} = P\left(e^{-Xt_1} \le x_1, \ldots, e^{-Xt_n} \le x_n\right)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X. Все неравенства решаем относительно X

$$P\left(e^{-Xt_1} \le x_1, \ldots, e^{-Xt_n} \le x_n\right) = P\left\{X \ge -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, X \ge -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \ge -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, X \ge -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \ge \max\left(-\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right)\right\}.$$

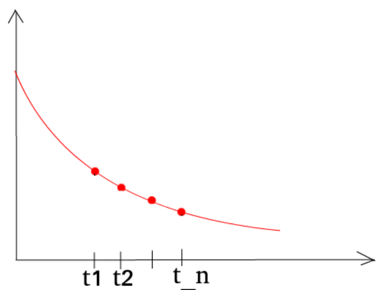

Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой m

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right)\right\} = \int\limits_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(ln\, x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, ln\, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(ln\, x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, ln\, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \ldots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда $0 < x_1, \ldots, x_n < 1$.

Плотности у такого векора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ быть не может, потому что $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$. Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$, $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$.

С вероятностью 1 $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$ — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

2.4

Задание. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A\cos(\varphi + \lambda t),$$

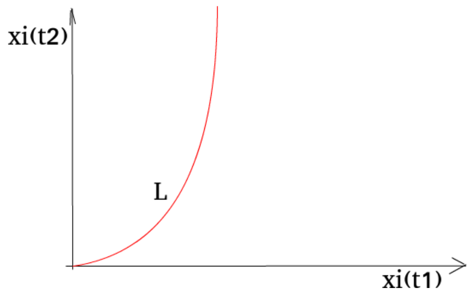

Рис. 4: $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где A и φ являются независимыми случайными величинами такими, что $MA^2 < \infty$, а φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

Решение. $\varphi \sim U([0, 2\pi])$.

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.

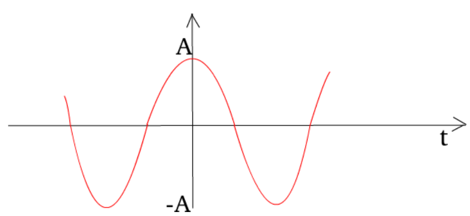

Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A\cos(\varphi + \lambda t)]$. Случайные величины A и φ — независимые. $M[A\cos(\varphi + \lambda t)] = MAM\cos(\varphi + \lambda t)$. Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у φ известна плотность

$$MAM\cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$ Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M\left[A^2\cos(\varphi + \lambda t)\cos(\varphi + \lambda s)\right] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t)(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos\left[2\varphi + \lambda\left(t+s\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right] \right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

2.5

Задание. Пусть τ — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, и пусть $\{X\left(t\right), t \in [0,1]\}$ — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X\left(t\right) = \mathbb{1}\left\{t \geq \tau\right\}, t \in [0,1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X\left(t\right), t \in [0,1]\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. τ — случайная величина с распределением $U\left([0,1]\right)$.

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное τ выпало.

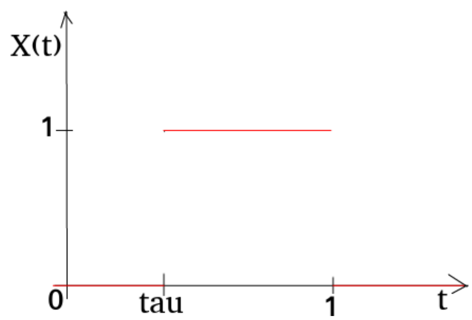

Рис. 6: Траектория процесса

$$m\left(t\right) = MX\left(t\right) = M\mathbb{1}\left\{t \geq \tau\right\} = P\left(t \geq \tau\right) = F_\tau\left(t\right) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция $K\left(t,s\right) = M\left[X\left(t\right)X\left(s\right)\right] - MX\left(t\right)MX\left(s\right)$. Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M\left[X\left(t\right)X\left(s\right)\right] - MX\left(t\right)MX\left(s\right) = P\left\{\tau \leq \min\left(t,s\right)\right\} - ts = \min\left(t,s\right) - t \cdot s.$$

Конечномерные распределения — распределение вектора $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$. Каждый X — это 0 или 1.

$$P\left\{(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = (0, \ldots, 0)\right\} = P\left\{\tau \in (t_n, 1]\right\} = 1 - t_n.$$

Точки t_n изображены на рисунке 7.

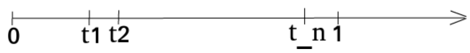

Рис. 7: Временная ось

У вектора получается $(n+1)$-но значение

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \ldots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \ldots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \ldots, \\ (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \ldots, \\ (1, \ldots, 1), & t_1. \end{cases}$$

2.6

Задание. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения F, и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{\xi_i \le t\right\}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), \, t \in \mathbb{R}\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{\xi_i \le t\right\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$cov\left(X(t), X(s)\right) = cov\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{\xi_i \le t\right\}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{\xi_i \le s\right\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} cov\left(\mathbb{1}\left\{\xi_i \le t, \, \mathbb{1}\left\{\xi_j \le s\right\}\right\}\right) =$$

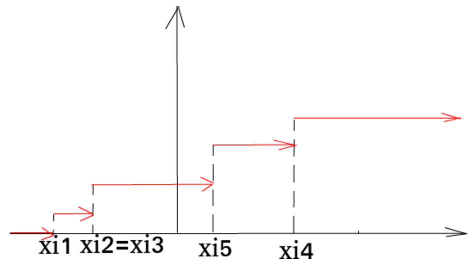

Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1} \left\{ \xi_i \leq t \right\}, \mathbb{1} \left\{ \xi_i \leq s \right\} \right).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$cov \left(\mathbb{1} \left\{ \xi_i \leq t \right\}, \mathbb{1} \left\{ \xi_i \leq s \right\} \right) = M \mathbb{1} \left\{ \xi_i \leq t \wedge s \right\} - F(t) F(s) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F(t \wedge s) - F(t) F(s),$$

где $\wedge$ означает минимум.

Все слагаемые в сумме раны этому выражению

$$K(t, s) = \frac{1}{n} \left[F(t \wedge s) - F(t) F(s) \right].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем $t_1, t_2, \ldots, t_m$ (рис. 9).

$$X(t) \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 \right\}.$$

По t, X увеличивается. Эта функция монотонна.

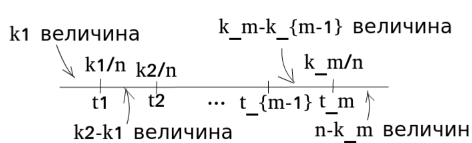

Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_m \leq n.$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P\left\{X(t_1)=\frac{k_1}{n},\, X(t_2)=\frac{k_2}{n},\ldots,X(t_m)=\frac{k_m}{n}\right\}=$$

$P($для k_1 наблюдений $\xi\le t_1$, для k_2-k_1 наблюдений $t_1<\xi\le t_2,\ldots,$ для $n-k_m$ наблюдений $\xi>t_m)$ Имеем мультиномиальное распределение

$$=\frac{n!}{k_1!\,(k_2-k_1)!\ldots(n-k_m)!}\cdot F(t_1)^{k_1}\cdot\left[F(t_2)-F(t_1)\right]^{k_2-k_1}\cdot\ldots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить n величин на группы.

2.7

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $X(\eta)$, где $\{X(t),\, t\in[0,1]\}$ — процесс из задачи 2.5, а η — независимая от X случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно.

Решение. $X(t)=\mathbb{1}\{t\ge\tau\}$.

Задана случайная величина

$$\eta=\begin{cases}0, & \frac{1}{3},\\ 1, & \frac{2}{3}.\end{cases}$$

Интересуемся $\varphi_{X(\eta)}$. Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.

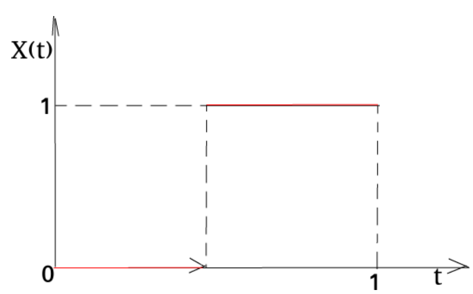

Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1: $X(0)=0$, $X(1)=1$, значит, $X(\eta)=\eta$.

$$\varphi_{X(\eta)}(\lambda)=\varphi_\eta(\lambda)=Me^{i\lambda\eta}=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

2.8

Задание. Значение случайного телеграфного сигнала $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ в произвольный момент времени с одинаковыми вероятностями равно 0 или 1. Прыжки происходят случайным и независимым образом. Вероятность $P(k, T)$ того, что в интервале времени длины T произойдёт k прыжков, задаётся распределением Пуассона, то есть:

$$P(k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T},$$

где λ — среднее количество прыжков за единицу времени. Найдите математическое ожидание и ковариационнуб функцию случайного процесса ξ.

Решение.

$$P\{\xi(t) = 1\} = P\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{2}.$$

Одномерные распределения даны. Это распределение Бернулли.

$P(k, T)$ — это вероятность того, что на отрезке времени длины T было k прыжков, то есть траектория процесса выглядит как на рисунке 11.

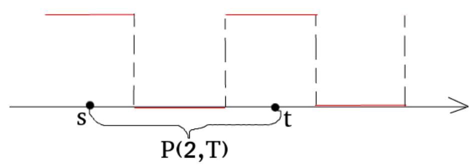

Рис. 11: Траектория случайного процесса

Математическое ожидание тут ищется просто

$$M\xi(t) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Теперь нужно ещё найти ковариационную функцию

$$K(s, t) = M\xi(s)\xi(t) - \frac{1}{4}.$$

Нужно математическое ожидание совместного процесса. $\xi(s)$ и $\xi(t)$ зависимы.

Попробуем найти математическое ожидание произведения. Произведение принимает значения 0 и 1. Получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = 0 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 0\} + 1 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 1\} =$$

Слагаемое с нулём пропадает

$$= P\{\xi(s) = 1, \xi(t) = 1\}.$$

Значения в точках совпадаю, если между ними произошло чётное количество скачков $M\xi(t)\xi(s) = P\{\xi(s) = 1\} P$ (на отрезке $[s, t]$ будет чётное количество прыжков). Мы знаем, с какой вероятностью происходит число прыжков.

Подходят любые чётные прыжки, то есть это вероятность объединения. Число скачков обозначим буковокой N. Тогда P(на $[s,t]$ чётное число скачков) $= P(N_{[s,t]}$ чётное$)=$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left(2k = N_{[s,t]}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(2k, t-s\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda\left(t-s\right)\right]^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Экспонента выносится за сумму. Остаётся

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Для того, чтобы это было экспонента, нужны ещё и нечётные степени

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{x}.$$

Если мы вычтем вторую сумму, то получится

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-x}.$$

Теперь нужно сложить эти два выражения и поделить на 2, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2},\ x = \lambda\left(t-s\right).$$

Получили гиперболический косинус.

$$= \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{-\lambda(t-s)}}{2} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Умножим один сомножитель на другой

$$= \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{2}.$$

Это вероятность чётного числа скачков.

Выпишем, чему равна ковариационная функция

$$K\left(t,s\right) = \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^{-2\lambda(t-s)}}{4},\ s < t.$$

Окончательный ответ:

$$K\left(t,s\right) = \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda|t-s|}.$$

2.9

Задание. Пусть η_1 и η_2 — независимые случайные величины, которые имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найдите значения a, при которых почти все реализации случайной функции $t\left(\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right)\right)$ монотонно возрастают по t.

Решение. $\xi\left(t\right) = t\left(\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right)\right)$ — процесс. Известно, что траектория этого процесса монотонно возрастает по t.

Реализация такого процесса выглядит как прямая линия (рис. 12), при этом $\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right) > 0$. Это случайная величина, так что

$$P\left\{\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right) > 0\right\} = 1.$$

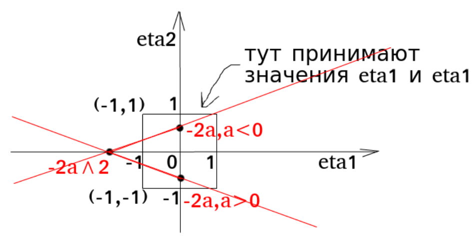

Рис. 12: Траектория случайного процесса

При $a = 0\, \eta_1 > 0$ — правая часть квадратика. Тогда событие выполняется с вероятностью

$$\frac{1}{2} \neq 1,$$

то есть $a \neq 0$.

Следующий случай: $a > 0$. Получается

$$\eta_2 + 2a > -\frac{\eta_1}{a},$$

откуда

$$\eta_2 > -\frac{\eta_1}{a} - 2a,$$

то есть на картинке это будет прямая. Мы возьмём всё, что над этой прямой

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Вероятность не будет равна 1. a должно быть таким, чтобы прямая прошла через точку $(-1, -1)$, то есть $-1 + a\left(2a - 1\right) > 0$. Теперь можно найти a из неравенства $2a^2 - a - 1 > 0$. Сейчас скажем, при каких a это выполнено. $D = 1 + 8 = 9 = 3^2$, значит

$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = 1.$$

Задавали $a > 0$, то есть при $a > 1$ вероятность такого события — единица.

Теперь нужно задать $a < 0$. Отличие будет в том, как пройдёт прямая.

$$-\frac{\eta_1}{a} - 2a > \eta_2,$$

то есть нужно нарисовать прямую

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Нужно будет выбрать всё, что ниже этой прямой.

Нужно, чтобы прямая прошла над точкой $(-1, 1)$. Имеем неравенство $-1 + a(1 + 2a) > 0$, откуда

$$a^1 + \frac{1}{2} \cdot a - 1 > 0.$$

Решая соответствующее уравнение находим, что

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 1.$$

При $a < 0$ получаем ответ: $a < -1$.

Ответ к задаче: $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, то есть $|a| > 1$.

2.10

Задание. Пусть случайная величина $\tau \in (0, 1)$ имеет непрерывное распределение и пусть

$$\xi(t) \equiv 0;\ \eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Изобразите трактории этих процессов. Докажите, что эти процессы являются стохастически эквивалентными, то есть $\forall t \in [0, 1] : P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = 0$.

Решение. τ — это случайная величина с непрерывным распределением — та, у которой функция распределения F_τ — непрерывна.

Скачок фукнции распределения $\Delta F_\tau(x) = P(\tau = x) = 0$, где

$$F_\tau(x) = P(\tau \leq x),$$

а $F_\tau(-x) = P(\tau < x)$. В нашем случае нет скачков, то есть в фиксированный x случайная величина τ не попадёт. Рассматривается 2 процесса. Посмотрим, какие траектории у этих процесса. Процессы заданы на $t \in [0, 1]$ (рис. 13).

С точки зрения анализа это разные функции. У η всегда есть скачок, у ξ никогда скачков нет. Помним, что $\xi(t) \equiv 0$. Тем не менее, вероятность $P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = P\{\eta(t) \neq 0\} = P(\tau = t) = 0$, а это значит, что в фиксированной точке процессы с вероятностью 1 совпадают. Если зафиксируем несколько точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$, то вероятность

$$P\{(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)) = (\eta(t_1), \ldots, \eta(t_n))\} = 1.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения.

Конечномерные распределения не определяют траектории процесса.

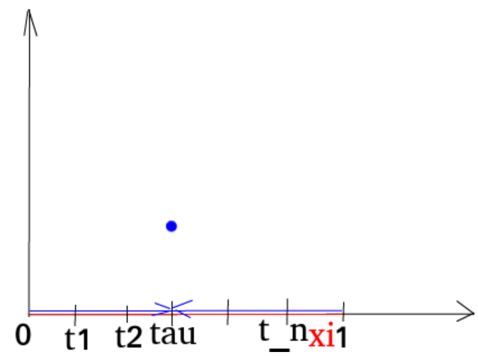

Рис. 13: Траектория случайных процессов

Домашнее задание

2.12

Задание. Пусть
$$\xi(t) = Xt + a,\ t \in \mathbb{R},$$
где X — равномерно распределённая на отрезке (a, b) случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = Xt + a$, $t \in \mathbb{R}$, где $X \sim U(a, b)$.

Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изоражены на рисунке 14: чем больше X, тем больше угол наклона прямой к оси $0t$.

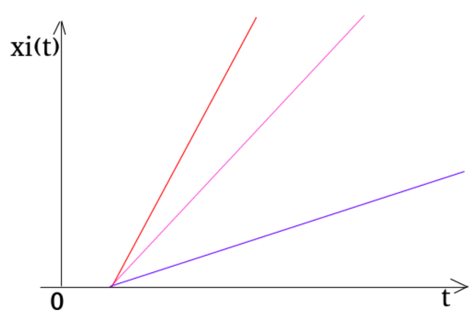

Рис. 14: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt + a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и вычисляем математическое ожидание

$$= M[(Xt+a)(Xs+a)] - M(Xt+a)M(Xs+a) =$$

$$= M\left[X^2 ts + Xa(t+s) + a^2\right] - \left(t \cdot \frac{a+b}{2} + a\right)\left(s \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) =$$

$$= ts \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3} + a(t+s) \cdot \frac{a+b}{2} + a^2 - ts \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - ta \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 -$$

$$-as \cdot \frac{a+b}{2} =$$

$$= ts\left(\frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) + (t+s)a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot a(t+s) =$$

$$= ts \cdot \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = ts \cdot \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = ts \cdot \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ — рис. 15.

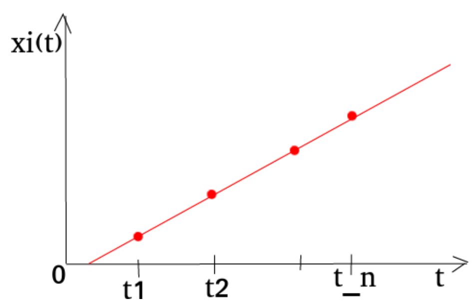

Рис. 15: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\}$. Вместо ξ напишем формулу $P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\} = P(Xt_1 + a \le x_1, \ldots, Xt_n + a \le x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X. Все неравенства решаем относительно X

$$P(Xt_1 + a \le x_1, \ldots, Xt_n + a \le x_n) = P(Xt_1 \le x_1 - a, \ldots, Xt_n \le x_n - a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X \le \frac{x_1 - a}{t_1}, \ldots, X \le \frac{x_n - a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P\left\{X \le \min\left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \ldots, \frac{x_n - a}{t_n}\right)\right\} =$$

Обозначим минимум буквой m для удобства

$$= P\left(X \le m\right) = \int\limits_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left\{X \in (a,b)\right\} dX = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X\Big|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\min\left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \ldots, \frac{x_n - a}{t_n}\right) - a\right]$$

при $m \in (a,b)$, иначе — ноль.

2.13

Задание. Пусть

$$\xi\left(t\right) = U\cos\theta t + V\sin\theta t,\ t \in T,$$

где U, V — независимые случайные величины с заданными характеристиками: $MU = MV = 0$, $DU = DV = \sigma^2$, θ — неслучайная величина. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса $\left\{\xi\left(t\right), t \in T\right\}$.

Решение. Нужно найти $m\left(t\right), D\xi\left(t\right), K\left(t,s\right)$.

Найдём математическое ожидание в момент t. По свойствам

$$m\left(t\right) = M\xi\left(t\right) = M\left(U\cos\theta t + V\sin\theta t\right) = \cos\theta t \cdot MU + \sin\theta t \cdot MV = 0.$$

Можно сделать преобразование $U\cos\theta t + V\sin\theta t = C\sin\left(\theta t + \omega\right)$, где $C = \sqrt{U^2 + V^2}$. Траектории такого процесса изображены на рисунке 16: график синуса сжимается к оси ординат, когда модули случайных величин U и V растут.

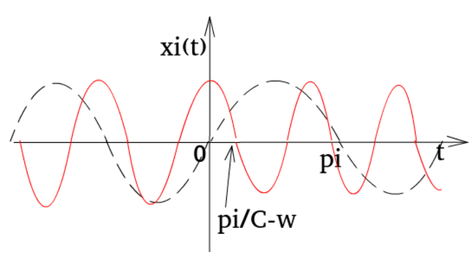

Рис. 16: Траектория процесса

Найдём дисперсию в момент t. По свойствам

$$D\xi(t) = D(U\cos\theta t + V\sin\theta t) = \cos^2\theta t \cdot DU + \sin^2\theta t \cdot DV =$$

Подставим известные значения дисперсии

$$= \cos^2\theta t \cdot \sigma^2 + \sin^2\theta t \cdot \sigma^2 = \sigma^2\left(\cos^2\theta t + \sin^2\theta t\right) = \sigma^2.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставим выражения для случайного процесса в первое слагаемое, а второе равно нулю

$$= M\left[(U\cos\theta t + V\sin\theta t)\cdot(U\cos\theta s + V\sin\theta s)\right] =$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} &= M(U^2\cos\theta t\cdot\cos\theta s + UV\cos\theta t\cdot\sin\theta s + VU\sin\theta t\cdot\cos\theta s + \\ &\qquad + V^2\sin\theta t\cdot\sin\theta s) = \\ &= DU\cdot\cos\theta t\cdot\cos\theta s + MU\cdot MV\cdot\cos\theta t\cdot\sin\theta s + MV\cdot MU\cdot\sin\theta t\cdot\cos\theta s + \\ &\qquad + DV\cdot\sin\theta t\cdot\sin\theta s = \sigma^2\cos\theta t\cdot\cos\theta s + \sigma^2\sin\theta t\cdot\sin\theta s = \\ &= \sigma^2\cdot(\cos\theta t\cdot\cos\theta s + \sin\theta t\cdot\sin\theta s) = \sigma^2\cos(\theta t - \theta s) = \sigma^2\cos\left[\theta(t-s)\right]. \end{aligned}$$

2.14

Задание. Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса

$$\xi(t) = 2u\sin\nu t + 3vt^2 + 5,\ t\in T,$$

где ν — известный неслучайный параметр, а u, v — случайные величины с известными характеристиками:

$$Mu = 1,\ Mv = 2,\ Du = 0.1,\ Dv = 0.9,\ cov(u,v) = -0.3.$$

Решение. Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t,s)$.

Найдём математическое ожидание в момент t. По свойствам

$$m(t) = M\left(2u\sin\nu t + 3vt^2 + 5\right) = 2\sin\nu t\cdot Mu + 3t^2 Mv + 5 = 2\sin\nu t + 6t^2 + 5.$$

Траектория такого процесса изображена на рисунке 17.

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)\cdot M\xi(s) =$$

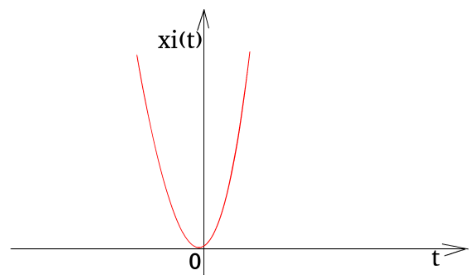

Рис. 17: Траектория процесса

Подставим выражения для случайного процесса и его математические ожидания

$$= M\left[\left(2u\sin\nu t + 3vt^2 + 5\right)\left(2u\sin\nu s + 3vs^2 + 5\right)\right] -$$
$$-\left(2\sin\nu t + 6t^2 + 5\right)\left(2\sin\nu s + 6s^2 + 5\right) =$$
$$= M(4u^2\sin\nu t\cdot\sin\nu s + 6uv\sin\nu t\cdot s^2 + 10u\sin\nu t + 6vt^2u\sin\nu s + 9v^2t^2s^2 +$$
$$+15vt^2 + 10u\sin\nu s + 15vs^2 + 25) - 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s - 12\sin\nu t\cdot s^2 - 10\sin\nu t -$$
$$-12t^2\sin\nu s - 36t^2s^2 - 30t^2 - 10\sin\nu s - 30s^2 - 25 =$$
$$= 4\sin\nu t\cdot Mu^2 + 6t^2\sin\nu s\cdot M\left(uv\right) + 10\sin\nu t\cdot Mu + 6t^2\sin\nu s\cdot M\left(uv\right) +$$
$$+9t^2s^2Mv^2 + 15t^2Mv + 10\sin\nu s\cdot Mu + 15s^2\cdot Mv + 25 - 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s -$$
$$-12\sin\nu t\cdot s^2 - 10\sin\nu t - 12t^2\sin\nu s - 36t^2s^2 - 30t^2 - 10\sin\nu s - 30s^2 - 25 =$$

Вычислим вторые моменты

$$Mu^2 = Du + \left(Mu\right)^2 = 0.1 + 1 = 1.1,\ Mv^2 = Dv + \left(Mv\right)^2 = 0.9 + 4 = 4.9.$$

По определению ковариации $cov\left(u,v\right) = M\left(uv\right) - Mu\cdot Mv$, откуда

$$M\left(uv\right) = cov\left(u,v\right) + Mu\cdot Mv = -0.3 + 1\cdot 2 = 2 - 0.3 = 1.7.$$

Подставим полученные значения в функцию ковариации

$$= 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s\cdot 1.1 + 6\sin\nu t\cdot s^2\cdot 1.7 + 10\sin\nu t + 6t^2\sin\nu s\cdot 1.7 +$$
$$+9t^2s^2\cdot 4.9 + 15t^2\cdot 2 + 10\sin\nu s + 15s^2\cdot 2 - 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s - 12\sin\nu t\cdot s^2 -$$
$$-10\sin\nu t - 12t^2\cdot\sin\nu s - 36t^2s^2 - 30t^2 - 10\sin\nu s - 30s^2 =$$
$$= 0.4\sin\nu t\cdot\sin\nu s - 1.8\sin\nu t\cdot s^2 - 1.8t^2\sin\nu s + 8.1t^2s^2.$$

Найдём дисперсию в момент t. Из формулы для ковариации

$$D\xi\left(t\right) = K\left(t,t\right) = 0.4\sin^2\nu t - 3.6\sin\nu t\cdot t^2 + 8.1t^4.$$

2.15

Задание. Найдите ковариационную функцию процесса

$$Y(t) = \psi_1(t) X_1 + \ldots + \psi_n(t) X_n,$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — произвольные числовые функции от t, а $X_1, \ldots, X_n$ — некоррелируемые случайные величины с дисперсиями $D_1, \ldots, D_n$.

Решение. Нужно найти

$$K(t,s) = cov\left(\psi_1(t) X_1 + \ldots + \psi_n(t) X_n,\, \psi_1(s) X_1 + \ldots + \psi_n(s) X_n\right) =$$

Распишем по определению

$$= M\left[\left(\psi_1(t) X_1 + \ldots + \psi_n(t) X_n\right)\left(\psi_1(s) X_1 + \ldots + \psi_n(s) X_n\right)\right] -$$
$$-M\left(\psi_1(t) X_1 + \ldots + \psi_n(t) X_n\right) \cdot M\left(\psi_1(s) X_1 + \ldots + \psi_n(s) X_n\right) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \psi_i(t) \psi_j(s) M(X_i X_j) - \sum_{i,j=1}^{n} \psi_i(t) \psi_j(s) M X_i \cdot M X_j =$$
$$= \psi_1(t) \psi_1(s) D X_1 + \ldots + \psi_n(t) \psi_n(s) D X_n =$$
$$= \psi_1(t) \psi_1(s) D_1 + \ldots + \psi_n(t) \psi_n(s) D_n.$$

2.16

Задание. Пусть η и ζ — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $1/2$. Найдите конечномерные распределения случайного процесса

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t},\ t > 0.$$

Решение. Для произвольных натуральных $n \geq 1$, произвольных моментов времени $t_1, \ldots, t_n \in T$ и произвольных действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ находим

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\left\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \ldots, \xi(t_n) \leq x_n\right\} =$$

Подставляем выражения для случайного процесса

$$= P\left(\frac{\eta+\zeta}{t_1} \leq x_1, \frac{\eta+\zeta}{t_2} \leq x_2, \ldots, \frac{\eta+\zeta}{t_n} \leq x_n\right) =$$

Переносим моменты времени вправо

$$= P\left(\eta + \zeta \leq x_1 t_1, \eta + \zeta \leq x_2 t_2, \ldots, \eta + \zeta \leq x_n t_n\right) =$$

Независимые случайные величины η и ζ имеют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

Их сумма имеет стандартное нормальное распределение. Пусть

$$\eta + \zeta = X \sim N\left(0, 1\right).$$

Тогда

$$= P\left(X \leq x_1 t_1, X \leq x_2 t_2, \ldots, X \leq x_n t_n\right) = P\left(X \leq \min_{i=\overline{1,n}} x_i t_i\right) =$$

Запишем через плотность

$$= \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где обозначено

$$z = \min_{i=\overline{1,n}} x_i t_i.$$

2.17

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi\left(\tau\right)$, где $\left\{\xi\left(t\right),\ , t \geq 0\right\}$ — процесс из предыдущей задачи, а τ — независимая от ξ случайная величина, которая принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями $1/2$.

Решение.

$$\xi\left(t\right) = \frac{\eta + \zeta}{t}.$$

Задана случайная величина

$$\tau = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Интересует

$$\varphi_{\xi(\tau)}\left(\lambda\right) = Me^{i\xi(\tau)\lambda} = Me^{i \cdot \frac{\eta+\zeta}{\tau} \cdot \lambda} =$$

Как и в предыдущей задаче $\eta + \zeta = X \sim N\left(0, 1\right)$. Получаем

$$= Me^{i \cdot \frac{X}{\tau} \cdot \lambda} = Me^{-\frac{\lambda^2}{2\tau^2}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Занятие 5. Винеровский процесс

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение винеровского процесса.

$\{w(t), t \geq 0\}$ обладает рядом свойств:

1. $w(0) = 0$;

2. однородные приращения. Рассмотрим приращение винеровского процесса на t. Тогда $w(s+t) - w(s) \stackrel{def}{=} w(t) \sim N(0,t)$;

3. независимые приращения. Выберем $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Тогда $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ — независимые в совокупности случайные величины.

Запишите плотность винеровского процесса.

Напишем плотность распределения вектора $(w(t_1), \ldots, w(t_n)) = \vec{\xi}$. Будем использовать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом $\vec{\xi}$ имеет плотность

$$q\left(A^{-1}\vec{u}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t_{j+1} - t_j\right)}} \cdot e^{-\frac{u_{j+1} - u_j}{2t_{j+1} - t_j}}.$$

В этой плотности считаем, что $t_0 = 0$, $u_0 = 0$.

Запишите ковариационную функцию винеровского процесса.

$K(t,s) = \min(s,t)$.

Аудиторные задачи

5.2

Задание. Пусть $\{W(t), t \ge 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что $M(W(t) - W(s))^{2n+1} = 0$, $M(W(t) - W(s))^{2n} = (2n-1)!!\,(t-s)^n$.

Решение. $\xi = W(t) - W(s) \overset{def}{=} W(t-s)$. Значит, $\xi \sim N(0, t-s)$, где $t - s = \sigma^2$. Знаем, что $M\xi^{2n+1} = 0$, $M\xi^{2n} = (2n+1)!!\sigma^{2n}$.