Оглавление

Занятие 1. Основные понятия теории вероятностей

Аудиторные задачи

1.1

Задание. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 3e^{-Cx}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

где $C > 0$ — неизвестный параметр. Найдите:

a) неизвестный параметр C;

b) условную вероятность $P(\xi > t \mid \xi > s)$, $t > s$,

c) функцию распределения случайной величины ξ;

d) плотность распределения случайной величины $\eta = e^\xi$.

Решение.

a) Находим неизвестный параметр C, который входит в плотность, из условия нормировки.

Плотность определена, когда $x > 0$.

Условие нормировки выполняется для всякой плотности

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} 3e^{-Cx}dx = -\frac{3}{C} \cdot e^{-Cx}\Big|_0^{+\infty} = \frac{3}{C}.$$

Отсюда следует, что $C = 3$;

b) по определению условной вероятности

$$P(\xi > t \mid \xi > s) = \frac{P(\xi > t, \xi > s)}{P(\xi > s)} =$$

По условию $t > s$, поэтому в числителе одно из уловий лишнее

$$= \frac{P(\xi > t)}{P(\xi > s)} = \frac{\int\limits_t^{+\infty} 3xe^{-3x} \cdot \mathbb{1}\{x > 0\}\, dx}{\int\limits_s^{+\infty} 3xe^{-3x} \cdot \mathbb{1}\{x > 0\}} =$$

Пусть $t, s > 0$. Тогда

$$= \frac{\int\limits_t^{+\infty} xe^{-3x} dx}{\int\limits_s^{+\infty} xe^{-3x} dx}.$$

Возьмём интеграл по частям. Пусть

$$u = x,\ dv = e^{-3x}dx,\ v = \int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x},\ du = dx.$$

Тогда

$$\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3} \cdot xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3} \cdot xe^{-3x} - \frac{1}{9} \cdot e^{-3x}.$$

Подставим полученное выражение в дробь

$$= \left(-\frac{1}{3} \cdot xe^{-3x}\Big|_t^{+\infty} - \frac{1}{9} \cdot e^{-3x}\Big|_t^{+\infty} \right) \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3} \cdot xe^{-3x}\big|_s^{+\infty} - \frac{1}{9} \cdot e^{-3x}\big|_s^{+\infty}} =$$

Подставим пределы интегрирования

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot te^{-3t} + \frac{1}{9} \cdot e^{-3t}}{\frac{1}{3} \cdot se^{-3s} + \frac{1}{9} \cdot e^{-3s}} = \frac{e^{-3t}(3t+1)}{e^{-3s}(3s+1)} = e^{3(s-t)} \cdot \frac{3t+1}{3s+1};$$

c) найдём функцию распределения

$$F_\xi(t) = P(\xi \le t) = \int\limits_0^t 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}\big|_0^t = -e^{-3t} + 1 = 1 - e^{-3t},\ t > 0.$$

Учтём все случаи для параметра

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 1 - e^{-3t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0; \end{cases}$$

d) найдём функцию распределения случайной величины $\eta = e^{\xi}$ по определению

$$F_{\eta}(x) = P(\eta \leq x) = P\left(e^{\xi} \leq x\right) = P(\xi \leq ln\, x) = F_{\xi}(ln\, x) =$$

Из предыдущего пункта

$$= \begin{cases} 1 - e^{-3ln\, x}, & ln\, x > 0, \\ 0, & ln\, x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x^{-3}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

Продифференцируем функцию распределения

$$p_{\eta}(x) = \frac{dF_{\eta}(x)}{dx} = \begin{cases} 3x^{-4}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

Занятие 2. Характеристики случайного процесса

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(t)\,,\, t \in T$ — это параметризированная совокупность случайных величин.

Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?

$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n};\, t_1,\ldots,t_n \in T,\, n \geq 1\}$ — набор конечномерных распределений процесса ξ, где $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ — распределение вектора $(\xi(t_1)\,,\ldots,\xi(t_n))$ в $\mathbb{R}^n$, то есть для борелевского $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\,,\, \mu_{t_1,\ldots,t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1)\,,\ldots,\xi(t_n)) \in \Delta\}$.

Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.

$m(t) = M\xi(t)\,,\, t \in T$ — функция среднего.
$D\xi(t)\,,\, t \in T$ — функция дисперсии.
$K(t,s) = M[\xi(t) - m(t)]\cdot[\xi(s) - m(s)]\,,\, t,s \in T$ — функция ковариации.

Аудиторные задачи

2.2

Задание. Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t},\, t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами a, σ^2. Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса $\xi = \{\xi(t)\,,\, t > 0\}$.

Решение. Сейчас $T = (0,\infty)$.

Случайная величина X имеет распределение $N\left(a,\sigma^2\right)$. Нужно найти $M\xi\left(t\right) = m\left(t\right)$, $D\xi\left(t\right)$, ковариационную функцию $K\left(t,s\right)$ и одномерную плотность распределения $p_\xi\left(t\right)$.

Найчнём с математического ожидания

$$m\left(t\right)=M\left(X\cdot e^{-t}\right)=e^{-t}MX=e^{-t}\cdot a.$$

Далее — функция дисперсии $D\xi\left(t\right)=D\left(X\cdot e^{-t}\right)=e^{-2t}\cdot DX$. Дисперсия X — известная: $e^{-2t}\cdot DX=e^{-2t}\cdot\sigma^2$.

Далее — ковариационная функция

$$K\left(t,s\right)=M\left[\xi\left(t\right)-m\left(t\right)\right]\cdot\left[\xi\left(s\right)-m\left(s\right)\right]=cov\left[\xi\left(t\right),\xi\left(s\right)\right].$$

Вместо $\xi\left(t\right),\ \xi\left(s\right)$ подставляем их значения

$$cov\left[\xi\left(t\right),\xi\left(s\right)\right]=cov\left(Xe^{-t},Xe^{-s}\right).$$

Множители выносятся

$$cov\left(Xe^{-t},Xe^{-s}\right)=e^{-t-s}cov\left(X,X\right)=e^{-t-s}DX=e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность $\xi\left(t\right)\sim N\left(e^{-t}a,\ e^{-2t}\sigma^2\right)$.

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{\left(x-e^{-t}a\right)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины X.

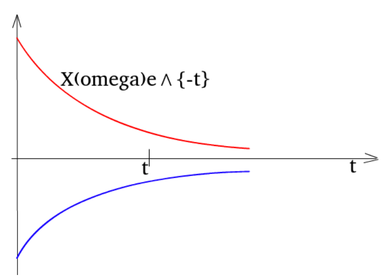

Рис. 1: Траектория процесса

2.3

Задание. Пусть

$$\xi\left(t\right)=e^{-Xt},\ t>0,$$

где X — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром λ. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t > 0\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = e^{-Xt}$, где $X \sim Exp(\lambda), t > 0$.

Нужно найти $m(t), K(t,s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t. По определению

$$m(t) = Me^{-Xt} = \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше X, тем быстрее эта функция убывает.

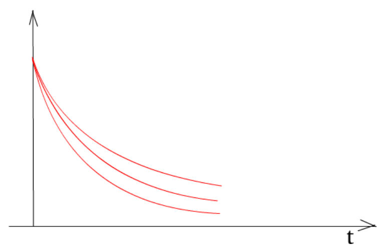

Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) = Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda+t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

Подставим найденное значение фунцкии математического ожидания

$$Me^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda+t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s} = \frac{\lambda}{\lambda+t+s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda+t)(\lambda+s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \ldots, \xi(t_n) \leq x_n\}$. Вместо ξ напишем формулу $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \ldots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P\left(e^{-Xt_1} \leq x_1, \ldots, e^{-Xt_n} \leq x_n\right)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X. Все неравенства решаем относительно X

$$P\left(e^{-Xt_1} \leq x_1, \ldots, e^{-Xt_n} \leq x_n\right) = P\left\{X \geq -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, X \geq -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \geq -\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, X \geq -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \geq \max\left(-\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right)\right\}.$$

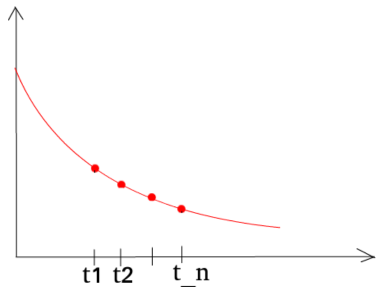

Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой m

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{ln\, x_1}{t_1}, \ldots, -\frac{ln\, x_n}{t_n}\right)\right\} = \int\limits_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-\left. e^{-\lambda X}\right|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(ln\, x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, ln\, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(ln\, x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, ln\, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \ldots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \ldots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда $0 < x_1, \ldots, x_n < 1$.

Плотности у такого векора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ быть не может, потому что $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$. Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$, $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$.

С вероятностью 1 $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$ — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

2.4

Задание. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A\cos(\varphi + \lambda t),$$

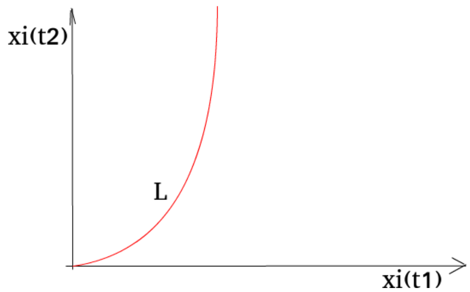

Рис. 4: $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где A и φ являются независимыми случайными величинами такими, что $MA^2 < \infty$, а φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

Решение. $\varphi \sim U([0, 2\pi])$.

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.

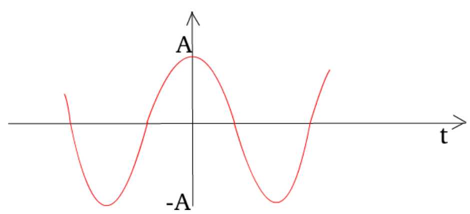

Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A\cos(\varphi + \lambda t)]$. Случайные величины A и φ — независимые. $M[A\cos(\varphi + \lambda t)] = MAM\cos(\varphi + \lambda t)$. Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у φ известна плотность

$$MAM\cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$ Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M\left[A^2\cos(\varphi + \lambda t)\cos(\varphi + \lambda s)\right] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t)(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos\left[2\varphi + \lambda\left(t+s\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right] \right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos\left[\lambda\left(t-s\right)\right].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

2.5

Задание. Пусть τ — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, и пусть $\{X(t), t \in [0,1]\}$ — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}, \, t \in [0,1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), t \in [0,1]\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. τ — случайная величина с распределением $U([0,1])$.

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное τ выпало.

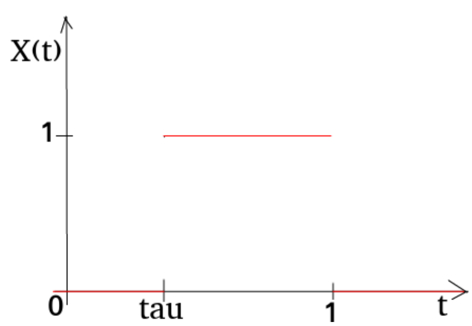

Рис. 6: Траектория процесса

$$m(t) = MX(t) = M\mathbb{1}\{t \geq \tau\} = P(t \geq \tau) = F_\tau(t) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция $K(t,s) = M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s)$. Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s) = P\{\tau \leq \min(t,s)\} - ts = \min(t,s) - t \cdot s.$$

Конечномерные распределения — распределение вектора $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$. Каждый X — это 0 или 1.

$$P\{(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = (0, \ldots, 0)\} = P\{\tau \in (t_n, 1]\} = 1 - t_n.$$

Точки t_n изображены на рисунке 7.

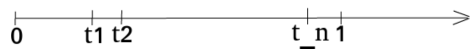

Рис. 7: Временная ось

У вектора получается $(n+1)$-но значение

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \ldots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \ldots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \ldots, \\ (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \ldots, \\ (1, \ldots, 1), & t_1. \end{cases}$$

2.6

Задание. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения F, и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le t\}, \, t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), \, t \in \mathbb{R}\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

$$X(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le t\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$cov(X(t), X(s)) = cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le t\}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\xi_i \le s\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} cov(\mathbb{1}\{\xi_i \le t, \, \mathbb{1}\{\xi_j \le s\}\}) =$$

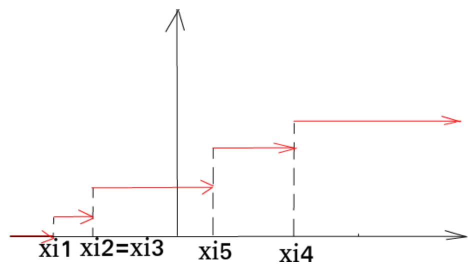

Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1} \left\{ \xi_i \le t \right\}, \mathbb{1} \left\{ \xi_i \le s \right\} \right).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$cov \left(\mathbb{1} \left\{ \xi_i \le t \right\}, \mathbb{1} \left\{ \xi_i \le s \right\} \right) = M \mathbb{1} \left\{ \xi_i \le t \wedge s \right\} - F(t) F(s) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F(t \wedge s) - F(t) F(s),$$

где $\wedge$ означает минимум.

Все слагаемые в сумме раны этому выражению

$$K(t, s) = \frac{1}{n} \left[F(t \wedge s) - F(t) F(s) \right].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем $t_1, t_2, \ldots, t_m$ (рис. 9).

$$X(t) \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 \right\}.$$

По t, X увеличивается. Эта функция монотонна.

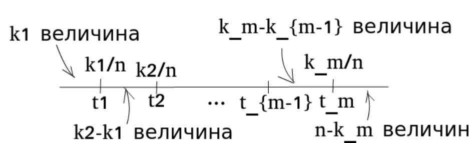

Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_m \le n.$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P\left\{X\left(t_1\right)=\frac{k_1}{n},\,X\left(t_2\right)=\frac{k_2}{n},\ldots,X\left(t_m\right)=\frac{k_m}{n}\right\}=$$

P(для k_1 наблюдений $\xi \le t_1$, для k_2-k_1 наблюдений $t_1<\xi\le t_2,\ldots,$ для $n-k_m$ наблюдений $\xi>t_m$) Имеем мультиномиальное распределение

$$=\frac{n!}{k_1!\left(k_2-k_1\right)!\ldots\left(n-k_m\right)!}\cdot F\left(t_1\right)^{k_1}\cdot\left[F\left(t_2\right)-F\left(t_1\right)\right]^{k_2-k_1}\cdot\ldots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить n величин на группы.

2.7

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $X\left(\eta\right)$, где $\left\{X\left(t\right),\,t\in[0,1]\right\}$ — процесс из задачи 2.5, а η — независимая от X случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно.

Решение. $X\left(t\right)=\mathbb{1}\left\{t\ge\tau\right\}$.

Задана случайная величина

$$\eta=\begin{cases}0, & \frac{1}{3},\\ 1, & \frac{2}{3}.\end{cases}$$

Интересуемся $\varphi_{X(\eta)}$. Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.

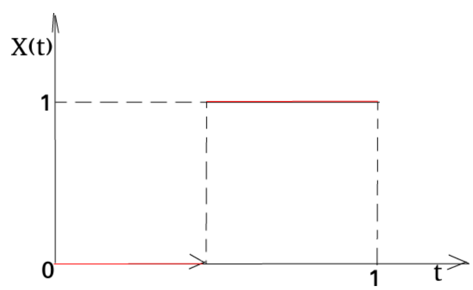

Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1: $X\left(0\right)=0$, $X\left(1\right)=1$, значит, $X\left(\eta\right)=\eta$.

$$\varphi_{X(\eta)}\left(\lambda\right)=\varphi_{\eta}\left(\lambda\right)=Me^{i\lambda\eta}=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

2.8

Задание. Значение случайного телеграфного сигнала $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ в произвольный момент времени с одинаковыми вероятностями равно 0 или 1. Прыжки происходят случайным и независимым образом. Вероятность $P(k, T)$ того, что в интервале времени длины T произойдёт k прыжков, задаётся распределением Пуассона, то есть:

$$P(k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T},$$

где λ — среднее количество прыжков за единицу времени. Найдите математическое ожидание и ковариационнуб функцию случайного процесса ξ.

Решение.

$$P\{\xi(t) = 1\} = P\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{2}.$$

Одномерные распределения даны. Это распределение Бернулли.

$P(k, T)$ — это вероятность того, что на отрезке времени длины T было k прыжков (распределение Пуассона), то есть траектория процесса выглядит как на рисунке 11.

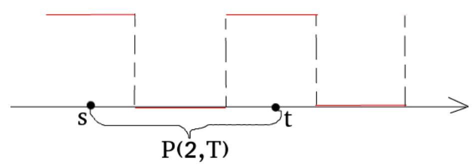

Рис. 11: Траектория случайного процесса

В каждой точке будет 0 или 1.

Математическое ожидание тут ищется просто

$$M\xi(t) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Теперь нужно ещё найти ковариационную функцию такого процесса

$$K(s, t) = M[(\xi(t) - M\xi(t)) \cdot (\xi(s) - M\xi(s))] = M\xi(s)\xi(t) - \frac{1}{4}.$$

Нужно математическое ожидание совместного процесса. $\xi(s)$ и $\xi(t)$ зависимы.

Попробуем найти математическое ожидание произведения. $\xi(t)\xi(s)$ принимают значения 0 и 1. Произведение принимает значения 0 и 1. Получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = 0 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 0\} + 1 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 1\} =$$

Слагаемое с нулём пропадает

$$= P\{\xi(s) = 1, \xi(t) = 1\}.$$

Значения в точках совпадаю, если между ними произошло чётное количество скачков $M\xi\left(t\right)\xi\left(s\right)=P\left\{\xi\left(s\right)=1\right\}P$ (на отрезке $[s,t]$ будет чётное количество прыжков) $=\frac{1}{2}\cdot P($на отрезке $[s,t]$ будет чётное число прыжков). Мы знаем, с какой вероятностью происходит число прыжков.

Подходят любые чётные прыжки, то есть это вероятность объединения. Число скачков обозначим буковокой N. Тогда $P($на $[s,t]$ чётное число скачков$)=P(N_{[s,t]}$ чётное$)=$

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\left(2k=N_{[s,t]}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}P\left(2k,t-s\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda\left(t-s\right)\right]^{2k}}{(2k)!}\cdot e^{-\lambda(t-s)}=$$

Экспонента выносится за сумму. Остаётся сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Для того, чтобы это было экспонента, нужны ещё и нечётные степени

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=e^{x}.$$

Если мы вычтем вторую сумму, то получится

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-x\right)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-x\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}=e^{-x}.$$

Теперь нужно сложить эти два выражения и поделить на 2, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\ x=\lambda\left(t-s\right).$$

Получили гиперболический косинус.

$$=\frac{e^{\lambda(t-s)}+e^{-\lambda(t-s)}}{2}\cdot e^{-\lambda(t-s)}=$$

Умножим один сомножитель на другой, $e^{\lambda(t-s)}\cdot e^{-\lambda(t-s)}$ дают единицу. Получаем

$$=\frac{1+e^{-2\lambda(t-s)}}{2}.$$

Это вероятность чётного числа скачков.

Выпишем, чему равна ковариационная функция. Математическое ожидание произведения нужно умножить на $\frac{1}{2}$ и отнять $\frac{1}{4}$. Получится

$$K\left(t,s\right)=\frac{1+e^{-2\lambda(t-s)}}{4}-\frac{1}{4}=\frac{e^{-2\lambda(t-s)}}{4},\ s<t.$$

Окончательный ответ:

$$K\left(t,s\right)=\frac{1}{4}\cdot e^{-2\lambda|t-s|}.$$

2.9

Задание. Пусть η_1 и η_2 — независимые случайные величины, которые имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найдите значения a, при которых почти все реализации случайной функции $t\left(\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right)\right)$ монотонно возрастают по t.

Решение. $\xi\left(t\right) = t\left(\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right)\right)$ — процесс, который задан при $t > 0$. Известно, что траектория этого процесса монотонно возрастает по t с вероятностью 1. Нужно найти $a = const$.

Реализация такого процесса выглядит как прямая линия (рис. 12), при этом $\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right) > 0$. Это случайная величина, так что коффициент наклона должен быть положительным

$$P\left\{\xi\left(t\right) \nearrow\right\} = P\left\{\eta_1 + a\left(\eta_2 + 2a\right) > 0\right\} = 1 =$$

Число a должно быть таким, чтобы вероятность была единицей.

Рисуем траекторию процесса, считая, что все случайные величины неслучайны. Нужно, чтобы все реализации (прямые) возрастали.

Про η_1 и η_2 мы всё знаем. Это независимые случайные величины. Получаем двукратный интеграл

$$= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathbb{1}\left\{x + a\left(y + 2a\right) > 0\right\}dxdy,$$

где первые два множителя — плотности.

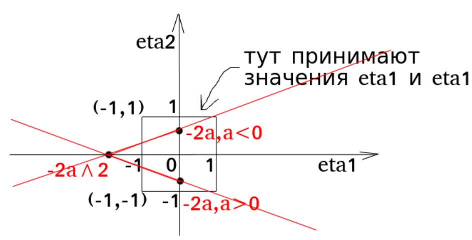

Рис. 12: Траектория случайного процесса

1. При $a = 0\,\eta_1 > 0$ — правая часть квадратика. Тогда событие выполняется с вероятностью
$$\frac{1}{2} \neq 1,$$
то есть $a \neq 0$.

2. Следующий случай: пусть $a > 0$. Получается, что условие переписывается в виде
$$\eta_2 + 2a \geq -\frac{\eta_1}{a},$$

откуда
$$\eta_2 \geq -\frac{\eta_1}{a} - 2a,$$
то есть на картинке это будет прямая. Мы возьмём всё, что над этой прямой
$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$
Наша вероятность — это площадь квадрата над прямой. Вероятность не будет равна 1. a должно быть таким, чтобы прямая прошла через точку $(-1, -1)$, то есть $-1 + a\,(2a - 1) \geq 0$. Теперь можно найти a из неравенства $2a^2 - a - 1 \geq 0$. Сейчас скажем, при каких a это выполнено. Нужно найти корни уравнения. $D = 1 + 8 = 9 = 3^2$, значит
$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = 1,$$
то есть то, что нужно выбрать изображено на рисунке 13.

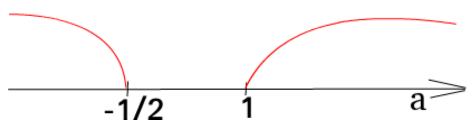

Рис. 13: Решение неравенства

Задавали $a > 0$, то есть при $a \geq 1$ вероятность такого события — единица.

3. Теперь нужно задать $a < 0$. Отличие будет в том, как пройдёт прямая. Когда поделим на a, знак поменяется.
$$-\frac{\eta_1}{a} - 2a \geq \eta_2,$$
то есть нужно нарисовать прямую
$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$
Прямая пройдёт через такие же точки: $\left(-2a, -2a^2\right)$, только если a — отрицательное, то $-2a$ — положительное. Нужно будет выбрать всё, что ниже этой прямой.

Нужно, чтобы прямая прошла над точкой $(-1, 1)$. Имеем неравенство $-1 + a\,(1 + 2a) \geq 0$, откуда
$$a^1 + \frac{1}{2} \cdot a - 1 \geq 0.$$
Решая соответствующее уравнение находим, что
$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 1.$$
Получаем всё, что за корнями (рис. 14).

При $a < 0$ получаем ответ: $a \leq -1$.

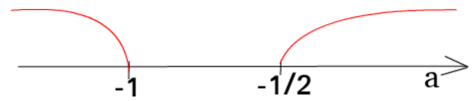

Рис. 14: Решение неравенства

Ответ к задаче: $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, то есть $|a| > 1$. Тогда все реализации процесса будут возрастать.

2.10

Задание. Пусть случайная величина $\tau \in (0, 1)$ имеет непрерывное распределение и пусть

$$\xi(t) \equiv 0;\ \eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Изобразите тракториии этих процессов. Докажите, что эти процессы являются стохастически эквивалентными, то есть $\forall t \in [0, 1]\ :\ P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = 0$.

Решение. τ — это случайная величина с непрерывным распределением — та, у которой функция распределения F_τ — непрерывна.

Скачок фукнции распределения в точке x — это $\Delta F_\tau(x) = P(\tau = x) = 0$, где

$$F_\tau(x) = P(\tau \leq x),$$

а $F_\tau(-x) = P(\tau < x)$. В нашем случае нет скачков, то есть в фиксированный x случайная величина τ не попадёт. Рассматривается 2 процесса: один процесс — это $\xi(t) \equiv 0$, второй процесс — это

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau. \end{cases}$$

Посмотрим, какие траектории у этих процессов (рис. 15). Процессы заданы на

$$t \in [0, 1].$$

Стохастически эквивалентные означает, что если зафиксировать момент времени t, то в этот момент $P\{\xi(t) = \eta(t)\} = P\{\eta(t) = 0\} = P(\tau \neq t) = 1$. С точки зрения анализа это разные функции. У η всегда есть скачок, у ξ никогда скачков нет. Помним, что $\xi(t) \equiv 0$. Тем не менее, вероятность $P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = P\{\eta(t) \neq 0\} = P(\tau = t) = 0$, а это значит, что в фиксированной точке процессы с вероятностью 1 совпадают. Если зафиксируем несколько точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$, то вероятность

$$P\{(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)) = (\eta(t_1), \ldots, \eta(t_n))\} = 1.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения

$$\mu^{\xi}_{t_1,\ldots,t_n} = \mu^{\eta}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Конечномерные распределения не определяют траектории процесса.

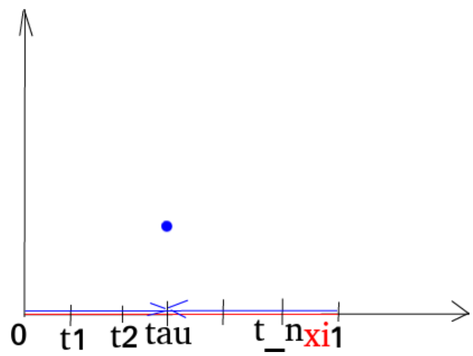

Рис. 15: Траектория случайных процессов

Домашнее задание

2.12

Задание. Пусть
$$\xi(t) = Xt + a,\ t \in \mathbb{R},$$
где X — равномерно распределённая на отрезке (a, b) случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = Xt + a$, $t \in \mathbb{R}$, где $X \sim U(a, b)$.

Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изоражены на рисунке 16: чем больше X, тем больше угол наклона прямой к оси $0t$.

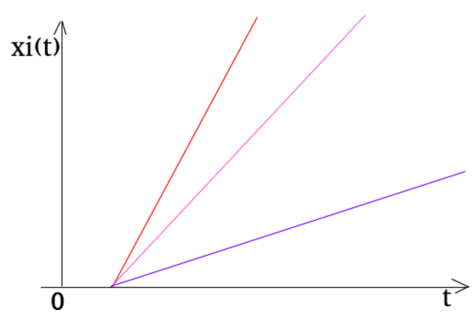

Рис. 16: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt + a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t,s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и вычисляем математическое ожидание

$$= M[(Xt+a)(Xs+a)] - M(Xt+a)M(Xs+a) =$$

$$= M\left[X^2ts + Xa(t+s) + a^2\right] - \left(t \cdot \frac{a+b}{2} + a\right)\left(s \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) =$$

$$= ts \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3} + a(t+s) \cdot \frac{a+b}{2} + a^2 - ts \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - ta \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 -$$

$$-as \cdot \frac{a+b}{2} =$$

$$= ts\left(\frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) + (t+s)a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot a(t+s) =$$

$$= ts \cdot \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = ts \cdot \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = ts \cdot \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ — рис. 17.

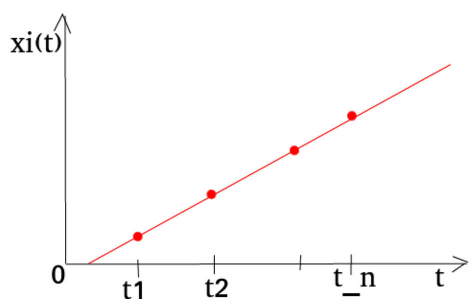

Рис. 17: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\}$. Вместо ξ напишем формулу $P\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\} = P(Xt_1 + a \le x_1, \ldots, Xt_n + a \le x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X. Все неравенства решаем относительно X

$$P(Xt_1 + a \le x_1, \ldots, Xt_n + a \le x_n) = P(Xt_1 \le x_1 - a, \ldots, Xt_n \le x_n - a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X \le \frac{x_1 - a}{t_1}, \ldots, X \le \frac{x_n - a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P\left\{X \le \min\left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \ldots, \frac{x_n - a}{t_n}\right)\right\} =$$

Обозначим минимум буквой m для удобства

$$= P\left(X \le m\right) = \int\limits_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left\{X \in (a,b)\right\} dX = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\min\left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \ldots, \frac{x_n - a}{t_n}\right) - a\right]$$

при $m \in (a,b)$, иначе — ноль.

2.13

Задание. Пусть

$$\xi\left(t\right) = U\cos\theta t + V\sin\theta t,\ t \in T,$$

где U, V — независимые случайные величины с заданными характеристиками: $MU = MV = 0$, $DU = DV = \sigma^2$, θ — неслучайная величина. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса $\left\{\xi\left(t\right), t \in T\right\}$.

Решение. Нужно найти $m\left(t\right), D\xi\left(t\right), K\left(t,s\right)$.

Найдём математическое ожидание в момент t. По свойствам

$$m\left(t\right) = M\xi\left(t\right) = M\left(U\cos\theta t + V\sin\theta t\right) = \cos\theta t \cdot MU + \sin\theta t \cdot MV = 0.$$

Можно сделать преобразование $U\cos\theta t + V\sin\theta t = C\sin\left(\theta t + \omega\right)$, где $C = \sqrt{U^2 + V^2}$. Траектории такого процесса изображены на рисунке 18: график синуса сжимается к оси ординат, когда модули случайных величин U и V растут.

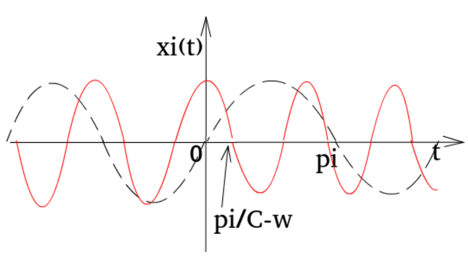

Рис. 18: Траектория процесса

Найдём дисперсию в момент t. По свойствам

$$D\xi\left(t\right) = D\left(U\cos\theta t + V\sin\theta t\right) = \cos^2\theta t \cdot DU + \sin^2\theta t \cdot DV =$$

Подставим известные значения дисперсии

$$= \cos^2\theta t \cdot \sigma^2 + \sin^2\theta t \cdot \sigma^2 = \sigma^2\left(\cos^2\theta t + \sin^2\theta t\right) = \sigma^2.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K\left(t,s\right) = M\xi\left(t\right)\xi\left(s\right) - M\xi\left(t\right)M\xi\left(s\right) =$$

Подставим выражения для случайного процесса в первое слагаемое, а второе равно нулю

$$= M\left[\left(U\cos\theta t + V\sin\theta t\right)\cdot\left(U\cos\theta s + V\sin\theta s\right)\right] =$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} &= M(U^2\cos\theta t\cdot\cos\theta s + UV\cos\theta t\cdot\sin\theta s + VU\sin\theta t\cdot\cos\theta s +\\ &\qquad + V^2\sin\theta t\cdot\sin\theta s) =\\ &= DU\cdot\cos\theta t\cdot\cos\theta s + MU\cdot MV\cdot\cos\theta t\cdot\sin\theta s + MV\cdot MU\cdot\sin\theta t\cdot\cos\theta s +\\ &\qquad + DV\cdot\sin\theta t\cdot\sin\theta s = \sigma^2\cos\theta t\cdot\cos\theta s + \sigma^2\sin\theta t\cdot\sin\theta s =\\ &= \sigma^2\cdot\left(\cos\theta t\cdot\cos\theta s + \sin\theta t\cdot\sin\theta s\right) = \sigma^2\cos\left(\theta t - \theta s\right) = \sigma^2\cos\left[\theta\left(t-s\right)\right].\end{aligned}$$

2.14

Задание. Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса

$$\xi\left(t\right) = 2u\sin\nu t + 3vt^2 + 5,\ t\in T,$$

где ν — известный неслучайный параметр, а u, v — случайные величины с известными характеристиками:

$$Mu = 1,\ Mv = 2,\ Du = 0.1,\ Dv = 0.9,\ cov\left(u,v\right) = -0.3.$$

Решение. Нужно найти $m\left(t\right),\ D\xi\left(t\right),\ K\left(t,s\right)$.

Найдём математическое ожидание в момент t. По свойствам

$$m\left(t\right) = M\left(2u\sin\nu t + 3vt^2 + 5\right) = 2\sin\nu t\cdot Mu + 3t^2 Mv + 5 = 2\sin\nu t + 6t^2 + 5.$$

Траектория такого процесса изображена на рисунке 19 при $\nu = 1,\ u = 1,\ v = 2$.

Ковариационная функция считается по определению

$$K\left(t,s\right) = M\xi\left(t\right)\xi\left(s\right) - M\xi\left(t\right)\cdot M\xi\left(s\right) =$$

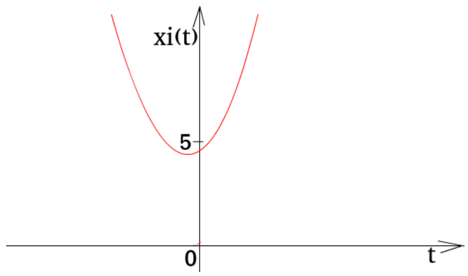

Рис. 19: Траектория процесса

Подставим выражения для случайного процесса и его математические ожидания

$$= M\left[\left(2u\sin\nu t + 3vt^2 + 5\right)\left(2u\sin\nu s + 3vs^2 + 5\right)\right] -$$
$$-\left(2\sin\nu t + 6t^2 + 5\right)\left(2\sin\nu s + 6s^2 + 5\right) =$$
$$= M(4u^2\sin\nu t\cdot\sin\nu s + 6uv\sin\nu t\cdot s^2 + 10u\sin\nu t + 6vt^2u\sin\nu s + 9v^2t^2s^2 +$$
$$+15vt^2 + 10u\sin\nu s + 15vs^2 + 25) - 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s - 12\sin\nu t\cdot s^2 - 10\sin\nu t -$$
$$-12t^2\sin\nu s - 36t^2s^2 - 30t^2 - 10\sin\nu s - 30s^2 - 25 =$$
$$= 4\sin\nu t\cdot Mu^2 + 6t^2\sin\nu s\cdot M\left(uv\right) + 10\sin\nu t\cdot Mu + 6t^2\sin\nu s\cdot M\left(uv\right) +$$
$$+9t^2s^2Mv^2 + 15t^2Mv + 10\sin\nu s\cdot Mu + 15s^2\cdot Mv + 25 - 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s -$$
$$-12\sin\nu t\cdot s^2 - 10\sin\nu t - 12t^2\sin\nu s - 36t^2s^2 - 30t^2 - 10\sin\nu s - 30s^2 - 25 =$$

Вычислим вторые моменты

$$Mu^2 = Du + \left(Mu\right)^2 = 0.1 + 1 = 1.1,\ Mv^2 = Dv + \left(Mv\right)^2 = 0.9 + 4 = 4.9.$$

По определению ковариации $cov\left(u,v\right) = M\left(uv\right) - Mu\cdot Mv$, откуда

$$M\left(uv\right) = cov\left(u,v\right) + Mu\cdot Mv = -0.3 + 1\cdot 2 = 2 - 0.3 = 1.7.$$

Подставим полученные значения в функцию ковариации

$$= 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s\cdot 1.1 + 6\sin\nu t\cdot s^2\cdot 1.7 + 10\sin\nu t + 6t^2\sin\nu s\cdot 1.7 +$$
$$+9t^2s^2\cdot 4.9 + 15t^2\cdot 2 + 10\sin\nu s + 15s^2\cdot 2 - 4\sin\nu t\cdot\sin\nu s - 12\sin\nu t\cdot s^2 -$$
$$-10\sin\nu t - 12t^2\cdot\sin\nu s - 36t^2s^2 - 30t^2 - 10\sin\nu s - 30s^2 =$$
$$= 0.4\sin\nu t\cdot\sin\nu s - 1.8\sin\nu t\cdot s^2 - 1.8t^2\sin\nu s + 8.1t^2s^2.$$

Найдём дисперсию в момент t. Из формулы для ковариации

$$D\xi\left(t\right) = K\left(t,t\right) = 0.4\sin^2\nu t - 3.6\sin\nu t\cdot t^2 + 8.1t^4.$$

2.15

Задание. Найдите ковариационную функцию процесса

$$Y(t) = \psi_1(t) X_1 + \ldots + \psi_n(t) X_n,$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — произвольные числовые функции от t, а $X_1, \ldots, X_n$ — некоррелируемые случайные величины с дисперсиями $D_1, \ldots, D_n$.

Решение. Нужно найти

$$K(t,s) = cov\left(\psi_1(t) X_1 + \ldots + \psi_n(t) X_n, \psi_1(s) X_1 + \ldots + \psi_n(s) X_n\right) =$$

Распишем по определению

$$\begin{aligned}
= M\left[\left(\psi_1(t) X_1 + \ldots + \psi_n(t) X_n\right)\left(\psi_1(s) X_1 + \ldots + \psi_n(s) X_n\right)\right] - \\
-M\left(\psi_1(t) X_1 + \ldots + \psi_n(t) X_n\right) \cdot M\left(\psi_1(s) X_1 + \ldots + \psi_n(s) X_n\right) = \\
= \sum_{i,j=1}^{n} \psi_i(t) \psi_j(s) M\left(X_i X_j\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \psi_i(t) \psi_j(s) M X_i \cdot M X_j = \\
= \psi_1(t) \psi_1(s) D X_1 + \ldots + \psi_n(t) \psi_n(s) D X_n = \\
= \psi_1(t) \psi_1(s) D_1 + \ldots + \psi_n(t) \psi_n(s) D_n.
\end{aligned}$$

2.16

Задание. Пусть η и ζ — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $1/2$. Найдите конечномерные распределения случайного процесса

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}, \; t > 0.$$

Решение. Для произвольных натуральных $n \geq 1$, произвольных моментов времени $t_1, \ldots, t_n \in T$ и произвольных действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ находим

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\left\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \ldots, \xi(t_n) \leq x_n\right\} =$$

Подставляем выражения для случайного процесса

$$= P\left(\frac{\eta + \zeta}{t_1} \leq x_1, \frac{\eta + \zeta}{t_2} \leq x_2, \ldots, \frac{\eta + \zeta}{t_n} \leq x_n\right) =$$

Переносим моменты времени вправо

$$= P\left(\eta + \zeta \leq x_1 t_1, \eta + \zeta \leq x_2 t_2, \ldots, \eta + \zeta \leq x_n t_n\right) =$$

Независимые случайные величины η и ζ имеют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

Их сумма имеет стандартное нормальное распределение. Пусть

$$\eta + \zeta = X \sim N(0,1).$$

Тогда

$$= P(X \le x_1 t_1, X \le x_2 t_2, \dots, X \le x_n t_n) = P\left(X \le \min_{i=\overline{1,n}} x_i t_i\right) =$$

Запишем через плотность

$$= \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где обозначено

$$z = \min_{i=\overline{1,n}} x_i t_i.$$

2.17

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi(\tau)$, где $\{\xi(t), \ , t \ge 0\}$ — процесс из предыдущей задачи, а τ — независимая от ξ случайная величина, которая принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями $1/2$.

Решение.

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}.$$

Задана случайная величина

$$\tau = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Интересует

$$\varphi_{\xi(\tau)}(\lambda) = M e^{i\xi(\tau)\lambda} = M e^{i \cdot \frac{\eta+\zeta}{\tau} \cdot \lambda} =$$

Как и в предыдущей задаче $\eta + \zeta = X \sim N(0,1)$. Получаем

$$= M e^{i \cdot \frac{X}{\tau} \cdot \lambda} = M e^{-\frac{\lambda^2}{2\tau^2}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

2.18

Задание. Пусть ξ и η — случайные величины, причём η имеет симметричное относительно нуля распределение и $P(\eta = 0) = 0$. Найдите вероятность того, что реализации случайного процесса $\zeta(t) = \xi + t(\eta + t), t \ge 0$ возрастают.

Решение. Известно, что траектории процесса возрастают по t при $t \ge 0$.

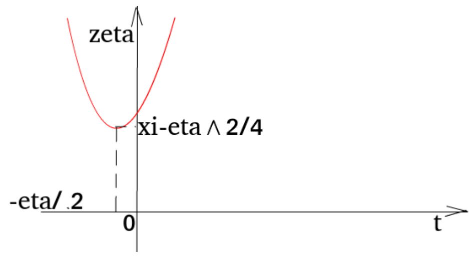

Рис. 20: Траектория процесса

Реализация такого процесса выглядит как парабола (рис. 20) с вершиной в точке с координатами

$$t_0 = -\frac{\eta}{2},\, \zeta_0 = t_0^2 + \eta t_0 + \xi = \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^2}{2} + \xi = \xi - \frac{\eta^2}{4}$$

Это случайная величина, так что

$$P\left\{\zeta\left(t\right) \geq 0,\, t \geq 0\right\} = P\left\{\xi + t\left(\eta + t\right) \geq 0,\, t \geq 0\right\} =$$

$= P($вершина параболы $\zeta = t^2 + \eta t + \xi$ лежит слева от нуля$)=$

$$= P\left(-\frac{\eta}{2} \leq 0\right) = P\left(\eta \geq 0\right) =$$

Случайная величина η имеет симметричное распределение

$$= \frac{1}{2}.$$

2.19

Задание. Случайный эксперимент состоит в двухразовом подбрасывании монеты. Обозначим через $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ результат эксперимента и обозначим процессы $\{X\left(t\right),\, 0 \leq t < 2\}$ и $\{Y\left(t\right),\, 0 \leq t < 2\}$ следующим образом:

$$X\left(t\right) = \mathbb{1}_{[0,1)}\left(t\right) \cdot \mathbb{1}\left\{\omega_1 = P\right\} + \mathbb{1}_{[1,2)}\left(t\right) \cdot \mathbb{1}\left\{\omega_2 = P\right\},\, 0 \leq t < 2,$$
$$Y\left(t\right) = 1 - X\left(t\right),\, 0 \leq t < 2.$$

Докажите, что процессы $X\left(t\right)$ и $Y\left(t\right)$ имеют одинаковые конечномерные распределения, но не являются стохастически эквивалентными.

Решение. Рассматривается 2 процесса. Процессы заданы на $t \in [0, 2)$.

Это разные функции. Вероятность

$$P\left\{X\left(t\right) \neq Y\left(t\right)\right\} = P\left\{X\left(t\right) \neq 1 - X\left(t\right)\right\} = 1,$$

а это значит, что процессы с вероятностью 1 не совпадают. Зафиксируем несколько точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Обозначим через $t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{ik}$ моменты t, которые лежат между 0 и 1, и $t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_{j(n-k)}$ — все остальные. Найдём вероятность

$$\begin{aligned} P\left\{X\left(t_1\right)=x_1,\ldots,X\left(t_n\right)=x_n\right\}= \\ =P\left\{X\left(t_{i1}\right)=x_{i1},\ldots,X\left(t_{ik}\right)=x_{ik},X\left(t_{j1}\right)=x_{j1},\ldots,\right. \\ \left.X\left(t_{j(n-k)}\right)=x_{j(n-k)}\right\}= \\ =P\left(\mathbb{1}\left\{\omega_1=P\right\}=x_{i1},\ldots,\mathbb{1}\left\{\omega_1=P\right\}=x_{ik},\right. \\ \left.\mathbb{1}\left\{\omega_2=P\right\}=x_{j1},\ldots,\mathbb{1}\left\{\omega_2=P\right\}=x_{j(n-k)}\right). \end{aligned}$$

Рассматриваем только случай, когда $x_{i1},\ldots,x_{ik}$ одинаковые, и

$$x_{j1},\ldots,x_{j(n-k)}$$

одинаковые.

$$P\left\{X\left(t_1\right)=x_1,\ldots,X\left(t_n\right)=x_n\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Аналогично
$$P\left\{Y\left(t_1\right)=x_1,\ldots,Y\left(t_n\right)=x_n\right\}=\frac{1}{4}.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения.

Занятие 3. Процесс Пуассона

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение процесса Пуассона.

$\{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона, если

1. $N(0) = 0$;
2. при $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ события
$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$
— независимые;
3. число событий на интервале зависит только от длины интервала, то есть есть однородность приращений
$$N(t+s) - N(t) \overset{d}{=} N(s) \sim Pois(\lambda s).$$

Запишите конечномерные распределения процесса Пуассона.

Одномерные распределения
$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Двумерные распределения: $t_1 < t_2$. Перейдём к приращениям
$$P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2\} = P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} =$$

Случайная величина $N(t_1) \sim Pois(\lambda t_1)$, а $N(t_2) - N(t_1) \sim Pois(\lambda(t_2 - t_1))$. Совместная вероятность — это произведение вероятностей
$$= e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdot \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!}.$$

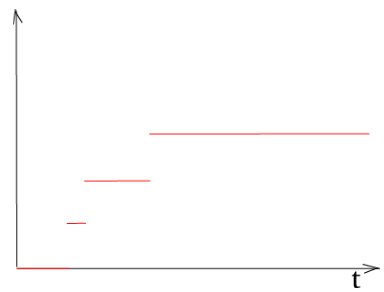

Рис. 21: График пуассоновского процесса

Какой вид имеют траектории процесса Пуассона?

Траектория изображена на рисунке 21.

Какое содержание имеет параметр процесса Пуассона?

$N(t)$ — число событий, произошедших до момента времени t.

Аудиторные задачи

3.2

Задание. Пусть $\{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью

$$\lambda = 2.$$

Вычислите вероятности:

a) $P(N(6) = 3)$;

b) $P(N(6) = 3, N(9) = 7, N(15) = 10)$;

c) $P(N(6) = 3 \mid N(9) = 7)$;

d) $P(N(9) = 7 \mid N(6) = 3)$.

Решение.

a) $N(6) \sim Pois(6 \cdot 2)$, поэтому

$$P(N(6) = 3) = \frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12};$$

b) нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$P(N(6) = 3, N(9) = 7, N(15) = 10) =$$
$$= P\{N(6) = 3, N(9) - N(6) = 4, N(15) - N(9) = 3\} =$$
$$= \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}\right) \cdot \left(\frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6}\right) \cdot \left(\frac{12^3}{3!} \cdot e^{-12}\right);$$

c) по определению условной вероятности

$$P\left(N\left(6\right)=3\mid N\left(9\right)=7\right)=\frac{P\left(N\left(6\right)=3,\,N\left(9\right)=7\right)}{P\left(N\left(9\right)=7\right)}=$$

$$=\frac{\frac{12^3}{3!}\cdot e^{-12}\cdot\frac{6^4}{4!}\cdot e^{-6}}{\frac{18^7}{7!}\cdot e^{-18}}=\frac{12^3\cdot 6^4\cdot 7!}{3!\cdot 4!\cdot 18^7};$$

d) аналогично предыдущему пункту

$$P\left(N\left(9\right)=7\mid N\left(6\right)=3\right)=\frac{P\left(N\left(9\right)=7,\,N\left(6\right)=3\right)}{P\left(N\left(6\right)=3\right)}=$$

$$=\frac{\frac{12^3}{3!}\cdot e^{-12}\cdot\frac{6^4}{4!}\cdot e^{-6}}{\frac{12^3}{3!}\cdot e^{-12}}=\frac{6^4}{4!}\cdot e^{-6}=\frac{P\left(N\left(6\right)=3\right)P\left(N\left(3\right)=4\right)}{P\left(N\left(6\right)=3\right)}.$$

3.3

Задание. Пусть $\{N\left(t\right),\,t\geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Вычислите условное математическое ожидание $M\left[N\left(s\right)\mid N\left(t\right)\right]$ для

$$0\leq s\leq t.$$

Решение. Что ж такое условное математическое ожидание?

$N\left(s\right)$ и $N\left(t\right)$ — дискретные величины, то есть

$$M\left[N\left(s\right)\mid N\left(t\right)\right]=\sum_{l=0}^{\infty}l\cdot P\left\{N\left(s\right)=l\mid N\left(t\right)=k\right\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\left\{N\left(s\right)=l\mid N\left(t\right)=k\right\}=\frac{P\left\{N\left(t\right)-N\left(s\right)=k-l\right\}P\left\{N\left(s\right)=l\right\}}{P\left\{N\left(t\right)=k\right\}}=$$

подставляем пуассоновские вероятности

$$=\frac{\frac{\left[\lambda\left(t-s\right)\right]^{k-l}}{\left(k-l\right)!}\cdot e^{-\lambda\left(t-s\right)}}{\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}}\cdot\frac{\left(\lambda s\right)^l}{l!}\cdot e^{-\lambda l}=\frac{k!\left(t-s\right)^{k-l}s^l}{\left(k-l\right)!l!t^k}=C_k^l\cdot\left(\frac{t-s}{t}\right)^{k-l}\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^l.$$

Имеем биномиальное распределение с параметрами k и $\frac{s}{t}$.

Вывод: при условии $N\left(t\right)=k$ мы нашли распределение

$$N\left(s\right)\sim B\left(k,\frac{s}{t}\right).$$

Условное математическое ожидание

$$M\left[N\left(s\right)|N\left(t\right)=k\right]=\frac{ks}{t}.$$

Ответ: $\frac{N(t)\cdot s}{t}$. Куда пропала сумма?

$$M\left[N\left(s\right)\mid N\left(t\right)=k\right]=\sum_{l}l\cdot P\left[N\left(s\right)=l\mid N\left(t\right)=k\right]=$$

Нашли эту вероятность

$$=\sum_{l}l\cdot P\left\{Bin\left(k,\frac{s}{t}\right)=l\right\}=MBin\left(k,\frac{s}{t}\right)=k\cdot\frac{s}{t}.$$

Условное математическое ожидание — это математическое ожидание по условному распределению.

3.4

Задание. Пусть $N=\{N\left(t\right), t\geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Найдите вероятность того, что первый прыжок процесса N произошёл до момента времени $s\in[0,t]$ при условии, что на отрезке $[0,t]$ произошло ровно n прыжков.

Решение. Нужно найти вероятность $P($первый прыжок произошёл до момента $s\in[0,t]|\,N\left(t\right)=n)$. Нужно это условие переписать через пуассоновский процесс. Получаем $P($первый прыжок произошёл до момента $s\in[0,t]|\,N\left(t\right)=n)=P\left\{N\left(s\right)\geq 1\mid N\left(t\right)=n\right\}$. Значения зависимые

$$P\left\{N\left(s\right)\geq 1\mid N\left(t\right)=n\right\}=1-P\left\{N\left(s\right)=0\mid N\left(t\right)=n\right\}=$$

Условное распределение биномиальное

$$=1-P\left\{Bin\left(n,\frac{s}{t}\right)=0\right\}=1-C_n^0\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^0\cdot\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-0}=1-\left(1-\frac{s}{t}\right)^n.$$

3.5

Задание. Пусть $N=\{N\left(t\right), t\geq 0\}$ является процессом Пуассона с параметром λ. Докажите, что при условии, что N имеет ровно 1 прыжок на отрезке $[a,b]$, момент этого прыжка является равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$ случайной величиной.

Решение. Обозначим τ — момент прыжка на отрезке $[a,b]$. Нужно найти $P\left\{\tau\leq t\mid N\left(b\right)-N\left(a\right)=1\right\}=P\left\{N\left(t\right)-N\left(a\right)=1\mid N\left(b\right)-N\left(a\right)=1\right\}$.

Изобразим процесс на графике 22.

У пуассоновского процесса есть однородность приращений

$$P\left\{N\left(t\right)-N\left(a\right)=1\mid N\left(b\right)-N\left(a\right)=1\right\}=P\left\{N\left(t-a\right)=1\mid N\left(b-a\right)=1\right\}=$$
$$=P\left\{Bin\left(1,\frac{t-a}{b-a}\right)=1\right\}=$$

Это бернуллиевская величина

$$=\frac{t-a}{b-a}.$$

Получилось равномерное распределение, что и требовалось доказать.

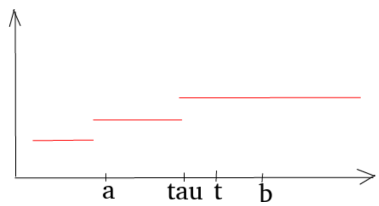

Рис. 22: График пуассоновского процесса

3.6

Задание. Пусть $\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ — последовательность независимых показательно распределённых случаных величин с параметром λ. Положим

$$T_0 = 0,\, T_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k,\, n \geq 1;\, \nu(t) = \max\left(n \,:\, T_n \leq t\right),\, t \geq 0.$$

a) Докажите, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$$
почти наверное.

b) Докажите, что случайная величина $\tau_1 = T_{\nu(t)+1} - t$ имеет показательное распределение с параметром λ.

c) Докажите, что $\{\nu(t),\, t \geq 0\}$ является процессом Пуассона с интенсивностью λ.

Решение. $\nu(t) = \max\left(n \,:\, T_n \leq t\right)$ — случайный процесс.

Посмотрим, как этот процесс выглядит (рис. 23).

T_n — это накопительные суммы.

В момент T_1 только $T_1 \leq t$, то есть от T_1 до T_2 значение процесса будет равно единице.

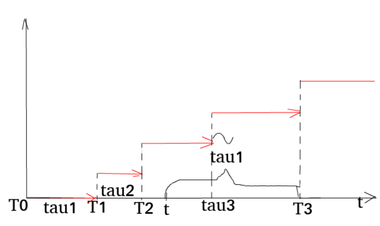

Рис. 23: График процесса

Тут расставили стрелочки, то ест ν — это непрерывная справа функция. То есть ν — это модификация пуассоновского процесса. Конечномерные распределения несут ещё не всю информацию.

a) Нужно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$$

почти наверное.

Это равенство — это просто закон больших чисел, потому что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tau_k = T_n \to M\tau_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Сумма T_n сходится к бесконечности. Это нужно для того, чтобы определить процесс на всей оси. То есть вывод из пункта a) следующий

$$T_n = n \cdot \frac{T_n}{n} \to \infty \cdot \frac{1}{\lambda} = \infty$$

и $\nu(t)$ определено при всех t.

b) $\tilde{\tau}_1$ — это величина до следующего прыжка.

Этот пункт означает, что процесс ν имеет однородные приращения.

Докажем, чо $\tilde{\tau}_1$ имеет действительно показательное распределение. Проще всего для показательного распределения посчитать

$$P(\tilde{\tau}_1) = 1 - F = 1 - \left(1 - e^{-\lambda s}\right) = e^{-\lambda s},$$

где F — функция распределения. Вопрос: есть ли такое равенство.

Значит, $P(\tilde{\tau}_1 > s) = P\left(T_{\nu(t)+1} > t + s\right)$. Величина T берётся в случайный момент. Такая вероятность может быть записана через сумму по всем возможным T, то есть

$$P\left(T_{\nu(t)+1} > t + s\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(T_n \le t < T_{n+1},\, T_{n+1} > t + s\right) =$$

Одно условие убирается

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(T_n \le t, T_{n+1} \le t + s\right) =$$

Момент T_{n+1} — это момент следующего скачка после T_n. Тогда

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(T_n \le t,\, T_n + \tau_{n+1} > t + s\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T_n \le t, \tau_{n+1} \ge (t - T_n) + s\right\} =$$

Моменты τ_{n+1} и T_n — независимые величины.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} MP\left[T_n \le t,\, \tau_{n+1} > (t - T_n) + s \mid T_n\right] =$$

Вспомним, какая вероятность $P(\tau > x) = e^{-\lambda x}$. Тогда

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

Для показательных величин выполнено соотношение

$$P(\tau > x + y) = e^{-\lambda y} P(\tau > x)$$

— свойство отсутствия последействия.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda s} P(T_n \le t, \tau_{n+1} > t - T_n) = e^{-\lambda s} \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \le t < T_{n+1}) =$$

Такая сумма равна единице, потому что t всегда попадает между T_n и T_{n+1} при каком-то n, потому

$$= e^{-\lambda s},$$

так что такая величина $\tilde{\tau_1}$ действительно имеет показательное распределение.

c) Найдём конечномерные распределения $\nu(t)$. Имеем

$$\begin{aligned}
&P\{\nu(t_1) = k_1, \nu(t_2) = k_2, \ldots, \nu(t_n) = k_n\} = \\
&= P\left(\sum_{l=1}^{k_1} \tau_l \le t_1 < \sum_{l=1}^{k_1+1} \tau_l, \ldots, \sum_{l=1}^{k_n} \tau_l \le t_n < \sum_{l=1}^{k_n+1} \tau_l\right) = \\
&= \underbrace{\int \cdots \int}_{k_n+1} \lambda^{k_n+1} e^{-\lambda\left(x_{k_1} + \ldots + x_{k_n}+1\right)} dx_{k_n+1} \ldots dx_1 = \\
&= \lambda^{k_n+1} \cdot \underbrace{\int \cdots \int}_{k_n,\, 0 < x_{k_1} + \ldots + x_{k_n} \le t,\, t = \sum t_i} e^{-\lambda\left(x_{k_1} + \ldots + x_{k_n}\right)} \times \\
&\times \int\limits_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} \ldots dx_1 =
\end{aligned}$$

Возьмём последний интеграл

$$\int\limits_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x_{k_n+1}} \Big|_{t - \sum_{i=1}^{k_n} x_i}^{+\infty}.$$

Подставляем и получаем

$$= \frac{\lambda^{k_n+1}}{\lambda} \int\limits_{k_n,\, 0<x_{k_1}+\ldots+x_{k_n}\le t} \cdots \int e^{-\lambda \sum\limits_{i=k_1}^{k_n} x_i} e^{-\lambda t+\lambda \sum\limits_{i=k_1}^{k_n} x_i} dx_{k_n} \ldots dx_{k_1} =$$

$$= \lambda^{k_n} e^{-\lambda t} \int\limits_{0<\sum\limits_{i=k_1}^{k_n} x_i \le 1} \cdots \int dx_{k_n} \ldots dx_{k_1} =$$

Чтобы понять, чему будет равен этот интеграл, рассмотрим частные случаи:

(a) когда есть двойной интеграл

$$\iint\limits_{0<x_1+x_2\le t} dx_2 dx_1 = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-x_1} dx_2 dx_1 = \int\limits_0^t x_2\big|_0^{t-x_1} dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t (t-x_1)\, dx_1 = t\int\limits_0^t dx_1 - \int\limits_0^t x_1 dx_1 = t^2 - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2!};$$

(b) когда есть тройной интеграл

$$\iiint\limits_{0<x_1+x_2+x_3\le t} dx_3dx_2dx_1 = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-x_1} \int\limits_0^{t-x_1-x_2} dx_3dx_2dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-x_1} (t - x_1 - x_2)\, dx_2dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t \left(t \int\limits_0^{t-x_1} dx_2 - x_1 \int\limits_0^{t-x_1} dx_2 - \int\limits_0^{t-x_1} x_2dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t \left[t\,(t - x_1) - x_1\,(t - x_1) - \frac{(t - x_1)^2}{2} \right] dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{2t^2 - 2tx_1 - 2tx_1 + 2x_1^2 - t^2 + 2tx_1 - x_1^2}{2} dx_1 \times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{t^2 - 2x_1t + x_1^2}{2} dx_1 = \int\limits_0^t \frac{(t - x_1)^2}{2} dx_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(t - x_1)^3}{3} \Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{t^3}{2 \cdot 3} = \frac{t^3}{3!}.$$

Значит,

$$\int \cdots \int\limits_{0<\sum\limits_{i=k_1}^{k_n} x_i \le 1} dx_{k_n} \ldots dx_{k_1} = \frac{t^{k_n}}{k_n!}.$$

Тогда вероятность равна

$$= \frac{\lambda^{k_n} e^{-\lambda t} t^{k_n}}{k_n!} = \frac{(\lambda t)^{k_n}}{k_n!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Получился процесс Пуассона с интенсивностью λ.

3.7

Задание. Пусть $N = \{N(t)\,,\, t \ge 0\}$ — процесс Пуассона с параметром λ и пусть $\{Y_n\}_{n\ge1}$ — независимая от N последовательность независимых бернуллиевских случайных величин с парметром $p \in (0, 1)$. Положим

$$S_n = Y_1 + \ldots + Y_n.$$

Докажите, что процесс $\xi = \left\{S_{N(t)},\, t \ge 0\right\}$ является процессом Пуассона с параметром λt.

Решение. Пуассоновский процесс

$$N(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} 1$$

— число событий до момента $N(t)$. В ξ складываем не 1, а $Y_i = 0$ или 1.

Начнём с того, что посчитаем одномерные распределения и посмотрим, что это тоже пуассоновские величины. Есть сумма случайного числа слагаемых. Нужно перебирать все возможные значения $N(t)$. Имеем

$$P\left\{S_{N(t)} = k\right\} = P\left\{Y_1 + \ldots + Y_{N(t)} = k\right\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{N(t) = n,\, Y_1 + \ldots + Y_n = k\right\} =$$

Сумма $Y_1 + \ldots + Y_n$ — биномиальная величина

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

Преобразуем

$$= e^{-\lambda t} p^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot C_n^k (1-p)^{n-k} =$$

Распишем C_n^k явно

$$= e^{-\lambda t} p^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda t} p^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

Имеем ряд для экспоненты. Заменим $n-k$ на новый индекс суммирования

$$= \frac{e^{-\lambda t} p^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+k} (1-p)^n}{n!} =$$

Выносим $(\lambda t)^k$ за знак суммы

$$= \frac{e^{-\lambda t} p^k (\lambda t)^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n (1-p)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda t} (p\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{\lambda t (1-p)} = \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^k}{k!}$$

— пуассоновская вероятность.

Вывод: $S_{N(t)} \sim Pois(\lambda p t)$, то есть у такого процесса одномерные распределения такие же, как у пуассоновского с параметром $\lambda p t$.

Домашнее задание

3.11

Задание. Пусть $N = \{N(t),\, t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda = 5$. Вычислите вероятности:

a) $P\left(N\left(2\right) \geq 3,\ N\left(5\right) \leq 4\right)$;

b) $P\left(N\left(2\right) \geq 3,\ N\left(3\right) \geq 4,\ N\left(5\right) \leq 3\right)$;

c) $P\left(N\left(2\right) = 3,\ N\left(3\right) = 5,\ N\left(4\right) \leq 6\right)$;

d) $P\left(N\left(2\right) = 3 \mid N\left(3\right) = 5\right)$;

e) $P\left(N\left(3\right) = 5 \mid N\left(2\right) = 3\right)$.

Решение.

a) Рассмотрим все возможные случаи

$$\begin{gathered}P\left(N\left(2\right) \geq 3,\ N\left(5\right) \leq 4\right) = \\ = P\left\{N\left(2\right) = 3,\ N\left(5\right) = 3\right\} + P\left\{N\left(2\right) = 3,\ N\left(5\right) = 4\right\} + \\ + P\left\{N\left(2\right) = 4,\ N\left(5\right) = 4\right\} =\end{gathered}$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$\begin{gathered}= P\left\{N\left(2\right) = 2,\ N\left(5\right) - N\left(2\right) = 3 - 3\right\} + \\ + P\left\{N\left(2\right) = 3,\ N\left(5\right) - N\left(2\right) = 4 - 3\right\} + \\ + P\left\{N\left(2\right) = 4,\ ,N\left(5\right) - N\left(2\right) = 4 - 4\right\} = \\ = P\left\{N\left(2\right) = 3\right\} P\left\{N\left(3\right) = 0\right\} + P\left\{N\left(2\right) = 3\right\} P\left\{N\left(3\right) = 1\right\} + \\ + P\left\{N\left(2\right) = 4\right\} P\left\{N\left(3\right) = 0\right\} = \\ = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^0}{0!} \cdot e^{-15} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^1}{1!} \cdot e^{-15} + \\ + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{15^0}{0!} \cdot e^{-15} = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} \cdot 15 + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-25} = \\ = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-25} \cdot 16 + \frac{10^4}{4!} \cdot e^{-25};\end{gathered}$$

b) с ростом времени значение процесса Пуассона не должно уменьшаться
$P\left(N\left(2\right) \geq 3,\ N\left(3\right) \geq 4,\ N\left(5\right) \leq 3\right) = 0$;

c) как в первом пункте рассмотрим все возможные случаи

$$\begin{gathered}P\left(N\left(2\right) = 3,\ N\left(3\right) = 5,\ N\left(4\right) \leq 6\right) = \\ = P\left\{N\left(2\right) = 3,\ N\left(3\right) = 5,\ N\left(4\right) = 5\right\} + \\ + P\left\{N\left(2\right) = 3,\ N\left(3\right) = 5,\ N\left(4\right) = 6\right\} =\end{gathered}$$

Нужно перейти к приращениям, потому что они независимы

$$= P\left\{N(2) = 3,\, N(3) - N(2) = 5 - 3,\, N(4) - N(3) = 5 - 5\right\} +$$
$$+ P\left\{N(2) = 3,\, N(3) - N(2) = 5 - 3,\, N(4) - N(3) = 6 - 5\right\} =$$
$$= P\left\{N(2) = 3\right\} \cdot P\left\{N(1) = 2\right\} \cdot P\left\{N(1) = 0\right\} +$$
$$+ P\left\{N(2) = 3\right\} \cdot P\left\{N(1) = 2\right\} \cdot P\left\{N(1) = 1\right\} =$$
$$= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} =$$
$$= \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^3}{2!} = \frac{10^3}{3!} \cdot e^{-20} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot 6 = 10^{-20} \cdot 12500;$$

d) по определению условной вероятности

$$P\left(N(2) = 3 \mid N(3) = 5\right) = \frac{P\left\{N(2) = 3,\, N(3) = 5\right\}}{P\left\{N(3) = 5\right\}} =$$

Перейдём к приращениям и подставим выражения для вероятностей

$$= \frac{\frac{10^3}{3!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}}{\frac{15^5}{5!} \cdot e^{-15}} =$$

Экспоненты сокращаются

$$= \frac{10^3 \cdot 5^2 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 15^5} = \frac{80}{243};$$

e) аналогично предыдущему пункту

$$P\left(N(3) = 5 \mid N(2) = 3\right) = \frac{P\left\{N(3) = 5,\, N(2) = 3\right\}}{P\left\{N(2) = 3\right\}} =$$

Перейдём к приращениям

$$= \frac{P\left\{N(2) = 3\right\} P\left\{N(1) = 2\right\}}{P\left\{N(2) = 3\right\}} = P\left\{N(1) = 2\right\} = \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5}.$$

3.12

Задание. Пусть $N = \{N(t),\, t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda = 1$. Найдите характеристическую функцию случайной величины

$$N(3) - N(2) + N(1).$$

Решение. $N(t) \sim Pois(t)$. Процесс Пуассона имеет однородность приращений $N(3) - N(2) \sim N(3 - 2) = N(1) \sim Pois(1)$, а $N(1) \sim Pois(1)$.

Приращения $N(3) - N(2)$ и $N(1)$ — независимы, следовательно,

$$N(3) - N(2) + N(1) \sim Pois(1 + 1) = Pois(2).$$

Тогда характеристическая функция $\varphi_{N(3)-N(2)+N(1)}(t) = e^{2\left(e^{it}-1\right)}$.

3.13

Задание. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Найдите условную вероятность $P(N(s) = k \mid N(t) = n)$ при $s > t$ и вычислите условное математическое ожидание $M[N(s) \mid N(t)]$ для $s > t$.

Решение. $N(t) \sim Pois(\lambda t)$.

Что такое условное математическое ожидание?

$N(s)$ и $N(t)$ — дискретные величины, то есть

$$M[N(s) \mid N(t) = n] = \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot P\{N(s) = k \mid N(t) = n\}.$$

Отдельно посчитаем условную вероятность, а потом по ней возьмём математическое ожидание

$$P\{N(s) = k \mid N(t) = n\} = \frac{P\{N(s) = k, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Перепишем через приращения и воспользуемся их независимостью

$$= \frac{P(N(t) = n\} P\{N(s-t) = k-n\}}{P\{N(t) = n\}} =$$

Сократим одинаковые множители в числителе и знаменателе

$$= P\{N(s-t) = k-n\} =$$

Подставим пуассоновские вероятности

$$= \frac{[\lambda(s-t)]^{k-n}}{(k-n)!} \cdot e^{-\lambda(s-t)}.$$

Имеем пуассоновское распределение с параметром $\lambda(s-t)$.

Вывод: при условии $N(t) = n$ мы нашли распределение

$$N(s) \sim Pois(\lambda(s-t)).$$

Условное математическое ожидание

$$M[N(s) \mid N(t) = n] = MPois(\lambda(s-t)) + n = \lambda(s-t) + n.$$

Тогда

$$M[N(s) \mid N(t)] = \lambda(s-t) + N(t).$$

3.14

Задание. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}, \eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$ являются независимыми процессами Пуассона с параметрами λ и μ соответственно. Положим $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$. Докажите, что процесс $\zeta = \{\zeta(t), t \geq 0\}$ является процессом Пуассона с параметром $\lambda + \mu$.

Решение.

$$\varphi_\zeta(t) = \varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\,\varphi_\eta(t) = e^{\lambda t\left(e^{it}-1\right)} e^{\mu t\left(e^{it}-1\right)} = e^{(\lambda+\mu)t\left(e^{it}-1\right)}.$$

Это доказывает только то, что $\zeta \sim Pois\left((\lambda+\mu)\,t\right)$ для каждого $t \geq 0$, чего недостаточно.

$\{\zeta(t)\,,\, t \geq 0\}$ — процесс Пуассона, так как

1. $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t) = 0$;

2. при $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ события

   $$\zeta(t_1) = \xi(t_1) + \eta(t_1)\,, \zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \xi(t_2) + \eta(t_2) - \xi(t_1) - \eta(t_1)\,, \ldots,$$
   $$\zeta(t_n) - \zeta(t_{n-1}) = \xi(t_n) + \eta(t_n) - \xi(t_{n-1}) - \eta(t_{n-1})$$

   — независимы;

3. число событий на интервале зависит только от длины интервала, то есть есть однородность приращений

   $$\zeta(t+s) - \zeta(t) = \xi(t+s) + \eta(t+s) - \xi(t) - \eta(t) \stackrel{d}{=} \xi(s) + \eta(s) =$$
   $$= \zeta(s) \sim Pois\left((\lambda+\mu)\,t\right).$$

3.15

Задание. Пусть $\{N(t)\,,\, t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Выясните, какой из следующих процессов является пуассоновским:

$$\{N_1(t) = 2N(t)\,,\, t \geq 0\}\,; \{N_2(t) = N(2t)\,,\, t \geq 0\}\,; \left\{N_3(t) = N\left(t^2\right),\, t \geq 0\right\};$$
$$\{N_4(t) = N(t+s) - N(s)\,,\, t \geq 0\}\,,$$

где $s > 0$ — фиксированное число. Для пуассоновских процессов укажите их интенсивность.

Решение.

$$P\{N_1(t) = k\} = P\{2N(t) = k\} = P\left\{N(t) = \frac{k}{2}\right\} = 0,$$

так как пуассоновский процесс принимает только неотрицательные целые значения. Следовательно, $\{N_1(t)\,,\, t \geq 0\}$ — не процесс Пуассона.

$$P\{N_2(t) = k\} = P\{N(2t) = k\} = \frac{(\lambda \cdot 2t)^k}{k!} \cdot e^{-2\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью 2λ. Независимость и однородность приращений выполняются.

Перейдём к третьему процессу

$$P\{N_3(t) = k\} = P\left\{N\left(t^2\right) = k\right\} = \frac{\left(\lambda t^2\right)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t^2} \sim Pois\left(\lambda t^2\right) \not\sim Pois(\mu t)\,,$$

значит, процесс не пуассоновский.

$$P\{N_4(t)=k\}=P\{N(t+s)-N(s)=k\}=P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$$

— процесс Пуассона с интенсивностью λ.

3.16

Задание. Пусть $N=\{N(t),\, t\geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ и пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots$ — независимые от процесса N независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием m. Пусть

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i.$$

Докажите, что $M[X(t)]=m\lambda t$.

Решение. $N(t)\sim Pois(\lambda t)$.

Вычислим математическое ожидание

$$MX(t)=M\left(\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i\right)=M\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mathbb{1}\{N(t)=i\}\sum_{j=1}^{i}\xi_j\right)=$$

Математическое ожидание индикатора — вероятность

$$=m\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot P\{N(t)=i\}=mMN(t)=m\lambda t.$$

3.17

Задание. Пусть $\{N(t),\, t\geq 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Используя пункт а) задачи 3.6 докажите, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\lambda\, a.s.$$

Решение. Надо проверить, что для пуассоновского процесса

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\lambda\, a.s.$$

В задаче 3.6 доказали, что

$$\frac{T_n}{n}\to\frac{1}{\lambda}$$

с помощью закона больших чисел.

$N(T_n)=n$ — значение T_n-го скачка (рис. 24).

$$\frac{T_n}{n} \to \frac{1}{\lambda} \leftrightarrow \frac{T_n}{N(T_n)} \to \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда

$$\frac{N(T_n)}{T_n} \to \lambda.$$

Из такой сходимости следует сходимость по всем моментам времени. Нужно вывести, что

$$\frac{N(t)}{t} \to \lambda.$$

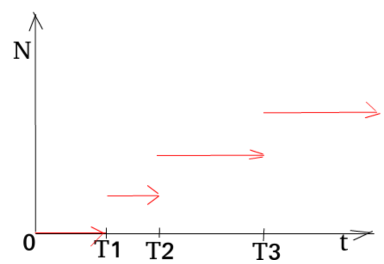

Рис. 24: График пуассоновского процесса

3.18

Задание. Прибытие посетителей в магазин является процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda = 20$ посетителей в час. Вычислите среднее количество продаж на протяжении одного восьмичасового рабочего дня, если вероятность того, что посетитель магазина сделает покупку равна 0.3.

Решение. $N(t)$ — количество покупок за время $[0, t]$.

Обозначим количество покупок как

$$n(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} y_k,$$

где $y_k = \mathbb{1}\{k\text{-й посетитель магазина сделает покупку}\}$.

При этом $P\{y_k = 1\} = 0.3$, а $P\{y_k = 0\} = 1 - 0.3 = 0.7$.

То есть y_k имеет распределение Бернулли.

Из задачи 3.7 получаем, что $n(t) \sim Pois(0.3\lambda)$.

Среднее количество покупок за 8 часов $Mn(8) = 8 \cdot 0.3\lambda = 8 \cdot 0.3 \cdot 20 = 48$.

3.19

Задание. Большой супермаркет имеет три входа. Прибытие посетителей через каждые двери образуют процессы Пуассона с интенсивностями

$\lambda_1 = 110$, $\lambda_2 = 90$, $\lambda_3 = 160$ посетителей в час. 30% посетителей составляют мужчины. Вероятность того, что посетитель-мужчина сделает покурку, равна 0.8, а вероятность того, что женщина-посетитель сделает покупку, равна 0.1. Средняя цена покупки составляет 100 грн.

a) Вычислите среднюю выручку супермаркета за 10-часовой рабочий день.

b) Вычислите вероятность того, что третья женщина-посетитель, которая сделает покупку, прибудет в магазин в первые 15 минут. Вычислите среднее время её прибытия в магазин.

Решение.

a) $t = 10$.

Найдём общую интенсивность $\lambda = 110 + 90 + 160 = 360$ посетителей в час.

Найдём $\lambda_m = 360 \cdot 0.3 = 108$ посетителей-мужчин в час и

$$\lambda_w = 360 \cdot 0.7 = 252$$

посетителей-женщин в час.

Пусть $n\left(t\right)$ — число покупок в день. Тогда

$$Mn\left(t = 10\right) = M\left[n_m\left(10\right) + n_w\left(10\right)\right] = 10 \cdot 108 \cdot 0.8 + 10 \cdot 252 \cdot 0.1 = 1116.$$

Следовательно, средняя выручка равна

$$100Mn\left(t = 10\right) = 100 \cdot 1116 = 111600.$$

b) Пусть λ'_w — интенсивность покупок, сделанных женщинами.

$\lambda'_w = \lambda_w \cdot 0.1 = 25.2$ покупки в час.

Пусть $N\left(t\right) \sim Pois\left(\lambda'_w t\right)$ — количество женщин-посетителей, прибывших в магазин до момента времени t.

Тогда

$$P\left\{N\left(15minutes\right) = 3\right\} = P\left\{N\left(\frac{1}{4}\right) = 3\right\} = e^{-25.2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4} \cdot 25.2\right)^3}{3!} =$$
$$= e^{-6.3} \cdot \frac{250}{6} = 0.0019 \cdot 41.6 = 0.08.$$

Тогда среднее время её прибытия в магазин

$$M\tau = \frac{3}{\lambda'_w} = \frac{3}{25.2} = 0.12$$

часа.

12

Занятие 4. Гауссовские процессы

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение гауссовского процесса.

Процесс $\{X(t), t \in T\}$ — гауссовский, если

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X(t_k)$$

— гауссовская случайная величина $\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ и $\forall t_1, \ldots, t_n \in T$.

Эквивалентно: $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T$ — гауссовский вектор.

Запишите плотность конечномерных распределений гауссовского процесса.

$$p = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{det\, A}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[A^{-1}(\vec{x}-\vec{a}), \vec{x}-\vec{a}\right]},$$

если $det\, A > 0$. Квадратные скобки в степени экспоненты — это скалярное произведение, или квадратичная форма матрицы, обратной к ковариации.

Приведите определение и сформулируйте основные свойства ковариационной функции.

$K(t, s) = cov\, [X(t), X(s)]$.

Гауссовский процесс существует, из теомеры Колмогорова, с функциями m и K тогда и только тогда, когда функция $K(s, t) = K(t, s)$ — симметричная, и K — неотрицательно определённая, то есть

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K(t_k, t_j) \geq 0.$$

Тут неравенство возможно для любых $c_1, \ldots, c_n, t_1, \ldots, t_n$.

Аудиторные задачи

4.2

Задание. Выясните, существует ли случайный процесс с ковариационной функцией

a) $K(t,s) = \min(t,s)$;

b) $K(t,s) = (1 - |t-s|) \cdot \mathbb{1}\{|t-s| < 1\}$; $t, s \in \mathbb{R}$.

Решение.

a) $K(t,s) = \min(t,s)$.

Такой процесс есть. Какой? Винеровский;

b) $K(t,s) = (1 - |t-s|) \cdot \mathbb{1}\{|t-s| < 1\}$; $t, s \in \mathbb{R}$.

Если такой процесс есть, то мы его не встречали раньше. Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определена?

Функция зависит только от разности. Сейчас $K(t,s) = \varphi(t-s)$, где

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Так что

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j \varphi(t_k - t_j) \geq 0$$

— это условие неотрицательной определённости для характеристической функции. Будет ли эта функция φ характеристической? То есть вопрос в задаче равносилен следующему: будет ли

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

характеристической функцией? Эта функция изображена на рисунке 25.

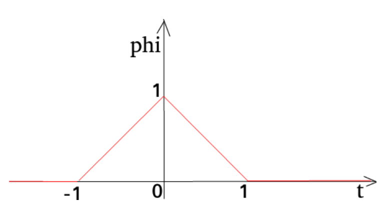

Рис. 25: График функции $\varphi(t)$

Она непрерывная, симметричная, в нуле — единица. Если бы это была характеристическая функция

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)\, dx$$

— преобразование Фурье плотности $p(x)$. Плотность можно найти через обратное преобразование Фурье

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} e^{-itx} (1 - |t|)\, dt =$$

Раскроем модуль

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-1}^{1} e^{-itx} dt + \int\limits_{-1}^{0} e^{-itx} t dt - \int\limits_{0}^{1} e^{-itx} t dt \right) =$$

Берём первый интеграл

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{e^{-itx}}{ix} \Bigg|_{-1}^{1} - \int\limits_{0}^{1} e^{itx} t dt - \int\limits_{0}^{1} e^{-itx} t dt \right) =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{e^{-ix}}{ix} + \frac{e^{ix}}{ix} - \int\limits_{0}^{1} \left(e^{-itx} + e^{itx} \right) t dt \right] =$$

Из формулы Эйлера следует, что $e^{-itx} + e^{itx} = 2\cos(tx)$. Тогда

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - 2 \int\limits_{0}^{1} \cos(tx)\, t dt \right] =$$

Интегрируем по частям, то есть

$$u = t,\ du = dt,\ dv = \cos(tx)\, dt,\ c = \int \cos(tx)\, dt = \frac{1}{x} \cdot \sin(xt)\, .$$

Получаем

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{ix} - 2 \cdot \frac{t}{x} \cdot \sin(xt) \Bigg|_{0}^{1} + 2 \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x} \cdot \sin(xt)\, dt \right] =$$

Подставляем пределы интегрирования и берём интеграл от синуса

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-e^{-ix}+e^{ix}}{ix} - \frac{2}{x}\cdot\sin x - \frac{2}{x^2}\cdot\cos(xt)\Big|_0^1\right] =$$

Снова подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-e^{-ix}+e^{ix}}{ix} - \frac{2}{x}\cdot\sin x - \frac{2}{x^2}\cdot\cos x + \frac{2}{x^2}\right) =$$

Из формулы Эйлера следует, что $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$. Тогда

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\sin x}{x} - \frac{2\sin x}{x} + \frac{2}{x^2}(-\cos x + 1)\right] = \frac{1}{\pi x^2}(1-\cos x).$$

Нашли обратное преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p(x)\,dx$$

и $p(x) \geq 0$.

Должно выполняться условие нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \varphi(0) = 1.$$

Так что p — плотность, φ — это её преобразование Фурье, так что φ — характеристическая функция.

4.3

Задание. Пусть $K(t,s)$, $t,s \in T$ — ковариационная функция некоторого случайного процесса, $Q(t)$ — полином с положительными коэффициентами. Докажите, что функция $K_1(t,s) = Q(K(t,s))$ тоже является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

Решение. $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \geq 0$. Доказать, что если в этот многочлен подставить ковариационную функцию, то снова получится ковариационная функция.

Явно запишем, что такое

$$K_1(t,s) = a_0 + a_1 K(t,s) + a_2 K(t,s)^2 + \ldots + a_n K(t,s)^n.$$

Симметричность есть, так как $K(t,s)$ — симметрична.

Задачу можно разбить на две подзадачи:

1. если $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_n$ — ковариационные функции, то и

$$\sum_{j=0}^{n} a_j R_j (t, s)$$

— ковариационная функция. Это утверждение проверить просто.

Доказательство. Берём двойную сумму

$$\sum_{k,i=1}^{n} c_k c_i \left(\sum_{j=0}^{n} a_j R_j (t_k, t_i) \right) =$$

Меняем суммы местами

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k,i=1}^{n} R_j (t_k, t_i) c_k c_i \right) \geq 0,$$

так как внутренняя сумма неотрицательна. Так что 1. проверили;

2. чтобы 1. применить, достаточно проверить, что степень ковариационной функции — это тоже ковариационная функция. Достаточно проверить, что если R_1, R_2 — ковариационные функции, то и произведение $R_1 (t, s) R_2 (t, s)$ — тоже ковариационная функция.

Условие неотрицательности сейчас записывается так

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j R_1 (t_k, t_j) R_2 (t_k, t_j) \geq 0?,$$

где $R_1 (t_k, t_j) = M [X (t_k) X (t_j)]$, $R_2 (t_k, t_j) = M [Y (t_k) Y (t_j)]$.

Раз R_1 — ковариационая и R_2 — ковариационная, то существуют независимые процессы $X (t)$ и $Y (t)$, такие, что

$$R_1 (t, s) = M [X (t) X (s)], \; R_2 (t, s) = M [Y (t) Y (s)].$$

Тогда если возьмём новый процесс

$$Z (t) = X (t) Y (t),$$

то $M [Z (t) Z (s)] = M [X (t) Y (t) X (s) Y (s)]$. Группируем первый множитель с третьим, второй — с четвёртым, пользуемся независимостью $M [X (t) Y (t) X (s) Y (s)] = M [X (t) X (s)] \cdot M [Y (t) Y (s)]$. По введённым обозначениям $M [X (t) X (s)] \cdot M [Y (t) Y (s)] = R_1 (t, s) R_2 (t, s)$.

4.4

Задание. Пусть $\{S_n,\, n = 0, 1, 2, \dots\}$ являетс простым случайным блужданием, что определяется следующим образом $S_0 = 0$; $S_{n+1} = S_n + \varepsilon_{n+1}$, где $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что

$$P(\varepsilon_i = 1) = P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Вычислите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\{S_n,\, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Докажите, что

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)\,,\; n \to \infty.$$

Решение. Процесс сейчас обозначается как $\{S_n,\, n \geq 0\}$ и S_n определяется как $S_0 = 0$, $S_{n+1} = S_n + \varepsilon_{n+1}$, то есть S_n — это накопительные суммы. Сейчас $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ — это независимые одинаково распределённые случайные величины с распределением Бернулли

$$P(\varepsilon_i = 1) = P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Это простое случайное блуждание (рис. 26).

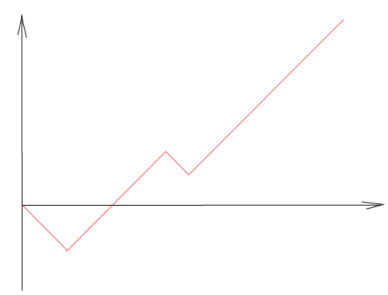

Рис. 26: График случайноо блуждания

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i.$$

Найдём математическое ожидание этого процесса

$$MS_n = M\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i =$$

Пользуемся независимостью

$$= \sum_{i=1}^{n} M\varepsilon_i = 0,$$

так как
$$M\varepsilon_i = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$
Теперь найдём ковариационную функцию, то есть нужно найти
$$cov\left(S_n, S_t\right) = cov\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j\right) =$$
Вынесем суммы за ковариацию
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} cov\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n,t} M\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) =$$
Такое математическое ожадине равно
$$M\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$
Тут пар одинаковых чисел $\min(n, t)$, так что
$$= \min(n, t).$$

По центральной предельной теореме
$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \to N(0, 1), \; n \to \infty,$$
потому что S_n — сумма независимых одинаково распределённых случайных величин.

4.5

Задание. Рассмотрим двумерные случайные векторы
$$X^k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_{\frac{k}{1}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot S_k\right), \; k = 2, 4, 6, \ldots,$$
где $\{S_n\}_{n \geq 1}$ является простым случайным блужданием.

a) Убедитесь, что характеристическая функция вектора X^k имеет вид
$$\varphi_{X^k}\left(\theta_1, \theta_2\right) = \left[\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{k}}\right)\right]^{\frac{k}{2}} \left[\cos\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right)\right]^{\frac{k}{2}}.$$

b) Восплользовавшись тем, что
$$\varepsilon^{-2} ln\left(\cos\left(\varepsilon\right)\right) \to -\frac{1}{2}$$
при $\varepsilon \to 0$, найдите предел $\varphi_{X^k}\left(\theta_1, \theta_2\right)$ при $k \to \infty$ и укажите распределение случайного вектора X, к которому слабо сходятся X^k при $k \to \infty$.

Решение.

a) Сначала нужно найти характеристическую функцию такого вектора $\varphi_{X^k}(\theta_1,\theta_2) = Me^{i\left(\theta_1 X_1^k + \theta_2 X_2^k\right)}$. Подставим компоненты

$$Me^{i\left(\theta_1 X_1^k + \theta_2 X_2^k\right)} = Me^{i\left(\theta_1\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot S_{\frac{k}{2}} + \theta_2\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot S_k\right)}.$$

Можно вынести дробь с корнем от k, вместо S будем писать сумму $Me^{i\left(\theta_1\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot S_{\frac{k}{2}} + \theta_2\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot S_k\right)} = Me^{i\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\theta_1\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}\varepsilon_i + \theta + 2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\right)}$. Вторую сумму можно разложить на две

$$Me^{i\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\theta_1\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}\varepsilon_i + \theta + 2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\right)} = Me^{i\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}\varepsilon_i(\theta_1+\theta_2) + \theta_2\sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k}\varepsilon_i\right)} =$$

Суммы и слагаемые в суммах независимы

$$= Me^{i\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}\varepsilon_i(\theta_1+\theta_2)} Me^{i\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k}\varepsilon_i\theta_2} =$$

Все слагаемые в суммах независимы. Первое и второе математическое ожидания - произведение $k/2$ характеристических функций

$$= \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}}\varphi_{\varepsilon_i}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\sqrt{k}}\right)\cdot\prod_{i=\frac{k}{2}+1}^{k}\varphi_{\varepsilon_i}\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right) =$$

Осталось понять, что такое $\varphi_{\varepsilon_i}(\lambda) = Me^{i\lambda\varepsilon_i}$. Случайная величина ε_i принимает значения -1 и 1 с вероятностями 0.5, потому

$$Me^{i\lambda\varepsilon_i} = \frac{1}{2}\cdot e^{i\lambda} + \frac{1}{2}\cdot e^{-i\lambda} = \cos\lambda.$$

Тогда

$$= \cos^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\sqrt{k}}\right)\cos^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right).$$

b) Найдём предел этой характеристической функции, когда $k\to\infty$.

Оказывается, что

$$\varepsilon^{-2}ln\left(\cos\varepsilon\right) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{1}{2}.$$

Когда $\varepsilon\to 0$, $\cos\varepsilon\to 1$ и $ln\left(\cos\varepsilon\right)\to 0$ — это неопределённость 0 на 0. Она раскрывается с помощью правила Лопиталя

$$\frac{ln\left(\cos\varepsilon\right)}{\varepsilon^2} \approx -\frac{1}{2\cos\varepsilon}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \to \frac{1}{2},$$

где
$$\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$$
— замечательный предел.
$$\left(\cos\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k = e^{k\,ln\cos\frac{x}{\sqrt{k}}} =$$
Заметим, что
$$\frac{x}{\sqrt{k}} = \varepsilon \to 0,$$
тогда
$$= e^{\frac{k\varepsilon^2 ln(\cos\varepsilon)}{\varepsilon^2}} =$$
Здесь
$$\frac{ln\left(\cos\varepsilon\right)}{\varepsilon^2} \to -\frac{1}{2}.$$
Тогда
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} e^{x^2\varepsilon^{-2}ln(\cos\varepsilon)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
Теперь нужно эту сходимость использовать
$$\lim_{k\to\infty}\cos^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\sqrt{k}}\right)\cos^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\theta_2}{\sqrt{k}}\right) = e^{-\frac{(\theta_1+\theta_2)^2}{4}}e^{-\frac{\theta_2^2}{4}} = e^{\frac{-\theta_1^2-2\theta_1\theta_2-\theta_2^2-\theta_2^2}{4}} =$$
$$= e^{-\frac{\theta_1^2+2\theta_1\theta_2+2\theta_2^2}{4}}.$$

Вывод:
$$\varphi_{X^k}\left(\theta_1,\theta_2\right) \to e^{-\frac{1}{4}\left(\theta_1^2+2\theta_1\theta_2+2\theta_2^2\right)} =$$
Это характеристическая функция нормального распределения. Оно характеризуется средним и ковариационной матрицей. Среднее тут 0, потому что i нет в пределе
$$= exp\left\{-\frac{1}{2}\left(A\vec{\theta},\vec{\theta}\right)\right\},$$
где
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$
— ковариационная матрица.

Двумерный случай блуждания сходится к двумерному гауссовскому вектору (рис. 27)
$$X^k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot S_{\frac{k}{2}}, \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot S_k\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(S_{k\cdot\frac{1}{2}}, S_{k\cdot 1}\right).$$

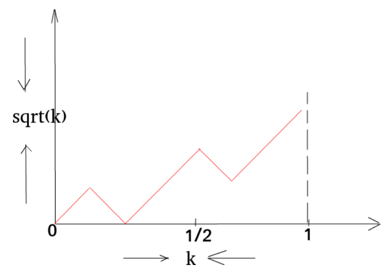

Рис. 27: Двумерный случай блуждания

Если брать не 2 значения, а n, то это сходится к

$$N\left(\begin{bmatrix}0\\ \dots\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}t_1 & t_1 & \dots & t_1\\ \dots & & & \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n\end{bmatrix}\right)$$

— винеровский процесс.

4.6

Задание. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ — гауссовский процесс с функцией математического ожидания $m(t) = t$ и ковариационной функцией

$$K(t,s) = \begin{cases} 1 - |t-s|, & |t-s| < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{5} - \frac{|t-s|}{5}, & \frac{1}{2} \leq |t-s| < 3, \\ 0, & |t-s| \geq 3; \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

a) Запишите плотность распределения вектора $(\xi(1), \xi(3), \xi(4))$.

b) Найдите условное математическое ожидание $M(\xi(1) \mid (\xi(3), \xi(4)))$.

Решение.

a) Нужно найти плотность трёхмерного вектора $(\xi(1), \xi(3), \xi(4))$. Процесс гауссовский, значит, такой вектор тоже гауссовский. Он характеризуется математическим ожиданием и ковариационной матрицей $cov(\xi(1), \xi(1)) = K(1,1)$. Будем считать по первой строчке. Разность равна нулю $K(1,1) = 1$. Аналогично считаем

$$cov(\xi(1), \xi(3)) = K(1,3) = \frac{1}{5}.$$

Тогда

$$(\xi(1), \xi(3), \xi(4)) \sim N\left(\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{5} & 0\\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{2}{5} & 1\end{bmatrix}\right),$$

где $cov\left(\xi\left(1\right),\xi\left(4\right)\right)=K\left(1,4\right)=0$ и

$$cov\left(\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)=K\left(3,4\right)=\frac{2}{5}.$$

Плотность по определению равна

$$p\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^{3}\sqrt{det\,A}}\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\vec{x}-\vec{m}\right),A^{-1}\left(\vec{x}-\vec{m}\right)\right]\right\}=$$

Чтобы плотность написать, нужно найти определитель матрицы и обратную

$$det\,A=1-\frac{4}{25}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{21}{25}-\frac{1}{25}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}=\frac{5}{4}\begin{bmatrix}\frac{21}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{25}\\ -\frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{25} & \frac{2}{5} & \frac{24}{25}\end{bmatrix}.$$

Тогда плотность равна

$$=\frac{1}{\sqrt{8\pi^{3}\cdot\frac{4}{5}}}\times$$

$$\times exp\{-\frac{5}{8}(\frac{21}{25}\left(x_1-1\right)^2+\left(x_2-3\right)^2+\frac{24}{25}\left(x_3-4\right)^2-$$

$$-\frac{2}{5}\left(x_1-1\right)\left(x_2-3\right)+\frac{2}{25}\left(x_1-1\right)\left(x_3-4\right)+\frac{4}{5}\left(x_2-3\right)\left(x_3-4\right))\}.$$

Здесь

$$\vec{x}-\vec{m}=\begin{bmatrix}x_1-1\\ x_2-3\\ x_3-4\end{bmatrix}.$$

b) По определению

$$M\left(\xi\left(1\right)\mid\left(\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)\right)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x_1 p\left(x_1,\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)dx_1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p\left(x_1,\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)dx_1}.$$

По теореме о нормальной корреляции

$$M\left(\xi\left(1\right)\mid\left(\xi\left(3\right),\xi\left(4\right)\right)\right)=$$

$$=M\xi\left(1\right)+cov_{\xi(1),(\xi(3),\xi(4))}\cdot cov_{(\xi(3),\xi(4)),(\xi(3),\xi(4))^{-1}}\cdot\begin{bmatrix}\xi\left(3\right)-M\xi\left(3\right)\\ \xi\left(4\right)-M\xi\left(4\right)\end{bmatrix}=$$

Здесь

$$cov_{\xi(1),(\xi(3),\xi(4))} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}, \; cov_{(\xi(3),\xi(4)),(\xi(3),\xi(4))^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$= 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 \\ \xi(4) - 4 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{25}{21} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 \\ \xi(4) - 4 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 + \begin{bmatrix} \frac{5}{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(3) - 3 - \frac{2}{5} \cdot \xi(4) + \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} \cdot \xi(3) + \frac{6}{5} + \xi(4) - 4 \end{bmatrix} = \frac{5}{21} \cdot \xi(3) - \frac{2}{21} \cdot \xi(4) - \frac{2}{3}.$$

4.7

Задание. Пусть

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i V_i,$$

где $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ является последовательностью независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2},$$

а $\{V_n\}_{n \geq 1}$ является независимой от последовательности $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ последовательностью независимых одинаково распределённых случайных величин со стандартным нормальным законом распределения.

a) Найдите распределение случайной величины $\xi_1 V_1$.

b) Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\{Y_n, \, n \geq 1\}$.

c) Докажите, что процесс $\{Y_n, \, n \geq 1\}$ имеет независимые приращения. Найдите распределение приращений.

d) Докажите, что процесс $\{Y_n, \, n \geq 1\}$ является гауссовским.

e) Запишите совместную плотность распределения $f_{Y_n, Y_{2n}}(x, y)$ случайных величин Y_n и Y_{2n}.

Решение.

a) $\xi_1 V_1$ — это произведение нормальной величины на бернуллиевскую, они независимы.

Найдём характеристическую функцию такого произведения

$$\varphi_{\xi_1 V_1}(t) = Me^{it\xi_1 V_1} =$$

Переберём значения ξ_1. Имеем

$$= M\left(e^{itV_1} \cdot \mathbb{1}\{\xi_1 = 1\} + e^{-itV_1} \cdot \mathbb{1}\{\xi_1 = -1\}\right) =$$

Пользуемся независимостью

$$= Me^{itV_1} \cdot P(\xi_1 = 1) + Me^{-itV_1} \cdot P(\xi_1 = -1).$$

Математическое ожидание — это характеристическая функция стандартного нормального распределия

$$Me^{itV_1} \cdot P(\xi_1 = 1) + Me^{-itV_1} \cdot P(\xi_1 = -1) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Получилось такое же распределение $\xi_1 V_1 \sim N(0,1)$.

Случайные величины V_1 и $-V_1$ имеют одинаковое распределение, потому что плотность симметрична $z_i = \xi_i V_i \sim N(0,1)$, при этом $z_1, z_2, \ldots$ — независимы и

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

b) Найдём математическое ожидание процесса

$$MY_n = M\sum_{i=1}^{n} z_i =$$

Пользуемся независимостью

$$= \sum_{i=1}^{n} Mz_i = 0.$$

Ищем ковариационную функцию процесса

$$K(Y_n, Y_m) = cov(Y_n, Y_m) = cov\left(\sum_{i=1}^{n} z_i, \sum_{j=1}^{m} z_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov(z_i, z_j) =$$

При $i \neq j \quad cov(z_i, z_j) = 0$, при $i = j \quad cov(z_i, z_i) = Dz_i = 1$. Двойная сумма — это количество пар с одинаковыми индексами

$$= min(n, m).$$

c) Запишем приращения Y_n, то есть $Y_{n_1}, Y_{n_2} - Y_{n_1}, Y_{n_3} - Y_{n_2}, \ldots$, индексы $1 \le n_1 \le n_2 < n_3 < \ldots$. Запишем через суммы

$$Y_{n_1}, Y_{n_2} - Y_{n_1}, Y_{n_3} - Y_{n_2}, \ldots = \sum_{i=1}^{n_1} z_i, \sum_{i=n_1+1}^{n_2} z_i, \sum_{i=n_2+1}^{n_3} z_i, \ldots.$$

В каждой такой сумме разные z, они независимы, следовательно, приращения независимы.

Пусть

$$Y_n - Y_m = \sum_{i=m+1}^{n} z_i \sim$$

Сумма независимых нормальных величин — это тоже нормальная величина

$$\sim N\left(0, n-m\right).$$

d) Процесс гауссовский, если линейная комбинация

$$\sum_{r=1}^{k} c_r \cdot I_{n_k} =$$

— гауссовские. Перепишем через приращения

$$= \sum_{r=1}^{n} d_r \left(Y_{n_r} - Y_{n_{r-1}}\right).$$

В такой сумме разности гауссовские и независимы.

Значит и процесс будет гауссовским.

e)

$$f_{Y_n, Y_{2n}}\left(x, y\right) = \frac{1}{2\pi n} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2n}\left(2x^2 - 2xy + y^2\right)\right\}.$$

Ковариация — это матрица из минимумов

$$cov_{\begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{2n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{2n} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} n & n \\ n & 2n \end{bmatrix} = A.$$

Определитель этой матрицы $det\, A = 2n^2 - n^2 = n^2$.

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix} 2n & -n \\ -n & n \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.8

Задание. Пусть X и Y являются независимыми случайными велчинами, причём Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$, а X имеет плотность распределения $f_X\left(x\right) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\}$.

a) Докажите, что случайные величины $X \cos Y$, $X \sin Y$ являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределение.

b) Докажите, что процесс $\xi(t) = X\cos(2\pi t + Y)$, $t \in \mathbb{R}$ является гауссовским. Найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

a) Нужно доказать, что $X\cos Y$ и $X\sin Y$ — независимые с распределением $N(0,1)$, то есть нужно описать распределение двух таким величин.

Найдём характеристическую функцию

$$\varphi_{(X\cos Y,\, X\sin Y)}(\theta_1,\theta_2) = M\,exp\left\{i\left(\theta_1 X\cos Y + \theta_2 X\sin Y\right)\right\} =$$
$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} e^{i(\theta_1 x\cos y + \theta_2 x\sin y)} \cdot \frac{1}{2\pi}\cdot xe^{-\frac{x^2}{2}}dydx =$$

Это двойной интеграл, записанный в полярных координатах

$$u = x\cos y,\ v = x\sin y,\ dudv = xdxdy.$$

Получаем

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\theta_1 u + \theta_2 v)}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot e^{-\frac{v^2}{2}}dudv =$$

Здесь

$$\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot e^{-\frac{v^2}{2}}$$

— это совместная плотность $(X\cos Y,\ X\sin Y)$ — это произведение стандартных плотностей

$$= e^{-\frac{\theta_1^2}{2}-\frac{\theta_2^2}{2}},$$

то есть такие две величины — это независимые стандартные гауссовские случайные величины.

b) $\xi(t) = X\cos(2\pi t + Y)$. Распишем косинус суммы

$$X\cos(2\pi t + Y) = X\cos(2\pi t)\cos Y - X\sin(2\pi t)\sin Y =$$
$$= \cos(2\pi t)(X\cos Y) - \sin(2\pi t)(X\sin Y),$$

следовательно, ξ — гауссовский процесс.

Нужно проверять, что любые суммы

$$\sum_{r=1}^{k} c_r\xi(t_r) = \alpha\cdot X\cos Y + \beta X\sin Y$$

— гауссовская величина, где $X\cos Y$, $X\sin Y$ — независимые гауссовские величины.

Математическое ожидание

$$M\xi(t) = M\left[\cos(2\pi t)(X\cos Y) - \sin(2\pi t)(X\sin Y)\right] =$$
$$= \cos(2\pi t)\, M(X\cos Y) - \sin(2\pi t)\, M(X\sin Y) = 0.$$

Ковариационная функция

$$K(\xi(t), \xi(s)) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t) \cdot M\xi(s) =$$
$$= M[X\cos(2\pi t + Y) X\cos(2\pi s + Y)] -$$
$$- M[X\cos(2\pi t + Y)]\, M[X\cos(2\pi s + Y)] =$$
$$= M\{[\cos(2\pi t)(X\cos Y) - \sin(2\pi s)(X\sin Y)] \times$$
$$\times [\cos(2\pi s)(X\cos Y) - \sin(2\pi s)(X\sin Y)]\} -$$
$$- M[\cos(2\pi t)(X\cos Y) - \sin(2\pi t)(X\sin Y)] \times$$
$$\times M[\cos(2\pi s)(X\cos Y) - \sin(2\pi s)(X\sin Y)] =$$
$$= M[\cos(2\pi t)\cos(2\pi s)(X\cos Y)^2 -$$
$$- \cos(2\pi t)\sin(2\pi s)\, X\cos Y \cdot X\sin Y -$$
$$- \sin(2\pi t)\cos(2\pi s)\, X\sin Y \cdot X\cos Y + \sin(2\pi t)\sin(2\pi s)(X\sin Y)^2] =$$
$$= \cos(2\pi t)\cos(2\pi s) + \sin(2\pi t)\sin(2\pi s) = \cos[2\pi(t - s)].$$

Домашнее задание

4.10

Задание. Выясните, существует ли случайный процесс с ковариационной функцией

a) $K(t, s) = \min(t, s) - ts$, $t, s \in [0, 1]$;

b) $K(t, s) = e^{-|t-s|}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Решение.

a) $K(t, s) = \min(t, s) - ts$, $t, s \in [0, 1]$.

Такой процесс есть. Это броуновский мост;

b) $K(t, s) = e^{-|t-s|}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Симметричность очевидна. Вопрос: буде ли такая функция неотрицательно определена?

Функция зависит только от разности. Сейчас $K(t, s) = \varphi(t - s)$, где $\varphi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

Так что

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j \varphi(t_k - t_j) \geq 0$$

— это условие неотрицательной определённости для характеристической функции. Будет ли эта функция φ характеристической? То есть вопрос в задаче равносилен следующему: будет ли $\varphi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ характеристической функцией? Это характеристическая функция для распределения Коши.

4.11

Задание. Докажите, что функция $K(t,s) = e^{ts}$ является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

Решение. Симметричность есть. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определёной

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j e^{t_k t_j} = \sum_{k,j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_k^i t_j^i}{i!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j t_k^i t_j^i =$$

Разобьём двойную сумму на две

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^{n} c_k t_k^i \sum_{j=1}^{n} c_j t_j^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k t_k \right)^i \geq 0,$$

следовательно, $K(t,s) = e^{ts}$ — ковариационная функция.

4.12

Задание. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — произвольные действительные функции, $c_1, \ldots, c_n$ — неотрицательные числа. Докажите, что функция

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) \varphi_i(s)$$

является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

Решение. Симметричность очевидна. Вопрос: будет ли такая функция неотрицательно определённой?

$$\sum_{k,j=1}^{n} \lambda_k \lambda_j K(t_k, t_j) = \sum_{k,j=1}^{n} \lambda_k \lambda_j \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t_k) \varphi_i(t_j) =$$

Поменяем суммы местами и двойную сумму распишем как две отдельные

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_i(t_k) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_i(t_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \varphi_i(t_k))^2 \geq 0.$$

Значит, функция ковариационная.

4.13

Задание. Пусть случайные величины X и Y имеют совместное гауссовское распределение. Докажите, что процесс $\xi(t) = tX + y$, $t \geq 0$ гауссовский. Найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t)$ — гауссовский, если

$$\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\vec{\alpha}, \vec{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$$

— гауссовская случайная величина, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} \xi(t_i)\, \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (t_i X + Y)\, \alpha_i = X \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i + Y \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

— сумма гауссовских случайных величин, гауссовская, $\forall t_1, \ldots, t_n \geq 0$.

Математическое ожидание $M\xi(t) = M(tX + Y) = tMX + My$.

Ковариационная функция

$$K(t,s) =$$
$$= M[\xi(t)\,\xi(s)] - M\xi(t)\, M\xi(s)\, M[(tX+Y)(sX+Y)] -$$
$$-M(tX+Y)\, M(sX+Y) =$$
$$= tsMX^2 + tM(XY) + sM(XY) + MY^2 - (tMX + MY)(sMX + MY) =$$
$$= tsMX^2 + (t+s)\, M(XY) + MY^2 - ts(MX)^2 - tMX \cdot MY - sMY \cdot MX -$$
$$-(MY)^2 = tsDX + DY + (t+s)\, D(XY).$$

4.14

Задание. Пусть $\{S_n,\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ является случайным блужданием, которое определяется следующим образом: $S_0 = 0$; $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$, где $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что $M[\xi] = 0$, $M\left[\xi^2\right] = 1$. Докажите, что для произвольного фиксированного

$$t \in [0,1] \qquad \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,t),\ n \to \infty.$$

Решение.

$$S_1 = S_0 + \xi_1 = 0 + \xi_1 = \xi_1,$$
$$S_2 = S_1 + \xi_2 = \xi_1 + \xi_2,$$
$$S_3 = S_2 + \xi_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,$$
$$\ldots,$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Математическое ожидание

$$MS_n = M\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}M\xi_i = nM\xi_i = 0.$$

Дисперсия

$$DS_n = D\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}D\xi_i = nD\xi_i = n.$$

Значит, по центральной предельной теореме

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N\left(0, t\right),\ n \to \infty.$$

4.15

Задание. Пусть

$$\hat{S_k} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k}\left(\mathbb{1}\left\{\omega_i = P\right\} - \mathbb{1}\left\{\omega_i = \Gamma\right\}\right)$$

является нормированной разность между количеством решек и гербов, которые выпали при k подбрасываниях монеты. Докажите, что характеристическая функция $\hat{S_k}$ имеет вид

$$\varphi_{\hat{S_k}}\left(\theta\right) = \left[\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right)\right]^k.$$

Вычислите предел $\varphi_{\hat{S_k}}\left(\theta\right)$ при $k \to \infty$. Укажите распределение случайной величины $\hat{S}$, к которой слабо сходятся $\hat{S_k}$ при $k \to \infty$.

Решение. Сначала нужно найти характеристическую функцию

$$\varphi_{\hat{S_k}}\left(\theta\right) = Me^{i\theta\hat{S_k}}.$$

Подставим $Me^{i\theta\hat{S_k}} = Me^{i\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\mathbb{1}\left\{\omega_i = P\right\} - \mathbb{1}\left\{\omega_j = \Gamma\right\}\right)} = Me^{i\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\sum\limits_{j=1}^{k}\eta_j}$. Все слагаемые $\eta_1, \ldots, \eta_k$ в суммах независимы,

$$P\left(\eta_j = 1\right) = \frac{1}{2} = P\left(\eta_j = -1\right).$$

Тогда

$$Me^{i\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\sum\limits_{j=1}^{k}\eta_j} = \prod_{j=1}^{k}\varphi_{\eta_j}\left(\frac{\theta}{\sqrt{k}}\right) =$$

Осталось понять, что такое $\varphi_{\eta_j}\left(\lambda\right) = Me^{-\lambda\eta_j}$. Случайная величина η_j принимаем значения -1 и 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$. Тогда

$$Me^{-\lambda\eta_j} = \frac{1}{2}\cdot e^{i\lambda} + \frac{1}{2}\cdot e^{-i\lambda} = \cos\lambda.$$

Значит,
$$= \cos^k \left(\frac{\theta}{\sqrt{k}} \right).$$

Найдём предел этой характеристической функции, когда $k \to \infty$.

Оказывается, что
$$\varepsilon^{-2} ln \left(\cos \varepsilon\right) \overset{\varepsilon \to 0}{\to} \frac{1}{2}.$$

Когда $\varepsilon \to 0$, $\cos \varepsilon \to 1$ и $ln \left(\cos \varepsilon\right) \to 0$ — это неопределённость 0 на 0. Она раскрывается с помощью правила Лопиталя
$$\frac{ln \left(\cos \varepsilon\right)}{\varepsilon^2} \approx -\frac{1}{2 \cos \varepsilon} \cdot \frac{\sim \varepsilon}{\varepsilon} \to \frac{1}{2},$$
где отношение синуса к его аргументу — замечательный предел.
$$\left(\cos \frac{x}{\sqrt{k}} \right)^k = e^{k \, ln \cos \frac{x}{\sqrt{k}}} =$$
Аргумент косинуса — это $\varepsilon \to 0$. Значит,
$$= e^{\frac{k \varepsilon^2 ln (\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{x^2 \varepsilon^{-2} ln (\cos \varepsilon)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теперь нужно эту сходимость использовать
$$\lim_{k \to \infty} \cos^k \left(\frac{\theta}{\sqrt{k}} \right) = e^{-\frac{\theta^2}{2}}.$$

Вывод: $\varphi_{\hat{S_k}} \left(\theta\right) \to e^{-\frac{\theta^2}{2}}$.

Это характеристическая функция нормального распределения. Оно характеризуется средним и дисперсией. Среднее тут 0, потому что нет i в пределе, дисперсия — 1.

$\hat{S_k}$ сходится к $\hat{S} \sim N \left(0, 1\right)$.

4.16

Задание. Пусть $\xi = \left\{ \xi \left(t\right), t \geq 0 \right\}$ — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией
$$K \left(t, s\right) = \begin{cases} 1 - \left|t - s\right|, & \left|t - s\right| < \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3} - \frac{\left|t-s\right|}{3}, & \frac{1}{2} \leq \left|t - s\right| < 2, \\ 0, & \left|t - s\right| \geq 2. \end{cases} \quad ; t, s \in \mathbb{R}$$

a) Запишите плотноть распределения вектора $\left(\xi \left(4\right), \xi \left(5\right), \xi \left(6\right)\right)$.

b) Найдите условное математическое ожидание $M \left(\xi \left(5\right) \mid \left(\xi \left(4\right), \xi \left(6\right)\right)\right)$.

Решение. $M \left(t\right) = 0$.

а) Нужно найти плотность трёхмерного вектора $(\xi(4), \xi(5), \xi(6))$.

Процесс гауссовский, значит, такой вектор тоже гауссовский. Он характеризуется математическим ожадинием и ковариационной матрицей $cov[\xi(4), \xi(4)] = cov[\xi(5), \xi(5)] = cov[\xi(6), \xi(6)] = K(4,4)$. Будем считать по первой строке. Разность равна нулю $K(4,4) = 1$.

Аналогично считаем

$$cov[\xi(4), \xi(3)] = K(4,5) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

По последней строке находим, что $cov[\xi(4), \xi(6)] = K(4,6) = 0$, а

$$cov[\xi(5), \xi(6)] = K(5,6) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Тогда распределение вектора имеет вид

$$(\xi(4), \xi(5), \xi(6)) \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Плотность имеет вид

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sqrt{det\, A}} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\vec{x} - \vec{m}), A^{-1}(\vec{x} - \vec{m})\right]\right\} =$$

Чтобы написать плотность, нужно найти определитель матрицы и обратную

$$det\, A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{9}{7}\begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}.$$

Подставим определитель и обратную матрицу в выражение для плотности

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 \cdot \frac{7}{9}}} \times$$

$$\times exp\left\{-\frac{9}{14}\left(\frac{8}{9} \cdot x_1^2 - \frac{2}{3} \cdot x_1 x_2 + \frac{2}{9} \cdot x_1 x_3 + x_2^2 + \frac{8}{9} \cdot x_3^2 - \frac{2}{3} \cdot x_2 x_3\right)\right\}.$$

Здесь

$$\vec{x} - \vec{m} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

b) По определению условного математического ожидания

$$M\left(\xi\left(5\right) \mid \left(\xi\left(4\right), \xi\left(6\right)\right)\right) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2 p\left(\xi\left(4\right), x_2, \xi\left(6\right)\right) dx_2}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\left(\xi\left(4\right), x_2, \xi\left(6\right)\right) dx_2.}$$

Теорема о нормальной корреляции

$$M\left(\xi\left(5\right) \mid \left(\xi\left(4\right), \xi\left(6\right)\right)\right) =$$

$$= M\xi\left(5\right) + cov_{\xi(5),(\xi(4),\xi(6))} \cdot cov_{(\xi(4),\xi(6)),(\xi(4),\xi(6))^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} \xi\left(4\right) - M\xi\left(4\right) \\ \xi\left(6\right) - M\xi\left(6\right) \end{bmatrix} =$$

Здесь Первая ковариация равна

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

а вторая —

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi\left(4\right) \\ \xi\left(6\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi\left(4\right) \\ \xi\left(6\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left[\xi\left(4\right) + \xi\left(6\right)\right].$$

4.17

Задание. Рассмотрим случайный процесс $\{X\left(t\right), t \in T\}$ такой, что случайные величины $X\left(t\right)$ являются независимыми с одинаковым распределением $N\left(0, \sigma^2\right)$. Докажите, что процесс $\{X\left(t\right), t \in T\}$ является гауссовским и найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. Процесс гауссовский, если линейная комбинация

$$\sum_{r=1}^{k} c_r X\left(t_r\right)$$

— гауссовская.

В такой сумме слагаемые гауссовские и независимые, значит, процесс будет гауссовским.

$MX\left(t\right) = 0$.

Ковариационная функция

$$K\left(t, s\right) = M\left[X\left(t\right) X\left(s\right)\right] - MX\left(t\right) \cdot MX\left(s\right) = M\left[X\left(t\right) X\left(s\right)\right] = \sigma^2 \cdot \mathbb{1}\left\{t = s\right\}.$$

Занятие 5. Винеровский процесс

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение винеровского процесса.

$\{w(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, если обладает рядом свойств:

1. $w(0) = 0$;
2. однородные приращения. Рассмотрим приращение винеровского процесса на t. Тогда $w(s+t) - w(s) \stackrel{def}{=} w(t) \sim N(0, t)$, то есть распределение процесса зависит только от длины отрезка;
3. независимые приращения на непересекающихся отрезках. Выберем $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Тогда $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ — независимые в совокупности случайные величины.

Запишите плотность винеровского процесса.

Напишем плотность распределения вектора $(w(t_1), \ldots, w(t_n)) = \vec{\xi}$. Будем использовать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом $\vec{\xi}$ имеет плотность

$$q\left(A^{-1}\vec{u}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t_{j+1} - t_j\right)}} \cdot e^{-\frac{u_{j+1} - u_j}{2t_{j+1} - t_j}}.$$

В этой плотности считаем, что $t_0 = 0$, $u_0 = 0$.

Запишите коваріационную функцию винеровского процесса.

Произведение математических ожиданий — это 0, потому

$$K(t,s) = Mw(s)\,w(t) =$$

Используем независимость приращений

$$= M\{w(s)\cdot[w(s) + (w(t) - w(s))]\} =$$

Раскрываем скобки

$$= Mw^2(s) + M\{w(s)[w(t) - w(s)]\} =$$

Первое слагаемое равно s, а второе — нулю, так как это независимые центрированные случайные величины (математическое произведения — это произведение математических ожиданий, а они равны нулю)

$$= s,\ s < t.$$

$K(t,s) = \min(s,t)$.

Аудиторные задачи

5.2

Задание. Пусть $\{W(t),\ t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что $M(W(t) - W(s))^{2n+1} = 0$, $M(W(t) - W(s))^{2n} = (2n-1)!!\,(t-s)^n$.

Решение. Приращение гауссовское. Обозначим

$$\xi = W(t) - W(s) \overset{def}{=} W(t-s)\,.$$

Значит, $\xi \sim N(0, t-s)$, где $t - s = \sigma^2$. Нужны формулы для моментов центрированной гауссовской случайной величины, то есть Знаем, что $M\xi^{2n+1} = 0$, $M\xi^{2n} = (2n+1)!!\sigma^{2n}$.

5.3

Задание. Пусть $\{W(t),\ t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите:

a) $M\left[(W(5) - 2W(1) + 2)^3\right]$;

b) характеристическую функцию случайной величины $W(2) + 2W(1)$;

c) $M[\sin(2W(1) + W(2))]$;

d) $M[\cos(2W(1) + W(2))]$.

Решение. Есть винеровский процесс.

a) $W(5)-2W(1)+2=\xi\sim N(2,5)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет

$$D\xi = D\left[W(5)-2W(1)\right] = cov\left(\xi,\xi\right) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= cov\left[W(5)-2W(1)+2,\, W(5)-2W(1)+2\right] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(5,5)-2K(5,1)-2K(5,1)+4K(1,1) = 5-2-2+4=5.$$

Нужно найти третий момент. ξ не центрирована. Нужно её центрировать $M\xi^3 = M\left[(\xi-2)+2\right]^3$. Раскрываем скобки

$$M\xi^3 = M\left(\xi-2\right)^3 + 6M\left(\xi-2\right)^3 + 12M\left(\xi-2\right)+8.$$

По предыдущей задаче первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 5, так как это дисперсия, первый момент — 0. Тогда $M\xi^3 = 0+6\cdot 5+12\cdot 0+8=38$.

Величины $W(5)$ и $W(1)$ — зависимы, а приращения в винеровском процессе — независимы, потому имеем сумму дисперсий

$$D\left[W(5)-2W(1)\right] = D\left\{\left[W(5)-W(1)\right]+\left[-W(1)\right]\right\}.$$

Дисперсия первого слагаемого равна 4, а второго — 1. Слагаемые независимы $D\left[W(5)-2W(1)\right]=5$;

b) нужно найти характеристическую функцию $W(2)+2W(1)$.

Математическое ожидание такой величины равно нулю, а дисперсия $D\left[W(2)+2W(1)\right] = D\left\{\left[W(2)-W(1)\right]+3W(1)\right\}$. Это независимые величины, поэтому $D\left\{\left[W(2)-W(1)\right]+3W(1)\right\}=1+9=10$. Значит, получается $\varphi_{W(2)+2W(1)}(\lambda) = \varphi_{N(0,10)}(\lambda) = e^{-\frac{10\lambda^2}{2}}$;

c) $M\left[\sin\left(2W(1)+W(2)\right)\right]=0$.

Характеристическая функция случайной величины — это

$$\varphi_\xi(\lambda) = Me^{i\lambda\xi} = M\cos\lambda\xi + iM\sin\lambda\xi,\ \lambda=1;$$

d) $M\left[\cos\left(2W(1)+W(2)\right)\right]=e^{-5}$.

5.4

Задание. Пусть $\{W(t)\,,\,t\geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что процессы

a) $\{-W(t)\,,\,t\geq 0\}$;

b) $\{W(s+t) - W(s), t \geq 0\}$;

c) $\tilde{W}(t) = tW\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \mathbb{1}\{t > 0\}$

тоже являются винеровскими.

Решение. $\{W(t), t \geq 0\}$ — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Если выберем моменты времени $t_1 < \ldots < t_n$ и возьмём вектор

$$(W(t_1), \ldots, W(t_n))$$

— гауссовский. Нужно знать, что в каждой точке $MW(t) = 0$ и

$$K(t,s) = \min(t,s).$$

Если процесс удовлетворит этим трём свойствам, то это винеровский процесс.

$M[-W(t)] = -MW(t) = 0.$

Найдём ковариационную функцию

$$K(t,s) = M[W(t)W(s)] = \min(t,s).$$

Вектор значений этого процесса должен быть гауссовским. Возьмём $(-W(t_1), \ldots, -W(t_n))$. Нужно сказать, что это гауссовский вектор. Почему?

Этот вектор — это линейное преобразование вектора

$$(W(t_1), \ldots, W(t_n)).$$

Линейные преобразования оставляют вектор гауссовским;

b) сначала нужно сказать, что у него гауссовские конечномерные распределения.

Берём n значений этого процесса

$$(W(s+t_1) - W(s), \ldots, W(s+t_n) - W(s))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора $(W(t_1+s), \ldots, W(t_n+s), W(s))$. Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s+t_1) \\ W(s+t_2) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s+t_1) - W(s) \\ W(s+t_2) - W(s) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t_1, t_2) = M\{[W(s+t_1) - W(s)] \cdot [W(s+t_2) - W(s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M\left[W(s+t_1)W(s+t_2) - W(s+t_1)W(s) - W(s)W(s+t_2) + W(s)^2\right] =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация винеровского процесса. Она равна минимуму. Математическое ожидание последнего слагаемого — ковариация в точке (s, s). Получаем

$$= \min(s+t_1, s+t_2) - s - s + s = \min(s+t_1, s+t_2) - s.$$

Можем вынести и сократить $\min(s+t_1, s+t_2) - s = \min(t_1, t_2)$. Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

c) берём конечномерные распределения

$$\left(t_1 W\left(\frac{1}{t_1}\right), \ldots, t_n W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса $\left(W\left(\frac{1}{t_1}\right), \ldots, W\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$.

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t, s) = M\left[tW\left(\frac{1}{t}\right) sW\left(\frac{1}{s}\right)\right] =$$

Выносим t и s. Получаем

$$= ts \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) =$$

Множитель ts — положительный. Он вносится

$$= \min(t, s).$$

Получилось.

5.5

Задание. Пусть $\left\{W^i(t), t \geq 0\right\}_{i \geq 1}$ — независимые винеровские процессы. Найдите константу c_n так, чтобы процесс

$$\tilde{W}(t) = c_n \sum_{i=1}^{n} W^i(t), t \geq 0$$

был винеровским.

Решение. Сложили n независимых винеровских процессов так, чтобы процесс был винеровским.

Скажем, что такой процесс гауссовский

$$\left(\tilde{W}\left(t_1\right), \ldots, \tilde{W}\left(t_n\right)\right) =$$
$$= \left(c_n\left(W^1\left(t_1\right), \ldots, W^n\left(t_n\right)\right), \ldots, c_n\left(W^1\left(t_m\right), \ldots, W^n\left(t_m\right)\right)\right)$$

— это линейное преобразование.

$$\begin{bmatrix} W^1\left(t_1\right) \\ \ldots \\ W^1\left(t_m\right) \\ W^2\left(t_1\right) \\ \ldots \\ W^2\left(t_m\right) \end{bmatrix}$$

— гауссовский вектор, где обе части — независимые гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию и скажем, какой должна быть c_n. Ковариация линейна по каждому аргументу. Это значит, что множители и суммы выносятся

$$cov\left(c_n\sum_{i=1}^{n} W^i\left(t\right),\, c_n\sum_{i=1}^{n} W^i\left(s\right)\right) = c_n^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov\left[W^i\left(t\right),\, W^j\left(s\right)\right] =$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= c_n^2\sum_{i=1}^{n}\min\left(t, s\right) =$$

Имеем n одинаковых слагаемых

$$= c_n^2\cdot n\cdot\min\left(t, s\right).$$

Отсюда получаем

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

тогда процесс винеровский.

5.6

Задание. Пусть $\{W\left(t\right), t\geq 0\}$ — винеровский процесс. Для $0 < t \leq s$ вычислите вероятность $q_t = P\left(W\left(s\right) > W\left(s-t\right) > W\left(s+t\right)\right)$.

Решение. Начнём с того, что нарисуем график винеровского процесса (рис. 28).

Есть 3 случайные величины.

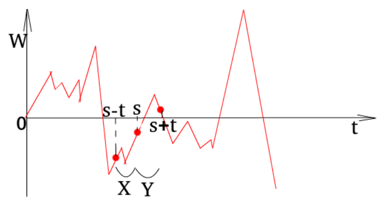

Рис. 28: График винеровского процесса

У такого вектора есть плотность. Случайные величины независимы

$$q_t = \iiint\limits_{x>y>z} p_{(W(s),W(s-t),W(s+t))}(x,y,z)\,dxdydz.$$

Вектор имеет нормальное распределение

$$\begin{bmatrix} W(s) \\ W(s-t) \\ W(s+t) \end{bmatrix} \sim N\left(\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} s & s-t & s \\ s-t & s-t & s-t \\ s & s-t & s+t \end{bmatrix}\right)\right).$$

Нужно использовать какие-то свойства винеровского процесса. Здесь нужно взять 2 приращения. Эти приращения будут независимыми величинами с известным распределением $N(0,t)$.

Вводим в рассмотрение приращения

$$\begin{cases} X = W(s) - W(s-t), \\ Y = W(s+t) - W(s). \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $W(s-t) = W(s) - X$, а из второго — $W(s+t) = W(s) + Y$. Отнимем два последние уравнения

$$W(s+t) - W(s-t) = X + Y.$$

От всех частей неравенства в искомой вероятности вычтем $W(s-t)$ и заменим полученные выражения на введённые приращения

$$q_t = P\{W(s) - W(s-t) > 0 > W(s+t) - W(s-t)\} = P(X > 0 > X+Y).$$

Плотность вектора — это произведение плотностей

$$P(X > 0 > X+Y) = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{-x} \frac{1}{2\pi t} \cdot e^{-\frac{1}{2t}\left(x^2+y^2\right)} dydx =$$

Перейдём в полярную систему координат

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = rdrd\varphi.$$

Получим

$$= \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} d\varphi dr =$$

Изобразим область интегрирования (рис. 29).

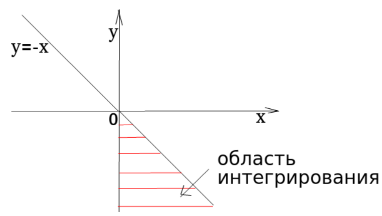

Рис. 29: Область интегрирования

По φ можем сразу проинтегрировать. Интеграл по φ даст просто $\frac{\pi}{4}$. Получаем

$$= \frac{1}{8} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t} \cdot r^2} \cdot \frac{dr^2}{2t} =$$

Интеграл равен единице

$$= \frac{1}{8}$$

5.7

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процессов:

a) $W^0(t) = W(t) - tW(1), 0 \leq t \leq 1$ (броуновский мост);

b) $U(t) = e^{-\frac{t}{2}} W(e^t)$ (процесс Орнштейна-Уленбека).

Выясните, какой из этих процессов является гауссовским.

Решение.

a) $MW^0(t) = 0$, потому что у винеровского процесса математическое ожидание 0. Найдём ковариационную функцию

$K(t,s) = cov[W(t) - tW(1), W(s) - sW(1)] = \min(t,s) - ts - st + st =$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничтожаются

$$= \min(t,s) - st.$$

Если возьмём вектор конечномерных распределений

$$\left(W^0(t_1), \ldots, W^0(t_n)\right),$$

то этот вектор будет гауссовским. Такой процесс называется броуновский мост (рис. 30);

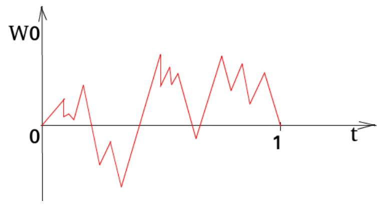

Рис. 30: Броуновский мост

b) $MU(t) = 0$, потому что винеровский. Ковариационная функция

$$K(t,s) = cov\left[e^{-\frac{t}{2}}W\left(e^t\right), e^{-\frac{s}{2}}W\left(e^s\right)\right] =$$

Выносим экспоненты (множители)

$$= e^{-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}}\min\left(e^t, e^s\right) =$$

Экспонента — монотонная функция

$$= e^{-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}+\min(t,s)} = e^{-\frac{1}{2}[t+s-2\min(s,t)]} = e^{-\frac{1}{2}\cdot|t-s|}.$$

Значение процесса $U(t)$ — это линейное преобразование значений винеровского процесса, только в других точках. Процесс гауссовский.

5.8

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$B(t) = (1-t)W\left(\frac{t}{1-t}\right), 0 \leq t < 1;\ B(1) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

Решение. Конечномерные распределения такого процесса

$$(B(t_1), \ldots, B(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$MB(t) = 0.$

Найдём ковариацию

$$cov[B(t), B(s)] = cov\left[(1-t)W\left(\frac{t}{1-t}\right), (1-s)W\left(\frac{s}{1-s}\right)\right] =$$

Множители выносим

$$= (1-t)(1-s)\min\left(\frac{t}{1-t}, \frac{s}{1-s}\right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min(t - ts, s - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min(t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

5.9

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание $M(W(s)|W(t))$ при $s > t$.

Решение. Есть формула

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_{W(s),W(t)}(x, y)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{W(s),W(t)}(x, y)\, dx}.$$

Свойства условного математического ожидания: $M(\xi|\mathcal{F}) = \xi$, если ξ измерима относительно $\mathcal{F}$ и $M(\xi|\mathcal{F}) = M\xi$, если ξ не зависит от $\mathcal{F}$.

Нужно, чтобы появилось приращение

$$M[W(s)|W(t)] = M[W(s) - W(t) + W(t)|W(t)] =$$

Распишем как 2 условных математических ожидания

$$= M[W(s) - W(t)|W(t)] + M[W(t)|W(t)].$$

Первое слагаемое равно нулю, как как имеются независимые величины $M[W(s) - W(t)|W(t)] + M[W(t)|W(t)] = W(t)$.

5.10

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, и пусть τ — независимая от процесса W случайная величина, показательно распределённая с параметром λ. Найдите характеристическую функцию случайной величины $W(\tau)$.

Решение. $\varphi_{W(\tau)}(\lambda) = Me^{i\lambda W(\tau)}$. В винеровский процесс подставляется случайное время. Похожая ситуация

$$Me^{i\lambda \sum\limits_{k=0}^{\tau} \xi_k} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau = k) \cdot M\left(e^{i\lambda \sum\limits_{k=0}^{\tau} \xi_k} \middle| \tau = k\right).$$

Получаем

$$Me^{i\lambda W(\tau)} = MM\left[e^{i\lambda W(\tau)}\middle|\tau\right] = Me^{-\frac{\lambda^2}{2}\cdot\tau^2} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} p_\tau(x)\, dx =$$

Подставим выражение для плотности показательного распределения

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2} - \lambda x} dx = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{\lambda^2}{2}+\lambda\right)} dx =$$

Вынесем λ за скобки

$$= \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\lambda\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)} dx = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\lambda\cdot\frac{\lambda+2}{2}} dx = -\lambda \cdot \frac{2}{\lambda+2} \cdot \frac{1}{\lambda} \, e^{-\lambda x \cdot \frac{\lambda+2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda+2}.$$

Домашнее задание

5.12

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите:

a) $M\left[(W(4) - 2W(1) + 2W(2))^2\right]$;

b) $M\left[(W(1) + 2W(2) + 1)^3\right]$;

c) $M\left[e^{W(3)-2W(2)}\right]$;

d) характеристическую функцию случайной величины $W(1)+2W(2)+1$.

Решение.

a) $W(4) - 2W(1) + W(2) = \xi \sim N(0, 6)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D[W(4) - 2W(1) + W(2)] = cov(\xi, \xi) =$$

Подставим выражения для случайной величины

$$= cov[W(4) - 2W(1) + W(2), W(4) - 2W(1) + W(2)] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(4,4) - 2K(4,1) + K(4,2) - 2K(1,4) + 4K(1,1) - 2K(1,2) +$$
$$+ K(2,4) - 2K(2,1) + K(2,2) =$$
$$= 4 - 2\cdot 1 + 2 - 2\cdot 1 + 4\cdot 1 - 2\cdot 1 + 2 - 2\cdot 1 + 2 = 4 + 4 - 2 = 6.$$

Нужно найти второй момент. ξ центрирована $M\xi^2 = D\xi = 6$;

b) $W(1)+2W(2)+1 = \xi \sim N(1,13)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию. Константа на неё не влияет $D\xi = D\left[W(1) - 2W(2)\right] = cov(\xi,\xi)$. Подставим выражения для случайной величины

$$cov(\xi,\xi) = cov\left[W(1) + 2W(2) + 1, W(1) + 2W(2) + 1\right] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(1,1) + 2K(1,2) + 2K(2,1) + 4K(2,2) = 1 + 2 + 2 + 8 = 13.$$

Нужно найти третий момент. ξ не центрирована. Нужно её центрировать $M\xi^3 = M\left[(\xi-1)+1\right]^3$. Раскрываем скобки

$$M\left[(\xi-1)+1\right]^3 = M(\xi-1)^3 + 3M(\xi-1)^2 + 3M(\xi-1) + 1 =$$

По задаче 5.2 первое слагаемое — 0, так как величина центрирована, второй момент — 13, так как это дисперсия, первый момент — ноль. Тогда

$$= 0 + 3\cdot 13 + 3\cdot 0 + 1 = 39 + 1 = 40;$$

c) $W(3) - 2W(2) = \xi \sim N(0,3)$, потому что это линейная комбинация элементов гауссовского вектора. Найдём дисперсию

$$D\xi = D\left[W(3) - 2W(2)\right] = cov(\xi,\xi) =$$

Подставим выражение для случайной величины

$$= cov\left[W(3) - 2W(2), W(3) - 2W(2)\right] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(3,3) - 2K(3,2) - 2K(2,3) + 4K(2,2) = 3 - 2\cdot 2 - 2\cdot 2 + 4\cdot 2 = 3.$$

Нужно найти

$$Me^{\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x} \cdot p_{\xi}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot 3}}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x-\frac{x^2}{6}}\,dx.$$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты

$$\frac{x^2}{6} - x = \frac{x^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{6} + \left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\right)^2 =$$

Три первых слагаемых образуют полный квадрат

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{(x-3)^2}{2\cdot 3} - \frac{3}{2}.$$

Подставим полученное выражение в экспоненту

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{x-\frac{x^2}{6}} dx = e^{\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{6}} dx =$$

Подинтергальная функция — плотность нормального распределения, потому такой интеграл равен единице

$$= e^{\frac{3}{2}};$$

d) нужно найти характеристическую функцию $W(1) + 2W(2) + 1$.

Математическое ожидание такой величины равно 1, а дисперсия — 13. Значит, получается $\varphi_{W(1)+2W(2)+1}(\lambda) = \varphi_{N(1,13)}(\lambda) = e^{i\lambda - \frac{13\lambda^2}{2}}$.

5.13

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что процессы:

a) $\{W(T) - W(T-t), 0 \leq t \leq T\}, T = const > 0$;

b) $\left\{\sqrt{c}W\left(\frac{t}{c}\right), t \geq 0\right\}, c = const > 0$

тоже являются винеровскими.

Решение. $\{W(t), t \geq 0\}$ — это винеровский процесс. Нужно проверить, что некоторые преобразования винеровского процесса оставляют его винеровским.

a) Сначала нужно сказать, что у процесса гауссовские конечномерные распределения.

Берём n значений этого процесса

$$(W(T) - W(T-t_1), \ldots, W(T) - W(T-t_n))$$

— гауссовский, так как этот вектор — это линейное преобразование вектора $(W(T-t_1), \ldots, W(T-t_n), W(T))$.

Что это будет за линейное преобразование?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(T-t_1) \\ W(T-t_2) \\ W(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(T) - W(T-t_1) \\ W(T) - W(T-t_2) \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание — 0.

Нужно посчитать ковариационную функцию. Нужно проверить, что она равняется минимуму

$$K(t,s) = M\{[W(T) - W(T-t)] \cdot [W(T) - W(T-s)]\} =$$

Перемножим скобки

$$= M\left[W(T)^2 - W(T)W(T-s) - W(T-t)W(T) + W(T-t)W(T-s)\right] =$$

Математическое ожидание трёх последних слагаемых — ковариационные функции винеровского процесса. Они равны минимуму. Математическое ожидание первого слагаемого — ковариация в точке (T, T). Получаем

$$= T - T + s - T + t + \min(T-s, T-t) = s + t - \max(s,t) = \min(t,s).$$

Значит, ковариация такая, как надо. Это винеровский процесс;

b) берём конечномерные распределения

$$\left(\sqrt{c}W\left(\frac{t_1}{c}\right), \dots, \sqrt{x}W\left(\frac{t_n}{c}\right)\right)$$

— гауссовский, так как это линейное преобразование вектора винеровского процесса

$$\left(W\left(\frac{t_1}{c}\right), \dots, W\left(\frac{t_n}{c}\right)\right).$$

Математическое ожидание — 0. Осталось найти ковариационную функцию

$$K(t,s) = M\left[\sqrt{c}W\left(\frac{t}{c}\right)\sqrt{c}W\left(\frac{s}{c}\right)\right] =$$

Выносим $\sqrt{c}$. Получим

$$= cM\left[W\left(\frac{t}{c}\right)W\left(\frac{s}{c}\right)\right] = c \cdot \min\left(\frac{t}{c}, \frac{s}{c}\right) =$$

Множитель c — положительный. Он вносится

$$= \min(t,s).$$

5.14

Задание. Для фиксированного $\rho \in [-1, 1]$ положим

$$W(t) = \rho W^1(t) + \sqrt{1-\rho^2}W^2(t),$$

где $\left\{W^1(t), t \geq 0\right\}, \left\{W^2(t), t \geq 0\right\}$ — независимые винеровские процессы. Докажите, что процесс $\{W(t), t \geq 0\}$ является винеровским и найдите математическое ожидание $M\left[W^1(t) \cdot W(t)\right]$.

Решение. Сложили 2 независимых винеровских процесса так, чтобы процесс был винеровским.

Скажем, что такой процесс гауссовский

$$(W(t_1), \ldots, W(t_n)) =$$
$$= \left(\rho W^1(t_1) + \sqrt{1-\rho^2} W^2(t_1), \ldots, \rho W^1(t_n) + \sqrt{1-\rho^2} W^2(t_n)\right)$$

— это линейное преобразование $\left(W^1(t_1), \ldots, W^1(t_n)\right)$ и

$$\left(W^2(t_1), \ldots, W^2(t_n)\right)$$

— гауссовские вектора.

Математическое ожидание такого процесса — 0, так как математическое ожидание каждого процесса — 0. Посчитаем ковариацию. Ковариация линейна по каждому аргументу

$$cov\left[\rho W^1(t) + \sqrt{1-\rho^2} W^2(t),\, \rho W^1(s) + \sqrt{1-\rho^2} W^2(s)\right] =$$
$$= \rho^2 \cdot cov\left[W^1(t), W^1(s)\right] + \rho\sqrt{1-\rho^2} \cdot cov\left[W^1(t), W^2(s)\right] +$$
$$+ \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho \cdot cov\left[W^2(t), W^1(s)\right] + \left(1-\rho^2\right) \cdot cov\left[W^2(t), W^2(s)\right] =$$

Когда индексы разные — это 0, когда одинаковые — это минимум

$$= \rho^2 \cdot \min(t,s) + \left(1-\rho^2\right) \cdot \min(t,s) = \min(t,s),$$

тогда процесс винеровский.

$$M\left[W^1(t) \cdot W(t)\right] = M\left\{W^1(t) \cdot \left[\rho W^1(t) + \sqrt{1-\rho^2} W^2(t)\right]\right\} =$$

Раскроем скобки

$$= \rho M W^1(t)^2 + \sqrt{1-\rho^2} M\left[W^1(t) W^2(t)\right] = \rho t.$$

5.15

Задание. Пусть $\{W(t),\, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$X(t) = x + \mu t + \sigma W(t),$$

который называется винеровским со сдвигом $\mu \in \mathbb{R}$, коэффициентом диффузии $\sigma > 0$, который стартует из точки $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Из определения винеровского процесса следует, что случайная величина $W(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией t. Таким образом

$$MX(t) = M[x + \mu t + \sigma W(t)] = Mx + M(\mu t) + \sigma MW(t) = x + \mu t.$$

Вычислим теперь $MX(t)\,X(s)$. Имеем

$$MX(t)\,X(s) = M\left\{[x + \mu t + \sigma W(t)] \cdot [x + \mu s + \sigma W(s)]\right\} =$$

Перемножим скобки

$$= M[x^2 + x\mu s + x\sigma W(s) + \mu t x + \mu^2 ts + \mu t\sigma W(s) + \sigma W(t)\,x + \sigma W(t)\,\mu s +$$
$$+ \sigma^2 W(t)\,W(s)] =$$

Математическое ожидание константы — это сама константа, а математическое ожидание винеровского процесса равно нулю

$$= x^2 + x\mu s + \mu t x + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s)\,.$$

Тогда

$$cov\,[X(t)\,, X(s)] = M\,[X(t)\,X(s)] - MX(t) \cdot MX(s) =$$

Подставим найденные выражения для математических ожиданий

$$= x^2 + x\mu s + \mu t x + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - (x + \mu t)(x + \mu s) =$$

Перемножим скобки

$$= x^2 + x\mu s + \mu ts + \mu^2 ts + \sigma^2 \cdot \min(t, s) - x^2 - x\mu s - \mu t x - \mu^2 ts =$$

Сократим

$$= \sigma^2 \cdot \min(t, s)\,.$$

5.16

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$Z(t) = tW\left(\frac{1}{t} - 1\right),\ 0 < t \le 1;\ Z(0) = 0$$

имеет то же распределение, что и броуновский мост.

Решение. Конечномерные распределения такого процесса

$$(Z(t_1)\,, \ldots, Z(t_n))$$

— гауссовские вектора, потому что это линейное преобразование винеровского процесса.

$MZ(t) = 0$.

Найдём ковариацию

$$cov\,[Z(t)\,, Z(s)] = cov\left[tW\left(\frac{1}{t} - 1\right), sW\left(\frac{1}{s} - 1\right)\right] =$$

Множители выносим

$$= ts \cdot \min\left(\frac{1}{t} - 1, \frac{1}{s} - 1\right) =$$

Вносим положительный множитель в минимум

$$= \min(s - ts, t - ts) =$$

Общее выносим за минимум

$$= \min(t, s) - ts,$$

то есть ковариация такая же, как и у броуновского моста.

5.17

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите условное математическое ожидание $M(W(s)| W(t))$ при $s < t$.

Решение.

$$M[W(s) \mid W(t)] =$$
$$= MW(s) + cov[W(s), W(t)] \cdot cov^{-1}[W(t), W(t)] \cdot [W(t) - MW(t)] =$$

Математическое ожидание винеровского процесса равно нулю, а ковариация — минимуму

$$= \min(s, t) \cdot \frac{1}{t} \cdot W(t) =$$

По условию $s < t$, потому

$$= \frac{s}{t} \cdot W(t).$$

5.18

Задание. Пусть W и N — независимые между собой винеровский процесс и пуассоновский процесс с интенсивностью λ соответственно. Найдите характеристическую функцию случайной величны $X(t) = W(N(t))$.

Решение. Нужно найти $\varphi_{W(N(t))}$. Характеристическая функция — это $Me^{isW(N(t))}$. Имеемв винеровский процесс, в который подставляется случайное время. Нужно перебрать все возможные значения случайного времени. Пуассоновский процесс принимает значения от нуля до бесконечности

$$Me^{isW(N(t))} = M\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{N(t) = k\} \cdot e^{isW(k)} =$$

Математическое ожидание суммы можем написать как сумму математических ожиданий

$$= \sum_{k=0}^{\infty} M\mathbb{1}\{N(t) = k\} e^{isW(k)} =$$

Индикатор зависит от пуассоновского процесса, а экспонента — от винеровского, а они независимы

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{N\left(t\right)=k\right\} Me^{isW(k)} =$$

Оба множителя нам известны. Второй — это характеристическая функция гауссовской величины

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2} \cdot k} =$$

Случайная величина $N\left(t\right) \sim Pois\left(\lambda t\right), W\left(k\right) \sim N\left(0, k\right)$. Получаем

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda t e^{-\frac{s^2}{2}}\right)^k}{k!} = e^{\lambda t\left(e^{-\frac{s^2}{2}}-1\right)}.$$

Тогда $Me^{isW(N(t))} = M\left(Me^{isW(t)}\right)\Big|_{k=N(t)} = M\left[e^{isW(N(t))} \mid N\left(t\right)=k\right]$.
Свойство условного математического ожидания $MM\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) = M\xi$.

Занятие 6. Стохастическая непрерывность случайного процесса. Существование непрерывной модификации

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение стохастически непрерывного процесса.

Стохастически непрерывный процесс: $\xi\left(t\right)\overset{P}{\xi}\left(t_0\right), \, t \to t_0$.
Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \qquad P\left(\left|\xi\left(t\right) - \xi\left(t_0\right)\right| > \varepsilon\right) \to 0, \, t \to t_0$.

Сформулируйте достаточное условие существования непрерывной модификации случайного процесса.

Пусть $\xi\left(t\right), \, t \in [0,1]$ удовлетворяет условию

$$\exists \alpha, \beta, C > 0: \qquad \forall t_1, t_2 \in [0,1] \qquad M\left|\xi\left(t_1\right) = \xi\left(t_2\right)\right|^{\alpha} \leq C\left|t_1 - t_2\right|^{1+\beta}.$$

Тогда ξ имеет непрерывную модификацию.

Аудиторные задачи

6.4

Задание. Пусть $\{\xi\left(t\right), \, t \in [0,1]\}$ — случайный процесс, все значения которого являются независимыми и имеют одинаковое невырожденное распределение. Докажите, что этот процесс не является стохастически непрерывным ни в какой точке.

Решение. Распределения невырождены в том смысле, что это не константа (рис. 31).

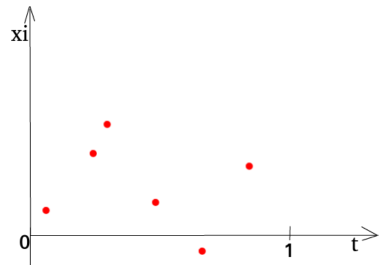

Рис. 31: График функции $\xi\,(t)$

Стохастическая непрерывность означает, что вероятность

$$P\left\{|\xi\,(s) - \xi\,(t)| > \varepsilon\right\} \to 0.$$

Предположим, что распределение равномерное на отрезке $[0, 1]$.
Тогда такая вероятность равна

$$P\left\{|\xi\,(s) - \xi\,(t)| > \varepsilon\right\} = (1 - \varepsilon)^2 \not\to 0,\ t \to s$$

(рис. 32).

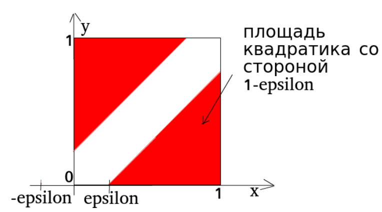

Рис. 32: Площадь квадратика со стороной $1 - \varepsilon$

Для такого процесса вероятность — это постоянная и она не может стремиться к нулю.

6.5

Задание. Пусть $X = \{X\,(t)\,,\, t \in T\}$ — стохастически непрерывный случайный процесс. Докажите, что для произвольной непрерывной ограниченной функции g функция $M\,[g\,(X\,(t))]$ является непрерывной по t.

Решение. Нужно проверить, что если $t \to t_0$, то

$$M\,[g\,(X\,(t))] \to M\,[g\,(X\,(t_0))]\,.$$

Знаем, что если $t \to t_0$, то

$$X\,(t) \xrightarrow{P} X\,(t_0)\,.$$

Следовательно, есть слабая сходимость. Она как раз и означает, что такие математические ожидания должны сходиться.

6.6

Задание. Пусть $\{X(t), t \in T\}$ — стохастчески непрерывный процесс. Докажите, что он является стохастически ограниченным, то есть: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists C$: $\forall t \in [a, b]$ $P(|X(t)| > C) < \varepsilon$.

Решение. Непрерывная на отрезке функция ограничена.

Решим вспомогательную задачу, то есть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная.

Тогда f — ограничена, то есть $sup|f| < \infty$. Попробуем это доказать.

Предположим противное, то есть $\forall n \, \exists t_n : |f(t_n)| > n$. Это бы означало неограниченность.

6.7

Задание. Пусть $\{\xi(t), t \in [a, b]\}$ — стохастически непрерывный процесс, а f — неслучайная функция, определённая на $[a, b]$. Докажите, что случайный процесс $\eta(t) = \xi(t) + f(t), t \in [a, b]$ является стохастически непрерывным в тех и только тех точках отрезка $[a, b]$, где является непрерывной функция f.

Решение. Нужно доказывать в обе стороны.

Сначала предположим, что f — непрерывная. Пусть f — непрерывная в точке t_0. Будем сейчас проверять, что сумма стохастически непрерывна.

Если $\xi(t)$ — стохастически непрерывна, то

$$\xi(t) \xrightarrow{P} \xi(t_0)$$

при $t \to t_0$.

Сходимость по вероятности сохраняется при непрерывных операциях. Сумма — непрерывная операция.

Знаем, что f — непрерывна, то есть если $t \to t_0$, то $f(t) \to f(t_0)$. От ω тут зависимости нет. Эту сходимость можно интерпретировать как сходимость почти наверное, следовательно,

$$f(t) \xrightarrow{P} f(t_0).$$

Значит и сумма будет сходиться. Значит, отсюда следует, что η — стохастически непрерывен.

Теперь предоложим, что вся сумма стохастически непрерывна.

Пусть η — стохастически непрерывен в t_0. Это значит, что

$$\eta(t) \xrightarrow{P} \eta(t_0), \, t \to t_0.$$

Для η и ξ мы знаем, что есть сходимость по вероятности. Надо взять разность. Разность — это f, то есть

$$\begin{cases} \xi(t) + f(t) \xrightarrow{P} \xi(t_0) + f(t_0), \\ \xi(t) \xrightarrow{P} \xi(t_0). \end{cases}$$

Вычтем из первого второе

$$f(t) \xrightarrow{P} f(t_0).$$

Нужно проверить, что для неслучайной функции сходимость по вероятности и просто сходимость — одно и то же. Сходимость по вероятности: $\forall\varepsilon > 0 \qquad P\{|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon\} \to 0$, $t \to t_0$. Это есть. Просто сходимость: $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0$, чтобы выполнялось соотношение $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ при $|t - t_0| < \delta$. Это нужно проверить.

$\forall\varepsilon > 0\, \forall\alpha > 0\, \exists\delta > 0 \qquad P\{|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon\} < \alpha$ при $|t - t_0| < \delta$.

Функция f — неслучайная функция, то есть событие неслучайно. Его вероятность равна или нулю, или единице. Если $\alpha > 1$, то вероятность равна нулю. Значит, $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ при $|t - t_0| < \delta$. То есть $\alpha < 1$.

Тогда $P\{|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon\} = 0$. Из этого следует, что при $|t - t_0| < \delta$ выполняется дополнение $|f(t) - f(t_0)| \le \varepsilon$. Это и значит непрерывность в точке t_0. Таким образом, для неслучайных величин все сходимости равносильны.

6.8

Задание. Пусть $\{W(t),\, t \ge 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что для произвольного $A > 0$

$$P\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\left|W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right)\right| > A\right\} \to 1,\ n \to \infty.$$

Решение. Приращения — нормальные независимые величины

$$W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

Сумма одинаково распределённых случайных величин

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left|W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \cdot \sqrt{n} \overset{a.s.}{\to} M\,|W(1)|\,,\ n \to \infty$$

по усиленному закону больших чисел, так как

$$\sqrt{n}\left[W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right)\right] \sim N(0,1).$$

Тогда вероятность

$$P\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\left|W\left(\frac{i+1}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right)\right| \cdot \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt{n}} > A\right\} = P\{M\,|W(1)| > 0\} = 1.$$

6.9

Задание. Пусть $\{X(t), t \in T\}$ — случайный процесс такой, что

$$MX(t) = 0,\ MX^2(t) = 1$$

для произвольного $t \in T$.

a) Докажите, что $|MX(t)X(t+h)| \le 1$ для произвольного $h > 0$ и произвольного $t \in [0, T-h]$.

b) Допустим, что для некоторых $\lambda < \infty$, $p > 1$ и $h_0 > 0$

$$M[X(t)X(t+h)] \ge 1 - \lambda h^p$$

для произвольного $h \in (0, h_0]$. Докажите, что $\{X(t), t \in T\}$ имеет непрерывную модификацию.

Решение.

a) Пусть $X(t) = \xi$ и $X(t+h) = \eta$. Тогда

$$|M\xi\eta| \le M|\xi\eta| \le (M|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (M|\eta|^q)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(неравенство Гёльдера). Возьмём $p = q = 2$.

Получаем неравенство Коши-Буняковского

$$M[X(t)X(t+h)] \le \left\{M|X(t)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{M|X(t+h)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

b) Будем пользоваться достаточным условием Колмогорова

$$\exists \alpha, \beta, C > 0 : \forall t_1, t_2 \in [0,1] \qquad M|\xi(t_1) - \xi(t_2)|^\alpha \le C|t_1 - t_2|^{1-\beta}.$$

Тогда у процесса будут непрерывные модификации. Нужно оценить

$$M|X(t+h) - X(t)|^2 = M\left[X^2(t+h) - 2X(t+h)X(t) + X^2(t)\right] =$$

Воспользуемся линейностью математического ожидания

$$= MX^2(t+h) - 2M[X(t+h)X(t)] + MX^2(t).$$

Здесь первое и последнее слагаемые равны единице, а второе не меньше $1 - \lambda h^p$. Тогда

$$MX^2(t+h) - 2M[X(t+h)X(t)] + MX^2(t) \ge 2 - 2(1 - \lambda h^p) = 2\lambda h^p,$$

где $2\lambda = const$, $p = 1 + \beta$.

Теорема Колмогорова работает с $\alpha = 2$, $C = 2\lambda$ и $\beta = p - 1$.

Значит, такой процесс имеет непрерывные модификации.

Домашнее задание

6.13

Задание. На отрезке $[0,1]$ независимым образом наугад выбраны две точки. Пусть $\xi(t)$ — количество точек, которые попали в интервал

$$[0,t]\,,\; t\in[0,1]\,.$$

Найдите одномерные распределения процесса $\{\xi(t)\,,\, t\in[0,1]\}$. Выясните, является ли этот процесс стохастически непрерывным.

Решение. Начнём с того, что найдём одномерные распределения.

ξ — дискретная величина $P\{\xi(t)=k\}=C_2^k t^k(1-t)^{2-k}\,,\; k\in\{0,1,2\}$.

При $k=0$ получаем $P\{\xi(t)=0\}=C_2^0 t^0(1-t)^{2-0}=(1-t)^2$.

При $k=1$ получаем $P\{\xi(t)=1\}=C_2^1 t^1(1-t)^{2-1}=2t(1-t)$.

При $k=2$ получаем $P\{\xi(t)=2\}=C_2^2 t^2(1-t)^{2-2}=t^2$.

Будет ли этот процесс стохастически непрерывным? Стохастическая непрерывность означает следующее $P\{|\xi(t)-\xi(s)|>\varepsilon\}\to 0$, когда $t\to s$ или $s\to t$. Тогда $P\{|\xi(t)-\xi(s)|>\varepsilon\}=P($в интервал $[s,t]$ попала хотя бы одна точка$)=P($в интервал $[s,t]$ попала одна точка$)+P($в интервал $[s,t]$ попало две точки$)=2[1-(t-s)](t-s)+(t-s)^2=2(t-s)-(t-s)^2\to 0$, когда $t\to s$ или $s\to t$. То есть вывод такой, что этот процесс стохастически непрерывен.

6.14

Задание. Пусть $\{W(t)\,,\, t\ge 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что

$$\frac{W(t)}{t}\overset{P,\,n\to\infty}{\to}0.$$

Решение.

$$\frac{W(t)}{t}\overset{P,\,n\to\infty}{\to}0,$$

если

$$\forall\varepsilon>0\, P\left\{\left|\frac{W(t)}{t}\right|>\varepsilon\right\}\to 0,$$

когда $t\to\infty$.

Найдём математическое ожидание такой величины

$$M\frac{W(t)}{t}=\frac{1}{t}\cdot MW(t)=0.$$

Посчитаем дисперсию

$$D\frac{W(t)}{t}=\frac{1}{t^2}\cdot DW(t)=\frac{1}{t^2}\cdot t=\frac{1}{t}.$$

Используем неравенство Чебышева

$$P\left\{\left|\frac{W(t)}{t}-M\frac{W(t)}{t}\right|\geq\varepsilon\right\}=P\left\{\left|\frac{W(t)}{t}-0\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{D\frac{W(t)}{t}}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{1}{t}}{\varepsilon^2}=\frac{1}{t\varepsilon^2}\to$$
$$\to 0,\ t\to\infty.$$

6.15

Задание. Докажите, что если случайный процесс $\{\xi(t), t\in\mathbb{R}\}$ имеет непрерывную функцию математического ожидания $m(t)$ и непрерывную по t, s ковариационную функцию $K(t,s)$, то он является стохастически непрерывным.

Решение. Стохастическая непрерывность означает следующее

$$P\{|\xi(t)-\xi(s)|>\varepsilon\}\to 0,$$

когда $t\to s$ или $s\to t$.

Используем неравенство Чебышева

$$P\{|\xi(t)-\xi(s)-[m(t)-m(s)]|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D[\xi(t)-\xi(s)]}{\varepsilon^2}=$$

Дисперсия суммы нескольких случайных величин вычисляется по формуле

$$D(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\sum_{i,j=0}^{n}cov(\xi_i,\xi_j).$$

Тогда

$$=\frac{K(t,t)-K(t,s)-K(t,s)+K(s,s)}{\varepsilon^2}\to 0$$

при $t\to s$ или $s\to t$. То есть вывод такой, что этот процесс стохастически непрерывен.

6.16

Задание. Пусть $\{X(t), t\in T\}$ — стохастически непрерывный процесс, а g — непрерывная функция. Докажите, что процесс $\{g(X(t)), t\in T\}$ тоже является стохастически непрерывным.

Решение. Процесс подставляется в функцию g.

Нужно проверить, что если $t\to s$, то $P\{|g(X(t))-g(X(s))|>\varepsilon\}\to 0$.

Знаем, что если $t\to s$, то

$$X(t)\xrightarrow{P}X(s),$$

функция g — непрерывная функция. Тогда

$$g(X(t))\xrightarrow{P}g(X(s)),\ t\to s.$$

Непрерывная функция сохраняет сходимость по вероятности.

Задача

Задание. $\{X(t), t \in [a,b]\}$ — это стохастически непрерывный процесс. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |t-s| < \delta \Rightarrow P(|X(t) - X(s)| > \varepsilon) < \varepsilon$. Это равномерная стохастическая непрерывность.

Решение. $\{X(t), t \in [a,b]\}$ — это стохастически непрерывный процесс на отрезке $[a,b]$. Нужно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall t \in [a,b] \; \forall s \in [a,b], \; |t-s| < \delta \Rightarrow P(|X(t) - X(s)| > \varepsilon) < \varepsilon.$$

Решим вспомогательную задачу, то есть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывна. Тогда f — равномерно непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \delta > 0 \, \forall t \in [a,b] \; \forall s \in [a,b] \; (|t-s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon).$$

Попробуем это доказать.

Пусть

$$f(t) \in C([a,b]) \Rightarrow \forall t_0 \in [a,b] \; \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_0 > 0 \, \forall t \in [a,b]$$
$$\left(|t - t_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Пусть ε задано и для каждой точки t_0 отрезка своё δ_0 найдено. Построим $\forall t_0 \in [a,b]$ окрестность

$$|t - t_0| < \frac{\delta_0}{2}.$$

Они образуют покрытие $[a,b]$ интервалами. Следовательно, по лемме Гейне-Бореля, можно выбрать из этого покрытия конечное подпокрытие для отрезка $[a,b]$. Пусть у нас остались следующие окрестности:

$$|t - t_1| < \frac{\delta_1}{2}, \; |t - t_2| < \frac{\delta_2}{2}, \; \ldots, \; |t - t_n| < \frac{\delta_n}{2}.$$

Возьмём

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \ldots, \frac{\delta_n}{2}\right\}.$$

Покажем, что $\forall t', t'' \in [a,b] \; |t' - t''| < \delta \Rightarrow |f(t') - f(t'')| < \varepsilon$. Пусть $t' \in [a,b]$ — произвольная. Тогда в нашем конечном покрытии найдётся хотя бы одна окрестность, содержащая эту точку

$$t_k : |t' - t_k| < \frac{\delta_k}{2}.$$

Пусть теперь $t'' \in [a,b], : |t'' - t'| < \delta$. Тогда

$$|t'' - t_k| = |t'' - t' + t' - t_k| \leq |t'' - t'| + |t' - t_k| < \delta + \frac{\delta_k}{2} < \frac{\delta_k}{2} + \frac{\delta_k}{2} = \delta_k.$$

То есть

$$|t'' - t_k| < \delta_k \Rightarrow |f(t'') - f(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$|f(t'') - f(t')| = |f(t'') - f(t_k) + f(t_k) - f(t')| \leq$$
$$\leq |f(t'') - f(t_k)| + |f(t') - f(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Будем рассуждать по аналогии.

Пусть $\forall \varepsilon > 0\, P\{|X(t) - X(t_0)| \geq \varepsilon\} \to 0$, когда $t \to t_0$. Пусть ε задано и для каждой точки t_0 отрезка своё δ_0 найдено. Построим $\forall t_0 \in [a, b]$ окрестность

$$|t - t_0| < \frac{\delta_0}{2}.$$

Они образовывают покрытие $[a, b]$ интервалами. Следовательно, по лемме Гейне-Бореля, можно выбрать из этого покрытия конечное подпокрытие для отрезка $[a, b]$. Пусть у нас остались следующие окрестности:

$$|t - t_1| < \frac{\delta_1}{2},\ |t - t_2| < \frac{\delta_2}{2},\ \ldots,\ |t - t_n| < \frac{\delta_n}{2}.$$

Возьмём

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \ldots, \frac{\delta_n}{2}\right\}.$$

Покажем, что $\forall t', t'' \in [a, b]\ |t' - t''| < \delta \Rightarrow P\{|X(t') - X(t'')| \geq \varepsilon\} < \varepsilon$. Пусть $t' \in [a, b]$ — произвольное. Тогда в нашем конечном покрытии найдётся хотя бы одна окрестность, содержащая эту точку

$$t_k\ :\ |t' - t_k| < \delta_k.$$

Пусть теперь $t'' \in [a, b]$, $|t'' - t'| < \delta$. Тогда

$$|t'' - t_k| = |t'' - t' + t' - t_k| < \delta + \frac{\delta_k}{2} < \frac{\delta_k}{2} + \frac{\delta_k}{2} = \delta_k.$$

То есть

$$|t'' - t_k| < \delta_k \Rightarrow P\left\{|X(t'') - X(t_k)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При этом

$$|t' - t_k| < \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \Rightarrow P\left\{|X(t) - X(t_k)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$P\{|X(t'') - X(t')| \geq \varepsilon\} = P\{|X(t'') - X(t_k) + X(t_k) - X(t')| \geq \varepsilon\} =$$
$$= P\{|X(t'') - X(t_k)| + |X(t_k) - X(t')| \geq \varepsilon\} =$$
$$= P\left\{|X(t'') - X(t_k)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|X(t_k) - X(t')| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $X(t)$ — равномерно стохастически непрерывен на $[a, b]$.

6.17

Задание. Пусть все значения процесса $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ являются независимыми и равномерно распределёнными на $[0,1]$. Выясните, имеет ли этот процесс непрерывную модификацию.

Решение. Из задачи 6.4 $X(t)$ не стохастически непрерывен в каждой точке.

Стохастическая непрерывность означает, что $X(t) \xrightarrow{P} X(t_0)$ при $t \to t_0$.

Пусть процесс $X(t)$ имеет непрерывную модификацию. Тогда

$$\begin{cases} X(t) = \tilde{X}(t) \ a.s., \\ \tilde{X}(t) \to \tilde{X}(t_0), \ t \to t_0, \\ X(t_0) = \hat{X}(t_0) \ a.s. \end{cases} \Rightarrow X(t) \to X(t_0) \ a.s.,$$

то есть процесс $X(t)$ стохастически непрерывен — противоречие с условием. Значит, $X(t)$ не имеет непрерывной модификации.

6.18

Задание. Пусть $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K(t,s)$, которая равна

a) $e^{-|t-s|}$,

b) $(t^\alpha + s^\alpha - |t-s|^\alpha)/2$, $\alpha \in (0,2]$.

Докажите, что X имеет непрерывную модификацию.

Решение. Нам нужно доказать, что существуют такие константы

$$\alpha > 0, \beta > 0, C > 0,$$

что $M|X(t+h) - X(t)|^\alpha \le C|h|^{1+\beta}$ для произвольных t, $t+h \in \mathbb{R}^+$, $h > 0$.

Поскольку процесс X является гауссовским, то для произвольных

$$t, t+h \in \mathbb{R}^+$$

вектор $(X(t), X(t+h))$ является гауссовским. Поэтому случайная величина $X(t+h) - X(t)$, как линейная комбинация компонент гауссовского вектора, имеет нормальное распределение. Найдём параметры этого распределения. Имеем $M[X(t+h) - X(t)] = MX(t+h) - MX(t) = 0$,

a) $D[X(t+h) - X(t)] = M[X(t+h) - X(t)]^2$. Раскроем квадрат

$$M[X(t+h) - X(t)]^2 = K(t+h, t+h) - 2K(t+h, t) + K(t,t) =$$

Подставим выражения для ковариационной функции

$$= e^{-|t+h-t-h|} - 2e^{-|t+h-t|} + e^{-|t-t|} = 1 - 2e^{-|h|} + 1 = 2 - 2e^{-h}.$$

Тогда любой чётный момент случайной величины $X(t+h) - X(t)$ равен $M[X(t+h) - X(t)]^{2n} = (2n-1)!!\left(2 - 2e^{-h}\right)^n$.

Поскольку $1 - e^{-h} \le h$ для $h > 0$, то $M[X(t+h) - X(t)]^4 \le 12h^2$ и, значит, достаточное условие Колмогорова существования непрерывной модификации выполняется при $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $C = 12$.

b) Имеем

$$D[X(t+h) - X(t)] = M[X(t+h) - X(t)]^2 =$$

Раскроем квадрат

$$= K(t+h, t+h) - 2K(t+h, t) + K(t, t) =$$
$$= \frac{(t+h)^\alpha + (t+h)^\alpha - |t+h-t-h|^\alpha}{2} -$$
$$-2 \cdot \frac{(t+h)^\alpha + t^\alpha - |t+h-t|^\alpha}{2} + \frac{t^\alpha + t^\alpha - |t-t|^\alpha}{2} =$$
$$= (t+h)^\alpha - (t+h)^\alpha - t^\alpha - h^\alpha + t^\alpha = -h^\alpha.$$

Тогда любой чётный момент случайной величины $X(t+h) - X(t)$ равен $M[X(t+h) - X(t)]^{2n} = (2n-1)!!\,(-h^\alpha)^n$.

В частности, $M[X(t+h) - X(t)]^2 = 3!!\,(-h^\alpha) = 3h^\alpha$ и, значит, достаточное условие Колмогорова существования непрерывной модификации выполняется при $\alpha = 2$, $\beta = \alpha - 1 = 2 - 1 = 1$, $C = 3$.

6.19

Задание. Для процесса Пуассона найдите предел с вероятностью единица последовательности случайных величин

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(N(t_{i+1}) - N(t_i)\right)^2$$

при $\max(t_{i+1} - t_i) \to 0$, где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ — разбитие отрезка $[0, 1]$.

Решение.

$$P\left\{\sum_{i=0}^{n-1} [N(t_{i+1}) - N(t_i)]^2 > \varepsilon\right\} \le \frac{M\sum\limits_{i=0}^{n-1} [N(t_{i+1}) - N(t_i)]^2}{\varepsilon} =$$

Пользуемся независимостью приращений

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} M[N(t_{i+1}) - N(t_i)]^2}{\varepsilon} =$$

Пользуемся однородностью приращений

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} MN^2\left(t_{i+1}-t_i\right)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}\left[DN\left(t_{i+1}-t_i\right)+M^2N\left(t_{i+1}-t_i\right)\right] =$$

Пусть случайная величина $X\left(t\right)$ с распределением Пуассона имеет параметр λ. Тогда

$$= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\lambda\left(t_{i+1}-t_i\right)+\lambda^2\left(t_{i+1}-t_i\right)^2\right] = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda\left(t_{i+1}-t_i\right)\left[1+\lambda\left(t_{i+1}-t_i\right)\right] \leq$$

Оценим сумму максимумом

$$\leq \frac{n}{\varepsilon}\cdot\left\{\lambda\max\left(t_{i+1}-t_i\right)\left[1+\lambda\max\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]\right\} \to 0$$

при $\max\left(t_{i+1}-t_i\right) \to 0$, следовательно, предел по вероятности равен нулю.

Занятие 7. L_2 теория

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение непрерывного в среднем квадратическом случайного процесса.

ξ непрерывен в среднем квадратическом в точке t_0, если

$$\xi(t) \overset{L_2}{\to} \xi(t_0)$$

при $t \to t_0$, то есть $M\left[\xi(t) - \xi(t_0)\right]^2 \to 0$, $t \to t_0$.

Случайный процесс ξ непрерывен в среднем квадратическом на T, если ξ непрерывен в среднем квадратическом в каждой точке $t_0 \in T$.

Как определяются производная случайного процесса, интеграл случайного процесса?

ξ дифференцируем в среднем квадратическом в точке t_0, если

$$\exists L_2 - \lim_{t \to t_0} \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} = \xi'(t_0).$$

Случайный процесс ξ интегрируем в среднем квадратическом на отрезке $[a, b]$, если

$$\exists L_2 - \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(t_k)\, \Delta t_k,$$

где π — разбиение: $a = t_0 < \ldots < t_n = b$.

Модуль разбиения — это максимумальная разность между соседними точками.

Как изменяются характеристики случайного процесса при дифференцировании, интегрировании?

$\xi \in L_2 \,:\, M|\xi|^2 < \infty$, $(\xi, \eta) = M\xi\overline{\eta}$, $(\xi, \xi) = M|\xi|^2$.

Приведите условия непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости случайного процесса в терминах его ковариационной функции.

ξ непрерывен в среднем квадратическом на интервале T тогда и только тогда, когда $m \in C(T)$, $K \in C(T \times T)$.

Случайный процесс ξ дифференцируем в среднем квадратическои в точке t_0 тогда и только тогда, когда m дифференцируема в точке t_0 и

$$\exists \lim_{s,t \to t_0} \frac{K(t,s) - K(t,t_0) - K(t_0,s) + K(t_0,t_0)}{(s-t_0)(t-t_0)}.$$

Непрерывный в среднем квадратическом на отрезке $[a,b]$ процесс ξ интегрируем в среднем квадратическом на этом отрезке.

Аудиторные задачи

7.2

Задание. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — интегрируемые с квадратом случайные величины. Докажите, что случайный процесс

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e^{kt}$$

имеет производную в среднем квадратическом и найдите её.

Решение. $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in L_2$, то есть есть n величин, и процесс определяется как

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_l e^{kt}.$$

Нужно проверить, что этот процесс дифференцируем и найти его производную в L_2.

Время t входит только в экспоненту, которую мы умеем дифференцировать. Нужно проверить, что

$$\left\| \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k k e^{kt_0} \right\| \to 0,$$

когда $t \to t_0$.

Будем это проверять. Можно $\xi(t)$ расписать.

$\xi(t)$ — это сумма

$$\left\| \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k k e^{kt_0} \right\| = \left\| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \zeta_k e^{kt} - \sum\limits_{k=1}^{n} \zeta_k e^{kt_0}}{t - t_0} - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k k e^{kt_0} \right\| =$$

Во всех слагаемых есть сумма и ζ_k. Так что приведём подобные, и будет одна сумма

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \left(\frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{t - t_0} - ke^{kt_0} \right) \right\| \leq$$

Первое слагаемое в скобках стремится к производной, а второе и есть производная. Их разность стремится к нулю. Используем неравенство треугольника

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left\| \zeta_k \left(\frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{t - t_0} - ke^{kt_0} \right) \right\| =$$

С помощью свойства $\|\alpha\xi\| \leq |\alpha| \cdot \|\xi\|$ коэффициент выносится из нормы

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{t - t_0} - ke^{kt_0} \right| \cdot \|\zeta_k\| \to$$

Под модулем стоят числа, которые сходятся к нулю, под нормой — числа

$$\to 0.$$

7.3

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что случайный процесс

$$\left\{ \eta(t) = \int\limits_0^t W(s)\, ds,\ t \geq 0 \right\}$$

являюется дифференцируемым в среднем квадратическом и что

$$\eta'(t) = W(t)$$

для произвольного $t \geq 0$.

Решение. Дифференцируем интеграл по верхнему пределу.

Должна получиться подинтегральная функция. Нужно проверить, что

$$\frac{\eta(t) - \eta(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow{L_2} W\left(t_)\right).$$

Проверяем. Вместо η подставляем интеграл

$$M \left[\frac{\eta(t) - \eta(t_0)}{t - t_0} - W(t_0) \right]^2 = M \left[\frac{\int\limits_0^t W(s)\, ds - \int\limits_0^{t_0} W(s)\, ds}{t - t_0} - W(t_0) \right]^2 =$$

Разность интегралов — это интеграл от t_0 до t. Так что

$$= M\left[\frac{\int\limits_{t_0}^{t} W(s)\,ds}{t-t_0} - W(t_0)\right]^2 =$$

Случайную величину $W(t_0)$ можно внести под интеграл, потому что он не зависит от s. Знаменатель вынесем из-под интеграла

$$= M\left\{\int\limits_{t_0}^{t} [W(s) - W(t_0)]\,ds\right\}^2 \cdot \frac{1}{(t-t_0)^2} =$$

Найдём дисперсию

$$D\int\limits_a^b \xi(s)\,ds = cov\left(\int\limits_a^b \xi(s)\,ds, \int\limits_a^b \xi(r)\,dr\right).$$

Ковариация — это линейная функция, оба интеграла выносятся

$$cov\left(\int\limits_a^b \xi(s)\,ds, \int\limits_a^b \xi(r)\,dr\right) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b cov\left[\xi(s), \xi(t)\right] dsdr.$$

Тогда

$$= \frac{1}{(t-t_0)^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} cov\left[W(s) - W(t_0), W(r) - W(t_0)\right] dsdr =$$

Ковариацию винеровского процесса мы знаем

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} \left[\min(s,r) - t_0 - t_0 + t_0\right] dsdr \cdot \frac{1}{(t-t_0)^2} =$$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничножаются

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} \left[\min(s,r) - t_0\right] dsdr \cdot \frac{1}{(t-t_0)^2} \le \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} (t-t_0)\,dsdr \cdot \frac{1}{(t-t_0)^2} =$$

Величина $t - t_0 = const$, она вносится

$$= t - t_0 \to 0.$$

Это и надо было проверить.

7.4

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите существование интеграла в среднем квадратическом

$$\int\limits_0^\infty e^{-t} W(t)\,dt = L_2 - \lim_{T \to +\infty} \int\limits_0^T e^{-t} W(t)\,dt$$

и найдите его распределение.

Решение. Рассматриваются интегралы

$$\int\limits_0^T e^{-t} W(t)\,dt.$$

Нужно доказать, что у этих интегралов есть предел, то есть

$$\int\limits_0^T e^{-t} W(t)\,dt \overset{L_2,\, T \to \infty}{\to} ?$$

Что нужно проверять, чтобы доказать, что этот интеграл сходится? Надо брать математическое ожидание разностей в квадрате. Предела мы не знаем.

Гильбертово пространство обладает свойством полноты

$$\xi_n \overset{L_2,\, n \to \infty}{\to} \xi$$

тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ фундаментальная, то есть

$$M(\xi_n - \xi_m)^3 \overset{n,m \to \infty}{\to} 0.$$

Предположим, что $T_1 < T_2$. Из полноты следует, что нам достаточно проверить такое

$$M\left[\int\limits_0^{T_1} e^{-t} W(t)\,dt - \int\limits_0^{T_2} e^{-t} W(t)\,dt\right]^2 = M\left[\int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-t} W(t)\,dt\right]^2 =$$

Это двойной интеграл от ковариации

$$= \int\limits_{T_1}^{T_2}\int\limits_{T_1}^{T_2} cov\left[e^{-t} W(t), e^{-s} W(s)\right] dtds = \int\limits_{T_1}^{T_2}\int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-t-s} \min(t,s)\,dtds =$$

Нужно проверить, что это выражение стремится к нулю, когда $T_1, T_2 \to \infty$. Распишем для всех случаев

$$= \int\limits_{T_1}^{T_2}\left(\int\limits_{T_1}^{s} e^{-t-s} t dt\right) ds + \int\limits_{T_1}^{T_2}\left(\int\limits_{s}^{T_2} e^{-t-s} s dt\right) ds \leq$$

Пусть $t < s$. Тогда

$$\leq \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\int\limits_{T_1}^{s} e^{-t-s} s dt \right) ds + \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\int\limits_{s}^{T_2} e^{-t-s} s dt \right) ds = \int\limits_{T_1}^{T_2} \int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-s} e^{-t} s dt ds =$$

Интегрируем по y, получаем

$$= \int\limits_{T_1}^{T_2} s e^{-s} ds \int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-t} dt = \int\limits_{T_1}^{T_2} s e^{-s} ds \cdot \left(e^{-T_2} - e^{-T_1} \right) =$$

Берём интеграл по частям

$$= \left(e^{-T_2} - e^{-T_1} \right) \left(-e^{-s} s \Big|_{T_1}^{T_2} - e^{-s} \Big|_{T1}^{T_2} \right) =$$

Подставим пределы интегрирования

$$= \left(e^{-T_2} - e^{-T_1} \right) \left(-T_2 e^{-T_2} + T_1 e^{-T_1} - e^{-T_2} + e^{-T_1} \right) \overset{T_1, T_2 \to \infty}{\to} 0,$$

Так как каждое слагаемое стремится к нулю, то есть мы посчитали расстояние между двумя интегралами и показали, что оно стремится к нулю

$$\exists \lim_{T \to \infty} \int\limits_{0}^{T} e^{-t} W(t)\, dt = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} W(t)\, dt.$$

Теперь скажем, какое распределение у этого предела.

W — это винеровский процесс, а интеграл — это предельные суммы, так что

$$\int\limits_{0}^{T} e^{-t} W(t)\, dt \sim N \left(0, \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{0}^{T} e^{-t-s} \min(t, s)\, dt ds \right).$$

Предел гауссовской величины — это тоже нормальная величина

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} W(t)\, dt \sim N \left(0, \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t-s} \min(t, s)\, dt ds \right).$$

7.5

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$\eta(t) = e^{-t} + \int\limits_{0}^{t} e^{-(t-s)} W(s)\, ds$$

является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \eta'(t) = -\eta(t) + W(t), \\ \eta(0) = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\eta(0) = e^0 + \int\limits_0^0 e^{-(t-s)} \cdot W(s)\, ds = 1.$$

Чтобы проверить, что уравенение выполняется, надо написать производную

$$\eta'(t) = -e^{-t} - \int\limits_0^t e^{-(t-s)} W(s)\, ds + e^{-(t-t)} W(t) =$$

Первые 2 стагаемых равны $-\eta(t)$, второе — подынтегральная функция в точке t. Тогда

$$= -\eta(t) + W(t).$$

7.6

Задание. Пусть процесс $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ имеет функцию математического ожидания $m(t) = t^2$ и ковариационную функцию $K(t,s) = e^{ts}$. Вычислите:

a) $M[\xi(1) + \xi(2)]^2$;

b) $M\xi(1)\xi'(2)$;

c)
$$M\left[\xi(1) + \int\limits_0^1 \xi(s)\, ds\right]^2.$$

Решение.

a) Посчитаем

$$M[\xi(1) + \xi(2)]^2 = D[\xi(1) + \xi(2)] + \{M[\xi(1) + \xi(2)]\}^2 =$$
$$= cov[\xi(1) + \xi(2), \xi(1) + \xi(2)] + (1+4)^2 =$$
$$= K(1,1) + K(1,2) + K(2,1) + K(2,2) + 5^2 = e + e^2 + e^2 + e^4 + 25 =$$
$$= e + 2e^2 + e^4 + 25;$$

b) посчитаем $M\xi(1)\xi'(2) = cov[\xi(1), \xi'(2)] + M\xi(1) \cdot M\xi'(2)$. Запишем общую формулу. Ковариация линейная, и производная выносится вперёд

$$cov[\xi(t), \xi'(t)] = \frac{\partial K}{\partial s}(t,s).$$

Тогда $cov[\xi(1), \xi'(2)] + M\xi(1) \cdot M\xi'(2) = te^{ts}\big|_{t=1,s=2} + 1 \cdot 2t\big|_{t=2} = t^2 + 4$;

c) посчитаем

$$M\left[\xi(1)+\int_0^1 \xi(s)\,ds\right]^2 =$$

$$= D\left[\xi(1)+\int_0^1 \xi(s)\,ds\right] + \left\{M\left[\xi(1)+\int_0^1 \xi(s)\,ds\right]\right\}^2 =$$

$$= D\xi(1) + 2cov\left[\xi(1), \int_0^1 \xi(s)\,ds\right] + D\left[\int_0^1 \xi(s)\,ds\right] + \left(1+\int_0^1 s^2 ds\right)^2 =$$

$$= e + 2\int_0^1 cov\left[\xi(1), \xi(s)\right] ds + \int_0^1 \int_0^1 e^{ts} dt ds + \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

7.7

Задание. Докажите, что существуют пределы в среднем квадратическом

a)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W\left(\frac{k}{n}\right)\left[W\left(\frac{k+1}{n}\right) - W\left(\frac{k}{n}\right)\right];$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W\left(\frac{k+1}{n}\right)\left[W\left(\frac{k+1}{n}\right) - W\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

и найдите их.

Решение. Обозначим первый предел через A_n и второй — через B_n.

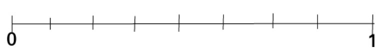

Рис. 33

Отрезок разбивается на n одинаковых частей (рис. 33).

Это похоже на интегральные функции, то есть берётся значение и умножается на приращение.

Если бы винеровский процесс был дифференцируем, то это было бы равно

$$\int_0^1 W(t)\,dW(t) = \frac{W^2(1)}{2}.$$

Возьмём разность двух пределов

$$B_n - A_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[W\left(\frac{k+1}{n}\right) - W\left(\frac{k}{n}\right)\right] \to 1.$$

Получили длину отрезка.

Возьмём сумму двух пределов

$$B_n + A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[W^2 \left(\frac{k+1}{n} \right) - W^2 \left(\frac{k}{b} \right) \right] = W^2 (1) \, .$$

То есть

$$A_n \to \frac{1}{2} \cdot W^2 (1) - \frac{1}{2}, \; B_n \to \frac{1}{2} \cdot W^2 (1) + \frac{1}{2}.$$

7.8

Задание. Докажите, что сумма квадратов приращений винеровского процесса, который соответствует разбиению $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$, сходится к $b-a$ в среднем квадратическом при измельчении разбиения:

$$L_2 - \lim \sum_{i=0}^{n-1} \left[W(t_{i+1}) - W(t_i) \right]^2 = b - a$$

при $\max(t_{i+1} - t_i) \to 0$.

Решение. Отрезок разбивается на конечное число отрезков

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

и по этим отрезкам считается

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[W(t_{i+1}) - W(t_i) \right]^2 .$$

Надо проверить, что такие выражения сходится к $b - a$, то есть к длине отрезка, то есть

$$M \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \left[W(t_{i+1}) - W(t_i) \right]^2 - (b - a) \right\}^2 \to 0,$$

когда $\max(t_{i+1} - t_i) \to 0$.

Распределение разности $W(t_{i+1}) - W(t_i) \sim N(0, t_{i+1} - t_i)$, то есть

$$M \left[W(t_{i+1}) - W(t_i) \right]^2 = t_{i+1} - t_i,$$

то есть математическое ожидание всей этой суммы — это $b - a$, тогда

$$M \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left[W(t_{i+1}) - W(t_i) \right]^2 - (b - a) \right]^2 = D \sum_{i=0}^{n-1} \left[W(t_{i+1}) - W(t_i) \right]^2 =$$

Разности независимы, значит и их квадраты независимы

$$= \sum_{i=0}^{n-1} D \left[W(t_{i+1}) - W(t_i) \right]^2 =$$

То, что осталось, — это дисперсия квадрата случайной величины. Обозначим $\xi \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, тогда $D\xi^2 = M\xi^4 - \left(m\xi^2\right)^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$. Тогда

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 2\left(t_{i+1} - t_i\right)^2 =$$

Один из множителей заменяем на максимальным в каждом слагаемом, максимум выносим

$$= 2 \max\left(t_{i+1} - t_i\right) \sum_{i=0}^{n-1} \left(t_{i+1} - t_i\right) =$$

Сумма равна длине отрезка

$$= 2\left(b - a\right) \max\left(t_{i+1}, t_i\right) \to 0.$$

Это называется квадратическая вариация винеровского процесса.

Домашнее задание

7.10

Задание. Для винеровского процесса вычислите:

a)

$$cov\left(W\left(2\right), \int\limits_0^4 W\left(s\right) ds + W\left(3\right)\right);$$

b)

$$cov\left(W\left(3\right) + 2W\left(1\right), \int\limits_1^3 W\left(s\right) ds\right).$$

Решение.

a)

$$cov\left(W(2), \int\limits_0^4 W(s)\,ds + W(3)\right) =$$

$$= cov\left[W(2), \int\limits_0^4 W(s)\,ds\right] + cov\left[W(2), W(3)\right] =$$

$$= \int\limits_0^4 cov\left[W(2), W(s)\right] ds + \min(2,3) = \int\limits_0^4 \min(2,s)\,ds + \min(2,3) =$$

$$= \int\limits_0^2 \min(2,s)\,ds + \int\limits_2^4 \min(2,s)\,ds + 2 = \int\limits_0^2 sds + \int\limits_2^4 2ds + 2 =$$

$$= \left.\frac{s^2}{2}\right|_0^2 + 2s|_2^4 + 2 = \frac{4}{2} + 2\cdot 4 - 2\cdot 2 + 2 = 2 + 8 - 4 + 2 = 8;$$

b) посчитаем

$$cov\left(W(3) + 2W(1), \int\limits_1^3 W(s)\,ds\right) =$$

$$= cov\left[W(3), \int\limits_1^3 W(s)\,ds\right] + cov\left[2W(1), \int\limits_1^3 W(s)\,ds\right] =$$

$$= \int\limits_1^3 cov\left[W(3), W(s)\right] ds + 2\int\limits_1^3 cov\left[W(1), W(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_1^3 \min(3,s)\,ds + 2\int\limits_1^3 \min(1,s)\,ds = \int\limits_1^3 sds + 2\int\limits_1^3 ds = \left.\frac{s^2}{2}\right|_1^3 + 2s|_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 6 - 2 = \frac{8}{2} + 4 = 4 + 4 = 8.$$

7.11

Задание. Пусть $\tau \geq 0$ — случайная величина, которая имеет положительную непрерывную плотность распределения, и пусть $X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}$ — процесс ожидания, связанный с τ. Докажите, что $\{X(t), t \in [0,1]\}$ не дифференцируем в среднем квадратическом.

Решение. Допустим, что процесс ожидания дифференцируем в среднем квадратическом. Это означает, что для произвольного $t \in [0,1]$ существовала бы такая случайная величина $X'(t)$, что

$$M\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-X'(t)\right|^2 \to 0,\ h\to 0.$$

Если бы такой предел существовал, то величина

$$M\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right|^2$$

должна была бы быть ограниченной при $h\to 0$. Но непосредственным вычислением показываем, что

$$M\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right|^2 = M\left|\frac{\mathbb{1}\{t+h\ge\tau\}-\mathbb{1}\{t\ge\tau\}}{h}\right|^2 =$$

Возводим в квадрат

$$=\frac{1}{h^2}\cdot M\left[(\mathbb{1}\{t+h\ge\tau\})^2-2\cdot\mathbb{1}\{t+h\ge\tau\}\,\mathbb{1}\{t\ge\tau\}+(\mathbb{1}\{t\ge\tau\})^2\right]=$$

Произведение индикаторов событий — это индикатор пересечения этих событий

$$=\frac{1}{h^2}\cdot\left[M\mathbb{1}\{t+h\ge\tau\}-2M\mathbb{1}\{\{t+h\ge\tau\}\cap\{t\ge\tau\}\}+M\mathbb{1}\{t\ge\tau\}\right]=$$

Математическое ожидание индикатора события — это вероятность этого события

$$=\frac{1}{h^2}\cdot\left[P(t+h\ge\tau)-2P(t+h\ge\tau)+P(t\ge\tau)\right]=$$

Приведём подобные

$$=\frac{1}{h^2}\cdot\left[-P(t+h\ge\tau)+P(t\ge\tau)\right]=\frac{1}{h^2}\cdot\left[P(\tau\le t)-P(\tau\le t+h)\right]=$$

Запишем через интеграл от плотности

$$=\frac{1}{h^2}\int\limits_t^{t+h}\tau(x)\,p_\tau(x)\,dx\to\infty,\ h\to 0.$$

Это противоречие доказывает недифференцируемость в среднем квадратическом процесса ожидания.

7.12

Задание. Пусть ξ — дифференцируемый в среднем квадратическом процесс, $f\in C^1(\mathbb{R})$ — детерминированная функция. Докажите, что процесс

$\{f(t)\,\xi(t)\,,\, t\in\mathbb{R}\}$ имеет производную в среднем квадратическом и найдите её.

Решение. Нужно проверить, что

$$\left\|\frac{f(t)\,\xi(t)-f(t_0)\,\xi(t_0)}{t-t_0}-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right\|\to 0,$$

когда $t\to t_0$.

Будем это проверять

$$M\left|\frac{f(t)\,\xi(t)-f(t_0)\,\xi(t_0)}{t-t_0}-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right|^2=$$

Поделим числитель на знаменатель

$$=M|\frac{f(t)\,\xi(t)}{t-t_0}-\frac{f(t_0)\,\xi(t_0)}{t-t_0}-\frac{f(t)\,\xi(t_0)}{t-t_0}+\frac{f(t)\,\xi(t_0)}{t-t_0}-$$
$$-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\,|^2=$$
$$=M\left|f(t)\cdot\frac{\xi(t)-\xi(t_0)}{t-t_0}+\xi(t_0)\cdot\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right|^2=$$
$$=M\left|f(t)\,\xi'(t_0)+\xi(t_0)\,f'(t_0)-f'(t_0)\,\xi(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right|^2=$$
$$=M\left|f(t)\,\xi'(t_0)-f(t_0)\,\xi'(t_0)\right|^2=M\left|\xi'(t_0)\,[f(t)-f(t_0)]\right|^2\to 0$$

при $t\to t_0$.

7.13

Задание. Пусть η — решение задачи Коши

$$\begin{cases}\eta'(t)=-\eta(t)+W(t)\,,\\ \eta(0)=1.\end{cases}$$

Докажите, что

$$L_2-\lim_{t\to+\infty}\frac{\eta(t)}{t}=0.$$

Решение. Надо проверить, что

$$M\left[\frac{\eta(t)}{t}\right]^2\to 0$$

при $t\to+\infty$.

Из задачи 7.5 решением такой задачи Коши есть

$$\eta(t)=e^{-t}+\int\limits_0^t e^{-(t-s)}W(s)\,ds.$$

Тогда

$$M\left[\frac{\eta(t)}{t}\right]^2 = M\left[\frac{e^{-t}+\int\limits_0^t e^{-(t-s)}W(s)\,ds}{t}\right]^2 =$$

Возведём в квадрат

$$= M\left\{\frac{e^{-2t}}{t^2}+\frac{2e^{-2t}}{t^2}\int\limits_0^t e^{s}W(s)\,ds+\frac{e^{-2t}}{t^2}\left[\int\limits_0^t e^{s}W(s)\,ds\right]^2\right\} =$$

Вынесем константу и внесём математическое ожидание

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2}\left\{1+\int\limits_0^t e^{s}MW(s)\,ds+M\left[\int\limits_0^t e^{s}W(s)\,ds\right]^2\right\} =$$

Математическое ожидание винеровского процесса равно нулю

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2}\left[1+\int\limits_0^t\int\limits_0^t e^{s_1+s_2}\min(s_1,s_2)\,ds_1ds_2\right] =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2}\left(1+\int\limits_0^t\int\limits_{s_1}^t e^{s_1}e^{s_2}s_1ds_1ds_2\right) = \frac{e^{-2t}}{t^2}\left(1+\int\limits_0^t e^{s_1}s_1\, e^{s_2}\big|_{s_1}^t\,ds_1\right) =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2}\left[1+\int\limits_0^t e^{s_1}s_1(t-s_1)\,ds_1\right] =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2}\left(1+t\int\limits_0^t e^{s_1}s_1ds_1-\int\limits_0^t e^{s_1}s_1^2ds_1\right) =$$

Оба интеграла берём по частям. Для первого интеграла

$$u = s_1,\ dv = e^{s_1}ds_1,\ du = ds_1,\ v = \int e^{s_1}ds_1 = e^{s_1}.$$

Для второго интеграла

$$u = s_1^2,\ dv = e^{s_1}ds_1,\ du = 2s_1ds_1,\ v = e^{s_1}.$$

Тогда

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2}\left(1+ts_1e^{s_1}\big|_0^t-t\int\limits_0^t e^{s_1}ds_1-e^{s_1}s_1^2\big|_0^t+2\int\limits_0^t e^{s_1}s_1ds_1\right) =$$

Подставим пределы интегрирования и возьмём интегралы

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2}\left(1 + t^2e^t - te^{s_1}\big|_0^t - e^tt^2 + 2\ s_1e^{s_1}\big|_0^t - 2\int\limits_0^t e^{s_1}ds_1\right) =$$

Одинаковые слагаемые с разными знаками уничтожаются, снова берём интеграл и подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2}\left(1 - te^t + t + 2te^t - 2\ e^{s_1}\big|_0^t\right) = \frac{e^{-2t}}{t^2}\left(1 + te^t + t - 2e^t\right) =$$

Раскроем скобки

$$= \frac{e^{-2t}}{t^2} + \frac{e^{-3t}}{t} + \frac{e^{-2t}}{t} - \frac{2e^{-t}}{t^2} \approx -\frac{2e^{-2t}}{2t} - 3e^{-3t} - 2e^{-2t} + 2e^{-t} \approx$$

Снова используем правило Лопиталя

$$\approx 2e^{-2t} - 3e^{-3t} - 2e^{-2t} + 2e^{-t} \to 0$$

при $t \to +\infty$.

7.14

Задание. Докажите, что случайный процесс

$$\eta(t) = \frac{1}{2}\cdot e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left(\lambda m(s) + W(s)\right)ds,\ t \geq 0$$

является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \eta'(t) = -\lambda\left(\eta(t) - m(t)\right) + W(t), \\ \eta(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Здесь $m(t)$ — детерминированная функция.

Решение.

$$\eta(0) = \frac{1}{2}\cdot e^{-\lambda\cdot 0} + \int\limits_0^0 e^{-\lambda(0-s)}\left[\lambda m(s) + W(s)\right]ds = \frac{1}{2}.$$

Чтобы проверить, что уравнение выполняется, надо написать производную

$$\eta'(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-\lambda)\,e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}\int\limits_0^t e^{\lambda s}\left[\lambda m(s) + W(s)\right]ds + e^{-\lambda(t-t)}\left[\lambda m(t) + W(t)\right] =$$

$$= -\lambda\left\{\frac{1}{2}\cdot e^{-\lambda t} - \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left[\lambda m(s) + W(s)\right]ds - m(t)\right\} + W(t) =$$

$$= -\lambda\left[\eta(t) - m(t)\right] + W(t).$$

Занятие 8. Стационарные случайные процессы

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса, стационарного в широком смысле.

$\xi(t), t \in T$ называется стационарным в широком смысле (стационарным), если

1. $m(t) \equiv m$ $(const)$;
2. $K(t,s) = K(t+r, s+r), \forall t,s,r \in T$. Это означает, что ковариационная функция — это сейчас функция разности аргументов, то есть $K(t,s) = k(t-s)$.

Приведите определение ковариационной функции случайного процесса.

$K(t,s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)], t, s \in T.$

Сформулируйте теорему Бохнера про спектральное изображения ковариационной функции стационарного в широком смысле случайного процесса.

Пусть $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ — это стационарный и непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс. Тогда существует конечная мера μ на $\mathbb{R}$ такая, что

$$k(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \mu(d\lambda),$$

мера μ определяется единственным образом.

Что называется спектральной функцией, спектральной плотностью стационарного в широком смысле случайного процесса?

μ называеься спектральной мерой, а если есть плотность p, то p — это спектральная плотность.

Аудиторные задачи

8.2

Задание. Пусть A, η, φ — независимые случайные величины, причём φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Докажите, что процесс $\{\xi(t) = A\cos(t\eta + \varphi), t \in \mathbb{R}\}$ является стационарным в широком смысле.

Решение.

$$M\xi(t) = M[A\cos(\eta t + \varphi)] = MA \cdot M\cos(\eta t + \varphi) =$$

Распишем косинус суммы

$$= MA \cdot M[\cos(\eta t)\cos\varphi - \sin(\eta t)\sin\varphi] =$$

Все множители независимы

$$= MA \cdot M\cos(\eta t) \cdot M\cos\varphi - MA \cdot M\sin(\eta t) \cdot M\sin\varphi =$$

Сгруппируем множители

$$= M[A\cos(\eta t)] \cdot M\cos\varphi - M[A\sin(\eta t)] \cdot M\sin\varphi =$$

Запишем математическое ожидание $\sin\varphi$ через интеграл от плотности равномерного распределения

$$= M[A\cos(\eta t)] \int\limits_{\mathbb{R}} \cos x \cdot p(x)\, dx - M[A\sin(\eta t)] \int\limits_{\mathbb{R}} \sin x \cdot p(x)\, dx =$$

Подставим плотность

$$= M[A\cos(\eta t)] \int\limits_0^{2\pi} \cos x dx - M[A\sin(\eta t)] \int\limits_0^{2\pi} \sin x dx =$$

Возьмём интегралы

$$= M[A\cos(\eta t)] \cdot \sin x|_0^{2\pi} - M[A\sin(\eta t)] \cdot (-\cos x)|_0^{2\pi} = 0.$$

Ковариационная функция

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) = MA^2 \cdot M\cos(\eta t + \varphi) \cdot \cos(\eta s + \varphi) =$$

Распишем произведение косинусов

$$= \frac{MA^2}{2} \cdot \{M \cos[\eta(t+s) + 2\varphi] + M \cos[\eta(t-s)]\} =$$

Первое слагаемое равно нулю

$$= \frac{MA^2}{2} \cdot M \cos[\eta(t-s)].$$

Значит, процесс стационарный.

8.3

Задание. Пусть $\{N(t), t \geq 0\}$ — процесс Пуассона с параметром λ. Докажите, что процесс $\{\xi(t) = N(t+1) - N(t), t \geq 1\}$ является стационарным в широком смысле.

Решение. $\{\xi(t) = N(t+1) - N(t), t \geq 1\}$ — процесс приращений пуассоновского процесса.

1. $$M\xi(t) = M[N(t+1) - N(t)] = MN(t+1) - MN(t) = \lambda(t+1) - \lambda t = \lambda,$$

   то есть математическое ожидание постоянное.

2. Теперь найдём ковариационную функцию

   $$K(t,s) = cov[\xi(t), \xi(s)] = cov[N(t+1) - N(t), N(s+1) - N(s)] =$$

   Известно, что $cov[N(t), N(s)] = \lambda \min(t,s)$. Раскрываем ковариацию и получаем 4 слагаемых

   $$= \lambda[\min(t+1, s+1) - \min(t+1, s) - \min(t, s+1) + \min(t,s)] =$$

   Возможные случаи изображены на рисунке 34.

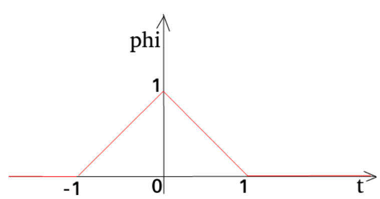

Рис. 34: Возможные случаи (два последних симметричны двум первым)

В первом случае

$$= 0.$$

Во втором случае

$$= \lambda[s + 1 - t].$$

Запишем ковариационную функцию

$$K(t,s)=\begin{cases}0, \qquad s+1\le t\ (1\le t-s)\,,\\ \lambda\left[1-(t-s)\right], \qquad s\le t\le s+1\ (0\le t-s\le 1)\,,\\ 0, \qquad s\ge t+1\ (t-s\le 1)\,,\\ \lambda\left[1-(s-t)\right], \qquad t\le s\le t+1\ (-1\le t-s\le 0)\,.\end{cases}$$

Надо понять, это функция от разности или нет. Условия переписываются через разности, тогда ковариация зависит от разности.

Сейчас

$$K(t,s)=\begin{cases}0, \qquad |t-s|\ge 1,\\ \lambda\left(1-|t-s|\right), \qquad |t-s|\le 1.\end{cases}$$

8.4

Задание. Пусть $\{W(t)\,,\,t\ge 0\}$ — винеровский процесс. Надите сектральную функцию процесса $\{\xi(t)=W(t+1)-W(t)\,,\,t\ge 0\}$.

Решение. Если $\{\xi_n,\,n\in\mathbb{Z}\}$ — это стационарная последовательность с $K(n,m)=k(n-m)$, тогда теорема Герглотца говорит, что функцию k можно представить как преобразование Фурье какой-то меры, то есть

$$k(n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}\mu(d\lambda)\,.$$

Эта мера называется спектральной мерой.

Это в слуае дискретного времени. Для непрерывного времени если

$$\{\xi(t)\,,\,t\in\mathbb{R}\}$$

— это стационарный процесс, непрерывный в L_2, его ковариационная функция — это $K(t,s)=k(t-s)$, в этом случае есть теорема Бохнера, которая говорит, что

$$k(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}\mu(d\lambda)\,.$$

Если у этой меры есть плотность, то она называется спектральной плотностью.

$$K(t,s)=\begin{cases}1-|t-s|\,,\ |t-s|\le 1,\\ 0, \qquad |t-s|\ge 1.\end{cases}$$

Это то же самое, что

$$k(t)=\begin{cases}1-|t|\,, \qquad |t|\le 1,\\ 0, \qquad |t|\ge 1.\end{cases}$$

Теперь нужно подобрать меру, для которой это — преобразование Фурье. Сейчас спектральная плотность

$$p(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(t)\, e^{-i\lambda t} dt = \int\limits_{-1}^{1} (1 - |t|)\, e^{-i\lambda t} dt =$$

Экспонента расписывается по формуле Эйлера как сумма косинуса и синуса, умноженного на мнимую единицу. Интеграл от синуса равен нулю, так как синус — нечётная функция, $1 - |t|$ — чётная функция, интегрирование происходит по симметричному отрезку

$$= 2 \int\limits_{0}^{1} (1 - t) \cos \lambda t dt =$$

Интегрируем по частям, при этом $1 - |t| = u$, а $\cos \lambda t = v$. Тогда

$$= 2\,(1 + t) \cdot \left. \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \right|_0^1 + \frac{2}{\lambda} \int\limits_{0}^{1} \sin \lambda t dt =$$

Первое слагаемое равно нулю

$$= \frac{2}{\lambda^2} (1 - \cos \lambda).$$

8.5

Задание. Спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса ξ равна

$$p_\xi(\lambda) = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2}.$$

Найдите его ковариационную функцию.

Решение.

$$K(t, s) = \begin{cases} \frac{1 - |t-s|}{2}, & |t - s| \geq 1, \\ 0, & |t - s| \leq 1. \end{cases}$$

8.6

Задание. Найдите спектральную функцию стационарного в широком смысле процесса ξ, если его ковариационная функция равна:

a) $K_\xi(t) = e^{-|t|}$;

b) $K_\xi(t) = \frac{1}{1+t^2}$;

c) $K_\xi(t) = e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)}$.

Решение.

a) Можно найти плотность

$$p(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i\lambda t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\lambda)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1-i\lambda)t} dt =$$

Вычислим интегралы

$$= \frac{1}{1+i\lambda} + \frac{1}{1-i\lambda} = \frac{2}{1+\lambda^2}$$

— это распределение Коши;

b) с точностью до константы это будет $e^{-|t|}$.

Ковариационная функция — это преобразование Фурье от плотности

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda.$$

Плотность — это обратное преобразование Фурье

$$p(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda t}}{1+t^2} dt = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda t}}{\pi(1+t^2)} dt =$$

Под интегралом стоит плотность распределения Коши. Сам интеграл — характеристическая функция распределения Коши

$$= \pi e^{-|\lambda|};$$

c) ковариационная функция $K_\xi(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$ — это характеристическая функция для пуассоновского распределения.

Нет смысла искать плотность, потому что у пуассоновского распределения нет плотности $K(t) = Me^{it\xi}$, где $\xi \sim Pois(a)$. Это значит, что

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} e^{-a} \cdot \frac{a^n}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \mu(d\lambda).$$

Вспомним, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta_c(dx) = f(c),$$

где c — какая-то точка.

Если мера сосредоточена в точке n, то получаем сумму. Сейчас спектральная мера равна

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi e^{-a} \cdot \frac{a^n}{n!} \cdot \delta_n,$$

где δ_n — δ-мера в точке n.

8.7

Задание. Пусть $\{\xi(t), t \in T\}$ является стационарным в широком смысле гауссовским процессом с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $k(t)$ такой, что $k(0) > 0$. Докажите, что для произвольных $t \in T$ и $h \geq 0$

$$M(\xi(t+h) \mid \xi(t)) = \frac{k(h)}{k(0)} \cdot \xi(t).$$

Решение. Теорема о нормальной корреляции

$$M[\xi(t+h) \mid \xi(t)] = M\xi(t+h) + \frac{cov[\xi(t+h), \xi(t)]}{D\xi(t)} \cdot [\xi(t) - M\xi(t)] =$$

По условию первое слагаемое и второе слагаемое в последних скобках равны нулю. Процесс стационарный, то есть ковариация зависит только от разности

$$= \frac{k(h)}{k(0)} \cdot \xi(t).$$

Для стационарных процессов $D\xi(t) = K(t,t) = k(0)$.

Домашнее задание

8.10

Задание. Докажите, что сумма независимых стационарных в широком смысле процессов является стационарным в широком смысле процессом.

Решение. Пусть $\{\xi_i(t), t \in T\}, i = \overline{1,n}$ — независимые стационарные в широком смысле процессы. Нужно доказать, что процесс

$$\left\{\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t), t \in T\right\}$$

является стационарным в широком смысле.

$$M\eta(t) = M\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i = m = const.$$

Ковариационная функция

$$K(t,s) = cov\left[\eta(t), \eta(s)\right] = cov\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t), \sum_{j=1}^{n} \xi_j(s)\right] =$$

Вынесем суммы, так как ковариация — линейная функция

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} cov\left[\xi_i(t), \xi_j(s)\right] = \sum_{i=1}^{n} cov\left[\xi_i(t), \xi_i(s)\right] = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,s) =$$

Все $\xi_i(t)$ стационарные, поэтому их ковариационные функции зависят только от разности аргументов

$$= \sum_{i=1}^{n} k_i(t-s) = k(t-s).$$

Значит, процесс стационарный.

8.11

Задание. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые одинаково распределённые случайные величины, которые принимают значения $+1$ и -1 с вероятностью $1/2$. Докажите, что процесс $\{\xi(t) = \xi_1 \cos \lambda t + \xi_2 \sin \lambda t,\ t \in \mathbb{R}\}$ является стационарным в широком смысле.

Решение.

$$M\xi(t) = M(\xi_1 \cos \lambda t + \xi_2 \sin \lambda t) = M(\xi_1 \cos \lambda t) + M(\xi_2 \sin \lambda t) =$$

Вынесем константы

$$= \cos \lambda t \cdot M\xi_1 + \sin \lambda t \cdot M\xi_2 = \cos \lambda t \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \sin \lambda t \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ковариационная функция

$$K(t,s) = M\xi(t)\xi(s) = M\left[(\xi_1 \cos \lambda t + \xi_2 \sin \lambda t)(\xi_1 \cos \lambda s + \xi_2 \sin \lambda s)\right] =$$

Перемножим скобки

$$= \cos \lambda t \cdot \cos \lambda s \cdot M\xi_1^2 + \cos \lambda t \cdot \sin \lambda s \cdot M(\xi_1 \xi_2) + \sin \lambda t \cdot \cos \lambda s \cdot M(\xi_2 \xi_1) +$$
$$+ \sin \lambda t \cdot \sin \lambda s \cdot M\xi_2^2 = \cos \lambda t \cdot \cos \lambda s + \sin \lambda t \cdot \sin \lambda s = \cos\left[\lambda(t-s)\right] =$$
$$= k(t-s).$$

Значит, процесс стационарный.

8.12

Задание. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \theta_1, \ldots, \theta_n$ — независимые случайные величины, причём $\theta_1, \ldots, \theta_n$ имеют равномерное распределение на $[0, 2\pi]$. Докажите, что процесс

$$\left\{ \xi\left(t\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cos k\left(\theta_k + t\right) \right\}$$

является стационарным в широком смысле.

Решение.

$$M\xi\left(t\right) = M \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cos k\left(\theta_k + t\right) =$$

Распишем косинус суммы

$$= \sum_{k=1}^{n} M\xi_k \cdot M\left[\cos\left(k\theta_k\right)\cos\left(kt\right) - \sin\left(k\theta_k\right)\sin\left(kt\right)\right] =$$

Все множители независимы

$$= \sum_{k=1}^{n} M\xi_k \cdot \left[\cos\left(kt\right) \cdot M\cos\left(k\theta_k\right) - \sin\left(kt\right) \cdot M\sin\left(k\theta_k\right)\right] =$$

Запишем математическое ожидание $\cos\left(k\theta_k\right)$ и $\sin\left(k\theta_k\right)$ через интеграл от плотности равномерного распределения

$$= \sum_{k=1}^{n} M\xi_k \left[\cos\left(kt\right) \int\limits_{\mathbb{R}} \cos\left(kx\right) p\left(x\right) dx - \sin\left(kt\right) \int\limits_{\mathbb{R}} \sin\left(kx\right) p\left(x\right) dx\right] =$$

Подставим плотность

$$= \sum_{k=1}^{n} M\xi_k \left[\cos\left(kt\right) \int\limits_{0}^{2\pi} \cos\left(kx\right) dx - \sin\left(kt\right) \int\limits_{0}^{2\pi} \sin\left(kx\right) dx\right] =$$

Замена

$$kx = u,\ du = kdx,\ dx = \frac{du}{k},\ x = 0 \Rightarrow u = 0,\ x = 2\pi \Rightarrow u = 2k\pi.$$

Используя данную замену, получим

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{M\xi_k}{k} \left[\cos\left(kt\right) \int\limits_{0}^{2k\pi} \cos u du - \sin\left(kt\right) \int\limits_{0}^{2k\pi} \sin u du\right] =$$

Возьмём интегралы

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{M\xi_k}{k} \left[\cos\left(kt\right) \sin u\big|_0^{2k\pi} + \sin\left(kt\right) \cos u\big|_0^{2k\pi}\right] =$$

Подставим пределы интегрирования

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{M\xi_k}{k} \left\{ \cos(kt) \cdot \sin(2k\pi) + \sin(kt) \cdot [\cos(2k\pi) - 1] \right\} =$$

Синус в точках 0 и 2π равен нулю, а косинус в нуле равен единице

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{M\xi_k}{k} \left[0 + \sin(kt)(1-1) \right] = 0.$$

Ковариационная функция

$$K(t,s) = cov\left[\xi(t), \xi(s)\right] = cov\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k \cos k(\theta_k + t), \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cos j(\theta_j + s)\right] =$$

Вынесем суммы и константы из-под знака ковариации

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \cos k(\theta_k + t) \cdot \cos j(\theta_j + s) \cdot cov(\xi_k, \xi_j) =$$

Случайные величины независимы, поэтому ковариация не равна нулю, только если индексы совпадают

$$= \sum_{k=1}^{n} \cos k(\theta_k + t) \cdot \cos k(\theta_k + s) \cdot cov(\xi_k, \xi_k) =$$

Распишем произведение косинусов через сумму

$$= \sum_{k=1}^{n} M\xi_k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos\left[k(\theta_k + t - \theta_k - s)\right] + \cos\left[k(2\theta_k + t + s)\right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} M\xi_k^2 \cdot \cos\left[k(t-s)\right] = k(t-s).$$

Значит, процесс стационарный.

8.13

Задание. Пусть $\xi(t) = e^t W\left(e^{-2t}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, где $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что процесс ξ является стационарным в широком смысле. Найдите ковариационную и спектральную функции этого процесса.

Решение. Вычислим математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса ξ. Поскольку $W(t)$ — винеровский процесс, то $M\xi(t) = M\left[e^t W\left(e^{-2t}\right)\right] = e^t MW\left(e^{-2t}\right) = 0$.

Обозначим $\xi_1 = \xi(t_1)$, $\xi_2 = \xi(t_2)$, $t_1 < t_2$. Тогда

$$K(t_1, t_2) = M\xi_1\xi_2 = M\left[e^{t_1} W\left(e^{-2t_1}\right) e^{t_2} W\left(e^{-2t_2}\right)\right] =$$

Вынесем экспоненты

$$= e^{t_1+t_2} M\left[W\left(e^{-2t_1}\right) W\left(e^{-2t_2}\right)\right] = e^{t_1+t_2} \min\left(e^{-2t_1}, e^{-2t_2}\right) = e^{t_1+t_2} e^{-2t_2} =$$

Запишем в виде одной экспоненты

$$= e^{t_1+t_2-2t_2} = e^{t_1-t_2}.$$

Таким образом, $K(t_1, t_2) = e^{-|t_1-t_2|}$ и значит процесс является стационарным в широком смысле.

Обозначим $k(u) = e^{-|u|}$. Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |k(u)|\, du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-|u|}\right| du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|} du = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{u} du + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u} du =$$

Возьмём интегралы

$$= e^{u}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-u}\Big|_{0}^{+\infty} = 1 - 1 = 0 < +\infty,$$

то спектральную плотность процесса $\{\xi(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ находим как обратное преобразование Фурье функции $k(u)$

$$p(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} k(u)\, du = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} e^{-|u|} du =$$

Разобьём интеграл на два

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-iu\lambda} e^{u} du + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-iu\lambda} e^{-u} du =$$

Запишем под одной экспонентой

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{u(1-i\lambda)} du + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u(1+i\lambda)} du =$$

Возьмём интегралы

$$= \frac{1}{2\pi(1-i\lambda)} \cdot e^{u(1-i\lambda)}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2\pi(1+i\lambda)} \cdot e^{-u(1+i\lambda)}\Bigg|_{0}^{+\infty} =$$

Подставим пределы интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi(1-i\lambda)} + \frac{1}{2\pi(1+i\lambda)} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-i\lambda} + \frac{1}{1+i\lambda}\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1+i\lambda+1-i\lambda}{(1-i\lambda)(1+i\lambda)} =$$

Упрощаем числитель, а в знаменателе применяем формулу разности квадратов

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{1-(i\lambda)^2} = \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

8.14

Задание. Пусть $\xi(t) = \varepsilon_1 e^{it} + \varepsilon_2 e^{2it}$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — независимые случайные величины, которые имеют стандартное нормальное распределение. Найдите ковариационную и спектральную функции этого процесса.

Решение. Если $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ — стационарная последовательность с

$$K(n,m) = k(n-m),$$

тогда теорема Герглотца говорит, что функцию k можно представить как преобразование Фурье какой-то меры, то есть

$$k(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \mu(d\lambda).$$

Эта мера называется спектральной мерой.

Это в случае дискретного времени. Для непрерывного времени если

$$\{\xi(t),\, t \in \mathbb{R}\}$$

— это стационарный случайный процесс с $K(t,s) = k(t-s)$, непрерывный в L_2, в этом случае есть теорема Бохнера, которая говорит, что

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \mu(d\lambda).$$

Если у этой меры есть плотность, то она называется спектральной плотностью.

$$K(t,s) = cov[\xi(t), \xi(s)] = cov\left(\varepsilon_1 e^{it} + \varepsilon_2 e^{2it}, \varepsilon_1 e^{is} + \varepsilon_2 e^{2is}\right) =$$

Раскроем ковариацию

$$= cov\left(\varepsilon_1 e^{it}, \varepsilon_2 e^{is}\right) + cov\left(\varepsilon_1 e^{it}, \varepsilon_2 e^{2is}\right) + cov\left(\varepsilon_2 e^{2it}, \varepsilon_1 e^{is}\right) + cov\left(\varepsilon_2 e^{2it}, \varepsilon_2 e^{2is}\right) =$$

Вынесем константы и воспользуемся независимостью

$$= e^{i(t+s)} M\varepsilon_1^2 + e^{2i(t+s)} M\varepsilon_2^2 = e^{i(t+s)} + e^{2i(t+s)} = k(t+s) \neq k(t-s),$$

следовательно, $\xi(t)$ — нестационарный процесс и не имеет спектральной функции.

8.15

Задание. Найдите спектральную функцию стационарного в широком смысле процесса ξ, если его ковариационная функция K_ξ равна:

a) $K_\xi(t) = \frac{e^{iat}-1}{iat}$;

b) $K_\xi(t) = \frac{\sin at}{at}$;

c) $K_\xi(t) = \frac{1-\cos at}{a^2t^2}$.

Решение.

a) Можно найти плотность

$$p(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iat}-1}{iat} \cdot e^{-i\lambda t} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it(a-\lambda)} - e^{-i\lambda t}}{iat} dt =$$

Под интегралом стоит характеристическая фукнция равномерного распределения. Сам интеграл — плотность равномерного распределения

$$= \frac{1}{a} \cdot \mathbb{1}_{[0,a]}(\lambda);$$

b) можно найти плотность

$$p(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{at} \cdot e^{-i\lambda t} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i \sin at}{2iat} \cdot e^{-i\lambda t} dt =$$

Прибавим и отнимем косинус в числителе

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i \sin at - \cos at + \cos at}{2iat} \cdot e^{-i\lambda t} dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \sin at - \cos at + \cos at + i \sin at}{2iat} \cdot e^{-i\lambda t} dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2iat} \cdot e^{-i\lambda t} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it(a-\lambda)} - e^{-it(a+\lambda)}}{2iat} dt =$$

Под интегралом стоит характеристическая функция равномерного распредления. Сам интеграл — плотность равномерного распределения

$$= \frac{1}{2a} \cdot \mathbb{1}_{[-a,a]}(\lambda);$$

c) аналогично

$$p(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos at}{a^2t^2} \cdot e^{-i\lambda t} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin^2 \frac{at}{2}}{a^2t^2} \cdot e^{-i\lambda t} dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{at}{2}}{\frac{a^2t^2}{4}} \cdot e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{iat}{2}} - e^{-\frac{iat}{2}}}{2i \cdot \frac{at}{2}} \cdot e^{-i\lambda t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\left(\frac{a}{2}-\lambda\right)} - e^{-it\left(\frac{a}{2}+\lambda\right)}}{iat} dt =$$

Под интегралом стоит характеристическая функция равномерного распределения. Сам интеграл — плотность равномерного распределения

$$= \frac{1}{a} \cdot \mathbb{1}_{\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]}(\lambda).$$

8.16

Задание. Пусть ковариационная функция стационарного в широком смысле процесса ξ равна

$$K_\xi(t) = \frac{1}{1-\alpha e^{it}}.$$

Найдите спектральную функцию F_ξ при $0 < \alpha < 1$.

Решение. Ковариационная функция

$$K_\xi(t) = \frac{1}{1-\alpha e^{it}} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1-\alpha e^{it}}$$

— это характеристическая функция гауссовского процесса, поделенная на $(1-\alpha)$.

Нет смысла искать плотность, потому что у геометрического распределения плотности нет. $K_\xi(t) = Me^{it\xi}$, где $\xi \sim Geom(\alpha)$. Это значит, что

$$K_\xi(t) = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} (1-\alpha) \alpha^n \left(e^{it}\right)^n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \mu(d\lambda).$$

Вспомним, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta_c(dx) = f(c),$$

где c — какая-то точка.

Если мера определена в точке n, то получится сумма. Сейчас спектральная мера равна

$$\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\pi (1-\alpha) \alpha^n \left(e^{it}\right)^n \cdot \delta_n \cdot \frac{1}{1-\alpha} = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \left(e^{it}\right)^n \delta_n,$$

где δ_n — δ-мера в точке n.

Занятие 9. Линейные преобразования случайных процессов.

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение стационарного в широком смысле процесса.

$\xi(t), t \in T$ называется стационарным в широком смысле, если

1. $m(t) \equiv m$ (const);

2. $K(t,s) = k(t+r, s+r), \qquad \forall t, s, r \in T$. Это означает, что ковариационная функция — это сейчас функция разности аргументов, то есть $K(t,s) = k(t-s)$.

Сформулируйте теорему Бохнера про спектральное изображение ковариационной функции стационарного в широком смысле случайного процесса.

Пусть $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ — это стационарный и непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс. Тогда существует конечная мера μ на $\mathbb{R}$ такая, что

$$k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \mu(d\lambda),$$

мера μ определяется единственным образом.

Запишите, как изменяются ковариационная функция и спектральная функция стационарного в широком смысле случайного процесса при применении к нему линейного дифференциального оператора, интегрального оператора.

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi\left(t\right)=Q\left(\frac{d}{dt}\right)\eta\left(t\right),$$

где ξ и η — гладкие в среднем квадратическом стационарные процессы.

Спектральная мера для

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi$$

имеет вид

$$\rho\left(d\lambda\right)=\left|P\left(i\lambda\right)\right|^2\mu\left(d\lambda\right).$$

Следовательно,

$$\mu_\xi\left(d\lambda\right)=\frac{\left|Q\left(i\lambda\right)\right|^2}{\left|P\left(i\lambda\right)\right|^2}\cdot\mu_\eta\left(d\lambda\right).$$

Аудиторные задачи

9.2

Задание. Пусть $\{\xi\left(t\right), t\in\mathbb{R}\}$ — стационарный в широком смысле процесс. Положим

$$\eta\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}c_k\xi\left(t+\delta_k\right), t\in\mathbb{R},$$

где $c_1,\ldots,c_n,\delta_1,\ldots,\delta_n$ — некоторые постоянные. Докажите, что процесс $\{\eta\left(t\right), t\in\mathbb{R}\}$ являвтся стационарным в широком смысле. Выразите ковариационную и спектральную функции процесса η через ковариационную и спектральную функцию процесса ξ.

Решение. Если ξ — стационарный, это значит, что $M\xi\left(t\right)=m_\xi=const$ и $cov\left[\xi\left(t\right),\xi\left(s\right)\right]=k_\xi\left(t-s\right)$.

Проверим, что η — стационарный

$$M\eta\left(t\right)=M\sum_{k=1}^{n}c_k\xi\left(t+\delta_k\right)=$$

Выносим сумму и коэффициенты

$$=\sum_{k=1}^{n}c_kM\xi\left(t+\delta_k\right)=m_\xi\sum_{k=1}^{n}c_k.$$

Значит, математическое ожидание η будет тоже постоянным.

Теперь найдём ковариационную функцию для η. Вынесем две суммы и коэффициенты

$$cov\left[\eta\left(t\right),\eta\left(s\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c_{k}c_{i}cov\left[\xi\left(t+\delta_{k}\right),\xi\left(s+\delta_{i}\right)\right]=$$

Такая ковариация — это k_ξ от разности аргументов

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c_{k}c_{i}k_{\xi}\left(t+\delta_{k}-s-\delta_{i}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c_{k}c_{i}k_{\xi}\left(t-s+\delta_{k}-\delta_{i}\right).$$

Ответ зависит только от разности t и s, значит, это стационарный процесс

$$k_{\xi}\left(t\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i\lambda t}F_{\xi}\left(d\lambda\right),$$

где $F_{\xi}\left(d\lambda\right)$ — спектральная функция для ξ.

Для процесса η нужно найти представление

$$k_{\eta}\left(t\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i\lambda t}F_{\eta}\left(d\lambda\right),$$

где $F_{\eta}\left(d\lambda\right)$ — искомая функция.

Выпишем

$$k_{\eta}\left(t\right)=\sum_{k,j}c_{k}c_{j}k_{\xi}\left(t+\delta_{k}-\delta_{j}\right).$$

Для k_ξ есть интегральное выражение, подставим его и попытаемся вынести интеграл за сумму

$$k_{\eta}\left(t\right)=\sum_{k,j=1}^{n}c_{k}c_{j}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i\lambda\left(t+\delta_{k}-\delta_{j}\right)}F_{\xi}\left(d\lambda\right)=$$

Приведём интеграл к нужному виду. Нужно интеграл вынести за сумму, и чтобы в интеграле получилась экспонента без всяких δ. Получим

$$=\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_{k,j=1}^{n}c_{k}c_{j}e^{i\lambda t}e^{i\lambda\left(\delta_{k}-\delta_{j}\right)}F_{\xi}\left(d\lambda\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i\lambda t}F_{\eta}\left(d\lambda\right).$$

Получилось, что $F_{\eta}\left(d\lambda\right)$ — спектральная функция для η, равная

$$F_{\eta}\left(d\lambda\right)=\sum_{k,j=1}^{n}c_{k}c_{j}e^{i\lambda\left(\delta_{k}-\delta_{j}\right)}F_{\xi}\left(d\lambda\right).$$

Плотность должна всегда быть неотрицательной.

Как понять, что такая двойная сумма неотрицательна?

Экспоненту запишем как произведение

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j e^{i\lambda(\delta_k-\delta_j)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_k e^{i\lambda\delta_k} c_j e^{-i\lambda\delta_j} =$$

Запишем через произведение двух сумм

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda\delta_k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} c_k e^{-i\lambda\delta_k}\right) =$$

Это комплексно сопряжённые числа

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda\delta_k}\right|^2.$$

Получили неотрицательную величину, которая может быть плотностью.

9.3

Задание. Пусть $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ — стационарный в широком смысле процесс, непрерывный в среднем квадратическом; f — непрерывная функция с компактным носителем. Положим

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,\xi(s)\,ds.$$

Выразите спектральную функцию F_η через спектральную функцию F_ξ.

Решение. Проверим, что η — тоже стационарный. Начнём с математического ожидания

$$M\eta(t) = M\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\,\xi(s)\,ds =$$

Математическое ожидание и интеграл можно поменять местами

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\,M\xi(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\cdot const\cdot ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\cdot m_\xi ds =$$

Сделаем замену переменных: $t-s=x$ — новая переменная

$$= m_\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

не зависит от t.

Значит, математическое ожидание постоянное. Теперь ковариационная функци

$$cov\left[\eta\left(t\right),\eta\left(s\right)\right]=cov\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(t-u\right)\xi\left(u\right)du,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(s-v\right)\xi\left(v\right)dv\right]=$$

Интегралы выносим, f выносим, остаётся под интегралами $cov\left[\xi\left(u\right),\xi\left(v\right)\right]$, то есть

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(t-u\right)f\left(s-v\right)\cdot k_{\xi}\left(u-v\right)dudv=$$

Сделаем две замены: $t-u=x$, $s-v=y$. Получим

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)f\left(y\right)\cdot k_{\xi}\left(t-x+y-s\right)dxdy.$$

Интеграл зависит от разности $t-s$. Спектральную функцию для η выразим через спектральную функцию для ξ. Нашли, что

$$k_{\eta}\left(t\right)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f\left(x\right)f\left(y\right)k_{\xi}\left(t-x+y\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f\left(x\right)f\left(y\right)\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i\lambda(t-x+y)}F_{\xi}\left(d\lambda\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i\lambda t}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f\left(x\right)f\left(y\right)e^{i\lambda(y-x)}dxdyF_{\xi}\left(d\lambda\right).$$

Двойной интеграл — спектральная функция для η.

Ответ получился следующий. Спектральная функция для η равна

$$k_{\eta}\left(\lambda\right)=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(s\right)e^{i\lambda s}ds\right|^2F_{\xi}\left(d\lambda\right).$$

При этом процесс η задавался как

$$\eta\left(t\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(t-s\right)\xi\left(s\right)ds=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(s\right)\xi\left(t+s\right)ds.$$

Домашнее задание

9.10

Задание. Пусть $\{\xi(t), t \in T\}$ — действительнозначный стационарный в широком смысле процесс с математическим ожиданием m и спектральной плотностью $f(\lambda)$. Положим $\eta(t) = \xi(t)\cos(\Lambda t + \varphi), t \in T$, где

$$\Lambda = const,$$

а φ — независимая от ξ случайна величина, равномерно распределённая на $[0, 2\pi)$. Докажите, что случайный процесс $\{\eta(t), t \in T\}$ является стационарным в широком смысле и найдите его спектральную функцию.

Решение. Если ξ — стационарный, это значит, что $M\xi(t) = m_\xi = const$ и $cov[\xi(t), \xi(s)] = k_\xi(t-s)$.

Проверим, что η — стационарный

$$M\eta(t) = M[\xi(t)\cos(\Lambda t + \varphi)] = M\xi(t) \cdot M\cos(\Lambda t + \varphi) =$$

Запишем математическое ожидание φ через интеграл от плотности

$$= m_\xi \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos(\Lambda t + x)\, dx =$$

Сделаем замену

$$\Lambda t + x = u \Rightarrow du = dx,\ x = 0 \Rightarrow u = \Lambda t,\ x = 2\pi \Rightarrow u = \Lambda t + 2\pi.$$

Подставив замену в интеграл, получим

$$= m_\xi \cdot \int\limits_{\Lambda t}^{\Lambda t + 2\pi} \cos u du = m_\xi \cdot \sin u|_{\Lambda t}^{\Lambda t + 2\pi} = m_\xi[\sin(\Lambda t + 2\pi) - \sin(\Lambda t)] =$$

Запишем разность синусов через произведение синуса на косинус

$$= m_\xi \cdot 2\sin\frac{\Lambda t + 2\pi - \Lambda t}{2} \cdot \cos\frac{\Lambda t + 2\pi + \Lambda t}{2} = 2m_\xi \cdot \sin\pi\cos(\Lambda t + \pi) = 0.$$

Значит, математическое ожидание η будет тоже постоянным.

Теперь найдём ковариационную функцию для η. Получим

$$cov[\eta(t), \eta(s)] = M[\eta(t)\eta(s)] - M\eta(t) \cdot M\eta(s) =$$

Подставим выражение для случайного процесса

$$= M[\xi(t)\cos(\Lambda t + \varphi)\xi(s)\cos(\lambda s + \varphi)] =$$

Распишем произведение косинусов через их сумму

$$= M\left[\xi(t)\xi(s) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\Lambda t + \varphi - \Lambda s - \varphi) + \cos(\Lambda t + \varphi + \Lambda s + \varphi)\right] =$$

Упростим аргументы косинусов

$$= M\left\{\xi(t)\,\xi(s)\cdot\frac{\cos[\Lambda(t-s)]+\cos[\Lambda(t+s)+2\varphi]}{2}\right\}=$$

Разобьём на 2 математических ожидания

$$= M\left\{\xi(t)\,\xi(s)\cdot\frac{\cos[\Lambda(t-s)]}{2}\right\}+M\left\{\xi(t)\,\xi(s)\cos[\Lambda(t+s)+2\varphi]\right\}=$$

$$= M[\xi(t)\,\xi(s)]\cdot\frac{\cos[\Lambda(t-s)]}{2}=$$

$$= \{cov[\xi(t),\xi(s)]-M\xi(t)\,M\xi(s)\}\cdot\frac{\cos[\Lambda(t-s)]}{2}=$$

$$= \frac{k_\xi(t-s)-m_\xi^2}{2}\cdot\cos[\Lambda(t-s)]\,.$$

Ответ зависит только от разности t и s, значит, это стационарный процесс

$$k_\xi(t)=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}dF_\xi(d\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}f(\lambda)\,d\lambda,$$

где $F_\xi(d\lambda)$ — спектральная функция для ξ.

Для процесса η нужно найти представление

$$k_\eta(t)=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}F_\eta(d\lambda)\,,$$

где $F_\eta(d\lambda)$ — искомая функция.

Выпишем

$$k_\eta(t)=\frac{k_\xi(t)-m_\xi^2}{2}\cdot\cos(\Lambda t)\,.$$

Для k_ξ есть интегральное выражение, подставим его

$$k_\eta(t)=\left[\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}f(\lambda)\,d\lambda-\frac{m_\xi^2}{2}\right]\cdot\cos(\Lambda t)=$$

Можем внести косинус и константы под знак интеграла, потому что они не зависят от аргумента, по которому идёт интегрирование,

$$=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot f(\lambda)-\frac{m_\xi^2}{2}\right]\cdot\cos(\Lambda t)\,d\lambda=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}F_\eta(d\lambda)\,.$$

Получили, что $F_\eta(d\lambda)$ — спектральная функция для η, равная

$$F_\eta(d\lambda)=\left[\frac{1}{2}\cdot f(\lambda)-\frac{m_\xi^2}{2}\right]\cdot\cos(\Lambda t)\,.$$

Занятие 11. Стационарные случайные последовательности.

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение стационарной случайной последовательности.

Последовательность $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ называется стационарной (в широком смысле), если $M\xi_n = M\xi_0$, $n \in \mathbb{Z}$, $cov\left(\xi_{n+m}, \xi_m\right) = cov\left(\xi_n, \xi_0\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Приведите примеры стационарных случайных последовательностей.

1. $\xi_n = \eta \cdot e^{i\lambda n}$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, η — случайная величина такая, что $M\eta = 0$ и $M\left|\eta\right|^2 \equiv \sigma^2 < +\infty$.

   При этом

   $$cov\left(\xi_{n+m}, \xi_m\right) = M\left[\eta \cdot e^{i\lambda(n+m)} \cdot \overline{\eta} \cdot e^{-i\lambda m}\right] = M\left|\eta\right|^2 \cdot e^{i\lambda n} = \sigma^2 \cdot e^{i\lambda n} =$$

   Нет зависимости от m, есть зависимость только от разностей

   $$(n+m) - m = n + m - m = n.$$

   Получаем

   $$= K\left(n\right).$$

2. Пусть

   $$\eta_n = \sum_{k=1}^{N} \eta_k e^{i\lambda_k n},\ n \in \mathbb{Z},$$

   где $\eta_1, \ldots, \eta_N$ — случайные величина с $M\eta_i = 0$, $1 \le i \le N$ и

   $$M\eta_i\overline{\eta_j} = 0,\ 1 \le i, j \le N,\ i \ne j,$$

и $M|\eta_i|^2 = \sigma_i^2$, а $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ — действительные числа. Тогда

$$cov\,(\xi_{n+m}, \xi_n) = M\left[\sum_{k=1}^{N} \eta_k e^{i\lambda_k(n+m)} \cdot \sum_{l=1}^{N} \overline{\eta_l} e^{-i\lambda_l m}\right] =$$

Запишем произведение двух сумм в виде двойной суммы

$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left[M\eta_k\overline{\eta}_l \cdot e^{i\lambda_k(n+m)}e^{-i\lambda_l m}\right] =$$

Воспользуемся тем, что $M\eta_i\overline{\eta}_j = 0$. Получим

$$= \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \cdot e^{i\lambda_k n} =$$

Ковариационная функция элементов последовательности зависит только от разности их индексов

$$= K\,(n)\,.$$

Сформулируйте теорему Герглотца про спектральное изображение ковариационной функции стационарной случайной последовательности.

Если k — ковариационная функция стационарной в широком смысле последовательности, то существует мера на $([-\pi,\pi]\,, \beta\,([-\pi,\pi]))$, где β — борелевская σ-алгебра. Мера такая, что

$$k\,(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\mu\,(d\lambda)\,,\; n \in \mathbb{Z}.$$

Что называется спектральной функцией, спектральной плотностью стационарной случайной последовательности?

Мера μ, которая фигурировала в теореме Герглотца, называется спектральной мерой, а функция $f\,(\lambda) := \mu\,([\pi,\pi])\,,\, -\pi \leq \lambda < \pi$ — спектральной функцией стационарной последовательности с ковариационной функцией k.

Аудиторные задачи

11.2

Задание. Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ —стационарная в широком смысле последовательность, $M\xi_n = 2, R\,(n) = 2^{-|n|}$. Вычислите:

$$cov\,(\xi_3, \xi_5)\,,\; cov\,(\xi_{100}, \xi_{105})\,,\; M\xi_2\xi_8,\; D\xi_4.$$

Решение. Посчитаем ковариационную функцию R от разности аргументов

$$cov\,(\xi_3, \xi_5) = R\,(2) = \frac{1}{4}.$$

Дальше $cov\,(\xi_{100}, \xi_{105}) = R\,(5) = 2^{-5}$.

Перепишем следующее математическое ожидание через ковариацию

$$M\xi_2\xi_8 = cov\,(\xi_2, \xi_8) + M\xi_2 \cdot M\xi_8 = K\,(6) + 2 \cdot 2 = 2^{-6} + 4.$$

Найдём дисперсию $D\xi_4 = cov\,(\xi_4, \xi_4) = R\,(0) = 2^{-0} = 1$.

11.3

Задание. Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = \sigma^2$. Положим $\eta_n = \xi_n + \xi_{n-1} + \ldots + \xi_{n-m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m = const$. Докажите, что $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует стационарную в широком смысле последовательность и найдите её ковариационную функцию.

Решение. Нужно найти математическое ожидание

$$M\eta_n = M\,(\xi_n + \xi_{n-1} + \ldots + \xi_{n-m}) = M\xi_n + M\xi_{n-1} + \ldots + M\xi_{n-m} = 0,$$

потому что у каждого слагаемого математическое ожидание 0. Теперь ещё нужно найти ковариационную функцию

$$cov\,(\eta_n, \eta_j) = cov\,(\xi_n + \xi_{n-1} + \ldots + \xi_{n-m}, \xi_j + \xi_{j-1} + \ldots + \xi_{j-m}) =$$

Сдучайные величины ξ независимые и одинаково распределённые

$$= cov\left(\sum_{k=n-m}^{n} \xi_k, \sum_{i=j-m}^{j} \xi_i\right) =$$

Суммы можно вынести

$$= \sum_{k=n-m,\, i=j-m}^{n,j} cov\,(\xi_k, \xi_i) = \sum_{k=n-m}^{n} \sum_{i=j-m}^{j} M\,(\xi_k\xi_j) =$$

Когда индексы одинаковые — это σ^2, когда индексы разные — это 0. Получаем

$$= \sigma^2 \cdot \#\left\{(k,i)\ :\ k = i,\, k = \overline{n-m,n},\, i = \overline{j=m,j}\right\},$$

где # — количество.

$k = \overline{n-m,n}$; для этого же k выполняется $k = \overline{j-m,j}$.

Первое условие: $k \geq \max\,(n-m, j-m) = \max\,(n,j) - m$.

Второе условие: $k \leq \min\,(n,j)$.

Случай номер 1: верхняя граница меньше чем нижняя граница. Тогда решений нет, и ковариация будет 0. Это в том случае, если

$$\min\,(n,j) < \max\,(n,j) - m$$

тогда и только тогда, когда $|n-s|>m$.

Второй случай: когда $\min(n,j)\geq\max(n,j)-m$ тогда и только тогда, когда $|n-j|\leq m$. Количество пар индексов

$$\min(n,j)-\max(n,j)+m+1=m+1-|n-j|\,.$$

Нашли ковариационную функцию, и она получилась такой

$$K(\xi_n,\xi_j)=\begin{cases}0, & |n-j|>m,\\ \sigma^2(m+1-|n-j|)\,, & |n-j|\leq m.\end{cases}$$

Так что это действительно стационарная последовательность.

11.4

Задание. Найдите спектральную плотноть стационарной в широком смысле последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, если её ковариационная функция R_ξ равна:

a) $R_\xi(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0;\end{cases}$

b) $R_\xi(n)=\begin{cases}4, & n=0,\\ 1, & |n|=1,\\ 0, & |n|>1.\end{cases}$

Решение.

a)
$$R(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0\end{cases}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}f(\lambda)\,d\lambda.$$

Нужно найти $f(\lambda)$.

Проверим, что
$$f(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda n}R(n)$$
это формула обращения.

Проверим, что $f(\lambda)$ — плотность. Посчитаем
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda k}R(k)\,d\lambda=$$

Здесь
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda k}R(k)=f(\lambda)\,.$$

Сумму и R выносим за интеграл

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(k) \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-k)} d\lambda = R(n),$$

когда $k = n$.

Когда $k \neq n$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-k)} d\lambda = \frac{1}{i(n-k)} \cdot e^{i\lambda(n-k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

потому что экспонента — периодическая с периодом 2π. В нашей ситуации

$$f(\lambda) = \sum_{n-\infty}^{+\infty} R(n) e^{i\lambda n} =$$

Остаётся слагаемое только при $n = 0$. Получается

$$= 1.$$

Эта последовательность называется белый шум. У него постоянная плотность.

b) $f(\lambda) = 4 + e^{i\lambda} + e^{-i\lambda} = 4 + 2\cos\lambda$, где 4 — при $n = 0$, слагаемое $e^{i\lambda}$ — при $n = 1$, а слагаемое $e^{-i\lambda}$ — при $n = -1$.

11.5

Задание. Пусть

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot \varepsilon_{n-k},$$

где $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин со стандартным нормальным распределением. Найдите ковариационную функцию и спектральную плотность последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Решение. ε_n обозначает белый шум.

$$M\varepsilon_n = 0,\ cov(\varepsilon_n, \varepsilon_k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Считаем ковариационную функцию. Подставляем сумму

$$cov(\xi_n, \xi_s) = cov\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot \varepsilon_{n-k}, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} \cdot \varepsilon_{s-j}\right) =$$

Выносим сумму и коэффициенты

$$\sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{3^j} \cdot cov\left(\varepsilon_{n-k}, \varepsilon_{s-j}\right) =$$

Из внутренней сумы нужно оставить только одно слагаемое, когда

$$n - k = s - j.$$

Отсюда $j = s - n + k \geq 0$, $s \geq n$. Получим

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{3^{s-n+k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+s-n+k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k+s-n}} =$$

Сумма геометрической прогрессии

$$\frac{1}{3^{s-n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} = \frac{1}{3^{s-n}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8 \cdot 3^{s-n}}.$$

В ответе будет стоять модуль. Итого, ковариационная функция ξ — это

$$R_\xi\left(n\right) = \frac{9}{8 \cdot 3^{|n|}}.$$

Теперь найдём спектральную плотность для такой ковариационной функции

$$f\left(\lambda\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda n} R_\xi\left(n\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda n} \cdot \frac{9}{8 \cdot 3^{|n|}} =$$

Разбиваем на две суммы

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-i\lambda n} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \frac{9}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{i\lambda}}{3}\right)^n \cdot \frac{9}{8} = \left(\frac{1}{1-\frac{e^{-i\lambda}}{3}} + \frac{\frac{e^{i\lambda}}{3}}{1-\frac{e^{i\lambda}}{3}}\right) \cdot \frac{9}{8} =$$
$$= \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{3}{3-e^{-i\lambda}} + \frac{e^{i\lambda}}{3-e^{i\lambda}}\right) =$$

Приведём к общему знаменателю

$$= \frac{9}{8} \cdot \frac{9 - 3e^{i\lambda} + 3e^{i\lambda} - 1}{\left(3-e^{-i\lambda}\right)\left(3-e^{i\lambda}\right)} = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{\left(3-e^{-i\lambda}\right)\left(3-e^{i\lambda}\right)} = \frac{9}{9 - 3e^{i\lambda} - 3e^{-i\lambda} + 1} =$$
$$= \frac{9}{10 - 3e^{-i\lambda} - 3e^{i\lambda}} = \frac{9}{10 - 6\cos\lambda}.$$

Это спектральная плотность.

Вычисление спектральной плотности можно было делать проще.

$f_\varepsilon = 1$, потому что ε — это белый шум.

$$f_\xi(\lambda) = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot^{-i\lambda k}\right|^2 \cdot 1 = \left|\frac{1}{1 - \frac{e^{-i\lambda}}{3}}\right|^2 = \left|\frac{3}{3 - e^{-i\lambda}}\right|^2 = \frac{9}{(3 - \cos\lambda)^2 + \sin^2\lambda} =$$

Раскроем квадрат

$$= \frac{9}{10 - 6\cos\lambda}.$$

Таким образом,

$$R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \cdot \frac{9}{10 - 6\cos\lambda} \cdot d\lambda = \frac{9}{8 \cdot 3^{|n|}}.$$

Занятие 12. Регулярные и сингурярные стационарные последовательности.

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение стационарной последовательности.

Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ называется стационарной (в широком смысле), если $M\xi_n = M\xi_0, n \in \mathbb{Z}, cov\left(\xi_{n+m}, \xi_m\right) = cov\left(\xi_n n, \xi_0\right), n, m \in \mathbb{Z}$.

Запишите спектральное изображение ковариационной функции стационарной последовательности

Если k — ковариационная функция стационарной в широком смысле последовательности, то сущетвует мера на $\left(\left[-\pi, \pi\right], \beta\left(\left[-\pi, \pi\right]\right)\right)$ такая, что

$$k\left(n\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \mu\left(d\lambda\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Приведите определение подпространств будущего, связанных со стационарной последовательностью.

$H_n^{\xi} = \overline{LS\left\{\xi_k, k \leq n\right\}}$ — замыкание в среднем квадратическом линейной оболочки $\{\xi_k, k \leq n\}$ — подпространство пространства $L_2\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right)$.

Приведите определение регулярной и сингулярной последовательности.

Стационарная последовательность называется сингулярной, если

$$H_{-\infty}^{\xi} = \ldots = H_0^{\xi} = \ldots,$$

то есть если они все просто совпадают между собой, и называется рещулярной, если $H_{-\infty}^{\xi} = \{0\}$.

Сформулируйте задачу прогноза стационарной последовательности.

Найти $\hat{\xi_n} = Q_{n_0}\xi_n, n_0 < n$, где Q_n — это проектор на H_n.

Сформулируйте критерий Колмогорова регулярности стационарной последовательности.

Пусть $\{\xi_n\}$ имеет спектральную плотность p. Тогда $\{\xi_n\}$ — сингулярная или решулярная в зависимости от

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} ln\, p\,(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} -\infty, & singular, \\ \in \mathbb{R}, & regular. \end{cases}$$

Аудиторные задачи

12.7

Задание. Стационарная последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ имеет ковариационную функцию

a) $R\,(n) = 1$,

b) $R\,(n) = e^{in\lambda}$,

c) $R\,(n) = 2 + 2^{in\lambda}$.

Докажите, что последовательность сингулярна.

Решение. Имеем примеры сингулярных последовательностей.

a) Нужно понять, как такая последовательность устроена.

$cov\,(ß_n, \xi_0) = 1$ для любых n. Это верно и при $n = 0$, то есть

$$cov\,(\xi_0, \xi_0) = D\xi_0 = D\xi_n.$$

Знаем, что $cov\,(\xi_n, \xi_0) = M\xi_n\overline{\xi_0}$.

При этом $D\xi_n = M\,|\xi_n|^2$.

Оценим $\left|M\xi_n\overline{\xi_0}\right| \leq \sqrt{M\,|\xi_n|^2}\sqrt{M\,|\xi_0|^2}$, другими словами,

$$|cov\,(\xi_n, \xi_0)| \leq \sqrt{D\xi_n \cdot D\xi_0}$$

Использовали неравенство Коши-Буняковского.

Обе части равны единице, то есть в неравенстве Коши-Буняковского достигается равенство. Из этого следует, что величины пропорциональны, то есть $\xi_n = a_n\xi_0 \Rightarrow a_n = 1$. Делаем предположение, что в такой последовательности все величины одинаковы, то есть $\xi_n = \xi_0$. Проверим это.

Величины равны, если их разность равна нулю, то есть

$$D(\xi_n - \xi_0) = cov(\xi_n - \xi_0, \xi_n - \xi_0) = R(0) - R(n) - R(-n) + R(0) = 0.$$

Сейчас $\xi_n = \xi_0$ для всех n. Тогда пространство $H_n^\xi = \{c \cdot \xi_0 \ : \ c \in \mathbb{C}\}$.

Эти пространства не изменяются при изменении n. Значит, последовательность сингулярная.

b) $D\xi_n = R(0) = 1$. Опять находимся в ситуации, когда

$$|cov(\xi_n, \xi_0)| = \sqrt{D\xi_n \cdot D\xi_0}.$$

Это значит, что $\xi_n = a_n \xi_0 \Rightarrow a_n = e^{i\lambda n}$. Поэтому можем сделать предположение, что $\xi_n = e^{i\lambda n}\xi_0$. Как его проверить: Нужно взять

$$D\left(\xi_n - e^{i\lambda n}\xi_0\right) = cov\left(\xi_n - e^{i\lambda n}\xi_0, \overline{\xi_n - e^{i\lambda n}\xi_0}\right) =$$

Раскроем ковариацию

$$= R(0) - e^{-i\lambda n}R(n) + R(0) - e^{i\lambda n}R(-n) = 1 - e^{-i\lambda n}\cdot e^{i\lambda n} + 1 - e^{i\lambda n}\cdot e^{-i\lambda n} = 0.$$

Так что у такой последовательности есть равенство $\xi_n = e^{i\lambda n}\xi_0$.

Так же как в предыдущем пункте $H_n^\xi = \{c \cdot \xi_0, \, c \in \mathbb{C}\}$. Опять пространства не меняются

$$R(n) = e^{i\lambda n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ixn}\mu(dx) \Rightarrow \mu = 2\pi\delta_\lambda$$

с точностью до коэффициента.

c) Можем сделать предположение: $\xi_n = a_n\xi_0 + b_n\xi_1$.

Берём ковариацию с ξ_0. Получится

$$\begin{cases} R(0)\, a_n + R(1)\, b_n = R(n), \\ R(-1)\, a_n + R(0)\, b_n = R(n-1). \end{cases}$$

Задача: найти коэффициенты a_n и b_n.

Вычислим $R(0) = 2 + e^{i\lambda \cdot 0} = 3$.

Аналогично $R(1) = 2 + e^{i\lambda}$.

Таким же образом получаем, что $R(n) = 2 + e^{i\lambda n}$.

Ещё нужно $R(n-1) = 2 + e^{i\lambda(n-1)}$.

Осталось найти $R\left(-1\right) = 2 + e^{-i\lambda}$.

Подставим это всё в систему

$$\begin{cases} 3a_n + \left(2 + e^{i\lambda}\right) b_n = 2 + e^{i\lambda n}, \\ \left(2 + e^{-i\lambda}\right) a_n + 3b_n = 2 + e^{i\lambda(n-1)}. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $a_n R\left(0\right) = R\left(n\right) - R\left(1\right) b_n$.

Поделим на $R\left(0\right)$ и получим

$$a_n = \frac{R\left(n\right) - R\left(1\right) b_n}{R\left(0\right)}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение

$$R\left(-1\right) \cdot \frac{R\left(n\right) - R\left(1\right) b_n}{R\left(0\right)} + R\left(0\right) b_n = R\left(n-1\right).$$

Поделим числитель на знаменатель

$$\frac{R\left(-1\right) R\left(n\right)}{R\left(0\right)} - \frac{R\left(-1\right) R\left(1\right)}{R\left(0\right)} \cdot b_n + R\left(0\right) b_n = R\left(n-1\right).$$

Вынесем b_n. Получим

$$b_n \left(R\left(0\right) - \frac{R\left(-1\right) R\left(1\right)}{R\left(0\right)} \right) = R\left(n-1\right) - \frac{R\left(-1\right) R\left(n\right)}{R\left(0\right)}.$$

Приведём слагаемые в скобках к общему знаменателю

$$R\left(0\right) - \frac{R\left(-1\right) R\left(1\right)}{R\left(0\right)} = \frac{R^2\left(0\right) - R\left(-1\right) R\left(1\right)}{R\left(0\right)}.$$

Тогда

$$b_n = \frac{R\left(n-1\right) R\left(0\right) - R\left(-1\right) R\left(n\right)}{R\left(0\right)} \cdot \frac{R\left(0\right)}{R^2\left(0\right) - R\left(-1\right) R\left(1\right)} =$$

Сократим

$$= \frac{R\left(n-1\right) R\left(0\right) - R\left(-1\right) R\left(n\right)}{R^2\left(0\right) - R\left(-1\right) R\left(1\right)}.$$

Тогда

$$a_n = \frac{R\left(0\right) R\left(n\right) - R\left(1\right) R\left(n-1\right)}{R^2\left(0\right) - R\left(1\right) R\left(-1\right)} =$$

Подставим значения ковариационной функции

$$= \frac{3\left(2 + e^{i\lambda n}\right) - \left(2 + e^{i\lambda}\right)\left(2 + e^{i\lambda(n-1)}\right)}{9 - \left(2 + e^{i\lambda}\right)\left(2 + e^{-i\lambda}\right)} =$$

Раскроем скобки

$$= \frac{6 + 3e^{i\lambda n} - 4 - 2e^{i\lambda(n-1)} - 2e^{i\lambda} - e^{i\lambda n}}{9 - 4 - 2e^{-i\lambda} - 2e^{i\lambda} - e^{i\lambda} \cdot e^{-i\lambda}} =$$

Упростим

$$= \frac{2 + 2e^{i\lambda n} - 2e^{i\lambda} - 2e^{i\lambda(n-1)}}{4 - 4\cos\lambda} =$$

Можно на 2 сократить

$$= \frac{1 + e^{i\lambda n} - e^{i\lambda} - e^{i\lambda(n-1)}}{2\left(1 - \cos\lambda\right)}.$$

Второй коэффициент равен

$$b_n = \frac{\left(2 + e^{i\lambda(n-1)}\right) \cdot 3 - \left(2 + e^{-i\lambda}\right)\left(2 + e^{i\lambda n}\right)}{4 - 4\cos\lambda} =$$

Упростим

$$= \frac{1 + e^{i\lambda(n-1)} - e^{i\lambda} - e^{i\lambda n}}{2\left(1 - \cos\lambda\right)}.$$

Проверим, что будет равенство. Для этого нужно взять

$$D\left(\xi_n - a_n\xi_0 - b_n\xi_1\right) = cov\left(\xi_n - a_n\xi_0 - b_n\xi_1, \xi_n - a_n\xi_0 - b_n\xi_1\right) =$$

По поиску a_n, b_n во второй части ковариации можем вычеркнуть два последних слагаемых

$$= R(0) - a_n \cdot R(-n) - b_n R(1-n) =$$

Подставим и проверим, что это равняется нулю

$$= 3 - \frac{1 + e^{i\lambda n} - e^{i\lambda} - e^{i\lambda(n-1)}}{2\left(1 - \cos\lambda\right)} \cdot \left(2 + e^{-i\lambda n}\right) -$$
$$- \frac{1 + e^{i\lambda(n-1)} - e^{-i\lambda} - e^{i\lambda n}}{2\left(1 - \cos\lambda\right)} \cdot \left(2 + e^{i\lambda(1-n)}\right) =$$

Осталось раскрыть скобки и проверить, что это равняется нулю

$$= 3 - \frac{1}{2\left(1 - \cos\lambda\right)} \times$$
$$\times \left(2 + 2e^{i\lambda n} - 2e^{i\lambda} - 2e^{i\lambda(n-1)} + e^{-i\lambda n} + 1 - e^{i\lambda(n-1)} - e^{-i\lambda} + 2 + 2e^{i\lambda(n-1)}\right) =$$
$$= 3 - \frac{6 - 3e^{i\lambda} - 3e^{-i\lambda}}{2\left(1 - \cos\lambda\right)} = 3 - \frac{6 - 6\cos\lambda}{2\left(1 - \cos\lambda\right)} = 0.$$

Это значит, что действительно предположение было верным, и

$$\xi_n = \xi_0 a_n + b_n \xi_1.$$

Имеем пространство $H_n^\xi = \{c_0 \cdot \xi_0 + c_1 \cdot \xi_1 \ : \ c_0, c_1 \in \mathbb{C}\}$.

Пространство не меняется.

Если спектральная мера дискретна и имеет конечное число атомов, то последовательность сингулярная.

12.8

Задание. Стационарная последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ задана соотношением $\xi_{n+1} = \varepsilon_{n+2} + 3\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n$, где $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — белый шум. Выясните, является ли $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ регулярной последовательностью.

Решение.

$$\sum_{k=m}^{n} c_k \xi_k = \sum_{k=m-1}^{n+1} d_k \varepsilon_k \in H_{n+1}^\xi.$$

Таким образом, $H_n^\xi \subset H_{n+1}^\xi$.

Белый шум регулярный, следовательно, $H_{-\infty}^\xi \subset H_{-\infty}^\varepsilon = \{0\}$.

12.9

Задание. Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — регулярная последовательность. Выясните, является ли регулярной последовательность $\eta_n = \xi_n + \xi_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. $H_n^\eta \subset H_{n+1}^\xi \Rightarrow H_{-\infty}^\eta \subset H_{-\infty}^\xi = \{0\}$.

Домашнее задание

12.10

Задание. Стационарная последовательность имеет спектральную плотность

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left|4 + e^{i\lambda}\right|^2.$$

Докажите, что последовательность является регулярной, показав, что её можно подать в виде одностороннего скользящего среднего.

Решение.

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left|4 + e^{i\lambda}\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\left|4e^{-i\lambda} + 1\right|^2.$$

Представим $\xi_n = \varepsilon_n + 4\varepsilon_{n-1}$, где $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — белый шум.

Последовательность одностороннего скользящего среднего имеет вид

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \varepsilon_{n-k},\ \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty.$$

Тогда

$$\xi_n = \varepsilon_n + 4\varepsilon_{n-1} + \sum_{k>1} c_k \varepsilon_{n-k},$$

откуда $c_0 = 1, c_1 = 4, c_k = 0, k > 1$.

12.11

Задание. Стационарная последовательность имеет спектральную плотность
$$f\left(\lambda\right)=\frac{1}{2\pi}\left(6+\cos\lambda\right).$$
Докажите, что последовательность является регулярной, показав, что её можно подать в виде одностороннего скользящего среднего.

Решение.
$$f\left(\lambda\right)=\left|\varphi\left(\lambda\right)\right|^2\cdot f_\varepsilon\left(\lambda\right)=\frac{1}{2\pi}\left(6+\cos\lambda\right),$$
где
$$f_\varepsilon\left(\lambda\right)=\frac{1}{2\pi}$$
это плотность белого шума.

Воспользуемся формулой Эйлера
$$6+\cos\lambda=6+\frac{e^{i\lambda}+e^{-i\lambda}}{2}.$$

Тогда
$$\left|\varphi\left(\lambda\right)\right|^2=\left(c_1+c_2e^{i\lambda}\right)\left(c_1+c_2e^{-i\lambda}\right)=c_1^2+c_1c_2e^{-i\lambda}+c_1c_2e^{i\lambda}+c_2^2=$$
$$=6+\frac{1}{2}\cdot e^{i\lambda}+\frac{1}{2}\cdot e^{-i\lambda}.$$

Находим коэффициенты из системы уравнений
$$\begin{cases}c_1^2+c_2^2=6,\\ c_1c_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Выразим из второго уравнения
$$c_1=\frac{1}{2c_2}$$
и подставим в первое уравнение
$$\frac{1}{4c_2^2}+c_2^2=6.$$

Умножим уравнение на $4c_2^2$ и сделаем замену $c_2^2=t$. Получим квадратное уравнение $4t^2-24t+1=0$. Найдём дискриминант
$$D=576-16=560=16\cdot 35.$$

Тогда корни имеют вид
$$t_{1,2}=\frac{24\pm 4\sqrt{35}}{8}=\frac{6\pm\sqrt{35}}{2},$$

откуда
$$c_2 = \frac{\left(6+\sqrt{35}\right)^2}{4},\ c_1 = \frac{2}{\left(6+\sqrt{35}\right)^2}.$$
Тогда
$$\varphi\left(\lambda\right) = c_1 + c_2 e^{-i\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-ik\lambda},$$
откуда $a_0 = c_1, a_1 = c_2, a_k = 0, k > 1$.

12.12

Задание. Спектральная плотность стационарной последовательности
$$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$
равна $f\left(\lambda\right) = e^{-\frac{1}{|\lambda|}}$. Выясните, является ли последовательность регулярной, сингулярной.

Решение. Согласно критерию Колмогорова, стационарная последовательность со спектральной плотностью $f\left(\lambda\right)$ является регулярной тогда и только тогда, когда
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} lnf\left(\lambda\right)d\lambda > -\infty.$$
Проверим выполнимость этого условия для заданной спектральной плотности. Имеем:
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} lne^{-\frac{1}{|\lambda|}}d\lambda = -\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|\lambda|}d\lambda = \int\limits_{-\pi}^{0}\frac{1}{\lambda}d\lambda - \int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{\lambda}d\lambda = -2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{\lambda}d\lambda = -2\ ln\lambda|_0^{\pi} =$$
Подставим пределы интегрирования
$$= -2ln\pi + 2ln0 = -2ln\pi - 2\cdot\infty = -\infty.$$
Из бесконечности этого интеграла следует, что последовательность
$$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$
является сингулярной.

12.13

Задание. Докажите, что последовательность со спектральной плотностью $f\left(\lambda\right) = \mathbb{1}_{[0,\pi]}\left(\lambda\right)$ является сингулярной.

Решение. Согласно критерию Колмогорова, стационарная последовательность со спектральной плотностью $f(\lambda)$ является сингулярной тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\pi}^{\pi} lnf(\lambda)\, d\lambda = -\infty.$$

Проверим выполнимость этого условия для заданной спектральной плотности. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} ln\mathbb{1}_{[0,\pi]}(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\pi}^{0} ln\mathbb{1}_{[0,\pi]}(\lambda)\, d\lambda + \int_{0}^{\pi} ln\mathbb{1}_{[0,\pi]}(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\pi}^{0} ln0 d\lambda + \int_{0}^{\pi} ln1 d\lambda =$$

Второй интеграл равен нулю

$$= -\infty.$$

Из бесконечности этого интеграла следует, что последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ сингулярна.

12.14

Задание. Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортогональные регулярные последовательности. Докажите, что сумма $\{\xi_n+\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является регулярной последовательностью.

Решение. Если последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ регулярны, то их можно представить в виде одностороннего скользящего среднего, то есть

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\varepsilon_{n-k},\ \eta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\varepsilon_{n-k},$$

где

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty,\ \sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|^2 < +\infty.$$

Тогда

$$\xi_n+\eta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\varepsilon_{n-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\varepsilon_{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k+b_k)\,\varepsilon_{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\varepsilon_{n-k},$$

поэтому $\{\xi_n+\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — регулярная последовательность.

Занятие 13. Разложение Вольда. Задача прогноза.

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение сингулярной и регулярной стационарной последовательности, приведите примеры.

Стационарная последовательность называется сингулярной, если

$$H_{-\infty}^{\xi} = \ldots = H_0^{\xi} = \ldots,$$

то есть если они все просто совпадают между собой, и называется регулярной, если $H_{-\infty}^{\xi} = \{0\}$.

Примеры:

1. если $\{\xi_n\}$ — это последовательность случайных колебаний, то

   $$\mu = \sum_{k=1}^{m} \delta_{\lambda_k}.$$

   Прогноз: $\hat{\xi}_n = \xi_n$.

   Сейчас $H_n^{\xi} = \overline{LS\{\xi_k\}}$, $n \in \mathbb{Z}$.

   Нет зависимости от n, следовательно, $\ldots = H_n^{\xi} = H_{n+1}^{\xi} = \ldots$.

   Так как H_n^{ξ} не меняется, то

   $$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_n^{\xi} = H_0^{\xi};$$

2. последовательность белого шума $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$. У неё есть спектральная плотность $p \equiv 1$ на $[-\pi, \pi]$. В этом случае прогноза вообще никакого нет. Вместо проекции получаем $\hat{\xi}_n = 0$.

   Сейчас $H_n^{\xi} = \overline{LS\{\xi_k,\, k \leq n\}}$.

   Так как последовательность белого шума — ортонональные случайные величины, то $\xi_{n+1} \perp H_n^{\xi}$.

Следовательно, $H_n^\xi \subset H_{n+1}^\xi$ (включение строгое).

H_n^ξ — это прошлое до момента времени n.

Тогда
$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} H_n^\xi = \{0\}\,.$$

Докажем это. Возьмём
$$\zeta = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} H_n^\xi \equiv H_{-\infty}^\xi.$$

Если ζ принадлежит пересечению, то $\zeta \in H_0^\xi$. Раз так, то ζ должно представляться как предел линейной комбинации
$$\zeta = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{0} c_{km}\zeta_k.$$

Замыканием такой линейной комбинации и есть H_0^ξ.

Одновременно с этим $\zeta \in H_{-1}^\xi$. Следовательно, $\zeta \perp \xi_0$. Можем сделать заключение, что $\zeta \in H_{-2}^\xi \Rightarrow \zeta \perp \xi_{-1}$.

Таким образом, $\forall k \le 0\ :\ \zeta \perp \xi_k$. Отсюда
$$M\left|\zeta\right|^2 = \lim_{m\to\infty} M\zeta \cdot \overline{\sum_{k=-m}^{0} c_{km}\zeta_k} = 0$$
(так как ζ ортогональная ко всем ξ_k).

Таким образом, $H_{-\infty}^\xi = \{0\}$.

Опишите пространства, связанные со стационарной последовательностью.

Будем использовать $\forall n \in \mathbb{Z}\ :\ H_n^\xi = \overline{LS\left\{\xi_k,\, k \le n\right\}}$ — замыкание в среднем квадратическом линейной оболочки $\{\xi_k,\, k \le n\}$.

Получили H_n^ξ — подпространство пространства $L_2\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right)$.

Пусть Q_n — это проектор на H_n.

Что такое разложение Вольда?

Для произвольной стационарной последовательности $\{\xi_n\}$ существует регулярная последовательность $\{\xi_n'\}$ и сингулярная последовательность $\{\xi_n''\}$ такие, что

1. $\xi_n = \xi_n' + \xi_n''$;
2. $\xi_n' \perp \xi_m'', \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}$;
3. $\xi_n', \xi_n'' \in H_n^\xi$.

Это представление называется разложением Вольда.

Как определяются прогноз и погрешность прогноза ξ_n, $n \geq 1$ при $\xi^0 = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0)$ с помощью разложения Вольда?

Решение задачи прогноза:

$$Q_{n_0}\xi_n = \sum_{k=n-n_0}^{\infty} \alpha_k e_{n-k}.$$

Можем посчитать ошибку прогноза:

$$\|\xi_n - Q_{n_0}\xi_n\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{n-n_0-1} \alpha_k e_{n-k} \right\|^2 = \sum_{k=0}^{n-n_0-1} |\alpha_k|^2 .$$

Запишите формулу для погрешности прогноза в терминах спектральной плотности.

$$\sigma^2 = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} ln\, p(\lambda) d\lambda}.$$

Аудиторные задачи

13.2

Задание. Стационарная последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ задана соотношением $\xi_{n+1} = 3\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n$, где $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — белый шум. Найдите оптимальную линейную оценку ξ_n при $\xi^0 = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0)$ и погрешность прогноза $M\left(\xi_n - \hat{\xi_n}\right)^2$.

Решение. $\hat{\xi_n}$ — проекция ξ_n на H_0^ξ.

Нужно знать базис в пространстве H_0^ξ.

Если $\varepsilon_n \in H_n^\xi$, то $\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2}, \ldots$ — это и будет ортонормированный базис в H_0^ξ. Можно ли ε_n переписать через ξ_n?

Выразим из соотношения, которое задано в условии, $3\varepsilon_n = \xi_n - \varepsilon_{n-1}$, откуда

$$\varepsilon_n = \frac{1}{3}\cdot\xi_n - \frac{1}{3}\cdot\varepsilon_{n-1} = \frac{1}{3}\cdot\xi_n - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\xi_{n-1} - \frac{1}{3}\cdot\varepsilon_{n-2}\right) =$$

Раскроем скобки

$$= \frac{1}{3}\cdot\xi_n - \frac{1}{9}\cdot\xi_{n-1} + \frac{1}{9}\cdot\varepsilon_{n-2} = \ldots = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \cdot \frac{1}{3^{k+1}}\cdot\xi_{n-k} + \frac{\varepsilon_{n-N}}{3^N}\cdot(-1)^N .$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $N \to \infty$, потому что его длина — это

$$\frac{1}{3^N}.$$

Тогда
$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} \cdot \xi_{n-k} \in H_n^{\xi}.$$
Вывод такой, что у нас появился ортономированный базис в H_0^{ξ} $\{\varepsilon_k,\, k \leq 0\}$.

Значит, мы можем посчитать проекцию
$$\hat{\xi_n} = \sum_{k=-\infty}^{0} (\xi_n, \varepsilon_k)\, \varepsilon_k.$$
Чтобы получить ответ, нужно найти ковариацию, то есть
$$(\xi_n, \varepsilon_k) = 3\,(\varepsilon_n, \varepsilon_k) + (\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_k) =$$
Первое слагаемое равно нулю
$$= \begin{cases} 1, & n = 1,\, k = 0, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$
Говорили, что $n \geq 1$, а $k \leq 0$.

Теперь получается ответ. Если хотим спрогнозировать ξ_n при $n \geq 2$, то $\hat{\xi_n} = 0$. Значит, ошибка прогноза
$$M\left(\xi_n - \hat{\xi_n}\right)^2 = M\xi_n^2 = M\,(3\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1})^2 =$$
По теореме Пифагора
$$= 9 + 1 = 10.$$
Если $n = 1$, то
$$\hat{\xi_1} = \varepsilon_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{3^{k+1}} \cdot \xi_{-k}.$$
Значит, ошибка прогноза $M\left(\xi_1 - \hat{\xi_1}\right)^2 = M\,(3\varepsilon_1)^2 = 9$. Решили задачу прогноза.

13.3

Задание. Стационарная последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет уравнению $\xi_{n+1} = 3\xi_n + \varepsilon_n$, где $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — белый шум. Найдите оптимальную линейную оценку ξ_n при $\xi^0 = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0)$ и погрешность прогноза $M\left(\xi_n - \hat{\xi}_n\right)^2$.

Решение. Нужно сначала понять, как устроено пространство H_0^{ξ}, то есть нужно найти ортонормированный базис в этом пространстве.

$\xi_n = 2\xi_{n-1} + \varepsilon_{n-1} = 4\xi_{n-2} + 2\varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1}$, но так сейчас плохо делать, потому что длина остатка стремится к бесконечности. $\xi_{n+3} = 2\xi_{n+2} + \varepsilon_{n+2}$, откуда
$$\xi_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \xi_{n+3} - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{n+2}.$$

Тогда

$$\xi_n = \frac{\xi_{n+1}}{2} - \frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \xi_{n+2} - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{n+1} \right) - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_n = \frac{1}{4} \cdot \xi_{n+2} - \frac{1}{4} \cdot \varepsilon_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_n =$$

За N шагов получим

$$= - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \varepsilon_{n+k} + \frac{\varepsilon_{n+N}}{2^N}.$$

Второе слагаемое сходится к нулю, значит, мы нашли ξ.

Сейчас

$$\xi_n = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \varepsilon_{n+k}.$$

Как построить ортонормированный базис в H_0^ξ? Напомним, что

$$H_n^\xi = \overline{LS \{ \ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0 \}}.$$

Знаем, что $\xi_{n+1} = 2\xi_n + \varepsilon_n$. Используем ортогонализацию Грама-Шмидта. По условию

$$\xi_0 = 2\xi_{n-1} + \varepsilon_{-1} = - \left(\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 + \frac{1}{4} \cdot \varepsilon_1 + \ldots \right).$$

Как организовать ξ_{-1}?

Получаем

$$\xi_{-1} = - \left(\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{-1} + \frac{1}{4} \cdot \varepsilon_0 + \frac{1}{8} \cdot \varepsilon_1 + \ldots \right),$$

где

$$\frac{1}{4} \cdot \varepsilon_0 + \frac{1}{8} \cdot \varepsilon_1 + \ldots = -\frac{1}{2} \cdot \xi_0.$$

Слагаемое

$$-\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{-1}$$

это ортогональная составляющая ξ_{-1} до ξ_0.

Ортонормированный базис тогда будет таким: $\sqrt{3}\xi_0, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2}, \varepsilon_{-3}, \ldots$.

Посчитаем длину ξ_0. Получим

$$\|\xi_0\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Запишем прогноз

$$\hat{\xi}_n = 3 \left(\xi_n, \xi_0 \right) \xi_0 + \left(\xi_n, \varepsilon_{-1} \right) \varepsilon_{-1} + \left(\xi_n, \varepsilon_{-2} \right) \varepsilon_{-2} + \ldots =$$

Все слагаемые, начиная со второго, равны нулю. Здесь $n \geq 1$. Получаем

$$= 3 \left(\xi_n, \xi_0\right) \xi_0.$$

Найдём отдельно

$$\left(\xi_n, \xi_0\right) = \left(-\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n+2} \cdot \frac{1}{2^{k+1}}, -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{2^{j+1}} \right) =$$

Двойные суммы выносятся

$$= \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+j+2}} \left(\varepsilon_{n+k}, \varepsilon_j\right) =$$

Скалярное произведение равно единице, когда индексы совпадают, то есть $k = j - n$. Вместо двойной суммы остаётся одинарная сумма

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^{2j-n+2}} = 2^{n-2} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{4j} = 2^{n-2} \cdot \frac{\frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

Подставляем скалярное произведение в формулу и получим ответ

$$\hat{\xi}_n = \frac{\xi_0}{2^n},\ n \geq 1.$$

Это оптимальный прогноз.

Найдём ошибку прогноза по теореме Пифагора

$$M \left| \xi_n - \hat{\xi}_n \right|^2 = M\xi_n^2 - M\hat{\xi}_n^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

13.4

Задание. Пусть

$$R_\xi \left(n\right) = \begin{cases} 5, & n = 0, \\ 2, & |n| = 1, \\ 0, & |n| > 1. \end{cases}$$

Найдите оптимальную линейную оценку ξ_n при $\xi^0 = \left(\ldots, \xi_{-1}, \xi_0\right)$.

Решение. Нужно решить задачу прогноза, то есть найти $\hat{\xi}_n$.

Знаем, что

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}.$$

Чтобы обеспечить условие 3, возьмём $a_k = 0$, $k \geq 2$.

Условие номер 1 означает, что $a_0^2 + a_1^2 = 5$, а условие 2 означает, что $a_0 a_1 = 2$.

Отсюда

$$a_0 = \frac{2}{a_1}.$$

Подставим это в первое уравнение

$$\frac{4}{a_1^2} + a_1^2 = 5.$$

Умножим на a_1^2 и получим $a_1^4 - 5a_1^2 + 4 = 0$.

Сделаем замену $a_1^2 = t$ и подставим её в уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$.

По теореме Виета

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 5, \\ t_1 \cdot t_2 = 4, \end{cases}$$

откуда $t_1 = 1, t_2 = 4$.

Тогда $a_1 = \pm 1, \pm 2$, $a_0 = \pm 2, \pm 1$.

Имеем представление $\xi_n = 2\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}$, откуда

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \cdot \xi_n - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \xi_{n-k}.$$

Тогда прогноз равен $\hat{\xi}_n = 0$, $n \geq 2$ и

$$\hat{\xi_1} = \varepsilon_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \cdot \xi_{-k}.$$

Домашнее задание

13.8

Задание. Найдите оптимальную линейную оценку ξ_n, $n \geq 1$ при

$$\xi^0 = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0)$$

и погрешность прогноза, если

a) $\xi_n = 10\varepsilon_n + 3\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2}$;

b) $\xi_n = 3\varepsilon_n + 11\varepsilon_{n-1} - 4\varepsilon_{n-2}$.

Решение. Оптимальная оценка $\hat{\xi}_n$ — это проекция ξ_n на H_0^ξ.

Нужно знать базис в пространстве H_0^ξ.

Если $\varepsilon_n \in H_0^\xi$, то $\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2}, \ldots$ — это и будет ортонормированный базис в H_0^ξ. Можно ли ε_n переписать через ξ_n?

а) Выразим из соотношения, заданного в условии

$$10\varepsilon_n = \xi_n - 3\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2},$$

откуда

$$\varepsilon_n = \frac{1}{10}\cdot\xi_n - \frac{3}{10}\cdot\varepsilon_{n-1} + \frac{1}{10}\cdot\varepsilon_{n-2} =$$

Подставим выражение для ε_{n-1} и раскроем скобки

$$= \frac{1}{10}\cdot\xi_n - \frac{3}{10^2}\cdot\xi_{n-1} + \frac{9}{10^2}\cdot\varepsilon_{n-2} - \frac{3}{10^2}\cdot\varepsilon_{n-3} + \frac{1}{10}\cdot\varepsilon_{n-2} =$$

Приведём подобные

$$= \frac{1}{10}\cdot\xi_n - \frac{3}{10^2}\cdot\xi_{n-1} + \frac{19}{10^2}\cdot\varepsilon_{n-2} - \frac{3}{10^3}\varepsilon_{n-3} = \ldots =$$

После N шагов получим

$$= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \frac{c_k}{10^{k+1}}\cdot\xi_{n-k} + \frac{\varepsilon_{n-N}}{10^N}\cdot c_N\cdot(-1)^N.$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $N \to \infty$, потому что его длина — это $c_N \cdot 10^{-N}$.

Тогда

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot c_k}{10^{k+1}}\cdot\xi_{n-k} \in H_0^{\xi}.$$

Вывод такой, что у нас появился ортонормированный базис в H_0^{ξ}, то есть $\{\varepsilon_k,\, k \le 0\}$.

Значит, мы можем посчитать проекцию

$$\hat{\xi}_n = \sum_{k=-\infty}^{0} (\xi_n, \varepsilon_k)\,\varepsilon_k.$$

Чтобы получить ответ, нужно найти ковариацию, то есть

$$(\xi_n, \varepsilon_k) = (10\varepsilon_n + 3\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_k) =$$

Раскроем скобки

$$= 10\,(\varepsilon_n, \varepsilon_k) + 3\,(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_k) - (\varepsilon_{n-2}, \varepsilon_k) =$$

Первое слагаемое равно нулю

$$= \begin{cases} 3, & n = 1, k = 0, \\ -1, & n = 1, k = -1, \\ -1, & n = 2, k = 0, \\ 0, & \textit{in other cases}. \end{cases}$$

Говорили, что $n \geq 1$, а $k \leq 0$.

Теперь получим ответ. Если хотим спрогнозировать ξ_n при $n > 2$, то $\hat{\xi}_n = 0$. Значит, ошибка прогноза

$$M\left(\xi_n - \hat{\xi}_n\right)^2 = M\xi_n^2 = M\left(10\varepsilon_n + 3\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2}\right)^2 =$$

По теореме Пифагора

$$= 100 + 9 + 1 = 110.$$

Если $n = 1$, то

$$\hat{\xi}_1 = 3\varepsilon_0 - \varepsilon_{-1} = 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot c_k}{10^{k+1}} \cdot \xi_{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot c_k}{10^{k+1}} \cdot \xi_{-1-k} =$$

Запишем под одну сумму

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot c_k}{10^{k+1}} \left(3\xi_{-k} - \xi_{-1-k}\right).$$

Значит, ошибка прогноза

$$M\left(\xi_1 - \hat{\xi}_1\right)^2 = M\left(10\varepsilon_1 + 3\varepsilon_0 - \varepsilon_{-1} - 3\varepsilon_0 + \varepsilon_{-1}\right)^2 = M\left(10\varepsilon_1\right)^2 = 100.$$

Если $n = 2$, то

$$\hat{\xi}_2 = -\varepsilon_0 = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot c_k}{10^{k+1}} \cdot \xi_{-k}.$$

Значит, ошибка прогноза

$$M\left(\xi_2 - \hat{\xi}_2\right)^2 = M\left(10\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0\right)^2 = M\left(10\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1\right)^2 = 109.$$

b) Выразим из соотношения, которое задано в условии,

$$3\varepsilon_n = \xi_n - 11\varepsilon_{n-1} + 4\varepsilon_{n-2},$$

откуда

$$\varepsilon_n = \frac{1}{3} \cdot \xi_n - \frac{11}{3} \cdot \varepsilon_{n-1} + \frac{4}{3} \cdot \varepsilon_{n-2} =$$

Подставим выражение для ε_{n-1}. Получим

$$= \frac{1}{3} \cdot \xi_n - \frac{11}{3}\left(\frac{1}{3} \cdot \xi_{n-1} - \frac{11}{3} \cdot \varepsilon_{n-2} + \frac{4}{3} \cdot \varepsilon_{n-3}\right) + \frac{4}{3} \cdot \varepsilon_{n-2} =$$

Раскроем скобки

$$= \frac{1}{3} \cdot \xi_n - \frac{11}{3^2} \cdot \xi_{n-1} + \frac{133}{3^2} \cdot \varepsilon_{n-2} - \frac{44}{3^3} \cdot \varepsilon_{n-3} = \ldots =$$

После N шагов получим

$$= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \frac{1}{3^{k+1}} \cdot c_k \xi_{n-k} + \frac{\varepsilon_{n-N}}{3^N} \cdot c_n (-1)^N .$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $N \to \infty$, потому что его длина — это $c^N \cdot 3^{-N}$.

Тогда

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} \cdot c_k \xi_{n-k} \in H_0^{\xi}.$$

Вывод такой, что у нас появился ортонормированный базис в H_0^{ξ}, то есть $\{\varepsilon_k,\, k \le 0\}$.

Значит, мы можем найти проекцию

$$\hat{\xi}_n = \sum_{k=-\infty}^{0} (\xi_n, \varepsilon_k)\, \varepsilon_k.$$

Чтобы получить ответ, нужно найти ковариацию, то есть

$$(\xi_n, \varepsilon_k) = (4\varepsilon_n + 11\varepsilon_{n-1} - 4\varepsilon_{n-2}, \varepsilon_k) =$$

Раскроем скобки

$$= 3\,(\varepsilon_n, \varepsilon_k) + 11\,(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_k) - 4\,(\varepsilon_{n-2}, \varepsilon_k) =$$

Первое слагаемое равно нулю

$$= \begin{cases} 11, & n = 1, k = 0, \\ -4, & n = 1, k = -1, \\ -4, & n = 2, k = 0, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

Говорили, что $n \ge 1$, $k \le 0$.

Теперь получим ответ. Если хотим спрогнозировать ξ_n при $n \ge 3$, то $\hat{\xi}_n = 0$. Значит, ошибка прогноза

$$M\left(\xi_n - \hat{\xi}_n\right)^2 = M\xi_n^2 = M\,(3\varepsilon_n + 11\varepsilon_{n-1} - 4\varepsilon_{n-2})^2 =$$

По теореме Пифагора

$$= 9 + 121 + 16 = 146.$$

Если $n = 1$, то

$$\hat{\xi}_1 = 11\varepsilon_0 - 4\varepsilon_{-1} = 11\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k+1}}\cdot c_k\xi_{-k} - 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k+1}}\cdot c_k\xi_{-1-k} =$$

Запишем под одной суммой

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k+1}}\cdot c_k\left(11\xi_{-k} - 4\xi_{-1-k}\right).$$

Значит, ошибка прогноза

$$M\left(\xi_1 - \hat{\xi}_1\right)^2 = M\left(3\varepsilon_1 + 11\varepsilon_0 - 4\varepsilon_{-1} - 11\varepsilon_0 + 4\varepsilon_{-1}\right)^2 = M\left(3\varepsilon_1\right)^2 = 9.$$

Если $n = 2$, то

$$\hat{\xi}_2 = -4\varepsilon_0 = -4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k+1}}\cdot c_k\xi_{-k}.$$

Значит, ошибка прогноза

$$M\left(\xi_2 - \hat{\xi}_2\right)^2 = M\left(3\varepsilon_2 + 11\varepsilon_1 - 4\varepsilon_0 + 4\varepsilon_0\right)^2 = M\left(3\varepsilon_2 + 11\varepsilon_1\right)^2 = 130.$$

Решили задачу прогноза.

13.9

Задание. Спектральна мера стационарной последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ подаётся в виде

$$\mu(d\lambda) = \delta_0(d\lambda) + \frac{1}{2\pi}\cdot\left|2 - e^{-i\lambda}\right|^2 d\lambda.$$

Найдите регулярную компоненту в разложении Вольда для последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Решение. Допустим, что

$$\mu^{regular}(d\lambda) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left|2 - e^{-i\lambda}\right|^2 d\lambda,\ \mu^{singular}(d\lambda) = \delta_0(d\lambda).$$

Тогда

$$R^{singular}(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\mu^{singular}(d\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\delta_0(d\lambda) = 1,$$

$$R^{regular}(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\left|2-e^{-i\lambda}\right|^2 d\lambda =$$

Выпишем отдельно

$$\left|2-e^{-i\lambda}\right|^2 = |2-\cos\lambda + i\sin\lambda|^2 = (2-\cos\lambda+i\sin\lambda)(2-\cos\lambda-i\sin\lambda) =$$
$$= 4-2\cos\lambda-2i\sin\lambda-2\cos\lambda+\cos^2\lambda+i\cos\lambda\cdot\sin\lambda+2i\sin\lambda-$$
$$-i\sin\lambda\cdot\cos\lambda+\sin^2\lambda = 4-4\cos\lambda+1 = 5-4\cos\lambda.$$

Тогда

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}(5-4\cos\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\left(5-2e^{i\lambda}-2e^{-i\lambda}\right)d\lambda =$$
$$= \begin{cases}\frac{5}{4\pi}, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

Поскольку свойство быть сингулярной или регулярной последовательностью полностью определяется ковариационной функцией последовательности, то, если найдём такую сингулярную последовательность, что $R(n)=1$, и регулярную последовательность с

$$R(n) = \begin{cases}\frac{5}{4\pi}, & n=0,\\ 0, & n\neq 0,\end{cases}$$

то наше начальное предположение будет верным.

Итак,

1. $\xi_n = \xi_{n+1}$, $\xi_n \sim N(0,1)$, $cov(\xi_n,\xi_m) = M\xi_n^2 = 1$;

2. пусть $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — белый шум. Тогда

$$\xi_n = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\varepsilon_n,$$

ковариация равна

$$cov(\xi_n,\xi_m) = cov\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\varepsilon_n, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\varepsilon_m\right) = \frac{5}{4\pi}\cdot cov(\varepsilon_n,\varepsilon_m) =$$
$$= \begin{cases}\frac{5}{4\pi}, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

Значит, регулярная компонента в разложении Вольда для $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — это

$$\xi_n^{regular} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \varepsilon_n.$$

13.10

Задание. Пусть $\hat{\xi}_n = M\left(\xi_n \mid H_0\left(\xi\right)\right), \sigma_n^2 = M\left(\xi_n - \hat{\xi}_n\right)^2$. Докажите, что если $\sigma_n^2 = 0$ для некоторого $n \geq 1$, то последовательность сингулярна; если же $\sigma_n^2 \to R\left(0\right)$ при $n \to \infty$, то последовательность регулярна.

Решение. $\sigma_n^2 = M\left(\xi_n - \hat{\xi}_n\right)^2 = M\left[\xi_n - Pr_{H_0^\xi}\left(\xi_n\right)\right]^2$.

Проверим сигрулярность. $M\left[\xi_n - Pr_{H_0^\xi}\left(\xi_n\right)\right]^2 = 0 \Rightarrow \xi_n - Pr_{H_0^\xi}\left(\xi_n\right) = 0$ при некотором $n \geq 1$.

Тогда $\xi_n = Pr_{H_0^\xi}\left(\xi_n\right)$.

По определению $H_n^\xi = \overline{LS\left\{\xi_k,\, k \leq n\right\}} = H_{n-1}^\xi$, так как

$$\xi_n \in H_0^\xi \Rightarrow \xi_n \in H_{n-1}^\xi,$$

следовательно, ξ_n — сингулярная.

Проверим регулярность. $M\left(\xi_n - \hat{\xi}_n\right)^2 \to R\left(0\right) = M\xi_N^2$, $n \to \infty$, N — фиксировано.

$$M\left(\xi_n - \hat{\xi}_n\right)^2 = M\left(\xi_n^{singular} - \sum_{k\geq 0} c_k\varepsilon_{n-k} - \xi_n^{singular} + \sum_{k\geq N} c_k\varepsilon_{n-k}\right)^2 =$$

$$= M\left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k\varepsilon_{n-k}\right)^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left|c_k\right|^2.$$

Таким образом,

$$M\xi_N^2 = M\left(\xi_N^{singular}\right)^2 + \sum_{k\geq 0}\left|c_k\right|^2 \geq \sum_{k\geq 0}\left|c_k\right|^2.$$

Сходимость есть только когда $M\left(\xi_N^{singular}\right)^2 = 0\,\forall N \Rightarrow \xi_n^{singular} = 0$, следовательно, ξ — регулярная.

13.11

Задание. Докажите, что стационарная последовательность

$$\left\{\xi_n = e^{in\varphi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

где φ — равномерно распределённая на $[0, 2\pi]$ случайная величина, является регулярной. Найдите оценку $\hat{\xi}_n$, величину σ_n^2 и докажите, что нелинейная оценка

$$\hat{\xi}_n = \left(\frac{\xi_0}{\xi_{-1}}\right)^n$$

даёт безошибочный прогноз ξ_n при $\xi^0 = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0)$.

Решение.

$$M\xi_n = Me^{in\varphi} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{in\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi in} \cdot e^{in\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi in} \cdot \left(e^{2i\pi n} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi in} \cdot [\cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n) - 1] = \frac{1}{2\pi in} \cdot [1 - 1] = 0,\ n > 0.$$

При $n = 0$ получим $M\xi_0 = Me^{i\cdot 0\cdot\varphi} = 1$.

Ковариация равна

$$cov(\xi_n, \xi_m) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

следовательно, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — белый шум.

$\hat{\xi}_n = 0$, так как $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — регулярная последовательность.

$$\sigma_n^2 = M(\xi_n - 0)^2 = Me^{2in\varphi} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{2in\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi \cdot 2in} \cdot e^{2in\varphi}\Big|_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{4i\pi n} \cdot \left(e^{2in\cdot 2\pi} - 1\right) = \frac{1}{4i\pi n} \cdot \left(e^{4in\pi} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi in} \cdot [\cos(2\pi n) + i\sin(4\pi n) - 1] = \frac{1}{4\pi in} \cdot (1 - 1) = 0.$$

Ошибка прогноза

$$M\left(\xi_n - \hat{\xi}_n\right)^2 = M\left[\xi_n - \left(\frac{\xi_0}{\xi_{-1}}\right)^n\right]^2 = M\left(e^{in\varphi} - \frac{1}{e^{-in\varphi}}\right)^2 =$$
$$= M\left(e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}\right)^2 = 0.$$

Занятие 14. Цепи Маркова. Классификация состояний.

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение цепи Маркова.

Последовательность дискретных случайных величин $\{x_n\}_{n\geq 0}$ называется простой цепью Маркова (с дискретным временем), если

$$P\left(x_{n+1} = i_{n+1} \mid x_n = i_n, \ldots, x_0 = i_0\right) = P\left(x_{n+1} = i_{n+1} \mid x_n = i_n\right).$$

Что называется переходными вероятностями цепи Маркова?

Матрица $P(n)$, где $P_{ij}(n) = P\left(x_{n+1} = i_{n+1} \mid x_n = i\right)$, называется матрицей переходных вероятностей на n-м шаге.

Как вычисляются переходные вероятности цепи Маркова за n шагов?

Матрица переходных вероятностей за n шагов однородной цепи Маркова есть n-я степень матрицы переходных вероятностей за 1 шаг.

Запишите уравнение Колмогорова-Чепмена.

$P\left(x_n - i_n \mid x_0 = i_0\right) = \left(P^n\right)_{i_0,i_n}$.

Опишите, как классифицируются состояния цепи Маркова.

Группы состояний марковской цепи (подмножества вершин графа переходов), которым соответствуют тупиковые вершины диаграммы порядка графа переходов, называются эргодическими классами цепи. Состояния, которые находятся в эргодических классах, называются существенными, а остальные — несущественными. Поглощающее состояние является частным случаем эргодического класса. Тогда попав в такое состояние, процесс прекратится.

Аудиторные задачи

14.2

Задание. Подбрасывается игральный кубик. Выясните образует ли последовательность $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ однородную цепь Маркова, если

a) ξ_n — это наибольшее из чисел, которые выпали в первых n подбрасываниях;

b) ξ_n — это количество шестёрок, которые выпали в первых n подбрасываниях.

Решение.

a) $\xi_n = \max(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — это результаты подбрасываний кубика (принимают значения $1, \ldots, 6$). Нужно проверить, что вероятность зависит только от j и i_n. Попробуем ξ_{n+1} переписать через ξ_n. Напишем рекуррентное соотношение $\xi_{n+1} = \max(\xi_n, x_{n+1})$. Подставим это в формулу

$$P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n) =$$
$$= P\{\max(\xi_n, x_{n+1}) = j \mid \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\} =$$

Знаем, что $\xi_n = i_n$. Тогда

$$= P\{\max(i_n, x_{n+1}) = j \mid \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\} =$$

Случайная величина $\max(i_n, x_{n+1})$ зависит только от x_{n+1}. Условие зависит только от $x_1, \ldots, x_n$. Событие и условие независимы. Эта вероятность становится безусловной

$$= P\{\max(i_n, x_{n+1}) = j\} =$$

Вывод: вероятность зависит только от i_n и j, так что это марковская цепь. Посчитаем вероятность

$$= \begin{cases} 0, & i_n > j, \\ P(x_1 \leq j), & i_n = j, \\ P(x_1 = j), & i_n < j \end{cases} =$$

Случайная величина x_1 принимает значения с вероятностями 6^{-1}. Таким образом, получаем

$$= \begin{cases} 0, & i_n > j, \\ \frac{j}{6}, & i_n = j, \\ \frac{1}{6}, & i_n < j. \end{cases}$$

Значит, можно теперь нарисовать матрицу переходных вероятностей

$$\begin{array}{cc} i_n \; j & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Получилая верхнедиагональная матрица. В каждой строчке сумма — единица.

b) Нужно начинать с того, что написать формулу для ξ_n, чтобы представить его через x.

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left\{x_i = 6\right\} =$$

Видели, что удобно иметь рекурентное соотношение

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}\left\{x_i = 6\right\} + \mathbb{1}\left\{x_n = 6\right\} = \xi_{n-1} + \mathbb{1}\left\{\xi_n = 6\right\}.$$

Проверим, что это марковская цепь.

Подставим в вероятность выражение для ξ_n через ξ_{n-1}, то есть

$$P\left(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1\right) =$$
$$= P\left(\xi_{n-1} + \mathbb{1}\left\{x_n = 6\right\} = j \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1\right) =$$
$$= P\left(i_{n-1} + \mathbb{1}\left\{x_n = 6\right\} = j \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1\right) =$$

Событие и условие независимы, опять вероятность безусловная

$$= P\left(i_{n-1} + \mathbb{1}\left\{x_n = 6\right\} = j\right) =$$

Из этого уже следует, что это марковская цепь

$$= P\left(\mathbb{1}\left\{x_1 = 6\right\} = j - i_{n-1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & j = i_{n-1} + 1, \\ \frac{5}{6}, & j = i_{n-1}, \\ 0, & in\, all\, other\, cases. \end{cases}$$

У нас получилась марковская цепь с такими переходными вероятностями

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ldots \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \end{array}$$

Сейчас матрица бесконечна.

14.5

Задание. Пусть $\{X_n,\, n \geq 0\}$ — однородная цепь Маркова с множеством состояний $E = \{1, 2, 3\}$, матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

и начальным распределением

$$p_0 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Вычислите:

a) $P\left(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 2, X_4 = 1, X_5 = 3\right)$;

b) $P\left(X_5 = 2, X_6 = 2 \mid X_2 = 2\right)$;

c) $P\left(X_2 = 3\right)$.

Решение. У такой цепи есть 3 состояния и переходы (рис. 35).

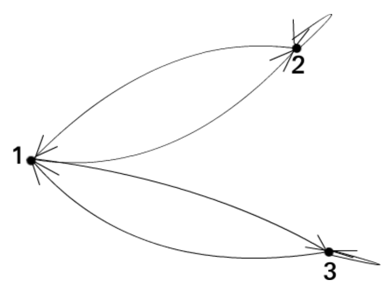

Рис. 35: Состояния и переходы цепи Маркова

Посчитаем вероятность того, что

a)

$$P\left(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 2, X_4 = 1, X_5 = 3\right) =$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot 0;$$

b)

$$P\left(X_5 = 2, X_6 = 2 \mid X_2 = 2\right) = P\left(2 \to\to\to 2 \to 2\right) =$$

Надо перебрать все возможные варианты

$$= P\left(2 \to 2 \to 2 \to 2 \to 2\right) + P\left(2 \to 2 \to 1 \to 2 \to 2\right) +$$
$$+ P\left(2 \to 1 \to 2 \to 2 \to 2\right).$$

Для каждого слагаемого нужно поперемножать вероятности.

14.6

Задание. По виду матрицы переходных вероятностей проведите классификацию состояний соответствующей цепи Маркова

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Решение. $i \leftrightarrow j$ — сообщающиеся, если есть путь из i в j, и есть путь из j в i.

Если существует j такой, что $i \to j$, $j \not\to i$, то i — несущественное.

Если существует путь из i в j, то j — достижимое.

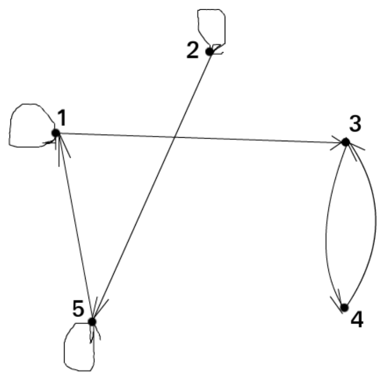

Рис. 36: Состояния и переходы цепи Маркова

Сообщающиеся: $3 \leftrightarrow 4$, $1 \leftrightarrow 3$ (рис. 36).

Несущественные: $2, 5$.

Существенные: $\{1, 3, 4\}$, несущественные: $\{2\}$, $\{5\}$.

Домашнее задание

14.10

Задание. Пусть $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ является последовательностью независимых одинаково распределённых дискретных случайных величин,

$$P(Y_1 = k) = p_k, \; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Положим $X_0 = 0$, $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, $n \geq 1$. Докажите, что последовательность $\{X_n\}_{n \geq 0}$ образует цепь Маркова. Найдите её переходные вероятности и начальное распределение.

Решение. Убедимся, что последовательность $\{X_n\}_{n\geq 0}$ образует цепь Маркова. Действительно, для произвольного $n \geq 1$ и произвольных целых чисел $i_0, i_1, \ldots, i_n \geq 0$ имеем:

$$P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\right) =$$

Выразим через случайные величины Y_i и получим

$$= P\left(X_0 = i_0, Y_1 = i_1 - i_0, \ldots, Y_n = i_n - i_{n-1}\right) =$$

Все события независимы

$$= P\left(X_0 = i_0\right) \cdot P\left(Y_1 = i_1 - i_0\right) \cdot \ldots \cdot P\left(Y_n = i_n - i_{n-1}\right) =$$

$$= \begin{cases} p_{i_1 - i_0} \cdot \ldots \cdot p_{i_n - i_{n-1}}, & i_0 = 0,\, i_1 - i_0, \ldots, i_n - i_{n-1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

Таким образом,

$$P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1}\right) =$$
$$= P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\right) \cdot p_{i_n i_{n+1}},$$

где

$$p_{ij} = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = \begin{cases} p_{j-i}, & j - i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & otherwise, \end{cases} \quad , i \in \mathbb{Z},\, i \geq 0.$$

Значит, $\{X_n,\, n \geq 0\}$ образует цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \ldots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

Начальное распределение $p_0 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$.

14.12

Задание. Пусть $\{\xi_n,\, n \geq 0\}$ — простое случайное блуждание на $\mathbb{Z}$, то есть цепь Маркова с переходными вероятностями $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$. Найдите вероятности перехода за n шагов.

Решение. Есть случайное блуждание с вероятностями

$$P\left(\xi_{n+1} = \xi_n + 1\right) = p,\, P\left(\xi_{n=1} = \xi_n - 1\right) = 1 - p.$$

Имеем переходные верояности

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i + 1, \\ 1 - p, & j = i - 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

За 2 шага переходные вероятности равны

$$p_{ij}^{(2)} = \begin{cases} p^2, & j = i + 2, \\ (1-p)^2, & j = i - 2, \\ 2p(1-p), & i = j, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

Нужно найти переходные вероятности за n шагов

$$P(\xi_n = k) = P\left(there\,are\,k + \frac{n-k}{2} steps\,up, \frac{n-k}{2} steps\,down\right) =$$
$$= C_n^{\frac{n-k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}} p^{k+\frac{n-k}{2}}.$$

14.14

Задание. Пусть $\{\xi_n, \, n \geq 0\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин,

$$P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Докажите, что последовательность

$$\eta_n = \frac{\xi_n + \xi_{n+1}}{2}, \, n \geq 0$$

не образует цепь Маркова.

Решение. Для произвольных $i, j \in \mathbb{Z}$ и произвольного $n \geq 0$ имеем:

$$P(\eta_n = j \mid \eta_{n-1} = i) = P\left(\frac{\xi_n + \xi_{n+1}}{2} = j \,\middle|\, \frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{2} = i\right) =$$
$$= P(\xi_n + \xi_{n+1} = 2j \mid \xi_{n-1} + \xi_n = 2i) = P(\xi_n = 2j - \xi_{n+1} \mid \xi_n = 2i - \xi_{n-1}) =$$
$$= P(2j - \xi_{n+1} = 2i - \xi_{n-1}) = P(\xi_{n+1} = 2j - 2i + \xi_{n-1}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}\{2j - 2i + \xi_{n-1} = 1\} + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}\{2j - 2i + \xi_{n-1} = -1\} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}\{\xi_{n-1} = 1 - 2j + 2i\} + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}\{\xi_{n-1} = -1 - 2j + 2i\}.$$

Таким образом, следующее значение последовательности зависит от предыдущего. Есть зависимость от прошлого, значит, последовательность не образует цепь Маркова.