

Оглавление

Занятие 2. Характеристики случайного процесса	1
Контрольные вопросы и задания	3
Аудиторные задачи	3
Домашнее задание	15
Занятие 5. Винеровский процесс	22
Контрольные вопросы и задания	23
Аудиторные задачи	24

Занятие 2. Характеристики случайного процесса

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$ — это параметризованная совокупность случайных величин.

Что называют конечномерными распределениями случайного процесса?

$\{\mu_{t_1, \dots, t_n}; t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$ — набор конечномерных распределений процесса ξ , где μ_{t_1, \dots, t_n} — распределение вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ в \mathbb{R}^n , то есть для борелевского $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_{t_1, \dots, t_n}(\Delta) = P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) \in \Delta\}$.

Приведите определение функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса.

$m(t) = M\xi(t)$, $t \in T$ — функция среднего.

$D\xi(t)$, $t \in T$ — функция дисперсии.

$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)]$, $t, s \in T$ — функция ковариации.

Аудиторные задачи

2.2

Задание. Пусть

$$\xi(t) = X \cdot e^{-t}, t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет нормальное распределение с параметрами a , σ^2 . Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и одномерную плотность распределения случайного процесса $\xi = \{\xi(t), t > 0\}$.

Решение. Сейчас $T = (0, \infty)$.

Случайная величина X имеет распределение $N(a, \sigma^2)$. Нужно найти $M\xi(t) = m(t)$, $D\xi(t)$, ковариационную функцию $K(t, s)$ и одномерную плотность распределения $p_\xi(t)$.

Начнём с математического ожидания

$$m(t) = M(X \cdot e^{-t}) = e^{-t}MX = e^{-t} \cdot a.$$

Далее — функция дисперсии $D\xi(t) = D(X \cdot e^{-t}) = e^{-2t} \cdot DX$. Дисперсия X — известная: $e^{-2t} \cdot DX = e^{-2t} \cdot \sigma^2$.

Далее — ковариационная функция

$$K(t, s) = M[\xi(t) - m(t)] \cdot [\xi(s) - m(s)] = cov[\xi(t), \xi(s)].$$

Вместо $\xi(t)$, $\xi(s)$ подставляем их значения

$$cov[\xi(t), \xi(s)] = cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}).$$

Множители выносятся

$$cov(Xe^{-t}, Xe^{-s}) = e^{-t-s}cov(X, X) = e^{-t-s}DX = e^{-t-s}\sigma^2.$$

Последнее — это плотность $\xi(t) \sim N(e^{-t}a, e^{-2t}\sigma^2)$.

Нужно написать нормальную плотность с заданными математическим ожиданием и дисперсией

$$p_{\xi(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-2t}\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x - e^{-t}a)^2}{2e^{-2t}\sigma^2}}.$$

Траектория процесса изображена на рисунке 1 и имеет разный вид в зависимости от значения случайной величины X .



Рис. 1: Траектория процесса

2.3

Задание. Пусть

$$\xi(t) = e^{-Xt}, t > 0,$$

где X — случайная величина, которая имеет показательное распределение с параметром λ . Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t > 0\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = e^{-Xt}$, где $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $t > 0$.

Нужно найти $m(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t . По определению

$$m(t) = M e^{-Xt} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-Xt} dX = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 2: чем больше X , тем быстрее эта функция убывает.



Рис. 2: Траектория процесса

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M \xi(t) \xi(s) - M \xi(t) M \xi(s) = M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Подставим найденное значение функции математического ожидания

$$M e^{-Xt-Xs} - \frac{\lambda}{\lambda + t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s} = \frac{\lambda}{\lambda + t + s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda + t)(\lambda + s)}.$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ — рис. 3.

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$. Вместо ξ напомним формулу $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X . Все неравенства решаем относительно X

$$P(e^{-Xt_1} \leq x_1, \dots, e^{-Xt_n} \leq x_n) = P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\}.$$

Перепишем через максимум

$$P\left\{X \geq -\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, X \geq -\frac{\ln x_n}{t_n}\right\} = P\left\{X \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\}.$$



Рис. 3: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

Обозначим максимум буквой m

$$P\left\{x \geq \max\left(-\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, -\frac{\ln x_n}{t_n}\right)\right\} = \int_m^{+\infty} \lambda e^{-\lambda X} dX = -e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty}.$$

На бесконечности получаем ноль

$$-e^{-\lambda X} \Big|_m^{+\infty} = e^{-\lambda m} = e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Выносим логарифм

$$e^{-\lambda \max\left(\ln x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, \ln x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)}.$$

Экспонента и логарифм уничтожают друг друга

$$e^{-\lambda \ln \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)} = \max\left(x_1^{-\frac{1}{t_1}}, \dots, x_n^{-\frac{1}{t_n}}\right)^{-\lambda} = \min\left(x_1^{\frac{\lambda}{t_1}}, \dots, x_n^{\frac{\lambda}{t_n}}\right).$$

Все выкладки были законные, только когда $0 < x_1, \dots, x_n < 1$.

Плотности у такого векора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ быть не может, потому что $\xi(t_1)^{\frac{1}{t_1}} = e^{-X} = \xi(t_2)^{\frac{1}{t_2}}$. Сейчас у нас только одна случайная величина. Это можно переписать как $\xi(t_2) = \xi(t_1)^{\frac{t_2}{t_1}}$, $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$.

С вероятностью 1 $(\xi(t_1), \xi(t_2)) \in L$ — рис. 4.

Значения вектора всегда попадают на такую линию. Площадь кривой — ноль.

Плотность — производная от функции распределения, а минимум нельзя дифференцировать.

2.4

Задание. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A \cos(\varphi + \lambda t),$$



Рис. 4: $y = x^{\frac{t_2}{t_1}}$

где A и φ являются независимыми случайными величинами такими, что $MA^2 < \infty$, а φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

Решение. $\varphi \sim U([0, 2\pi])$.

Траектория такого процесса изображена на рисунке 5.



Рис. 5: Траектория процесса

Тут случайная амплитуда и случайный сдвиг по фазе.

$MX(t) = M[A \cos(\varphi + \lambda t)]$. Случайные величины A и φ — независимые. $M[A \cos(\varphi + \lambda t)] = MAM \cos(\varphi + \lambda t)$. Математическое ожидание косинуса можем найти, потому что у φ известна плотность

$$MAM \cos(\varphi + \lambda t) = MA \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \lambda t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi.$$

Интеграл косинуса по периоду — ноль.

Ковариационная функция $K(t, s) = MX(t)X(s) - MX(t)MX(s) =$ Произведение математических ожиданий мы знаем

$$= MX(t)X(s) = M[A^2 \cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Используем независимость

$$= MA^2 \cdot M[\cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s)] =$$

Применяем формулу для произведения косинусов

$$= MA^2 \cdot M \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos [2\varphi + \lambda (t + s)] + \frac{1}{2} \cdot \cos [\lambda (t - s)] \right\} =$$

Математическое ожидание первого слагаемого — ноль

$$= \frac{1}{2} \cdot MA^2 \cdot \cos [\lambda (t - s)].$$

Двумерная характеристика процесса зависит только от расстояния между двумя точками. Это стационарный процесс. Его характеристики не меняются при сдвиге.

2.5

Задание. Пусть τ — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, и пусть $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ — процесс ожидания, связанный с этой случайной величиной, то есть

$$X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}, t \in [0, 1].$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), t \in [0, 1]\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение. τ — случайная величина с распределением $U([0, 1])$.

Сначала нарисуем траекторию такого процесса (рис. 6). Случайное τ выпало.



Рис. 6: Траектория процесса

$$m(t) = MX(t) = M\mathbb{1}\{t \geq \tau\} = P(t \geq \tau) = F_\tau(t) = \frac{t-a}{b-a} = t.$$

Ковариационная функция $K(t, s) = M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s)$. Произведение индикаторов — это индикатор пересечения

$$M[X(t)X(s)] - MX(t)MX(s) = P\{\tau \leq \min(t, s)\} - ts = \min(t, s) - t \cdot s.$$

Конечномерные распределения — распределение вектора $(X(t_1), \dots, X(t_n))$.
Каждый X — это 0 или 1.

$$P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) = (0, \dots, 0)\} = P\{\tau \in (t_n, 1]\} = 1 - t_n.$$

Точки t_n изображены на рисунке 7.



Рис. 7: Временная ось

У вектора получается $(n + 1)$ -но значение

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) = \begin{cases} (0, \dots, 0), & 1 - t_n, \\ (0, \dots, 0, 1), & t_n - t_{n-1}, \\ \dots, \\ (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), & t_{k+1} - t_k, \\ \dots, \\ (1, \dots, 1), & t_1. \end{cases}$$

2.6

Задание. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения F , и пусть

$$X(t) \equiv F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Запишите конечномерные распределения процесса $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

Решение.

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}$$

— это эмпирическая функция распределения (рис. 8).

Эмпирическая функция распределения — это несмещённая оценка функции распределения.

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\xi_i \leq s\}\right) =$$

Нужно вынести константы

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\mathbb{1}\{\xi_i \leq t\}, \mathbb{1}\{\xi_j \leq s\}) =$$



Рис. 8: Эмпирическая функция распределения

Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n — независимые. Ковариация независимых величин — ноль

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}).$$

Посчитаем ковариацию двух индикаторов

$$\text{cov} (\mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \}, \mathbb{1} \{ \xi_i \leq s \}) = M \mathbb{1} \{ \xi_i \leq t \wedge s \} - F(t) F(s) =$$

Математическое ожидание индикатора событие — вероятность этого события, которая в данном случае по определению равна функции распределения

$$= F(t \wedge s) - F(t) F(s),$$

где \wedge означает минимум.

Все слагаемые в сумме раны этому выражению

$$K(t, s) = \frac{1}{n} [F(t \wedge s) - F(t) F(s)].$$

Теперь нужно написать конечномерные распределения этого процесса. Фиксируем t_1, t_2, \dots, t_m (рис. 9).

$$X(t) \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}.$$

По t , X увеличивается. Эта функция монотонна.



Рис. 9: Фиксируем моменты времени

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq n.$$

Конечномерные распределения имеют вид

$$P \left\{ X(t_1) = \frac{k_1}{n}, X(t_2) = \frac{k_2}{n}, \dots, X(t_m) = \frac{k_m}{n} \right\} =$$

P (для k_1 наблюдений $\xi \leq t_1$, для $k_2 - k_1$ наблюдений $t_1 < \xi \leq t_2, \dots$, для $n - k_m$ наблюдений $\xi > t_m$) Имеем мультиномиальное распределение

$$= \frac{n!}{k_1! (k_2 - k_1)! \dots (n - k_m)!} \cdot F(t_1)^{k_1} \cdot [F(t_2) - F(t_1)]^{k_2 - k_1} \cdot \dots,$$

где первое слагаемое — количество способов разбить n величин на группы.

2.7

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $X(\eta)$, где $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ — процесс из задачи 2.5, а η — независимая от X случайная величина, которая принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно.

Решение. $X(t) = \mathbb{1}\{t \geq \tau\}$.

Задана случайная величина

$$\eta = \begin{cases} 0, & \frac{1}{3}, \\ 1, & \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Интересуемся $\varphi_{X(\eta)}$. Траектория случайного процесса изображён на рисунке 10.



Рис. 10: Траектория случайного процесса

Случайная величина принимает значения 0 и 1: $X(0) = 0, X(1) = 1$, значит, $X(\eta) = \eta$.

$$\varphi_{X(\eta)}(\lambda) = \varphi_{\eta}(\lambda) = M e^{i\lambda\eta} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot e^{i\lambda}.$$

То, что они независимы, тут не важно.

2.8

Задание. Значение случайного телеграфного сигнала $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ в произвольный момент времени с одинаковыми вероятностями равно 0 или 1. Прыжки происходят случайным и независимым образом. Вероятность $P(k, T)$ того, что в интервале времени длины T произойдёт k прыжков, задаётся распределением Пуассона, то есть:

$$P(k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T},$$

где λ — среднее количество прыжков за единицу времени. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса ξ .

Решение.

$$P\{\xi(t) = 1\} = P\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{2}.$$

Одномерные распределения даны. Это распределение Бернулли.

$P(k, T)$ — это вероятность того, что на отрезке времени длины T было k прыжков, то есть траектория процесса выглядит как на рисунке 11.

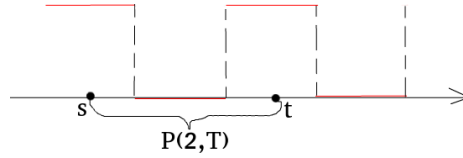


Рис. 11: Траектория случайного процесса

Математическое ожидание тут ищется просто

$$M\xi(t) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Теперь нужно ещё найти ковариационную функцию

$$K(s, t) = M\xi(s)\xi(t) - \frac{1}{4}.$$

Нужно математическое ожидание совместного процесса. $\xi(s)$ и $\xi(t)$ зависимы.

Попробуем найти математическое ожидание произведения. Произведение принимает значения 0 и 1. Получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = 0 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 0\} + 1 \cdot P\{\xi(t)\xi(s) = 1\} =$$

Слагаемое с нулём пропадает

$$= P\{\xi(s) = 1, \xi(t) = 1\}.$$

Значения в точках совпадают, если между ними произошло чётное количество скачков $M\xi(t)\xi(s) = P\{\xi(s) = 1\}P$ (на отрезке $[s, t]$ будет чётное

количество прыжков). Мы знаем, с какой вероятностью происходит число прыжков.

Подходят любые чётные прыжки, то есть это вероятность объединения. Число скачков обозначим буквой N . Тогда $P(\text{на } [s, t] \text{ чётное число скачков}) = P(N_{[s, t]} \text{ чётное}) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(2k = N_{[s, t]}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(2k, t-s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-s)]^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Экспонента выносится за сумму. Остаётся

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Для того, чтобы это было экспонента, нужны ещё и нечётные степени

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^x.$$

Если мы вычтем вторую сумму, то получится

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-x}.$$

Теперь нужно сложить эти два выражения и поделить на 2, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x = \lambda(t-s).$$

Получили гиперболический косинус.

$$= \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{-\lambda(t-s)}}{2} \cdot e^{-\lambda(t-s)} =$$

Умножим один сомножитель на другой

$$= \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{2}.$$

Это вероятность чётного числа скачков.

Выпишем, чему равна ковариационная функция

$$K(t, s) = \frac{1 + e^{-2\lambda(t-s)}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^{-2\lambda(t-s)}}{4}, \quad s < t.$$

Окончательный ответ:

$$K(t, s) = \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda|t-s|}.$$

2.9

Задание. Пусть η_1 и η_2 — независимые случайные величины, которые имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найдите значения a , при которых почти все реализации случайной функции $t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$ монотонно возрастают по t .

Решение. $\xi(t) = t(\eta_1 + a(\eta_2 + 2a))$ — процесс. Известно, что траектория этого процесса монотонно возрастает по t .

Реализация такого процесса выглядит как прямая линия (рис. 12), при этом $\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0$. Это случайная величина, так что

$$P\{\eta_1 + a(\eta_2 + 2a) > 0\} = 1.$$

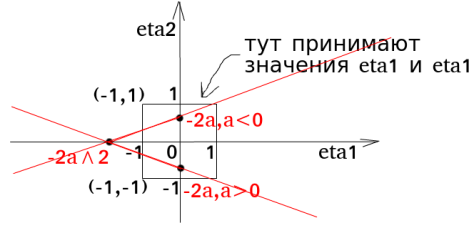


Рис. 12: Траектория случайного процесса

При $a = 0$ $\eta_1 > 0$ — правая часть квадрата. Тогда событие выполняется с вероятностью

$$\frac{1}{2} \neq 1,$$

то есть $a \neq 0$.

Следующий случай: $a > 0$. Получается

$$\eta_2 + 2a > -\frac{\eta_1}{a},$$

откуда

$$\eta_2 > -\frac{\eta_1}{a} - 2a,$$

то есть на картинке это будет прямая. Мы возьмём всё, что над этой прямой

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Вероятность не будет равна 1. a должно быть таким, чтобы прямая прошла через точку $(-1, -1)$, то есть $-1 + a(2a - 1) > 0$. Теперь можно найти a из неравенства $2a^2 - a - 1 > 0$. Сейчас скажем, при каких a это выполнено. $D = 1 + 8 = 9 = 3^2$, значит

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 1.$$

Задавали $a > 0$, то есть при $a > 1$ вероятность такого события — единица.

Теперь нужно задать $a < 0$. Отличие будет в том, как пройдёт прямая.

$$-\frac{\eta_1}{a} - 2a > \eta_2,$$

то есть нужно нарисовать прямую

$$y = -\frac{x}{a} - 2a.$$

Нужно будет выбрать всё, что ниже этой прямой.

Нужно, чтобы прямая прошла над точкой $(-1, 1)$. Имеем неравенство $-1 + a(1 + 2a) > 0$, откуда

$$a^1 + \frac{1}{2} \cdot a - 1 > 0.$$

Решая соответствующее уравнение находим, что

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1.$$

При $a < 0$ получаем ответ: $a < -1$.

Ответ к задаче: $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, то есть $|a| > 1$.

2.10

Задание. Пусть случайная величина $\tau \in (0, 1)$ имеет непрерывное распределение и пусть

$$\xi(t) \equiv 0; \eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ 1, & t = \tau, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Изобразите траектории этих процессов. Докажите, что эти процессы являются стохастически эквивалентными, то есть $\forall t \in [0, 1] : P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = 0$.

Решение. τ — это случайная величина с непрерывным распределением — та, у которой функция распределения F_τ — непрерывна.

Скачок функции распределения $\Delta F_\tau(x) = P(\tau = x) = 0$, где

$$F_\tau(x) = P(\tau \leq x),$$

а $F_\tau(-x) = P(\tau < x)$. В нашем случае нет скачков, то есть в фиксированной x случайная величина τ не попадёт. Рассматривается 2 процесса. Посмотрим, какие траектории у этих процесса. Процессы заданы на $t \in [0, 1]$ (рис. 13).

С точки зрения анализа это разные функции. У η всегда есть скачок, у ξ никогда скачков нет. Помним, что $\xi(t) \equiv 0$. Тем не менее, вероятность $P\{\xi(t) \neq \eta(t)\} = P\{\eta(t) \neq 0\} = P(\tau = t) = 0$, а это значит, что в фиксированной точке процессы с вероятностью 1 совпадают. Если зафиксируем несколько точек t_1, t_2, \dots, t_n , то вероятность

$$P\{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) = (\eta(t_1), \dots, \eta(t_n))\} = 1.$$

У этих процессов одинаковые конечномерные распределения.

Конечномерные распределения не определяют траектории процесса.

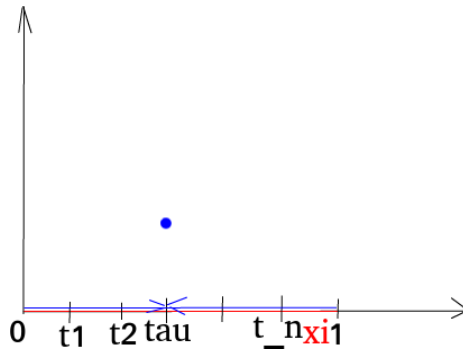


Рис. 13: Траектория случайных процессов

Домашнее задание

2.12

Задание. Пусть

$$\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R},$$

где X — равномерно распределённая на отрезке (a, b) случайная величина. Запишите конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$. Найдите его математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

Решение. $\xi(t) = Xt + a, t \in \mathbb{R}$, где $X \sim U(a, b)$.

Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$, конечномерные распределения.

Найдём математическое ожидание в момент t

$$m(t) = M\xi(t) = M(Xt + a) = M(Xt) + Ma = tMX + a = t \cdot \frac{a+b}{2} + a.$$

Траектории такого процесса изображены на рисунке 14: чем больше X , тем больше угол наклона прямой к оси $0t$.

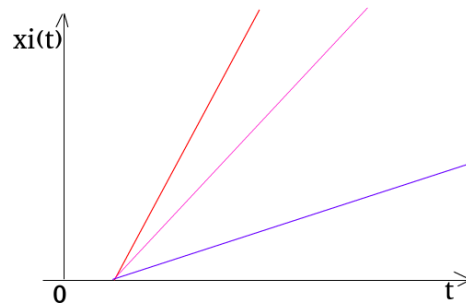


Рис. 14: Траектории случайного процесса

$$D\xi(t) = D(Xt + a) = D(Xt) + Da = t^2 DX = t^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M[\xi(t)\xi(s)] - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставляем выражение для случайного процесса, раскрываем скобки и вычисляем математическое ожидание

$$\begin{aligned} &= M[(Xt + a)(Xs + a)] - M(Xt + a)M(Xs + a) = \\ &= M[X^2ts + Xa(t + s) + a^2] - \left(t \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) \left(s \cdot \frac{a+b}{2} + a\right) = \\ &= ts \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3} + a(t + s) \cdot \frac{a+b}{2} + a^2 - ts \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - ta \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 - \\ &\quad - as \cdot \frac{a+b}{2} = \\ &= ts \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right) + (t + s)a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot a(t + s) = \\ &= ts \cdot \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = ts \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = ts \cdot \frac{(a-b)^2}{12}. \end{aligned}$$

Считаем функцию распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ — рис. 15.

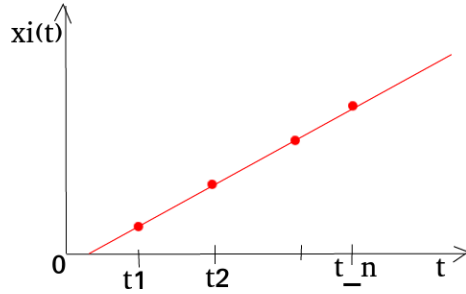


Рис. 15: Выбираем точки, в которых ищем распределение случайного процесса

$F_{(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))}(\vec{x}) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$. Вместо ξ напомним формулу $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n)$. Величины зависимы, потому что все они выражаются через X . Все неравенства решаем относительно X

$$P(Xt_1 + a \leq x_1, \dots, Xt_n + a \leq x_n) = P(Xt_1 \leq x_1 - a, \dots, Xt_n \leq x_n - a) =$$

Делим на константы левые части неравенств

$$= P\left(X \leq \frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, X \leq \frac{x_n - a}{t_n}\right) =$$

Перепишем через минимум

$$= P \left\{ X \leq \min \left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) \right\} =$$

Обозначим минимум буквой m для удобства

$$= P(X \leq m) = \int_a^m \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{X \in (a, b)\} dX = \frac{1}{b-a} \int_a^m dX = \frac{1}{b-a} \cdot X|_a^m =$$

Подставляем пределы интегрирования

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (m-a) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\min \left(\frac{x_1 - a}{t_1}, \dots, \frac{x_n - a}{t_n} \right) - a \right]$$

при $m \in (a, b)$, иначе — ноль.

2.13

Задание. Пусть

$$\xi(t) = U \cos \theta t + V \sin \theta t, \quad t \in T,$$

где U, V — независимые случайные величины с заданными характеристиками: $MU = MV = 0$, $DU = DV = \sigma^2$, θ — неслучайная величина. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса $\{\xi(t), t \in T\}$.

Решение. Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$.

Найдём математическое ожидание в момент t . По свойствам

$$m(t) = M\xi(t) = M(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos \theta t \cdot MU + \sin \theta t \cdot MV = 0.$$

Можно сделать преобразование $U \cos \theta t + V \sin \theta t = C \sin(\theta t + \omega)$, где $C = \sqrt{U^2 + V^2}$. Траектории такого процесса изображены на рисунке 16: график синуса сжимается к оси ординат, когда модули случайных величин U и V растут.

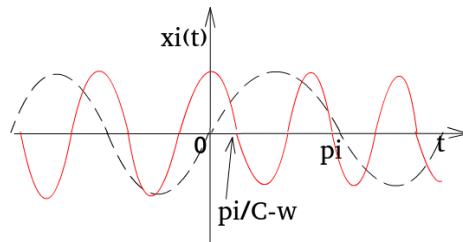


Рис. 16: Траектория процесса

Найдём дисперсию в момент t . По свойствам

$$D\xi(t) = D(U \cos \theta t + V \sin \theta t) = \cos^2 \theta t \cdot DU + \sin^2 \theta t \cdot DV =$$

Подставим известные значения дисперсии

$$= \cos^2 \theta t \cdot \sigma^2 + \sin^2 \theta t \cdot \sigma^2 = \sigma^2 (\cos^2 \theta t + \sin^2 \theta t) = \sigma^2.$$

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) =$$

Подставим выражения для случайного процесса в первое слагаемое, а второе равно нулю

$$= M[(U \cos \theta t + V \sin \theta t) \cdot (U \cos \theta s + V \sin \theta s)] =$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} &= M(U^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + UV \cos \theta t \cdot \sin \theta s + VU \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + V^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \\ &= DU \cdot \cos \theta t \cdot \cos \theta s + MU \cdot MV \cdot \cos \theta t \cdot \sin \theta s + MV \cdot MU \cdot \sin \theta t \cdot \cos \theta s + \\ &\quad + DV \cdot \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \sigma^2 \cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sigma^2 \sin \theta t \cdot \sin \theta s = \\ &= \sigma^2 \cdot (\cos \theta t \cdot \cos \theta s + \sin \theta t \cdot \sin \theta s) = \sigma^2 \cos(\theta t - \theta s) = \sigma^2 \cos[\theta(t - s)]. \end{aligned}$$

2.14

Задание. Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса

$$\xi(t) = 2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5, \quad t \in T,$$

где ν — известный неслучайный параметр, а u, v — случайные величины с известными характеристиками:

$$Mu = 1, \quad Mv = 2, \quad Du = 0.1, \quad Dv = 0.9, \quad cov(u, v) = -0.3.$$

Решение. Нужно найти $m(t)$, $D\xi(t)$, $K(t, s)$.

Найдём математическое ожидание в момент t . По свойствам

$$m(t) = M(2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) = 2 \sin \nu t \cdot Mu + 3t^2 Mv + 5 = 2 \sin \nu t + 6t^2 + 5.$$

Траектория такого процесса изображена на рисунке [17](#).

Ковариационная функция считается по определению

$$K(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t) \cdot M\xi(s) =$$

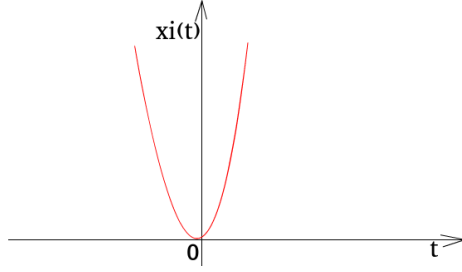


Рис. 17: Траектория процесса

Подставим выражения для случайного процесса и его математические ожидания

$$\begin{aligned}
&= M \left[(2u \sin \nu t + 3vt^2 + 5) (2u \sin \nu s + 3vs^2 + 5) \right] - \\
&\quad - (2 \sin \nu t + 6t^2 + 5) (2 \sin \nu s + 6s^2 + 5) = \\
&= M(4u^2 \sin \nu t \cdot \sin \nu s + 6uv \sin \nu t \cdot s^2 + 10u \sin \nu t + 6vt^2 u \sin \nu s + 9v^2 t^2 s^2 + \\
&\quad + 15vt^2 + 10u \sin \nu s + 15vs^2 + 25) - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - \\
&\quad - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 = \\
&= 4 \sin \nu t \cdot Mu^2 + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + 10 \sin \nu t \cdot Mu + 6t^2 \sin \nu s \cdot M(uv) + \\
&\quad + 9t^2 s^2 Mv^2 + 15t^2 Mv + 10 \sin \nu s \cdot Mu + 15s^2 \cdot Mv + 25 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - \\
&\quad - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - 10 \sin \nu t - 12t^2 \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 - 25 =
\end{aligned}$$

Вычислим вторые моменты

$$Mu^2 = Du + (Mu)^2 = 0.1 + 1 = 1.1, Mv^2 = Dv + (Mv)^2 = 0.9 + 4 = 4.9.$$

По определению ковариации $cov(u, v) = M(uv) - Mu \cdot Mv$, откуда

$$M(uv) = cov(u, v) + Mu \cdot Mv = -0.3 + 1 \cdot 2 = 2 - 0.3 = 1.7.$$

Подставим полученные значения в функцию ковариации

$$\begin{aligned}
&= 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s \cdot 1.1 + 6 \sin \nu t \cdot s^2 \cdot 1.7 + 10 \sin \nu t + 6t^2 \sin \nu s \cdot 1.7 + \\
&\quad + 9t^2 s^2 \cdot 4.9 + 15t^2 \cdot 2 + 10 \sin \nu s + 15s^2 \cdot 2 - 4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 12 \sin \nu t \cdot s^2 - \\
&\quad - 10 \sin \nu t - 12t^2 \cdot \sin \nu s - 36t^2 s^2 - 30t^2 - 10 \sin \nu s - 30s^2 = \\
&= 0.4 \sin \nu t \cdot \sin \nu s - 1.8 \sin \nu t \cdot s^2 - 1.8t^2 \sin \nu s + 8.1t^2 s^2.
\end{aligned}$$

Найдём дисперсию в момент t . Из формулы для ковариации

$$D\xi(t) = K(t, t) = 0.4 \sin^2 \nu t - 3.6 \sin \nu t \cdot t^2 + 8.1t^4.$$

2.15

Задание. Найдите ковариационную функцию процесса

$$Y(t) = \psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n,$$

где ψ_1, \dots, ψ_n — произвольные числовые функции от t , а X_1, \dots, X_n — некоррелируемые случайные величины с дисперсиями D_1, \dots, D_n .

Решение. Нужно найти

$$K(t, s) = \text{cov}(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n, \psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) =$$

Распишем по определению

$$\begin{aligned} &= M[(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n)(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n)] - \\ &- M(\psi_1(t) X_1 + \dots + \psi_n(t) X_n) \cdot M(\psi_1(s) X_1 + \dots + \psi_n(s) X_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M(X_i X_j) - \sum_{i,j=1}^n \psi_i(t) \psi_j(s) M X_i \cdot M X_j = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D X_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D X_n = \\ &= \psi_1(t) \psi_1(s) D_1 + \dots + \psi_n(t) \psi_n(s) D_n. \end{aligned}$$

2.16

Задание. Пусть η и ζ — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $1/2$. Найдите конечномерные распределения случайного процесса

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}, \quad t > 0.$$

Решение. Для произвольных натуральных $n \geq 1$, произвольных моментов времени $t_1, \dots, t_n \in T$ и произвольных действительных чисел x_1, \dots, x_n находим

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} =$$

Подставляем выражения для случайного процесса

$$= P\left(\frac{\eta + \zeta}{t_1} \leq x_1, \frac{\eta + \zeta}{t_2} \leq x_2, \dots, \frac{\eta + \zeta}{t_n} \leq x_n\right) =$$

Переносим моменты времени вправо

$$= P(\eta + \zeta \leq x_1 t_1, \eta + \zeta \leq x_2 t_2, \dots, \eta + \zeta \leq x_n t_n) =$$

Независимые случайные величины η и ζ имеют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

Их сумма имеет стандартное нормальное распределение. Пусть

$$\eta + \zeta = X \sim N(0, 1).$$

Тогда

$$= P(X \leq x_1 t_1, X \leq x_2 t_2, \dots, X \leq x_n t_n) = P\left(X \leq \min_{i=1, n} x_i t_i\right) =$$

Запишем через плотность

$$= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где обозначено

$$z = \min_{i=1, n} x_i t_i.$$

2.17

Задание. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi(\tau)$, где $\{\xi(t), t \geq 0\}$ — процесс из предыдущей задачи, а τ — независимая от ξ случайная величина, которая принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями $1/2$.

Решение.

$$\xi(t) = \frac{\eta + \zeta}{t}.$$

Задана случайная величина

$$\tau = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Интересует

$$\varphi_{\xi(\tau)}(\lambda) = M e^{i\xi(\tau)\lambda} = M e^{i \cdot \frac{\eta + \zeta}{\tau} \cdot \lambda} =$$

Как и в предыдущей задаче $\eta + \zeta = X \sim N(0, 1)$. Получаем

$$= M e^{i \cdot \frac{X}{\tau} \cdot \lambda} = M e^{-\frac{\lambda^2}{2\tau^2}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Занятие 5. Винеровский процесс

Контрольные вопросы и задания

Приведите определение винеровского процесса.

$\{w(t), t \geq 0\}$ обладает рядом свойств:

1. $w(0) = 0$;
2. однородные приращения. Рассмотрим приращение винеровского процесса на t . Тогда $w(s+t) - w(s) \stackrel{def}{=} w(t) \sim N(0, t)$;
3. независимые приращения. Выберем $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Тогда $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ — независимые в совокупности случайные величины.

Запишите плотность винеровского процесса.

Напишем плотность распределения вектора $(w(t_1), \dots, w(t_n)) = \vec{\xi}$.
Будем использовать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом $\vec{\xi}$ имеет плотность

$$q(A^{-1}\vec{u}) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{j+1} - t_j)}} \cdot e^{-\frac{u_{j+1} - u_j}{2t_{j+1} - t_j}}.$$

В этой плотности считаем, что $t_0 = 0, u_0 = 0$.

Запишите ковариационную функцию винеровского процесса.

$$K(t, s) = \min(s, t).$$

Аудиторные задачи

5.2

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Докажите, что $M(W(t) - W(s))^{2n+1} = 0$, $M(W(t) - W(s))^{2n} = (2n-1)!!(t-s)^n$.

Решение. $\xi = W(t) - W(s) \stackrel{def}{=} W(t-s)$. Значит, $\xi \sim N(0, t-s)$, где $t-s = \sigma^2$. Знаем, что $M\xi^{2n+1} = 0$, $M\xi^{2n} = (2n-1)!!\sigma^n$.

5.3

Задание. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Вычислите:

- $M[(W(5) - 2W(1) + 2)^3]$;
- характеристическую функцию случайной величины $W(2) + 2W(1)$;
- $M[\sin(2W(1) + W(2))]$;
- $M[\cos(2W(1) + W(2))]$.

Решение.

- $W(5) - 2W(1) + 2 = \xi \sim N(2, 5)$. Найдём дисперсию

$$D\xi = \text{cov}(\xi, \xi) = \text{cov}[W(5) - 2W(1) + 2, W(5) - 2W(1) + 2] =$$

Воспользуемся линейностью

$$= K(5, 5) - 2K(5, 1) - 2K(5, 1) + 4K(1, 1) = 5 - 2 - 2 + 4 = 5.$$

Нужно $M\xi^3 = M[(\xi - 2) + 2]^3$. Раскрываем скобки

$$M\xi^3 = M(\xi - 2)^3 + 6M(\xi - 2)^2 + 12M(\xi - 2) + 8.$$

По предыдущей задаче $M\xi^3 = 0 + 6 \cdot 5 + 12 \cdot 0 + 8 = 38$.

Величины $W(5)$ и $W(1)$ — зависимы, а приращения в винеровском процессе — независимы

$$D[W(5) - 2W(1)] = D\{[W(5) - W(1)] + [-W(1)]\}.$$

Дисперсия первого слагаемого равна 4, а второго — 1. Слагаемые независимы $D[W(5) - 2W(1)] = 5$.