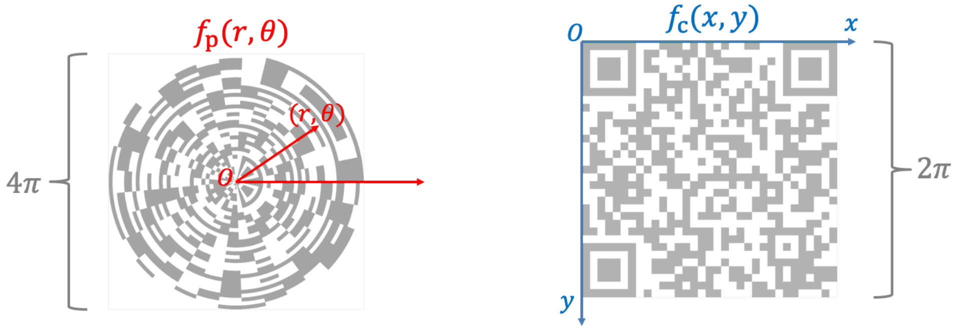
数值分析第一次大作业

徐赫临 2019011430

Code release: https://github.com/HelinXu/NA_project1

双线性插值

数学推导



两个图像像素的坐标对应关系满足 $f_p(r,\theta)=f_c(x(r,\theta),y(r,\theta))$，其中 $x(r,\theta)=r, y(r,\theta)=\theta$。

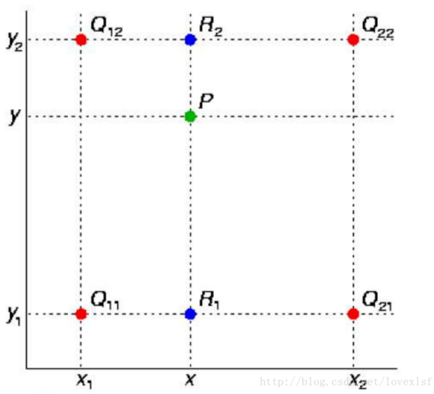
从右边图差值得到左边图，左边图的一个像素的坐标记为 (x',y') （图片的边长为 L=2013，需要对其归一化系数 L/4π 进行拉伸），则对应坐标为 $x'=L\times(x\cos{(y)}+2\pi)/4\pi, y'=L\times(-x\sin{(y)}+2\pi)/4\pi$ （1式）。

差值时，假设差值得到的右图边长为 N（可以取100，1000等整数），则归一化为2π 的边长系数为 N/2π。对于右图中坐标为 (X,Y) 的像素，对应归一化坐标 $(x,y)=(X,Y)*2\pi/N$（2式）。

联立1，2两式，可以得到(X,Y)坐标在原图中的准确位置

$$P=(x',y')=\left(\frac{L}{2}\left(\frac{X}{N}\cos\left(\frac{2\pi Y}{N}\right)+1\right),\quad \frac{L}{2}\left(-\frac{X}{N}\sin\left(\frac{2\pi Y}{N}\right)+1\right)\right)$$

这是一个浮点数坐标，记为点 P。我们可以读取它上下左右四个顶点的真值，从而通过双线性差值得到 P 点 RGB 近似值，首先差值得到 R1 和 R2，然后差值得到 P，如下图：



在x方向上：

$$f\left(R_1\right)\approx\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f\left(Q_{11}\right)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f\left(Q_{21}\right)\, where\ R_1=\left(x,y_1\right)$$

$$f\left(R_2\right) \approx \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f\left(Q_{12}\right)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1} f\left(Q_{22}\right) \text { where } R_2=\left(x, y_2\right)$$

如此得到R_1与R_2处的值。进一步，在y方向上：

$$f(P)=\frac{y_2-y}{y_2-y_1} f(R_1)+\frac{y-y_1}{y_2-y_1} f(R_2)$$

误差分析

线性插值的余项为

$$\left|R_1(x)\right| \leq \frac{M_2}{2}\left|x-x_0\right|\left|x-x_1\right|, where\ M_2=\max \left|f^{\prime \prime}(x)\right|$$

因此双线性插值的方法误差为

$$\left|R_2(x, y)\right| \leq \frac{M_2}{2}\left|x-x_0\right|\left|x-x_1\right|+\frac{M_2}{2}\left|y-y_0\right|\left|y-y_1\right|, where\ M_2=\max \left|f_{xx}(x, y), f_{yy}(x, y)\right|$$

$$\left|R_2(x, y)\right| \leq \frac{2}{8} M_2 h^2$$

对于多元函数，舍入误差满足

$$\begin{aligned} |\Delta \mathrm{A}| \leq & \max \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right|\left|\Delta x_1\right| \\ & +\max \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\right|\left|\Delta x_2\right|+\ldots \\ & +\max \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right|\left|\Delta x_n\right| \end{aligned}$$

对于双线性插值的舍入误差分析：

$$\begin{gathered} \max \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right||\Delta x| \\ \leq \frac{\Delta x}{x_1-x_0} \max \left|f(Q_{21})-f(Q_{11})\right| \\ \max \left|\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right||\Delta y| \\ \leq \frac{\Delta y}{y_1-y_0} \max \left|f(Q_{22})-f(Q_{12})\right| \end{gathered}$$

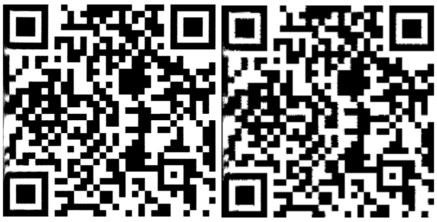
不妨令一阶导数的绝对值上界为 M_1 ，令区间长度为 h，则对于一个方形的区域，xy方向等价，舍入误差共计

$$|\Delta A| \leq \frac{2 \Delta}{h} M_1$$

整体误差为

$$|\delta| \leq \frac{2 \Delta}{h} M_1+\frac{2}{8} M_2 h^2$$

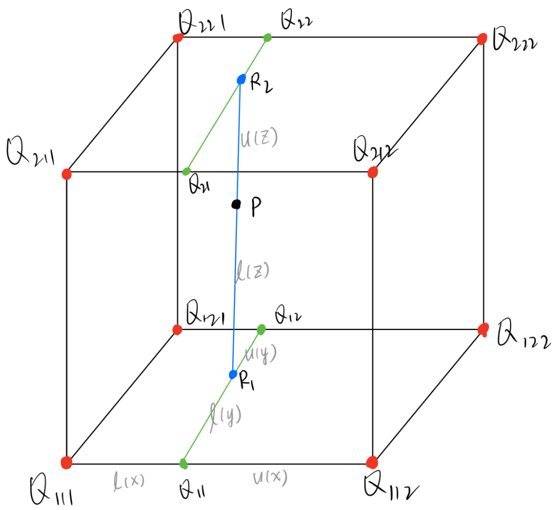
作图结果



恢复得到的二维码，1000*1000（左），200*200（右）

三线性插值

数学推导



如图，三线性插值通过已知的立方体八个顶点的函数值来插值得到 P 点的函数值。首先对x方向插值，分别得到Q11，Q12，Q21，Q22，如图绿色点所示，然后问题就归结为上一问已经推导过的双线性插值问题：再插值得到R1和R2的函数值，然后通过R1和R2插值得到 P 点的函数值。具体分析与上面一致。

参考图片灰色标记，为简化表达，记正方体边长为D，u(x) = x - math.floor(x / D) * D，l(x) = math.floor(x / D) * D + D - x，以伪代码的格式写出展开后的插值的结果为：

```
sdf_inter = ( # trilinear interpolation
  sdf[Q111] * u(x) * u(y) * u(z) +
  sdf[Q112] * u(x) * u(y) * l(z) +
  sdf[Q121] * u(x) * l(y) * u(z) +
  sdf[Q122] * u(x) * l(y) * l(z) +
  sdf[Q211] * l(x) * u(y) * u(z) +
  sdf[Q212] * l(x) * u(y) * l(z) +
  sdf[Q221] * l(x) * l(y) * u(z) +
  sdf[Q222] * l(x) * l(y) * l(z)
) / D**3
```

误差分析

线性插值的余项为

$$|R_1(x)| \leq \frac{M_2}{2}|x-x_0|\,|x-x_1|, where\ M_2 = \max|f''(x)|$$

递推得到三线性插值的误差为

$$\begin{gathered}|R_3(x,y,z)| \leq \\ \frac{M_2}{2}|x-x_0|\,|x-x_1| \\ +\frac{M_2}{2}|y-y_0|\,|y-y_1| \\ +\frac{M_2}{2}|z-z_0|\,|z-z_1|, \\ where\ M_2 = \max|f_{xx}(x,y,z), f_{yy}(x,y,z), f_{zz}(x,y,z)|\end{gathered}$$

对于本题，讨论的范围为 $[0,h]^3, h=0.06$

因此，得到三线性插值的方法误差为

$$|R_3(x,y,z)| \leq \frac{3}{8}Mh^2$$

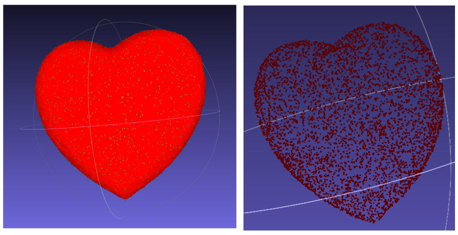
对于三线性插值的舍入误差分析，类似上面的双线性插值，不妨令一阶导数的绝对值上界为 M_1 ，令区间长度为 h ，则对于一个方形的区域，xyz方向等价，舍入误差共计

$$|\Delta A| \leq \frac{3\Delta}{h}M_1$$

整体误差为

$$|\delta| \leq \frac{3\Delta}{h}M_1 + \frac{3}{8}M_2h^2$$

作图结果



mesh 重建可视化截图 | point cloud 采样截图

最小二乘法

数学推导

由题意，所有采样点满足以下方程：

$$(2x^2+y^2+z^2-1)^3+ax^2z^3+by^2z^3=0$$

对照以下方程的形式，使用待定系数法，有

$$\mathbf{Y}=\mathbf{W}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}-(2x_0^2+y_0^2+z_0^2-1)^3\\-(2x_1^2+y_1^2+z_1^2-1)^3\\\cdots\\-(2x_n^2+y_n^2+z_n^2-1)^3\end{pmatrix},\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_0^2z_0^3 & y_0^2z_0^3\\x_1^2z_1^3 & y_1^2z_1^3\\\cdots\\x_n^2z_n^3 & y_n^2z_n^3\end{pmatrix},\mathbf{W}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

其满足最小均方误差的解为

$$\mathbf{W}=(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}$$

其中，λ为L2正则系数。在本题的实现中，并不存在高度的线性相关性，因此可以令$\lambda=0$

对于题中的数据，采用10000个采样点，随机多次，发现解得的系数两位有效数字稳定在：

```
a = -0.092
b = -1.0
```

最小二乘法拟合结果