

第一章 控制系统的状态空间表达式

基本概念

状态、状态空间、系统的状态空间描述 $\Sigma(A, B, C, D)$

状态变量的线性变换，系统的代数等价性、系统的特征值、特征向量，
能控标准型、能观标准型、特征值规范型（对角标准型、约当标准型）

问题求解

一. 连续系统状态空间表达式的建立

(1) 从一般时域描述（高阶微分方程或传递函数）化状态空间表达式

给定 n 阶微分方程：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (b_0 = 0)$$

• 能控标准 I 型：

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}}_A \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix}}_{C^T} \mathbf{x}$$

• 能观标准 II 型：

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}}_A \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{C^T} \mathbf{x}$$

• 对角标准型：

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - \lambda_n}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

• 约当标准型：

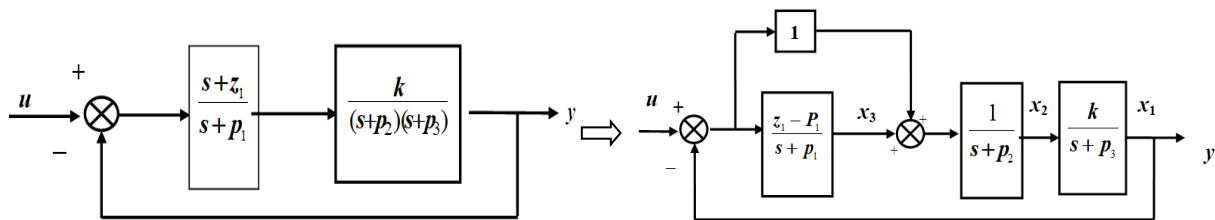
$$g(s) = \frac{\alpha_{11}}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_{12}}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{\alpha_{13}}{(s - \lambda_1)^3} + \frac{\alpha_4}{s - \lambda_4} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - \lambda_n}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \lambda_1 & \\ \hline & & & & \lambda_4 & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(2) 从模拟结构图写出状态空间表达式

第 1 步：把各环节的传递函数化为基本单元的串联或并联组合；



第2步：在图上设置状态变量并列写出状态方程和输出方程；

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -p_3 x_1 + k x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - p_2 x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 = (p_1 - z_2) x_1 - p_1 x_3 + (z_1 - p_1) u \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -p_3 & k & 0 \\ -1 & -p_2 & 1 \\ p_1 - z_1 & 0 & -p_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_1 - p_1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

二. 化状态空间表达式为特征值规范型

(1) 化对角标准型：

给定系统 $\Sigma(A, b, c^T)$ ，若 A 阵的特征值两两相异，则可通过线性非奇异变换 T

$$(x = Tz \text{ 或 } z = T^{-1}x) \text{ 化为对角标准型 } \begin{cases} \dot{z} = \hat{A}z + \hat{b}u \\ y = \hat{c}^T z \end{cases}, \text{ 其中 } T = [p_1 \cdots p_n], p_i \text{ 为 } A \text{ 阵}$$

属于特征值 λ_i 的特征向量 ($Ap_i = \lambda_i p_i$)，且有

$$\hat{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{b} = T^{-1}b, \quad \hat{c}^T = c^T T$$

(2) 化约当标准型：

给定系统 $\Sigma(A, b, c^T)$ ，若 A 阵有重根，则通过线性变换 T 可化为约当标准型，且

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}, \quad J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

三. 由状态方程求传递函数矩阵

给定系统 $\Sigma(A, B, C, D)$ ，其传递函数为 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

注：(1) 预解矩阵的计算： $(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$ (二阶方阵求逆公式要牢记)

(2) 传递函数的极点即为状态矩阵 A 的特征值。

四. 组合系统的状态空间表达式及传递函数矩阵

子系统并联、串联组合，以及输出反馈、动态反馈的情况。

第二章 线性系统状态方程的解

基本概念

零输入响应、零初态响应、矩阵指数函数、状态转移矩阵及其性质

问题求解

一. 矩阵指数 $\phi(t) = e^{At}$ 的计算

- (1) 定义式 (级数展开): $e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$
- (2) 拉氏反变换法: $e^{At} = L^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$
- (3) 变换成对角标准型或约当标准型进行计算

二. 线性定常系统状态方程的解

(1) 给定系统的非齐次方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, 初始状态为 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 给定输入 $\mathbf{u}(t)$, 则其解为:

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

若初始时刻 $t_0 = 0$, 其解为:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

(2) 采用拉氏反变换方法求解非齐次方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= L^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \mathbf{x}_0 \} + L^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \} \\ &= \phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \phi(t-\tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

第三章 状态变量的能控性与能观测性

基本概念

能控性与能达性、能观性与能重构性、能控(能观)子系统、系统的结构分解、能控(能观)标准型、对偶原理、等价系统的能控性与能观性、最小实现

问题求解

一. 线性定常系统能控性、能观性判据, 以及对偶原理:

完全能控条件	完全能观条件
$\mathbf{Q}_k = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ “胖”矩阵 行 满秩	$\mathbf{Q}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$ “瘦”矩阵 列 满秩
系统 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 的特征值两两相异, 其变换后的对角标准形的 $\tilde{\mathbf{B}}$ 中无全零 行	系统 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 的特征值两两相异, 其变换后的对角标准形的 $\tilde{\mathbf{C}}$ 中无全零 列
(一个特征值只有一个约当块的情况) 系统 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 有重特征值, 变换后的约当标准形中每个约当块 末行 对应的 $\tilde{\mathbf{B}}$ 中无全零 行	(一个特征值只有一个约当块的情况) 系统 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 有重特征值, 变换后的约当标准形中每个约当块 首列 对应的 $\tilde{\mathbf{C}}$ 中无全零 列

(一个特征值有多个约当块的情况)	(一个特征值有多个约当块的情况)
系统 $\Sigma(A, B)$ 有重特征值, 变换后的约当标准形中同一特征值的约当块 末行 对应的 \tilde{B} 中的 行 线性无关。	系统 $\Sigma(A, C)$ 有重特征值, 变换后的约当标准形中同一特征值的约当块 首列 对应的 \tilde{C} 中的 列 线性无关。

注: (1) 要根据给定系统 $\Sigma(A, b, c^T)$ 具体形式, 灵活应用模态判据/代数判据 (不要上来闷头写能控性/能观性矩阵);

- (2) 线性变换不改变系统状态的能控性和能观性;
(3) 反馈的引入对能控性和能观性的影响。

二. 线性定常系统状态空间的结构分解

● 能控状态分解

若系统 $\Sigma(A, B, C)$ 不完全能控, $\text{rank } Q_k = r < n$, 则可找到变换阵 T 使得

$$\tilde{x} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2]$$

其中 \tilde{B}_1 不全为零, 则 $\Sigma(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ 为能控子系统;

T 的求解: (1) 选择能控性矩阵 Q_k 的 r 个线性无关的 **列** 构成 T 的前 r 列;

(2) 任选 T 的其它 $n-r$ 列, 使得 $\text{rank } T = n$ 。

● 能观状态分解

若系统 $\Sigma(A, B, C)$ 不完全能观, $\text{rank } Q_g = r < n$, 则可找到变换阵 T^{-1} 使得

$$\tilde{x} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = [\tilde{C}_1 \quad 0]$$

其中 \tilde{C}_1 不全为零, 则 $\Sigma(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ 为能观子系统;

T^{-1} 的求解: (1) 选择能观性矩阵 Q_g 的 r 个线性无关的 **行** 构成 T^{-1} 的前 r 行;

(2) 任选 T^{-1} 的其它 $n-r$ 行, 使得 $\text{rank } T^{-1} = n$ 。

● Kalman 分解的标准结构

三. 化单入单出 (SISO) 系统状态方程为能控标准型和能观标准型

● 能控标准型

若系统 $\Sigma(A, B, C)$ 完全能控, $\text{rank } Q_k = n$, 则可找到变换阵 T^{-1} 将其化为能控标准型:

T^{-1} 的求解: (1) 求出原系统能控性矩阵 Q_k , 并计算 Q_k^{-1}

(2) 取出 Q_k^{-1} 的最后一行为 $p_1^T = [0, 0, \dots, 1]Q_k^{-1}$, 计算 $T^{-1} = \begin{bmatrix} p_1^T \\ p_1^T A \\ \vdots \\ p_1^T A^{n-1} \end{bmatrix}$ 。

● 能观标准型

若系统 $\Sigma(A, B, C)$ 完全能观, $\text{rank } Q_g = n$, 则可找到变换阵 T 将其化为能观标准型:

T 的求解: (1) 求出原系统能观性矩阵 Q_g , 并计算 Q_g^{-1} ;

(2) 取出 Q_g^{-1} 的最后一列为 $p_1 = Q_g^{-1} [0 \cdots 0 \ 1]^T$, 计算

$$T = [p_1, Ap_1, \cdots, A^{n-1}p_1]$$

四. SISO 系统传递函数零极点相消、能控性/能观性、最小实现之间的关系

(1) SISO 系统完全能控且完全能观的充分必要条件:

$$g(s) = c^T (sI - A)^{-1} b \text{ 不能有零极点相消。}$$

(2) SISO 系统传递函数存在零极点相消

- 按照传递函数写出的能控标准型不完全能观。
- 按照传递函数写出的能观标准型不完全能控。

(3) SISO 系统零极点相消和最小实现间的关系

“无零极点相消” \Leftrightarrow “系统既完全能控又完全能观” \Leftrightarrow “最小实现”

第四章 线性定常系统的综合

基本概念

状态反馈、输出反馈、极点配置定理、闭环可镇定性

问题求解

一. SISO 系统的极点配置方法（能控标准型方法）

(1) 判断给定系统 $\Sigma(A, b)$ 是否完全能控, 若是, 则计算 T^{-1} , 化能控标准型 $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{b})$,

(2) 导出原系统的特征多项式: $f(s) = |sI - \tilde{A}| = s^n + p_n s^{n-1} + \cdots + p_2 s + p_1$

(3) 根据给定的期望极点 $\{\lambda_i\}$ 导出期望的闭环特征多项式:
 $f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + a_n^* s^{n-1} + a_{n-1}^* s^{n-2} + \cdots + a_1^*$

(4) 确定能控标准型 $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{b})$ 状态 \tilde{x} 的反馈向量:
 $\tilde{k}^T = [a_1^* - p_1, a_2^* - p_2, \cdots, a_n^* - p_n]$

(5) 计算原系统 $\Sigma(A, b)$ 的状态 x 的反馈向量: $k^T = \tilde{k}^T T^{-1}$ 。

二. SISO 系统的极点配置方法（直接计算方法）

(1) 判断给定系统 $\Sigma(A, b)$ 是否完全能控, 若是则可计算;

(2) 导出闭环系统的特征多项式: $f(s) = |sI - (A - bk^T)| = s^n + \alpha_1(k)s^{n-1} + \cdots + \alpha_n(k)$

(3) 根据给定的期望极点 $\{\lambda_i\}$ 导出期望的闭环特征多项式:
 $f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + a_n^* s^{n-1} + a_{n-1}^* s^{n-2} + \cdots + a_1^*$

(4) 根据两式对应项系数相等, 联立方程求解得到状态反馈向量 k^T 。

注: (1) 给定期望极点组, SISO 系统 k^T 阵唯一; MIMO 系统 K 阵一般不唯一;

(2) 系统完全能控, 则可以任意配置全部 n 个闭环极点; 系统不完全能控, 则不能任意配置全部 n 个闭环极点 (只能任意配置可控的 $r < n$ 个极点);

(3) 若系统不完全能控, 但期望极点组包含了系统所有不能控极点, 则可以配置一些特定的极点。

三. 不完全能控的系统配置特定极点组的方法

(1) 找出不能控的极点 (按能控性结构分解), 判断特定的极点组是否包含系统所有

的不能控极点，若是则可计算；（即判断原系统是否状态反馈能镇定）

(2) 极点配置的步骤：对能控子系统进行配置极点，不能控极点不用配置；或者，采用直接算法进行配置。

四. 判别系统闭环可镇定性（状态反馈能镇定的条件）

- 线性系统 $\Sigma(A, B, C)$ 状态反馈能镇定的充分必要条件为：系统的不能控部分是渐近稳定的（极点有负实部）。
- 判别系统闭环可镇定的方法
 - (1) 判断原系统是否完全能控，若原系统完全能控，则可镇定；
 - (2) 若原系统不完全能控，则进行能控性结构分解，找出系统的不能控部分；若系统不能控部分的极点有负实部，则原系统可镇定。

第五章 状态观测器

基本概念

状态重构、全维观测器、重构状态反馈控制系统、可分离性原理

问题求解

一. 全维观测器的设计方法（能观标准型方法）

- (1) 判断原系统 $\Sigma(A, c^T)$ 是否完全能观，若是，则计算 T ，化能观标准型 $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{c}^T)$
- (2) 计算原系统的特征多项式： $f(s) = |sI - \tilde{A}| = s^n + p_n s^{n-1} + \cdots + p_2 s + p_1$
- (3) 根据给定的观测器期望极点 $\{\lambda_i\}$ 计算期望的特征多项式： $f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + \alpha_n^* s^{n-1} + \alpha_{n-1}^* s^{n-2} + \cdots + \alpha_1^*$
- (4) 确定能观标准型 $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{c}^T)$ 的观测器增益阵： $\tilde{m} = [p_n - \alpha_n^* \quad p_{n-1} - \alpha_{n-1}^* \quad \cdots \quad p_1 - \alpha_1^*]^T$
- (5) 计算原系统 $\Sigma(A, c^T)$ 的状态观测阵 $m = T\tilde{m}$ ，写出观测器方程： $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - m\tilde{y}$ （形式一，注意 \hat{x}, \tilde{y} 符号不要写错！）
- (6) 画出观测器的模拟结构图。

二. 全维观测器的设计方法（直接计算方法）

- (1) 判断给定系统 $\Sigma(A, c^T)$ 是否完全能观，若是，则可计算；
- (2) 计算观测器的特征多项式： $f_M(s) = |sI - (A + mc^T)| = s^n + \alpha_1(m)s^{n-1} + \cdots + \alpha_n(m)$
- (3) 根据给定的观测器极点 $\{\lambda_i\}$ 计算希望的特征多项式： $f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + a_n^* s^{n-1} + a_{n-1}^* s^{n-2} + \cdots + a_1^*$
- (4) 根据两式对应项系数相等，联立方程求解得到状态观测阵 m ，写出观测器方程： $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - m\tilde{y}$ （形式一，注意 \hat{x}, \tilde{y} 符号不要写错！）
- (5) 画出观测器的模拟结构图。

第六章 李雅普诺夫稳定性

基本概念

标量函数的定号性：正定，半正定，负定，半负定，不定

平衡点的稳定性：稳定→渐近稳定→全局渐近稳定（要求越来越高），不稳定

问题求解

一. 判断平衡状态的稳定性（在原点的稳定性）

1. 第一方法（间接法）

设原点是系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的平衡点，线性化模型是： $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ，Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

- (1) 若 \mathbf{A} 的特征值均具有负实部，则原点是渐近稳定的。
- (2) 若 \mathbf{A} 至少存在一个特征值有正实部，则原点不稳定。
- (3) 其它情形，第一方法失效。
- (4) 间接法只能得到局部稳定的结论；当然，如果存在多个平衡点，则原点必然不是全局渐近稳定的。

2. 第二方法（直接法）

- (1) $V(\mathbf{x})$ 正定， $\dot{V}(\mathbf{x})$ 正定，则原点是不稳定的。
- (2) $V(\mathbf{x})$ 正定， $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定，则原点是渐近稳定的。
- (3) $V(\mathbf{x})$ 正定， $\dot{V}(\mathbf{x})$ 半负定，则原点是稳定的；进一步，若 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 除原点外沿状态轨线不恒为零，则原点是渐近稳定的。
- (4) 在根据 V 和 \dot{V} 判断出原点渐近的情况下，若它们的定号性在全空间成立，才能够进一步推断：
若 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时， $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，则原点是全局渐近稳定的。
当然，如果存在多个平衡点，则原点必然不是全局渐近稳定的。

3. $V(\mathbf{x})$ 的构造方法

- (1) 二次型函数法： $V(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_2^2$ $a>0, b>0$ ，
消去不定号项，选取参数 a, b ，使得 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$
- (2) 偶函数法： $V(\mathbf{x}) = a(x_1) + b(x_2)$ ，取 a 为 x_1 、 b 为 x_2 的偶正定函数
消去不定号项，选取函数 a, b ，使得 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$
- (3) 克拉索夫斯基法：

$$V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})[\mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})]\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

注意！这里的 Jacobi 矩阵 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 定义与第一方法不同。

判定法则：若 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x})$ 负定，则原点是渐近稳定的。如果 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x})$ 的定号性在全空间成立，才能够进一步推断：

若 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时， $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 \rightarrow \infty$ ，则原点是全局渐近稳定的。

当然，如果存在多个平衡点，则原点必然不是全局渐近稳定的。

(4) 变量梯度法： $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \iff V(\mathbf{x}) > 0$

先设定 $\text{grad} V$ ，计算 $\dot{V}(\mathbf{x}) = [\text{grad} V]^T \dot{\mathbf{x}} = \nabla_1 f_1(\mathbf{x}) + \nabla_2 f_2(\mathbf{x})$

选取 $\text{grad} V$ 的参数，满足 $\frac{\partial \nabla_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla_j}{\partial x_i}$ ， $i \neq j$ ，使得 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$

计算 $V(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} [\text{grad} V]^T d\mathbf{x} = \int_0^{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n \nabla_i dx_i$

4. 非零平衡点的稳定性判定

作状态变换 $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ ，把平衡点转换为零点 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ，然后判定稳定性判定。

二. 判断线性定常系统的稳定性

(1) 渐近稳定的充要条件： \mathbf{A} 的特征根全部在左半开平面内；或对任意正定阵 \mathbf{Q} 总存在正定阵 \mathbf{P} 满足 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ 。

注意事项 !!!!!

(1) 判定原点稳定性时，(1) $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ，(2) $V(\mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 即可说明正定性。

(2) 系统有多个平衡点时，任何一个都不是全局渐近稳定的。
(只有存在唯一一个平衡点的系统可能是全局渐近稳定的。)

(3) 第一方法（线性化方法）不能判断平衡点的全局性质。

(4) 李雅普诺夫判据为充分条件，不满足时，不能下结论。

($V(\mathbf{x})$ 正定， $\dot{V}(\mathbf{x})$ 不定号，不能下任何结论。)