Tsinghua University

系统工程导论

开课单位：清华大学自动化系

主讲教师：胡坚明 副教授

Tsinghua University

模块二：系统分析

因子分析方法

（Factor Analysis）

本章内容

- 因子分析的主要目的
- 因子模型
- 有关概念
- 基于主成分的因子分析
- 因子正交旋转

因子分析的主要目的

例：大学课程训练了哪些公共能力？（40门）

微积分I，II　工程制图　算法语言　英语　体育1　军事理论

体育2　中国革命史通论2　普通物理　体育3　几何与代数I，II

复变函数　普通物理实验1　电路原理1　数字电子技术基础

体育4　数据结构　普通物理实验2　电机与电力拖动基础　体育5

模拟电子基础　计算机原理及应用1　电子技术课程设计　体育6

中国特色社会主义建设概论　计算机原理及应用2　信号与系统分析

自动控制理论1　金工实习　马克思主义哲学基础1　计算机网络

运筹学1　自动控制原理2　系统工程导论　多媒体技术及应用　计算机仿真

检测原理　计算机原理　随机过程　人工智能导论　综合论文训练

因子分析的主要目的

样本数据：N个同学的考试成绩

$$x(t) = [x_1(t)\, x_2(t) \cdots x_n(t)]^T \quad 1 \le t \le N$$

n-考试科目

N-同学数目

若有$m < n$种公共能力，考试成绩可分解成

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{m} a_i(k)\, f_k(t) + s_i(t)$$

因子载荷　公共因子　特殊因子

目的：从因子载荷分析公共能力的含义

因子分析的主要目的

记 $a(k) = [a_1(k)\, a_2(k) \cdots a_n(k)]^T{}_{n\times 1}$　载荷向量

$f(t) = [f_1(t)\, f_2(t) \cdots f_m(t)]^T{}_{m\times N}$　公共因子

$s(t) = [s_1(t)\, s_2(t) \cdots s_n(t)]^T{}_{n\times N}$　特殊因子

$A_m = [a(1)\, a(2) \cdots a(m)]_{n\times m}$　载荷矩阵

前面的分解可以写成

$$x(t) = A_m f(t) + s(t) \quad 1 \le t \le N$$

基本目的：根据 A_m 矩阵，分析 f 的含义

因子分析的主要目的

例：某年某市高考成绩的一个因子模型

$$\begin{bmatrix} \text{政治} \\ \text{语文} \\ \text{数学} \\ \text{物理} \\ \text{化学} \\ \text{外语} \\ \text{生物} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0.87} & -0.07 & 0.35 \\ -0.05 & 0.18 & \underline{0.84} \\ 0.03 & \underline{0.84} & 0.29 \\ 0.22 & \underline{0.66} & 0.38 \\ 0.48 & \underline{0.65} & 0.24 \\ 0.24 & -0.01 & \underline{0.80} \\ 0.32 & 0.25 & \underline{0.78} \end{bmatrix} f + s$$

因子模型

为了使分析结果有意义，分解

$$x(t) = A_m f(t) + s(t) \quad 1 \le t \le N$$

必须满足一些合理性条件

满足这些条件的分解称为 m –因子模型

因子模型

样本数据规格化

$$e(x_i) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_i(t) = 0$$

$$1 \le i \le n$$

$$\delta^2(x_i) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N} \left(x_i(t)\right)^2 = 1$$

消除变量单位的影响

因子模型

公共因子规格化

$$e(f_k) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} f_k(t) = 0$$

$$1 \le k \le m$$

$$\delta^2(f_k) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N} \left(f_k(t)\right)^2 = 1$$

目的：使因子载荷相对大小有意义！

由此可知

$$e(s_i) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} s_i(t) = 0 \quad 1 \le i \le n$$

因子模型

因子之间(包括特殊因子)样本向量彼此正交等价于规格变量的样本协方差为0, 即:

$$r(s_i, s_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$
$$r(f_k, s_j) = 0 \quad \forall k, j$$
$$r(f_k, f_j) = 0 \quad \forall k \neq j$$

其中 $r(s_i, s_j) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N} s_i(t)s_j(t)$

保证因子之间线性无关

因子模型

建立 m –因子模型就是要确定一个

$$A_m \in R^{n\times m}$$

并证明存在满足前面所列条件的

$$f(t) \in R^m,\ s(t) \in R^n \quad 1 \le t \le N$$

使得

$$x(t) = A_m f(t) + s(t) \quad 1 \le t \le N$$

因子模型

矩阵表示 $F = [f(1)\, f(2) \cdots f(N)] \quad m \times N$

$$S = [s(1)\, s(2) \cdots s(N)] \quad n \times N$$

$$1_N = [1\ 1 \cdots 1] \quad 1 \times N$$

m –因子模型 $\boxed{X = A_m F + S}$

满足 $1_N F^T = 0 \quad 1_N S^T = 0 \quad SF^T = 0$

$$\frac{1}{N-1}FF^T = I_m$$

$$\frac{1}{N-1}SS^T = diag\{\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_n\}$$

公共因子规格化

公共因子与特殊因子正交

因子模型

如果 A_m 是某个 m –因子模型的载荷矩阵

则有:
$$XX^T = (A_m F + S)(A_m F + S)^T = A_m FF^T A_m^T + SS^T$$

1

所以 $R_X = A_m A_m^T + \Phi$

样本相关矩阵

其中 $\Phi = diag\{\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_n\}$

因子模型

反之, 如果存在 $A_m \in R^{n\times m}$, 使

$$\Phi = R_X - A_m A_m^T$$

为对角矩阵, 只要选择 $F \in R^{m\times N}$ 满足

这三个条件是进行因子分解充要条件

$$1_N F^T = 0 \quad \frac{1}{N-1}XF^T = A_m \quad \frac{1}{N-1}FF^T = I_m$$

并取 $S = X - A_m F$

m –因子模型的所有条件均满足

A_m 是某个 m –因子模型的载荷矩阵

因子模型

只需验证 $SF^T = 0 \quad \frac{1}{N-1}SS^T = diag\{\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_n\}$

由已知条件可得

$$SF^T = (X - A_m F)F^T = XF^T - A_m FF^T = (N-1)A_m - (N-1)A_m = 0$$

$$\frac{1}{N-1}SS^T = \frac{1}{N-1}(X - A_m F)(X - A_m F)^T = \frac{1}{N-1}\left(XX^T - A_m FX^T - XF^T A_m^T + A_m FF^T A_m^T\right)$$
$$= A_m A_m^T + \Phi - A_m A_m^T - A_m A_m^T + A_m A_m^T = \Phi$$

因子模型

$F \in R^{m\times N}$	m*N个变量
$1_N F^T = 0$	m个方程
$\frac{1}{N-1}XF^T = A_m$	m*n个方程
$\frac{1}{N-1}FF^T = I_m$	$m \times (1+m)/2$ 个方程

一共 $m \times (1 + n + (1+m)/2)$ 个方程

N 一般远大于 $1 + n + (1+m)/2$ 应该有解

因子模型

建立 m –因子模型本质上就是把

样本相关矩阵分解成

$$R_X = A_m A_m^T + \Phi$$

其中

$A_m \in R^{n\times m}, \Phi$ 是对角矩阵

因子模型

理论上可以转化为求解优化问题

$$\min_{A\in R^{n\times m}} \sum_{1\le i\le n-1}\sum_{i<j\le n}\left(\rho_{ij}(A)\right)^2$$

其中

$$\left(\rho_{ij}(A)\right)_{n\times n} = R_X - AA^T$$

这里，AA^T是平方项，则目标函数是四次，一般是非凸问题。目前一般没有办法找到全局最优解！

只有最优目标值为0时, 才存在完全满足要求的因子模型

有关概念

因为 $R_X = A_m A_m^T + \Phi, \quad \Phi = diag\{\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_n\}$

所以 $\delta^2(x_i) = \sum_{k=1}^{m}(a_i(k))^2 + \phi_i \quad 1 \le i \le n$

共性变差　个性变差

$h_i^2 = \sum_{k=1}^{m}(a_i(k))^2$ 载荷矩阵第i行平方和

公共因子的变差总贡献 $g_k^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i(k))^2$ 载荷矩阵第k列平方和

共性变差反映变量对公共因子的依赖性,不大于1。变差总贡献反映因子的作用大小

有关概念

因为

$$\frac{1}{N-1}XF^T = \frac{1}{N-1}(A_mF+S)F^T = A_m$$

所以 $r(x_i, f_k) = a_i(k)$

$1 \le i \le n \qquad 1 \le k \le m$

因子载荷反映变量对公共因子的相关性!

有关概念

因子得分

建立因子模型并不需要确定因子值

如果需要，可以对其估计

因为 $x(t) = A_m f(t) + s(t) \qquad \frac{1}{N-1}SS^T = \Phi$

? 求解 $\min\limits_{f\in R^m} (x(t)-A_mf)^T\Phi^{-1}(x(t)-A_mf)$

可得因子得分 $\hat{f}(t) = \left(A_m\Phi^{-1}A_m^T\right)^{-1}\Phi^{-1}A_m x(t)^T$

有关概念

证明：通过前面的课程，我们知道估计下述多项式的参数估计方法

$$Y = \theta^T X + \varphi$$

即：$\hat{\theta} = \left(XX^T\right)^{-1}XY^T$

但上述估计方法，是在假设 φ 为白噪声的条件下得到的。即需满足：

$$E(\varphi) = 0$$
$$E(\varphi\varphi^T) = I$$

有关概念

对比 $Y = \theta^T X + \varphi$

和 $x(t) = A_m f(t) + s(t)$

我们仍然希望借助上述方法求 $f(t)$ 的估计值，因此，需要满足：

$$E(s(t)) = 0$$
$$E(s(t)s(t)^T) = I$$

然而

$$E(s(t)) = 0$$
$$E(s(t)s(t)^T) = \Phi$$

不满足!

有关概念

我们对于 $x(t) = A_m f(t) + s(t)$ 两边同时乘以 $\Phi^{-1/2}$

则有 $\Phi^{-1/2}x(t) = \Phi^{-1/2}A_m f(t) + \Phi^{-1/2}s(t)$

注意此时：$E(\Phi^{-1/2}s(t)) = \Phi^{-1/2}E(s(t)) = 0$

$$E(\Phi^{-1/2}s(t)s(t)^T\Phi^{-1/2}) = \Phi^{-1/2}E(s(t)s(t)^T)\Phi^{-1/2}$$

$$= \Phi^{-1/2}\Phi\Phi^{-1/2} = \Phi^{-1/2}\Phi^{1/2}\Phi^{1/2}\Phi^{-1/2} = I$$

于是，我们可以利用上述公式求解，设：

$$\Phi^{-1/2}x(t) = Y \qquad \Phi^{-1/2}A_m = X$$

注意此处

$$f(t) = \theta^T \qquad \Phi^{-1/2}s(t) = \varphi$$

有关概念

于是优化问题变成： 注意此处

$$\min_{f\in R^m}\left(\Phi^{-1/2}x(t)-\Phi^{-1/2}A_mf\right)^T\left(\Phi^{-1/2}x(t)-\Phi^{-1/2}A_mf\right)$$

即求：$\min\limits_{f\in R^m}(x(t)-A_mf)^T\Phi^{-1}(x(t)-A_mf)$

$$\frac{\partial\left((x(t)-A_mf)^T\Phi^{-1}(x(t)-A_mf)\right)}{\partial f}$$

$$= -2A_m{}^T\Phi^{-1}(x(t)-A_mf) = 0$$

可得因子得分 $\hat{f}(t) = \left(A_m^T\Phi^{-1}A_m\right)^{-1}A_m^T\Phi^{-1}x(t)$

有关概念

由于：$f(t) = \theta^T$

公式应调整为：$\hat{\theta} = \left(X^TX\right)^{-1}X^TY$ 课下自己证明

即：

$$\hat{f}(t) = \left(\left(\Phi^{-1/2}A_m\right)^T\left(\Phi^{-1/2}A_m\right)\right)^{-1}\left(\Phi^{-1/2}A_m\right)^T\left(\Phi^{-1/2}x(t)\right)$$

同样有：

$$\hat{f}(t) = \left(A_m^T\Phi^{-1}A_m\right)^{-1}A_m^T\Phi^{-1}x(t)$$

有关概念

例 88个学生闭卷考力学，几何，开卷考代数、分析、统计，考试成绩的因子模型如下：

$$\begin{bmatrix}\text{力学}\\\text{几何}\\\text{代数}\\\text{分析}\\\text{统计}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}.646 & .354\\.711 & .303\\.864 & -.051\\.786 & -.249\\.742 & -.276\end{bmatrix} f + s \qquad g_1^2 = 2.84 \qquad g_2^2 = 0.38$$

共性变差反映变量对公共因子的依赖性,不大于1。
变差总贡献反映因子的作用大小

有关概念

三个学生的成绩

$$\begin{bmatrix}77 & 18 & 5\\82 & 44 & 26\\67 & 50 & 15\\67 & 57 & 20\\81 & 81 & 20\end{bmatrix}$$

五门学科反映两种公共能力，因子得分就是公共因子矩阵 f。

因子得分

$$\begin{bmatrix}2.467 & 0.665 & -2.883\\-0.491 & -3.989 & 1.300\end{bmatrix}$$

基于主成分的因子分析

主成分分析中使用的符号

$$R_X = Q\bar{\Lambda}Q^T$$

$$Q = [q(1)\,q(2)\cdots q(n)] \in R^{n\times n}$$

$$\bar{\Lambda} = diag\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n\}$$

$$Q^TQ = I_n$$

$$\bar{\lambda}_1 \ge \bar{\lambda}_2 \ge \cdots \ge \bar{\lambda}_n \ge 0$$

第 k 个主成分为 $z_k = q^T(k)x$

基于主成分的因子分析

因为

$$QQ^T = [q(1)\cdots q(n)]\begin{bmatrix} q^T(1) \\ \vdots \\ q^T(n) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} q(k)q^T(k)$$

所以 $x = QQ^Tx = \sum_{k=1}^{n} q(k)q^T(k)x = \sum_{k=1}^{n} q(k)z_k$

$$= \sum_{k=1}^{m} q(k)z_k + \sum_{k=m+1}^{n} q(k)z_k$$

x分解为两部分

基于主成分的因子分析

令 $z_k(t) = q^T(k)x(t) \quad s(t) = \sum_{k=m+1}^{n} q(k)z_k(t)$

可得 $x(t) = \sum_{k=1}^{m} q(k)z_k(t) + s(t)$

能否满足因子模型的所有条件?

所有因子样本均值为0? 能够满足

公共因子样本方差为1? 不能满足

$$\delta^2(z_k) = \bar\lambda_k$$

基于主成分的因子分析

令 $f_k = \dfrac{z_k}{\sqrt{\bar\lambda_k}} \qquad a(k) = q(k)\sqrt{\bar\lambda_k}$

于是 $x(t) = \sum_{k=1}^{m} q(k)z_k(t) + s(t)$

$$= \sum_{k=1}^{m} q(k)\sqrt{\bar\lambda_k}\,\frac{z_k(t)}{\sqrt{\bar\lambda_k}} + s(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a(k)f_k(t) + s(t)$$

$\delta^2(f_k) = 1$

基于主成分的因子分析

公共因子之间样本向量彼此正交?

因为 $\sum_{t=1}^{N} z_k(t)z_j(t) = \sum_{t=1}^{N} q^T(k)x(t)x^T(t)q(j)$

$$= q^T(k)XX^Tq(j) = q^T(k)\lambda_j q(j) = 0$$

所以 $r(f_k, f_j) = \dfrac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N} f_k(t)f_j(t)$

$$= \frac{1}{(N-1)\sqrt{\bar\lambda_k\bar\lambda_j}}\sum_{t=1}^{N} z_k(t)z_j(t) = 0$$

能够满足

基于主成分的因子分析

公共因子与特殊因子样本向量彼此正交?

因为 $\sum_{t=1}^{N} z_k(t)s_i(t) = \sum_{t=1}^{N} z_k(t)\sum_{j=m+1}^{n} q_i(j)z_j(t)$

$$= \sum_{j=m+1}^{n} q_i(j)\sum_{t=1}^{N} z_k(t)z_j(t) = 0$$

所以 $r(f_k, s_i) = \dfrac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N} f_k(t)s_i(t)$

$$= \frac{1}{(N-1)\sqrt{\bar\lambda_k}}\sum_{t=1}^{N} z_k(t)s_i(t) = 0$$

能够满足

基于主成分的因子分析

特殊因子之间样本向量彼此正交?

因为 $\sum_{t=1}^{N} s_\alpha(t)s_\beta(t) = \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=m+1}^{n} q_\alpha(i)z_i(t)\sum_{j=m+1}^{n} q_\beta(j)z_j(t)$

$$= \sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n} q_\alpha(i)q_\beta(j)\left(\sum_{t=1}^{N} z_i(t)z_j(t)\right)$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} q_\alpha(i)q_\beta(i)\sum_{t=1}^{N}\left(z_i(t)\right)^2$$

只有i和j相等时不为0！

所以

$$r\left(s_\alpha, s_\beta\right) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N} s_\alpha(t)s_\beta(t) = \sum_{i=m+1}^{n} q_\alpha(i)q_\beta(i)\bar\lambda_i$$

一般情况不能满足！

基于主成分的因子分析

由于 $\delta^2(s_\alpha) = r(s_\alpha, s_\alpha) = \sum_{i=m+1}^{n}\left(q_\alpha(i)\right)^2\bar\lambda_i$

所以

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\delta^2(s_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=m+1}^{n}\left(q_\alpha(i)\right)^2\bar\lambda_i$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\left(q_\alpha(i)\right)^2\right)\bar\lambda_i = \sum_{i=m+1}^{n}\bar\lambda_i$$

Q由彼此正交的单位向量构成，因此，第i列平方和为1。

如果前m个主成分的逼近误差很小，所有的 $s_i(t)$ 都会很小，此时可忽略它们对 x 的影响，利用前个主成分建立近似的 m −因子模型。

因子正交旋转

如果 $A_m \in R^{n\times m}$ 是因子模型的载荷矩阵，就有对角矩阵 Φ 把样本相关矩阵分解成

$$R_X = A_mA_m^T + \Phi$$

此时对任何正交矩阵 $P \in R^{m\times m},\ PP^T = I_m$

$$R_X = A_mPP^TA_m^T + \Phi = A_mP(A_mP)^T + \Phi$$

说明 $\bar A_m = A_mP$ 也是载荷矩阵

物理意义：就是对A_m作空间上的旋转

如何利用?

因子正交旋转

某年某市高考成绩的两个载荷矩阵

$$\begin{bmatrix} 0.62 & -0.44 & -0.56 \\ 0.69 & -0.20 & 0.46 \\ 0.64 & 0.60 & 0.11 \\ 0.71 & 0.35 & 0.00 \\ 0.15 & 0.31 & -0.37 \\ 0.69 & -0.41 & 0.20 \\ 0.84 & -0.20 & 0.12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \underline{0.87} & -0.07 & 0.35 \\ -0.05 & 0.18 & \underline{0.84} \\ 0.03 & \underline{0.84} & 0.29 \\ 0.22 & \underline{0.66} & 0.38 \\ 0.48 & \underline{0.65} & 0.24 \\ 0.24 & -0.01 & \underline{0.80} \\ 0.32 & 0.25 & \underline{0.78} \end{bmatrix}$$

$$A_m \qquad\qquad\qquad \bar A_m$$

因子正交旋转

选择恰当的正交矩阵对载荷矩阵进行列变换可能便于解释公共因子的含义

$A_m = [a(1)\,a(2)\cdots a(m)] \quad a(k) = [a_1(k)\,a_2(k)\cdots a_n(k)]^T$

$P = [p(1)\,p(2)\cdots p(m)] \quad p(k) = [p_1(k)\,p_2(k)\cdots p_m(k)]^T$

$\bar A_m = [\bar a(1)\,\bar a(2)\cdots \bar a(m)] \quad \bar a(k) = [\bar a_1(k)\,\bar a_2(k)\cdots \bar a_n(k)]^T$

$$\bar a(k) = A_mp(k) = \sum_{t=1}^{m} a(t)\,p_t(k)$$

$\bar a(k)$ 分量的绝对值差异越大越便于解释 核心思想！

基本准则：极大化$(\bar a_1(k))^2,\cdots,(\bar a_n(k))^2$ 的方差

因子正交旋转

$(\bar{a}_1(k))^2,\cdots,(\bar{a}_n(k))^2$ 的方差

$$\sum_{i=1}^{n}\left((\bar{a}_i(k))^2-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\bar{a}_j(k))^2\right)^2$$

其中 $\bar{a}_i(k)=\sum_{t=1}^{m}a_i(t)p_t(k)$

问题：共性变差 $h_i^2=\sum_{t=1}^{m}(a_i(t))^2$ 存在差异

用 $\frac{a_i(t)}{h_i}$ 代替 $a_i(t)$ 消除差异

此时 $\sum_{t=1}^{m}\left(\frac{a_i(t)}{h_i}\right)^2=1$

因子正交旋转

正交旋转优化问题

$$\max \sum_{k=1}^{m}\sigma^2(p(k))$$

$$s.t.\quad PP^T=I_m$$

其中

$$\sigma^2(p(k))=\sum_{i=1}^{n}\left((\bar{a}_i(k))^2-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\bar{a}_j(k))^2\right)^2$$

$$\bar{a}_i(k)=\frac{1}{h_i}\sum_{t=1}^{m}a_i(t)p_t(k)$$

因子正交旋转

轮换迭代算法

首先取

$$P_{12}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & I_{m-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G(\theta) & 0\\ 0 & I_{m-2}\end{bmatrix}$$

$$P_{12}P_{12}^T=\begin{bmatrix}G(\theta)G^T(\theta) & 0\\ 0 & I_{m-2}\end{bmatrix}=I_m$$

满足正交矩阵的约束

因子正交旋转

相当于

$$p(1)=[\cos\theta\ \sin\theta\ 0\cdots 0]^T$$

$$p(2)=[-\sin\theta\ \cos\theta\ 0\cdots 0]^T$$

其余 $p(k)$ 为常数向量

原优化问题可以转化为一维无约束问题

$$\max_{\theta}\ \sigma^2(p(1))+\sigma^2(p(2))$$

因子正交旋转

由 $\dfrac{d\left(\sigma^2(p(1))+\sigma^2(p(2))\right)}{d\theta}=0$

可得 $tg(4\theta)=\dfrac{c_1}{c_2}$

其中 $c_1=2\left(\sum_{i=1}^{n}w_iu_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i\sum_{i=1}^{n}u_i\right)$

$$c_2=\sum_{i=1}^{n}\left((w_i)^2-(u_i)^2\right)-\frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2\right)$$

$$w_i=\frac{1}{h_i^2}\left((a_i(1))^2-(a_i(2))^2\right),\quad u_i=\frac{2}{h_i^2}a_i(1)a_i(2)$$

因子正交旋转

再根据最大目标函数处应该有

$$\frac{d^2\left(\sigma^2(p(1))+\sigma^2(p(2))\right)}{d\theta^2}<0$$

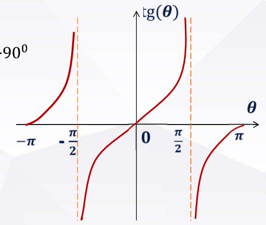
可得到确定最优解的规则

$c_1\le 0,\ c_2<0\Rightarrow -180^0\le 4\theta\le -90^0$

$c_1\le 0,\ c_2>0\Rightarrow -90^0\le 4\theta\le 0^0$

$c_1\ge 0,\ c_2>0\Rightarrow 0^0\le 4\theta\le 90^0$

$c_1\ge 0,\ c_2<0\Rightarrow 90^0\le 4\theta\le 180^0$



因子正交旋转

得到最优的 P_{12} 后，先用 A_mP_{12} 替换 A_m

然后取

$$P_{13}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_{m-3}\end{bmatrix}$$

再求解

$$\max_{\theta}\ \sigma^2(p(1))+\sigma^2(p(3))$$

如此继续……

因子正交旋转

停止准则

计算全部 P_{kj}，$k<j$ 为一次循环

（共有 $m(m-1)/2$ 种组合）

一次循环后目标函数增量不大就停止

因子正交旋转

例

$$x=\begin{bmatrix}\text{生产}\\ \text{技术}\\ \text{交通}\\ \text{环境}\end{bmatrix}\qquad A_m=\begin{bmatrix}0.60 & 0.71\\ 0.85 & 0.38\\ 0.93 & -0.32\\ 0.74 & -0.40\end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}=-36^0$$

$$P=\begin{bmatrix}0.8090 & 0.5878\\ -0.5878 & 0.8090\end{bmatrix}\qquad \bar{A}_m=\begin{bmatrix}0.07 & 0.93\\ 0.46 & 0.81\\ 0.94 & 0.29\\ 0.83 & 0.11\end{bmatrix}$$