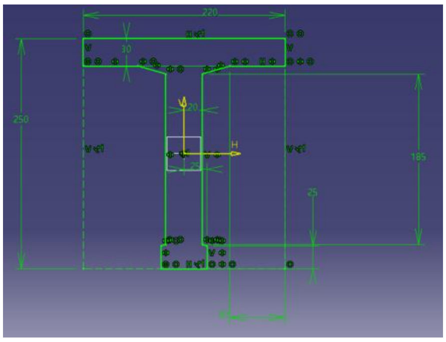
基于有限元方法的T型悬臂梁静力学分析报告

学号：S230200181

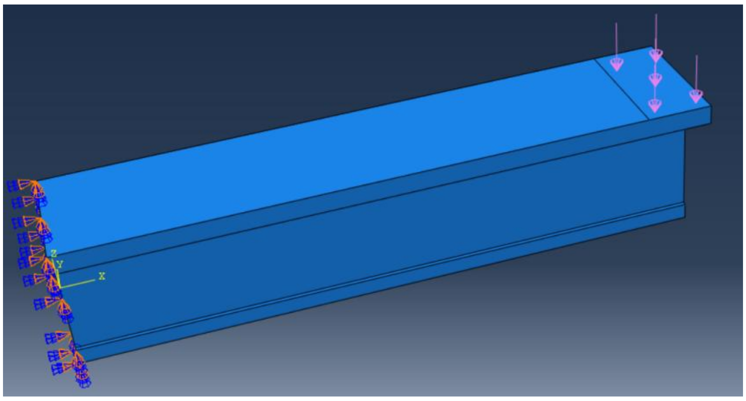
姓名：陈佳硕

1.问题概述

现有一悬臂梁，其截面为T型，尺寸（单位mm）如图所示。



梁的一端固定在墙壁上，另一端承受载荷。载荷Mg=5000N，方向为z轴负方向，均匀分布在T型梁外端的上表面，受力面积S=220*200（mm^2）。



使用有限元方法对该T型梁进行静力学分析，最后画出位移、应变和应力云图。

2.求解过程简介

2.1 网格划分

因为T型梁的标面都是平整的，而且该问题是三维问题，因此使用一阶六面体单元解决该问题。为了防止划分网格时节点信息和单元信息错乱，首先在catia中对该梁进行三维建模，然后导入到Abaqus中进行网格划分，节点信息和单元信息保存到inp文件中。

2.2 边界约束

梁与墙壁固定端截面上的所有的节点在x、y、z方向上的位移都为零。因为该载荷是均匀分布的面力，因此载荷均匀分配给受力面上的72个节点，每个节点受力大小为force=Mg/72，力的方向为z轴负方向。

2.3 位移-应变-应力计算

2.3.1 等参映射

为了降低计算难度和方便后面的积分，将整体坐标系下不规则六面体的坐标和位移等参映射到局部坐标系下的正六面体上。等参映射采用插值的方式，其公式如下：

$$\begin{cases} x=\sum_{i=1}^{8} N_i x_i \\ y=\sum_{i=1}^{8} N_i y_i \\ z=\sum_{i=1}^{8} N_i z_i \end{cases} \qquad \begin{cases} u=\sum_{i=1}^{8} N_i u_i \\ v=\sum_{i=1}^{8} N_i v_i \\ w=\sum_{i=1}^{8} N_i w_i \end{cases} \tag{1}$$

上式中 N 为形函数 $N_i=\dfrac{1}{8}\left(1+\xi_i\xi\right)\left(1+\eta_i\eta\right)\left(1+\zeta_i\zeta\right)$， $\xi_i=\pm1,\eta_i=\pm1,\zeta_i=\pm1$ 。

2.3.2B 矩阵和 D 矩阵计算

$B=LN$， L 为微分算子。

$$L=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{2}$$

在计算 N 对 x,y,z 的偏导前，先利用链式求导法则，求解 N 对 ξ,η,ζ 的偏导，公式如下：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中 J 为雅可比矩阵。其计算过程为：

$$J=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}z_i \\ \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}z_i \\ \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}x_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}y_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \tag{4}$$

因此可以根据下式计算 B 矩阵。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{5}$$

D 矩阵也就是应变-应力矩阵，其公式如下

（6）

$$D=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0\\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0\\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2}\end{bmatrix}$$

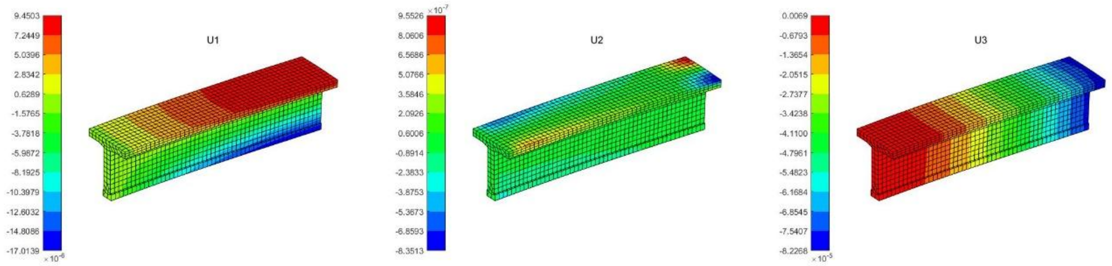
根据 B 矩阵和 D 矩阵便通过高斯积分计算出单位刚度矩阵 Ke。计算公式如下：

$$K_e=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}w_iw_jw_kB^T\left(\xi,\eta,\zeta\right)DB\left(\xi,\eta,\zeta\right) \tag{7}$$

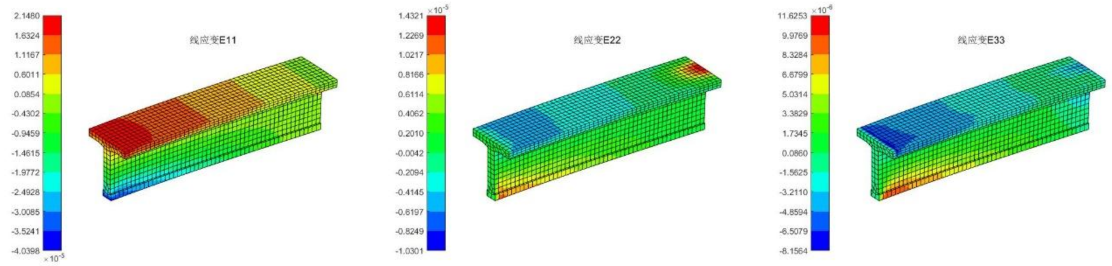
然后根据单位刚度矩阵组装总刚度矩阵 K。根据 $KU=F$ 可求出位移 U，进而根据 $\varepsilon=BU$ 和 $\sigma=D\varepsilon$ 求出应力和应变。

3.结果

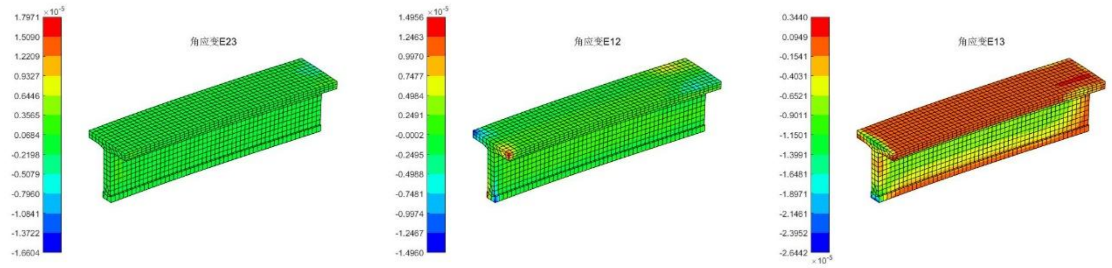
x、y、z 方向的位移云图：



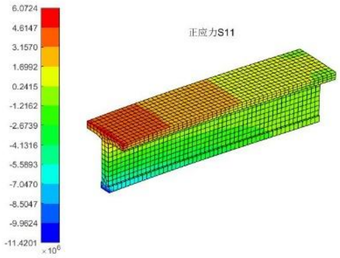
线应变云图：

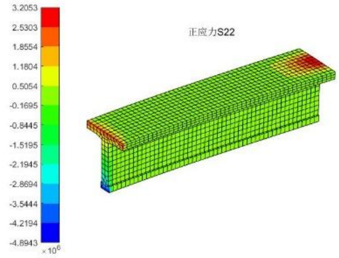


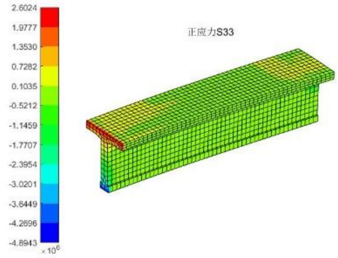
角应变云图：



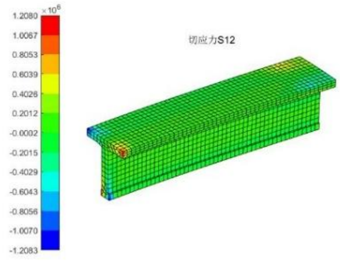
正应力云图：

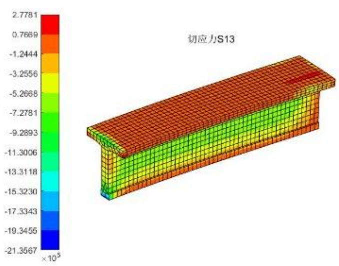


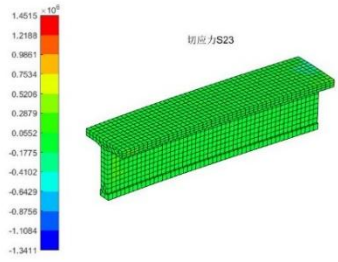




切应力云图：







合位移、合应力云图：