



《有限元方及应用》期末作业报告

题 目：四面体单元悬臂梁的

Matlab 有限元分析报告

学 院：机械与运载工程学院

班 级：2308

姓 名：刘江川

学 号：S230200206

二〇二四年一月

1 问题描述

悬臂梁静力分析,某悬臂梁,截面尺寸为 200mmX400mm,长度为 2500mm,在 (1000, 0, 200) 和 (2000, 0, 200) 处有 100mm 通孔,弹性模量取 3GPa,泊松比为 0.2,端部 (2500, 0, 400) 处和 (2500, 200, 400) 处受 100kN 的集中载荷,如图 1 所示:

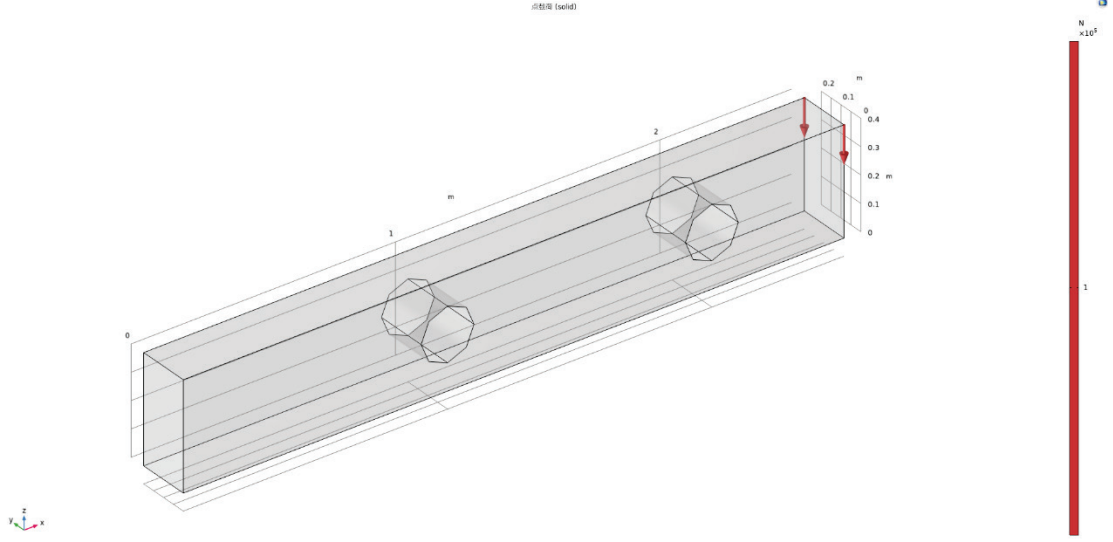


图 1 双孔悬臂梁载荷示意图

使用 matlab 编程,采用四面体单元,对该悬臂梁进行有限元分析,并与 comsol 软件计算结果对比。

2 四面体单元刚度矩阵推导

四面体单元形函数见式(1)。

$$N_k = L_k, \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

其中, $L_1 = \xi$, $L_2 = \eta$, $L_3 = \zeta$, $L_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta$ 。

先求其雅可比矩阵 J, 见式(2)。

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} [N][X] \quad (2)$$

将式(1)代入式(2), 中:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} [X] \quad (4)$$

由式(3)可求得形函数对自然坐标的导数:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} N = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} [N] \quad (4)$$

即可求得 B 矩阵见式(5)。

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \quad (5)$$

D 矩阵见式(6)。

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

由此可求得单元刚度矩阵 K^e ，见式(7)。使用数值积分计算，权系数为 1/6，体积坐标为(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)。

$$K^e = \iiint_{\Omega^e} B^T D B \, dx \, dy \, dz = \sum B^T D B |J| d\xi d\eta d\zeta = \sum W_i f(L_1, L_2, L_3) \quad (7)$$

3 求解过程

3.1悬臂梁 comsol 建模

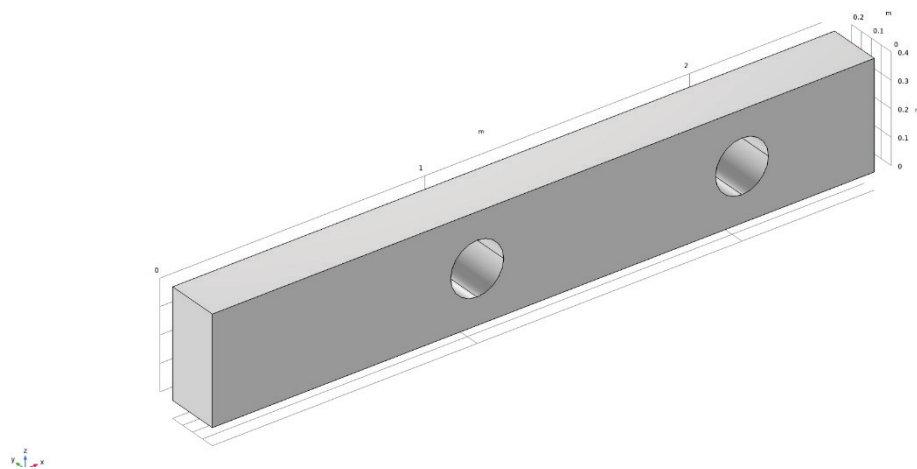


图 2 comsol 建模图

在 comsol 建模，如图 3 所示。

3.2网格划分

在 comsol 中使用自由四面体网格进行构建，如图 3 所示。该网格包含 3061 个单元。最小质量：0.3135；平均质量：0.6703。

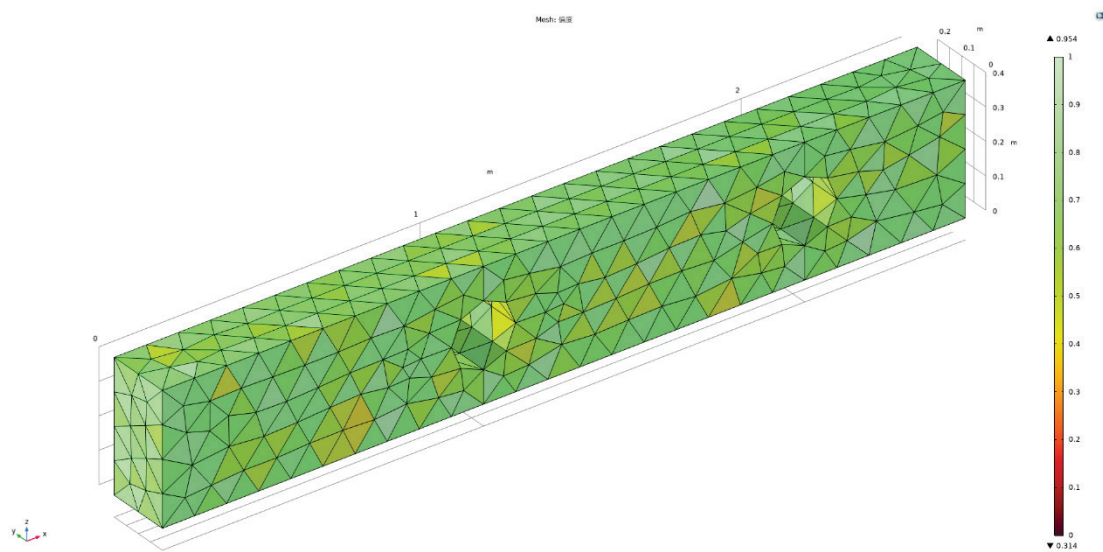


图 3 comsol 网格划分

将网格文件导出为 COMSOL Multiphysics 文本文件(*.mphtxt)，用于导入到 matlab 中。

3.3 Matlab 计算

在 Matlab 中计算，结果如图所示

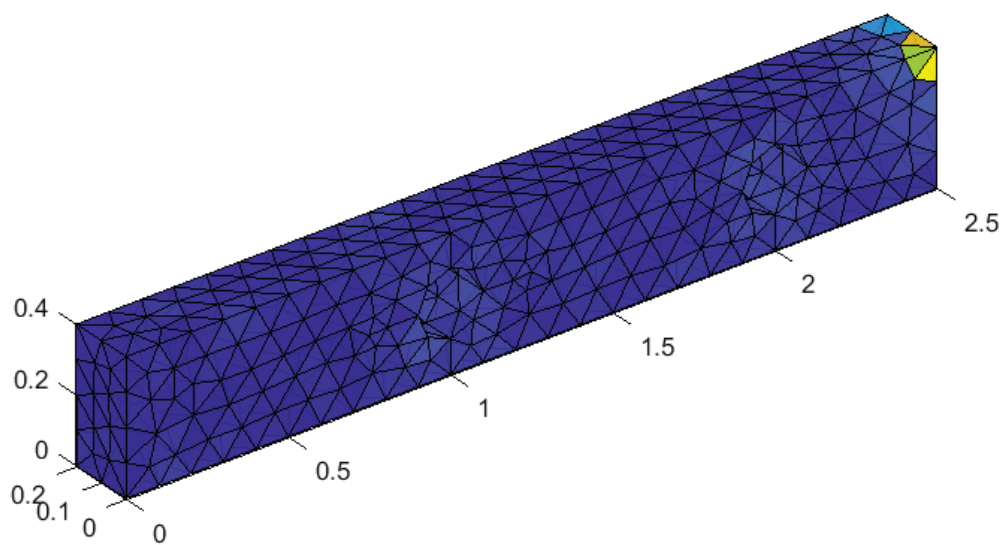


图 4 Matlab 计算结果

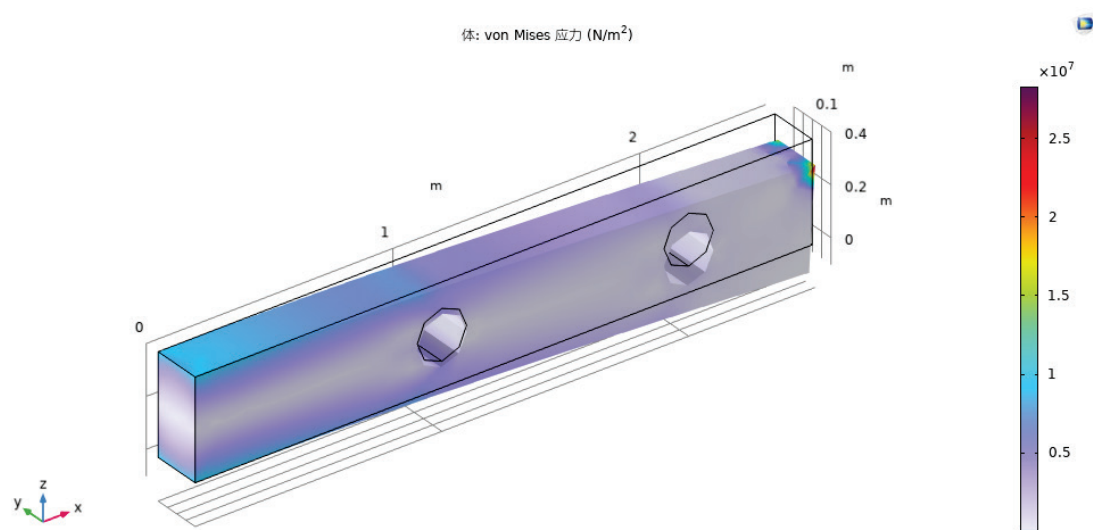


图 5 comsol 计算结果

与 comsol 计算结果（图 5）相比，误差较大。位移场误差为 $[10.82, 3.973e+03, -76.55](\%)$ ，von Mises 应力误差为 88%。