

# 湖南大学



## 课程大作业

课程名称	有限元方法及应用
学生姓名	吴靓
学生学号	S230200201
专业班级	2301 班
学院名称	机械与运载工程学院
课程老师	王琥

2024 年 1 月



## 目 录

第 1 章 问题描述.....	2
第 2 章 技术路线.....	3
第 3 章 基础理论.....	4
3.1 有限元分析法 .....	4
3.2 网格划分 .....	5
3.3 四边形单元 .....	6
第 4 章 代码编写.....	9
第 5 章 结果分析.....	11
5.1 代码运行计算结果 .....	11
5.2 有限元软件分析结果对比 .....	13
第 6 章 全文总结与感想.....	15



## 第1章 问题描述

如图 1 所示：厚度为 25mm 平面薄板，其中弹性模量  $E$  为 210GPa，泊松比  $\nu=0.3$ ，长度、载荷如图所示，求解加载后简支梁的位移和应力。

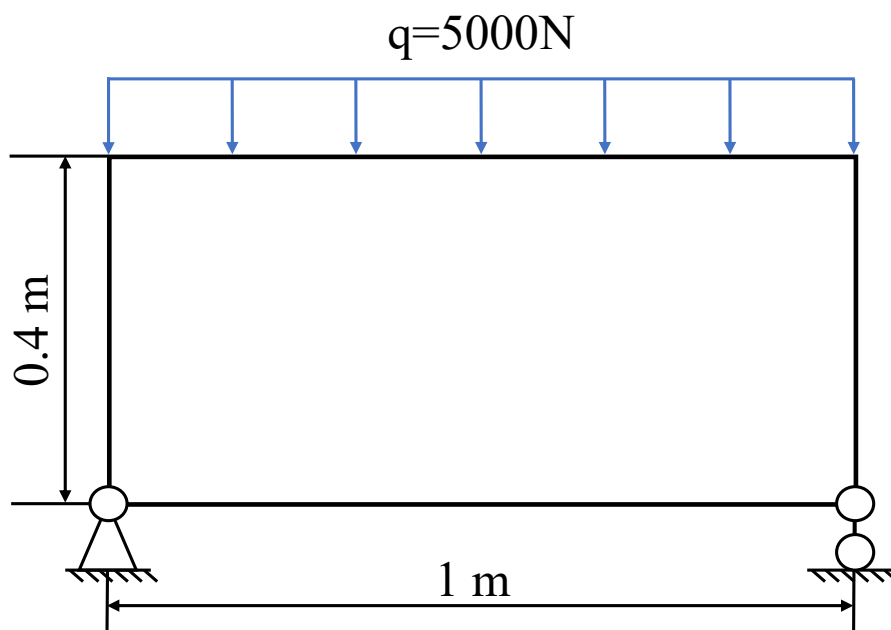


图 1 薄板尺寸及受力简图



## 第2章 技术路线

为解决图 1 所示平面薄板的有限元分析问题，技术路线如图 2 所示：

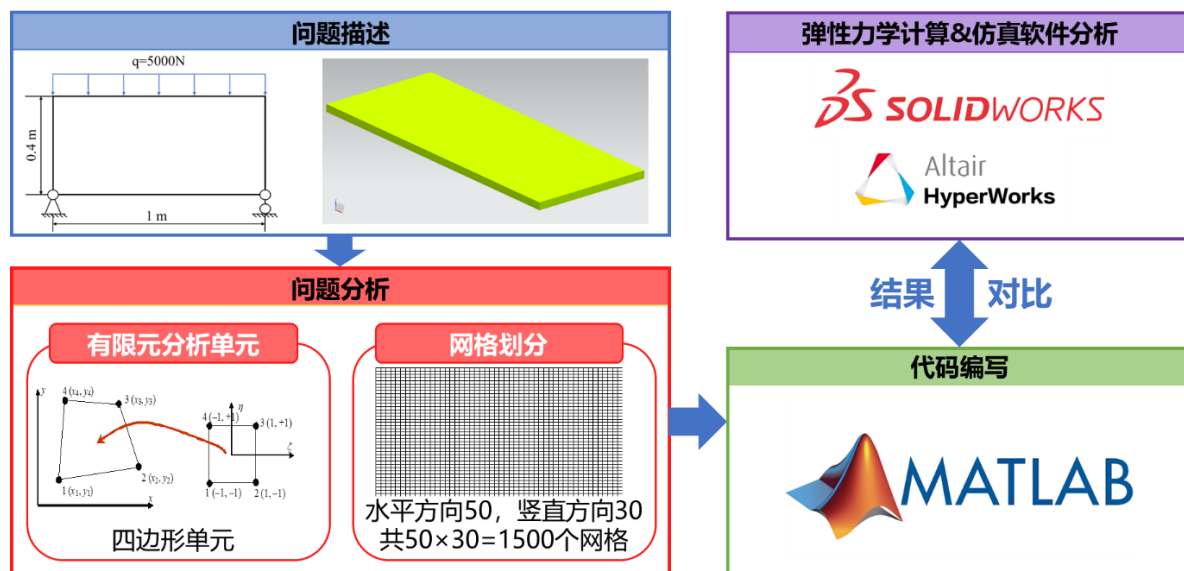


图 2 技术路线

首先针对需要进行有限元分析的对象，根据给定的形状、尺寸、约束、受力情况进行特征分析，方便后续的有限元方案确定。分析对象为一长 1m、宽 0.4m、厚 25mm 的矩形平板，长边底端的两个端点受到运动约束，顶端受到  $q=5000\text{N}$  的均布载荷。由其长、宽尺度为米而厚度为毫米，可将这矩形平板的有限元分析问题从三维问题近似为二维问题进行分析。此外其形状为规则的矩形，且受到均匀的载荷作用，适宜采用四边形单元进行分析，计算、网格划分简单。为使有限元分析结果更加精确，需要进行网格细分，计划将矩形划分为水平方向 51 个节点、竖直方向 41 个节点，共计  $50 \times 40 = 2000$  个单元。确定大致的划分方案后，采用 MATLAB 进行有限元分析代码编写，包含前处理、刚度矩阵计算以及后处理，得到矩形薄板的位移和应力分析结果。为验证有限元分析结果的准确性，根据弹性力学原理计算应力理论值并以此为参照计算误差，利用 HyperMesh 进行 1 : 1 建模以及有限元分析，将两者结果进行对比。



## 第3章 基础理论

### 3.1 有限元分析法

有限元法也叫有限单元法 (finite element method, FEM), 是随着电子计算机的发展而迅速发展起来的一种弹性力学问题的数值求解方法。五十年代初, 它首先应用于连续体力学领域——飞机结构静、动态特性分析中, 用以求得结构的变形、应力、固有频率以及振型。由于这种方法的有效性, 有限单元法的应用已从线性问题扩展到非线性问题, 分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料, 从连续体扩展到非连续体。有限元法中的相邻的小区域通过边界上的结点联接起来, 可以用一个简单的插值函数描述每个小区域内的变形和应力, 求解过程只需要计算出结点处的应力或者变形, 非结点处的应力或者变形是通过函数插值获得的, 换句话说, 有限元法并不求解区域内任意一点的变形或者应力。事实上, 当划分的区域足够小, 每个区域内的变形和应力总是趋于简单, 计算的结果也就越接近真实情况。理论上可以证明, 当单元数目足够多时, 有限单元解将收敛于问题的精确解, 但是计算量相应增大。为此, 实际工作中总是要在计算量和计算精度之间找到一个平衡点。

有限元法本质上是一种微分方程的数值求解方法, 认识到这一点以后, 从 70 年代开始, 有限元法的应用领域逐渐从固体力学领域扩展到其它需要求解微分方程的领域, 如流体力学、传热学、电磁学、声学等。有限元法作是一种数值计算的方法, 是一种近似解的求解方式。而大多数有限元程序都是以结点位移作为基本变量, 求出结点位移后再计算单元内的应力, 这种方法称为位移法。

首先, 我们面对的问题通常是这样的一种问题, 在对象的微元体中做分析, 依据一些物理规律或者力学原理会得出相应的关系式, 这种关系式一般会有两种情况, 一是得出一个偏微分方程, 即研究 PDE 在边界条件下的解答, 也就是边值问题; 二是得出一个泛函表达式, 在边界条件下去研究问题的极值问题。因此, 对于实际问题的研究就转化为数学上的研究, 即偏微分方程的边值问题和泛函极值; 对于 PDE 而言, 在较复杂的情况下是难以获得解析解的, 因此很有必要求解出一个可靠的近似解, 数值计算就体现出了价值。对于 PDE 来说, 可以利用有限差分法进行, 或者其他方法, 而泛函的求解除了经典的欧拉法外, 应用最多的就是泛函的直接法, 如 rizi 法, 将所求



的函数（称为场函数）用坐标系函数的线性组合来表示，然后带入到泛函中化简即可得到一个线性方程组，以此来完成求解。PDE 和泛函各自都是有近似法可以去解答的，但是关键的一点是，泛函和 PDE 之间是可以相互转化的，从数学的角度而言，PDE 所对应的泛函可以依据正定算子得到，泛函本身通过欧拉方程转化为 PDE 进行求解，结合物理意义而言这种数学上的转化就是我们说的一些泛函原理，如最小势能原理、虚功原理等。

### 3.2 网格划分

有限元网格划分的指导思想是首先进行总体模型规划，包括物理模型的构造、单元类型的选择、网格密度的确定等多方面的内容。在网格划分和初步求解时，做到先简单后复杂，先粗后精，2D 单元和 3D 单元合理搭配使用。为提高求解的效率要充分利用重复与对称等特征，由于工程结构一般具有重复对称或轴对称、镜象对称等特点，采用子结构或对称模型可以提高求解的效率和精度。同时选择合理的起点并设置合理的坐标系，可以提高求解的精度和效率，例如，轴对称场合多采用柱坐标系。有限元分析的精度和效率与单元的密度和几何形状有着密切的关系，按照相应的误差准则和网格疏密程度，避免网格的畸形。在网格重划分过程中常采用曲率控制、单元尺寸与数量控制、穿透控制等控制准则。

有限元网格划分方法有两种，对于简单的结构多采用直接建立单元模型的网格直接生成法，当对象比较复杂时多通过几何自动生成法完成，即在几何元素描述的物理基础上自动离散成有限单元。有限元单元可以按几何维数划分为一维、二维和三维单元，而在实际应用中采用拓扑结构单元，包括常用的质量单元、弹簧元、杆与梁管单元、平面三角形单元、平面四边形单元、膜单元、等参单元、壳单元和三维实体单元。

单元的质量和数量对求解结果和求解过程影响较大，如果结构单元全部由等边三角形、正方形、正四面体、立方六面体等单元构成，则求解精度可接近实际值，但由于这种理想情况在实际工程结构中很难做到。因此根据模型的不同特征，设计不同形状种类的网格，有助于改善网格的质量和求解精度。单元质量评价一般可采用以下几个指标：

- （1）单元的边长比、面积比或体积比以正三角形、正四面体、正六面体为参考基



准。理想单元的边长比为 1，可接受单元的边长比的范围线性单元长宽比小于 3，二次单元小于 10。对于同形态的单元，线性单元对边长比的敏感性较高阶单元高，非线性比线性分析更敏感。

(2) 扭曲度：单元面内的扭转和面外的翘曲程度。

(3) 疏密过渡：网格的疏密主要表现为应力梯度方向和横向过渡情况，应力集中的情况应妥善处理，而对于分析影响较小的局部特征应分析其情况，如外圆角的影响比内圆角的影响小的多。

(4) 节点编号排布：节点编号对于求解过程中的总体刚度矩阵的元素分布、分析耗时、内存及空间有一定的影响。合理的节点、单元编号有助于利用刚度矩阵对称、带状分布、稀疏矩阵等方法提高求解效率，同时要注意消除重复的节点和单元。

### 3.3 四边形单元

三节点三角形单元是常应变（常应力）单元，在应变梯度较大的部位（亦即应力梯度较大的部位），单元划分应适当密集，否则不能反映真实的应变变化而导致较大的误差，而采用四边形单元可以提高计算精度。等参变换是对单元的几何形状和单元内的场函数采用相同数目的结点参数及相同的插值函数进行变换，采用等参变换的单元称之为等参元。借助于等参元可以对于一般的任意几何形状的工程问题和物理问题方便地进行有限元离散，其优点有：对单元形状的适应性强；单元特性矩阵的积分求解方便（积分限标准化）；便于编制通用化程序。

四边形单元在自然坐标系下的 4 个形函数为：

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

对单元内的物理空间坐标  $(x, y)$  采用节点空间坐标进行插值得：

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (3.2)$$



由求导链式法则得物理坐标向参考坐标的坐标变化关系为：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i x_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i y_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i x_i}{\partial \eta} & \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i y_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

即雅可比矩阵为：

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

参考坐标向物理坐标的变化关系即雅可比逆矩阵为：

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

平行四边形微元由  $dx$  和  $dy$  向量构成，微元的面积为：

$$dxdy = dA = \det(dx \times dy) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{bmatrix} = J d\xi d\eta \quad (3.6)$$

B 矩阵由下式表示：

$$B = AG \quad (3.7)$$

其中：

$$A = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$





$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

矩阵 D 为:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

单元刚度矩阵为:

$$k = t \iint B^T D B dx dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B J d\xi d\eta \quad (3.11)$$

从而可以得到整体刚度矩阵 K。

施加边界条件后，得到修改后的平衡方程:

$$\tilde{K} U = F \quad (3.12)$$

通过求解平衡方程即可解出节点位移 U，把解出的 U 代入未修改的平衡方程，即可求得约束反力:

$$K U = F \quad (3.13)$$

从而可以求出每个单元的应力矢量:

$$\sigma = D B u \quad (3.14)$$



## 第4章 代码编写

为了解决简支梁在受到均布载荷后的位移和应力变化，在 MATLAB 上进行了程序代码的编写，详细代码见文件 FEMwu.m。

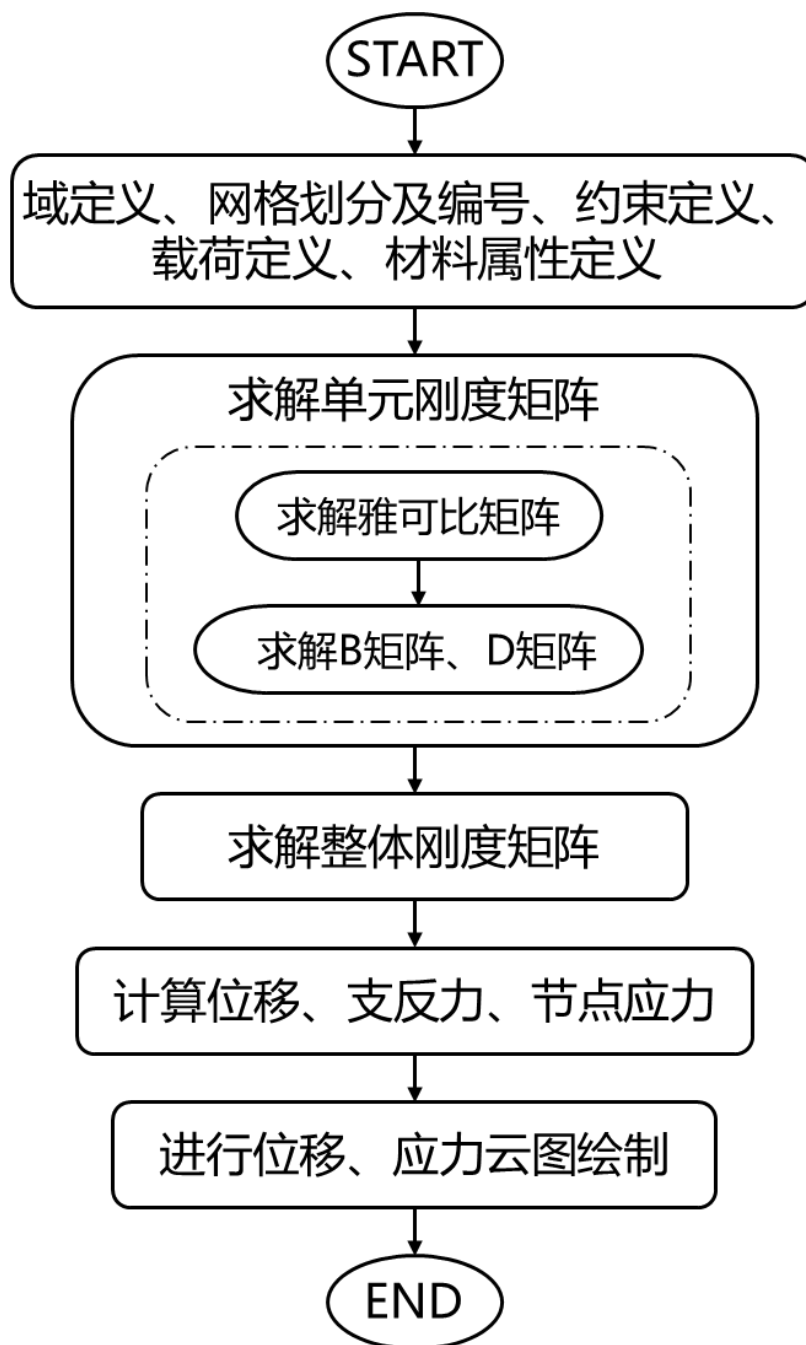


图 3 代码编写流程图



(1) 前处理：首先定义简支梁的长度和宽度，将悬臂梁在水平方向划分 51 个节点，竖直方向划分 41 个节点，即将悬臂梁划分成 2000 个单元，然后逆针对单元进行编号。接着对简支梁进行约束，根据虚功等效原理对简支梁进行载荷施加，对简支梁的泊松比、弹性模量和层厚进行定义，然后计算单元刚度矩阵。

(2) 刚度矩阵计算：首先计算雅可比矩阵  $J$ ，得到  $J_{11}$ ,  $J_{12}$ ,  $J_{21}$ ,  $J_{22}$ ，然后计算雅可比矩阵  $J$  的行列式  $|J|$ ，从而计算出  $B$  矩阵，计算出  $D$  矩阵，然后可以计算出单元刚度矩阵，使用循环计算出整体刚度矩阵。

(3) 后处理：根据前面的载荷条件计算每个单元的节点位移，计算支反力，然后计算出每个单元在  $x$  轴、 $y$  轴上的应力矢量。最后绘制位移及应力云图，首先提取  $x$ ,  $y$  方向的应力，位移分量，然后使用函数进行图像绘制，并且设计图像的透明度、网格线数量、图像颜色等参数控制图像展现效果。



## 第5章 结果分析

### 5.1 代码运行计算结果

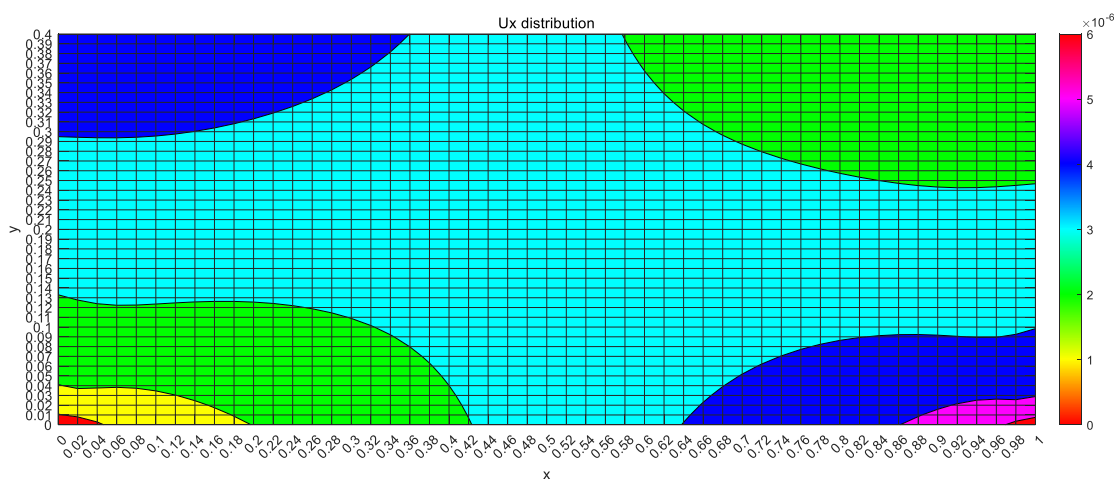


图 4 水平位移

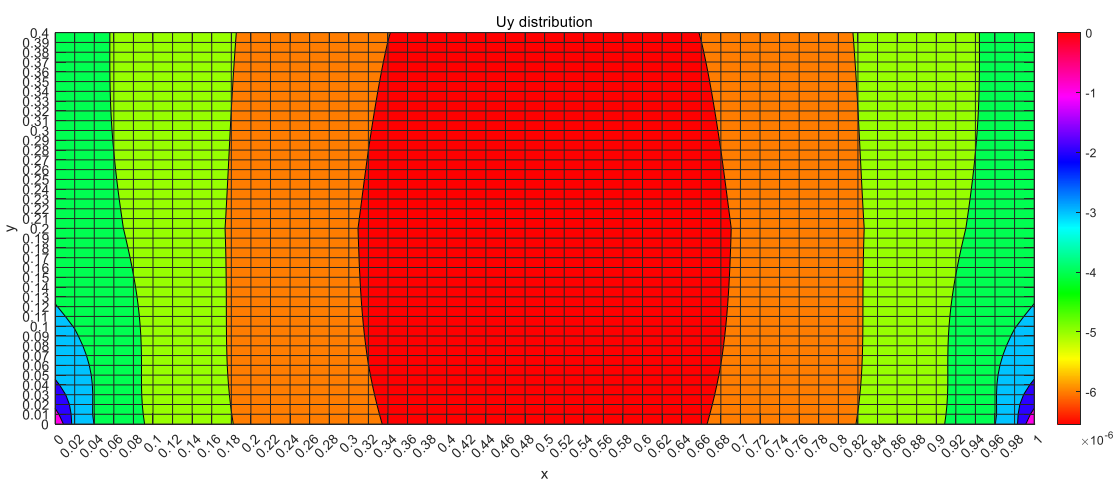


图 5 竖直位移

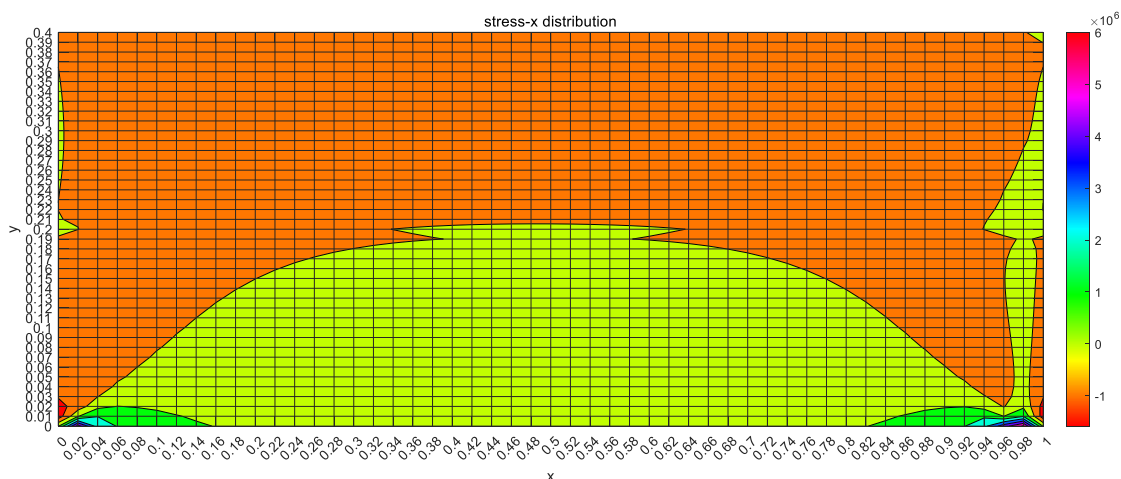


图 6 水平应力

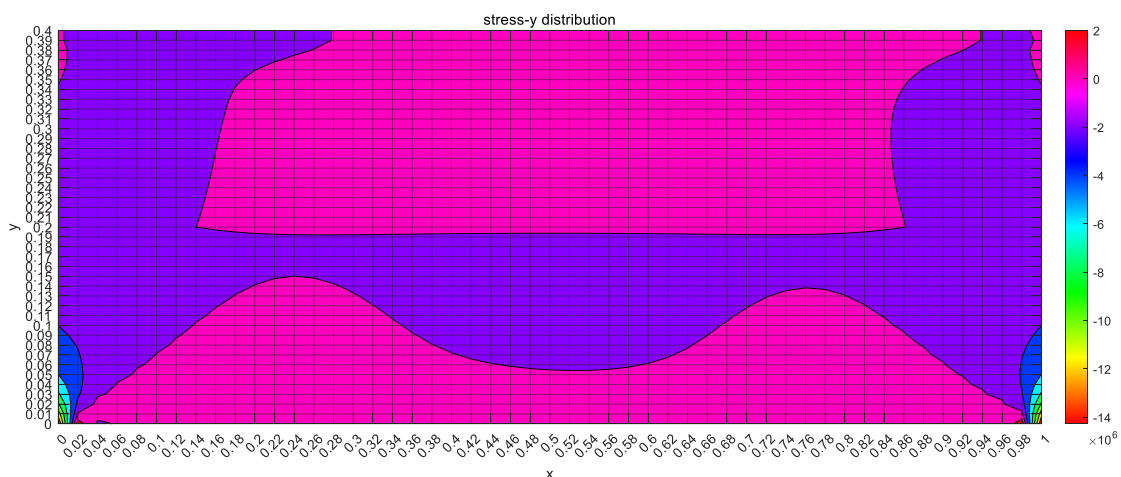


图 7 竖直应力

取简支梁中底端中点的  $x$  方向的应力进行分析，在 MATLAB 计算得到的数据中，底端中点的  $x$  方向的应力为  $9.25364 \times 10^5 \text{Pa}$

在数值计算中，由弹性力学可知应力的解析解为：

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y + q \frac{y}{h} \left( 4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right) \quad (5.1)$$

其中， $q = 5000 \text{N}$ ， $y = 0.2 \text{m}$ ， $h = 0.4 \text{m}$ ， $I = \frac{th^3}{12}$ ， $M = \frac{1}{8}ql^2$ ，带入计算得：

$$\sigma_x = 938500 \text{Pa}$$

误差为：

$$\frac{938500 - 925364}{938500} \times 100\% = 1.40\%$$

说明代码精度满足要求。



## 5.2 有限元软件分析结果对比

用仿真建模软件 SOLIDWORKS 搭建了对应的模型，并进行自由度约束与载荷施加，仿真应力应变，结果如下图所示。由图可以看出有限元计算结果与仿真结果相一致，计算结果得到验证。

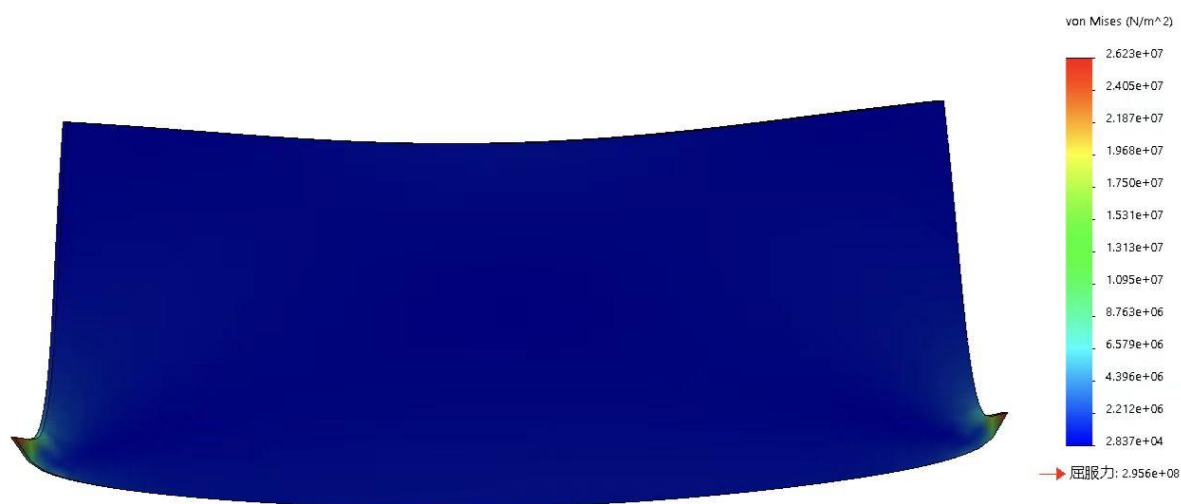


图 8 应力

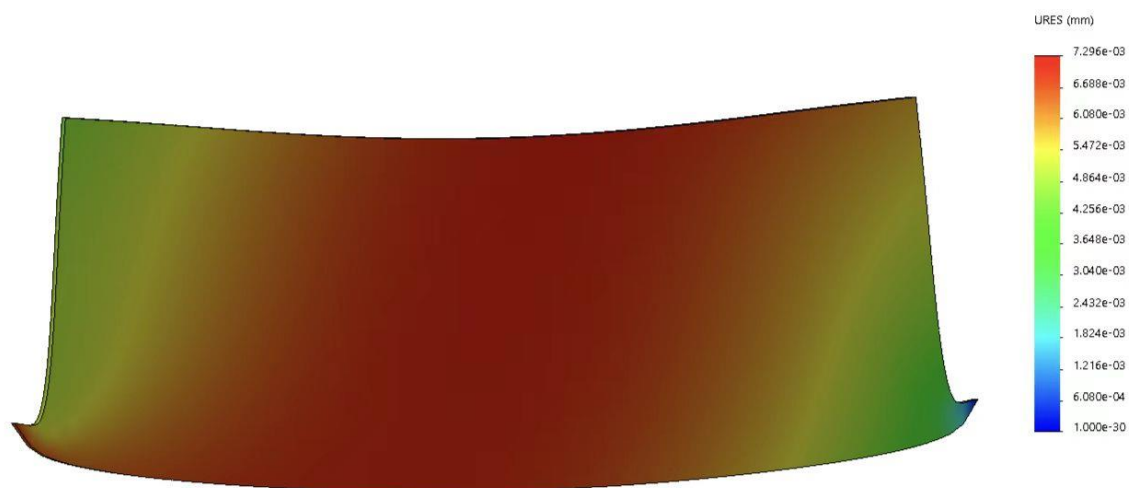


图 9 位移

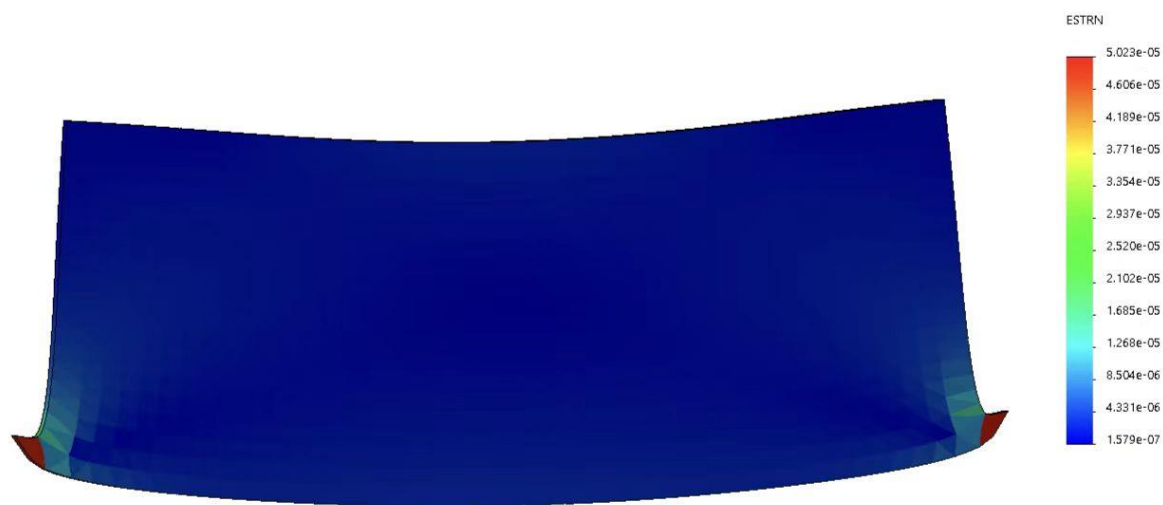


图 10 应变



## 第6章 全文总结与感想

本文运用有限元方法对矩形薄板进行了应力应变分析。采用四边形单元经进行网格划分，横向 51 个节点，垂向 41 个节点，共 2000 个单元。运用 MATLAB 进行有限元方法编程，实现前处理网格划分、节点编号；求解单元的雅可比矩阵、B 矩阵、D 矩阵，计算得到单元的刚度矩阵，进而组装得到整体的刚度矩阵。利用整体刚度矩阵以及给定的材料参数计算薄板的应力与应变，并将计算结果绘制云图可视化。为验证计算结果的准确性，计算弹性力学理论应变值作为参考，计算得到程序运行结果误差为 1.40%。此外还应用仿真建模软件进行 1:1 建模，还原其约束以及受载情况，仿真得到应力应变结果，与有限元方法编写程序分析的结果对比，两者图像相一致。

本学期学习了有限元方法这门课程，有幸可以深入了解“有限元”这个熟悉又陌生的学科。通过有限元课程的学习，我体会到了有限元的核心思想——离散。化整为零，只要足够细分，有限元分析的结果就能真实反映真实结果，但是其中还有准确性与效率之间的权衡。相比一些具体的代码，我觉得更重要的是有限元这种分析问题的思路，大道至简，基础的原理方法是上层复杂体系的基石。这启发我在今后学习研究过程中要从基本的原理思路入手，化繁为简，不将复简单的问题复杂化，权衡精度与效率。

此外通过运用有限元方法解决问题，我有了许多编写程序的锻炼机会。在实践过程中我对 MATLAB 更加熟悉、编写程序更加熟练，在编写程序前最重要的是抓住其中的逻辑关系。道阻且长，我还需要多多学习、练习！