湖南大學
HUNAN UNIVERSITY

# 有限元方法及应用

| | |
|---|---|
| 设计题目: | Matlab 有限元程序设计 |
| 学生姓名: | 叶梦影 |
| 学　　号: | S230200221 |
| 专　　业: | 机械工程 |
| 任课教师: | 王琥 |

2023 年 1 月 27 日

# 目 录

# 1.4 节点六面体单元程序设计

## 1.1 问题描述

如图 1-1 所示，一个正方形薄板，边长为 $l$=4$m$，厚度为 0.1$m$，弹性模量 E=7×$10^{10}$Pa，泊松比$\mu$=0.33，右方受均布载荷 $q_0$=100KN/m，左方固定，计算各个节点的 $x$ 方向、$y$ 方向位移与节点应力。

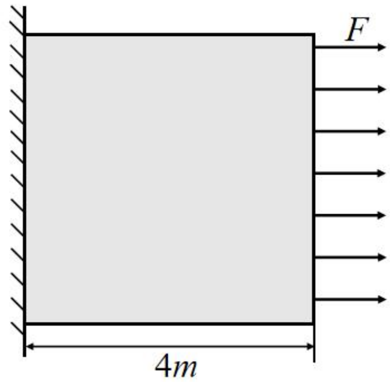



图 1-1 正方形薄板

## 1.2 问题求解

### 1.2.1 平面 4 节点矩形单元描述

在平面四节点矩形单元中，其有两个位移分量，节点条件共有 8 个，即 $x$ 方向 4 个($u_1,u_2,u_3,u_4$)，$y$ 方向 4 个($v_1,v_2,v_3,v_4$)，如图 1-2 所示。

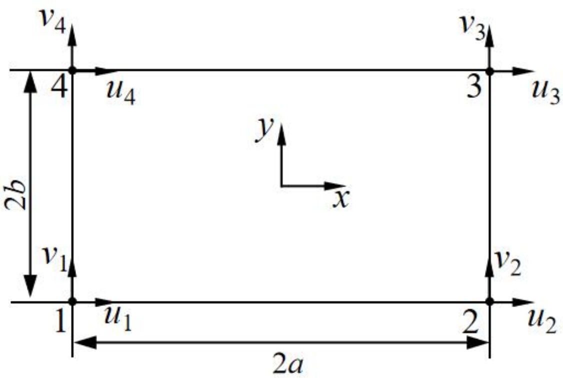



图 1-2 平面四节点矩形单元

因此，$x$ 和 $y$ 方向的位移场可以各有 4 个待定系数，即取以下多项式作为单元的位移场模式：

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= a_0 + a_1 y + a_2 y + a_3 xy \\ v(x,y) &= b_0 + b_1 y + b_2 y + b_3 xy \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

由节点条件，在 $x=x_i$，$y=y_i$ 处，有

$$\left.\begin{aligned} u(x_i,y_i) &= u_i \\ v(x_i,y_i) &= v_i \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,3,4 \tag{1-2}$$

将式(1-2)代入式(1-1)中，可以求解出待定系数 $a_0$，…，$a_3$ 和 $b_0$，…，$b_3$，然后再代回式(1-1) 中，经整理后有

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= N_1(x,y)u_1 + N_2(x,y)u_2 + N_3(x,y)u_3 + N_4(x,y)u_4 \\ v(x,y) &= N_1(x,y)v_1 + N_2(x,y)v_2 + N_3(x,y)v_3 + N_4(x,y)v_4 \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

形函数表达式

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b})$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b})$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b})$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b})$$

将 1-3 写成矩阵形式，有

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \underset{(2\times8)}{N} \cdot \underset{(8\times1)}{q}^{e} \tag{1-4}$$

有弹性力学平面问题的几何方程，可的单元应变的表达式

$$\underset{(3\times1)}{\varepsilon}(x,y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underset{(3\times2)}{\left[\partial\right]} \underset{(2\times1)}{\mathbf{u}} = \underset{(3\times2)}{\left[\partial\right]} \underset{(2\times8)}{\mathbf{N}} \cdot \underset{(8\times1)}{\mathbf{q}^{e}} = \underset{(3\times8)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(8\times1)}{\mathbf{q}^{e}} \tag{1-5}$$

其中几何矩阵 $\mathbf{B}(x,y)$ 为

$$\underset{(3\times8)}{\mathbf{B}}(x,y)=\underset{(3\times2)}{[\partial]}\underset{(2\times8)}{\mathbf{N}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\underset{(3\times2)}{\mathbf{B}_1} & \underset{(3\times2)}{\mathbf{B}_2} & \underset{(3\times2)}{\mathbf{B}_3} & \underset{(3\times2)}{\mathbf{B}_4}\end{bmatrix} \tag{1-6}$$

式(1-6)中的子矩阵 $\mathbf{B}_i$ 为

$$\underset{(3\times2)}{\mathbf{B}_i}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix},\qquad i=1,2,3,4 \tag{1-7}$$

则平面四节点矩形单元的单元刚度矩阵为：

$$\underset{(8\times8)}{\mathbf{K}}=\int_{A^e}\underset{(3\times8)}{\mathbf{B}^T}\underset{(3\times3)}{\mathbf{D}}\cdot\underset{(3\times3)}{\mathbf{B}}\,dA\cdot t=\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{11} & & & \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & & \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} & \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} & \mathbf{k}_{44}\end{bmatrix} \tag{1-8}$$

其中 $t$ 为平面问题的厚度，式(1-8)中的各个子块矩阵为

$$\underset{(2\times2)}{\mathbf{k}_{rs}}=\int_{A^e}\underset{(3\times8)}{\mathbf{B}_r^T}\underset{(3\times3)}{\mathbf{D}}\underset{(3\times3)}{\mathbf{B}_s}\,tdxdy,\qquad r,s=1,2,3,4 \tag{1-9}$$

### 1.2.2 结构的离散化与编号

该空间块体结构的厚度较小，可对其进行平面分析。首先将其结构离散为 4×4=16 个四边形单元。每个单元有 4 个节点，一共有 25 个节点。黑色数字代表节点，带圈序号代表单元，单元的编号以及节点编号如图 1-3 所示。各单元节点编号及坐标如表 1-1 所示。

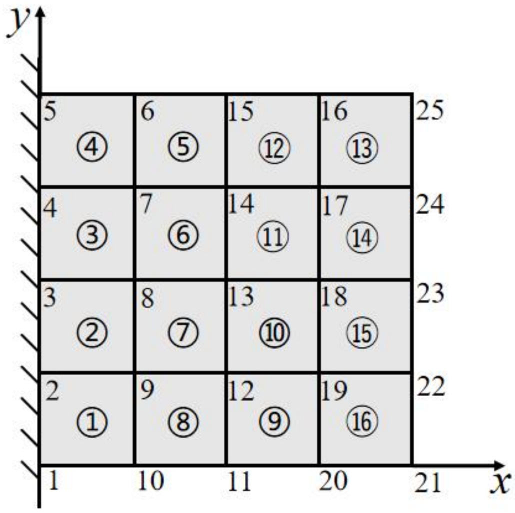



图 1-3 离散单元

表 1-1 各单元节点编号及节点坐标

| 单元号 | 节点号 | 节点坐标 |
|---|---|---|
| 1 | 1 10 9 2 | (0,0) (1,0) (1,1) (0,1) |
| 2 | 2 9 8 3 | (0,1) (1,1) (1,2) (0,2) |
| 3 | 3 8 7 4 | (0,2) (1,2) (1,3) (0,3) |
| 4 | 4 7 5 6 | (0,3) (1,3) (1,4) (0,4) |
| 5 | 7 14 15 6 | (1,3) (2,3) (2,4) (1,4) |
| 6 | 8 13 14 7 | (1,2) (2,2) (2,3) (1,3) |
| 7 | 9 12 13 8 | (1,1) (2,1) (1,2) (2,2) |
| 8 | 10 11 12 9 | (1,0) (2,0) (2,1) (1,1) |
| 9 | 11 20 19 12 | (2,0) (3,0) (3,1) (2,1) |
| 10 | 12 19 18 13 | (2,1) (3,1) (3,2) (2,2) |
| 11 | 13 18 17 14 | (2,2) (3,2) (3,3) (2,3) |
| 12 | 14 17 16 15 | (2,3) (3,3) (3,4) (2,4) |
| 13 | 17 24 25 16 | (3,3) (4,3) (4,4) (3,4) |
| 14 | 18 23 24 17 | (3,2) (4,2) (4,3) (3,3) |
| 15 | 19 22 23 18 | (3,1) (4,1) (4,2) (3,2) |
| 16 | 20 21 22 19 | (3,0) (4,0) (4,1) (3,1) |

节点位移列阵

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & \ldots\ldots & u_{25} & v_{25} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

节点外载荷列阵

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} & \mathbf{F}_{24} & \mathbf{F}_{25} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\mathbf{F}_{22} = \mathbf{F}_{23} = \mathbf{F}_{24} = \begin{bmatrix} \dfrac{ql}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{22} = \mathbf{F}_{23} = \mathbf{F}_{24} = \begin{bmatrix} \dfrac{ql}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

约束的支反力列阵

$$\underset{(24\times1)}{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^T & \mathbf{R}_2^T & \mathbf{R}_3^T & \mathbf{R}_4^T & \mathbf{R}_5^T & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T$$

其中

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3,4,5$$

总的节点载荷矩阵

$$\underset{(24\times1)}{\mathbf{P}} = \mathbf{F} + \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^T & \mathbf{R}_2^T & \mathbf{R}_3^T & \mathbf{R}_4^T & \mathbf{R}_5^T & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} & \mathbf{F}_{24} & \mathbf{F}_{25} \end{bmatrix}^T$$

## 1.3　*Matlab* 有限元分析

### 1.3.1 计算单元刚度矩阵

首先在 Main 函数中，输入弹性模量 E、泊松比μ，然后针对各节点单元，分别 16 次调用 Quad2D4Node_Stiffness 函数就可以得到单元的刚度矩阵 k1(6×6)～k16(6×6)。

```
k1 = Quad2D4Node_Stiffness(E, NU, h, x1, y1, x10, y10, x9, y9, x2, y2);
k2 = Quad2D4Node_Stiffness(E, NU, h, x2, y2, x9, y9, x8, y8, x3, y3);
k3 = Quad2D4Node_Stiffness(E, NU, h, x3, y3, x8, y8, x7, y7, x4, y4);
⋮
k16 = Quad2D4Node_Stiffness(E, NU, h, x20, y20, x21, y21, x22, y22,
x19, y19);
```

### 1.3.2 计算整体刚度矩阵

由于该结构共有 25 个节点，则总共的自由度数为 50，因此，结构总的刚度矩阵为 KK(50×50)，首先对 KK 清零，然后分别调用 16 次组装函数 Quad2D4Node_Assembly 进行单元刚度矩阵的组装。

```
KK = zeros(50,50);
KK = Quad2D4Node_Assembly(KK, k1, 1, 10, 9, 2);
```

```
KK = Quad2D4Node_Assembly(KK, k2, 2, 9, 8, 3);
⋮
KK = Quad2D4Node_Assembly(KK, k16, 20, 25, 24, 19);
```

### 1.3.3 边界条件的处理及各节点位移求解

由图 1-3 离散单元图可以看出，节点 1、2、3、4、5 处为固定约束，故其在 $x$，$y$ 方向上的位移将为零，即

$$u_1=v_1=u_2=v_2=u_3=v_3=u_4=v_4=u_5=v_5=0$$

故需将 1 到 10 行、1 到 10 列删掉，将其余节点生成对应的载荷列阵 p，再采用高斯消去法进行求解，结果 $u$ 为位移。通过 Matlab 程序，计算出其余各节点的位移，如表 1-2 所示。

表 1-2 其余各点的位移(6~16)

| 节点 | 位移（$m$） | |
|---|---|---|
| | $u(10^{-4})$ | $v(10^{-4})$ |
| 6 | 0.1499 | -0.0757 |
| 7 | 0.1285 | -0.0307 |
| 8 | 0.1273 | -0.0000 |
| 9 | 0.1285 | 0.0307 |
| 10 | 0.1499 | 0.0757 |
| 11 | 0.2843 | 0.0918 |
| 12 | 0.2732 | 0.0465 |
| 13 | 0.2680 | -0.0000 |
| 14 | 0.2732 | -0.0465 |
| 15 | 0.2843 | -0.0918 |
| 16 | 0.4220 | -0.0961 |
| 17 | 0.4170 | -0.0488 |
| 18 | 0.4139 | -0.0000 |
| 19 | 0.4170 | 0.0488 |
| 20 | 0.4220 | 0.0961 |
| 21 | 0.5638 | 0.0982 |
| 22 | 0.5605 | 0.0502 |
| 23 | 0.5584 | -0.0000 |
| 24 | 0.5605 | -0.0502 |
| 25 | 0.5638 | -0.0982 |

### 1.3.4 各单元节点应力计算

首先构造先从整体位移列阵U，然后用整体刚度矩阵乘以 U 即可得到各节点应力矩阵P。

U=[0;0;0;u(1:24);0;0;0;0;0;0;u(25:48);0;0;0;0;0;0;0;u(49:72);0;0;0];

P = KK*U

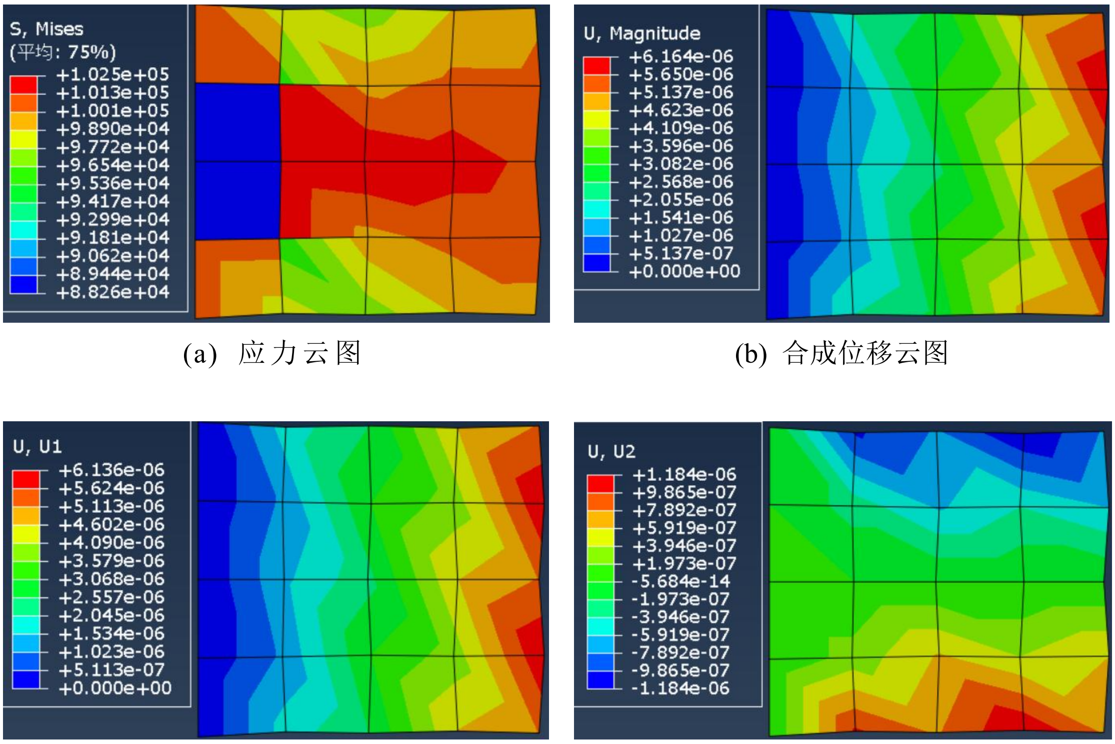
在Matlab中计算出六面体单元各节点应力分量，如表1-3所示。

表1-3 六面体各节点应力分量

| 节点 | 应力(Pa) | |
|---|---|---|
| | $\sigma_x(10^5)$ | $\sigma_y(10^5)$ |
| 1 | -0.5922 | -0.1873 |
| 2 | -0.9458 | -0.0763 |
| 3 | -0.9240 | 0.0000 |
| 4 | -0.9458 | 0.0763 |
| 5 | -0.5922 | 0.1873 |
| 6 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7 | -0.0000 | -0.0000 |
| 8 | -0.0000 | 0.0000 |
| 9 | -0.0000 | -0.0000 |
| 10 | -0.0000 | 0.0000 |
| 11 | -0.0000 | -0.0000 |
| 12 | -0.0000 | 0.0000 |
| 13 | -0.0000 | -0.0000 |
| 14 | -0.0000 | -0.0000 |
| 15 | -0.0000 | -0.0000 |
| 16 | -0.0000 | 0.0000 |
| 17 | -0.0000 | 0.0000 |
| 18 | -0.0000 | -0.0000 |
| 19 | 0.0000 | 0.0000 |
| 20 | 0.0000 | 0.0000 |
| 21 | 0.5000 | 0.0000 |
| 22 | 1.0000 | -0.0000 |
| 23 | 1.0000 | 0.0000 |
| 24 | 1.0000 | -0.0000 |
| 25 | 0.5000 | -0.0000 |

## 1.4 Abaqus 建模仿真

通过使用*Abaqus*建模软件进行有限元分析，可得到应力云图、合成位移云图、$x$方向位移云图和$y$方向位移云图如图1-4所示。



(a) 应力云图　　(b) 合成位移云图

(c) *x* 方向位移云图　　(d) *y* 方向位移云图

图 1-4 *abqus* 仿真云图

*x* 方向位移误差：

$$\frac{0.6136-0.5638}{0.6136}=0.081=8.1\%$$

*y* 方向位移误差：

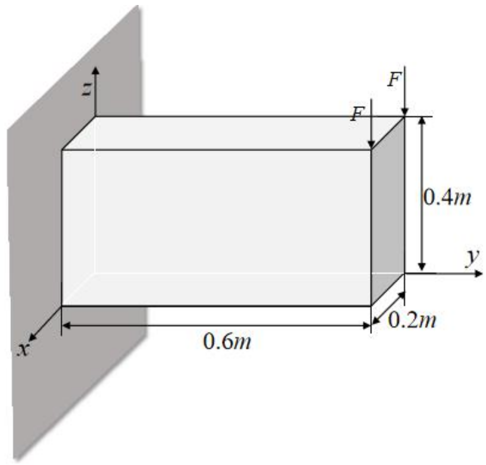
$$\frac{0.1184-0.0982}{0.1184}=0.1706=17.06\%$$

通过 Abaqus 建模分析，进行输出数据结果比对，应力，*x*、*y* 方向位移云图和合成位移云图所展示数据与 Matlab 程序所运算数据大致相符，数量级上保持一致，仍具有一定误差。

# 2. 8 节点六面体单元程序设计

## 2.1 问题描述

如图 1-1 所示，一个空间长方形实体，受到右上角集中力 $F$ 作用。已知外力 $F$=1000$N$、 弹性模量 $E=7\times10^{10}$、泊松比$\mu$=0.33，长方体的长、宽、厚依次为 0.6$m$、0.4$m$、0.2$m$， 蓝色实体部分为固定约束。计算各个节点的 $x$ 方向、$y$ 方向位移与节点应力。




2-1 长方形实体

## 2.2 问题求解

### 2.2.1 空间 8 节点六面体单元描述

图 2-2 为由 8 节点组成的正六面体单元，每个节点有 3 个位移(即 3 个自由度)。

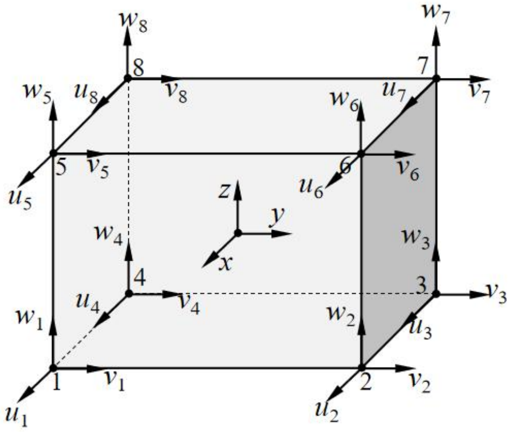


图 2-2 八节点矩形单元

该单元的节点位移共有 24 个自由度(DOF)。单元的节点位移列阵 $\mathbf{q}^e$ 和节点力列阵为 $\mathbf{P}^e$

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & \ldots\ldots u_8 & v_8 & w_8 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} p_{x1} & p_{y1} & p_{z1} & p_{x2} & p_{y2} & p_{z2} & \ldots\ldots p_{x8} & p_{y8} & p_{z8} \end{bmatrix}^T$$

该单元的位移模式为

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 yz + a_6 zx + a_7 xyz \\ v(x,y,z) &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 xy + b_5 yz + b_6 zx + b_7 xyz \\ w(x,y,z) &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 xy + c_5 yz + c_6 zx + c_7 xyz \end{aligned}\right\}$$

形函数矩阵:

$$\underset{(3\times1)}{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \ldots\ldots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \ldots\ldots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \ldots\ldots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}^e$$

$$= \underset{(3\times24)}{\mathbf{N}} \cdot \underset{(24\times1)}{\mathbf{q}^e}$$

由弹性力学平面问题的几何方程(矩阵形式)，有单元应变的表达

$$\underset{(6\times1)}{\varepsilon}(x,y,z) = \underset{(6\times3)}{[\partial]} \underset{(3\times1)}{\mathbf{u}} = \underset{(6\times3)}{[\partial]} \underset{(3\times24)}{\mathbf{N}} \cdot \underset{(24\times1)}{\mathbf{q}^e} = \underset{(6\times24)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(24\times1)}{\mathbf{q}^e}$$

由弹性力学中平面问题的物理方程，可得到单元的应力表达，然后计算单元的势能，可以得到单元的刚度矩阵及等效节点载荷矩阵为

$$\underset{(24\times24)}{\mathbf{K}^e} = \int_{\Omega^e} \underset{(24\times6)}{\mathbf{B}^T} \underset{(6\times6)}{\mathbf{D}} \cdot \underset{(6\times24)}{\mathbf{B}} \, d\Omega$$

$$\underset{(24\times24)}{\mathbf{P}^e} = \int_{\Omega^e} \underset{(24\times3)}{\mathbf{N}^T} \underset{(3\times1)}{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{S_p^e} \underset{(24\times3)}{\mathbf{N}^T} \underset{(3\times1)}{\mathbf{p}} \, dA$$

单元的刚度方程

$$\underset{(24\times24)}{\mathbf{K}^e} \underset{(24\times1)}{\mathbf{q}^e} = \underset{(24\times1)}{\mathbf{P}^e}$$

### 2.2.2 结构的离散化与编号

首先将其结构离散成 3*2*1=6 个 6 节点六面体单元，共有 30 个节点，如图 2-1 所示，黑色数 字代表节点，深色带圈序号代表单元号。各单元节点编号如表 1-1 所示，节点坐标如表 1-2 所示。

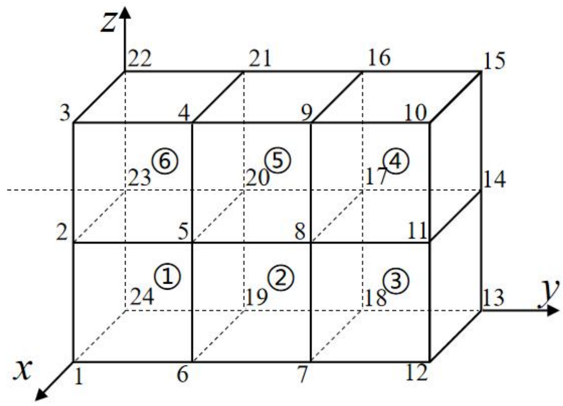



图 2-3 离散单元

表 2-1 各单元节点编号

| 单元号 | 节点号 |
|---|---|
| 1 | 1 6 19 24 2 5 20 23 |
| 2 | 6 7 18 19 5 8 17 20 |
| 3 | 7 12 13 18 8 11 14 17 |
| 4 | 8 11 14 17 9 10 15 16 |
| 5 | 5 8 17 20 4 9 16 21 |
| 6 | 2 5 20 23 3 4 21 22 |

表 2-2 各节点坐标

| 节点 | 坐标(*m*) | | |
|---|---|---|---|
| | *x* | *y* | *z* |
| 1 | 0.2 | 0 | 0 |
| 2 | 0.2 | 0 | 0.2 |
| 3 | 0.2 | 0 | 0.4 |
| 4 | 0.2 | 0.2 | 0.4 |
| 5 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |
| 6 | 0.2 | 0.2 | 0 |
| 7 | 0.2 | 0.4 | 0 |
| 8 | 0.2 | 0.4 | 0.2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 0.2 | 0.4 | 0.4 |
| 10 | 0.2 | 0.6 | 0.4 |
| 11 | 0.2 | 0.6 | 0.2 |
| 12 | 0.2 | 0.6 | 0 |
| 13 | 0 | 0.6 | 0 |
| 14 | 0 | 0.6 | 0.2 |
| 15 | 0 | 0.6 | 0.4 |
| 16 | 0 | 0.4 | 0.4 |
| 17 | 0 | 0.4 | 0.2 |
| 18 | 0 | 0.4 | 0 |
| 19 | 0 | 0.2 | 0 |
| 20 | 0 | 0.2 | 0.2 |
| 21 | 0 | 0.2 | 0.4 |
| 22 | 0 | 0 | 0.4 |
| 23 | 0 | 0 | 0.2 |
| 24 | 0 | 0 | 0 |

其中节点位移列阵

$$\underset{(72\times1)}{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & \ldots\ldots & u_{24} & v_{24} & w_{24} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

节点外载荷列阵

$$\underset{(72\times1)}{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & F_{10} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & F_{15} & 0 & 0 & 0 & \ldots & \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

## 2.3 *Matlab* 有限元分析

### 2.3.1 计算单元刚度矩阵

首先在 *MATLAB* 环境下，输入弹性模量 E、泊松比$\mu$，然后针对题中单元节点坐标，调用 6 次 Hexahedral3D8Node_Stiffness 函数，就可以得到单元的刚度矩阵 k1(24×24)~k8(24×24)。

k1=Hexahedral3D8Node_Stiffness(E,NU,x1,y1,z1,x6,y6,z6,x19,y19,z19,x24,y24,z24,x2,y2,z2,x5,y5,z5,x20,y20,z20,x23,y23,z23);

k2=Hexahedral3D8Node_Stiffness(E,NU,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x18,y18,z18,x19,y19,z19,x5,y5,z5,x8,y8,z8,x17,y17,z17,x20,y20,z20);

k3=Hexahedral3D8Node_Stiffness(E,NU,x7,y7,z7,x12,y12,z12,x13,y13,z13,x18,y18,z18,x8,y8,z8,x11,y11,z11,x14,y14,z14,x17,y17,z17);

k4=Hexahedral3D8Node_Stiffness(E,NU,x8,y8,z8,x11,y11,z11,x14,y14,z14,x17,y17,z17,x9,y9,z9,x10,y10,z10,x15,y15,z15,x16,y16,z16);

k5=Hexahedral3D8Node_Stiffness(E,NU,x5,y5,z5,x8,y8,z8,x17,y17,z17,x20,y20,z20,x4,y4,z4,x9,y9,z9,x16,y16,z16,x21,y21,z21);
k6=Hexahedral3D8Node_Stiffness(E,NU,x2,y2,z2,x5,y5,z5,x20,y20,z20,x23,y23,z23,x3,y3,z3,x4,y4,z4,x21,y21,z21,x22,y22,z22);

### 2.3.2 建立整体刚度方程

由于该结构共有24个节点，则总共的自由度数为72，因此，结构总的刚度矩阵为KK(72×72)，先对KK清零，然后分别调用6次Hexahedral3D8Node_Assembly函数，进行刚度矩阵的组装。

调用函数的过程如下：

```
KK=zeros(90,90);
KK=Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k1,1,6,19,24,2,5,20,23);
KK=Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k2,6,7,18,19,5,8,17,20);
KK=Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k3,7,12,13,18,8,11,14,17);
KK=Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k4,8,11,14,17,9,10,15,16);
KK=Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k5,5,8,17,20,4,9,16,21);
KK=Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k6,2,5,20,23,3,4,21,22);
```

### 2.3.3 边界条件的处理及节点求解

由图2-2可以看出由节点1、节点2、节点3、节点22、节点23和节点24均为固定约束，其三个方向的位移将为零，即：

$$u_1=v_1=w_1=u_2=v_2=w_2=u_3=v_3=w_3=u_{22}=v_{22}=w_{22}$$

$$=u_{23}=v_{23}=w_{23}=u_{24}=v_{24}=w_{24}$$

故，需从KK（72×72）中删除1到9列、1到9行，64到72列、64到72行，将其余节点生成对应的载荷列阵p，再采用高斯消去法进行求解，结果$u$为位移。由Matlab计算出的其余各节点位移如表2-3所示。

表2-3 其余各点的位移(4~21)

| 节点 | 位移（$m$） | | |
|---|---|---|---|
| | $u(10^{-5})$ | $v(10^{-5})$ | $w(10^{-5})$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | -0.0358 | 0.0490 | -0.0285 |
| 5 | 0.0001 | -0.0003 | -0.0201 |
| 6 | 0.0357 | -0.0488 | -0.0292 |
| 7 | 0.0634 | -0.0773 | -0.0843 |
| 8 | 0.0008 | -0.0010 | -0.0822 |
| 9 | -0.0657 | 0.0790 | -0.0844 |
| 10 | -0.0936 | 0.0865 | -0.1483 |
| 11 | 0.0095 | -0.0029 | -0.1533 |
| 12 | 0.0908 | -0.0867 | -0.1601 |
| 13 | 0.0854 | -0.0652 | -0.2359 |
| 14 | 0.0062 | -0.0009 | -0.2581 |
| 15 | -0.0938 | 0.0789 | -0.2831 |
| 16 | -0.0591 | 0.0616 | -0.1429 |
| 17 | 0.0007 | -0.0016 | -0.1412 |
| 18 | 0.0584 | -0.0593 | -0.1456 |
| 19 | 0.0197 | -0.0318 | -0.0569 |
| 20 | -0.0001 | 0.0001 | -0.0508 |
| 21 | -0.0193 | 0.0316 | -0.0569 |

### 2.3.4 各单元节点应力计算

首先构造先从整体位移列阵 U，然后用整体刚度矩阵乘以 U 即可得到各节点应力矩阵 P。

U=[0;0;0;u(1:24);0;0;0;0;0;0;u(25:48);0;0;0;0;0;0;0;u(49:72);0;0;0];

P = KK*U

在 Matlab 中计算出六面体单元各节点应力分量，如表 2-4 所示。

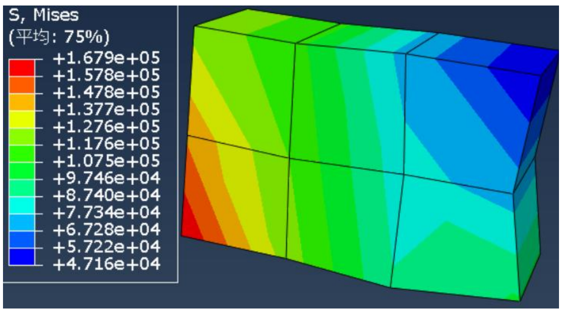
表 2-4 六面体各节点应力分量

| 节点 | 应力(MPa) | | |
|---|---|---|---|
| | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\sigma_z$ |
| 1 | -0.6234 | 1.7109 | 0.5357 |
| 2 | 0.0013 | -0.050 | -0.3753 |
| 3 | 0.6224 | -1.7059 | 0.5374 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5 | -0.0000 | 0.0000 | -0.0000 |
| 6 | -0.0000 | -0.0000 | -0.0000 |
| 7 | -0.0000 | -0.0000 | 0.0000 |

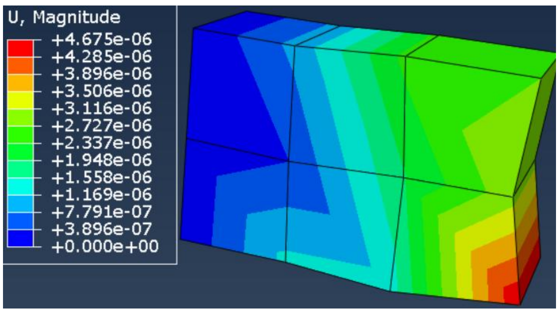
| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | -0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9 | -0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10 | -0.0000 | -0.0000 | 0.0000 |
| 11 | -0.0000 | -0.0000 | -0.0000 |
| 12 | -0.0000 | 0.0000 | -0.0000 |
| 13 | - 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 15 | -0.0000 | -0.0000 | 0.0000 |
| 16 | 0.0000 | -0.0000 | -0.0000 |
| 17 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000 |
| 18 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000 |
| 19 | -0.2727 | -1.2904 | 0.6303 |
| 20 | -0.0029 | -0.0024 | 0.0388 |
| 21 | 0.2754 | 1.2928 | 0.6331 |

## 2.4 *Abaqus* 建模仿真

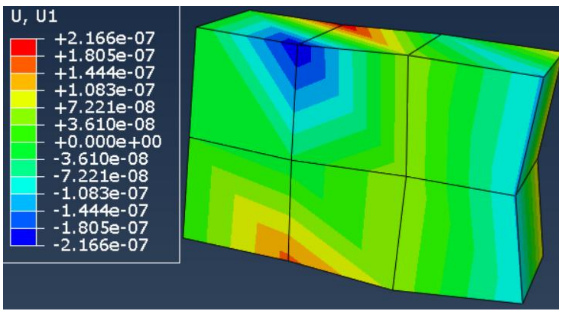
通过使用 *Abaqus* 建模软件进行有限元分析，可得到应力云图、合成位移云图、*x* 方向位移云图、*y* 方向位移云图和 *z* 方向位移云图如图 2-4 所示。



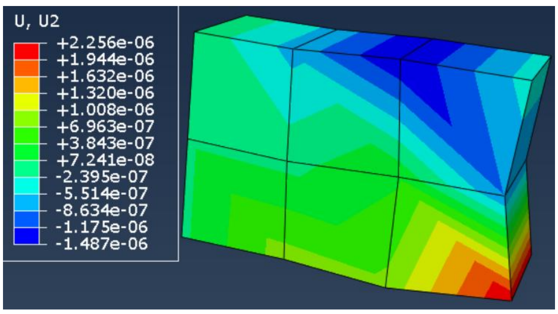

(a) 应力云图




(b) 合成位移云图




(c) *x* 方向位移云图




(d) *y* 方向位移云

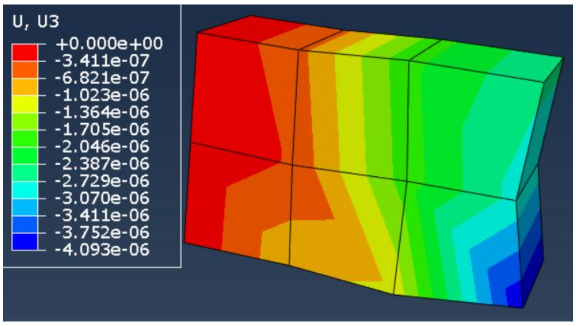



图 2-4 *abqus* 仿真云图

通过 Abaqus 建模分析，进行输出数据结果比对。整体数据与程序运算所得数据变化趋势一致，数量级上基本保持一致，可能是由于网格单元划分过少，导致仿真的结果与基本实事存在一定差距。