HUNAN UNIVERSITY

有限元方法及应用大作业

学院名称：	机械与运载工程学院
专业名称：	机械工程
学生姓名：	刘黎阳
学　　号：	S230200169
任课教师	王琥

2024 年 1 月 10 日

目录

第 1 章　问题描述

本文基于流体有限元方法，对简单的平面流体现象进行数值模拟。

问题分析：一凸形流动倾斜平板，平板内牛顿流体缓慢流动，右端出口压力为 0，同时左端设置压力入口，边界条件为 1000pa，下表面沿 x 轴方向作向右平移运动，移动速度 0.01m/s，上表面固定，流体粘度设置为 1000pa*s。通过仿真分析 X 方向速度、Y 方向速度及所受压力。

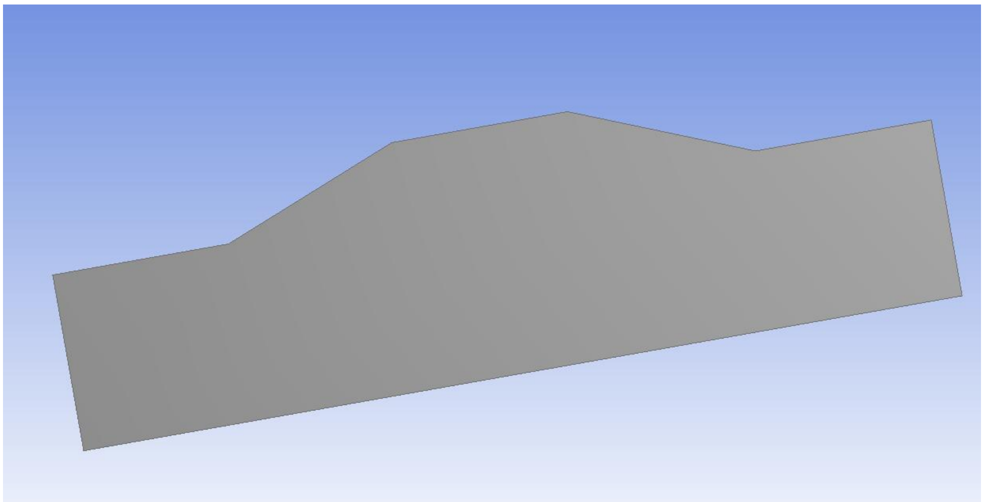

图 1.1 流体模型

第 2 章 基本理论

2.1公式推导

根据模型可知案例为定常流体在压力与底盖共同驱动下的空腔流体。

可由 Navier-Stocks 方程描述流体流动

连续性方程：

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \tag{2.1}$$

X 方向运动方程：

$$-\frac{\delta p}{\delta x} + (\frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y}) = 0 \tag{2.2}$$

Y 方向运动方程：

$$-\frac{\delta p}{\delta y} + (\frac{\delta \tau_{yx}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yy}}{\delta y}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = \mu\dot{\gamma} = \mu\begin{pmatrix} 2\frac{\delta\mu}{\delta x} & \frac{\delta\mu}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \\ \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}\mu & 2\frac{\delta v}{\delta y} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

边界条件：

$$\begin{cases} u1 = 0.01, v1 = 0 \\ u3 = 0, v3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P4 = 1000 \\ P2 = 0 \end{cases}$$

2.2伽辽金有限元法

2.2.1 插值函数

单元任一点速度可表示为节点数据与插值函数乘积之和

$$u = \partial\sum_{i=1}^{9} u_i\Phi_i = \Phi^T u_I^e \tag{2.5}$$

$$v = \partial\sum_{i=1}^{9} v_i\Phi_i = \Phi^T v_I^e \tag{2.6}$$

$$p = \partial\sum_{i=1}^{4} p_i\Psi_i = \Psi^T p_I^e \tag{2.7}$$

Φ为速度二次单元插值函数，Ψ为压力线性单元插值函数

$$\Phi 1 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1) \tag{2.8}$$

$$\Phi 2 = \frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(\eta - 1) \tag{2.9}$$

$$\Phi 3 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi + 1)(\eta - 1) \tag{2.10}$$

$$\Phi 4 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2) \tag{2.11}$$

$$\Phi 5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \tag{2.12}$$

$$\Phi 6 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)(1 - \eta^2) \tag{2.13}$$

$$\Phi 7 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta+1) \tag{2.14}$$

$$\Phi 8 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta+1) \tag{2.15}$$

$$\Phi 9 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta+1) \tag{2.16}$$

$$\Psi 1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1 - \eta) \tag{2.17}$$

$$\Psi 2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1 - \eta) \tag{2.18}$$

$$\Psi 3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{2.19}$$

$$\Psi 4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{2.20}$$

四边形等参元雅可比矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta x}{\delta \xi} & \dfrac{\delta y}{\delta \xi} \\ \dfrac{\delta x}{\delta \eta} & \dfrac{\delta y}{\delta \eta} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta \Phi}{\delta x} \\ \dfrac{\delta \Phi}{\delta y} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta \Phi}{\delta \xi} \\ \dfrac{\delta \Phi}{\delta \eta} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

2.2.2 控制方程的加权余量方程

权函数与插值函数一致，将连续性方程与Ψ相乘，运动方程与Φ相乘并在计算区域积分。

连续性方程：

$$\oiint_{\Omega} \Psi(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y}) dxdy = 0 \tag{2.23}$$

同理运动方程加权余量方程化简后为：

$$2\mu \oiint_{\Omega} \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} dxdy + \mu \oiint_{\Omega} \frac{\delta \Phi}{\delta y} + \frac{\delta u}{\delta y} dxdy + \mu \oiint_{\Omega} \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} dxdy - \oiint_{\Omega} \frac{\delta \Phi}{\delta x} p \ dxdy =$$
$$2\mu \int_{\Gamma} \Phi \frac{\delta u}{\delta x} \frac{\delta y}{\delta \Gamma} d\Gamma + \mu \int_{\Gamma} \Phi \frac{\delta u}{\delta y} \frac{\delta x}{\delta \Gamma} d\Gamma + \mu \int_{\Gamma} \Phi \frac{\delta v}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta \Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi p \cos \theta_x d\Gamma \tag{2.24}$$

$$\mu \oiint_{\Omega} \frac{\delta \Phi}{\delta y} + \frac{\delta u}{\delta x} dxdy + \mu \oiint_{\Omega} \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x} dxdy + 2\mu \oiint_{\Omega} \frac{\delta \Phi}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} dxdy - \oiint_{\Omega} \frac{\delta \Phi}{\delta y} p \ dxdy =$$
$$\mu \int_{\Gamma} \Phi \frac{\delta u}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta \Gamma} d\Gamma + \mu \int_{\Gamma} \Phi \frac{\delta v}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta \Gamma} d\Gamma + 2\mu \int_{\Gamma} \Phi \frac{\delta v}{\delta y} \frac{\delta x}{\delta \Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi p \cos \theta_y d\Gamma \tag{2.25}$$

2.2.3 单元方程

加权余量方程积分区域转换为单元区域并代入插值函数

连续性方程单元化：

$$\left[\iint_{\Omega^e}\Psi(\frac{\delta\Phi^T}{\delta x})dxdy\right]u_i^e + \left[\iint_{\Omega^e}\Psi(\frac{\delta\Phi^T}{\delta x})dxdy\right]v_i^e = 0 \qquad (2.26)$$

可写成

$$B_1^e u_1^e + B_2^e v_1^e = 0 \qquad (2.27)$$

同理运动方程单元化：

$$\left[2u\iint_{\Omega^e}(\frac{\delta\Phi}{\delta x}\frac{\delta\Phi^T}{\delta x})dxdy + u\iint_{\Omega^e}(\frac{\delta\Phi}{\delta y}\frac{\delta\Phi^T}{\delta y})dxdy\right]u_i^e + \left[u\iint_{\Omega^e}\frac{\delta\Phi}{\delta x}\frac{\delta\Phi^T}{\delta x}dxdy\right]v_i^e - \left[\iint_{\Omega^e}(\frac{\delta\Phi}{\delta x}\Psi^T)dxdy\right]P_I^e = -\int_{\Gamma^e}(\Phi\Psi^T P_I^e)\cos\theta_x d\Gamma$$

（2.28）

X 方向 $$D_{21}^e u_1^e + D_{22}^e v_1^e - C_2^e P_1^e = -F_2^e \qquad (2.29)$$

Y 方向 $$D_{11}^e u_1^e + D_{12}^e v_1^e - C_1^e P_1^e = -F_1^e \qquad (2.30)$$

不同的系数矩阵 B,C,D,F 对应不同的单元积分，在每个单元内完成高斯积分编程计算即可。

2.2.4 单元矩阵

$$\begin{pmatrix} D_{11}^e & D_{11}^e & -C_2^e \\ D_{11}^e & D_{11}^e & -C_2^e \\ B_2^e & B_2^e & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_I^e \\ v_I^e \\ p_I^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_1^e \\ -F_1^e \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.31)$$

2.2.5 总单元方程矩阵组装

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{11} & -C_2 \\ D_{11} & D_{11} & -C_2 \\ B_2 & B_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_I \\ v_I \\ p_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_1 \\ -F_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.32)$$

第 3 章程序编写

3.1 主程序编写流程

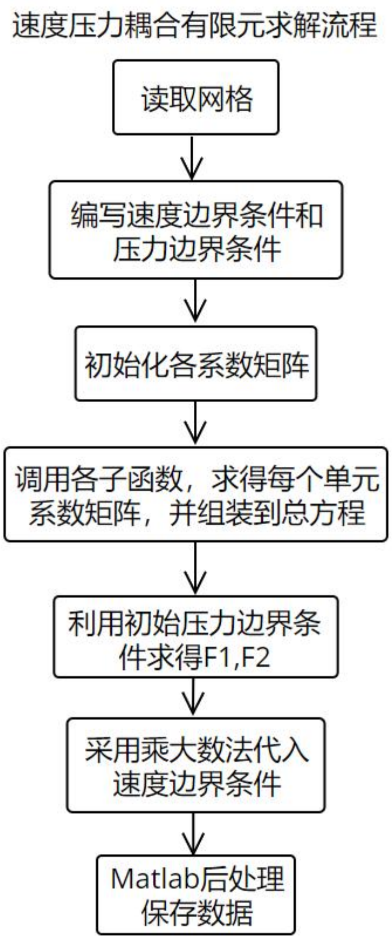

图 3.1 主程序编写流程图

3.2 系数矩阵程序

B 矩阵，C 矩阵，D 矩阵，F 矩阵各自编程为相应子函数供主函数调用，分别生成代码文件为 Be.m; Ce.m;De.m;Fe.m。

3.3 初次网格生成程序

wanggeshengcheng_1.m 中可指定对象形状，并规定每个方向节点数，生成相应网格。

3.4 网格细化程序

JMV_9to4.m 程序作用是将 9 节点二次单元分割为 4 节点线性单元，达到网格细化目的。

3.5 细化后网格生成程序

hua9jiedianwangge.m 程序作用为生成细化后的网格图。

3.6 速度、压力云图生成程序

yuntu_p.m ; yuntu_pinjun.m ; yuntu_v.m ; yuntu_u.m 分别用于生成压力，总速度，y 方向速度，x 方向速度。

第 4 章 Matlab 程序输出结果

4.1 网格离散

利用四边形网格离散计算区域，为了达到精度要求速度采用四边形二次单元，压力单元采用四边形线性单元。其中，单元数和节点数分别为E=240，N=1037。

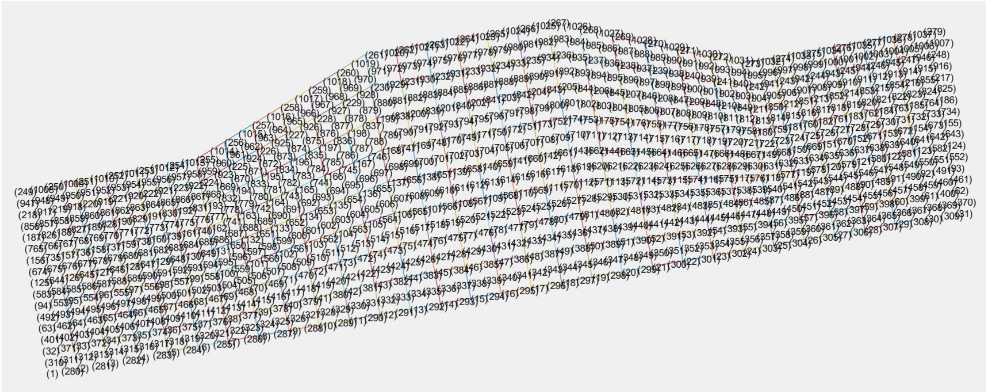

图 4.1 网格离散图

后处理时需要将单元全部处理为 4 节点单元，利用网格细化程序 JMV_9to4 将二次节点的每一个大单元做细化处理，处理成 4 个线性小单元。运行程序 hua9jiedianwangge 生成下列网格。细化后的网格 N=1037,E=960。

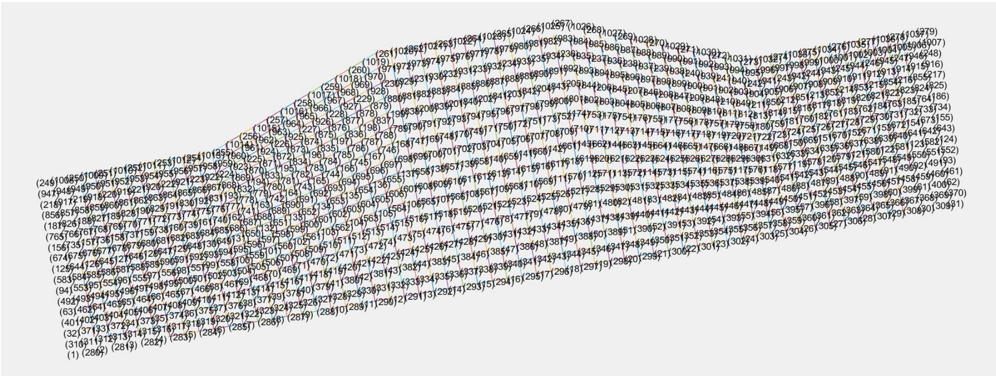

图 4.2 网格细化离散图

4.2压力驱动时 x 方向速度云图

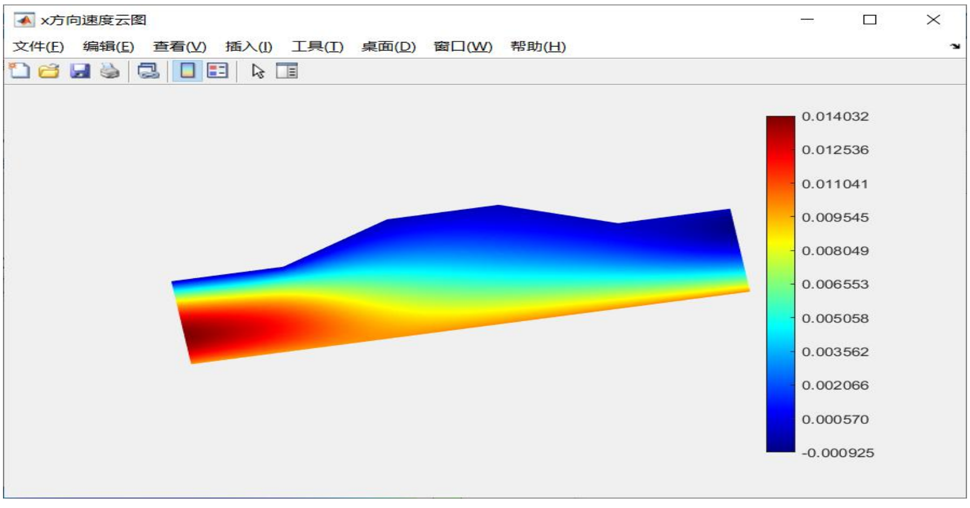

图 4.3 压力驱动时平板 x 方向的速度云图

4.3压力驱动时 y 方向速度云图

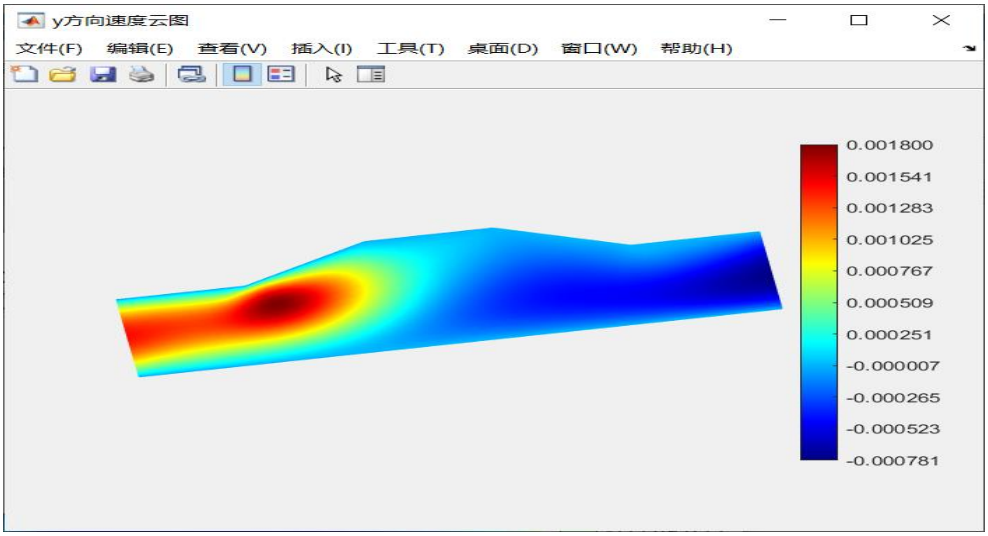

图 4.4 压力驱动时平板 y 方向的速度云图

4.4压力驱动时压力云图

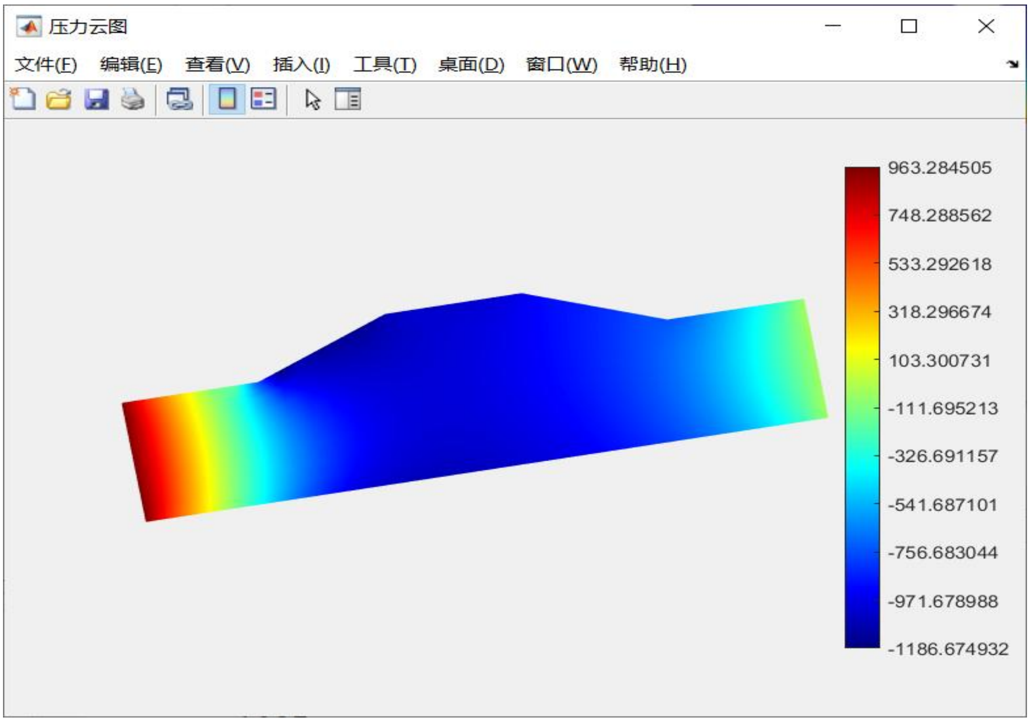

图 4.5 压力驱动时平板的压力云图

第 5 章 Fluent 有限元分析

5.1 Ansys-DM 中建模

首先 Geometry 建立该图形流动平板，并进行出入口设置。

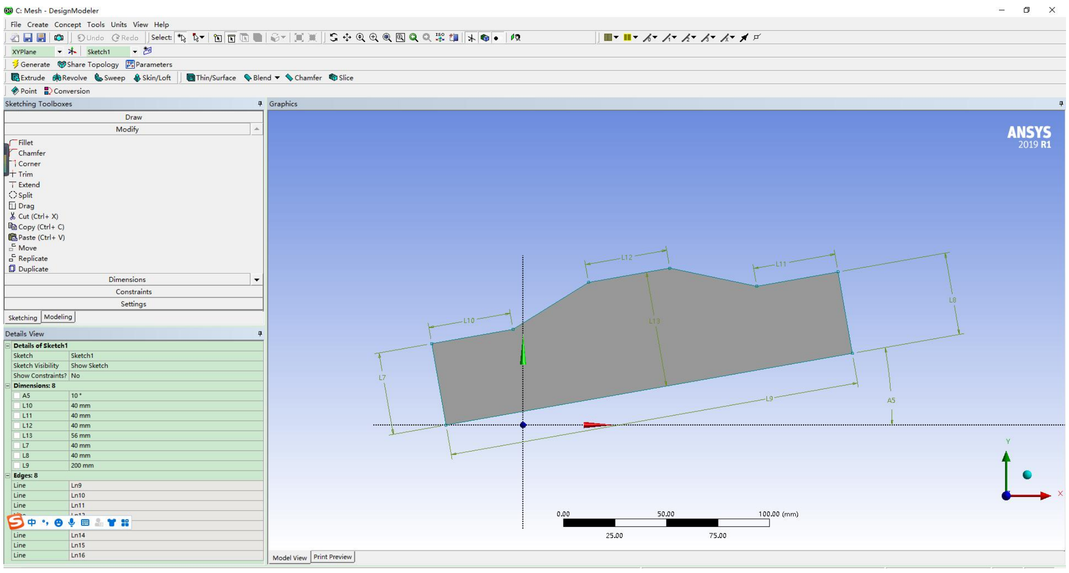

图 5.1 模型处理图

5.2 网格生成

Ansys 已经有很成熟的网格生成的功能，本文中利用 ansys 对该平板按要求进行网格划分，考虑其收敛性等因素，网格相对程序较密集。其中生成的单元数为 2282，节点数为 2396.

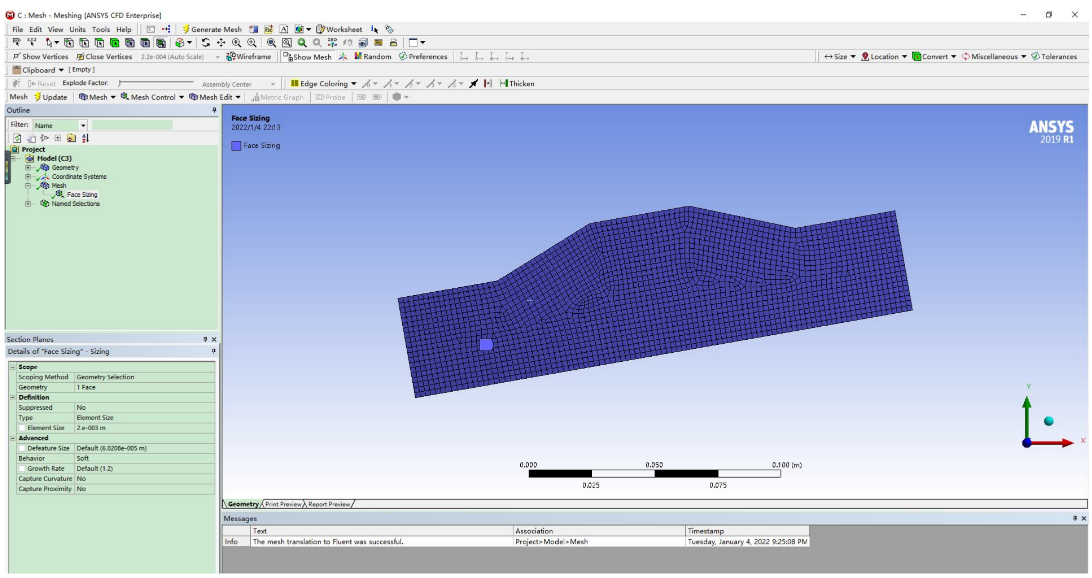

图 5.2 网格生成图

5.3 Fluent 流体仿真

接下来，将生成的网格文件导入 fluent 中进行流体仿真的参数设置，包括流体流动模型，流体材料设置为水，出入口边界条件根据要求设置参数。这里为分别验证，将平板的底盖速度设置为 0，首先进行流体仿真，验证入口压力驱动流。

5.4 CFD-post 后处理

最后将仿真生成.dat 文件导入 CFD-post 进行结果查看。

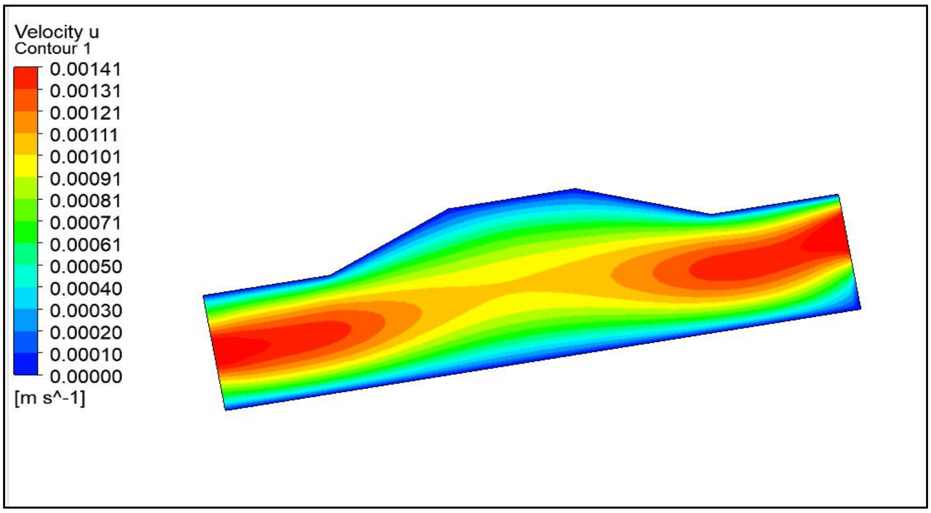

图 5.3 压力驱动时平板 x 方向的速度云图

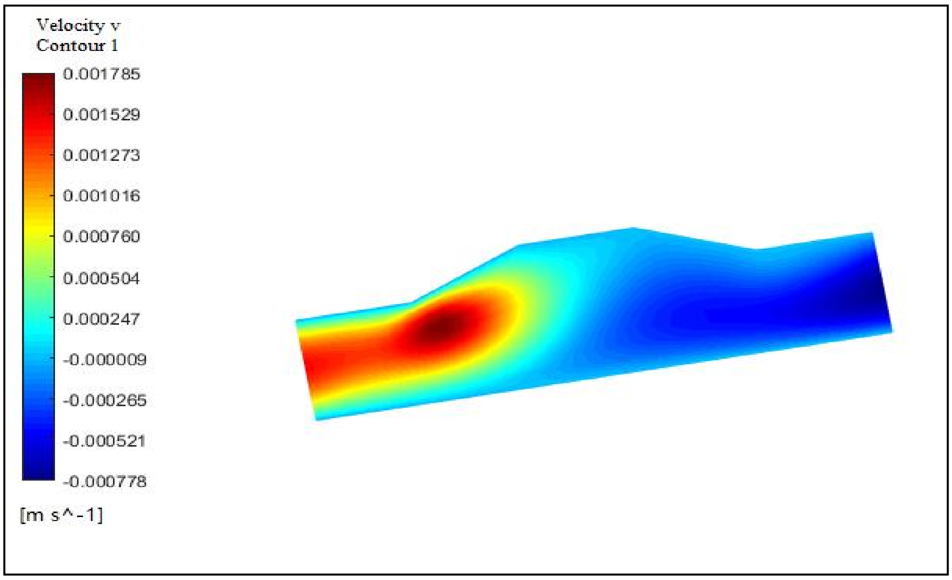

图 5.4 压力驱动时平板 y 方向的速度云图

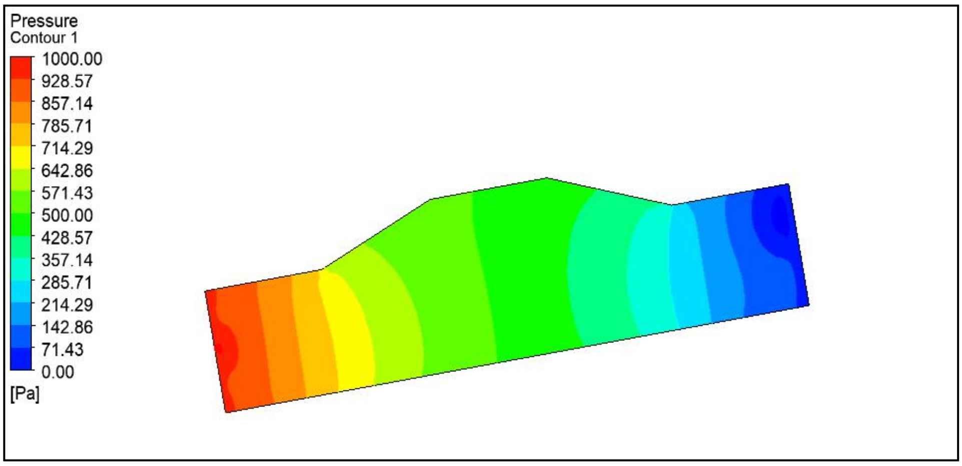

图 5.5 压力驱动时平板的压力云图

第 6 章　Matlab 和 fluent 基于入口压力驱动对比分析

第四章的结果图与第五章流体仿真的结果对比分析如下表。

	x 方向的最大速度 m/s	y 方向的最大速度 m/s	平板的最大压力 Pa
Matlab 仿真结果	0.014	0.0018	963.284
Fluent 仿真结果	0.0141	0.001785	1000
Matlab 程序误差	0.0001	0.000015	36.716

显然，各云图的基本一致。x、y 方向上流体流动的速度与 matlab 程序运行出的结果基本一致，两者精度相对较高，但是由于程序所设计的单元数明显较少，还存在一定的差异，主要目的是得到近似流场分布的场合，matlab 仍有很大的优势。相对 fluent 的系列仿真操作，matlab 仍有一定的优势，可以减少操作上的繁琐，具有优越性。