Set Theory

Hoyan Mok

2020 年 1 月 22 日

目录

1 集合与公理

在介绍集合论的 **ZFC** 公理之前, 需要先介绍一些数理逻辑的概念.

1.1 数理逻辑准备

句法概念如**形式语言**, **逻辑符号**, **非逻辑符号**, **项**, **公式**, **自由变元**, **约束变元**, **语句**等主要见[1].

设 Σ 是一个公式集, φ 是一个公式.

Definition 1.1. 有穷公式序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 表示从 Σ 到 φ 的一个**推演**, 如果其中的任意 φ_i 要么是属于 Σ 的, 要么可从之前的公式 φ_j 和 $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ 得到, 而且 $\varphi_n = \varphi$. 记作 $\Sigma \vdash \varphi$.

特别地, 如果 T 是语句集, 而 σ 是语句, 如果 $T \vdash \sigma$, 就称存在从 T 到 σ 的一个**证明**.

如果语句集 T 满足: 对任意语句 σ, $T \vdash \sigma$ 当且仅当 $\sigma \in T$, 即 T 是一个对证明封闭的语句集, 就称 T 为**理论**. 假设 T 是理论, 如果存在一个语句集 $A \subseteq T$ 使得对任意的 $\sigma \in T$ 都有 $A \vdash \sigma$, 就称 A 为 T 的一集**公理**.

如果理论 T 的公理 A 是**递归的** (**可判定的**, **可计算的**) i.e. 任给一语句, 总可以在有穷步骤内完全机械地判定它是否属于 A, 就称 T 是**可公理化的**. 理论 T 往往不是递归的, 但如果任给 $\sigma \in T$, 我们可在有穷的步骤内得出结论, 但如果 $\sigma \notin T$, 我们可能不能在有穷步骤内得出结论, 则称其为**递归可枚举的**.

一个理论是**一致的**当且仅当没有语句 σ s.t. $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$.

Definition 1.2. 若 ψ 是性质.

$$\exists! x\psi(x) := \exists x\psi(x) \wedge \forall x \forall y(\psi(x) \wedge \psi(y) \to x = y) \tag{1-1}$$

1.2 ZFC 公理

Axion 0. **存在公理** ***(Exi)*** *存在一个集合, i.e.*

$$\exists x(x = x). \tag{1-2}$$

Axion 1. **外延公理** ***(Ext)*** *两个有相同元素的集合相等, i.e.*

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y. \tag{1-3}$$

而逻辑上有 $X = Y \to \forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$, 所以:

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y \tag{1-4}$$

记 $\neg(X = Y) =: X \neq Y$.

Axion 2. 分离公理模式 *(Sep)*

令 $\varphi(u)$ 为公式. 对任意集合 X, 存在一个集合 $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$, *i.e.*

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \tag{1-5}$$

Corollary 1.

$$\forall X \exists R_X(R_X \notin R_X). \tag{1-6}$$

Proof. 令 $R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$ 即可. □

令 $\varphi(u)$ 为一个性质. 倘若 $\exists X \forall u(\varphi(u) \to u \in X)$, 则 $u \mid \varphi(u) = u \mid \varphi(u)$, 根据 Sep (Axion 2), $\exists \varnothing = u \mid \varphi(u)$. 分离于不同的集合 X 和 X' 的 $\varnothing$ 是相同的. 考虑到 $x \neq x \to x \in X$ 是重言式, 再根据 Exi (Axion 0), 可以得出:

Definition 1.3. $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ 是集合, 称为**空集**.

Definition 1.4. $\varphi(u)$ 是一个性质. 称 $\{u \mid u(u)\}$ 为一个**类** (class). 若一个类不是集合, 则称其为**真类** (proper class).

如所有集合的类 $\mathbf{V}$ 就是一个真类 (根据 Corollary 1).

Definition 1.5. 由 Sep, 两个集合的**交**和**差**也是集合:

$$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\} \qquad X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\} \tag{1-7}$$

Corollary 2. *而非空集 $X \neq \varnothing$ 的***任意交**

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y \in X(u \in Y)\} \tag{1-8}$$

也是集合.

Proof. 因 $X \neq \varnothing$, $\exists x_0 \in X$. 由 Sep,

$$Y = \{y \in x_0 \mid \forall x \in X(y \in x)\}$$

是集合. □

Axion 3. **对集公理** ***(Pai)***

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \lor x = b). \tag{1-9}$$

这样的 c 可记为 $\{a, b\}$.

Axion 4. **并集公理** ***(Uni)***

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z \in X (u \in z)). \tag{1-10}$$

Definition 1.6. **子集**和**真子集**关系定义如下:

$$X \subseteq Y := \forall x \in X (x \in Y), \tag{1-11}$$

$$X \supseteq Y := Y \subseteq X, \tag{1-12}$$

$$X \subset Y := X \subseteq Y \land X \neq Y, \tag{1-13}$$

$$X \supset Y := X. \tag{1-14}$$

Corollary 3. $\forall X (\varnothing \subseteq X)$.

Axion 5. **幂集公理** ***(Pow)***

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{1-15}$$

这样的 Y 称为 X 的**幂集**, 记为 $\mathscr{P}(X)$ 或 2^X.

Definition 1.7. 对任意集合 x, $x \cup \{x\}$ 称为其**后继**, 记为 $S(x)$ 或 x^+.

Axion 6. **无穷公理** ***(Inf)***

$$\exists X \big(\varnothing \in X \land \forall x (x \in X \to S(x) \in X) \big). \tag{1-16}$$

Axion 7. **基础公理** ***(Fnd)***

$$\forall x \big(x \neq \varnothing \to \exists y \in x (x \cap y = \varnothing) \big). \tag{1-17}$$

Theorem 1.1.

$$\forall x (x \notin x). \tag{1-18}$$

Proof. 考虑 $X = \{x\}$. 与 Fnd 矛盾. □

Theorem 1.2.

$$\nexists X\big(X \neq \varnothing \wedge \forall x \in X(\exists y \in X(y \in x))\big). \tag{1-19}$$

Proof.

$$\mathrm{Fnd} \wedge \forall x \in X\big(\exists y \in X(y \in x \cap X)\big) \to \bot.$$

□

Axion 8. 替换公理模式 *(**Rep**)* *对公式 $\psi(x, y)$, $\forall x$ 都存在唯一的 y s.t. $\psi(x, y)$ 成立. 那么 $\forall A \in \mathbf{V}$, 存在集合:*

$$B = \{y \mid \exists x \in A\, \psi(x, y)\} \tag{1-20}$$

i.e.

$$\forall A \forall x \in A\, \exists! y\, \psi(x, y) \to \exists B \forall x \in A\, \exists y \in B\, \psi(x, y) \tag{1-21}$$

Axion 9. 选择公理 *(**AC**)* *对任意非空集合 $X \neq \varnothing$, 若*

(1) $\varnothing \notin X$,

(2) X 中两两不交, 即 $\forall x \in X\, \forall y \in X$ 且 $x \neq y$, 那么 $x \cap y = \varnothing$,

则存在集合 S, 对 $\forall x \in S$, $S \cap x$ 是单点集. i.e.

$$\begin{aligned} \forall X\big(\varnothing \in X \wedge \forall x \in X\, \forall y \in X(x = y \vee x \cap y = \varnothing) \\ \to \exists S \forall x \in X\, \exists! y(S \cap x = \{y\})\big). \end{aligned} \tag{1-22}$$

Axion 0 到 8 构成的公理系统称为 ***Zermelo-Fraenkel* 系统**, 记为 **ZF**, 加上选择公理则记为 **ZFC**.

2 关系与函数

2.1 关系

Definition 2.1. 集合 a, b 的**有序对**$(a, b) := \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$.

Theorem 2.1.

$$(a, b) = (a', b') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Proof. 只证明”→”:

(1) $a=b$. $(a,b)=\{\{a\}\}=(a',b')$, 故 $(a',b')=\{\{a\}\}=\{\{a'\},\{a',b'\}\}$, 由 Ext (axion 1), $\{a'\}=\{a',b'\}=\{a\}$, 即 $a=b=a'=b'$.

(2) $a\neq b$. 假设 $\{a,b\}=\{a'\}$, 得 $\forall x\in\{a,b\}(x=a')$ 即 $a=b=a'$ 与 $a\neq b$ 矛盾. 从而只有 $\{a,b\}=\{a',b'\}\wedge\{a\}=\{a'\}$, 仍然由 Ext 易证.

□

Definition 2.2. 令 X 和 Y 是集合, 其**直积**或 ***Cartesian* 积**定义为:

$$X\times Y:=\{(x,y)\mid x\in X\wedge y\in Y\}. \tag{2-1}$$

简记 $X\times X=:X^2$.

Theorem 2.2. *对于 $\forall X\forall Y$, $X\times Y$ 是集合.*

Proof. 令 $\varphi(z)=\exists x\in X\exists y\in Y((x,y)=z)$, 取 $Z=\{z\in 2^{\{}X\cup Y\}\mid\varphi(z)\}$, 由 Ext 和 Sep (Axion 2) 即可知 $X\times Y=Z$. □

Definition 2.3. 如果存在集合 X,Y s.t. $R\subseteq X\times Y$, 则称集合 R 是**二元关系**. 通常记 $(x,y)\in R=:R(x,y)$, 或 xRy. $\operatorname{dom}R:=\{x\mid\exists yR(x,y)\}$ 称为其**定义域**, $\operatorname{ran}R=\{y\mid\exists xR(x,y)\}$ 称为其**值域**.

特别地, 如果 $R\subseteq X^2$, 则称其为 X 上的二元关系.

Definition 2.4. 集合 X 在关系 R 的**像**$R[X]$ 定义为 $\{y\in\operatorname{ran}R\mid\exists x\in X\,(R(x,y))\}$. 集合 Y 的逆像 $R^{-1}[Y]$ 则定义为 $\{x\in\operatorname{dom}R\mid\exists y\in Y\,(R(x,y))\}$. 二元关系 R 的**逆**R^{-1} 是 $\{(x,y)\mid R(y,x)\}$. 两个二元关系 R, S 的**复合**$S\circ R$ 则定义为 $\{(x,z)\mid\exists y(R(x,y)\wedge S(y,z))\}$.

Cartesian 积可递归地推广到 n 元:

$$(x_1,\cdots,x_{n+1})=((x_1,\cdots,x_n),x_{n+1}); \tag{2-2}$$

$$X_1\times\cdots\times X_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\} \tag{2-3}$$

2.2 函数

索引

参考文献

[1] 数理逻辑: 证明及其限度[M/OL]. 上海: 复旦大学出版社, 2014. https://books.google.co.jp/books?id=WDPqjgEACAAJ.