

Algebra

Hoyan Mok¹

2020 年 7 月 19 日

¹E-mail: victoriesmo@hotmail.com

目录

Contents	i
第一章 群. 环. 域	1
§1 代数运算	1
§2 群	2
参考文献	3
索引	4

第一章 群. 环. 域

§1 代数运算

Definition 1.1 (二元运算). 集合的 Cartesian 平方到自身的映射 $*$: $X^2 \rightarrow X$ 称为其上的一个二元运算. 通常我们记 $*(a, b) := a * b$. 当 X 上定义了二元运算 $*$ 后, 称 $*$ 定义了 X 上的一种代数结构 $(X, *)$, 也称代数系统.

当指代是明确的时候, 我们将混用集合及其代数结构.

作为习惯, 如果 $\cdot, + \in X^{X^2}$, 我们记 $ab := a \cdot b$ 并称其为 a 和 b 的积, 称 $a + b$ 为 a 和 b 的和. 这些只是约定.

若 $a * b = b * a$ 则称 $*$ 或 $(X, *)$ 是交换的, 而若 $(a * b) * c = a * (b * c)$ 则称 $*$ 或 $(X, *)$ 为结合的.

若 $\exists e \in X$ 满足 $\forall x \in A (e * x = x * e = x)$, 则称其为 $*$ 的一个单位元 (identity), 这时可把 $(X, *)$ 记作 $(X, *, e)$. 可以证明一个代数结构最多只有一个单位元. 乘法单位元通常记为 1, 而加法单位元 (也叫零元) 记为 0.

Definition 1.2 (半群和么半群). 若 $*$ 是结合的, 称 $(X, *)$ 是半群 (semigroup); 若 $*$ 还有一个单位元, 则称 $(X, *, e)$ 是么半群 (monoid).

倘若么半群 $(M, *, e)$ 是有限的 (即其元素有限), 称 $\text{card } M$ 为有限么半群的阶.

半群中, 括号的位置是不重要的 (可用数学归纳法证明). 通常我们记 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 为:

$$\prod_{i=1}^1 x_i = x_1, \quad \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) x_n; \quad (1-1)$$

同理 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 为:

$$\sum_{i=1}^1 x_i = x_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + x_n. \quad (1-2)$$

在半群不交换的场合, 指出递推式右端的顺序是重要的. 这种记法称为左正规.

若 $x := x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, 记 $\sum_{i=1}^n x_i = nx$, $\prod_{i=1}^n x_i = x^n$, 分别表示 x 的 n 倍和 x 的 n 次幂. 它们满足:

$$nx + mx = (n + m)x, \quad n(mx) = nm x, \quad n, m \in \mathbb{N}_+; \quad (1-3)$$

$$x^n x^m = x^{n+m}, \quad (x^m)^n = x^{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}_+. \quad (1-4)$$

在么半群中, 还可以令 $x^0 = 1, 0x = 0$.

若半群 S 有子集 S' , 使得 $(S', *)$ 是半群, 那么称其为半群 $(S, *)$ 的**子半群**. 同理有么半群 M 的**子么半群** M' .

若半群 $(S, *, e)$ 的元素 a 满足 $\exists a' \in S (aa' = a'a = e)$, 那么称 a 为**可逆的** (invertible), a' 称为其**逆元** (inverse element) 或**逆** (inverse). 通常加法逆元记为 $-a$, 乘法逆元记为 a^{-1} , 且为可逆元素引入 na, a^n 的概念, 其中 $n \in \mathbb{Z}$. 当 n 为负数时, $na = -(-na), a^n = (a^{-n})^{-1}$.

§2 群

可逆么半群 G 称为**群**, 即:

Definition 2.1 (群). 设有集合 G . 若:

G0) 定义了二元运算 $\cdot: G^2 \rightarrow G; (x, y) \mapsto xy$.

G1) 结合性: $\forall x, y, z \in G, (xy)z = x(yz)$.

G2) 单位元: $\exists e \in G \forall x \in G, xe = ex = x$.

G3) 可逆性: $\forall x \in G \exists x^{-1} \in G, xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

则称 (G, \cdot) 为**群**.

考虑 n 阶可逆实矩阵的集合 $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ 和在其上定义的矩阵乘法组成的群 $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 称为 n 阶**一般线性群**.

参考文献

- [1] A.I. Kostrikin. *Introduction to Algebra*. Universitext - Springer-Verlag. Springer-Verlag, 1982. ISBN: 9783540907114. URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387907116>.

索引

使用的符号

$\text{GL}_n(\mathbb{R})$, 2

$(X, *)$, 1

$(X, *, e)$, 1

一般线性群, 2

二元运算, 1

交换的, 1

代数系统, 1

代数结构, 1

半群, 1

单位元, 1

可逆的, 2

和, 1

子半群, 2

子么半群, 2

左正规, 1

么半群, 1

有限么半群, 1

积, 1

结合的, 1

群, 2

逆, 2

逆元, 2

阶, 1

零元, 1