

# Set Theory

Hoyan Mok

2020 年 2 月 5 日

## 目录

<b>1</b>	<b>集合与公理</b>	<b>2</b>
1.1	数理逻辑准备 . . . . .	2
1.2	<b>ZFC</b> 公理 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>关系与函数</b>	<b>5</b>
2.1	关系 . . . . .	5
2.2	函数 . . . . .	7
2.3	等价和划分 . . . . .	9
2.4	序 . . . . .	11
<b>3</b>	<b>实数</b>	<b>12</b>
3.1	自然数 . . . . .	12
3.2	递归定理 . . . . .	13

# 1 集合与公理

在介绍集合论的 **ZFC** 公理之前, 需要先介绍一些数理逻辑的概念.

## 1.1 数理逻辑准备

句法概念如形式语言, 逻辑符号, 非逻辑符号, 项, 公式, 自由变元, 约束变元, 语句等主要见<sup>[1]</sup>.

设  $\Sigma$  是一个公式集,  $\varphi$  是一个公式.

**Definition 1.1.** 有穷公式序列  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  表示从  $\Sigma$  到  $\varphi$  的一个推演, 如果其中的任意  $\varphi_i$  要么是属于  $\Sigma$  的, 要么可从之前的公式  $\varphi_j$  和  $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$  得到, 而且  $\varphi_n = \varphi$ . 记作  $\Sigma \vdash \varphi$ .

特别地, 如果  $T$  是语句集, 而  $\sigma$  是语句, 如果  $T \vdash \sigma$ , 就称存在从  $T$  到  $\sigma$  的一个证明.

如果语句集  $T$  满足: 对任意语句  $\sigma$ ,  $T \vdash \sigma$  当且仅当  $\sigma \in T$ , 即  $T$  是一个对证明封闭的语句集, 就称  $T$  为**理论**. 假设  $T$  是理论, 如果存在一个语句集  $A \subseteq T$  使得对任意的  $\sigma \in T$  都有  $A \vdash \sigma$ , 就称  $A$  为  $T$  的一**集公理**.

如果理论  $T$  的公理  $A$  是**递归的** (可判定的, 可计算的) i.e. 任给一语句, 总可以在有穷步骤内完全机械地判定它是否属于  $A$ , 就称  $T$  是**可公理化的**. 理论  $T$  往往不是递归的, 但如果任给  $\sigma \in T$ , 我们可在有穷的步骤内得出结论, 但如果  $\sigma \notin T$ , 我们可能不能在有穷步骤内得出结论, 则称其为**递归可枚举的**.

一个理论是一致的当且仅当没有语句  $\sigma$  s.t.  $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$ .

**Definition 1.2.** 若  $\psi$  是性质.

$$\exists! x \psi(x) := \exists x \psi(x) \wedge \forall x \forall y (\psi(x) \wedge \psi(y) \rightarrow x = y) \quad (1-1)$$

## 1.2 ZFC 公理

**Axion 0.** 存在公理 (*Exi*) 存在一个集合, i.e.

$$\exists x (x = x). \quad (1-2)$$

**Axion 1.** 外延公理 (*Ext*) 两个有相同元素的集合相等, i.e.

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y. \quad (1-3)$$

而逻辑上有  $X = Y \rightarrow \forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y)$ , 所以:

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y \quad (1-4)$$

记  $\neg(X = Y) =: X \neq Y$ .

**Axion 2. 分离公理模式 (Sep)**

令  $\varphi(u)$  为公式. 对任意集合  $X$ , 存在一个集合  $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$ ,  
i.e.

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \quad (1-5)$$

**Corollary 1.**

$$\forall X \exists R_X (R_X \notin R_X). \quad (1-6)$$

**Proof.** 令  $R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$  即可.  $\square$

令  $\varphi(u)$  为一个性质. 倘若  $\exists X \forall u (\varphi(u) \rightarrow u \in X)$ , 则  $u \mid \varphi(u) = u \mid \varphi(u)$ , 根据 Sep (Axion 2),  $\exists \emptyset = u \mid \varphi(u)$ . 分离于不同的集合  $X$  和  $X'$  的  $\emptyset$  是相同的. 考虑到  $x \neq x \rightarrow x \in X$  是重言式, 再根据 Exi (Axion 0), 可以得出:

**Definition 1.3.**  $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$  是集合, 称为**空集**.

**Definition 1.4.**  $\varphi(u)$  是一个性质. 称  $\{u \mid \varphi(u)\}$  为一个**类** (class). 若一个类不是集合, 则称其为**真类** (proper class).

如所有集合的类  $\mathbf{V}$  就是一个真类 (根据 Corollary 1).

**Definition 1.5.** 由 Sep, 两个集合的**交**和**差**也是集合:

$$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\} \quad X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\} \quad (1-7)$$

**Corollary 2.** 而非空集  $X \neq \emptyset$  的任意交

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y \in X (u \in Y)\} \quad (1-8)$$

也是集合.

**Proof.** 因  $X \neq \emptyset, \exists x_0 \in X$ . 由 Sep,

$$Y = \{y \in x_0 \mid \forall x \in X (y \in x)\}$$

是集合.  $\square$

**Axion 3. 对集公理 (*Pai*)**

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b). \quad (1-9)$$

这样的  $c$  可记为  $\{a, b\}$ .

**Axion 4. 并集公理 (*Uni*)**

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z \in X (u \in z)). \quad (1-10)$$

**Definition 1.6.** 子集和真子集关系定义如下:

$$X \subseteq Y := \forall x \in X (x \in Y), \quad (1-11)$$

$$X \supseteq Y := Y \subseteq X, \quad (1-12)$$

$$X \subset Y := X \subseteq Y \wedge X \neq Y, \quad (1-13)$$

$$X \supset Y := X. \quad (1-14)$$

**Corollary 3.**  $\forall X (\emptyset \subseteq X)$ .

**Axion 5. 幂集公理 (*Pow*)**

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \quad (1-15)$$

这样的  $Y$  称为  $X$  的**幂集**, 记为  $\mathcal{P}(X)$  或  $2^X$ .

**Definition 1.7.** 对任意集合  $x$ ,  $x \cup \{x\}$  称为其**后继**, 记为  $S(x)$  或  $x^+$ .

**Axion 6. 无穷公理 (*Inf*)**

$$\exists X (\emptyset \in X \wedge \forall x (x \in X \rightarrow S(x) \in X)). \quad (1-16)$$

**Axion 7. 基础公理 (*Fnd*)**

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (x \cap y = \emptyset)). \quad (1-17)$$

**Theorem 1.1.**

$$\forall x (x \notin x). \quad (1-18)$$

**Proof.** 考虑  $X = \{x\}$ . 与 Fnd 矛盾.  $\square$

**Theorem 1.2.**

$$\nexists X (X \neq \emptyset \wedge \forall x \in X (\exists y \in X (y \in x))). \quad (1-19)$$

**Proof.**

$$\text{Fnd} \wedge \forall x \in X (\exists y \in X (y \in x \cap X)) \rightarrow \perp.$$

□

**Axion 8. 替换公理模式 (*Rep*)** 对公式  $\psi(x, y)$ ,  $\forall x$  都存在唯一的  $y$  s.t.  $\psi(x, y)$  成立. 那么  $\forall A \in \mathbf{V}$ , 存在集合:

$$B = \{y \mid \exists x \in A \psi(x, y)\} \quad (1-20)$$

i.e.

$$\forall A \forall x \in A \exists! y \psi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y) \quad (1-21)$$

**Axion 9. 选择公理 (*AC*)** 对任意非空集合  $X \neq \emptyset$ , 若

(1)  $\emptyset \notin X$ ,

(2)  $X$  中两两不交, 即  $\forall x \in X \forall y \in X$  且  $x \neq y$ , 那么  $x \cap y = \emptyset$ ,

则存在集合  $S$ , 对  $\forall x \in S$ ,  $S \cap x$  是单点集. i.e.

$$\begin{aligned} \forall X (\emptyset \in X \wedge \forall x \in X \forall y \in X (x = y \vee x \cap y = \emptyset) \\ \rightarrow \exists S \forall x \in X \exists! y (S \cap x = \{y\})). \end{aligned} \quad (1-22)$$

Axion 0 到 8 构成的公理系统称为 **Zermelo-Fraenkel** 系统, 记为 **ZF**, 加上选择公理则记为 **ZFC**.

## 2 关系与函数

### 2.1 关系

**Definition 2.1.** 集合  $a, b$  的有序对  $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ .

**Theorem 2.1.**

$$(a, b) = (a', b') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

**Proof.** 只证明“ $\rightarrow$ ”:

- (1)  $a = b$ .  $(a, b) = \{\{a\}\} = (a', b')$ , 故  $(a', b') = \{\{a\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ , 由 Ext (axion 1),  $\{a'\} = \{a', b'\} = \{a\}$ , 即  $a = b = a' = b'$ .
- (2)  $a \neq b$ . 假设  $\{a, b\} = \{a'\}$ , 得  $\forall x \in \{a, b\}(x = a')$  即  $a = b = a'$  与  $a \neq b$  矛盾. 从而只有  $\{a, b\} = \{a', b'\} \wedge \{a\} = \{a'\}$ , 仍然由 Ext 易证.

□

**Definition 2.2.** 令  $X$  和  $Y$  是集合, 其直积或 **Cartesian** 积定义为:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}. \quad (2-1)$$

简记  $X \times X =: X^2$ .

**Theorem 2.2.** 对于  $\forall X \forall Y$ ,  $X \times Y$  是集合.

**Proof.** 令  $\varphi(z) = \exists x \in X \exists y \in Y((x, y) = z)$ , 取  $Z = \{z \in 2^{X \cup Y} \mid \varphi(z)\}$ , 由 Ext 和 Sep (Axiom 2) 即可知  $X \times Y = Z$ . □

**Definition 2.3.** 如果存在集合  $X, Y$  s.t.  $R \subseteq X \times Y$ , 则称集合  $R$  是二元关系. 通常记  $(x, y) \in R =: R(x, y)$ , 或  $xRy$ .  $\text{dom } R := \{x \mid \exists y R(x, y)\}$  称为其定义域,  $\text{ran } R = \{y \mid \exists x R(x, y)\}$  称为其值域.

特别地, 如果  $R \subseteq X^2$ , 则称其为  $X$  上的二元关系.

**Definition 2.4.** 集合  $X$  在关系  $R$  的像  $R[X]$  定义为  $\{y \in \text{ran } R \mid \exists x \in X (R(x, y))\}$ . 集合  $Y$  的逆像  $R^{-1}[Y]$  则定义为  $\{x \in \text{dom } R \mid \exists y \in Y (R(x, y))\}$ . 二元关系  $R$  的逆  $R^{-1}$  是  $\{(x, y) \mid R(y, x)\}$ . 两个二元关系  $R, S$  的复合  $S \circ R$  则定义为  $\{(x, z) \mid \exists y (R(x, y) \wedge S(y, z))\}$ .

**Theorem 2.3.** 令  $R$  是二元关系,  $A, B$  是集合.  $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$ ,  $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$ ,  $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$ .

Cartesian 积可递归地推广到  $n$  元:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) = ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}); \quad (2-2)$$

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \dots \wedge x_n \in X_n\} \quad (2-3)$$

$n$  元 Cartesian 积的子集可类似地定义  $n$  元关系.

**Theorem 2.4.**  $n$  元 Cartesian 积  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  是空集, 则存在  $X_i = \emptyset$ .

## 2.2 函数

**Definition 2.5.** 二元关系  $f$  倘满足:

$$\forall x((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z),$$

则称  $f$  是函数,  $y$  是  $f$  在  $x$  处的值, 记为  $f(x) = y$ , 或  $f: x \mapsto y$ . 倘若  $\text{dom } f = X, \text{ran } f \subseteq Y$ , 则称  $f$  是  $X$  到  $Y$  的函数, 记为  $f: X \rightarrow Y$ .

对任意集合  $X$  定义  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  为  $\forall x \in X(\text{id}_X(x) = x)$ , 称为等同函数.

**Theorem 2.5.** 令  $f, g$  都是函数.

$$f = g \leftrightarrow \text{dom } f = \text{dom } g \wedge \forall x \in \text{dom } f(f(x) = g(x)).$$

*Proof.* 只证明“ $\leftarrow$ ”:

$$\begin{aligned} \forall(x, y) \in f(x \in \text{dom } f \wedge y = f(x)) \wedge \text{dom } f = \text{dom } g \wedge \forall x \in \text{dom } f(f(x) = g(x)) \\ \rightarrow \forall(x, y) \in f(x \in \text{dom } g \wedge y = g(x)). \end{aligned}$$

同理,  $\forall(x, y) \in g(x \in \text{dom } f \wedge y = f(x))$ , 即  $\forall(x, y)(y = f(x) \leftrightarrow y = g(x))$ .  
由 Ext,  $f = g$ .  $\square$

通常以集合为值的函数  $i \mapsto X_i$ , 其中  $i \in I$ , 可视为指标系统,  $I$  是指标集. 记为  $X = \{X_i \mid i \in I\}$  或  $\{X_i\}_{i \in I}$ .

**Theorem 2.6.**  $\psi(i, x)$  是公式.  $\forall I \forall X$ ,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid \psi(i, x)\} &= \{x \in X \mid \exists i \in I(\psi(i, x))\}, \\ \bigcap_{i \in I} \{x \in X \mid \psi(i, x)\} &= \{x \in X \mid \forall i \in I(\psi(i, x))\}. \end{aligned}$$

**Definition 2.6.** 令  $X = \{X_i \mid i \in I\}$  是一个指标系统.  $X$  的一般 Cartesian 积为:

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f \mid f: I \rightarrow X_i\}.$$

另,  $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  称为指标函数.

注: 虽然这样的定义和 Cartesian 积不同, 但接下来的概念确保了, 两者之间可以一一对应, 从而是等价的.

**Definition 2.7.** 令  $f: X \rightarrow Y$  是函数. 若  $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$  则称  $f$  为单射. 若  $\text{ran } f = Y$  则称其为满射. 既单又满的函数称为双射. 如果函数的逆  $f^{-1}$  也是函数, 则函数  $f$  称为可逆的.

作为例子, 若空映射  $\text{ran } f = \text{dom } f = \emptyset$ ,  $f = \emptyset$  总是单的,  $f^{-1} = \{(y, x) \mid y = f(x)\} = \emptyset$  也是空映射.

注: 这里函数的逆的定义与通常不同, 因  $\text{dom } f^{-1} = \text{ran } f$  而非  $Y$ . 因而下面的定理在这样的定义下是成立的 (否则还要加上满射的条件):

记  $Y^X := \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ .  $\forall Y (Y^\emptyset = \{\emptyset_Y\})$ , 而若  $X \neq \emptyset$ ,  $\emptyset^X = \emptyset$ .

**Theorem 2.7.** 函数  $f$  可逆 iff  $f$  是单射.

**Proof.** 可逆意味着  $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \leftrightarrow x_1 = x_2$ , 又由逆的定义,  $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$ , 这即是单射的定义.  $\square$

**Theorem 2.8.** 函数  $f$  若可逆, 则  $f^{-1}$  可逆, 且  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

证明从略.

**Theorem 2.9.** 如果  $f$  和  $g$  是函数, 它们的复合  $h = g \circ f$  也是函数. 而且  $\text{dom } h = f^{-1}(\text{dom } g)$ .

注: 这里的复合和通常的定义有细微不同, 但保持了与二元关系的统一.

**Proof.** 复合的定义:  $h = g \circ f \leftrightarrow \forall (x, z) \in h (\exists y (y = f(x) \wedge z = g(y)))$ . 倘若  $(x, u) \in h \wedge (x, v) \in h$ , 有  $\exists! y$  s.t.  $y = f(x)$ , 且  $u = v = g(y)$ . 因而  $h$  也是函数.

其定义域  $\text{dom } h = \{x \mid \exists z (z = h(x))\}$ , 又因  $\exists z (z = h(x)) \leftrightarrow \exists z \exists y (y = f(x) \wedge z = g(y))$ , 后者又等价于  $\exists y (y = f(x) \wedge \exists z (z = g(y)))$ , i.e.  $\exists y \in \text{dom } g (y = f(x))$ ,

$$\text{dom } h = \{x \mid \exists y \in \text{dom } g (y = f(x))\} = f^{-1}(\text{dom } g).$$

$\square$

**Definition 2.8.** 令  $f$  是任意函数,  $A$  是任意集合. 函数  $f \upharpoonright A = \{(x, y) \in f \mid x \in A\}$  是  $f$  在  $A$  上的限制. 若  $g = f \upharpoonright A$ , 则称  $f$  是  $g$  在  $\text{dom } f$  的扩张.



**Definition 2.9.** 函数  $f, g$  被认为是相容的, 如果:

$$\forall x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g (f(x) = g(x))$$

指标系统  $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$  被称为相容系统, 如果

$$\forall f_i \in \mathcal{F} \forall f_j \in \mathcal{F} (f_i \text{ 和 } f_j \text{ 相容.})$$

**Theorem 2.10.**  $f$  和  $g$  是函数. 以下的命题是等价的:

- (1)  $f$  与  $g$  相容;
- (2)  $f \cup g$  是函数;
- (3)  $f \upharpoonright (\text{dom } f \cap \text{dom } g) = g \upharpoonright (\text{dom } f \cap \text{dom } g)$ .

**Proof.** (1) $\leftrightarrow$ (3): 注意到  $\text{dom}(f \upharpoonright (\text{dom } f \cap \text{dom } g)) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$ . 由相容的定义和定理2.5可得证.

(2) $\leftrightarrow$ (1): 假设  $f$  与  $g$  不相容, 即  $\exists x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g \subseteq \text{dom } f \cup g$  s.t.  $f(x) \neq g(x)$ , 这与函数  $f \cup g$  的定义不相符. 若  $f \cup g$  不是函数, 它至少是  $\text{dom } f \cup \text{dom } g \times \text{ran } f \cup \text{ran } g$  上的二元关系, 由函数的定义,  $\exists x \in \text{dom } f \cup g$  s.t.  $\exists y_1 \exists y_2 ((x, y_1) \in f \cup g \wedge (x, y_2) \in f \cup g \wedge y_1 \neq y_2)$ . 通过对  $x$  在  $\text{dom } f - \text{dom } g$ ,  $\text{dom } g - \text{dom } f$ ,  $\text{dom } g \cap \text{dom } f$  讨论, 可以得出要么  $f$  或  $g$  不是函数 (从而与题设矛盾), 要么  $f, g$  不相容.  $\square$

**Axion 9. 选择公理 (第二形式) (AC II)**

$$\forall \mathcal{F} (\emptyset \notin \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \neq \emptyset \wedge \exists f: \mathcal{F} \rightarrow \cup \mathcal{F} (\forall F \in \mathcal{F} (f(F) \in F)))$$

其中这样的  $f$  通常被称为选择函数.

对于任意非空  $\omega$  (尤其是当  $\omega$  是无穷集时),  $\prod_{i \in \omega} X_i = \emptyset \rightarrow \exists i \in \omega (X_i = \emptyset)$  与选择公理等价.<sup>1</sup>

## 2.3 等价和划分

**Definition 2.10.** 令  $R \subseteq X^2$  是  $X$  上的二元关系.  $R$  是:

<sup>1</sup> 维基百科页面

- (1) 自反的, 若  $\forall x \in X(xRx)$ ;
- (2) 对称的, 若  $\forall x \in X \forall y \in X(xRy \rightarrow yRx)$ ;
- (3) 传递的, 若  $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ ;
- (4) 等价关系或等价的, 若  $R$  自反, 对称, 传递. 记为  $\sim$ .

**Definition 2.11.** 令  $\sim$  是  $X$  上的等价关系,  $x \in X$ .  $x$  关于  $\sim$  的等价类定义为:

$$[x]_{\sim} := \{t \in X \mid t \sim x\}.$$

注: 由 Sep, 等价类是集合而不是真类.

**Theorem 2.11.** 令  $\sim$  是  $X$  上的等价关系.

$$\forall x \in X \forall y \in Y ([x]_{\sim} = [y]_{\sim} \wedge [x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \emptyset)$$

**Definition 2.12.** 令  $X$  是一集合,  $S \subseteq 2^X$ .  $S$  被称为  $X$  的一个划分如果:

$$\forall a \in S \forall b \in S (a = b \vee a \cap b = \emptyset) \wedge \cup S = X.$$

**Definition 2.13.** 令  $\sim$  是  $X$  上的等价关系.  $X/\sim := \{[x]_{\sim} \mid x \in X\}$  称为  $X$  的商集.

**Theorem 2.12.** 令  $\sim$  是  $X$  上的等价关系.  $X/\sim$  是  $X$  的一个划分.

**Theorem 2.13.** 令  $S$  为  $X$  的划分, 定义二元关系:

$$\sim_S := \{(x, y) \in X^2 \mid \exists s \in S (x \in s \wedge y \in s)\}.$$

那么,  $\sim_S$  是等价关系,  $X/\sim_S = S$ . 若  $X$  上的等价关系  $\sim$  满足  $X/\sim = S$ , 则  $\sim_S = \sim$ .

**Proof.**  $\cup S = X \rightarrow \forall x \in X \exists s \in S (x \in s)$ , 即  $\sim_S$  是自反的. 对称和传递性显然. 从而,  $\sim_S$  是等价关系.

依商集和等价类的定义,  $\forall s \in X/\sim_S \exists x \in X \forall t (t \in s \leftrightarrow \exists s' \in S (x \in s' \wedge t \in s'))$ . 这之后我遇到了困难.  $\square$

## 2.4 序

**Definition 2.14.** 如果  $X$  上的二元关系  $\leq$  满足:

1. 自反 i.e.  $\forall x \in X (x \leq x)$ ;
2. 反对称 i.e.  $\forall x \in X \forall y \in X (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$ ;
3. 传递 i.e.  $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$ ,

则称其为  $X$  上的**偏序** (partial order) 或**序**, 记  $(X, \leq)$ , 并称  $X$  是一个**偏序集** (partially ordered set, appr. poset). 如果它还是**连接的** i.e.  $\forall x \in X \forall y \in X (x \leq y \vee y \leq x)$ , 那么它是  $X$  上的**线序**或**全序** (total order), 此时也称  $X$  是一个**线序集**.

通常记  $\geq := \leq^{-1}$ ,  $< := \leq \cap \neq$ ,  $> := <^{-1}$ .

**Definition 2.15.** 如果  $X$  上的关系  $\preceq$  只满足传递和自反, 称其为  $X$  上的**拟序** (quasi-order) 或**预序** (preorder).  $\succeq := \preceq^{-1}$ .

**Theorem 2.14.** 令  $\preceq$  是  $X$  上的拟序, 等价关系  $\sim$  可由  $\sim = \preceq \cap \succeq$  定义, 且商集  $X/\sim$  上的偏序关系  $\leq$  可定义为

$$[x] \leq [y] \leftrightarrow x \preceq y.$$

**Definition 2.16.** 如果对于  $a \in X$  满足  $\forall x \in X (\neg(a > x))$ , 则称  $a$  为  $X$  的**极小元**. 如果对于  $a \in X$  满足  $\forall x \in X (a \leq x)$ , 则称  $a$  为  $X$  的**最小元**. 相反则有**极大元**和**最大元**.

令  $X_0 \subseteq X$ . 如果  $\exists a \in X \forall x \in X_0 (a \leq x)$ , 则称  $X_0$  在  $X$  中有下界,  $a$  是  $X_0$  在  $X$  中的下界. 如果这样的下界  $a$  的集合有最大元  $a_0$ , 称其为**下确界**, 记为  $\inf X_0$ . 同理有**上界**和**上确界**  $\sup X_0$ .

作为例子, 令  $X \neq \emptyset$ ,  $(2^X, \subseteq)$  是偏序集. 对于  $\forall S \subseteq 2^X$ ,  $S$  有上下确界,  $\sup S = \cup S$ ,  $\inf S = \cap S$ .

**Definition 2.17.** 如果  $X$  和其上的线序  $(X, \leq)$  满足任意  $X_0 \in 2^X$ ,  $X_0$  都有最小元, 则称  $\leq$  为  $X$  上的**良序**,  $X$  被称为**良序集**.

## 3 实数

### 3.1 自然数

根据 Inf (axion 6), 这样的集合是存在的:

**Definition 3.1.** 如果集合  $X$  满足:

$$\emptyset \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow x^+ \in X)$$

则称其为归纳集.

容易知道  $0 := \emptyset$  属于任何归纳集,  $1 := 0^+$  也属于任何归纳集, ..., 以此类推. 最小的归纳集被称为**自然数集**, 它的严格定义如下:

**Definition 3.2.**

$$\mathbb{N} := \{n \mid \forall X(X \text{ 是归纳集} \rightarrow n \in X)\}.$$

$\mathbb{N}$  是**自然数集**, 其元素是自然数.

从定义上可以看出,  $\mathbb{N}$  是归纳集, 而且是任何归纳集的子集.

**Theorem 3.1.** 归纳原理 令  $\varphi(n)$  是一个性质. 如果

1.  $\varphi(0)$  成立;
2.  $\forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+))$  成立,

那么,  $\forall n \in \mathbb{N} \varphi(n)$  成立.

**Proof.** 构造集合  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$ , 根据它是归纳集, 可知  $\mathbb{N} \subseteq M$ , 但  $M$  是根据 Sep 从  $\mathbb{N}$  中分离出来的, 得知  $M = \mathbb{N}$ .  $\square$

在  $\mathbb{N}$  上定义偏序关系  $\leq = \in \cap =$ , 而且可以证明, 这是一个良序.

**Theorem 3.2.** 第二归纳原理 令  $\varphi(n)$  是一个性质.

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall k \in n \varphi(k) \rightarrow \varphi(n)) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \varphi(n)$$

### 3.2 递归定理

接下来我们要定义一些二元函数, 即我们熟悉的自然数集上的运算. 我们可以递归地给出它们的定义, 但这种定义的合理性需要递归定理的辩护.

**Definition 3.3.** 以  $n \in \mathbb{N}$  或  $\mathbb{N}$  为定义域的函数称为**序列**, 其中前者称为长度为  $n$  的**有穷序列**, 后者称为**无穷序列**, 通常分别记为  $\langle a_k \mid k < n \rangle$  或  $\langle a_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ , 或简记为  $\langle a_k \rangle_{k < n}$  或  $\langle a_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ . 值域通常记为  $\{x_k \mid k < n\}$  或  $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , 或简记为  $\{a_k\}_{k < n}$  或  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . 特别地, 长度为 0 的序列称为**空序列**.

若序列的到达域是  $Y$ , 则通常称为  $Y$  内的序列.  $Y$  内所有有穷序列的集合可记为  $A^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ .

#### Theorem 3.3. 递归定理

$$\forall A \forall a \in A \forall g \in A^{A \times \mathbb{N}} \exists! f \in A^{\mathbb{N}} (f(0) = a \wedge \forall n \in \mathbb{N} (f(n^+) = g(f(n), n))).$$

这里的  $g$  扮演了一个“递推式”的角色.

**Proof.** 首先, 我们需要证明  $f$  的存在性.

注意到  $f$  是  $A$  中的无穷序列, 我们考虑用满足条件的有穷序列去逼近它. 基于  $a$  和  $g$  的  $m$ -近似定义为有穷序列  $t: m^+ \rightarrow A$  满足

$$t_0 = a \wedge \forall k \in m^+ (t_{k^+} = g(t_k, k)).$$

并记  $\mathcal{F} = \{t \in 2^{\mathbb{N} \times A} \mid t \text{ 是 } m\text{-近似的}\}$ , 及  $f = \bigcup \mathcal{F}$ . 接下来我们证明这个  $f$  是所寻找的函数.

首先证明它是函数. 由 theorem 2.10, 知这当且仅当  $\mathcal{F}$  相容. 令  $t, u \in \mathcal{F}$ . 记  $m = \text{dom } t, n = \text{dom } u$ . 不妨设  $m \leq n$ .  $t, u$  相容 iff  $\forall k \in m (t_k = u_k)$ . 这由 1)  $t_0 = u_0 = a$ ; 2)  $t_k = u_k \rightarrow t_{k^+} = g(t_k, k) = g(u_k, k) = u_{k^+}$  的成立和归纳原理保证.

接着确定  $f \in A^{\mathbb{N}}$ .  $\text{dom } f \subseteq \mathbb{N}$  和  $\text{ran } f \subseteq A$  是显然的. 下证  $\mathbb{N} \subseteq \text{dom } f$ . 注意到  $\text{dom } f = \bigcup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{存在 } n\text{-近似的}\}$ . 接下来就是证明  $\text{dom } f$  是归纳集, 即  $\forall n \in \mathbb{N}$  存在  $n$ -近似. 0-近似由  $\{(0, a)\}$  给出;  $k$ -近似  $t$  存在时, 只需为之并上  $\{(k^+, g(t_k, k))\}$  即可得到  $k^+$  近似.

至于  $f$  满足  $f(0) = a$  与  $\forall n \in \mathbb{N} (f(n^+) = g(f(n), n))$ , 用其任意近似证明即可, 只需想到  $f$  与近似的相容性.

如此我们确定了  $f$  的存在性, 然后来证明它的唯一性. 假设有  $h: \mathbb{N} \rightarrow A$  也满足定理, 只需用归纳法证明  $h(n) = f(n)$  对任意  $n \in \mathbb{N}$  成立即可.  $\square$

## 索引

$m$ -近似, 13

$n$  元关系, 6

笔记中出现的符号

$(a, b)$ , 5

$2^X$ , 4

$\preceq$ , 11

$S(x)$ , 4

$x^+$ , 4

**AC**, 5

**AC II**, 9

$\mathbb{N}$ , 12

$\mathcal{P}(X)$ , 4

$R(x, y)$ , 6

$\Sigma \vdash \varphi$ , 2

$T \vdash \sigma$ , 2

**V**, 3

$X^2$ , 6

$X \times Y$ , 6

$xRy$ , 6

$Y^X$ , 8

Cartesian 积, 6

Exi, 2

Ext, 2

Fnd, 4

Inf, 4

Pai, 4

Pow, 4

Rep, 5

Sep, 3

Uni, 4

Zermelo-Fraenkel 系统, 5

一致的, 2

一般 Cartesian 积, 7

上界, 11

上确界, 11

下界, 11

下确界, 11

二元关系, 6

交, 3

任意交, 3

传递, 10

值, 7

值域, 6

偏序, 11

偏序集, 11

像, 6

全序, 11

公式, 2

公理, 2

函数, 7

分离公理模式, 3

划分, 10

单射, 8

反对称, 11

可公理化的, 2

- 可判定的, 2
- 可计算的, 2
- 可逆, 8
- 后继, 4
- 商集, 10
- 基础公理, 4
- 复合, 6
- 外延公理, 2
- 子集, 4
- 存在公理, 2
- 定义域, 6
- 对称, 10
- 对集公理, 4
- 差, 3
- 幂集, 4
- 幂集公理, 4
- 并集公理, 4
- 序, 11
- 序列, 13
- 归纳原理, 12
- 归纳集, 12
- 形式语言, 2
  
- 扩张, 8
- 拟序, 11
- 指标函数, 7
- 指标系统, 7
- 指标集, 7
- 推演, 2
- 无穷公理, 4
- 无穷序列, 13
- 替换公理模式, 5
- 最大元, 11
- 最小元, 11
  
- 有序对, 5
- 有穷序列, 13
- 极大元, 11
- 极小元, 11
  
- 理论, 2
- 直积, 6
- 相容, 9
- 相容系统, 9
- 真子集, 4
- 真类, 3
- 空序列, 13
- 空集, 3
- 第二归纳原理, 12
- 等价, 10
- 等价关系, 10
- 等价类, 10
- 等同函数, 7
- 类, 3
- 约束变元, 2
- 线序, 11
- 线序集, 11
  
- 自反, 10
- 自然数, 12
- 自然数集, 12
- 自由变元, 2
- 良序, 11
- 良序集, 11
- 证明, 2
- 语句, 2
- 连接, 11
  
- 逆, 6
- 选择公理, 5, 9



选择函数, 9  
递归可枚举的, 2  
递归定理, 13  
递归的, 2  
逻辑符号, 2  
限制, 8  
非逻辑符号, 2  
项, 2  
预序, 11

## 参考文献

- [1] 数理逻辑: 证明及其限度[M/OL]. 上海: 复旦大学出版社, 2014. <https://books.google.co.jp/books?id=WDPqjgEACAAJ>.