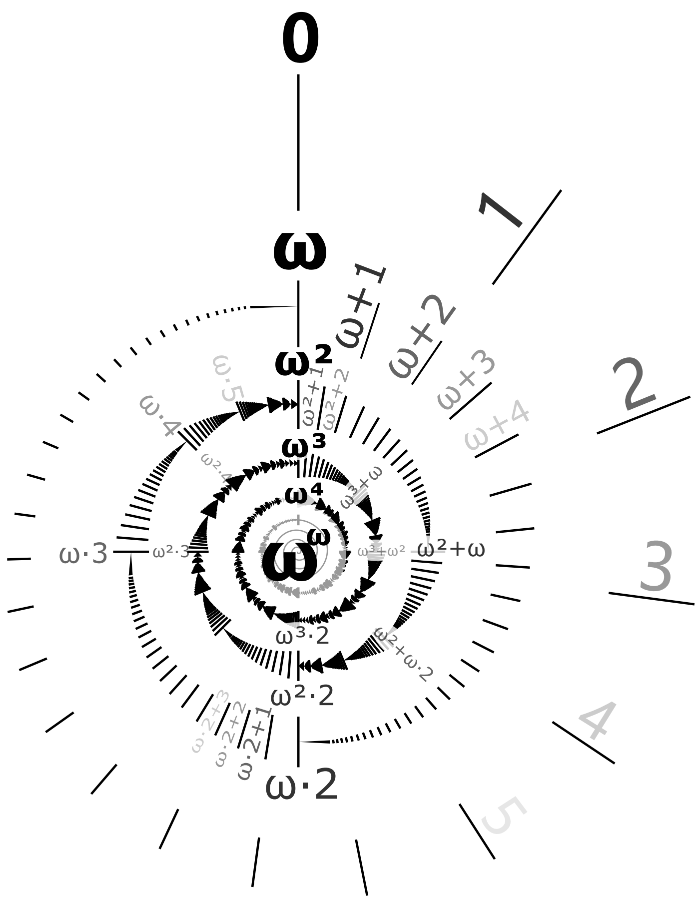
Set Theory

Hoyan Mok [1]

2020 年 10 月 10 日



[1]E-mail: victoriesmo@hotmail.com

B

笔记说明

该笔记是笔者学习集合论的笔记, 主要是为了数学服务 (而非哲学). 主要的参考资料是 [2].

笔者曾疑惑于逻辑公理和集合论公理的先后关系, 查阅资料后, 初步得出这样的结论: 我们必须选择朴素的集合论或者简单的一阶逻辑作为前置, 而它们是在我们的元语言中得到保证的.

本笔记尽量做到自足.

你可以在https://github.com/HoyanMok/NotesOnMathematics/tree/master/SetTheory获得本笔记最新的 PDF 与 TEX 源文档. 封面来源: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Omega-exp-omega-labeled.svg

目录

第一章 集合与公理

在介绍集合论的 **ZFC** 公理之前, 需要先介绍一些数理逻辑的概念.

§1 数理逻辑准备

句法概念如**形式语言**, **逻辑符号**, **非逻辑符号**, **项**, **公式**, **自由变元**, **约束变元**, **语句**等主要见 [1].

设 Σ 是一个公式集, φ 是一个公式.

Definition 1.1. 有穷公式序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 表示从 Σ 到 φ 的一个**推演**, 如果其中的任意 φ_i 要么是属于 Σ 的, 要么可从之前的公式 φ_j 和 $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ 得到, 而且 $\varphi_n = \varphi$. 记作 $\Sigma \vdash \varphi$.

特别地, 如果 T 是语句集, 而 σ 是语句, 如果 $T \vdash \sigma$, 就称存在从 T 到 σ 的一个**证明**.

如果语句集 T 满足: 对任意语句 σ, $T \vdash \sigma$ 当且仅当 $\sigma \in T$, 即 T 是一个对证明封闭的语句集, 就称 T 为**理论**. 假设 T 是理论, 如果存在一个语句集 $A \subseteq T$ 使得对任意的 $\sigma \in T$ 都有 $A \vdash \sigma$, 就称 A 为 T 的一集**公理**.

如果理论 T 的公理 A 是**递归的** (**可判定的**, **可计算的**) i.e. 任给一语句, 总可以在有穷步骤内完全机械地判定它是否属于 A, 就称 T 是**可公理化的**. 理论 T 往往不是递归的, 但如果任给 $\sigma \in T$, 我们可在有穷的步骤内得出结论, 但如果 $\sigma \notin T$, 我们可能不能在有穷步骤内得出结论, 则称其为**递归可枚举的**.

一个理论是**一致的**当且仅当没有语句 σ s.t. $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$.

Definition 1.2. 若 ψ 是性质.

$$\exists! x\psi(x) := \exists x\psi(x) \wedge \forall x \forall y(\psi(x) \wedge \psi(y) \to x = y) \tag{1-1}$$

§2 ZFC 公理

Axiom 0 (**存在公理**, ***Exi***)**.** *存在一个集合, i.e.*

$$\exists x(x = x). \tag{2-1}$$

Axiom 1 (**外延公理**, ***Ext***)**.** *两个有相同元素的集合相等, i.e.*

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y. \tag{2-2}$$

而逻辑上有 $X = Y \to \forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$, 所以:

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y \tag{2-3}$$

记 $\neg(X = Y) =: X \neq Y$.

Axiom 2 (**分离公理模式**, ***Sep***)**.** *令 $\varphi(u)$ 为公式. 对任意集合 X, 存在一个集合 $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$, i.e.*

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \tag{2-4}$$

Corollary 1.

$$\forall X \exists R_X(R_X \notin R_X). \tag{2-5}$$

Proof. 令 $R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$ 即可. □

令 $\varphi(u)$ 为一个性质. 倘若 $\exists X \forall u(\varphi(u) \to u \in X)$, 则 $u \mid \varphi(u) = u \mid \varphi(u)$, 根据 Sep (axiom 2), $\exists \varnothing = u \mid \varphi(u)$. 分离于不同的集合 X 和 X' 的 $\varnothing$ 是相同的. 考虑到 $x \neq x \to x \in X$ 是重言式, 再根据 Exi (axiom 0), 可以得出:

Definition 2.1. $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ 是集合, 称为**空集**.

Definition 2.2. $\varphi(u)$ 是一个性质. 称 $\{u \mid u(u)\}$ 为一个**类** (class). 若一个类不是集合, 则称其为**真类** (proper class).

如所有集合的类 $\mathbf{V}$ 就是一个真类 (根据 Corollary 1).

Definition 2.3. 由 Sep, 两个集合的**交**和**差**也是集合:

$$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\} \qquad X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\} \tag{2-6}$$

Corollary 2. 而非空集 $X \neq \varnothing$ 的**任意交**

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y \in X(u \in Y)\} \tag{2-7}$$

也是集合.

Proof. 因 $X \neq \varnothing$, $\exists x_0 \in X$. 由 Sep,

$$Y = \{y \in x_0 \mid \forall x \in X(y \in x)\}$$

是集合. □

Axiom 3 (**对集公理**, ***Pai***)**.**

$$\forall a \forall b \exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b). \tag{2-8}$$

这样的 c 可记为 $\{a, b\}$.

Axiom 4 (**并集公理**, ***Uni***)**.**

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow \exists z \in X(u \in z)). \tag{2-9}$$

Definition 2.4. **子集**和**真子集**关系定义如下:

$$X \subseteq Y := \forall x \in X(x \in Y), \tag{2-10}$$
$$X \supseteq Y := Y \subseteq X, \tag{2-11}$$
$$X \subset Y := X \subseteq Y \wedge X \neq Y, \tag{2-12}$$
$$X \supset Y := X. \tag{2-13}$$

Corollary 3. $\forall X(\varnothing \subseteq X)$.

Axiom 5 (**幂集公理**, ***Pow***)**.**

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{2-14}$$

这样的 Y 称为 X 的**幂集**, 记为 $\mathscr{P}(X)$ 或 2^X.

Definition 2.5. 对任意集合 x, $x \cup \{x\}$ 称为其**后继**, 记为 $S(x)$ 或 x^+.

Axiom 6 (**无穷公理**, ***Inf***)**.**

$$\exists X\big(\varnothing \in X \wedge \forall x(x \in X \to S(x) \in X)\big). \tag{2-15}$$

Axiom 7 (**基础公理**, ***Fnd***)**.**

$$\forall x\big(x \neq \varnothing \to \exists y \in x(x \cap y = \varnothing)\big). \tag{2-16}$$

Theorem 2.1.

$$\forall x(x \notin x). \tag{2-17}$$

Proof. 考虑 $X = \{x\}$. 与 Fnd 矛盾. $\square$

Theorem 2.2.

$$\nexists X\big(X \neq \varnothing \wedge \forall x \in X(\exists y \in X(y \in x))\big). \tag{2-18}$$

Proof.

$$\mathrm{Fnd} \wedge \forall x \in X\big(\exists y \in X(y \in x \cap X)\big) \to \bot.$$

$\square$

Axiom 8 (**替换公理模式**, ***Rep***)**.** *对公式 $\psi(x,y)$, $\forall x$ 都存在唯一的 y s.t. $\psi(x,y)$ 成立. 那么 $\forall A \in \mathbf{V}$, 存在集合:*

$$B = \{y \mid \exists x \in A\, \psi(x,y)\} \tag{2-19}$$

i.e.

$$\forall A \forall x \in A\, \exists! y\, \psi(x,y) \to \exists B \forall x \in A\, \exists y \in B\, \psi(x,y) \tag{2-20}$$

Axiom 9 (**选择公理**, **AC II**)**.** *对任意非空集合 $X \neq \varnothing$, 若*

(1) $\varnothing \notin X$,

(2) X 中两两不交, 即 $\forall x \in X\, \forall y \in X$ 且 $x \neq y$, 那么 $x \cap y = \varnothing$,

则存在集合 S, 对 $\forall x \in S$, $S \cap x$ 是单点集. i.e.

$$\begin{aligned} &\forall X\big(\varnothing \in X \wedge \forall x \in X\, \forall y \in X(x = y \vee x \cap y = \varnothing) \\ &\qquad \to \exists S \forall x \in X\, \exists! y(S \cap x = \{y\})\big). \end{aligned} \tag{2-21}$$

Axiom 0 到 8 构成的公理系统称为 ***Zermelo-Fraenkel* 系统**, 记为 **ZF**, 加上选择公理则记为 **ZFC**.

第二章　关系与函数

§3　关系

Definition 3.1. 集合 a,b 的**有序对**$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$.

Theorem 3.1.

$$(a,b) = (a',b') \leftrightarrow a = a' \land b = b'.$$

Proof. 只证明"$\rightarrow$":

(1) $a = b$. $(a,b) = \{\{a\}\} = (a',b')$, 故 $(a',b') = \{\{a\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\}$, 由 Ext (axiom 1), $\{a'\} = \{a',b'\} = \{a\}$, 即 $a = b = a' = b'$.

(2) $a \neq b$. 假设 $\{a,b\} = \{a'\}$, 得 $\forall x \in \{a,b\}(x = a')$ 即 $a = b = a'$ 与 $a \neq b$ 矛盾. 从而只有 $\{a,b\} = \{a',b'\} \land \{a\} = \{a'\}$, 仍然由 Ext 易证.

$\square$

Definition 3.2. 令 X 和 Y 是集合, 其**直积**或 ***Cartesian* 积**定义为:

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X \land y \in Y\}. \tag{3-1}$$

简记 $X \times X =: X^2$.

Theorem 3.2. *对于 $\forall X \forall Y$, $X \times Y$ 是集合.*

Proof. 令 $\varphi(z) = \exists x \in X \exists y \in Y((x,y) = z)$, 取 $Z = \{z \in \mathscr{P}(X \cup Y) \mid \varphi(z)\}$, 由 Ext 和 Sep (axiom 2) 即可知 $X \times Y = Z$. $\square$

Definition 3.3. 如果存在集合 X,Y s.t. $R \subseteq X \times Y$, 则称集合 R 是**二元关系**. 通常记 $(x,y) \in R =: R(x,y)X$, 或 $xRyxRy$. $\operatorname{dom} R := \{x \mid \exists y R(x,y)\}$ 称为其**定义域**, $\operatorname{ran} R = \{y \mid \exists x R(x,y)\}$ 称为其**值域**.

特别地, 如果 $R \subseteq X^2$, 则称其为 X 上的二元关系.

Definition 3.4. 集合 X 在关系 R 的**像**$R[X]$ 定义为 $\{y \in \operatorname{ran} R \mid \exists x \in X\,(R(x,y))\}$. 集合 Y 的逆像 $R^{-1}[Y]$ 则定义为 $\{x \in \operatorname{dom} R \mid \exists y \in Y\,(R(x,y))\}$. 二元关系 R 的**逆**R^{-1} 是 $\{(x,y) \mid R(y,x)\}$. 两个二元关系 R, S 的**复合**$S \circ R$ 则定义为 $\{(x,z) \mid \exists y(R(x,y) \wedge S(y,z))\}$.

Theorem 3.3. *令 R 是二元关系, A, B 是集合. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$, $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$, $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$.*

Cartesian 积可递归地推广到 n 元:

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) = ((x_1, \cdots, x_n), x_{n+1}); \tag{3-2}$$

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n\} \tag{3-3}$$

n 元 Cartesian 积的子集可类似地定义n **元关系**.

Theorem 3.4. *n 元 Cartesian 积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 是空集, 则存在 $X_i = \varnothing$.*

§4 函数

Definition 4.1. 二元关系 f 倘满足:

$$\forall x\big((x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \to y = z\big),$$

则称 f 是**函数**, y 是 f 在 x 处的**值**, 记为 $f(x) = y$, 或 $f\colon x \mapsto y$. 倘若 $\operatorname{dom} f = X$, $\operatorname{ran} f \subseteq Y$, 则称 f 是 X 到 Y 的函数, 记为 $f\colon X \to Y$.

对任意集合 X 定义 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 为 $\forall x \in X(\mathrm{id}_X(x) = x)$, 称为**等同函数**.

Theorem 4.1. *令 f, g 都是函数.*

$$f = g \leftrightarrow \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g \wedge \forall x \in \operatorname{dom} f\big(f(x) = g(x)\big).$$

Proof. 只证明"$\leftarrow$":

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in f\big(x \in \operatorname{dom} f \wedge y = f(x)\big) \wedge \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g \wedge \forall x \in \operatorname{dom} f\big(f(x) = g(x)\big)\\ \to \forall (x,y) \in f\big(x \in \operatorname{dom} g \wedge y = g(x)\big).\end{aligned}$$

同理, $\forall (x,y) \in g\big(x \in \operatorname{dom} f \wedge y = f(x)\big)$, 即 $\forall (x,y)\big(y = f(x) \leftrightarrow y = g(x)\big)$. 由 Ext, $f = g$. □

通常以集合为值的函数 $i \mapsto X_i$, 其中 $i \in I$, 可视为**指标系统**, I 是**指标集**. 记为 $X = \{X_i \mid i \in I\}$ 或 $\{X_i\}_{i \in I}$.

Theorem 4.2. *$\psi(i,x)$ 是公式. $\forall I \forall X$,*

$$\bigcup_{i\in I}\{x\in X \mid \psi(i,x)\} = \{x\in X \mid \exists i\in I\big(\psi(i,x)\big)\},$$
$$\bigcap_{i\in I}\{x\in X \mid \psi(i,x)\} = \{x\in X \mid \forall i\in I\big(\psi(i,x)\big)\}.$$

Definition 4.2. 令 $X=\{X_i \mid i\in I\}$ 是一个指标系统. X 的**一般 *Cartesian* 积**为:

$$\prod_{i\in I} X_i := \{f \mid f\colon I\to X_i\}.$$

另, $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ 称为**指标函数**.

注: 虽然这样的定义和 Cartesian 积不同, 但接下来的概念确保了, 两者之间可以一一对应, 从而是等同的.

Definition 4.3. 令 $f\colon X\to Y$ 是函数. 若 $f(x_1)=f(x_2)\leftrightarrow x_1=x_2$ 则称 f 为**单射** (injection). 若 $\operatorname{ran} f = Y$ 则称其为**满射** (surjection). 既单又满的函数称为**双射** (bijection). 如果函数的逆 f^{-1} 也是函数, 则函数 f 称为**可逆**的.

作为例子, 若空映射 $\operatorname{ran} f=\operatorname{dom} f=\varnothing$, $f=\varnothing$ 总是单的, $f^{-1}=\{(y,x)\mid y=f(x)\}=\varnothing$ 也是空映射.

注: 这里函数的逆的定义与通常不同, 因 $\operatorname{dom} f^{-1}=\operatorname{ran} f$ 而非 Y. 因而下面的定理在这样的定义下是成立的 (否则还要加上满射的条件):

记 $Y^X := \{f \mid f\colon X\to Y\}$. $\forall Y\big(Y^{\varnothing}=\{\varnothing_Y\}\big)$, 而若 $X\neq\varnothing$, $\varnothing^X=\varnothing$.

Theorem 4.3. *函数 f 可逆 iff f 是单射.*

Proof. 可逆意味着 $(y,x_1)\in f^{-1}\wedge(y,x_2)\in f^{-1}\leftrightarrow x_1=x_2$, 又由逆的定义, $y=f(x_1)\wedge y=f(x_2)\leftrightarrow x_1=x_2$, 这即是单射的定义. □

Theorem 4.4. *函数 f 若可逆, 则 f^{-1} 可逆, 且 $(f^{-1})^{-1}=f$.*

证明从略.

Theorem 4.5. *如果 f 和 g 是函数, 它们的复合 $h=g\circ f$ 也是函数. 而且 $\operatorname{dom} h = f^{-1}\big(\operatorname{dom} g\big)$.*

注: 这里的复合和通常的定义有细微不同, 但保持了与二元关系的统一.

Proof. 复合的定义: $h = g \circ f \leftrightarrow \forall (x,z) \in h\Big(\exists y\big(y = f(x) \land z = g(y)\big)\Big)$. 倘若 $(x,u) \in h \land (x,u) \in h$, 有 $\exists! y$ s.t. $y = f(x)$, 且 $u = v = g(y)$. 因而 h 也是函数.

其定义域 $\operatorname{dom} h = \{x \mid \exists z\big(z = h(x)\big)\}$, 又因 $\exists z(z = h(x)) \leftrightarrow \exists z \exists y\big(y = f(x) \land z = g(y)\big)$, 后者又等价于 $\exists y\Big(y = f(x) \land \exists z\big(z = g(y)\big)\Big)$, i.e. $\exists y \in \operatorname{dom} g\big(y = f(x)\big)$,

$$\operatorname{dom} h = \{x \mid \exists y \in \operatorname{dom} g\big(y = f(x)\big)\} = f^{-1}(\operatorname{dom} g).$$

□

Definition 4.4. 令 f 是任意函数, A 是任意集合. 函数 $f \restriction A = \{(x,y) \in f \mid x \in A\}$ 是 f 在 A 上的**限制**. 若 $g = f \restriction A$, 则称 f 是 g 在 $\operatorname{dom} f$ 的**扩张**.

Definition 4.5. 函数 f, g 被认为是**相容**的, 如果:

$$\forall x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g\big(f(x) = g(x)\big)$$

指标系统 $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ 被称为**相容系统**, 如果

$$\forall f_i \in \mathcal{F} \forall f_j \in \mathcal{F}(\ f_i \text{ 和 } f_j \text{ 相容.})$$

Theorem 4.6. *f 和 g 是函数. 以下的命题是等价的:*

(1) f 与 g 相容;

(2) $f \cup g$ 是函数;

(3) $f \restriction \big(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g\big) = g \restriction \big(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g\big)$.

Proof. (1)↔(3): 注意到 $\operatorname{dom}\Big(f \restriction \big(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g\big)\Big) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$. 由相容的定义和定理4.1可得证.

(2)↔(1): 假设 f 与 g 不相容, 即 $\exists x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} f \cup g$ s.t. $f(x) \neq g(x)$, 这与函数 $f \cup g$ 的定义不相符. 若 $f \cup g$ 不是函数, 它至少是 $\operatorname{dom} f \cup \operatorname{dom} g \times \operatorname{ran} f \cup \operatorname{ran} g$ 上的二元关系, 由函数的定义, $\exists x \in \operatorname{dom} f \cup g$ s.t. $\exists y_1 \exists y_2\big((x,y_1) \in f \cup g \land (x,y_2) \in f \cup g \land y_1 \neq y_2\big)$. 通过对 x 在 $\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g$, $\operatorname{dom} g - \operatorname{dom} f$, $\operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} g$ 讨论, 可以得出要么 f 或 g 不是函数 (从而与题设矛盾), 要么 f, g 不相容. □

Axiom 9 (**选择公理** (第二形式), **AC II**)**.**

$$\forall \mathcal{F}\Big(\varnothing \notin \mathcal{F} \land \mathcal{F} \neq \varnothing \land \exists f \colon \mathcal{F} \to \cup \mathcal{F}\big(\forall F \in \mathcal{F}(f(F) \in F)\big)\Big)$$

其中这样的 f 通常被称为**选择函数**.

对于任意非空 ω (尤其是当 ω 是无穷集时), $\prod_{i\in\omega X_i} = \varnothing \to \exists i \in \omega(X_i = \varnothing)$ 与选择公理等价.[1]

§5 等价和划分

Definition 5.1. 令 $R \subseteq X^2$ 是 X 上的二元关系. R 是:

(1) **自反**的, 若 $\forall x \in X(xRx)$;

(2) **对称**的, 若 $\forall x \in X \forall y \in X(xRy \to yRx)$;

(3) **传递**的, 若 $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X(xRy \wedge yRz \to xRz)$;

(4) **等价关系**或**等价**的, 若 R 自反, 对称, 传递. 记为 $\sim$.

Definition 5.2. 令 $\sim$ 是 X 上的等价关系, $x \in X$. x 关于 $\sim$ 的**等价类**定义为:

$$[x]_\sim := \{t \in X \mid t \sim x\}.$$

注: 由 Sep, 等价类是集合而不是真类.

Theorem 5.1. *令 $\sim$ 是 X 上的等价关系.*

$$\forall x \in X \forall y \in Y\big([x]_\sim = [y]_\sim \wedge [x]_\sim \cap [y]_\sim = \varnothing\big)$$

Definition 5.3. 令 X 是一集合, $S \subseteq \mathscr{P}(X)$. S 被称为 X 的一个**划分**如果:

$$\forall a \in S \forall b \in S(a = b \vee a \cap b = \varnothing) \wedge \cup S = X.$$

Definition 5.4. 令 $\sim$ 是 X 上的等价关系. $X/\sim := \{[x]_\sim \mid x \in X\}$ 称为 X 的**商集**.

Theorem 5.2. *令 $\sim$ 是 X 上的等价关系. $X/\sim$ 是 X 的一个划分.*

Theorem 5.3. *令 S 为 X 的划分, 定义二元关系:*

$$\sim_S := \{(x, y) \in X^2 \mid \exists s \in S(x \in s \wedge y \in s)\}.$$

那么, $\sim_S$ 是等价关系, $X/\sim_S = S$. 若 X 上的等价关系 $\sim$ 满足 $X/\sim = S$, 则 $\sim_S = \sim$.

Proof. $\cup S = X \to \forall x \in X \exists s \in S(x \in s)$, 即 $\sim_S$ 是自反的. 对称和传递性显然. 从而, $\sim_S$ 是等价关系.

依商集和等价类的定义, $\forall s \in X/\sim_S \exists x \in X \forall t\big(t \in s \leftrightarrow \exists s' \in S(x \in s' \wedge t \in s')\big)$. 这之后我遇到了困难. □

[1] 维基百科页面

§6 序

Definition 6.1. 如果 X 上的二元关系 $\leq$ 满足:

a) 自反 i.e. $\forall x \in X(x \leq x)$;

b) **反对称** i.e. $\forall x \in X \forall y \in X(x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$;

c) 传递 i.e. $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$,

则称其为 X 上的**偏序** (partial order) 或**序**, 记 $(X, \leq)$, 并称 X 是一个**偏序集** (partially ordered set, appr. poset). 如果它还是**连接**的 i.e. $\forall x \in X \forall y \in X(x \leq y \vee y \leq x)$, 那么它是 X 上的**线序**或**全序** (total order), 此时也称 X 是一个**线序集**.

通常记 $\geq := \leq^{-1}$, $< := \leq \cap \neq$, $> := <^{-1}$.

Definition 6.2. 如果 X 上的关系 $\preceq$ 只满足传递和自反, 称其为 X 上的**拟序** (quasi-order) 或**预序** (preorder). $\succeq := \preceq^{-1}$.

Theorem 6.1. *令 $\preceq$ 是 X 上的拟序, 等价关系 $\sim$ 可由 $\sim = \preceq \cap \succeq$ 定义, 且商集 $X/\sim$ 上的偏序关系 $\leq$ 可定义为*

$$[x] \leq [y] \leftrightarrow x \preceq y.$$

Definition 6.3. 如果对于 $a \in X$ 满足 $\forall x \in X(\neg(a > x))$, 则称 a 为 X 的**极小元**. 如果对于 $a \in X$ 满足 $\forall x \in X(a \leq x)$, 则称 a 为 X 的**最小元**. 相反则有**极大元**和**最大元**.

令 $X_0 \subseteq X$. 如果 $\exists a \in X \forall x \in X_0(a \leq x)$, 则称 X_0 在 X 中有下界, a 是 X_0 在 X 中的**下界**. 如果这样的下界 a 的集合有最大元 a_0, 称其为**下确界** (infimun, appr. inf), 记为 $\inf X_0$. 同理有**上界**和**上确界** (supremun, appr. sup) $\sup X_0$.

作为例子, 令 $X \neq \varnothing$, $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ 是偏序集. 对于 $\forall S \subseteq \mathscr{P}(X)$, S 有上下确界, $\sup S = \cup S$, $\inf S = \cap S$.

Definition 6.4. 如果 X 和其上的线序 $(X, \leq)$ 满足任意 $X_0 \in \mathscr{P}(X)$, X_0 都有最小元, 则称 $\leq$ 为 X 上的**良序**, X 被称为**良序集**.

第三章　实数

§7　自然数

根据 Inf (axiom 6), 这样的集合是存在的:

Definition 7.1. 如果集合 X 满足:

$$\varnothing \in X \wedge \forall x(x \in X \to x^+ \in X)$$

则称其为**归纳集**.

容易知道 $0 := \varnothing$ 属于任何归纳集, $1 := 0^+$ 也属于任何归纳集, ..., 以此类推. 最小的归纳集被称为**自然数集**, 它的严格定义如下:

Definition 7.2.

$$\mathbb{N} := \{n \mid \forall X(X \text{ 是归纳集} \to n \in X)\}.$$

$\mathbb{N}$ 是**自然数集**, 其元素是**自然数**.

从定义上可以看出, $\mathbb{N}$ 是归纳集, 而且是任何归纳集的子集.

Theorem 7.1. **归纳原理** *令 $\varphi(n)$ 是一个性质. 如果*

a) $\varphi(0)$ 成立;

b) $\forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n) \to \varphi(n^+))$ 成立,

那么, $\forall n \in \mathbb{N}\, \varphi(n)$ 成立.

Proof. 构造集合 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$, 根据它是归纳集, 可知 $\mathbb{N} \subseteq M$, 但 M 是根据 Sep 从 $\mathbb{N}$ 中分离出来的, 得知 $M = \mathbb{N}$. $\square$

在 $\mathbb{N}$ 上定义偏序关系 $\leq = \in \cup =$, 而且可以证明, 这是一个良序.

Theorem 7.2. **第二归纳原理** *令 $\varphi(n)$ 是一个性质.*

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall k \in n\, \varphi(k) \to \varphi(n)) \to \forall n \in \mathbb{N}\, \varphi(n)$$

§8 递归定理

接下来我们要定义一些二元函数, 即我们熟悉的自然数集上的运算. 我们可以递归地给出它们的定义, 但这种定义的合理性需要递归定理的辩护.

Definition 8.1 (序列)**.** 以 $n \in \mathbb{N}$ 或 $\mathbb{N}$ 为定义域的函数称为**序列**, 其中前者称为长度为 n 的**有穷序列**, 后者称为**无穷序列**, 通常分别记为 $\langle a_k \mid k \in n\rangle$ 或 $\langle a_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle$, 或简记为 $\langle a_k\rangle_{k\in n}$ 或 $\langle a_k\rangle_{k\in\mathbb{N}}$. 值域通常记为 $\{x_k \mid k < n\}$ 或 $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, 或简记为 $\{a_k\}_{k<n}$ 或 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. 特别地, 长度为 0 的序列称为**空序列**.

若序列的到达域是 A, 则通常称为 A 内的序列. 集合 A 内所有有穷序列的集合可记为 $A^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$.

Theorem 8.1. 递归定理

$$\forall A \forall a \in A \forall g \in A^{A\times\mathbb{N}} \exists! f \in A^{\mathbb{N}}\big(f(0) = a \wedge \forall n \in \mathbb{N}(f(n^+) = g(f(n), n))\big).$$

这里的 g 扮演了一个 “递推式” 的角色.

Proof. 首先, 我们需要证明 f 的*存在性*.

注意到 f 是 A 中的无穷序列, 我们考虑用满足条件的有穷序列去逼近它. 基于 a 和 g 的m-**近似**定义为有穷序列 $t\colon m^+ \to A$ 满足

$$t_0 = a \wedge \forall k \in m^+\big(t_{k^+} = g(t_k, k)\big).$$

并记 $\mathcal{F} = \{t \in \mathscr{P}(\mathbb{N}\times A) \mid t是\ m\text{-}近似\}$, 及 $f = \cup\mathcal{F}$. 接下来我们证明这个 f 是所寻找的函数.

首先证明它是函数. 由 theorem 4.6, 知这当且仅当 $\mathcal{F}$ 相容. 令 $t, u \in F$. 记 $m = \operatorname{dom} t$, $n = \operatorname{dom} u$. 不妨设 $m \leq n$. t, u 相容 *iff* $\forall k \in m(t_k = u_k)$. 这由 1) $t_0 = u_0 = a$; 2) $t_k = u_k \to t_{k^+} = g(t_k, k) = g(u_k, k) = u_{k^+}$ 的成立和归纳原理保证.

接着确定 $f \in A^{\mathbb{N}}$. $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{N}$ 和 $\operatorname{ran} f \subseteq A$ 是显然的. 下证 $\mathbb{N} \subseteq \operatorname{dom} f$. 注意到 $\operatorname{dom} f = \cup\{n \in \mathbb{N} \mid 存在\ n\text{-}近似\}$. 接下来就是证明 $\operatorname{dom} f$ 是归纳集, 即 $\forall n \in \mathbb{N}$ 存在 n-近似. 0-近似由 $\{(0, a)\}$ 给出; k-近似 t 存在时, 只需为之并上 $\{(k^+, g(t_k, k))\}$ 即可得到 k^+ 近似.

至于 f 满足 $f(0) = a$ 与 $\forall n \in \mathbb{N}(f(n^+) = g(f(n), n))$, 用其任意近似证明即可, 只需想到 f 与近似的相容性.

如此我们确定了 f 的存在性, 然后来证明它的*唯一性*. 假设有 $h : \mathbb{N} \to A$ 也满足定理, 只需用归纳法证明 $h(n) = f(n)$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立即可. □

这样的 f 只能是一元函数, 定义运算需要带参数的版本:

Theorem 8.2 (带参数的递归定理)**.**

$$\forall A \forall P \forall a \in A^P \forall g \in A^{P\times A\times\mathbb{N}} \exists! f \in A^{P\times\mathbb{N}} \big(\forall p \in P\, f(p,0) = a(p) \wedge \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in P (f(p,n^+) = g(p, f(n,p), n)) \big).$$

注: 如果固定 p, 这个定理与递归定理几乎一致, 从而我们需要考虑以 p 为变元的函数作为递归定理中的到达域.

Proof. 令 $G\colon A^P \times \mathbb{N} \to A^P$; $(t,n) \mapsto h$, 其中 h 满足 $\forall p \in P\big(h(p) = g(p, t(p), n)\big)$. 考虑到 t 和 g 都是函数, 复合的 h 当然是函数, 而且唯一.

由递归定理, 有这样的函数 $F\colon \mathbb{N} \to A^P$ 满足 1) $\forall p \in P\big(F(0) = a \in A^P\big)$; 2) $\forall n \in \mathbb{N}\big(F(n^+) = G(F(n), n)\big)$.

可以验证 $f(p,n) = F(n)(p)$ 即是我们想找的函数. □

有了带参数的递归定理, 自然数上的运算可以看作以下存在而且唯一的二元函数:

Definition 8.2. **加法**$+\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足 1) $\forall m \in \mathbb{N}\big(+(m,0) = m\big)$; 2) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}\big(+(m,n^+) = (+(m,n))^+\big)$. 通常记 $+(m,n) =: m+n$.

Definition 8.3. **乘法**$\cdot\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足 1) $\forall m \in \mathbb{N}\big(\cdot(m,0) = m\big)$; 2) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}\big(\cdot(m,n^+) = (\cdot(m,n))^+\big)$. 通常记 $\cdot(m,n)$ 为 mn 或 $m \cdot n$.

我们熟悉的关于乘法和加法的性质都可以由归纳原理证出, 此处不再赘述.

§9 势

Definition 9.1 (等势)**.** 两个集合 X, Y **等势** (equinumerous) 指的是 $\exists f \in Y^X$(f是双射), 记为 $|X| = |Y|$.

Definition 9.2 (势)**.** 若存在 $f \in Y^X$ s.t. f 是单射, 则称 $|X| \le |Y|$. 当 $|X| \le |Y|$ 而 $|X| \ne |Y|$ 时, 我们就称 X 的势小于 Y 的势, 记为 $|X| < |Y|$.

Theorem 9.1.

$$|X| \le |Y| \leftrightarrow \exists Y_0 \in \mathscr{P}(Y)\big(|X| = |Y_0|\big).$$

Proof. 对于 $f \in Y^X$ 且 f 是单的, 取 $Y_0 = \operatorname{ran} f$ 即可. □

下面我们将介绍 Cantor-Bernstein-Schröeder 定理, 它的证明当中最重要的一部分是以下引理的证明:

Lemma 1.

$$A' \subseteq B \subseteq A \wedge |A'| = |A| \to |B| = |A|.$$

注: 我们已经知道有 A 到 B 的单射了, 怎么找到一个同时是满的呢? 这要求这个双射 h 要把 $A - B$ 和 B 映射到 B 的分划上, 可 $h[A-B]$ 在 B 之中, 它在 h 下必须映射到 $h[B]$ 里; 同理 $h\big[h[A-B]\big]$ 必须映射到 $h[B] - h\big[h[A-B]\big]$ 中...

也就是说: A 和 $A - B$ 在 h^n 即 h 的任意个复合中, 总是映射到一对不相交的集合 $h^n[A]$, $h^n[A-B]$ 中 (否则不可能是单的), 而且 $h^n[A-B]$ 在 h 的映射下, 又只能落到 $h^n[B]$ 中. 从而: $h^n[B]$ 不断在缩小, 给 $h^n[A-B]$ 腾出空间. 这是以下证明的重要思路.

Proof. 令 h 见证了 A' 和 A 的等势, 即 $h \in A'^A$ 且 h 是双射. 记:

$$A_0 := A, \qquad B_0 := B,$$

并定义序列:

$$A_{n+1} = h[A_n], \qquad B_{n+1} = h[B_n].$$

我们可以归纳地证出:

$$\forall n \in \mathbb{N}(A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n),$$

只需认识到 $A_1 \subseteq A' \subseteq B_0 \subseteq A_0$, 且对于任意 $k \subseteq \mathbb{N}$ 只要 $A_{k+1} \subseteq B_k \subseteq A_k$, 则 $h[A_{k+1}] \subseteq h[B_k] \subseteq h[A_k]$.

定义 $C_n = A_n - B_n$, 下验证 $h[C_n] = C_{n+1}$:

$$h[C_n] = h[A_n - B_n] = h[A_n] - h[B_n] = A_{n+1} - B_{n+1} = C_{n+1},$$

其中第二个等式的成立依赖于 h 是一个单射, 因为: $h[A_n]$ 中 $h[B_n]$ 全部由 B_n 映射而来, 这是单性要求的; 从而 $h[A_n] - h[B_n]$ 是 $A_n - B_n$ 的像, 因为映射到自身的值域总是满的.

将这些所有的 C_n 并起来:

$$C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n,$$

从而

$$h[C] = h\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C - C_0 = C - (A - B).$$

我们可以看到 C 中的元素有这样的性质, 它含于某个 C_n 中, 并将被 h 映射到下一个 C_{n+1} 中; 而且要么它是 $C_0 = A - B$ 中的元素, 要么是 C_{n-1} 中某个元素的在 h 下的像. 这有些像 Hilbert 的无限旅馆. $h \restriction C$ 到是从 C 到它的子集 $h[C]$ 的满射, 而它的单性已由 h 自身的单性保证了.

而 h 在 $A-C$ 的限制却不一定是满的, 因为 $h[A] = A' \subseteq B$ 本身就不一定是到 B 的满射. 因为

$$A - C = (A - C_0) \cap (A - h[C]) \subseteq A - C_0 = A - (A - B) = B,$$

所以 $A-C$ 和 $h[C]$ 构成了 B 的分划.

因而我们可以这样定义 A 到 B 的双射:

$$i(x) = \begin{cases} h(x), & x \in C; \\ x, & x \in A - C. \end{cases}$$

$\square$

Theorem 9.2 (***Cantor-Bernstein-Schröeder* 定理**)**.** 如果 $|X| \le |Y|$ 且 $|Y| \le |X|$, 则 $|X| = |Y|$.

Proof. $|X| \le |Y|$ 和 $|Y| \le |X|$ 分别蕴含了单射 $f \in Y^X$ 和 $g \in X^Y$ 的存在, 且有

$$g\big[f[X]\big] \subseteq g[Y] \subseteq X,$$

和 $|g[Y]| = |Y|$, $\big|g\big[f[X]\big]\big| = |f[X]| = |X|$. 由引理1, 这意味着 $|X| = |Y|$. $\square$

注: 早先的 Cantor-Bernstein-Schröeder 定理利用了 **AC**, 但这里的证明避免了它.

这个定理说明了 $\le$ 拥有传递性, 这意味着 $\le$ 是一个偏序. 而且, 在 $\mathbb{N}$ 中, 它和先前定义的自然数的偏序 $\le$ 是等同的. 这暗示我们可以这样做: 记 $|n| = n$, 只要 $n \in \mathbb{N}$.

Definition 9.3 (有穷与无穷)**.** 设 X 是一个集合.

(1) 倘若 $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $|X| = n$, 则称 X 是**有穷的**.
(2) 倘若 $\forall n \in \mathbb{N}$, $|X| \ne n$, 则称 X 是**无穷的**.
(3) 倘若 $|X| = |\mathbb{N}|$, 就称 X 是**可数的**或**可数无穷的**.
(4) 有穷或可数的集合称为**至多可数的**.
(5) 不是可数的无穷集合称为**不可数的**.

Theorem 9.3 (**抽屉原理**)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall X \in \mathscr{P}(n) - \{n\}$, $|X| \ne |n|$.

Proof. 首先, $1^0 := \{\varnothing\}^{\varnothing}$ 是空集, 因而 $\forall X \in \mathscr{P}(1) - \{1\} = \{\varnothing\}, |X| = 0 \neq |1|$ 成立.

其次, 假设命题对 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 但对 $n+1$ 不成立, 那么 $\exists m \in \mathscr{P}(n+1)$, 即 $m \leq n+1$, 使得 $|m| = m = n+1 = |n|$. 考虑到 Lemma 1, 因 $m \subseteq n \subseteq n+1$, 而 $|m| = |n|$, 所以 $|n| = |m|$, 与假设矛盾. $\square$

参考文献

[1] 数理逻辑*: 证明及其限度*. 逻辑与形而上学教科书系列. 上海: 复旦大学出版社, 2014. ISBN: 9787309110258. URL: https://books.google.co.jp/books?id=WDPqjgEACAAJ.

[2] 集合论*: 对无穷概念的探索*. 逻辑与形而上学教科书系列. 复旦大学出版社, 2014. ISBN: 9787309107104. URL: https://books.google.co.jp/books?id=Su2-nQAACAAJ.

符号列表

这里列出了笔记中出现的重要符号.

索引