

# Set Theory

Hoyan Mok

2020 年 1 月 19 日

## 目录

<b>1</b>	<b>集合与公理</b>	<b>2</b>
1.1	数理逻辑准备 . . . . .	2
1.2	<b>ZFC</b> 公理 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>关系与函数</b>	<b>5</b>
2.1	关系 . . . . .	5
2.2	函数 . . . . .	6

# 1 集合与公理

在介绍集合论的 **ZFC** 公理之前, 需要先介绍一些数理逻辑的概念.

## 1.1 数理逻辑准备

句法概念如形式语言, 逻辑符号, 非逻辑符号, 项, 公式, 自由变元, 约束变元, 语句等主要见<sup>[1]</sup>.

设  $\Sigma$  是一个公式集,  $\varphi$  是一个公式.

**Definition 1.1.** 有穷公式序列  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  表示从  $\Sigma$  到  $\varphi$  的一个推演, 如果其中的任意  $\varphi_i$  要么是属于  $\Sigma$  的, 要么可从之前的公式  $\varphi_j$  和  $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$  得到, 而且  $\varphi_n = \varphi$ . 记作  $\Sigma \vdash \varphi$ .

特别地, 如果  $T$  是语句集, 而  $\sigma$  是语句, 如果  $T \vdash \sigma$ , 就称存在从  $T$  到  $\sigma$  的一个证明.

如果语句集  $T$  满足: 对任意语句  $\sigma$ ,  $T \vdash \sigma$  当且仅当  $\sigma \in T$ , 即  $T$  是一个对证明封闭的语句集, 就称  $T$  为**理论**. 假设  $T$  是理论, 如果存在一个语句集  $A \subseteq T$  使得对任意的  $\sigma \in T$  都有  $A \vdash \sigma$ , 就称  $A$  为  $T$  的一**集公理**.

如果理论  $T$  的公理  $A$  是**递归的** (可判定的, 可计算的) i.e. 任给一语句, 总可以在有穷步骤内完全机械地判定它是否属于  $A$ , 就称  $T$  是**可公理化的**. 理论  $T$  往往不是递归的, 但如果任给  $\sigma \in T$ , 我们可在有穷的步骤内得出结论, 但如果  $\sigma \notin T$ , 我们可能不能在有穷步骤内得出结论, 则称其为**递归可枚举的**.

一个理论是**一致的**当且仅当没有语句  $\sigma$  s.t.  $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$ .

**Definition 1.2.** 若  $\psi$  是性质.

$$\exists! x \psi(x) := \exists x \psi(x) \wedge \forall x \forall y (\psi(x) \wedge \psi(y) \rightarrow x = y) \quad (1-1)$$

## 1.2 ZFC 公理

**Axion 0.** 存在公理 (**Exi**) 存在一个集合, i.e.

$$\exists x (x = x). \quad (1-2)$$

**Axion 1.** 外延公理 (**Ext**) 两个有相同元素的集合相等, i.e.

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y. \quad (1-3)$$

而逻辑上有  $X = Y \rightarrow \forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y)$ , 所以:

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y \quad (1-4)$$

记  $\neg(X = Y) =: X \neq Y$ .

**Axion 2. 分离公理模式 (Sep)**

令  $\varphi(u)$  为公式. 对任意集合  $X$ , 存在一个集合  $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$ ,  
i.e.

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \quad (1-5)$$

**Corollary 1.**

$$\forall X \exists R_X (R_X \notin R_X). \quad (1-6)$$

**Proof.** 令  $R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$  即可.  $\square$

令  $\varphi(u)$  为一个性质. 倘若  $\exists X \forall u (\varphi(u) \rightarrow u \in X)$ , 则  $u \mid \varphi(u) = u \mid \varphi(u)$ , 根据 Sep (Axion 2),  $\exists \emptyset = u \mid \varphi(u)$ . 分离于不同的集合  $X$  和  $X'$  的  $\emptyset$  是相同的. 考虑到  $x \neq x \rightarrow x \in X$  是重言式, 再根据 Exi (Axion 0), 可以得出:

**Definition 1.3.**  $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$  是集合, 称为**空集**.

**Definition 1.4.**  $\varphi(u)$  是一个性质. 称  $\{u \mid \varphi(u)\}$  为一个**类** (class). 若一个类不是集合, 则称其为**真类** (proper class).

如所有集合的类 **V** 就是一个真类 (根据 Corollary 1).

**Definition 1.5.** 由 Sep, 两个集合的**交**和**差**也是集合:

$$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\} \quad X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\} \quad (1-7)$$

**Corollary 2.** 而非空集  $X \neq \emptyset$  的任意交

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y \in X (u \in Y)\} \quad (1-8)$$

也是集合.

**Proof.** 因  $X \neq \emptyset, \exists x_0 \in X$ . 由 Sep,

$$Y = \{y \in x_0 \mid \forall x \in X (y \in x)\}$$

是集合.  $\square$

**Axion 3. 对集公理 (*Pai*)**

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b). \quad (1-9)$$

这样的  $c$  可记为  $\{a, b\}$ .

**Axion 4. 并集公理 (*Uni*)**

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z \in X (u \in z)). \quad (1-10)$$

**Definition 1.6.** 子集和真子集关系定义如下:

$$X \subseteq Y := \forall x \in X (x \in Y), \quad (1-11)$$

$$X \supseteq Y := Y \subseteq X, \quad (1-12)$$

$$X \subset Y := X \subseteq Y \wedge X \neq Y, \quad (1-13)$$

$$X \supset Y := X. \quad (1-14)$$

**Corollary 3.**  $\forall X (\emptyset \subseteq X)$ .

**Axion 5. 幂集公理 (*Pow*)**

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \quad (1-15)$$

这样的  $Y$  称为  $X$  的**幂集**, 记为  $\mathcal{P}(X)$  或  $2^X$ .

**Definition 1.7.** 对任意集合  $x$ ,  $x \cup \{x\}$  称为其**后继**, 记为  $S(x)$  或  $x^+$ .

**Axion 6. 无穷公理 (*Inf*)**

$$\exists X (\emptyset \in X \wedge \forall x (x \in X \rightarrow S(x) \in X)). \quad (1-16)$$

**Axion 7. 基础公理 (*Fnd*)**

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (x \cap y = \emptyset)). \quad (1-17)$$

**Theorem 1.1.**

$$\forall x (x \notin x). \quad (1-18)$$

**Proof.** 考虑  $X = \{x\}$ . 与 Fnd 矛盾.  $\square$

**Theorem 1.2.**

$$\nexists X (X \neq \emptyset \wedge \forall x \in X (\exists y \in X (y \in x))). \quad (1-19)$$

**Proof.**

$$\text{Fnd} \wedge \forall x \in X (\exists y \in X (y \in x \cap X)) \rightarrow \perp.$$

□

**Axion 8. 替换公理模式 (*Rep*)** 对公式  $\psi(x, y)$ ,  $\forall x$  都存在唯一的  $y$  s.t.  $\psi(x, y)$  成立. 那么  $\forall A \in \mathbf{V}$ , 存在集合:

$$B = \{y \mid \exists x \in A \psi(x, y)\} \quad (1-20)$$

i.e.

$$\forall A \forall x \in A \exists! y \psi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y) \quad (1-21)$$

**Axion 9. 选择公理 (*AC*)** 对任意非空集合  $X \neq \emptyset$ , 若

(1)  $\emptyset \notin X$ ,

(2)  $X$  中两两不交, 即  $\forall x \in X \forall y \in X$  且  $x \neq y$ , 那么  $x \cap y = \emptyset$ ,

则存在集合  $S$ , 对  $\forall x \in S$ ,  $S \cap x$  是单点集. i.e.

$$\begin{aligned} \forall X (\emptyset \in X \wedge \forall x \in X \forall y \in X (x = y \vee x \cap y = \emptyset) \\ \rightarrow \exists S \forall x \in X \exists! y (S \cap x = \{y\})). \end{aligned} \quad (1-22)$$

Axion 0 到 8 构成的公理系统称为 *Zermelo-Fraenkel* 系统, 记为 **ZF**, 加上选择公理则记为 **ZFC**.

## 2 关系与函数

### 2.1 关系

**Definition 2.1.** 集合  $a, b$  的有序对  $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ .

**Theorem 2.1.**

$$(a, b) = (a', b') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

**Proof.** 只证明“ $\rightarrow$ ”:

- (1)  $a = b$ .  $(a, b) = \{\{a\}\} = (a', b')$ , 故  $(a', b') = \{\{a\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ , 由 Ext (axion 1),  $\{a'\} = \{a', b'\} = \{a\}$ , 即  $a = b = a' = b'$ .
- (2)  $a \neq b$ . 假设  $\{a, b\} = \{a'\}$ , 得  $\forall x \in \{a, b\}(x = a')$  即  $a = b = a'$  与  $a \neq b$  矛盾. 从而只有  $\{a, b\} = \{a', b'\} \wedge \{a\} = \{a'\}$ , 仍然由 Ext 易证.

□

**Definition 2.2.** 令  $X$  和  $Y$  是集合, 其直积或 *Cartesian* 积定义为:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}. \quad (2-1)$$

简记  $X \times X =: X^2$ .

**Theorem 2.2.** 对于  $\forall X \forall Y$ ,  $X \times Y$  是集合.

**Proof.** 令  $\varphi(z) = \exists x \in X \exists y \in Y ((x, y) = z)$ , 取  $Z = \{z \in 2^{\{X \cup Y\}} \mid \varphi(z)\}$ , 由 Ext 和 Sep (Axiom 2) 即可知  $X \times Y = Z$ . □

**Definition 2.3.** 如果存在集合  $X, Y$  s.t.  $R \subseteq X \times Y$ , 则称集合  $R$  是二元关系. 通常记  $(x, y) \in R =: R(x, y)$ , 或  $xRy$ .  $\text{dom } R := \{x \mid \exists y R(x, y)\}$  称为其定义域,  $\text{ran } R = \{y \mid \exists x R(x, y)\}$  称为其值域.

特别地, 如果  $R \subseteq X^2$ , 则称其为  $X$  上的二元关系.

**Definition 2.4.** 集合  $X$  在关系  $R$  的像  $R[X]$  定义为  $\{y \in \text{ran } R \mid \exists x \in X (R(x, y))\}$ .

## 2.2 函数

## 索引

笔记中出现的符号

$(a, b)$ , 5

$2^X$ , 4

$S(x)$ , 4

$x^+$ , 4

**AC**, 5

$\mathcal{P}(X)$ , 4

$R(x, y)$ , 6

$R[X]$ , 6

$\Sigma \vdash \varphi$ , 2

$T \vdash \sigma$ , 2

**V**, 3

$X^2$ , 6

$X \times Y$ , 6

$xRy$ , 6

Cartesian 积, 6

Exi, 2

Ext, 2

Fnd, 4

Inf, 4

Pai, 4

Pow, 4

Rep, 5

Sep, 3

Uni, 4

Zermelo-Fraenkel 系统, 5

一致的, 2

二元关系, 6

交, 3

任意交, 3

值域, 6

像, 6

公式, 2

公理, 2

分离公理模式, 3

可公理化的, 2

可判定的, 2

可计算的, 2

后继, 4

基础公理, 4

外延公理, 2

子集, 4

存在公理, 2

定义域, 6

对集公理, 4

差, 3

幂集, 4

幂集公理, 4

并集公理, 4

形式语言, 2

推演, 2

无穷公理, 4

替换公理模式, 5

有序对, 5

理论, 2

直积, 6

真子集, 4

真类, 3

空集, 3

类, 3

约束变元, 2

自由变元, 2

证明, 2

语句, 2

选择公理, 5

递归可枚举的, 2

递归的, 2

逻辑符号, 2

非逻辑符号, 2

项, 2



## 参考文献

- [1] 数理逻辑: 证明及其限度[M/OL]. 上海: 复旦大学出版社, 2014. <https://books.google.co.jp/books?id=WDPqjgEACAAJ>.