Algebra

Hoyan Mok[1]

2020 年 7 月 20 日

[1]E-mail: victoriesmo@hotmail.com

目录

第一章　群. 环. 域

§1　代数运算

Definition 1.1 (二元运算)**.** 集合的 Cartesian 平方到自身的映射 $*\colon X^2 \to X$ 称为其上的一个**二元运算**. 通常我们记 $*(a,b) := a*b$. 当 X 上定义了二元运算 $*$ 后, 称 $*$ 定义了 X 上的一种**代数结构** $(X,*)$, 也称**代数系统**.

当指代是明确的时候, 我们将混用集合及其代数结构.

作为习惯, 如果 $\cdot, + \in X^{X^2}$, 我们记 $ab := a\cdot b$ 并称其为 a 和 b 的**积**, 称 $a+b$ 为 a 和 b 的**和**. 这些只是约定.

若 $a*b = b*a$ 则称 $*$ 或 $(X,*)$ 是**交换的**, 而若 $(a*b)*c = a*(b*c)$ 则称 $*$ 或 $(X,*)$ 为**结合的**.

若 $\exists e \in X$ 满足 $\forall x \in A\big(e*x = x*e = x\big)$, 则称其为 $*$ 的一个**单位元** (identity), 这时可把 $(X,*)$ 记作 $(X,*,e)$. 可以证明一个代数结构最多只有一个单位元. 乘法单位元通常记为 1, 而加法单位元 (也叫**零元**) 记为 0.

Definition 1.2 (半群和幺半群)**.** 若 $*$ 是结合的, 称 $(X,*)$ 是**半群** (semigroup); 若 $*$ 还有一个单位元, 则称 $(X,*,e)$ 是**幺半群** (monoid).

倘若幺半群 $(M,*,e)$ 是有限的 (即其元素有限), 称 $\operatorname{card} M$ 为**有限幺半群**的**阶**.

半群中, 括号的位置是不重要的 (可用数学归纳法证明). 通常我们记 $x_1x_2\cdots x_n$ 为:

$$\prod_{i=1}^{1} x_i = x_1,\ \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) x_n\,; \tag{1-1}$$

同理 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 为:

$$\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1,\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + x_n\,. \tag{1-2}$$

在半群不交换的场合, 指出递推式右端的顺序是重要的. 这种记法称为**左正规**.

若 $x := x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, 记 $\sum_{i=1}^n x_i = nx$, $\prod_{i=1}^n x_i = x^n$, 分别表示 x 的 n 倍和 x 的 n 次幂. 它们满足:

$$nx + mx = (n+m)x,\ n(mx) = nmx, \qquad n, m \in \mathbb{N}_+\,; \tag{1-3}$$

$$x^n x^m = x^{n+m},\ (x^m)^n = x^{nm}, \qquad n, m \in \mathbb{N}_+\,. \tag{1-4}$$

在幺半群中, 还可以令 $x^0 = 1$, $0x = 0$.

若半群 S 有子集 S', 使得 $(S', *)$ 是半群, 那么称其为半群 $(S, *)$ 的**子半群**. 同理有幺半群M 的**子幺半群**M'.

若半群 $(S, *, e)$ 的元素 a 满足 $\exists a' \in S\big(aa' = a'a = e\big)$, 那么称 a 为**可逆的** (invertible), a' 称为其**逆元** (inverse element) 或**逆** (inverse). 通常加法逆元记为 $-a$, 乘法逆元记为 a^{-1}, 且为可逆元素引入 na, a^n 的概念, 其中 $n \in \mathbb{Z}$. 当 n 为负数时, $na = -(-na)$, $a^n = (a^{-n})^{-1}$.

§2 群

可逆幺半群 G 称为群, 即:

Definition 2.1 (群)**.** 设有集合 G. 若:

G0) 定义了二元运算 $\cdot : G^2 \to G; (x, y) \mapsto xy$.

G1) 结合性: $\forall x, y, z \in G$, $(xy)z = x(yz)$.

G2) 单位元: $\exists e \in G \forall x \in G$, $xe = ex = x$.

G3) 可逆性: $\forall x \in G \exists x^{-1} \in G$, $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

则称 $(G, \cdot)$ 为**群**.

群也有子群的概念. 设 $(G, \cdot, e)$ 是一个群. 当一个集合 G' 满足: SG1) $e \in G'$; SG2) $\forall x, y \in G'$, $xy \in G'$; SG3) $x \in G' \to x^{-1} \in G'$, 则称 $(G', \cdot, e)$ 是一个 G 的**子群**. 倘若还有 $G' \neq G$ 则称其为一个真子群[1].

作为例子, 考虑 n 阶可逆实矩阵的集合 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 和在其上定义的矩阵乘法组成的群 $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 称为 n 阶**一般线性群**. 而其中行列式是 ± 1 的矩阵, 构成正交群 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

[1] [1] 等文献把**平凡群**$\{e\}$ 也排在真子群的定义外.

参考文献

[1] A.I. Kostrikin. *Introduction to Algebra*. Universitext - Springer-Verlag. Springer-Verlag, 1982. ISBN: 9783540907114. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387907116.

索引