Set Theory

Hoyan Mok

2020 年 1 月 26 日

目录

1 集合与公理

在介绍集合论的 **ZFC** 公理之前, 需要先介绍一些数理逻辑的概念.

1.1 数理逻辑准备

句法概念如**形式语言**, **逻辑符号**, **非逻辑符号**, **项**, **公式**, **自由变元**, **约束变元**, **语句**等主要见[1].

设 Σ 是一个公式集, φ 是一个公式.

Definition 1.1. 有穷公式序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 表示从 Σ 到 φ 的一个**推演**, 如果其中的任意 φ_i 要么是属于 Σ 的, 要么可从之前的公式 φ_j 和 $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ 得到, 而且 $\varphi_n = \varphi$. 记作 $\Sigma \vdash \varphi$.

特别地, 如果 T 是语句集, 而 σ 是语句, 如果 $T \vdash \sigma$, 就称存在从 T 到 σ 的一个**证明**.

如果语句集 T 满足: 对任意语句 σ, $T \vdash \sigma$ 当且仅当 $\sigma \in T$, 即 T 是一个对证明封闭的语句集, 就称 T 为**理论**. 假设 T 是理论, 如果存在一个语句集 $A \subseteq T$ 使得对任意的 $\sigma \in T$ 都有 $A \vdash \sigma$, 就称 A 为 T 的一集**公理**.

如果理论 T 的公理 A 是**递归的** (**可判定的**, **可计算的**) i.e. 任给一语句, 总可以在有穷步骤内完全机械地判定它是否属于 A, 就称 T 是**可公理化的**. 理论 T 往往不是递归的, 但如果任给 $\sigma \in T$, 我们可在有穷的步骤内得出结论, 但如果 $\sigma \notin T$, 我们可能不能在有穷步骤内得出结论, 则称其为**递归可枚举的**.

一个理论是**一致的**当且仅当没有语句 σ s.t. $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$.

Definition 1.2. 若 ψ 是性质.

$$\exists! x \psi(x) := \exists x \psi(x) \wedge \forall x \forall y (\psi(x) \wedge \psi(y) \to x = y) \tag{1-1}$$

1.2 ZFC 公理

Axion 0. 存在公理 ***(Exi)*** *存在一个集合, i.e.*

$$\exists x (x = x). \tag{1-2}$$

Axion 1. 外延公理 ***(Ext)*** *两个有相同元素的集合相等, i.e.*

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y. \tag{1-3}$$

而逻辑上有 $X = Y \to \forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$, 所以:

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y \tag{1-4}$$

记 $\neg(X = Y) =: X \neq Y$.

Axion 2. 分离公理模式 ***(Sep)***

令 $\varphi(u)$ 为公式. 对任意集合 X, 存在一个集合 $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$, i.e.

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \tag{1-5}$$

Corollary 1.

$$\forall X \exists R_X (R_X \notin R_X). \tag{1-6}$$

Proof. 令 $R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$ 即可. □

令 $\varphi(u)$ 为一个性质. 倘若 $\exists X \forall u(\varphi(u) \to u \in X)$, 则 $u \mid \varphi(u) = u \mid \varphi(u)$, 根据 Sep (Axion 2), $\exists \varnothing = u \mid \varphi(u)$. 分离于不同的集合 X 和 X' 的 $\varnothing$ 是相同的. 考虑到 $x \neq x \to x \in X$ 是重言式, 再根据 Exi (Axion 0), 可以得出:

Definition 1.3. $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ 是集合, 称为**空集**.

Definition 1.4. $\varphi(u)$ 是一个性质. 称 $\{u \mid u(u)\}$ 为一个**类** (class). 若一个类不是集合, 则称其为**真类** (proper class).

如所有集合的类 $\mathbf{V}$ 就是一个真类 (根据 Corollary 1).

Definition 1.5. 由 Sep, 两个集合的**交**和**差**也是集合:

$$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\} \qquad X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\} \tag{1-7}$$

Corollary 2. *而非空集 $X \neq \varnothing$ 的***任意交**

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y \in X(u \in Y)\} \tag{1-8}$$

也是集合.

Proof. 因 $X \neq \varnothing$, $\exists x_0 \in X$. 由 Sep,

$$Y = \{y \in x_0 \mid \forall x \in X(y \in x)\}$$

是集合. □

Axion 3. **对集公理** ***(Pai)***

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \lor x = b). \tag{1-9}$$

这样的 c 可记为 $\{a, b\}$.

Axion 4. **并集公理** ***(Uni)***

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z \in X (u \in z)). \tag{1-10}$$

Definition 1.6. **子集**和**真子集**关系定义如下:

$$X \subseteq Y := \forall x \in X (x \in Y), \tag{1-11}$$

$$X \supseteq Y := Y \subseteq X, \tag{1-12}$$

$$X \subset Y := X \subseteq Y \land X \neq Y, \tag{1-13}$$

$$X \supset Y := X. \tag{1-14}$$

Corollary 3. $\forall X (\varnothing \subseteq X)$.

Axion 5. **幂集公理** ***(Pow)***

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{1-15}$$

这样的 Y 称为 X 的**幂集**, 记为 $\mathscr{P}(X)$ 或 2^X.

Definition 1.7. 对任意集合 x, $x \cup \{x\}$ 称为其**后继**, 记为 $S(x)$ 或 x^+.

Axion 6. **无穷公理** ***(Inf)***

$$\exists X \big(\varnothing \in X \land \forall x (x \in X \to S(x) \in X)\big). \tag{1-16}$$

Axion 7. **基础公理** ***(Fnd)***

$$\forall x \big(x \neq \varnothing \to \exists y \in x (x \cap y = \varnothing)\big). \tag{1-17}$$

Theorem 1.1.

$$\forall x (x \notin x). \tag{1-18}$$

Proof. 考虑 $X = \{x\}$. 与 Fnd 矛盾. □

Theorem 1.2.

$$\nexists X\big(X \neq \varnothing \wedge \forall x \in X(\exists y \in X(y \in x))\big). \tag{1-19}$$

Proof.

$$\mathrm{Fnd} \wedge \forall x \in X\big(\exists y \in X(y \in x \cap X)\big) \to \bot.$$

□

Axion 8. 替换公理模式 *(**Rep**) 对公式 $\psi(x,y)$, $\forall x$ 都存在唯一的 y s.t. $\psi(x,y)$ 成立. 那么 $\forall A \in \mathbf{V}$, 存在集合:*

$$B = \{y \mid \exists x \in A\, \psi(x,y)\} \tag{1-20}$$

i.e.

$$\forall A \forall x \in A\, \exists! y\, \psi(x,y) \to \exists B \forall x \in A\, \exists y \in B\, \psi(x,y) \tag{1-21}$$

Axion 9. 选择公理 *(**AC**) 对任意非空集合 $X \neq \varnothing$, 若*

(1) $\varnothing \notin X$,

(2) X *中两两不交, 即* $\forall x \in X\, \forall y \in X$ *且* $x \neq y$, *那么* $x \cap y = \varnothing$,

则存在集合 S, 对 $\forall x \in S$, $S \cap x$ 是单点集. i.e.

$$\begin{aligned}\forall X\big(&\varnothing \in X \wedge \forall x \in X\, \forall y \in X(x = y \vee x \cap y = \varnothing) \\ &\to \exists S \forall x \in X\, \exists! y(S \cap x = \{y\})\big).\end{aligned} \tag{1-22}$$

Axion 0 到 8 构成的公理系统称为 ***Zermelo-Fraenkel* 系统**, 记为 **ZF**, 加上选择公理则记为 **ZFC**.

2 关系与函数

2.1 关系

Definition 2.1. 集合 a, b 的**有序对**$(a,b) := \big\{\{a\}, \{a,b\}\big\}$.

Theorem 2.1.

$$(a,b) = (a',b') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Proof. 只证明"$\to$":

(1) $a = b$. $(a, b) = \{\{a\}\} = (a', b')$, 故 $(a', b') = \{\{a\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, 由 Ext (axion 1), $\{a'\} = \{a', b'\} = \{a\}$, 即 $a = b = a' = b'$.

(2) $a \neq b$. 假设 $\{a, b\} = \{a'\}$, 得 $\forall x \in \{a, b\}(x = a')$ 即 $a = b = a'$ 与 $a \neq b$ 矛盾. 从而只有 $\{a, b\} = \{a', b'\} \wedge \{a\} = \{a'\}$, 仍然由 Ext 易证.

□

Definition 2.2. 令 X 和 Y 是集合, 其**直积**或 ***Cartesian* 积**定义为:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}. \tag{2-1}$$

简记 $X \times X =: X^2$.

Theorem 2.2. *对于 $\forall X \forall Y$, $X \times Y$ 是集合.*

Proof. 令 $\varphi(z) = \exists x \in X \exists y \in Y((x, y) = z)$, 取 $Z = \{z \in 2^{\{}X \cup Y\} \mid \varphi(z)\}$, 由 Ext 和 Sep (Axion 2) 即可知 $X \times Y = Z$. □

Definition 2.3. 如果存在集合 X, Y s.t. $R \subseteq X \times Y$, 则称集合 R 是**二元关系**. 通常记 $(x, y) \in R =: R(x, y)$, 或 xRy. $\operatorname{dom} R := \{x \mid \exists y R(x, y)\}$ 称为其**定义域**, $\operatorname{ran} R = \{y \mid \exists x R(x, y)\}$ 称为其**值域**.

特别地, 如果 $R \subseteq X^2$, 则称其为 X 上的二元关系.

Definition 2.4. 集合 X 在关系 R 的**像**$R[X]$ 定义为 $\{y \in \operatorname{ran} R \mid \exists x \in X\, (R(x, y))\}$. 集合 Y 的逆像 $R^{-1}[Y]$ 则定义为 $\{x \in \operatorname{dom} R \mid \exists y \in Y\, (R(x, y))\}$. 二元关系 R 的**逆**R^{-1} 是 $\{(x, y) \mid R(y, x)\}$. 两个二元关系 R, S 的**复合**$S \circ R$ 则定义为 $\{(x, z) \mid \exists y(R(x, y) \wedge S(y, z))\}$.

Cartesian 积可递归地推广到 n 元:

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) = ((x_1, \cdots, x_n), x_{n+1}); \tag{2-2}$$

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n\} \tag{2-3}$$

n 元 Cartesian 积的子集可类似地定义n **元关系**.

2.2 函数

Definition 2.5. 二元关系 f 倘满足:

$$\forall x\big((x,y)\in f\wedge(x,z)\in f\to y=z\big),$$

则称 f 是**函数**, y 是 f 在 x 处的**值**, 记为 $f(x)=y$, 或 $f\colon x\mapsto y$. 倘若 $\operatorname{dom}f=X$, $\operatorname{ran}f\subseteq Y$, 则称 f 是 X 到 Y 的函数, 记为 $f\colon X\to Y$.

对任意集合 X 定义 $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ 为 $\forall x\in X(\mathrm{id}_X(x)=x)$, 称为**等同函数**.

Theorem 2.3. *令 f, g 都是函数.*

$$f=g\leftrightarrow\operatorname{dom}f=\operatorname{dom}g\wedge\forall x\in\operatorname{dom}f\big(f(x)=g(x)\big).$$

Proof. 只证明"$\leftarrow$":

$$\forall(x,y)\in f\big(x\in\operatorname{dom}f\wedge y=f(x)\big)\wedge\operatorname{dom}f=\operatorname{dom}g\wedge\forall x\in\operatorname{dom}f\big(f(x)=g(x)\big)\\ \to\forall(x,y)\in f\big(x\in\operatorname{dom}g\wedge y=g(x)\big).$$

同理, $\forall(x,y)\in g\big(x\in\operatorname{dom}f\wedge y=f(x)\big)$, 即 $\forall(x,y)\big(y=f(x)\leftrightarrow y=g(x)\big)$. 由 Ext, $f=g$. □

Theorem 2.4. *如果 f 和 g 是函数, 它们的复合 $h=g\circ f$ 也是函数. 而且 $\operatorname{dom}h=f^{-1}\big(\operatorname{dom}g\big)$.*

注: 这里的复合和通常的定义有细微不同, 但保持了与二元关系的统一.

Proof. 复合的定义: $h=g\circ f\leftrightarrow\forall(x,z)\in h\Big(\exists y\big(y=f(x)\wedge z=g(y)\big)\Big)$. 倘若 $(x,u)\in h\wedge(x,u)\in h$, 有 $\exists!y$ s.t. $y=f(x)$, 且 $u=v=g(y)$. 因而 h 也是函数.

其定义域 $\operatorname{dom}h=\{x\mid\exists z\big(z=h(x)\big)\}$, 又因 $\exists z(z=h(x))\leftrightarrow\exists z\exists y\big(y=f(x)\wedge z=g(y)\big)$, 后者又等价于 $\exists y\Big(y=f(x)\wedge\exists z\big(z=g(y)\big)\Big)$, i.e. $\exists y\in\operatorname{dom}g\big(y=f(x)\big)$,

$$\operatorname{dom}h=\{x\mid\exists y\in\operatorname{dom}g\big(y=f(x)\big)\}=f^{-1}(\operatorname{dom}g).$$

□

Definition 2.6. 令 $f\colon X \to Y$ 是函数. 若 $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$ 则称 f 为**单射**. 若 $\operatorname{ran} f = Y$ 则称其为满射. 既单又满的函数称为双射. 如果函数的逆 f^{-1} 也是函数, 则函数 f 称为**可逆**的.

作为例子, 若空映射 $\operatorname{ran} f = \operatorname{dom} f = \varnothing$, $f = \varnothing$ 总是单的, $f^{-1} = \{(y,x) \mid y = f(x)\} = \varnothing$ 也是空映射.

注: 这里函数的逆的定义与通常不同, 因 $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{ran} f$ 而非 Y. 因而下面的定理在这样的定义下是成立的 (否则还要加上满射的条件):

Theorem 2.5. *函数 f 可逆 iff f 是单射.*

Proof. 可逆意味着 $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \leftrightarrow x_1 = x_2$, 又由逆的定义, $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$, 这即是单射的定义. □

Theorem 2.6. *函数 f 若可逆, 则 f^{-1} 可逆, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$.*

索引

参考文献

[1] 数理逻辑: 证明及其限度[M/OL]. 上海: 复旦大学出版社, 2014. https://books.google.co.jp/books?id=WDPqjgEACAAJ.