

# Set Theory

Hoyan Mok

2020 年 7 月 19 日



# 目录

第一章 集合与公理	1
§1 数理逻辑准备	1
§2 ZFC 公理	2
第二章 关系与函数	5
§3 关系	5
§4 函数	6
§5 等价和划分	9
§6 序	10
第三章 实数	11
§7 自然数	11
§8 递归定理	12
§9 势	13
参考文献	16
索引	17



# 第一章 集合与公理

在介绍集合论的 **ZFC** 公理之前, 需要先介绍一些数理逻辑的概念.

## §1 数理逻辑准备

句法概念如形式语言, 逻辑符号, 非逻辑符号, 项, 公式, 自由变元, 约束变元, 语句等主要见 [1].

设  $\Sigma$  是一个公式集,  $\varphi$  是一个公式.

**Definition 1.1.** 有穷公式序列  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  表示从  $\Sigma$  到  $\varphi$  的一个**推演**, 如果其中的任意  $\varphi_i$  要么是属于  $\Sigma$  的, 要么可从之前的公式  $\varphi_j$  和  $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$  得到, 而且  $\varphi_n = \varphi$ . 记作  $\Sigma \vdash \varphi$ .

特别地, 如果  $T$  是语句集, 而  $\sigma$  是语句, 如果  $T \vdash \sigma$ , 就称存在从  $T$  到  $\sigma$  的一个**证明**.

如果语句集  $T$  满足: 对任意语句  $\sigma$ ,  $T \vdash \sigma$  当且仅当  $\sigma \in T$ , 即  $T$  是一个对证明封闭的语句集, 就称  $T$  为**理论**. 假设  $T$  是理论, 如果存在一个语句集  $A \subseteq T$  使得对任意的  $\sigma \in T$  都有  $A \vdash \sigma$ , 就称  $A$  为  $T$  的一集**公理**.

如果理论  $T$  的公理  $A$  是**递归的** (可判定的, 可计算的) i.e. 任给一语句, 总可以在有穷步骤内完全机械地判定它是否属于  $A$ , 就称  $T$  是**可公理化的**. 理论  $T$  往往不是递归的, 但如果任给  $\sigma \in T$ , 我们可在有穷的步骤内得出结论, 但如果  $\sigma \notin T$ , 我们可能不能在有穷步骤内得出结论, 则称其为**递归可枚举的**.

一个理论是**一致的**当且仅当没有语句  $\sigma$  s.t.  $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$ .

**Definition 1.2.** 若  $\psi$  是性质.

$$\exists! x\psi(x) := \exists x\psi(x) \wedge \forall x\forall y(\psi(x) \wedge \psi(y) \rightarrow x = y) \quad (1-1)$$

## §2 ZFC 公理

**Axion 0.** 存在公理 (Exi) 存在一个集合, *i.e.*

$$\exists x(x = x). \quad (2-1)$$

**Axion 1.** 外延公理 (Ext) 两个有相同元素的集合相等, *i.e.*

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y. \quad (2-2)$$

而逻辑上有  $X = Y \rightarrow \forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y)$ , 所以:

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y \quad (2-3)$$

记  $\neg(X = Y) =: X \neq Y$ .

**Axion 2.** 分离公理模式 (Sep)

令  $\varphi(u)$  为公式. 对任意集合  $X$ , 存在一个集合  $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$ , *i.e.*

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \quad (2-4)$$

**Corollary 1.**

$$\forall X \exists R_X (R_X \notin R_X). \quad (2-5)$$

**Proof.** 令  $R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$  即可. □

令  $\varphi(u)$  为一个性质. 倘若  $\exists X \forall u (\varphi(u) \rightarrow u \in X)$ , 则  $u \mid \varphi(u) = u \mid \varphi(u)$ , 根据 Sep (Axion 2),  $\exists \emptyset = u \mid \varphi(u)$ . 分离于不同的集合  $X$  和  $X'$  的  $\emptyset$  是相同的. 考虑到  $x \neq x \rightarrow x \in X$  是重言式, 再根据 Exi (Axion 0), 可以得出:

**Definition 2.1.**  $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$  是集合, 称为空集.

**Definition 2.2.**  $\varphi(u)$  是一个性质. 称  $\{u \mid \varphi(u)\}$  为一个类 (class). 若一个类不是集合, 则称其为真类 (proper class).

如所有集合的类  $\mathbf{V}$  就是一个真类 (根据 Corollary 1).

**Definition 2.3.** 由 Sep, 两个集合的交和差也是集合:

$$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\} \quad X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\} \quad (2-6)$$

**Corollary 2.** 而非空集  $X \neq \emptyset$  的任意交

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y \in X (u \in Y)\} \quad (2-7)$$

也是集合.

**Proof.** 因  $X \neq \emptyset, \exists x_0 \in X$ . 由 Sep,

$$Y = \{y \in x_0 \mid \forall x \in X (y \in x)\}$$

是集合. □

**Axion 3. 对集公理 (Pai)**

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b). \quad (2-8)$$

这样的  $c$  可记为  $\{a, b\}$ .

**Axion 4. 并集公理 (Uni)**

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z \in X (u \in z)). \quad (2-9)$$

**Definition 2.4.** 子集和真子集关系定义如下:

$$X \subseteq Y := \forall x \in X (x \in Y), \quad (2-10)$$

$$X \supseteq Y := Y \subseteq X, \quad (2-11)$$

$$X \subset Y := X \subseteq Y \wedge X \neq Y, \quad (2-12)$$

$$X \supset Y := X. \quad (2-13)$$

**Corollary 3.**  $\forall X (\emptyset \subseteq X)$ .

**Axion 5. 幂集公理 (Pow)**

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \quad (2-14)$$

这样的  $Y$  称为  $X$  的**幂集**, 记为  $\mathcal{P}(X)$  或  $2^X$ .

**Definition 2.5.** 对任意集合  $x$ ,  $x \cup \{x\}$  称为其**后继**, 记为  $S(x)$  或  $x^+$ .

**Axion 6. 无穷公理 (Inf)**

$$\exists X (\emptyset \in X \wedge \forall x (x \in X \rightarrow S(x) \in X)). \quad (2-15)$$

**Axion 7. 基础公理 (Fnd)**

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x(x \cap y = \emptyset)). \quad (2-16)$$

**Theorem 2.1.**

$$\forall x(x \notin x). \quad (2-17)$$

*Proof.* 考虑  $X = \{x\}$ . 与 Fnd 矛盾. □

**Theorem 2.2.**

$$\nexists X(X \neq \emptyset \wedge \forall x \in X(\exists y \in X(y \in x))). \quad (2-18)$$

*Proof.*

$$\text{Fnd} \wedge \forall x \in X(\exists y \in X(y \in x \cap X)) \rightarrow \perp.$$

□

**Axion 8. 替换公理模式 (Rep)** 对公式  $\psi(x, y)$ ,  $\forall x$  都存在唯一的  $y$  s.t.  $\psi(x, y)$  成立. 那么  $\forall A \in \mathbf{V}$ , 存在集合:

$$B = \{y \mid \exists x \in A \psi(x, y)\} \quad (2-19)$$

*i.e.*

$$\forall A \forall x \in A \exists! y \psi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y) \quad (2-20)$$

**Axion 9. 选择公理 (AC)** 对任意非空集合  $X \neq \emptyset$ , 若

(1)  $\emptyset \notin X$ ,

(2)  $X$  中两两不交, 即  $\forall x \in X \forall y \in X$  且  $x \neq y$ , 那么  $x \cap y = \emptyset$ ,

则存在集合  $S$ , 对  $\forall x \in X$ ,  $S \cap x$  是单点集. *i.e.*

$$\begin{aligned} \forall X(\emptyset \in X \wedge \forall x \in X \forall y \in X(x = y \vee x \cap y = \emptyset) \\ \rightarrow \exists S \forall x \in X \exists! y(S \cap x = \{y\})). \end{aligned} \quad (2-21)$$

Axion 0 到 8 构成的公理系统称为 **Zermelo-Fraenkel** 系统, 记为 **ZF**, 加上选择公理则记为 **ZFC**.



## 第二章 关系与函数

### §3 关系

**Definition 3.1.** 集合  $a, b$  的有序对  $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ .

**Theorem 3.1.**

$$(a, b) = (a', b') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

**Proof.** 只证明“ $\rightarrow$ ”:

- (1)  $a = b$ .  $(a, b) = \{\{a\}\} = (a', b')$ , 故  $(a', b') = \{\{a\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ , 由 Ext (axion 1),  $\{a'\} = \{a', b'\} = \{a\}$ , 即  $a = b = a' = b'$ .
- (2)  $a \neq b$ . 假设  $\{a, b\} = \{a'\}$ , 得  $\forall x \in \{a, b\}(x = a')$  即  $a = b = a'$  与  $a \neq b$  矛盾. 从而只有  $\{a, b\} = \{a', b'\} \wedge \{a\} = \{a'\}$ , 仍然由 Ext 易证.

□

**Definition 3.2.** 令  $X$  和  $Y$  是集合, 其直积或 *Cartesian* 积定义为:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}. \quad (3-1)$$

简记  $X \times X =: X^2$ .

**Theorem 3.2.** 对于  $\forall X \forall Y$ ,  $X \times Y$  是集合.

**Proof.** 令  $\varphi(z) = \exists x \in X \exists y \in Y ((x, y) = z)$ , 取  $Z = \{z \in \mathcal{P}(X \cup Y) \mid \varphi(z)\}$ , 由 Ext 和 Sep (Axiom 2) 即可知  $X \times Y = Z$ . □

**Definition 3.3.** 如果存在集合  $X, Y$  s.t.  $R \subseteq X \times Y$ , 则称集合  $R$  是二元关系. 通常记  $(x, y) \in R =: R(x, y)$ , 或  $xRy$ .  $\text{dom } R := \{x \mid \exists y R(x, y)\}$  称为其定义域,  $\text{ran } R = \{y \mid \exists x R(x, y)\}$  称为其值域.

特别地, 如果  $R \subseteq X^2$ , 则称其为  $X$  上的二元关系.

**Definition 3.4.** 集合  $X$  在关系  $R$  的像  $R[X]$  定义为  $\{y \in \text{ran } R \mid \exists x \in X (R(x, y))\}$ . 集合  $Y$  的逆像  $R^{-1}[Y]$  则定义为  $\{x \in \text{dom } R \mid \exists y \in Y (R(x, y))\}$ . 二元关系  $R$  的逆  $R^{-1}$  是  $\{(x, y) \mid R(y, x)\}$ . 两个二元关系  $R, S$  的复合  $S \circ R$  则定义为  $\{(x, z) \mid \exists y (R(x, y) \wedge S(y, z))\}$ .

**Theorem 3.3.** 令  $R$  是二元关系,  $A, B$  是集合.  $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$ ,  $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$ ,  $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$ .

Cartesian 积可递归地推广到  $n$  元:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) = ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}); \quad (3-2)$$

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \dots \wedge x_n \in X_n\} \quad (3-3)$$

$n$  元 Cartesian 积的子集可类似地定义  $n$  元关系.

**Theorem 3.4.**  $n$  元 Cartesian 积  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  是空集, 则存在  $X_i = \emptyset$ .

## §4 函数

**Definition 4.1.** 二元关系  $f$  倘满足:

$$\forall x ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z),$$

则称  $f$  是函数,  $y$  是  $f$  在  $x$  处的值, 记为  $f(x) = y$ , 或  $f: x \mapsto y$ . 倘若  $\text{dom } f = X$ ,  $\text{ran } f \subseteq Y$ , 则称  $f$  是  $X$  到  $Y$  的函数, 记为  $f: X \rightarrow Y$ .

对任意集合  $X$  定义  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  为  $\forall x \in X (\text{id}_X(x) = x)$ , 称为等同函数.

**Theorem 4.1.** 令  $f, g$  都是函数.

$$f = g \leftrightarrow \text{dom } f = \text{dom } g \wedge \forall x \in \text{dom } f (f(x) = g(x)).$$

**Proof.** 只证明“ $\leftarrow$ ”:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in f (x \in \text{dom } f \wedge y = f(x)) \wedge \text{dom } f = \text{dom } g \wedge \forall x \in \text{dom } f (f(x) = g(x)) \\ \rightarrow \forall (x, y) \in f (x \in \text{dom } g \wedge y = g(x)). \end{aligned}$$

同理,  $\forall (x, y) \in g (x \in \text{dom } f \wedge y = f(x))$ , 即  $\forall (x, y) (y = f(x) \leftrightarrow y = g(x))$ . 由 Ext,  $f = g$ .  $\square$

通常以集合为值的函数  $i \mapsto X_i$ , 其中  $i \in I$ , 可视为指标系统,  $I$  是指标集. 记为  $X = \{X_i \mid i \in I\}$  或  $\{X_i\}_{i \in I}$ .

**Theorem 4.2.**  $\psi(i, x)$  是公式.  $\forall I \forall X$ ,

$$\bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid \psi(i, x)\} = \{x \in X \mid \exists i \in I (\psi(i, x))\},$$

$$\bigcap_{i \in I} \{x \in X \mid \psi(i, x)\} = \{x \in X \mid \forall i \in I (\psi(i, x))\}.$$

**Definition 4.2.** 令  $X = \{X_i \mid i \in I\}$  是一个指标系统.  $X$  的一般 *Cartesian* 积为:

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f \mid f: I \rightarrow X_i\}.$$

另,  $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  称为指标函数.

注: 虽然这样的定义和 Cartesian 积不同, 但接下来的概念确保了, 两者之间可以一一对应, 从而是等同的.

**Definition 4.3.** 令  $f: X \rightarrow Y$  是函数. 若  $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$  则称  $f$  为单射 (injection). 若  $\text{ran } f = Y$  则称其为满射 (surjection). 既单又满的函数称为双射 (bijection). 如果函数的逆  $f^{-1}$  也是函数, 则函数  $f$  称为可逆的.

作为例子, 若空映射  $\text{ran } f = \text{dom } f = \emptyset$ ,  $f = \emptyset$  总是单的,  $f^{-1} = \{(y, x) \mid y = f(x)\} = \emptyset$  也是空映射.

注: 这里函数的逆的定义与通常不同, 因  $\text{dom } f^{-1} = \text{ran } f$  而非  $Y$ . 因而下面的定理在这样的定义下是成立的 (否则还要加上满射的条件):

记  $Y^X := \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ .  $\forall Y (Y^\emptyset = \{\emptyset_Y\})$ , 而若  $X \neq \emptyset$ ,  $\emptyset^X = \emptyset$ .

**Theorem 4.3.** 函数  $f$  可逆 iff  $f$  是单射.

**Proof.** 可逆意味着  $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \leftrightarrow x_1 = x_2$ , 又由逆的定义,  $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$ , 这即是单射的定义.  $\square$

**Theorem 4.4.** 函数  $f$  若可逆, 则  $f^{-1}$  可逆, 且  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

证明从略.

**Theorem 4.5.** 如果  $f$  和  $g$  是函数, 它们的复合  $h = g \circ f$  也是函数. 而且  $\text{dom } h = f^{-1}(\text{dom } g)$ .

注: 这里的复合和通常的定义有细微不同, 但保持了与二元关系的统一.

**Proof.** 复合的定义:  $h = g \circ f \leftrightarrow \forall (x, z) \in h \left( \exists y (y = f(x) \wedge z = g(y)) \right)$ . 倘若  $(x, u) \in h \wedge (x, v) \in h$ , 有  $\exists! y$  s.t.  $y = f(x)$ , 且  $u = v = g(y)$ . 因而  $h$  也是函数.

其定义域  $\text{dom } h = \{x \mid \exists z (z = h(x))\}$ , 又因  $\exists z (z = h(x)) \leftrightarrow \exists z \exists y (y = f(x) \wedge z = g(y))$ , 后者又等价于  $\exists y (y = f(x) \wedge \exists z (z = g(y)))$ , i.e.  $\exists y \in \text{dom } g (y = f(x))$ ,

$$\text{dom } h = \{x \mid \exists y \in \text{dom } g (y = f(x))\} = f^{-1}(\text{dom } g).$$

□

**Definition 4.4.** 令  $f$  是任意函数,  $A$  是任意集合. 函数  $f \upharpoonright A = \{(x, y) \in f \mid x \in A\}$  是  $f$  在  $A$  上的限制. 若  $g = f \upharpoonright A$ , 则称  $f$  是  $g$  在  $\text{dom } f$  的扩张.

**Definition 4.5.** 函数  $f, g$  被认为是相容的, 如果:

$$\forall x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g (f(x) = g(x))$$

指标系统  $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$  被称为相容系统, 如果

$$\forall f_i \in \mathcal{F} \forall f_j \in \mathcal{F} (f_i \text{ 和 } f_j \text{ 相容}).$$

**Theorem 4.6.**  $f$  和  $g$  是函数. 以下的命题是等价的:

- (1)  $f$  与  $g$  相容;
- (2)  $f \cup g$  是函数;
- (3)  $f \upharpoonright (\text{dom } f \cap \text{dom } g) = g \upharpoonright (\text{dom } f \cap \text{dom } g)$ .

**Proof.** (1) $\leftrightarrow$ (3): 注意到  $\text{dom } (f \upharpoonright (\text{dom } f \cap \text{dom } g)) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$ . 由相容的定义和定理4.1可得证.

(2) $\leftrightarrow$ (1): 假设  $f$  与  $g$  不相容, 即  $\exists x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g \subseteq \text{dom } f \cup g$  s.t.  $f(x) \neq g(x)$ , 这与函数  $f \cup g$  的定义不相符. 若  $f \cup g$  不是函数, 它至少是  $\text{dom } f \cup \text{dom } g \times \text{ran } f \cup \text{ran } g$  上的二元关系, 由函数的定义,  $\exists x \in \text{dom } f \cup g$  s.t.  $\exists y_1 \exists y_2 ((x, y_1) \in f \cup g \wedge (x, y_2) \in f \cup g \wedge y_1 \neq y_2)$ . 通过对  $x$  在  $\text{dom } f - \text{dom } g$ ,  $\text{dom } g - \text{dom } f$ ,  $\text{dom } g \cap \text{dom } f$  讨论, 可以得出要么  $f$  或  $g$  不是函数 (从而与题设矛盾), 要么  $f, g$  不相容. □

**Axion 9. 选择公理 (第二形式) (AC II)**

$$\forall \mathcal{F} \left( \emptyset \notin \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \neq \emptyset \wedge \exists f: \mathcal{F} \rightarrow \cup \mathcal{F} (\forall F \in \mathcal{F} (f(F) \in F)) \right)$$

其中这样的  $f$  通常被称为选择函数.

对于任意非空  $\omega$  (尤其是当  $\omega$  是无穷集时),  $\prod_{i \in \omega} X_i = \emptyset \rightarrow \exists i \in \omega (X_i = \emptyset)$  与选择公理等价.<sup>1</sup>

## §5 等价和划分

**Definition 5.1.** 令  $R \subseteq X^2$  是  $X$  上的二元关系.  $R$  是:

- (1) 自反的, 若  $\forall x \in X (xRx)$ ;
- (2) 对称的, 若  $\forall x \in X \forall y \in X (xRy \rightarrow yRx)$ ;
- (3) 传递的, 若  $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ ;
- (4) 等价关系或等价的, 若  $R$  自反, 对称, 传递. 记为  $\sim$ .

**Definition 5.2.** 令  $\sim$  是  $X$  上的等价关系,  $x \in X$ .  $x$  关于  $\sim$  的等价类定义为:

$$[x]_{\sim} := \{t \in X \mid t \sim x\}.$$

注: 由 Sep, 等价类是集合而不是真类.

**Theorem 5.1.** 令  $\sim$  是  $X$  上的等价关系.

$$\forall x \in X \forall y \in Y ([x]_{\sim} = [y]_{\sim} \wedge [x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \emptyset)$$

**Definition 5.3.** 令  $X$  是一集合,  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ .  $S$  被称为  $X$  的一个划分如果:

$$\forall a \in S \forall b \in S (a = b \vee a \cap b = \emptyset) \wedge \cup S = X.$$

**Definition 5.4.** 令  $\sim$  是  $X$  上的等价关系.  $X/\sim := \{[x]_{\sim} \mid x \in X\}$  称为  $X$  的商集.

**Theorem 5.2.** 令  $\sim$  是  $X$  上的等价关系.  $X/\sim$  是  $X$  的一个划分.

**Theorem 5.3.** 令  $S$  为  $X$  的划分, 定义二元关系:

$$\sim_S := \{(x, y) \in X^2 \mid \exists s \in S (x \in s \wedge y \in s)\}.$$

那么,  $\sim_S$  是等价关系,  $X/\sim_S = S$ . 若  $X$  上的等价关系  $\sim$  满足  $X/\sim = S$ , 则  $\sim_S = \sim$ .

**Proof.**  $\cup S = X \rightarrow \forall x \in X \exists s \in S (x \in s)$ , 即  $\sim_S$  是自反的. 对称和传递性显然. 从而,  $\sim_S$  是等价关系.

依商集和等价类的定义,  $\forall s \in X/\sim_S \exists x \in X \forall t (t \in s \leftrightarrow \exists s' \in S (x \in s' \wedge t \in s'))$ . 这之后我遇到了困难. □

---

<sup>1</sup> 维基百科页面

## §6 序

**Definition 6.1.** 如果  $X$  上的二元关系  $\leq$  满足:

1. 自反 i.e.  $\forall x \in X (x \leq x)$ ;
2. 反对称 i.e.  $\forall x \in X \forall y \in X (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$ ;
3. 传递 i.e.  $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$ ,

则称其为  $X$  上的**偏序** (partial order) 或**序**, 记  $(X, \leq)$ , 并称  $X$  是一个**偏序集** (partially ordered set, appr. poset). 如果它还是**连接的** i.e.  $\forall x \in X \forall y \in X (x \leq y \vee y \leq x)$ , 那么它是  $X$  上的**线序**或**全序** (total order), 此时也称  $X$  是一个**线序集**.

通常记  $\geq := \leq^{-1}$ ,  $< := \leq \cap \neq$ ,  $> := <^{-1}$ .

**Definition 6.2.** 如果  $X$  上的关系  $\preceq$  只满足传递和自反, 称其为  $X$  上的**拟序** (quasi-order) 或**预序** (preorder).  $\succeq := \preceq^{-1}$ .

**Theorem 6.1.** 令  $\preceq$  是  $X$  上的拟序, 等价关系  $\sim$  可由  $\sim = \preceq \cap \succeq$  定义, 且商集  $X / \sim$  上的偏序关系  $\leq$  可定义为

$$[x] \leq [y] \leftrightarrow x \preceq y.$$

**Definition 6.3.** 如果对于  $a \in X$  满足  $\forall x \in X (\neg(a > x))$ , 则称  $a$  为  $X$  的**极小元**. 如果对于  $a \in X$  满足  $\forall x \in X (a \leq x)$ , 则称  $a$  为  $X$  的**最小元**. 相反则有**极大元**和**最大元**.

令  $X_0 \subseteq X$ . 如果  $\exists a \in X \forall x \in X_0 (a \leq x)$ , 则称  $X_0$  在  $X$  中有下界,  $a$  是  $X_0$  在  $X$  中的下界. 如果这样的下界  $a$  的集合有最大元  $a_0$ , 称其为**下确界** (infimun, appr. inf), 记为  $\inf X_0$ . 同理有上界和**上确界** (supremun, appr. sup)  $\sup X_0$ .

作为例子, 令  $X \neq \emptyset$ ,  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  是偏序集. 对于  $\forall S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ,  $S$  有上下确界,  $\sup S = \cup S$ ,  $\inf S = \cap S$ .

**Definition 6.4.** 如果  $X$  和其上的线序  $(X, \leq)$  满足任意  $X_0 \in \mathcal{P}(X)$ ,  $X_0$  都有最小元, 则称  $\leq$  为  $X$  上的**良序**,  $X$  被称为**良序集**.

## 第三章 实数

### §7 自然数

根据 Inf (axion 6), 这样的集合是存在的:

**Definition 7.1.** 如果集合  $X$  满足:

$$\emptyset \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow x^+ \in X)$$

则称其为归纳集.

容易知道  $0 := \emptyset$  属于任何归纳集,  $1 := 0^+$  也属于任何归纳集, ..., 以此类推. 最小的归纳集被称为自然数集, 它的严格定义如下:

**Definition 7.2.**

$$\mathbb{N} := \{n \mid \forall X(X \text{ 是归纳集} \rightarrow n \in X)\}.$$

$\mathbb{N}$  是自然数集, 其元素是自然数.

从定义上可以看出,  $\mathbb{N}$  是归纳集, 而且是任何归纳集的子集.

**Theorem 7.1.** 归纳原理 令  $\varphi(n)$  是一个性质. 如果

1.  $\varphi(0)$  成立;
2.  $\forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+))$  成立,

那么,  $\forall n \in \mathbb{N} \varphi(n)$  成立.

**Proof.** 构造集合  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$ , 根据它是归纳集, 可知  $\mathbb{N} \subseteq M$ , 但  $M$  是根据 Sep 从  $\mathbb{N}$  中分离出来的, 得知  $M = \mathbb{N}$ . □

在  $\mathbb{N}$  上定义偏序关系  $\leq = \in \cap =$ , 而且可以证明, 这是一个良序.

**Theorem 7.2.** 第二归纳原理 令  $\varphi(n)$  是一个性质.

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall k \in n \varphi(k) \rightarrow \varphi(n)) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \varphi(n)$$

## §8 递归定理

接下来我们要定义一些二元函数, 即我们熟悉的自然数集上的运算. 我们可以递归地给出它们的定义, 但这种定义的合理性需要递归定理的辩护.

**Definition 8.1.** 以  $n \in \mathbb{N}$  或  $\mathbb{N}$  为定义域的函数称为**序列**, 其中前者称为长度为  $n$  的**有穷序列**, 后者称为**无穷序列**, 通常分别记为  $\langle a_k \mid k < n \rangle$  或  $\langle a_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ , 或简记为  $\langle a_k \rangle_{k < n}$  或  $\langle a_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ . 值域通常记为  $\{x_k \mid k < n\}$  或  $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , 或简记为  $\{a_k\}_{k < n}$  或  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . 特别地, 长度为 0 的序列称为**空序列**.

若序列的到达域是  $Y$ , 则通常称为  $Y$  内的序列.  $Y$  内所有有穷序列的集合可记为  $A^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ .

**Theorem 8.1. 递归定理**

$$\forall A \forall a \in A \forall g \in A^{A \times \mathbb{N}} \exists! f \in A^{\mathbb{N}} (f(0) = a \wedge \forall n \in \mathbb{N} (f(n^+) = g(f(n), n))).$$

这里的  $g$  扮演了一个“递推式”的角色.

**Proof.** 首先, 我们需要证明  $f$  的存在性.

注意到  $f$  是  $A$  中的无穷序列, 我们考虑用满足条件的有穷序列去逼近它. 基于  $a$  和  $g$  的  $m$ -近似定义为有穷序列  $t: m^+ \rightarrow A$  满足

$$t_0 = a \wedge \forall k \in m^+ (t_{k^+} = g(t_k, k)).$$

并记  $\mathcal{F} = \{t \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A) \mid t \text{ 是 } m\text{-近似的}\}$ , 及  $f = \bigcup \mathcal{F}$ . 接下来我们证明这个  $f$  是所寻找的函数.

首先证明它是函数. 由 theorem 4.6, 知这当且仅当  $\mathcal{F}$  相容. 令  $t, u \in \mathcal{F}$ . 记  $m = \text{dom } t$ ,  $n = \text{dom } u$ . 不妨设  $m \leq n$ .  $t, u$  相容 iff  $\forall k \in m (t_k = u_k)$ . 这由 1)  $t_0 = u_0 = a$ ; 2)  $t_k = u_k \rightarrow t_{k^+} = g(t_k, k) = g(u_k, k) = u_{k^+}$  的成立和归纳原理保证.

接着确定  $f \in A^{\mathbb{N}}$ .  $\text{dom } f \subseteq \mathbb{N}$  和  $\text{ran } f \subseteq A$  是显然的. 下证  $\mathbb{N} \subseteq \text{dom } f$ . 注意到  $\text{dom } f = \bigcup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{存在 } n\text{-近似的}\}$ . 接下来就是证明  $\text{dom } f$  是归纳集, 即  $\forall n \in \mathbb{N}$  存在  $n$ -近似. 0-近似由  $\{(0, a)\}$  给出;  $k$ -近似  $t$  存在时, 只需为之并上  $\{(k^+, g(t_k, k))\}$  即可得到  $k^+$  近似.

至于  $f$  满足  $f(0) = a$  与  $\forall n \in \mathbb{N} (f(n^+) = g(f(n), n))$ , 用其任意近似证明即可, 只需想到  $f$  与近似的相容性.

如此我们确定了  $f$  的存在性, 然后来证明它的唯一性. 假设有  $h: \mathbb{N} \rightarrow A$  也满足定理, 只需归纳法证明  $h(n) = f(n)$  对任意  $n \in \mathbb{N}$  成立即可.  $\square$

这样的  $f$  只能是一元函数, 定义运算需要带参数的版本:



**Theorem 8.2.** 带参数的递归定理

$$\forall A \forall P \forall a \in A^P \forall g \in A^{P \times A \times \mathbb{N}} \exists! f \in A^{P \times \mathbb{N}} ( \\ \forall p \in P f(p, 0) = a(p) \wedge \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in P (f(p, n^+) = g(p, f(n), n))) .$$

注: 如果固定  $p$ , 这个定理与递归定理几乎一致, 从而我们需要考虑以  $p$  为变元的函数作为递归定理中的到达域.

**Proof.** 令  $G: A^P \times \mathbb{N} \rightarrow A^P$ ;  $(t, n) \mapsto h$ , 其中  $h$  满足  $\forall p \in P (h(p) = g(p, t(p), n))$ . 考虑到  $t$  和  $g$  都是函数, 复合的  $h$  当然是函数, 而且唯一.

由递归定理, 有这样的函数  $F: \mathbb{N} \rightarrow A^P$  满足 1)  $\forall p \in P (F(0) = a \in A^P)$ ; 2)  $\forall n \in \mathbb{N} (F(n^+) = G(F(n), n))$ .

可以验证  $f(p, n) = F(n)(p)$  即是我们想找的函数. □

有了带参数的递归定理, 自然数上的运算可以看作以下存在而且唯一的二元函数:

**Definition 8.2.** 加法  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 满足 1)  $\forall m \in \mathbb{N} (+ (m, 0) = m)$ ; 2)  $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (+ (m, n^+) = (+ (m, n))^+)$ . 通常记  $+(m, n) =: m + n$ .

**Definition 8.3.** 乘法  $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 满足 1)  $\forall m \in \mathbb{N} (\cdot (m, 0) = 0)$ ; 2)  $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (\cdot (m, n^+) = (\cdot (m, n))^+)$ . 通常记  $\cdot (m, n)$  为  $mn$  或  $m \cdot n$ .

我们熟悉的关于乘法和加法的性质都可以由归纳原理证出, 此处不再赘述.

## §9 势

**Definition 9.1.** 两个集合  $X, Y$  等势 (equinumerous) 指的是  $\exists f \in Y^X$  ( $f$  是双射), 记为  $|X| = |Y|$ .

**Definition 9.2.** 若存在  $f \in Y^X$  s.t.  $f$  是单射, 则称  $|X| \leq |Y|$ . 当  $|X| \leq |Y|$  而  $|X| \neq |Y|$  时, 我们就称  $X$  的势小于  $Y$  的势, 记为  $|X| < |Y|$ .

**Theorem 9.1.**

$$|X| \leq |Y| \leftrightarrow \exists Y_0 \in \mathcal{P}(Y) (|X| = |Y_0|).$$

**Proof.** 对于  $f \in Y^X$  且  $f$  是单的, 取  $Y_0 = \text{ran } f$  即可. □

下面我们将介绍 Cantor-Bernstein-Schröder 定理, 它的证明当中最重要的一部分是以下引理的证明:

**Lemma 1.**

$$A' \subseteq B \subseteq A \wedge |A'| = |A| \rightarrow |B| = |A|.$$

注: 我们已经知道有  $A$  到  $B$  的单射了, 怎么找到一个同时是满的呢? 这要求这个双射  $h$  要把  $A - B$  和  $B$  映射到  $B$  的分划上, 可  $h[A - B]$  在  $B$  之中, 它在  $h$  下必须映射到  $h[B]$  里; 同理  $h[h[A - B]]$  必须映射到  $h[B] - h[h[A - B]]$  中...

也就是说:  $A$  和  $A - B$  在  $h^n$  即  $h$  的任意个复合中, 总是映射到一对不相交的集合  $h^n[A]$ ,  $h^n[A - B]$  中 (否则不可能是单的), 而且  $h^n[A - B]$  在  $h$  的映射下, 又只能落到  $h^n[B]$  中. 从而:  $h^n[B]$  不断在缩小, 给  $h^n[A - B]$  腾出空间. 这是以下证明的重要思路.

**Proof.** 令  $h$  见证了  $A'$  和  $A$  的等势, 即  $h \in A'^A$  且  $h$  是双射. 记:

$$A_0 := A, \quad B_0 := B,$$

并定义序列:

$$A_{n+1} = h[A_n], \quad B_{n+1} = h[B_n].$$

我们可以归纳地证出:

$$\forall n \in \mathbb{N} (A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n),$$

只需认识到  $A_1 \subseteq A' \subseteq B_0 \subseteq A_0$ , 且对于任意  $k \in \mathbb{N}$  只要  $A_{k+1} \subseteq B_k \subseteq A_k$ , 则  $h[A_{k+1}] \subseteq h[B_k] \subseteq h[A_k]$ .

定义  $C_n = A_n - B_n$ , 下验证  $h[C_n] = C_{n+1}$ :

$$h[C_n] = h[A_n - B_n] = h[A_n] - h[B_n] = A_{n+1} - B_{n+1} = C_{n+1},$$

其中第二个等式的成立依赖于  $h$  是一个单射, 因为:  $h[A_n]$  中  $h[B_n]$  全部由  $B_n$  映射而来, 这是单性要求的; 从而  $h[A_n] - h[B_n]$  是  $A_n - B_n$  的像, 因为映射到自身的值域总是满的.

将这些所有的  $C_n$  并起来:

$$C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n,$$

从而

$$h[C] = h\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C - C_0 = C - (A - B).$$

我们可以看到  $C$  中的元素有这样的性质, 它含于某个  $C_n$  中, 并将被  $h$  映射到下一个  $C_{n+1}$  中; 而且要么它是  $C_0 = A - B$  中的元素, 要么是  $C_{n-1}$  中某个元素的在  $h$  下的像. 这有些像 Hilbert 的无限旅馆.  $h \upharpoonright C$  到是从  $C$  到它的子集  $h[C]$  的满射, 而它的单性已由  $h$  自身的单性保证了.

而  $h$  在  $A - C$  的限制却不一定是满的, 因为  $h[A] = A' \subseteq B$  本身就不一定是到  $B$  的满射. 因为

$$A - C = (A - C_0) \cap (A - h[C]) \subseteq A - C_0 = A - (A - B) = B,$$

所以  $A - C$  和  $h[C]$  构成了  $B$  的分划.

因而我们可以这样定义  $A$  到  $B$  的双射:

$$i(x) = \begin{cases} h(x), & x \in C; \\ x, & x \in A - C. \end{cases}$$

□

### Theorem 9.2. Cantor-Bernstein-Schröder 定理

如果  $|X| \leq |Y|$  且  $|Y| \leq |X|$ , 则  $|X| = |Y|$ .

**Proof.**  $|X| \leq |Y|$  和  $|Y| \leq |X|$  分别蕴含了单射  $f \in Y^X$  和  $g \in X^Y$  的存在, 且有

$$g[f[X]] \subseteq g[Y] \subseteq X,$$

和  $|g[Y]| = |Y|$ ,  $|g[f[X]]| = |f[X]| = |X|$ . 由引理 1, 这意味着  $|X| = |Y|$ . □

注: 早先的 Cantor-Bernstein-Schröder 定理利用了 **AC**, 但这里的证明避免了它.

这个定理说明了  $\leq$  拥有传递性, 这意味着  $\leq$  是一个偏序. 而且, 在  $\mathbb{N}$  中, 它和先前定义的自然数的偏序  $\leq$  是等价的. 这暗示我们可以这样做: 记  $|n| = n$ , 只要  $n \in \mathbb{N}$ .

## 参考文献

- [1] 数理逻辑：证明及其限度. 逻辑与形而上学教科书系列. 上海：复旦大学出版社，2014. ISBN: 9787309110258. URL: <https://books.google.co.jp/books?id=WDPqjgEACAAJ>.
- [2] 集合论：对无穷概念的探索. 逻辑与形而上学教科书系列. 复旦大学出版社，2014. ISBN: 9787309107104. URL: <https://books.google.co.jp/books?id=Su2-nQAACAAJ>.

# 索引

$m$ -近似, 12

$n$  元关系, 6

笔记中出现的符号

$2^X$ , 3

$(a, b)$ , 5

**AC**, 4

**AC II**, 8

$\mathbb{N}$ , 11

$\mathcal{P}(X)$ , 3

$\preceq$ , 10

$R(x, y)$ , 5

$S(x)$ , 3

$\Sigma \vdash \varphi$ , 1

$T \vdash \sigma$ , 1

**V**, 2

$X^2$ , 5

$x^+$ , 3

$xRy$ , 5

$X \times Y$ , 5

$Y^X$ , 7

Cantor-Bernstein-Schröder 定理, 15

Cartesian 积, 5

Exi, 2

Ext, 2

Fnd, 4

Inf, 3

Pai, 3

Pow, 3

Rep, 4

Sep, 2

Uni, 3

Zermelo-Fraenkel 系统, 4

一致的, 1

一般 Cartesian 积, 7

上界, 10

上确界, 10

下界, 10

下确界, 10

乘法, 13

二元关系, 5

交, 2

任意交, 3

传递, 9

值, 6

值域, 5  
偏序, 10  
偏序集, 10  
像, 6  
全序, 10  
公式, 1  
公理, 1  
函数, 6  
分离公理模式, 2  
划分, 9  
加法, 13  
单射, 7  
双射, 7  
反对称, 10  
可公理化的, 1  
可判定的, 1  
可计算的, 1  
可逆, 7  
后继, 3  
商集, 9  
基础公理, 4  
复合, 6  
外延公理, 2  
子集, 3  
存在公理, 2  
定义域, 5  
对称, 9  
对集公理, 3  
差, 2  
带参数的递归定理, 13  
幂集, 3  
幂集公理, 3  
并集公理, 3  
序, 10

序列, 12  
归纳原理, 11  
归纳集, 11  
形式语言, 1  
扩张, 8  
拟序, 10  
指标函数, 7  
指标系统, 6  
指标集, 6  
推演, 1  
无穷公理, 3  
无穷序列, 12  
替换公理模式, 4  
最大元, 10  
最小元, 10  
有序对, 5  
有穷序列, 12  
极大元, 10  
极小元, 10  
满射, 7  
理论, 1  
直积, 5  
相容, 8  
相容系统, 8  
真子集, 3  
真类, 2  
空序列, 12  
空集, 2  
第二归纳原理, 11  
等价, 9  
等价关系, 9  
等价类, 9  
等势, 13

等同函数, 6

类, 2

约束变元, 1

线序, 10

线序集, 10

自反, 9

自然数, 11

自然数集, 11

自由变元, 1

良序, 10

良序集, 10

证明, 1

语句, 1

连接, 10

逆, 6

选择公理, 4, 8

选择函数, 8

递归可枚举的, 1

递归定理, 12

递归的, 1

逻辑符号, 1

限制, 8

非逻辑符号, 1

项, 1

预序, 10