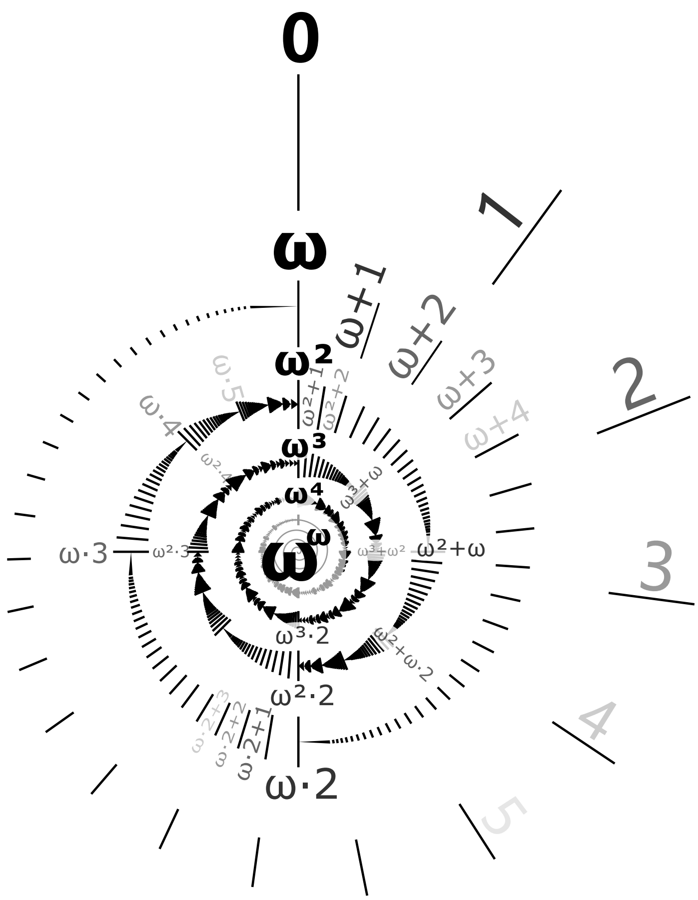
# Set Theory

Hoyan Mok [1]

2020 年 8 月 14 日




[1]E-mail: victoriesmo@hotmail.com

B

# 笔记说明

该笔记是笔者学习集合论的笔记, 主要是为了数学服务 (而非哲学). 主要的参考资料是 [2].

笔者曾疑惑于逻辑公理和集合论公理的先后关系, 查阅资料后, 初步得出这样的结论: 我们必须选择朴素的集合论或者简单的一阶逻辑作为前置, 而它们是在我们的元语言中得到保证的.

本笔记尽量做到自足.

你可以在https://github.com/HoyanMok/NotesOnMathematics/tree/master/SetTheory获得本笔记最新的 PDF 与 TEX 源文档. 封面来源: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Omega-exp-omega-labeled.svg

# 目录

# 第一章　集合与公理

在介绍集合论的 **ZFC** 公理之前, 需要先介绍一些数理逻辑的概念.

## §1　数理逻辑准备

句法概念如**形式语言**, **逻辑符号**, **非逻辑符号**, **项**, **公式**, **自由变元**, **约束变元**, **语句**等主要见 [1].

设 $\Sigma$ 是一个公式集, $\varphi$ 是一个公式.

**Definition 1.1.** 有穷公式序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 表示从 $\Sigma$ 到 $\varphi$ 的一个**推演**, 如果其中的任意 $\varphi_i$ 要么是属于 $\Sigma$ 的, 要么可从之前的公式 $\varphi_j$ 和 $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ 得到, 而且 $\varphi_n = \varphi$. 记作 $\Sigma \vdash \varphi$.

特别地, 如果 $T$ 是语句集, 而 $\sigma$ 是语句, 如果 $T \vdash \sigma$, 就称存在从 $T$ 到 $\sigma$ 的一个**证明**.

如果语句集 $T$ 满足: 对任意语句 $\sigma$, $T \vdash \sigma$ 当且仅当 $\sigma \in T$, 即 $T$ 是一个对证明封闭的语句集, 就称 $T$ 为**理论**. 假设 $T$ 是理论, 如果存在一个语句集 $A \subseteq T$ 使得对任意的 $\sigma \in T$ 都有 $A \vdash \sigma$, 就称 $A$ 为 $T$ 的一集**公理**.

如果理论 $T$ 的公理 $A$ 是**递归的** (**可判定的**, **可计算的**) i.e. 任给一语句, 总可以在有穷步骤内完全机械地判定它是否属于 $A$, 就称 $T$ 是**可公理化的**. 理论 $T$ 往往不是递归的, 但如果任给 $\sigma \in T$, 我们可在有穷的步骤内得出结论, 但如果 $\sigma \notin T$, 我们可能不能在有穷步骤内得出结论, 则称其为**递归可枚举的**.

一个理论是**一致的**当且仅当没有语句 $\sigma$ s.t. $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$.

**Definition 1.2.** 若 $\psi$ 是性质.

$$\exists! x\psi(x) := \exists x\psi(x) \wedge \forall x \forall y(\psi(x) \wedge \psi(y) \to x = y) \tag{1-1}$$

## §2 ZFC 公理

**Axiom 0** (**存在公理**, ***Exi***)**.** *存在一个集合, i.e.*

$$\exists x(x = x). \tag{2-1}$$

**Axiom 1** (**外延公理**, ***Ext***)**.** *两个有相同元素的集合相等, i.e.*

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y. \tag{2-2}$$

而逻辑上有 $X = Y \to \forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$, 所以:

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y \tag{2-3}$$

记 $\neg(X = Y) =: X \neq Y$.

**Axiom 2** (**分离公理模式**, ***Sep***)**.** *令 $\varphi(u)$ 为公式. 对任意集合 $X$, 存在一个集合 $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$, i.e.*

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \tag{2-4}$$

**Corollary 1.**

$$\forall X \exists R_X(R_X \notin R_X). \tag{2-5}$$

***Proof.*** 令 $R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$ 即可. □

令 $\varphi(u)$ 为一个性质. 倘若 $\exists X \forall u(\varphi(u) \to u \in X)$, 则 $u \mid \varphi(u) = u \mid \varphi(u)$, 根据 Sep (axiom 2), $\exists \varnothing = u \mid \varphi(u)$. 分离于不同的集合 $X$ 和 $X'$ 的 $\varnothing$ 是相同的. 考虑到 $x \neq x \to x \in X$ 是重言式, 再根据 Exi (axiom 0), 可以得出:

**Definition 2.1.** $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ 是集合, 称为**空集**.

**Definition 2.2.** $\varphi(u)$ 是一个性质. 称 $\{u \mid u(u)\}$ 为一个**类** (class). 若一个类不是集合, 则称其为**真类** (proper class).

如所有集合的类 $\mathbf{V}$ 就是一个真类 (根据 Corollary 1).

**Definition 2.3.** 由 Sep, 两个集合的**交**和**差**也是集合:

$$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\} \qquad X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\} \tag{2-6}$$

**Corollary 2.** 而非空集 $X \neq \varnothing$ 的**任意交**

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y \in X(u \in Y)\} \tag{2-7}$$

也是集合.

***Proof.*** 因 $X \neq \varnothing$, $\exists x_0 \in X$. 由 Sep,

$$Y = \{y \in x_0 \mid \forall x \in X(y \in x)\}$$

是集合. □

**Axiom 3** (**对集公理**, ***Pai***)**.**

$$\forall a \forall b \exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b). \tag{2-8}$$

这样的 $c$ 可记为 $\{a, b\}$.

**Axiom 4** (**并集公理**, ***Uni***)**.**

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow \exists z \in X(u \in z). \tag{2-9}$$

**Definition 2.4.** **子集**和**真子集**关系定义如下:

$$X \subseteq Y := \forall x \in X(x \in Y), \tag{2-10}$$

$$X \supseteq Y := Y \subseteq X, \tag{2-11}$$

$$X \subset Y := X \subseteq Y \wedge X \neq Y, \tag{2-12}$$

$$X \supset Y := X. \tag{2-13}$$

**Corollary 3.** $\forall X(\varnothing \subseteq X)$.

**Axiom 5** (**幂集公理**, ***Pow***)**.**

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{2-14}$$

这样的 $Y$ 称为 $X$ 的**幂集**, 记为 $\mathscr{P}(X)$ 或 $2^X$.

**Definition 2.5.** 对任意集合 $x$, $x \cup \{x\}$ 称为其**后继**, 记为 $S(x)$ 或 $x^+$.

**Axiom 6** (**无穷公理**, ***Inf***)**.**

$$\exists X\big(\varnothing \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow S(x) \in X)\big). \tag{2-15}$$

**Axiom 7** (**基础公理**, ***Fnd***)**.**

$$\forall x\big(x \neq \varnothing \to \exists y \in x(x \cap y = \varnothing)\big). \tag{2-16}$$

**Theorem 2.1.**

$$\forall x(x \notin x). \tag{2-17}$$

***Proof.*** 考虑 $X = \{x\}$. 与 Fnd 矛盾. □

**Theorem 2.2.**

$$\nexists X\big(X \neq \varnothing \wedge \forall x \in X(\exists y \in X(y \in x))\big). \tag{2-18}$$

***Proof.***

$$\text{Fnd} \wedge \forall x \in X\big(\exists y \in X(y \in x \cap X)\big) \to \bot.$$

□

**Axiom 8** (**替换公理模式**, ***Rep***)**.** *对公式 $\psi(x, y)$, $\forall x$ 都存在唯一的 $y$ s.t. $\psi(x, y)$ 成立. 那么 $\forall A \in \mathbf{V}$, 存在集合:*

$$B = \{y \mid \exists x \in A\, \psi(x, y)\} \tag{2-19}$$

*i.e.*

$$\forall A \forall x \in A\, \exists! y\, \psi(x, y) \to \exists B \forall x \in A\, \exists y \in B\, \psi(x, y) \tag{2-20}$$

**Axiom 9** (**选择公理**, **AC II**)**.** *对任意非空集合 $X \neq \varnothing$, 若*

*(1) $\varnothing \notin X$,*

*(2) $X$ 中两两不交, 即 $\forall x \in X\, \forall y \in X$ 且 $x \neq y$, 那么 $x \cap y = \varnothing$,*

*则存在集合 $S$, 对 $\forall x \in S$, $S \cap x$ 是单点集. i.e.*

$$\begin{aligned}\forall X\big(\varnothing \in X \wedge \forall x \in X\, \forall y \in X(x = y \vee x \cap y = \varnothing)\\ \to \exists S \forall x \in X\, \exists! y(S \cap x = \{y\})\big).\end{aligned} \tag{2-21}$$

Axiom 0 到 8 构成的公理系统称为 ***Zermelo-Fraenkel* 系统**, 记为 **ZF**, 加上选择公理则记为 **ZFC**.

# 第二章　关系与函数

## §3　关系

**Definition 3.1.** 集合 $a, b$ 的**有序对**$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$.

**Theorem 3.1.**

$$(a,b) = (a',b') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

***Proof.*** 只证明"$\rightarrow$":

(1) $a = b$. $(a,b) = \{\{a\}\} = (a',b')$, 故 $(a',b') = \{\{a\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\}$, 由 Ext (axiom 1), $\{a'\} = \{a',b'\} = \{a\}$, 即 $a = b = a' = b'$.

(2) $a \neq b$. 假设 $\{a,b\} = \{a'\}$, 得 $\forall x \in \{a,b\}(x = a')$ 即 $a = b = a'$ 与 $a \neq b$ 矛盾. 从而只有 $\{a,b\} = \{a',b'\} \wedge \{a\} = \{a'\}$, 仍然由 Ext 易证.

$\square$

**Definition 3.2.** 令 $X$ 和 $Y$ 是集合, 其**直积**或 ***Cartesian*** **积**定义为:

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}. \tag{3-1}$$

简记 $X \times X =: X^2$.

**Theorem 3.2.** *对于 $\forall X \forall Y$, $X \times Y$ 是集合.*

***Proof.*** 令 $\varphi(z) = \exists x \in X \exists y \in Y((x,y) = z)$, 取 $Z = \{z \in \mathscr{P}(X \cup Y) \mid \varphi(z)\}$, 由 Ext 和 Sep (axiom 2) 即可知 $X \times Y = Z$. $\square$

**Definition 3.3.** 如果存在集合 $X, Y$ s.t. $R \subseteq X \times Y$, 则称集合 $R$ 是**二元关系**. 通常记 $(x,y) \in R =: R(x,y)X$, 或 $xRyxRy$. $\operatorname{dom} R := \{x \mid \exists y R(x,y)\}$ 称为其**定义域**, $\operatorname{ran} R = \{y \mid \exists x R(x,y)\}$ 称为其**值域**.

特别地, 如果 $R \subseteq X^2$, 则称其为 $X$ 上的二元关系.

**Definition 3.4.** 集合 $X$ 在关系 $R$ 的**像**$R[X]$ 定义为 $\{y \in \operatorname{ran} R \mid \exists x \in X\,(R(x,y))\}$. 集合 $Y$ 的逆像 $R^{-1}[Y]$ 则定义为 $\{x \in \operatorname{dom} R \mid \exists y \in Y\,(R(x,y))\}$. 二元关系 $R$ 的**逆**$R^{-1}$ 是 $\{(x,y) \mid R(y,x)\}$. 两个二元关系 $R, S$ 的**复合**$S \circ R$ 则定义为 $\{(x,z) \mid \exists y(R(x,y) \land S(y,z))\}$.

**Theorem 3.3.** *令 $R$ 是二元关系, $A, B$ 是集合. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$, $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$, $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$.*

Cartesian 积可递归地推广到 $n$ 元:

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) = ((x_1, \cdots, x_n), x_{n+1}); \tag{3-2}$$

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \land \cdots \land x_n \in X_n\} \tag{3-3}$$

$n$ 元 Cartesian 积的子集可类似地定义$n$ **元关系**.

**Theorem 3.4.** *$n$ 元 Cartesian 积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 是空集, 则存在 $X_i = \varnothing$.*

## §4 函数

**Definition 4.1.** 二元关系 $f$ 倘满足:

$$\forall x\big((x,y) \in f \land (x,z) \in f \to y = z\big),$$

则称 $f$ 是**函数**, $y$ 是 $f$ 在 $x$ 处的**值**, 记为 $f(x) = y$, 或 $f\colon x \mapsto y$. 倘若 $\operatorname{dom} f = X$, $\operatorname{ran} f \subseteq Y$, 则称 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的函数, 记为 $f\colon X \to Y$.

对任意集合 $X$ 定义 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 为 $\forall x \in X(\mathrm{id}_X(x) = x)$, 称为**等同函数**.

**Theorem 4.1.** *令 $f, g$ 都是函数.*

$$f = g \leftrightarrow \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g \land \forall x \in \operatorname{dom} f\big(f(x) = g(x)\big).$$

***Proof*.** 只证明"$\leftarrow$":

$$\begin{aligned}\forall(x,y) \in f\big(x \in \operatorname{dom} f \land y = f(x)\big) \land \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g \land \forall x \in \operatorname{dom} f\big(f(x) = g(x)\big)\\ \to \forall(x,y) \in f\big(x \in \operatorname{dom} g \land y = g(x)\big).\end{aligned}$$

同理, $\forall(x,y) \in g\big(x \in \operatorname{dom} f \land y = f(x)\big)$, 即 $\forall(x,y)\big(y = f(x) \leftrightarrow y = g(x)\big)$. 由 Ext, $f = g$. $\square$

通常以集合为值的函数 $i \mapsto X_i$, 其中 $i \in I$, 可视为**指标系统**, $I$ 是**指标集**. 记为 $X = \{X_i \mid i \in I\}$ 或 $\{X_i\}_{i \in I}$.

**Theorem 4.2.** $\psi(i,x)$ 是公式. $\forall I \forall X$,

$$\bigcup_{i\in I}\{x \in X \mid \psi(i,x)\} = \{x \in X \mid \exists i \in I\big(\psi(i,x)\big)\},$$
$$\bigcap_{i\in I}\{x \in X \mid \psi(i,x)\} = \{x \in X \mid \forall i \in I\big(\psi(i,x)\big)\}.$$

**Definition 4.2.** 令 $X = \{X_i \mid i \in I\}$ 是一个指标系统. $X$ 的**一般 *Cartesian* 积**为:

$$\prod_{i\in I} X_i := \{f \mid f\colon I \to X_i\}.$$

另, $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ 称为**指标函数**.

**注**: 虽然这样的定义和 Cartesian 积不同, 但接下来的概念确保了, 两者之间可以一一对应, 从而是等同的.

**Definition 4.3.** 令 $f\colon X \to Y$ 是函数. 若 $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$ 则称 $f$ 为**单射** (injection). 若 $\operatorname{ran} f = Y$ 则称其为**满射** (surjection). 既单又满的函数称为**双射** (bijection). 如果函数的逆 $f^{-1}$ 也是函数, 则函数 $f$ 称为**可逆**的.

作为例子, 若空映射 $\operatorname{ran} f = \operatorname{dom} f = \varnothing$, $f = \varnothing$ 总是单的, $f^{-1} = \{(y,x) \mid y = f(x)\} = \varnothing$ 也是空映射.

**注**: 这里函数的逆的定义与通常不同, 因 $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{ran} f$ 而非 $Y$. 因而下面的定理在这样的定义下是成立的 (否则还要加上满射的条件):

记 $Y^X := \{f \mid f\colon X \to Y\}$. $\forall Y\big(Y^{\varnothing} = \{\varnothing_Y\}\big)$, 而若 $X \neq \varnothing$, $\varnothing^X = \varnothing$.

**Theorem 4.3.** 函数 $f$ 可逆 iff $f$ 是单射.

***Proof.*** 可逆意味着 $(y,x_1) \in f^{-1} \wedge (y,x_2) \in f^{-1} \leftrightarrow x_1 = x_2$, 又由逆的定义, $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$, 这即是单射的定义. □

**Theorem 4.4.** 函数 $f$ 若可逆, 则 $f^{-1}$ 可逆, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$.

证明从略.

**Theorem 4.5.** 如果 $f$ 和 $g$ 是函数, 它们的复合 $h = g \circ f$ 也是函数. 而且 $\operatorname{dom} h = f^{-1}\big(\operatorname{dom} g\big)$.

**注**: 这里的复合和通常的定义有细微不同, 但保持了与二元关系的统一.

***Proof.*** 复合的定义: $h = g\circ f \leftrightarrow \forall (x,z)\in h\Big(\exists y\big(y=f(x)\land z=g(y)\big)\Big)$. 倘若 $(x,u)\in h\land (x,u)\in h$, 有 $\exists! y$ s.t. $y=f(x)$, 且 $u=v=g(y)$. 因而 $h$ 也是函数.

其定义域 $\operatorname{dom} h=\{x\mid \exists z\big(z=h(x)\big)\}$, 又因 $\exists z(z=h(x))\leftrightarrow \exists z\exists y\big(y=f(x)\land z=g(y)\big)$, 后者又等价于 $\exists y\Big(y=f(x)\land \exists z\big(z=g(y)\big)\Big)$, i.e. $\exists y\in \operatorname{dom} g\big(y=f(x)\big)$,

$$\operatorname{dom} h=\{x\mid \exists y\in\operatorname{dom} g\big(y=f(x)\big)\}=f^{-1}(\operatorname{dom} g).$$

□

**Definition 4.4.** 令 $f$ 是任意函数, $A$ 是任意集合. 函数 $f\restriction A=\{(x,y)\in f\mid x\in A\}$ 是 $f$ 在 $A$ 上的**限制**. 若 $g=f\restriction A$, 则称 $f$ 是 $g$ 在 $\operatorname{dom} f$ 的**扩张**.

**Definition 4.5.** 函数 $f$, $g$ 被认为是**相容**的, 如果:

$$\forall x\in\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g\big(f(x)=g(x)\big)$$

指标系统 $\mathcal{F}=\{f_i\mid i\in I\}$ 被称为**相容系统**, 如果

$$\forall f_i\in\mathcal{F}\forall f_j\in\mathcal{F}(\ f_i \text{ 和 } f_j \text{ 相容.})$$

**Theorem 4.6.** *$f$ 和 $g$ 是函数. 以下的命题是等价的:*

*(1) $f$ 与 $g$ 相容;*

*(2) $f\cup g$ 是函数;*

*(3) $f\restriction\big(\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g\big)=g\restriction\big(\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g\big)$.*

***Proof.*** (1)↔(3): 注意到 $\operatorname{dom}\Big(f\restriction\big(\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g\big)\Big)=\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g$. 由相容的定义和定理4.1可得证.

(2)↔(1): 假设 $f$ 与 $g$ 不相容, 即 $\exists x\in\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g\subseteq\operatorname{dom} f\cup g$ s.t. $f(x)\neq g(x)$, 这与函数 $f\cup g$ 的定义不相符. 若 $f\cup g$ 不是函数, 它至少是 $\operatorname{dom} f\cup\operatorname{dom} g\times\operatorname{ran} f\cup\operatorname{ran} g$ 上的二元关系, 由函数的定义, $\exists x\in\operatorname{dom} f\cup g$ s.t. $\exists y_1\exists y_2\big((x,y_1)\in f\cup g\land (x,y_2)\in f\cup g\land y_1\neq y_2\big)$. 通过对 $x$ 在 $\operatorname{dom} f-\operatorname{dom} g$, $\operatorname{dom} g-\operatorname{dom} f$, $\operatorname{dom} g\cap\operatorname{dom} g$ 讨论, 可以得出要么 $f$ 或 $g$ 不是函数 (从而与题设矛盾), 要么 $f$, $g$ 不相容. □

**Axiom 9** (**选择公理** (第二形式), **AC II**)**.**

$$\forall\mathcal{F}\Big(\varnothing\notin\mathcal{F}\land\mathcal{F}\neq\varnothing\land\exists f\colon\mathcal{F}\to\cup\mathcal{F}\big(\forall F\in\mathcal{F}(f(F)\in F)\big)\Big)$$

其中这样的 $f$ 通常被称为**选择函数**.

对于任意非空 $\omega$ (尤其是当 $\omega$ 是无穷集时), $\prod_{i\in\omega X_i} = \varnothing \to \exists i \in \omega(X_i = \varnothing)$ 与选择公理等价.[1]

## §5 等价和划分

**Definition 5.1.** 令 $R \subseteq X^2$ 是 $X$ 上的二元关系. $R$ 是:

(1) **自反**的, 若 $\forall x \in X(xRx)$;

(2) **对称**的, 若 $\forall x \in X \forall y \in X(xRy \to yRx)$;

(3) **传递**的, 若 $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X(xRy \wedge yRz \to xRz)$;

(4) **等价关系**或**等价**的, 若 $R$ 自反, 对称, 传递. 记为 $\sim$.

**Definition 5.2.** 令 $\sim$ 是 $X$ 上的等价关系, $x \in X$. $x$ 关于 $\sim$ 的**等价类**定义为:

$$[x]_\sim := \{t \in X \mid t \sim x\}.$$

**注**: 由 Sep, 等价类是集合而不是真类.

**Theorem 5.1.** *令 $\sim$ 是 $X$ 上的等价关系.*

$$\forall x \in X \forall y \in Y\big([x]_\sim = [y]_\sim \wedge [x]_\sim \cap [y]_\sim = \varnothing\big)$$

**Definition 5.3.** 令 $X$ 是一集合, $S \subseteq \mathscr{P}(X)$. $S$ 被称为 $X$ 的一个**划分**如果:

$$\forall a \in S \forall b \in S(a = b \vee a \cap b = \varnothing) \wedge \cup S = X.$$

**Definition 5.4.** 令 $\sim$ 是 $X$ 上的等价关系. $X/\sim := \{[x]_\sim \mid x \in X\}$ 称为 $X$ 的**商集**.

**Theorem 5.2.** *令 $\sim$ 是 $X$ 上的等价关系. $X/\sim$ 是 $X$ 的一个划分.*

**Theorem 5.3.** *令 $S$ 为 $X$ 的划分, 定义二元关系:*

$$\sim_S := \{(x, y) \in X^2 \mid \exists s \in S(x \in s \wedge y \in s)\}.$$

*那么, $\sim_S$ 是等价关系, $X/\sim_S = S$. 若 $X$ 上的等价关系 $\sim$ 满足 $X/\sim = S$, 则 $\sim_S = \sim$.*

***Proof.*** $\cup S = X \to \forall x \in X \exists s \in S(x \in s)$, 即 $\sim_S$ 是自反的. 对称和传递性显然. 从而, $\sim_S$ 是等价关系.

依商集和等价类的定义, $\forall s \in X/\sim_S \exists x \in X \forall t\big(t \in s \leftrightarrow \exists s' \in S(x \in s' \wedge t \in s')\big)$. 这之后我遇到了困难. □

[1] 维基百科页面

# §6 序

**Definition 6.1.** 如果 $X$ 上的二元关系 $\leq$ 满足:

a) 自反 i.e. $\forall x \in X(x \leq x)$;

b) **反对称** i.e. $\forall x \in X \forall y \in X(x \leq y \wedge y \leq x \to x = y)$;

c) 传递 i.e. $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X(x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z)$,

则称其为 $X$ 上的**偏序** (partial order) 或**序**, 记 $(X, \leq)$, 并称 $X$ 是一个**偏序集** (partially ordered set, appr. poset). 如果它还是**连接**的 i.e. $\forall x \in X \forall y \in X(x \leq y \vee y \leq x)$, 那么它是 $X$ 上的**线序**或**全序** (total order), 此时也称 $X$ 是一个**线序集**.

通常记 $\geq := \leq^{-1}$, $< := \leq \cap \neq$, $> := <^{-1}$.

**Definition 6.2.** 如果 $X$ 上的关系 $\preceq$ 只满足传递和自反, 称其为 $X$ 上的**拟序** (quasi-order) 或**预序** (preorder). $\succeq := \preceq^{-1}$.

**Theorem 6.1.** 令 $\preceq$ 是 $X$ 上的拟序, 等价关系 $\sim$ 可由 $\sim = \preceq \cap \succeq$ 定义, 且商集 $X/\sim$ 上的偏序关系 $\leq$ 可定义为

$$[x] \leq [y] \leftrightarrow x \preceq y.$$

**Definition 6.3.** 如果对于 $a \in X$ 满足 $\forall x \in X(\neg(a > x))$, 则称 $a$ 为 $X$ 的**极小元**. 如果对于 $a \in X$ 满足 $\forall x \in X(a \leq x)$, 则称 $a$ 为 $X$ 的**最小元**. 相反则有**极大元**和**最大元**.

令 $X_0 \subseteq X$. 如果 $\exists a \in X \forall x \in X_0(a \leq x)$, 则称 $X_0$ 在 $X$ 中有下界, $a$ 是 $X_0$ 在 $X$ 中的**下界**. 如果这样的下界 $a$ 的集合有最大元 $a_0$, 称其为**下确界** (infimun, appr. inf), 记为 $\inf X_0$. 同理有**上界**和**上确界** (supremun, appr. sup) $\sup X_0$.

作为例子, 令 $X \neq \varnothing$, $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ 是偏序集. 对于 $\forall S \subseteq \mathscr{P}(X)$, $S$ 有上下确界, $\sup S = \cup S$, $\inf S = \cap S$.

**Definition 6.4.** 如果 $X$ 和其上的线序 $(X, \leq)$ 满足任意 $X_0 \in \mathscr{P}(X)$, $X_0$ 都有最小元, 则称 $\leq$ 为 $X$ 上的**良序**, $X$ 被称为**良序集**.

# 第三章　实数

## §7　自然数

根据 Inf (axiom 6), 这样的集合是存在的:

**Definition 7.1.** 如果集合 $X$ 满足:

$$\varnothing \in X \wedge \forall x(x \in X \to x^+ \in X)$$

则称其为**归纳集**.

容易知道 $0 := \varnothing$ 属于任何归纳集, $1 := 0^+$ 也属于任何归纳集, ..., 以此类推. 最小的归纳集被称为**自然数集**, 它的严格定义如下:

**Definition 7.2.**

$$\mathbb{N} := \{n \mid \forall X(X \text{ 是归纳集} \to n \in X)\}.$$

$\mathbb{N}$ 是**自然数集**, 其元素是**自然数**.

从定义上可以看出, $\mathbb{N}$ 是归纳集, 而且是任何归纳集的子集.

**Theorem 7.1.** **归纳原理** *令 $\varphi(n)$ 是一个性质. 如果*

*a) $\varphi(0)$ 成立;*

*b) $\forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n) \to \varphi(n^+))$ 成立,*

*那么, $\forall n \in \mathbb{N}\, \varphi(n)$ 成立.*

***Proof.*** 构造集合 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$, 根据它是归纳集, 可知 $\mathbb{N} \subseteq M$, 但 $M$ 是根据 Sep 从 $\mathbb{N}$ 中分离出来的, 得知 $M = \mathbb{N}$. □

在 $\mathbb{N}$ 上定义偏序关系 $\leq = \in \cup =$, 而且可以证明, 这是一个良序.

**Theorem 7.2.** **第二归纳原理** *令 $\varphi(n)$ 是一个性质.*

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall k \in n\, \varphi(k) \to \varphi(n)) \to \forall n \in \mathbb{N}\, \varphi(n)$$

# §8 递归定理

接下来我们要定义一些二元函数, 即我们熟悉的自然数集上的运算. 我们可以递归地给出它们的定义, 但这种定义的合理性需要递归定理的辩护.

**Definition 8.1.** 以 $n \in \mathbb{N}$ 或 $\mathbb{N}$ 为定义域的函数称为**序列**, 其中前者称为长度为 $n$ 的**有穷序列**, 后者称为**无穷序列**, 通常分别记为 $\langle a_k \mid k < n \rangle$ 或 $\langle a_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$, 或简记为 $\langle a_k \rangle_{k<n}$ 或 $\langle a_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$. 值域通常记为 $\{x_k \mid k < n\}$ 或 $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, 或简记为 $\{a_k\}_{k<n}$ 或 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. 特别地, 长度为 0 的序列称为**空序列**.

若序列的到达域是 $Y$, 则通常称为 $Y$ 内的序列. $Y$ 内所有有穷序列的集合可记为 $A^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$.

**Theorem 8.1. 递归定理**

$$\forall A \forall a \in A \forall g \in A^{A \times \mathbb{N}} \exists! f \in A^{\mathbb{N}} \big( f(0) = a \land \forall n \in \mathbb{N} (f(n^+) = g(f(n), n)) \big).$$

这里的 $g$ 扮演了一个 “递推式” 的角色.

***Proof.*** 首先, 我们需要证明 $f$ 的*存在性*.

注意到 $f$ 是 $A$ 中的无穷序列, 我们考虑用满足条件的有穷序列去逼近它. 基于 $a$ 和 $g$ 的$m$-**近似**定义为有穷序列 $t \colon m^+ \to A$ 满足

$$t_0 = a \land \forall k \in m^+ \big( t_{k^+} = g(t_k, k) \big).$$

并记 $\mathcal{F} = \{t \in \mathscr{P}(\mathbb{N} \times A) \mid t \text{是 } m\text{-近似}\}$, 及 $f = \cup \mathcal{F}$. 接下来我们证明这个 $f$ 是所寻找的函数.

首先证明它是函数. 由 theorem 4.6, 知这当且仅当 $\mathcal{F}$ 相容. 令 $t, u \in F$. 记 $m = \operatorname{dom} t$, $n = \operatorname{dom} u$. 不妨设 $m \leq n$. $t, u$ 相容 *iff* $\forall k \in m (t_k = u_k)$. 这由 1) $t_0 = u_0 = a$; 2) $t_k = u_k \to t_{k^+} = g(t_k, k) = g(u_k, k) = u_{k^+}$ 的成立和归纳原理保证.

接着确定 $f \in A^{\mathbb{N}}$. $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{N}$ 和 $\operatorname{ran} f \subseteq A$ 是显然的. 下证 $\mathbb{N} \subseteq \operatorname{dom} f$. 注意到 $\operatorname{dom} f = \cup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{存在 } n\text{-近似}\}$. 接下来就是证明 $\operatorname{dom} f$ 是归纳集, 即 $\forall n \in \mathbb{N}$ 存在 $n$-近似. 0-近似由 $\{(0, a)\}$ 给出; $k$-近似 $t$ 存在时, 只需为之并上 $\{(k^+, g(t_k, k))\}$ 即可得到 $k^+$ 近似.

至于 $f$ 满足 $f(0) = a$ 与 $\forall n \in \mathbb{N}(f(n^+) = g(f(n), n))$, 用其任意近似证明即可, 只需想到 $f$ 与近似的相容性.

如此我们确定了 $f$ 的存在性, 然后来证明它的*唯一性*. 假设有 $h : \mathbb{N} \to A$ 也满足定理, 只需用归纳法证明 $h(n) = f(n)$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立即可. □

这样的 $f$ 只能是一元函数, 定义运算需要带参数的版本:

**Theorem 8.2.** **带参数的递归定理**

$$\begin{aligned}&\forall A\forall P\forall a\in A^P\forall g\in A^{P\times A\times\mathbb{N}}\exists! f\in A^{P\times\mathbb{N}}\big(\\&\quad\forall p\in P\, f(p,0)=a(p)\wedge\forall n\in\mathbb{N}\forall p\in P(f(p,n^+)=g(p,f(n),n))\big).\end{aligned}$$

**注**: 如果固定 $p$, 这个定理与递归定理几乎一致, 从而我们需要考虑以 $p$ 为变元的函数作为递归定理中的到达域.

***Proof.*** 令 $G\colon A^P\times\mathbb{N}\to A^P;\ (t,n)\mapsto h$, 其中 $h$ 满足 $\forall p\in P\big(h(p)=g(p,t(p),n)\big)$. 考虑到 $t$ 和 $g$ 都是函数, 复合的 $h$ 当然是函数, 而且唯一.

由递归定理, 有这样的函数 $F\colon\mathbb{N}\to A^P$ 满足 1) $\forall p\in P\big(F(0)=a\in A^P\big)$; 2) $\forall n\in\mathbb{N}\big(F(n^+)=G(F(n),n)\big)$.

可以验证 $f(p,n)=F(n)(p)$ 即是我们想找的函数. □

有了带参数的递归定理, 自然数上的运算可以看作以下存在而且唯一的二元函数:

**Definition 8.2.** **加法**$+\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 满足 1) $\forall m\in\mathbb{N}\big(+(m,0)=m\big)$; 2) $\forall m\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\big(+(m,n^+)=(+(m,n))^+\big)$. 通常记 $+(m,n)=: m+n$.

**Definition 8.3.** **乘法**$\cdot\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 满足 1) $\forall m\in\mathbb{N}\big(\cdot(m,0)=m\big)$; 2) $\forall m\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\big(\cdot(m,n^+)=(\cdot(m,n))^+\big)$. 通常记 $\cdot(m,n)$ 为 $mn$ 或 $m\cdot n$.

我们熟悉的关于乘法和加法的性质都可以由归纳原理证出, 此处不再赘述.

# §9 势

**Definition 9.1** (等势)**.** 两个集合 $X$, $Y$ **等势** (equinumerous) 指的是 $\exists f\in Y^X$($f$是双射), 记为 $|X|=|Y|$.

**Definition 9.2** (势)**.** 若存在 $f\in Y^X$ s.t. $f$ 是单射, 则称 $|X|\le|Y|$. 当 $|X|\le|Y|$ 而 $|X|\ne|Y|$ 时, 我们就称 $X$ 的势小于 $Y$ 的势, 记为 $|X|<|Y|$.

**Theorem 9.1.**

$$|X|\le|Y|\leftrightarrow\exists Y_0\in\mathscr{P}(Y)\big(|X|=|Y_0|\big).$$

***Proof.*** 对于 $f\in Y^X$ 且 $f$ 是单的, 取 $Y_0=\operatorname{ran}f$ 即可. □

下面我们将介绍 Cantor-Bernstein-Schröeder 定理, 它的证明当中最重要的一部分是以下引理的证明:

**Lemma 1.**

$$A' \subseteq B \subseteq A \wedge |A'| = |A| \to |B| = |A|.$$

**注**: 我们已经知道有 $A$ 到 $B$ 的单射了, 怎么找到一个同时是满的呢? 这要求这个双射 $h$ 要把 $A - B$ 和 $B$ 映射到 $B$ 的分划上, 可 $h[A - B]$ 在 $B$ 之中, 它在 $h$ 下必须映射到 $h[B]$ 里; 同理 $h\big[h[A - B]\big]$ 必须映射到 $h[B] - h\big[h[A - B]\big]$ 中...

也就是说: $A$ 和 $A - B$ 在 $h^n$ 即 $h$ 的任意个复合中, 总是映射到一对不相交的集合 $h^n[A]$, $h^n[A - B]$ 中 (否则不可能是单的), 而且 $h^n[A - B]$ 在 $h$ 的映射下, 又只能落到 $h^n[B]$ 中. 从而: $h^n[B]$ 不断在缩小, 给 $h^n[A - B]$ 腾出空间. 这是以下证明的重要思路.

***Proof***. 令 $h$ 见证了 $A'$ 和 $A$ 的等势, 即 $h \in A'^A$ 且 $h$ 是双射. 记:

$$A_0 := A, \qquad\qquad B_0 := B,$$

并定义序列:

$$A_{n+1} = h[A_n], \qquad\qquad B_{n+1} = h[B_n].$$

我们可以归纳地证出:

$$\forall n \in \mathbb{N}(A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n),$$

只需认识到 $A_1 \subseteq A' \subseteq B_0 \subseteq A_0$, 且对于任意 $k \subseteq \mathbb{N}$ 只要 $A_{k+1} \subseteq B_k \subseteq A_k$, 则 $h[A_{k+1}] \subseteq h[B_k] \subseteq h[A_k]$.

定义 $C_n = A_n - B_n$, 下验证 $h[C_n] = C_{n+1}$:

$$h[C_n] = h[A_n - B_n] = h[A_n] - h[B_n] = A_{n+1} - B_{n+1} = C_{n+1},$$

其中第二个等式的成立依赖于 $h$ 是一个单射, 因为: $h[A_n]$ 中 $h[B_n]$ 全部由 $B_n$ 映射而来, 这是单性要求的; 从而 $h[A_n] - h[B_n]$ 是 $A_n - B_n$ 的像, 因为映射到自身的值域总是满的.

将这些所有的 $C_n$ 并起来:

$$C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n,$$

从而

$$h[C] = h\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C - C_0 = C - (A - B).$$

我们可以看到 $C$ 中的元素有这样的性质, 它含于某个 $C_n$ 中, 并将被 $h$ 映射到下一个 $C_{n+1}$ 中; 而且要么它是 $C_0 = A - B$ 中的元素, 要么是 $C_{n-1}$ 中某个元素的在 $h$ 下的像. 这有些像 Hilbert 的无限旅馆. $h \upharpoonright C$ 到是从 $C$ 到它的子集 $h[C]$ 的满射, 而它的单性已由 $h$ 自身的单性保证了.

而 $h$ 在 $A - C$ 的限制却不一定是满的, 因为 $h[A] = A' \subseteq B$ 本身就不一定是到 $B$ 的满射. 因为

$$A - C = (A - C_0) \cap (A - h[C]) \subseteq A - C_0 = A - (A - B) = B,$$

所以 $A - C$ 和 $h[C]$ 构成了 $B$ 的分划.

因而我们可以这样定义 $A$ 到 $B$ 的双射:

$$i(x) = \begin{cases} h(x), & x \in C; \\ x, & x \in A - C. \end{cases}$$

□

**Theorem 9.2** (***Cantor-Bernstein-Schröeder* 定理**)**.** 如果 $|X| \leq |Y|$ 且 $|Y| \leq |X|$, 则 $|X| = |Y|$.

***Proof.*** $|X| \leq |Y|$ 和 $|Y| \leq |X|$ 分别蕴含了单射 $f \in Y^X$ 和 $g \in X^Y$ 的存在, 且有

$$g\big[f[X]\big] \subseteq g[Y] \subseteq X,$$

和 $|g[Y]| = |Y|$, $|g\big[f[X]\big]| = |f[X]| = |X|$. 由引理1, 这意味着 $|X| = |Y|$. □

**注**: 早先的 Cantor-Bernstein-Schröeder 定理利用了 **AC**, 但这里的证明避免了它.

这个定理说明了 $\leq$ 拥有传递性, 这意味着 $\leq$ 是一个偏序. 而且, 在 $\mathbb{N}$ 中, 它和先前定义的自然数的偏序 $\leq$ 是等同的. 这暗示我们可以这样做: 记 $|n| = n$, 只要 $n \in \mathbb{N}$.

**Definition 9.3** (有穷与无穷)**.** 设 $X$ 是一个集合.

(1) 倘若 $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $|X| = n$, 则称 $X$ 是**有穷的**.
(2) 倘若 $\forall n \in \mathbb{N}$, $|X| \neq n$, 则称 $X$ 是**无穷的**.
(3) 倘若 $|X| = |\mathbb{N}|$, 就称 $X$ 是**可数的**或**可数无穷的**.
(4) 有穷或可数的集合称为**至多可数的**.
(5) 不是可数的无穷集合称为**不可数的**.

**Theorem 9.3** (**抽屉原理**)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall X \in \mathscr{P}(n) - \{n\}$, $|X| \neq |n|$.

***Proof***. 首先, $1^0 := \{\varnothing\}^\varnothing$ 是空集, 因而 $\forall X \in \mathscr{P}(1) - \{1\} = \{\varnothing\}$, $|X| = 0 \neq |1|$ 成立.

其次, 假设命题对 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 但对 $n+1$ 不成立, 那么 $\exists m \in \mathscr{P}(n+1)$, 即 $m \leq n+1$, 使得 $|m| = m = n+1 = |n|$. 考虑到 Lemma 1, 因 $m \subseteq n \subseteq n+1$, 而 $|m| = |n|$, 所以 $|n| = |m|$, 与假设矛盾. □

# 参考文献


[1] 数理逻辑: *证明及其限度*. 逻辑与形而上学教科书系列. 上海: 复旦大学出版社, 2014. ISBN: 9787309110258. URL: https://books.google.co.jp/books?id=WDPqjgEACAAJ.

[2] 集合论: *对无穷概念的探索*. 逻辑与形而上学教科书系列. 复旦大学出版社, 2014. ISBN: 9787309107104. URL: https://books.google.co.jp/books?id=Su2-nQAACAAJ.

# 符号列表

这里列出了笔记中出现的重要符号.

# 索引