Set Theory

Hoyan Mok

2020 年 3 月 8 日

目录

1 集合与公理

在介绍集合论的 **ZFC** 公理之前, 需要先介绍一些数理逻辑的概念.

1.1 数理逻辑准备

句法概念如**形式语言**, **逻辑符号**, **非逻辑符号**, **项**, **公式**, **自由变元**, **约束变元**, **语句**等主要见[1].

设 Σ 是一个公式集, φ 是一个公式.

Definition 1.1. 有穷公式序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 表示从 Σ 到 φ 的一个**推演**, 如果其中的任意 φ_i 要么是属于 Σ 的, 要么可从之前的公式 φ_j 和 $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ 得到, 而且 $\varphi_n = \varphi$. 记作 $\Sigma \vdash \varphi$.

特别地, 如果 T 是语句集, 而 σ 是语句, 如果 $T \vdash \sigma$, 就称存在从 T 到 σ 的一个**证明**.

如果语句集 T 满足: 对任意语句 σ, $T \vdash \sigma$ 当且仅当 $\sigma \in T$, 即 T 是一个对证明封闭的语句集, 就称 T 为**理论**. 假设 T 是理论, 如果存在一个语句集 $A \subseteq T$ 使得对任意的 $\sigma \in T$ 都有 $A \vdash \sigma$, 就称 A 为 T 的一集**公理**.

如果理论 T 的公理 A 是**递归的** (**可判定的**, **可计算的**) i.e. 任给一语句, 总可以在有穷步骤内完全机械地判定它是否属于 A, 就称 T 是**可公理化的**. 理论 T 往往不是递归的, 但如果任给 $\sigma \in T$, 我们可在有穷的步骤内得出结论, 但如果 $\sigma \notin T$, 我们可能不能在有穷步骤内得出结论, 则称其为**递归可枚举的**.

一个理论是**一致的**当且仅当没有语句 σ s.t. $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$.

Definition 1.2. 若 ψ 是性质.

$$\exists! x \psi(x) := \exists x \psi(x) \wedge \forall x \forall y (\psi(x) \wedge \psi(y) \to x = y) \tag{1-1}$$

1.2 ZFC 公理

Axion 0. **存在公理** ***(Exi)*** *存在一个集合, i.e.*

$$\exists x (x = x). \tag{1-2}$$

Axion 1. **外延公理** ***(Ext)*** *两个有相同元素的集合相等, i.e.*

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y. \tag{1-3}$$

而逻辑上有 $X = Y \to \forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$, 所以:

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y \tag{1-4}$$

记 $\neg(X = Y) =: X \neq Y$.

Axion 2. 分离公理模式 *(Sep)*
令 $\varphi(u)$ 为公式. 对任意集合 X, 存在一个集合 $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$, *i.e.*

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \tag{1-5}$$

Corollary 1.

$$\forall X \exists R_X (R_X \notin R_X). \tag{1-6}$$

Proof. 令 $R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$ 即可. □

令 $\varphi(u)$ 为一个性质. 倘若 $\exists X \forall u(\varphi(u) \to u \in X)$, 则 $u \mid \varphi(u) = u \mid \varphi(u)$, 根据 Sep (Axion 2), $\exists \varnothing = u \mid \varphi(u)$. 分离于不同的集合 X 和 X' 的 $\varnothing$ 是相同的. 考虑到 $x \neq x \to x \in X$ 是重言式, 再根据 Exi (Axion 0), 可以得出:

Definition 1.3. $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ 是集合, 称为**空集**.

Definition 1.4. $\varphi(u)$ 是一个性质. 称 $\{u \mid u(u)\}$ 为一个**类** (class). 若一个类不是集合, 则称其为**真类** (proper class).

如所有集合的类 $\mathbf{V}$ 就是一个真类 (根据 Corollary 1).

Definition 1.5. 由 Sep, 两个集合的**交**和**差**也是集合:

$$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\} \qquad X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\} \tag{1-7}$$

Corollary 2. 而非空集 $X \neq \varnothing$ 的**任意交**

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y \in X(u \in Y)\} \tag{1-8}$$

也是集合.

Proof. 因 $X \neq \varnothing$, $\exists x_0 \in X$. 由 Sep,

$$Y = \{y \in x_0 \mid \forall x \in X(y \in x)\}$$

是集合. □

Axion 3. 对集公理 ***(Pai)***

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b). \tag{1-9}$$

这样的 c 可记为 $\{a, b\}$.

Axion 4. 并集公理 ***(Uni)***

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z \in X (u \in z)). \tag{1-10}$$

Definition 1.6. **子集**和**真子集**关系定义如下:

$$X \subseteq Y := \forall x \in X (x \in Y), \tag{1-11}$$

$$X \supseteq Y := Y \subseteq X, \tag{1-12}$$

$$X \subset Y := X \subseteq Y \wedge X \neq Y, \tag{1-13}$$

$$X \supset Y := X. \tag{1-14}$$

Corollary 3. $\forall X (\varnothing \subseteq X)$.

Axion 5. 幂集公理 ***(Pow)***

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{1-15}$$

这样的 Y 称为 X 的**幂集**, 记为 $\mathscr{P}(X)$ 或 2^X.

Definition 1.7. 对任意集合 x, $x \cup \{x\}$ 称为其**后继**, 记为 $S(x)$ 或 x^+.

Axion 6. 无穷公理 ***(Inf)***

$$\exists X \big(\varnothing \in X \wedge \forall x (x \in X \to S(x) \in X)\big). \tag{1-16}$$

Axion 7. 基础公理 ***(Fnd)***

$$\forall x \big(x \neq \varnothing \to \exists y \in x (x \cap y = \varnothing)\big). \tag{1-17}$$

Theorem 1.1.

$$\forall x (x \notin x). \tag{1-18}$$

Proof. 考虑 $X = \{x\}$. 与 Fnd 矛盾. □

Theorem 1.2.

$$\nexists X\big(X \neq \varnothing \wedge \forall x \in X(\exists y \in X(y \in x))\big). \tag{1-19}$$

Proof.

$$\mathrm{Fnd} \wedge \forall x \in X\big(\exists y \in X(y \in x \cap X)\big) \to \bot.$$

$\square$

Axion 8. 替换公理模式 *(**Rep**)* *对公式 $\psi(x,y)$, $\forall x$ 都存在唯一的 y s.t. $\psi(x,y)$ 成立. 那么 $\forall A \in \mathbf{V}$, 存在集合:*

$$B = \{y \mid \exists x \in A\, \psi(x,y)\} \tag{1-20}$$

i.e.

$$\forall A \forall x \in A\, \exists! y\, \psi(x,y) \to \exists B \forall x \in A\, \exists y \in B\, \psi(x,y) \tag{1-21}$$

Axion 9. 选择公理 *(**AC**)* *对任意非空集合 $X \neq \varnothing$, 若*

(1) $\varnothing \notin X$,

(2) *X 中两两不交, 即 $\forall x \in X\, \forall y \in X$ 且 $x \neq y$, 那么 $x \cap y = \varnothing$,*

则存在集合 S, 对 $\forall x \in S$, $S \cap x$ 是单点集. i.e.

$$\begin{aligned}\forall X\big(\varnothing \in X \wedge \forall x \in X\, \forall y \in X(x = y \vee x \cap y = \varnothing)\\ \to \exists S \forall x \in X\, \exists! y(S \cap x = \{y\})\big).\end{aligned} \tag{1-22}$$

Axion 0 到 8 构成的公理系统称为 ***Zermelo-Fraenkel* 系统**, 记为 **ZF**, 加上选择公理则记为 **ZFC**.

2 关系与函数

2.1 关系

Definition 2.1. 集合 a, b 的**有序对**$(a,b) := \big\{\{a\},\{a,b\}\big\}$.

Theorem 2.1.

$$(a,b) = (a',b') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Proof. 只证明"$\to$":

(1) $a = b$. $(a, b) = \{\{a\}\} = (a', b')$, 故 $(a', b') = \{\{a\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, 由 Ext (axion 1), $\{a'\} = \{a', b'\} = \{a\}$, 即 $a = b = a' = b'$.

(2) $a \neq b$. 假设 $\{a, b\} = \{a'\}$, 得 $\forall x \in \{a, b\}(x = a')$ 即 $a = b = a'$ 与 $a \neq b$ 矛盾. 从而只有 $\{a, b\} = \{a', b'\} \wedge \{a\} = \{a'\}$, 仍然由 Ext 易证.

□

Definition 2.2. 令 X 和 Y 是集合, 其**直积**或 ***Cartesian* 积**定义为:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}. \tag{2-1}$$

简记 $X \times X =: X^2$.

Theorem 2.2. *对于 $\forall X \forall Y$, $X \times Y$ 是集合.*

Proof. 令 $\varphi(z) = \exists x \in X \exists y \in Y((x, y) = z)$, 取 $Z = \{z \in \mathscr{P}(X \cup Y) \mid \varphi(z)\}$, 由 Ext 和 Sep (Axion 2) 即可知 $X \times Y = Z$. □

Definition 2.3. 如果存在集合 X, Y s.t. $R \subseteq X \times Y$, 则称集合 R 是**二元关系**. 通常记 $(x, y) \in R =: R(x, y)$, 或 xRy. $\operatorname{dom} R := \{x \mid \exists y R(x, y)\}$ 称为其**定义域**, $\operatorname{ran} R = \{y \mid \exists x R(x, y)\}$ 称为其**值域**.

特别地, 如果 $R \subseteq X^2$, 则称其为 X 上的二元关系.

Definition 2.4. 集合 X 在关系 R 的**像**$R[X]$ 定义为 $\{y \in \operatorname{ran} R \mid \exists x \in X\,(R(x, y))\}$. 集合 Y 的逆像 $R^{-1}[Y]$ 则定义为 $\{x \in \operatorname{dom} R \mid \exists y \in Y\,(R(x, y))\}$. 二元关系 R 的**逆**R^{-1} 是 $\{(x, y) \mid R(y, x)\}$. 两个二元关系 R, S 的**复合**$S \circ R$ 则定义为 $\{(x, z) \mid \exists y(R(x, y) \wedge S(y, z))\}$.

Theorem 2.3. *令 R 是二元关系, A, B 是集合. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$, $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$, $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$.*

Cartesian 积可递归地推广到 n 元:

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) = ((x_1, \cdots, x_n), x_{n+1}); \tag{2-2}$$

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n\} \tag{2-3}$$

n 元 Cartesian 积的子集可类似地定义n **元关系**.

Theorem 2.4. *n 元 Cartesian 积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 是空集, 则存在 $X_i = \varnothing$.*

2.2 函数

Definition 2.5. 二元关系 f 倘满足:

$$\forall x\big((x,y)\in f\wedge(x,z)\in f\to y=z\big),$$

则称 f 是**函数**, y 是 f 在 x 处的**值**, 记为 $f(x)=y$, 或 $f\colon x\mapsto y$. 倘若 $\operatorname{dom} f=X$, $\operatorname{ran} f\subseteq Y$, 则称 f 是 X 到 Y 的函数, 记为 $f\colon X\to Y$.

对任意集合 X 定义 $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ 为 $\forall x\in X(\mathrm{id}_X(x)=x)$, 称为**等同函数**.

Theorem 2.5. *令 f, g 都是函数.*

$$f=g\leftrightarrow\operatorname{dom} f=\operatorname{dom} g\wedge\forall x\in\operatorname{dom} f\big(f(x)=g(x)\big).$$

Proof. 只证明"$\leftarrow$":

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in f\big(x\in\operatorname{dom} f\wedge y=f(x)\big)\wedge\operatorname{dom} f=\operatorname{dom} g\wedge\forall x\in\operatorname{dom} f\big(f(x)=g(x)\big)\\ \to\forall(x,y)\in f\big(x\in\operatorname{dom} g\wedge y=g(x)\big).\end{aligned}$$

同理, $\forall(x,y)\in g\big(x\in\operatorname{dom} f\wedge y=f(x)\big)$, 即 $\forall(x,y)\big(y=f(x)\leftrightarrow y=g(x)\big)$. 由 Ext, $f=g$. □

通常以集合为值的函数 $i\mapsto X_i$, 其中 $i\in I$, 可视为**指标系统**, I 是**指标集**. 记为 $X=\{X_i\mid i\in I\}$ 或 $\{X_i\}_{i\in I}$.

Theorem 2.6. *$\psi(i,x)$ 是公式. $\forall I\forall X$,*

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I}\{x\in X\mid\psi(i,x)\}&=\{x\in X\mid\exists i\in I\big(\psi(i,x)\big)\},\\ \bigcap_{i\in I}\{x\in X\mid\psi(i,x)\}&=\{x\in X\mid\forall i\in I\big(\psi(i,x)\big)\}.\end{aligned}$$

Definition 2.6. 令 $X=\{X_i\mid i\in I\}$ 是一个指标系统. X 的**一般 *Cartesian* 积**为:

$$\prod_{i\in I}X_i:=\{f\mid f\colon I\to X_i\}.$$

另, $p_i\colon\prod_{i\in I}X_i\to X_i$ 称为**指标函数**.

注: 虽然这样的定义和 Cartesian 积不同, 但接下来的概念确保了, 两者之间可以一一对应, 从而是等同的.

Definition 2.7. 令 $f\colon X \to Y$ 是函数. 若 $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$ 则称 f 为**单射** (injection). 若 $\operatorname{ran} f = Y$ 则称其为**满射** (surjection). 既单又满的函数称为**双射** (bijection). 如果函数的逆 f^{-1} 也是函数, 则函数 f 称为**可逆**的.

作为例子, 若空映射 $\operatorname{ran} f = \operatorname{dom} f = \varnothing$, $f = \varnothing$ 总是单的, $f^{-1} = \{(y, x) \mid y = f(x)\} = \varnothing$ 也是空映射.

注: 这里函数的逆的定义与通常不同, 因 $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{ran} f$ 而非 Y. 因而下面的定理在这样的定义下是成立的 (否则还要加上满射的条件):

记 $Y^X := \{f \mid f\colon X \to Y\}$. $\forall Y\big(Y^{\varnothing} = \{\varnothing_Y\}\big)$, 而若 $X \neq \varnothing$, $\varnothing^X = \varnothing$.

Theorem 2.7. *函数 f 可逆 iff f 是单射.*

Proof. 可逆意味着 $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \leftrightarrow x_1 = x_2$, 又由逆的定义, $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$, 这即是单射的定义. □

Theorem 2.8. *函数 f 若可逆, 则 f^{-1} 可逆, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$.*

证明从略.

Theorem 2.9. *如果 f 和 g 是函数, 它们的复合 $h = g \circ f$ 也是函数. 而且 $\operatorname{dom} h = f^{-1}\big(\operatorname{dom} g\big)$.*

注: 这里的复合和通常的定义有细微不同, 但保持了与二元关系的统一.

Proof. 复合的定义: $h = g \circ f \leftrightarrow \forall (x, z) \in h\Big(\exists y\big(y = f(x) \wedge z = g(y)\big)\Big)$. 倘若 $(x, u) \in h \wedge (x, u) \in h$, 有 $\exists! y$ s.t. $y = f(x)$, 且 $u = v = g(y)$. 因而 h 也是函数.

其定义域 $\operatorname{dom} h = \{x \mid \exists z\big(z = h(x)\big)\}$, 又因 $\exists z(z = h(x)) \leftrightarrow \exists z \exists y\big(y = f(x) \wedge z = g(y)\big)$, 后者又等价于 $\exists y\Big(y = f(x) \wedge \exists z\big(z = g(y)\big)\Big)$, i.e. $\exists y \in \operatorname{dom} g\big(y = f(x)\big)$,

$$\operatorname{dom} h = \{x \mid \exists y \in \operatorname{dom} g\big(y = f(x)\big)\} = f^{-1}(\operatorname{dom} g).$$

□

Definition 2.8. 令 f 是任意函数, A 是任意集合. 函数 $f \upharpoonright A = \{(x, y) \in f \mid x \in A\}$ 是 f 在 A 上的**限制**. 若 $g = f \upharpoonright A$, 则称 f 是 g 在 $\operatorname{dom} f$ 的**扩张**.

Definition 2.9. 函数 f, g 被认为是**相容**的, 如果:

$$\forall x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g\big(f(x) = g(x)\big)$$

指标系统 $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ 被称为**相容系统**, 如果

$$\forall f_i \in \mathcal{F} \forall f_j \in \mathcal{F}\big(\ f_i \text{ 和 } f_j \text{ 相容.}\big)$$

Theorem 2.10. *f 和 g 是函数. 以下的命题是等价的:*

(1) f 与 g 相容;

(2) $f \cup g$ 是函数;

(3) $f \upharpoonright \big(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g\big) = g \upharpoonright \big(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g\big)$.

Proof. (1)↔(3): 注意到 $\operatorname{dom}\Big(f \upharpoonright \big(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g\big)\Big) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$. 由相容的定义和定理2.5可得证.

(2)↔(1): 假设 f 与 g 不相容, 即 $\exists x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} f \cup g$ s.t. $f(x) \neq g(x)$, 这与函数 $f \cup g$ 的定义不相符. 若 $f \cup g$ 不是函数, 它至少是 $\operatorname{dom} f \cup \operatorname{dom} g \times \operatorname{ran} f \cup \operatorname{ran} g$ 上的二元关系, 由函数的定义, $\exists x \in \operatorname{dom} f \cup g$ s.t. $\exists y_1 \exists y_2\big((x, y_1) \in f \cup g \wedge (x, y_2) \in f \cup g \wedge y_1 \neq y_2\big)$. 通过对 x 在 $\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g$, $\operatorname{dom} g - \operatorname{dom} f$, $\operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} g$ 讨论, 可以得出要么 f 或 g 不是函数 (从而与题设矛盾), 要么 f, g 不相容. □

Axion 9. **选择公理** *(第二形式) (**AC II**)*

$$\forall \mathcal{F}\Big(\varnothing \notin \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \neq \varnothing \wedge \exists f \colon \mathcal{F} \to \cup\mathcal{F}\big(\forall F \in \mathcal{F}(f(F) \in F)\big)\Big)$$

*其中这样的 f 通常被称为***选择函数**.

对于任意非空 ω (尤其是当 ω 是无穷集时), $\prod_{i \in \omega X_i} = \varnothing \to \exists i \in \omega(X_i = \varnothing)$ 与选择公理等价.[1]

[1] 维基百科页面

2.3 等价和划分

Definition 2.10. 令 $R \subseteq X^2$ 是 X 上的二元关系. R 是:

(1) **自反**的, 若 $\forall x \in X(xRx)$;

(2) **对称**的, 若 $\forall x \in X \forall y \in X(xRy \to yRx)$;

(3) **传递**的, 若 $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X(xRy \wedge yRz \to xRz)$;

(4) **等价关系**或**等价**的, 若 R 自反, 对称, 传递. 记为 $\sim$.

Definition 2.11. 令 $\sim$ 是 X 上的等价关系, $x \in X$. x 关于 $\sim$ 的**等价类**定义为:

$$[x]_\sim := \{t \in X \mid t \sim x\}.$$

注: 由 Sep, 等价类是集合而不是真类.

Theorem 2.11. *令 $\sim$ 是 X 上的等价关系.*

$$\forall x \in X \forall y \in Y\big([x]_\sim = [y]_\sim \wedge [x]_\sim \cap [y]_\sim = \varnothing\big)$$

Definition 2.12. 令 X 是一集合, $S \subseteq \mathscr{P}(X)$. S 被称为 X 的一个**划分**如果:

$$\forall a \in S \forall b \in S(a = b \vee a \cap b = \varnothing) \wedge \cup S = X.$$

Definition 2.13. 令 $\sim$ 是 X 上的等价关系. $X/\sim := \{[x]_\sim \mid x \in X\}$ 称为 X 的**商集**.

Theorem 2.12. *令 $\sim$ 是 X 上的等价关系. $X/\sim$ 是 X 的一个划分.*

Theorem 2.13. *令 S 为 X 的划分, 定义二元关系:*

$$\sim_S := \{(x, y) \in X^2 \mid \exists s \in S(x \in s \wedge y \in s)\}.$$

那么, $\sim_S$ 是等价关系, $X/\sim_S = S$. 若 X 上的等价关系 $\sim$ 满足 $X/\sim = S$, 则 $\sim_S = \sim$.

Proof. $\cup S = X \to \forall x \in X \exists s \in S(x \in s)$, 即 $\sim_S$ 是自反的. 对称和传递性显然. 从而, $\sim_S$ 是等价关系.

依商集和等价类的定义, $\forall s \in X/\sim_S \exists x \in X \forall t\big(t \in s \leftrightarrow \exists s' \in S(x \in s' \wedge t \in s')\big)$. 这之后我遇到了困难. □

2.4 序

Definition 2.14. 如果 X 上的二元关系 $\leq$ 满足:

1. 自反 i.e. $\forall x \in X(x \leq x)$;
2. **反对称** i.e. $\forall x \in X \forall y \in X(x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$;
3. 传递 i.e. $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$,

则称其为 X 上的**偏序** (partial order) 或**序**, 记 $(X, \leq)$, 并称 X 是一个**偏序集** (partially ordered set, appr. poset). 如果它还是**连接**的 i.e. $\forall x \in X \forall y \in X(x \leq y \vee y \leq x)$, 那么它是 X 上的**线序**或**全序** (total order), 此时也称 X 是一个**线序集**.

通常记 $\geq := \leq^{-1}$, $< := \leq \cap \neq$, $> := <^{-1}$.

Definition 2.15. 如果 X 上的关系 $\preceq$ 只满足传递和自反, 称其为 X 上的**拟序** (quasi-order) 或**预序** (preorder). $\succeq := \preceq^{-1}$.

Theorem 2.14. *令 $\preceq$ 是 X 上的拟序, 等价关系 $\sim$ 可由 $\sim = \preceq \cap \succeq$ 定义, 且商集 $X/\sim$ 上的偏序关系 $\leq$ 可定义为*

$$[x] \leq [y] \leftrightarrow x \preceq y.$$

Definition 2.16. 如果对于 $a \in X$ 满足 $\forall x \in X(\neg(a > x))$, 则称 a 为 X 的**极小元**. 如果对于 $a \in X$ 满足 $\forall x \in X(a \leq x)$, 则称 a 为 X 的**最小元**. 相反则有**极大元**和**最大元**.

令 $X_0 \subseteq X$. 如果 $\exists a \in X \forall x \in X_0(a \leq x)$, 则称 X_0 在 X 中有下界, a 是 X_0 在 X 中的**下界**. 如果这样的下界 a 的集合有最大元 a_0, 称其为**下确界** (infimun, appr. inf), 记为 $\inf X_0$. 同理有**上界**和**上确界** (supremun, appr. sup) $\sup X_0$.

作为例子, 令 $X \neq \varnothing$, $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ 是偏序集. 对于 $\forall S \subseteq \mathscr{P}(X)$, S 有上下确界, $\sup S = \cup S$, $\inf S = \cap S$.

Definition 2.17. 如果 X 和其上的线序 $(X, \leq)$ 满足任意 $X_0 \in \mathscr{P}(X)$, X_0 都有最小元, 则称 $\leq$ 为 X 上的**良序**, X 被称为**良序集**.

3 实数

3.1 自然数

根据 Inf (axion 6), 这样的集合是存在的:

Definition 3.1. 如果集合 X 满足:

$$\varnothing \in X \wedge \forall x(x \in X \to x^+ \in X)$$

则称其为**归纳集**.

容易知道 $0 := \varnothing$ 属于任何归纳集, $1 := 0^+$ 也属于任何归纳集, ..., 以此类推. 最小的归纳集被称为**自然数集**, 它的严格定义如下:

Definition 3.2.

$$\mathbb{N} := \{n \mid \forall X(X \text{ 是归纳集} \to n \in X)\}.$$

$\mathbb{N}$ 是**自然数集**, 其元素是**自然数**.

从定义上可以看出, $\mathbb{N}$ 是归纳集, 而且是任何归纳集的子集.

Theorem 3.1. 归纳原理 *令 $\varphi(n)$ 是一个性质. 如果*

1. *$\varphi(0)$ 成立;*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n) \to \varphi(n^+))$ 成立,*

那么, $\forall n \in \mathbb{N}\, \varphi(n)$ 成立.

Proof. 构造集合 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$, 根据它是归纳集, 可知 $\mathbb{N} \subseteq M$, 但 M 是根据 Sep 从 $\mathbb{N}$ 中分离出来的, 得知 $M = \mathbb{N}$. □

在 $\mathbb{N}$ 上定义偏序关系 $\leq = \in \cap =$, 而且可以证明, 这是一个良序.

Theorem 3.2. 第二归纳原理 *令 $\varphi(n)$ 是一个性质.*

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall k \in n\, \varphi(k) \to \varphi(n)) \to \forall n \in \mathbb{N}\, \varphi(n)$$

3.2 递归定理

接下来我们要定义一些二元函数, 即我们熟悉的自然数集上的运算. 我们可以递归地给出它们的定义, 但这种定义的合理性需要递归定理的辩护.

Definition 3.3. 以 $n \in \mathbb{N}$ 或 $\mathbb{N}$ 为定义域的函数称为**序列**, 其中前者称为长度为 n 的**有穷序列**, 后者称为**无穷序列**, 通常分别记为 $\langle a_k \mid k < n \rangle$ 或 $\langle a_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$, 或简记为 $\langle a_k \rangle_{k<n}$ 或 $\langle a_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$. 值域通常记为 $\{x_k \mid k < n\}$ 或 $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, 或简记为 $\{a_k\}_{k<n}$ 或 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. 特别地, 长度为 0 的序列称为**空序列**.

若序列的到达域是 Y, 则通常称为 Y 内的序列. Y 内所有有穷序列的集合可记为 $A^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$.

Theorem 3.3. 递归定理

$$\forall A \forall a \in A \forall g \in A^{A \times \mathbb{N}} \exists! f \in A^{\mathbb{N}} \big(f(0) = a \wedge \forall n \in \mathbb{N}(f(n^+) = g(f(n), n)) \big).$$

这里的 g 扮演了一个 “递推式” 的角色.

Proof. 首先, 我们需要证明 f 的*存在性*.

注意到 f 是 A 中的无穷序列, 我们考虑用满足条件的有穷序列去逼近它. 基于 a 和 g 的m-**近似**定义为有穷序列 $t \colon m^+ \to A$ 满足

$$t_0 = a \wedge \forall k \in m^+ \big(t_{k^+} = g(t_k, k) \big).$$

并记 $\mathcal{F} = \{t \in \mathscr{P}(\mathbb{N} \times A) \mid t是\ m\text{-近似}\}$, 及 $f = \cup \mathcal{F}$. 接下来我们证明这个 f 是所寻找的函数.

首先证明它是函数. 由 theorem 2.10, 知这当且仅当 $\mathcal{F}$ 相容. 令 $t, u \in F$. 记 $m = \operatorname{dom} t$, $n = \operatorname{dom} u$. 不妨设 $m \leq n$. t, u 相容 *iff* $\forall k \in m(t_k = u_k)$. 这由 1) $t_0 = u_0 = a$; 2) $t_k = u_k \to t_{k^+} = g(t_k, k) = g(u_k, k) = u_{k^+}$ 的成立和归纳原理保证.

接着确定 $f \in A^{\mathbb{N}}$. $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{N}$ 和 $\operatorname{ran} f \subseteq A$ 是显然的. 下证 $\mathbb{N} \subseteq \operatorname{dom} f$. 注意到 $\operatorname{dom} f = \cup\{n \in \mathbb{N} \mid 存在\ n\text{-近似}\}$. 接下来就是证明 $\operatorname{dom} f$ 是归纳集, 即 $\forall n \in \mathbb{N}$ 存在 n-近似. 0-近似由 $\{(0, a)\}$ 给出; k-近似 t 存在时, 只需为之并上 $\{(k^+, g(t_k, k))\}$ 即可得到 k^+ 近似.

至于 f 满足 $f(0) = a$ 与 $\forall n \in \mathbb{N}(f(n^+) = g(f(n), n))$, 用其任意近似证明即可, 只需想到 f 与近似的相容性.

如此我们确定了 f 的存在性, 然后来证明它的唯一性. 假设有 $h:\mathbb{N}\to A$ 也满足定理, 只需用归纳法证明 $h(n)=f(n)$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立即可. $\square$

这样的 f 只能是一元函数, 定义运算需要带参数的版本:

Theorem 3.4. 带参数的递归定理

$$\forall A\forall P\forall a\in A^P\forall g\in A^{P\times A\times\mathbb{N}}\exists! f\in A^{P\times\mathbb{N}}\big(\forall p\in P\, f(p,0)=a(p)\wedge\forall n\in\mathbb{N}\forall p\in P(f(p,n^+)=g(p,f(n),n))\big).$$

注: 如果固定 p, 这个定理与递归定理几乎一致, 从而我们需要考虑以 p 为变元的函数作为递归定理中的到达域.

Proof. 令 $G\colon A^P\times\mathbb{N}\to A^P$; $(t,n)\mapsto h$, 其中 h 满足 $\forall p\in P\big(h(p)=g(p,t(p),n)\big)$. 考虑到 t 和 g 都是函数, 复合的 h 当然是函数, 而且唯一.

由递归定理, 有这样的函数 $F\colon\mathbb{N}\to A^P$ 满足 1) $\forall p\in P\big(F(0)=a\in A^P\big)$; 2) $\forall n\in\mathbb{N}\big(F(n^+)=G(F(n),n)\big)$.

可以验证 $f(p,n)=F(n)(p)$ 即是我们想找的函数. $\square$

有了带参数的递归定理, 自然数上的运算可以看作以下存在而且唯一的二元函数:

Definition 3.4. **加法**$+\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 满足 1) $\forall m\in\mathbb{N}\big(+(m,0)=m\big)$; 2) $\forall m\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\big(+(m,n^+)=(+(m,n))^+\big)$. 通常记 $+(m,n)=:m+n$.

Definition 3.5. **乘法**$\cdot\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 满足 1) $\forall m\in\mathbb{N}\big(\cdot(m,0)=m\big)$; 2) $\forall m\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\big(\cdot(m,n^+)=(\cdot(m,n))^+\big)$. 通常记 $\cdot(m,n)$ 为 mn 或 $m\cdot n$.

我们熟悉的关于乘法和加法的性质都可以由归纳原理证出, 此处不再赘述.

3.3 势

Definition 3.6. 两个集合 X,Y **等势** (equinumerous) 指的是 $\exists f\in Y^X(f\text{是双射})$, 记为 $|X|=|Y|$.

Definition 3.7. 若存在 $f\in Y^X$ s.t. f 是单射, 则称 $|X|\le|Y|$. 当 $|X|\le|Y|$ 而 $|X|\ne|Y|$ 时, 我们就称 X 的势小于 Y 的势, 记为 $|X|<|Y|$.

Theorem 3.5.

$$|X| \leq |Y| \leftrightarrow \exists Y_0 \in \mathscr{P}(Y)\big(|X| = |Y_0|\big).$$

Proof. 对于 $f \in Y^X$ 且 f 是单的, 取 $Y_0 = \operatorname{ran} f$ 即可. □

下面我们将介绍 Cantor-Bernstein-Schröeder 定理, 它的证明当中最重要的一部分是以下引理的证明:

Lemma 1.

$$A' \subseteq B \subseteq A \wedge |A'| = |A| \to |B| = |A|.$$

注: 我们已经知道有 A 到 B 的单射了, 怎么找到一个同时是满的呢? 这要求这个双射 h 要把 $A - B$ 和 B 映射到 B 的分划上, 可 $h[A-B]$ 在 B 之中, 它在 h 下必须映射到 $h[B]$ 里; 同理 $h\big[h[A-B]\big]$ 必须映射到 $h[B] - h\big[h[A-B]\big]$ 中...

也就是说: A 和 $A-B$ 在 h^n 即 h 的任意个复合中, 总是映射到一对不相交的集合 $h^n[A]$, $h^n[A-B]$ 中 (否则不可能是单的), 而且 $h^n[A-B]$ 在 h 的映射下, 又只能落到 $h^n[B]$ 中. 从而: $h^n[B]$ 不断在缩小, 给 $h^n[A-B]$ 腾出空间. 这是以下证明的重要思路.

Proof. 令 h 见证了 A' 和 A 的等势, 即 $h \in A'^A$ 且 h 是双射. 记:

$$A_0 := A, \qquad B_0 := B,$$

并定义序列:

$$A_{n+1} = h[A_n], \qquad B_{n+1} = h[B_n].$$

我们可以归纳地证出:

$$\forall n \in \mathbb{N}(A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n),$$

只需认识到 $A_1 \subseteq A' \subseteq B_0 \subseteq A_0$, 且对于任意 $k \subseteq \mathbb{N}$ 只要 $A_{k+1} \subseteq B_k \subseteq A_k$, 则 $h[A_{k+1}] \subseteq h[B_k] \subseteq h[A_k]$.

定义 $C_n = A_n - B_n$, 下验证 $h[C_n] = C_{n+1}$:

$$h[C_n] = h[A_n - B_n] = h[A_n] - h[B_n] = A_{n+1} - B_{n+1} = C_{n+1},$$

其中第二个等式的成立依赖于 h 是一个单射, 因为: $h[A_n]$ 中 $h[B_n]$ 全部由 B_n 映射而来, 这是单性要求的; 从而 $h[A_n]-h[B_n]$ 是 A_n-B_n 的像, 因为映射到自身的值域总是满的.

将这些所有的 C_n 并起来:

$$C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n,$$

从而

$$h[C] = h\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C - C_0 = C - (A - B).$$

我们可以看到 C 中的元素有这样的性质, 它含于某个 C_n 中, 并将被 h 映射到下一个 C_{n+1} 中; 而且要么它是 $C_0 = A - B$ 中的元素, 要么是 C_{n-1} 中某个元素的在 h 下的像. 这有些像 Hilbert 的无限旅馆. 这说明 $h \restriction C$ 到 $h[C]$ 是一个满射, 而它的单性已由 h 自身的单性保证了.

而 h 在 $A-C$ 的限制却不一定是满的, 因为 $h[A] = A' \subseteq B$ 本身就不一定是到 B 的满射. 因为

$$A - C = (A - C_0) \cap (A - h[C_0]) \subseteq A - C_0 = A - (A - B) = B,$$

所以 $A-C$ 和 $h[C]$ 构成了 B 的分划.

因而我们可以这样定义 A 到 B 的双射:

$$i(x) = \begin{cases} h(x), & x \in C; \\ x, & x \in A - C. \end{cases}$$

□

Theorem 3.6. ***Cantor-Bernstein-Schröeder* 定理**

如果 $|X| \le |Y|$ 且 $|Y| \le |X|$, 则 $|X| = |Y|$.

Proof. $|X| \le |Y|$ 和 $|Y| \le |X|$ 分别蕴含了单射 $f \in Y^X$ 和 $g \in X^Y$ 的存在, 且有

$$g\big[f[X]\big] \subseteq g[Y] \subseteq X,$$

和 $|g[Y]| = |Y|$, $|g\big[f[X]\big]| = |f[X]| = |X|$. 由引理1, 这意味着 $|X| = |Y|$. □

注: 早先的 Cantor-Bernstein-Schröeder 定理利用了 **AC**, 但这里的证明避免了它.

索引

参考文献

[1] 数理逻辑: 证明及其限度[M/OL]. 上海: 复旦大学出版社, 2014. https://books.google.co.jp/books?id=WDPqjgEACAAJ.