

Set Theory

Hoyan Mok

2020 年 3 月 8 日

目录

1	集合与公理	2
1.1	数理逻辑准备	2
1.2	ZFC 公理	2
2	关系与函数	5
2.1	关系	5
2.2	函数	7
2.3	等价和划分	10
2.4	序	11
3	实数	12
3.1	自然数	12
3.2	递归定理	13
3.3	势	14

1 集合与公理

在介绍集合论的 **ZFC** 公理之前, 需要先介绍一些数理逻辑的概念.

1.1 数理逻辑准备

句法概念如形式语言, 逻辑符号, 非逻辑符号, 项, 公式, 自由变元, 约束变元, 语句等主要见^[1].

设 Σ 是一个公式集, φ 是一个公式.

Definition 1.1. 有穷公式序列 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 表示从 Σ 到 φ 的一个推演, 如果其中的任意 φ_i 要么是属于 Σ 的, 要么可从之前的公式 φ_j 和 $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$ 得到, 而且 $\varphi_n = \varphi$. 记作 $\Sigma \vdash \varphi$.

特别地, 如果 T 是语句集, 而 σ 是语句, 如果 $T \vdash \sigma$, 就称存在从 T 到 σ 的一个证明.

如果语句集 T 满足: 对任意语句 σ , $T \vdash \sigma$ 当且仅当 $\sigma \in T$, 即 T 是一个对证明封闭的语句集, 就称 T 为**理论**. 假设 T 是理论, 如果存在一个语句集 $A \subseteq T$ 使得对任意的 $\sigma \in T$ 都有 $A \vdash \sigma$, 就称 A 为 T 的一**集公理**.

如果理论 T 的公理 A 是**递归的** (可判定的, 可计算的) i.e. 任给一语句, 总可以在有穷步骤内完全机械地判定它是否属于 A , 就称 T 是**可公理化的**. 理论 T 往往不是递归的, 但如果任给 $\sigma \in T$, 我们可在有穷的步骤内得出结论, 但如果 $\sigma \notin T$, 我们可能不能在有穷步骤内得出结论, 则称其为**递归可枚举的**.

一个理论是**一致的**当且仅当没有语句 σ s.t. $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$.

Definition 1.2. 若 ψ 是性质.

$$\exists! x \psi(x) := \exists x \psi(x) \wedge \forall x \forall y (\psi(x) \wedge \psi(y) \rightarrow x = y) \quad (1-1)$$

1.2 ZFC 公理

Axion 0. 存在公理 (*Exi*) 存在一个集合, i.e.

$$\exists x (x = x). \quad (1-2)$$

Axion 1. 外延公理 (*Ext*) 两个有相同元素的集合相等, i.e.

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y. \quad (1-3)$$

而逻辑上有 $X = Y \rightarrow \forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y)$, 所以:

$$\forall X \forall Y \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y \quad (1-4)$$

记 $\neg(X = Y) =: X \neq Y$.

Axion 2. 分离公理模式 (Sep)

令 $\varphi(u)$ 为公式. 对任意集合 X , 存在一个集合 $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$,
i.e.

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \quad (1-5)$$

Corollary 1.

$$\forall X \exists R_X (R_X \notin R_X). \quad (1-6)$$

Proof. 令 $R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$ 即可. \square

令 $\varphi(u)$ 为一个性质. 倘若 $\exists X \forall u (\varphi(u) \rightarrow u \in X)$, 则 $u \mid \varphi(u) = u \mid \varphi(u)$, 根据 Sep (Axion 2), $\exists \emptyset = u \mid \varphi(u)$. 分离于不同的集合 X 和 X' 的 \emptyset 是相同的. 考虑到 $x \neq x \rightarrow x \in X$ 是重言式, 再根据 Exi (Axion 0), 可以得出:

Definition 1.3. $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$ 是集合, 称为**空集**.

Definition 1.4. $\varphi(u)$ 是一个性质. 称 $\{u \mid \varphi(u)\}$ 为一个**类** (class). 若一个类不是集合, 则称其为**真类** (proper class).

如所有集合的类 \mathbf{V} 就是一个真类 (根据 Corollary 1).

Definition 1.5. 由 Sep, 两个集合的**交**和**差**也是集合:

$$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\} \quad X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\} \quad (1-7)$$

Corollary 2. 而非空集 $X \neq \emptyset$ 的任意交

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y \in X (u \in Y)\} \quad (1-8)$$

也是集合.

Proof. 因 $X \neq \emptyset$, $\exists x_0 \in X$. 由 Sep,

$$Y = \{y \in x_0 \mid \forall x \in X (y \in x)\}$$

是集合. \square

Axion 3. 对集公理 (*Pai*)

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b). \quad (1-9)$$

这样的 c 可记为 $\{a, b\}$.

Axion 4. 并集公理 (*Uni*)

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z \in X (u \in z)). \quad (1-10)$$

Definition 1.6. 子集和真子集关系定义如下:

$$X \subseteq Y := \forall x \in X (x \in Y), \quad (1-11)$$

$$X \supseteq Y := Y \subseteq X, \quad (1-12)$$

$$X \subset Y := X \subseteq Y \wedge X \neq Y, \quad (1-13)$$

$$X \supset Y := X. \quad (1-14)$$

Corollary 3. $\forall X (\emptyset \subseteq X)$.

Axion 5. 幂集公理 (*Pow*)

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \quad (1-15)$$

这样的 Y 称为 X 的**幂集**, 记为 $\mathcal{P}(X)$ 或 2^X .

Definition 1.7. 对任意集合 x , $x \cup \{x\}$ 称为其**后继**, 记为 $S(x)$ 或 x^+ .

Axion 6. 无穷公理 (*Inf*)

$$\exists X (\emptyset \in X \wedge \forall x (x \in X \rightarrow S(x) \in X)). \quad (1-16)$$

Axion 7. 基础公理 (*Fnd*)

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (x \cap y = \emptyset)). \quad (1-17)$$

Theorem 1.1.

$$\forall x (x \notin x). \quad (1-18)$$

Proof. 考虑 $X = \{x\}$. 与 Fnd 矛盾. \square

Theorem 1.2.

$$\nexists X (X \neq \emptyset \wedge \forall x \in X (\exists y \in X (y \in x))). \quad (1-19)$$

Proof.

$$\text{Fnd} \wedge \forall x \in X (\exists y \in X (y \in x \cap X)) \rightarrow \perp.$$

□

Axion 8. 替换公理模式 (*Rep*) 对公式 $\psi(x, y)$, $\forall x$ 都存在唯一的 y s.t. $\psi(x, y)$ 成立. 那么 $\forall A \in \mathbf{V}$, 存在集合:

$$B = \{y \mid \exists x \in A \psi(x, y)\} \quad (1-20)$$

i.e.

$$\forall A \forall x \in A \exists! y \psi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y) \quad (1-21)$$

Axion 9. 选择公理 (*AC*) 对任意非空集合 $X \neq \emptyset$, 若

(1) $\emptyset \notin X$,

(2) X 中两两不交, 即 $\forall x \in X \forall y \in X$ 且 $x \neq y$, 那么 $x \cap y = \emptyset$,

则存在集合 S , 对 $\forall x \in S$, $S \cap x$ 是单点集. i.e.

$$\begin{aligned} \forall X (\emptyset \in X \wedge \forall x \in X \forall y \in X (x = y \vee x \cap y = \emptyset)) \\ \rightarrow \exists S \forall x \in X \exists! y (S \cap x = \{y\}). \end{aligned} \quad (1-22)$$

Axion 0 到 8 构成的公理系统称为 *Zermelo-Fraenkel* 系统, 记为 **ZF**, 加上选择公理则记为 **ZFC**.

2 关系与函数

2.1 关系

Definition 2.1. 集合 a, b 的有序对 $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Theorem 2.1.

$$(a, b) = (a', b') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Proof. 只证明“ \rightarrow ”:

- (1) $a = b$. $(a, b) = \{\{a\}\} = (a', b')$, 故 $(a', b') = \{\{a\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, 由 Ext (axion 1), $\{a'\} = \{a', b'\} = \{a\}$, 即 $a = b = a' = b'$.
- (2) $a \neq b$. 假设 $\{a, b\} = \{a'\}$, 得 $\forall x \in \{a, b\}(x = a')$ 即 $a = b = a'$ 与 $a \neq b$ 矛盾. 从而只有 $\{a, b\} = \{a', b'\} \wedge \{a\} = \{a'\}$, 仍然由 Ext 易证.

□

Definition 2.2. 令 X 和 Y 是集合, 其直积或 **Cartesian** 积定义为:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}. \quad (2-1)$$

简记 $X \times X =: X^2$.

Theorem 2.2. 对于 $\forall X \forall Y$, $X \times Y$ 是集合.

Proof. 令 $\varphi(z) = \exists x \in X \exists y \in Y ((x, y) = z)$, 取 $Z = \{z \in \mathcal{P}(X \cup Y) \mid \varphi(z)\}$, 由 Ext 和 Sep (Axiom 2) 即可知 $X \times Y = Z$. □

Definition 2.3. 如果存在集合 X, Y s.t. $R \subseteq X \times Y$, 则称集合 R 是二元关系. 通常记 $(x, y) \in R =: R(x, y)$, 或 xRy . $\text{dom } R := \{x \mid \exists y R(x, y)\}$ 称为其定义域, $\text{ran } R = \{y \mid \exists x R(x, y)\}$ 称为其值域.

特别地, 如果 $R \subseteq X^2$, 则称其为 X 上的二元关系.

Definition 2.4. 集合 X 在关系 R 的像 $R[X]$ 定义为 $\{y \in \text{ran } R \mid \exists x \in X (R(x, y))\}$. 集合 Y 的逆像 $R^{-1}[Y]$ 则定义为 $\{x \in \text{dom } R \mid \exists y \in Y (R(x, y))\}$. 二元关系 R 的逆 R^{-1} 是 $\{(x, y) \mid R(y, x)\}$. 两个二元关系 R, S 的复合 $S \circ R$ 则定义为 $\{(x, z) \mid \exists y (R(x, y) \wedge S(y, z))\}$.

Theorem 2.3. 令 R 是二元关系, A, B 是集合. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$, $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$, $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$.

Cartesian 积可递归地推广到 n 元:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) = ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}); \quad (2-2)$$

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \dots \wedge x_n \in X_n\} \quad (2-3)$$

n 元 Cartesian 积的子集可类似地定义 n 元关系.

Theorem 2.4. n 元 Cartesian 积 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 是空集, 则存在 $X_i = \emptyset$.

2.2 函数

Definition 2.5. 二元关系 f 倘满足:

$$\forall x((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z),$$

则称 f 是函数, y 是 f 在 x 处的值, 记为 $f(x) = y$, 或 $f: x \mapsto y$. 倘若 $\text{dom } f = X$, $\text{ran } f \subseteq Y$, 则称 f 是 X 到 Y 的函数, 记为 $f: X \rightarrow Y$.

对任意集合 X 定义 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ 为 $\forall x \in X(\text{id}_X(x) = x)$, 称为等同函数.

Theorem 2.5. 令 f, g 都是函数.

$$f = g \leftrightarrow \text{dom } f = \text{dom } g \wedge \forall x \in \text{dom } f (f(x) = g(x)).$$

Proof. 只证明“ \leftarrow ”:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in f (x \in \text{dom } f \wedge y = f(x)) \wedge \text{dom } f = \text{dom } g \wedge \forall x \in \text{dom } f (f(x) = g(x)) \\ \rightarrow \forall (x, y) \in f (x \in \text{dom } g \wedge y = g(x)). \end{aligned}$$

同理, $\forall (x, y) \in g (x \in \text{dom } f \wedge y = f(x))$, 即 $\forall (x, y) (y = f(x) \leftrightarrow y = g(x))$.
由 Ext, $f = g$. \square

通常以集合为值的函数 $i \mapsto X_i$, 其中 $i \in I$, 可视为指标系统, I 是指标集. 记为 $X = \{X_i \mid i \in I\}$ 或 $\{X_i\}_{i \in I}$.

Theorem 2.6. $\psi(i, x)$ 是公式. $\forall I \forall X$,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid \psi(i, x)\} &= \{x \in X \mid \exists i \in I (\psi(i, x))\}, \\ \bigcap_{i \in I} \{x \in X \mid \psi(i, x)\} &= \{x \in X \mid \forall i \in I (\psi(i, x))\}. \end{aligned}$$

Definition 2.6. 令 $X = \{X_i \mid i \in I\}$ 是一个指标系统. X 的一般 Cartesian 积为:

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f \mid f: I \rightarrow X_i\}.$$

另, $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ 称为指标函数.

注: 虽然这样的定义和 Cartesian 积不同, 但接下来的概念确保了, 两者之间可以一一对应, 从而是等同的.

Definition 2.7. 令 $f: X \rightarrow Y$ 是函数. 若 $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$ 则称 f 为单射 (injection). 若 $\text{ran } f = Y$ 则称其为满射 (surjection). 既单又满的函数称为双射 (bijection). 如果函数的逆 f^{-1} 也是函数, 则函数 f 称为可逆的.

作为例子, 若空映射 $\text{ran } f = \text{dom } f = \emptyset$, $f = \emptyset$ 总是单的, $f^{-1} = \{(y, x) \mid y = f(x)\} = \emptyset$ 也是空映射.

注: 这里函数的逆的定义与通常不同, 因 $\text{dom } f^{-1} = \text{ran } f$ 而非 Y . 因而下面的定理在这样的定义下是成立的 (否则还要加上满射的条件):

记 $Y^X := \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$. $\forall Y (Y^\emptyset = \{\emptyset_Y\})$, 而若 $X \neq \emptyset$, $\emptyset^X = \emptyset$.

Theorem 2.7. 函数 f 可逆 iff f 是单射.

Proof. 可逆意味着 $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \leftrightarrow x_1 = x_2$, 又由逆的定义, $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$, 这即是单射的定义. \square

Theorem 2.8. 函数 f 若可逆, 则 f^{-1} 可逆, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$.

证明从略.

Theorem 2.9. 如果 f 和 g 是函数, 它们的复合 $h = g \circ f$ 也是函数. 而且 $\text{dom } h = f^{-1}(\text{dom } g)$.

注: 这里的复合和通常的定义有细微不同, 但保持了与二元关系的统一.

Proof. 复合的定义: $h = g \circ f \leftrightarrow \forall (x, z) \in h (\exists y (y = f(x) \wedge z = g(y)))$. 倘若 $(x, u) \in h \wedge (x, v) \in h$, 有 $\exists! y$ s.t. $y = f(x)$, 且 $u = v = g(y)$. 因而 h 也是函数.

其定义域 $\text{dom } h = \{x \mid \exists z (z = h(x))\}$, 又因 $\exists z (z = h(x)) \leftrightarrow \exists z \exists y (y = f(x) \wedge z = g(y))$, 后者又等价于 $\exists y (y = f(x) \wedge \exists z (z = g(y)))$, i.e. $\exists y \in \text{dom } g (y = f(x))$,

$$\text{dom } h = \{x \mid \exists y \in \text{dom } g (y = f(x))\} = f^{-1}(\text{dom } g).$$

\square

Definition 2.8. 令 f 是任意函数, A 是任意集合. 函数 $f \upharpoonright A = \{(x, y) \in f \mid x \in A\}$ 是 f 在 A 上的**限制**. 若 $g = f \upharpoonright A$, 则称 f 是 g 在 $\text{dom } f$ 的**扩张**.

Definition 2.9. 函数 f, g 被认为是**相容的**, 如果:

$$\forall x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g (f(x) = g(x))$$

指标系统 $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ 被称为**相容系统**, 如果

$$\forall f_i \in \mathcal{F} \forall f_j \in \mathcal{F} (f_i \text{ 和 } f_j \text{ 相容.})$$

Theorem 2.10. f 和 g 是函数. 以下的命题是等价的:

- (1) f 与 g 相容;
- (2) $f \cup g$ 是函数;
- (3) $f \upharpoonright (\text{dom } f \cap \text{dom } g) = g \upharpoonright (\text{dom } f \cap \text{dom } g)$.

Proof. (1) \leftrightarrow (3): 注意到 $\text{dom}(f \upharpoonright (\text{dom } f \cap \text{dom } g)) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$. 由相容的定义和定理2.5可得证.

(2) \leftrightarrow (1): 假设 f 与 g 不相容, 即 $\exists x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g \subseteq \text{dom } f \cup g$ s.t. $f(x) \neq g(x)$, 这与函数 $f \cup g$ 的定义不相符. 若 $f \cup g$ 不是函数, 它至少是 $\text{dom } f \cup \text{dom } g \times \text{ran } f \cup \text{ran } g$ 上的二元关系, 由函数的定义, $\exists x \in \text{dom } f \cup g$ s.t. $\exists y_1 \exists y_2 ((x, y_1) \in f \cup g \wedge (x, y_2) \in f \cup g \wedge y_1 \neq y_2)$. 通过对 x 在 $\text{dom } f - \text{dom } g$, $\text{dom } g - \text{dom } f$, $\text{dom } g \cap \text{dom } f$ 讨论, 可以得出要么 f 或 g 不是函数 (从而与题设矛盾), 要么 f, g 不相容. \square

Axion 9. 选择公理 (第二形式) (AC II)

$$\forall \mathcal{F} (\emptyset \notin \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \neq \emptyset \wedge \exists f: \mathcal{F} \rightarrow \cup \mathcal{F} (\forall F \in \mathcal{F} (f(F) \in F)))$$

其中这样的 f 通常被称为**选择函数**.

对于任意非空 ω (尤其是当 ω 是无穷集时), $\prod_{i \in \omega} X_i = \emptyset \rightarrow \exists i \in \omega (X_i = \emptyset)$ 与选择公理等价.¹

¹[维基百科页面](#)

2.3 等价和划分

Definition 2.10. 令 $R \subseteq X^2$ 是 X 上的二元关系. R 是:

- (1) 自反的, 若 $\forall x \in X (xRx)$;
- (2) 对称的, 若 $\forall x \in X \forall y \in X (xRy \rightarrow yRx)$;
- (3) 传递的, 若 $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$;
- (4) 等价关系或等价的, 若 R 自反, 对称, 传递. 记为 \sim .

Definition 2.11. 令 \sim 是 X 上的等价关系, $x \in X$. x 关于 \sim 的等价类定义为:

$$[x]_{\sim} := \{t \in X \mid t \sim x\}.$$

注: 由 Sep, 等价类是集合而不是真类.

Theorem 2.11. 令 \sim 是 X 上的等价关系.

$$\forall x \in X \forall y \in Y ([x]_{\sim} = [y]_{\sim} \wedge [x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \emptyset)$$

Definition 2.12. 令 X 是一集合, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. S 被称为 X 的一个划分如果:

$$\forall a \in S \forall b \in S (a = b \vee a \cap b = \emptyset) \wedge \cup S = X.$$

Definition 2.13. 令 \sim 是 X 上的等价关系. $X/\sim := \{[x]_{\sim} \mid x \in X\}$ 称为 X 的商集.

Theorem 2.12. 令 \sim 是 X 上的等价关系. X/\sim 是 X 的一个划分.

Theorem 2.13. 令 S 为 X 的划分, 定义二元关系:

$$\sim_S := \{(x, y) \in X^2 \mid \exists s \in S (x \in s \wedge y \in s)\}.$$

那么, \sim_S 是等价关系, $X/\sim_S = S$. 若 X 上的等价关系 \sim 满足 $X/\sim = S$, 则 $\sim_S = \sim$.

Proof. $\cup S = X \rightarrow \forall x \in X \exists s \in S (x \in s)$, 即 \sim_S 是自反的. 对称和传递性显然. 从而, \sim_S 是等价关系.

依商集和等价类的定义, $\forall s \in X/\sim_S \exists x \in X \forall t (t \in s \leftrightarrow \exists s' \in S (x \in s' \wedge t \in s'))$. 这之后我遇到了困难. \square

2.4 序

Definition 2.14. 如果 X 上的二元关系 \leq 满足:

1. 自反 i.e. $\forall x \in X (x \leq x)$;
2. 反对称 i.e. $\forall x \in X \forall y \in X (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$;
3. 传递 i.e. $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$,

则称其为 X 上的**偏序** (partial order) 或**序**, 记 (X, \leq) , 并称 X 是一个**偏序集** (partially ordered set, appr. poset). 如果它还是**连接的** i.e. $\forall x \in X \forall y \in X (x \leq y \vee y \leq x)$, 那么它是 X 上的**线序或全序** (total order), 此时也称 X 是一个**线序集**.

通常记 $\geq := \leq^{-1}$, $< := \leq \cap \neq$, $> := <^{-1}$.

Definition 2.15. 如果 X 上的关系 \preceq 只满足传递和自反, 称其为 X 上的**拟序** (quasi-order) 或**预序** (preorder). $\succeq := \preceq^{-1}$.

Theorem 2.14. 令 \preceq 是 X 上的拟序, 等价关系 \sim 可由 $\sim = \preceq \cap \succeq$ 定义, 且商集 X / \sim 上的偏序关系 \leq 可定义为

$$[x] \leq [y] \leftrightarrow x \preceq y.$$

Definition 2.16. 如果对于 $a \in X$ 满足 $\forall x \in X (\neg(a > x))$, 则称 a 为 X 的**极小元**. 如果对于 $a \in X$ 满足 $\forall x \in X (a \leq x)$, 则称 a 为 X 的**最小元**. 相反则有**极大元**和**最大元**.

令 $X_0 \subseteq X$. 如果 $\exists a \in X \forall x \in X_0 (a \leq x)$, 则称 X_0 在 X 中有下界, a 是 X_0 在 X 中的**下界**. 如果这样的下界 a 的集合有最大元 a_0 , 称其为**下确界** (infimun, appr. inf), 记为 $\inf X_0$. 同理有**上界**和**上确界** (supremun, appr. sup) $\sup X_0$.

作为例子, 令 $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 是偏序集. 对于 $\forall S \subseteq \mathcal{P}(X)$, S 有上下确界, $\sup S = \cup S$, $\inf S = \cap S$.

Definition 2.17. 如果 X 和其上的线序 (X, \leq) 满足任意 $X_0 \in \mathcal{P}(X)$, X_0 都有最小元, 则称 \leq 为 X 上的**良序**, X 被称为**良序集**.

3 实数

3.1 自然数

根据 Inf (axion 6), 这样的集合是存在的:

Definition 3.1. 如果集合 X 满足:

$$\emptyset \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow x^+ \in X)$$

则称其为归纳集.

容易知道 $0 := \emptyset$ 属于任何归纳集, $1 := 0^+$ 也属于任何归纳集, ..., 以此类推. 最小的归纳集被称为**自然数集**, 它的严格定义如下:

Definition 3.2.

$$\mathbb{N} := \{n \mid \forall X(X \text{ 是归纳集} \rightarrow n \in X)\}.$$

\mathbb{N} 是**自然数集**, 其元素是自然数.

从定义上可以看出, \mathbb{N} 是归纳集, 而且是任何归纳集的子集.

Theorem 3.1. 归纳原理 令 $\varphi(n)$ 是一个性质. 如果

1. $\varphi(0)$ 成立;
2. $\forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+))$ 成立,

那么, $\forall n \in \mathbb{N} \varphi(n)$ 成立.

Proof. 构造集合 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$, 根据它是归纳集, 可知 $\mathbb{N} \subseteq M$, 但 M 是根据 Sep 从 \mathbb{N} 中分离出来的, 得知 $M = \mathbb{N}$. \square

在 \mathbb{N} 上定义偏序关系 $\leq = \in \cap =$, 而且可以证明, 这是一个良序.

Theorem 3.2. 第二归纳原理 令 $\varphi(n)$ 是一个性质.

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall k \in n \varphi(k) \rightarrow \varphi(n)) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \varphi(n)$$

3.2 递归定理

接下来我们要定义一些二元函数, 即我们熟悉的自然数集上的运算. 我们可以递归地给出它们的定义, 但这种定义的合理性需要递归定理的辩护.

Definition 3.3. 以 $n \in \mathbb{N}$ 或 \mathbb{N} 为定义域的函数称为**序列**, 其中前者称为长度为 n 的**有穷序列**, 后者称为**无穷序列**, 通常分别记为 $\langle a_k \mid k < n \rangle$ 或 $\langle a_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$, 或简记为 $\langle a_k \rangle_{k < n}$ 或 $\langle a_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$. 值域通常记为 $\{x_k \mid k < n\}$ 或 $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, 或简记为 $\{a_k\}_{k < n}$ 或 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. 特别地, 长度为 0 的序列称为**空序列**.

若序列的到达域是 Y , 则通常称为 Y 内的序列. Y 内所有有穷序列的集合可记为 $A^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$.

Theorem 3.3. 递归定理

$$\forall A \forall a \in A \forall g \in A^{A \times \mathbb{N}} \exists! f \in A^{\mathbb{N}} (f(0) = a \wedge \forall n \in \mathbb{N} (f(n^+) = g(f(n), n))).$$

这里的 g 扮演了一个“递推式”的角色.

Proof. 首先, 我们需要证明 f 的存在性.

注意到 f 是 A 中的无穷序列, 我们考虑用满足条件的有穷序列去逼近它. 基于 a 和 g 的 m -近似定义为有穷序列 $t: m^+ \rightarrow A$ 满足

$$t_0 = a \wedge \forall k \in m^+ (t_{k^+} = g(t_k, k)).$$

并记 $\mathcal{F} = \{t \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A) \mid t \text{ 是 } m\text{-近似的}\}$, 及 $f = \bigcup \mathcal{F}$. 接下来我们证明这个 f 是所寻找的函数.

首先证明它是函数. 由 theorem 2.10, 知这当且仅当 \mathcal{F} 相容. 令 $t, u \in \mathcal{F}$. 记 $m = \text{dom } t, n = \text{dom } u$. 不妨设 $m \leq n$. t, u 相容 iff $\forall k \in m (t_k = u_k)$. 这由 1) $t_0 = u_0 = a$; 2) $t_k = u_k \rightarrow t_{k^+} = g(t_k, k) = g(u_k, k) = u_{k^+}$ 的成立和归纳原理保证.

接着确定 $f \in A^{\mathbb{N}}$. $\text{dom } f \subseteq \mathbb{N}$ 和 $\text{ran } f \subseteq A$ 是显然的. 下证 $\mathbb{N} \subseteq \text{dom } f$. 注意到 $\text{dom } f = \bigcup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{存在 } n\text{-近似的}\}$. 接下来就是证明 $\text{dom } f$ 是归纳集, 即 $\forall n \in \mathbb{N}$ 存在 n -近似. 0-近似由 $\{(0, a)\}$ 给出; k -近似 t 存在时, 只需为之并上 $\{(k^+, g(t_k, k))\}$ 即可得到 k^+ 近似.

至于 f 满足 $f(0) = a$ 与 $\forall n \in \mathbb{N} (f(n^+) = g(f(n), n))$, 用其任意近似证明即可, 只需想到 f 与近似的相容性.

如此我们确定了 f 的存在性, 然后来证明它的唯一性. 假设有 $h: \mathbb{N} \rightarrow A$ 也满足定理, 只需用归纳法证明 $h(n) = f(n)$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立即可. \square

这样的 f 只能是一元函数, 定义运算需要带参数的版本:

Theorem 3.4. 带参数的递归定理

$$\forall A \forall P \forall a \in A^P \forall g \in A^{P \times A \times \mathbb{N}} \exists! f \in A^{P \times \mathbb{N}} \left(\begin{aligned} &\forall p \in P f(p, 0) = a(p) \wedge \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in P (f(p, n^+) = g(p, f(n), n)) \end{aligned} \right).$$

注: 如果固定 p , 这个定理与递归定理几乎一致, 从而我们需要考虑以 p 为变元的函数作为递归定理中的到达域.

Proof. 令 $G: A^P \times \mathbb{N} \rightarrow A^P; (t, n) \mapsto h$, 其中 h 满足 $\forall p \in P (h(p) = g(p, t(p), n))$. 考虑到 t 和 g 都是函数, 复合的 h 当然是函数, 而且唯一.

由递归定理, 有这样的函数 $F: \mathbb{N} \rightarrow A^P$ 满足 1) $\forall p \in P (F(0) = a \in A^P)$; 2) $\forall n \in \mathbb{N} (F(n^+) = G(F(n), n))$.

可以验证 $f(p, n) = F(n)(p)$ 即是我们想找的函数. \square

有了带参数的递归定理, 自然数上的运算可以看作以下存在而且唯一的二元函数:

Definition 3.4. 加法 $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 满足 1) $\forall m \in \mathbb{N} (+ (m, 0) = m)$; 2) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (+ (m, n^+) = (+ (m, n))^+)$. 通常记 $+(m, n) =: m + n$.

Definition 3.5. 乘法 \cdot : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 满足 1) $\forall m \in \mathbb{N} (\cdot (m, 0) = m)$; 2) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (\cdot (m, n^+) = (\cdot (m, n))^+)$. 通常记 $\cdot (m, n)$ 为 mn 或 $m \cdot n$.

我们熟悉的关于乘法和加法的性质都可以由归纳原理证出, 此处不再赘述.

3.3 势

Definition 3.6. 两个集合 X, Y **等势** (equinumerous) 指的是 $\exists f \in Y^X$ (f 是双射), 记为 $|X| = |Y|$.

Definition 3.7. 若存在 $f \in Y^X$ s.t. f 是单射, 则称 $|X| \leq |Y|$. 当 $|X| \leq |Y|$ 而 $|X| \neq |Y|$ 时, 我们就称 X 的势小于 Y 的势, 记为 $|X| < |Y|$.

Theorem 3.5.

$$|X| \leq |Y| \leftrightarrow \exists Y_0 \in \mathcal{P}(Y) (|X| = |Y_0|).$$

Proof. 对于 $f \in Y^X$ 且 f 是单的, 取 $Y_0 = \text{ran } f$ 即可. \square

下面我们将介绍 Cantor-Bernstein-Schröder 定理, 它的证明当中最重要的一部分是以下引理的证明:

Lemma 1.

$$A' \subseteq B \subseteq A \wedge |A'| = |A| \rightarrow |B| = |A|.$$

注: 我们已经知道有 A 到 B 的单射了, 怎么找到一个同时是满的呢? 这要求这个双射 h 要把 $A - B$ 和 B 映射到 B 的分划上, 可 $h[A - B]$ 在 B 之中, 它在 h 下必须映射到 $h[B]$ 里; 同理 $h[h[A - B]]$ 必须映射到 $h[B] - h[h[A - B]]$ 中...

也就是说: A 和 $A - B$ 在 h^n 即 h 的任意个复合中, 总是映射到一对不相交的集合 $h^n[A]$, $h^n[A - B]$ 中 (否则不可能是单的), 而且 $h^n[A - B]$ 在 h 的映射下, 又只能落到 $h^n[B]$ 中. 从而: $h^n[B]$ 不断在缩小, 给 $h^n[A - B]$ 腾出空间. 这是以下证明的重要思路.

Proof. 令 h 见证了 A' 和 A 的等势, 即 $h \in A'^A$ 且 h 是双射. 记:

$$A_0 := A, \quad B_0 := B,$$

并定义序列:

$$A_{n+1} = h[A_n], \quad B_{n+1} = h[B_n].$$

我们可以归纳地证出:

$$\forall n \in \mathbb{N} (A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n),$$

只需认识到 $A_1 \subseteq A' \subseteq B_0 \subseteq A_0$, 且对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 只要 $A_{k+1} \subseteq B_k \subseteq A_k$, 则 $h[A_{k+1}] \subseteq h[B_k] \subseteq h[A_k]$.

定义 $C_n = A_n - B_n$, 下验证 $h[C_n] = C_{n+1}$:

$$h[C_n] = h[A_n - B_n] = h[A_n] - h[B_n] = A_{n+1} - B_{n+1} = C_{n+1},$$

其中第二个等式的成立依赖于 h 是一个单射, 因为: $h[A_n]$ 中 $h[B_n]$ 全部由 B_n 映射而来, 这是单性要求的; 从而 $h[A_n] - h[B_n]$ 是 $A_n - B_n$ 的像, 因为映射到自身的值域总是满的.

将这些所有的 C_n 并起来:

$$C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n,$$

从而

$$h[C] = h\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C - C_0 = C - (A - B).$$

我们可以看到 C 中的元素有这样的性质, 它含于某个 C_n 中, 并将被 h 映射到下一个 C_{n+1} 中; 而且要么它是 $C_0 = A - B$ 中的元素, 要么是 C_{n-1} 中某个元素的在 h 下的像. 这有些像 Hilbert 的无限旅馆. $h \upharpoonright C$ 到是从 C 到它的子集 $h[C]$ 的满射, 而它的单性已由 h 自身的单性保证了.

而 h 在 $A - C$ 的限制却不一定是满的, 因为 $h[A] = A' \subseteq B$ 本身就不一定是到 B 的满射. 因为

$$A - C = (A - C_0) \cap (A - h[C]) \subseteq A - C_0 = A - (A - B) = B,$$

所以 $A - C$ 和 $h[C]$ 构成了 B 的分划.

因而我们可以这样定义 A 到 B 的双射:

$$i(x) = \begin{cases} h(x), & x \in C; \\ x, & x \in A - C. \end{cases}$$

□

Theorem 3.6. Cantor-Bernstein-Schröder 定理

如果 $|X| \leq |Y|$ 且 $|Y| \leq |X|$, 则 $|X| = |Y|$.

Proof. $|X| \leq |Y|$ 和 $|Y| \leq |X|$ 分别蕴含了单射 $f \in Y^X$ 和 $g \in X^Y$ 的存在, 且有

$$g[f[X]] \subseteq g[Y] \subseteq X,$$

和 $|g[Y]| = |Y|$, $|g[f[X]]| = |f[X]| = |X|$. 由引理1, 这意味着 $|X| = |Y|$. □

注: 早先的 Cantor-Bernstein-Schröder 定理利用了 **AC**, 但这里的证明避免了它.

这个定理说明了 \leq 拥有传递性, 这意味着 \leq 是一个偏序. 而且, 在 \mathbb{N} 中, 它和先前定义的自然数的偏序 \leq 是等同的. 这暗示我们可以这样做: 记 $|n| = n$, 只要 $n \in \mathbb{N}$.

索引

m -近似, 13

n 元关系, 6

笔记中出现的符号

(a, b) , 5

2^X , 4

\preceq , 11

$S(x)$, 4

x^+ , 4

AC, 5

AC II, 9

\mathbb{N} , 12

$\mathcal{P}(X)$, 4

$R(x, y)$, 6

$\Sigma \vdash \varphi$, 2

$T \vdash \sigma$, 2

V, 3

X^2 , 6

$X \times Y$, 6

xRy , 6

Y^X , 8

Cantor-Bernstein-Schröder 定理, 16

Cartesian 积, 6

Exi, 2

Ext, 2

Fnd, 4

Inf, 4

Pai, 4

Pow, 4

Rep, 5

Sep, 3

Uni, 4

Zermelo-Fraenkel 系统, 5

一致的, 2

一般 Cartesian 积, 7

上界, 11

上确界, 11

下界, 11

下确界, 11

乘法, 14

二元关系, 6

交, 3

任意交, 3

传递, 10

值, 7

值域, 6

偏序, 11

偏序集, 11

像, 6

全序, 11

公式, 2

公理, 2

函数, 7

分离公理模式, 3

划分, 10

加法, 14

单射, 8

- 双射, 8
- 反对称, 11
- 可公理化的, 2
- 可判定的, 2
- 可计算的, 2
- 可逆, 8
- 后继, 4
- 商集, 10
- 基础公理, 4
- 复合, 6
- 外延公理, 2
- 子集, 4
- 存在公理, 2
- 定义域, 6
- 对称, 10
- 对集公理, 4
- 差, 3
- 带参数的递归定理, 14
- 幂集, 4
- 幂集公理, 4
- 并集公理, 4
- 序, 11
- 序列, 13
- 归纳原理, 12
- 归纳集, 12
- 形式语言, 2
- 扩张, 9
- 拟序, 11
- 指标函数, 7
- 指标系统, 7
- 指标集, 7
- 推演, 2
- 无穷公理, 4
- 无穷序列, 13
- 替换公理模式, 5
- 最大元, 11
- 最小元, 11
- 有序对, 5
- 有穷序列, 13
- 极大元, 11
- 极小元, 11
- 满射, 8
- 理论, 2
- 直积, 6
- 相容, 9
- 相容系统, 9
- 真子集, 4
- 真类, 3
- 空序列, 13
- 空集, 3
- 第二归纳原理, 12
- 等价, 10
- 等价关系, 10
- 等价类, 10
- 等势, 14
- 等同函数, 7
- 类, 3
- 约束变元, 2
- 线序, 11
- 线序集, 11
- 自反, 10
- 自然数, 12
- 自然数集, 12
- 自由变元, 2
- 良序, 11

良序集, 11

证明, 2

语句, 2

连接, 11

逆, 6

选择公理, 5, 9

选择函数, 9

递归可枚举的, 2

递归定理, 13

递归的, 2

逻辑符号, 2

限制, 9

非逻辑符号, 2

项, 2

预序, 11

参考文献

- [1] 数理逻辑: 证明及其限度[M/OL]. 上海: 复旦大学出版社, 2014. <https://books.google.co.jp/books?id=WDPqjgEACAAJ>.