Introduzione

Il Progetto Fibonacci è un'iniziativa che mira a tradurre e rendere accessibile l'opera *Liber Abaci* di Leonardo Pisano (Fibonacci).

Basandosi sul precedente, questo progetto ha come scopo quello di raccogliere alcuni degli algoritmi più significativi esposti nell'opera e riscriverli in linguaggio C.

In particolare sono stati analizzati i primi 7 capitoli, dove viene trattata l'aritmetica di numeri interi e fratti (scritti con le cifre arabe);
i capitoli 8-11 sono applicazioni a problemi di natura economica/commerciale,
il capitolo 12 tratta di problemi che nel linguaggio moderno potremmo definire di matematica ricreativa,
i capitoli 13-15 trattano questioni di algebra e geometria più avanzate [*].

Nel seguito verranno presentati gli algoritmi tramite la spiegazione di Fibonacci (tradotta) e una spiegazione in linguaggio matematico moderno corredate da snippet di codice, osservazioni ed esempi.

Sulle immagini è presente un link al paragrafo corrispondente del testo che si trova sul sito Progetto Fibonacci.

Negli snippet è stata riportata solo la parte di codice necessaria a illustrare i passaggi dell'algoritmo, omettendo le istruzioni più tecniche.
La spiegazione del codice è dentro allo snippet sotto forma di commento.

Il codice completo si trova al seguente github.
I codici vanno scaricati, compilati (serve un compilatore per C) ed eseguiti sulla propria macchina.

È disponibile anche un repl che non necessita di scaricare nulla: basta seguire le istruzioni nel readme per eseguire il programma desiderato direttamente nel browser.

---

[*] quest'ultima parte si presta molto bene a questo lavoro di studio e riscrittura di algoritmi, ma quando ho iniziato il progetto non era ancora stata tradotta completamente

Considerazioni metodologiche

Fibonacci non spiega formalmente gli algoritmi né fornisce una dimostrazione formale della loro correttezza (al massimo dà delle giustificazioni o delle dimostrazioni in casi particolari per convincere il lettore). Al contrario, considerando anche il pubblico a cui l'opera era rivolta (principalmente mercanti), Fibonacci illustra gli algoritmi in modo operativo, cioè mostrando esempi di calcolo in casi particolari, sperando che il lettore riesca da questi a inferire la regola generale.
Talvolta quelli che vengono presentati non sono neanche veri e propri algoritmi, ma più delle euristiche o procedimenti che funzionano in casi molto particolari ma non è chiaro perché funzionino o come si relazionino al caso generale.

Di conseguenza si è resa necessaria una selezione degli algoritmi implementabili. Laddove Fibonacci spiega procedure simili per diversi casi particolari, si è preferito implementare un unico algoritmo generale. Mentre, per gli algoritmi più complessi, nonostante si potrebbe descrivere l'algoritmo nel caso più generale possibile, si è preferito implementare solo i casi più semplici (in caso contrario si aggiungono solo difficoltà implementative che non cambiano l'idea dell'algoritmo).

Per rendere il codice più accessibile anche a chi non fosse molto pratico di programmazione, sono state fatte delle scelte:

- si è limitato l'uso di funzioni di libreria, tutte le funzioni necessarie sono state riscritte da zero (sono nel file `mylib.h`)
- le uniche strutture dati di base utilizzate sono numeri interi, array (vettori e stringhe) e liste; da queste sono state definite delle strutture più complesse per rappresentate le cifre di un numero e le frazioni
- si è cercato di evitare l'uso di espedienti e di abusare le idiosincrasie del linguaggio C, per rendere il codice più comprensibile (anche se più verboso) *
- si è preferito fare in modo che l'implementazione degli algoritmi ricalcasse la descrizione di Fibonacci, favorendo l'aspetto didattico a scapito dell'efficienza/ottimizzazione

Inoltre il codice è adeguatamente commentato (in inglese) ed è stata posta particolare cura per renderlo più leggibile possibile (per esempio sono stati applicati dei rientri per le stampe, così da distinguerle dalla parte algoritmica).

---

* unica eccezione l'operatore " **? :** " per snellire un po' il codice e, a mio parere, migliorare la leggibilità

Dato che lo scopo di questo progetto è più rivolto verso l'implementazione degli algoritmi piuttosto che la creazione di applicativi veri e propri, sono state prese delle scelte che si discostano dalle pratiche di buona programmazione, in particolare:

- non viene fatta *input validation*, cioè non viene controllato che l'input inserito dall'utente abbia un formato compatibile con quello che si aspetta il programma; non viene neanche segnalato errore, quindi in caso di typo si possono ottenere degli output buffi
- l'interazione con l'utente è mediante console, ma non ci sono abbastanza stampe a schermo per capire cosa sta facendo il programma (senza sapere già come funziona) *

Ciò nonostante, i programmi sono completamente funzionali: basta compilarli e seguire le indicazioni in fondo al codice (per facilitare il testing sono stati riportati gli esempi che usa Fibonacci).

* era in programma anche la creazione di interfacce grafiche per questo, ma non c'è stato tempo

Capitolo 1 – Numeri interi

Nel primo capitolo Fibonacci presenta le "figure" indiane (anche dette cifre arabe).

> (I.5 ; G:I.13) Le nove figure degli Indiani sono queste
>
> *I nove simboli indiani per scrivere tutti i numeri*
>
> 9 8 7 6 5 4 3 2 1
>
> *Scrittura posizionale dei numeri interi*
>
> Pertanto con queste nove figure, e con questo segno 0, che gli Arabi chiamano zefiro, si scrive qualunque numero, come è mostrato più sotto. Infatti il numero è una raccolta fatta di unità o un insieme di unità, che per le sue posizioni sale all'infinito. La prima fra queste è formata dalle unità, che sono da uno fino a dieci. La seconda dalle decine che sono da dieci fino a cento. La terza si ha dalle centinaia che sono da cento fino a mille. La quarta dalle migliaia che sono da mille a diecimila, e così ognuna delle qualsiasi posizioni all'infinito consiste nel decuplo del suo antecedente. Nella scrittura dei numeri il primo posto comincia da destra. Il secondo invero, segue il primo verso sinistra. Il terzo segue il secondo. Il quarto il terzo, e il quinto il quarto, e sempre così verso sinistra un posto segue un posto. Pertanto la figura che si trova nel primo posto rappresenta se stessa, cioè se nel primo posto ci sarà la figura dell'uno esso rappresenta uno; se quello del due, due; se quello del tre, tre; e così nell'ordine che seguono fino a nove se c'è il nove: le nove figure poi che saranno nel secondo posto rappresentano tante decine quante nel primo le unità; cioè se la figura dell'unità occupa il secondo posto, indica dieci, se due, venti, se tre trenta, se nove, novanta.

Spiega come giustapponendo le cifre si possa rappresentare ogni numero: infatti il sistema numerico arabo usa la notazione posizionale in base 10.

$$a_n \dots a_1 a_0 = a_n \times 10^n + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \times 10^k$$

Nel seguito verranno usate le lettere minuscole per indicare variabili che rappresentano cifre e quelle maiuscole per numeri interi; una sequenza di cifre giustapposte è quindi da intendersi come un numero intero.
Se A è un numero, la cifra in posizione k verrà anche indicata con $(A)_k = a_k$.

Per illustrare meglio gli algoritmi delle operazioni in colonna, i numeri interi verranno rappresentati mediante una struttura costituita di un vettore che contiene le cifre e il numero di cifre stesso.

```
struct NUMBER {      // numero intero
    int* digits;         // vettore delle cifre
    int length;          // numero di cifre
};
```

Le cifre sono memorizzate al contrario, dato che si leggono da destra verso sinistra *: quindi in posizione 0 ci sono le unità, in posizione 1 le decine, e così via.

---

* qui si vede l'influenza araba

Capitolo 2 – Moltiplicazione di numeri interi

Nel secondo capitolo Fibonacci spiega come moltiplicare due numeri interi.

Invece di dare l’algoritmo generale, viene spiegato come moltiplicare rispettivamente numeri di 2, 3, 4, 5 e 8 cifre. Inoltre vengono distinti i casi di moltiplicazione di un numero con sé stesso, di numeri distinti con lo stesso numero di cifre e di numeri con diverso numero di cifre.

> (II.2 ; G: II.4) **S**i dice che un numero moltiplica se stesso quando si moltiplica un simile per un simile, come 12 per 12 o 26 per 26. Si dice che un numero moltiplica un numero, quando i numeri che si moltiplicano tra loro sono tra loro diversi, come 12 per 37 e 46 per 59: perciò dapprima noi insegniamo a moltiplicare tra loro i numeri in seconda posizione come promesso, cioè da 10 fino a cento. Quando invece vuoi moltiplicare qualche numero in della seconda posizione per qualche numero nella della stessa posizione, sia che i numeri siano uguali o che siano diversi, scriverai il numero sotto al numero in modo che simile posizione sia sotto la posizione simile; e se i numeri sono diversi, sia il maggiore sotto il minore, e cominci la moltiplicazione dalla prima posizione dei numeri scritti prima nella tavola. Si moltiplichi quindi la figura al primo posto del numero superiore scritto prima nella tavola per la figura al primo posto dell’inferiore, e si scrivano le unità sopra la prima posizione dei numeri scritti prima, e per ogni decina si tenga uno nella mano sinistra: poi si moltiplichi la figura al primo posto del numero superiore per la figura al secondo posto, cioè per l’ultima del numero inferiore, e al contrario: si moltiplichi la figura al primo posto inferiore per l’ultima figura del superiore, e si aggiunga in mano con le decine conservate; e di nuovo si scrivano le unità sopra il secondo posto, e si tengano in mano le decine. Nello stesso modo si moltiplichi l’ultima figura del numero superiore per l’ultima dell’inferiore e ciò che risulterà dalla moltiplicazione si aggiunga in più alle decine conservate nella mano, e si pongano le unità al terzo posto e le decine, se ci fossero, si pongano nel quarto, e si avrà la moltiplicazione di qualsiasi numero a piacere da 10 fino a 100.
>
> Come si moltiplica un numero di due cifre per un numero di due cifre

Siano A e B due numeri rispettivamente di $n+1$ ed $m+1$ cifre

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

$$B = b_m \times 10^m + b_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + b_1 \times 10 + b_0$$

Sfruttando le proprietà associative, commutative e distributiva (della moltiplicazione rispetto all’addizione) si può scrivere il loro prodotto in questo modo

$$\begin{aligned} A \times B &= (a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0) \times \\ &\qquad (b_m \times 10^m + b_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + b_1 \times 10^1 + b_0 \times 10^0) = \\ &= (a_n \times b_m) \times 10^{n+m} + (a_n \times b_{m-1} + a_{n-1} \times b_m) \times 10^{n+m-1} + \\ &\quad \ldots + (a_1 \times b_0 + a_0 \times b_1) \times 10^1 + (a_0 \times b_0) \times 10^0 \end{aligned}$$

oppure, con una notazione più compatta

$$A \times B = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \times 10^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \times b_j \right) \times 10^k$$

Indichiamo il coefficiente delle potenze di 10 con S_k

$$S_k = \sum_{i+j=k} a_i \times b_j$$

Definiamo le funzioni υ , che restituisce l'unità di un numero, e δ , che restituisce tutto il resto (ovvero il riporto); per esempio $\upsilon(123) = 3$ e $\delta(123) = 12$. Notiamo che $0 \leq \upsilon(S) \leq 9 \ \ \forall S \in \mathbb{N}$.

Quindi possiamo decomporre un numero così

$$S = \delta(S) \times 10 + \upsilon(S)$$

Con queste funzioni possiamo calcolare i riporti e le cifre del prodotto ricorsivamente

$$\begin{cases} R_{-1} = 0 \\ R_k = \delta(S_k + R_{k-1}) \end{cases}, \quad k = 0, \dots, n+m$$
$$c_k = \upsilon(S_k + R_{k-1})$$

Per definizione c_k è una cifra. È facile verificare che $A \times B = C$ dove

$$C = \sum_{k=0}^{n+m} c_k \times 10^k$$

Questo argomento si riapplica invariato ai successivi algoritmi, a meno di ridefinire opportunamente gli S_k .

```
1     int* d = calloc (lmax, sizeof(int));            // qui verranno messe le cifre del risultato
2
3     int carry = 0, c1 = 0, c2 = 0, s = 0;           // carry = riporto, c1,c2 = cifre correnti,
4                                                     // s = accumulatore (per i prodotti parziali)
5     for (int k = 0; k < lmax; k++) {
6         s = 0;
7         for (int i = 0; i <= k; i++) {
8             int j = k-i;                            // i + j = k
9             c1 = (i < l1) ? num1.digits[i] : 0 ;    // mette degli 0 prima del numero se serve ...
10            c2 = (j < l2) ? num2.digits[j] : 0 ;    // ... es. 123 x 456789 -> 000000123 x 000456789
11
12            s += c1 * c2;                           // aggiunge il prodotto delle cifre correnti
13        }
14        s += carry;                                 // aggiunge il riporto
15
16        d[k] = get_last_digit (s);                  // estrae l'ultima cifra e la posiziona nel risultato
17        carry = (int) (s / 10);                     // calcola il riporto successivo
18    }
```

La funzione `get_last_digit` svolge lo stesso ruolo della funzione υ ,
mentre la riga 17 svolge lo stesso ruolo di δ (divide per 10 e tronca il risultato).

Osservazioni

Fibonacci riconduce la moltiplicazione di numeri con molte cifre a prodotti di cifre singole e somme di numeri (generalmente a più cifre). I primi vengono spiegati alla fine del primo capitolo mediante le tavole pitagoriche (anche note come "tabelline"); le seconde verranno approfondite nel capitolo 3, dedicato all'addizione.

Per giustificare i passaggi dell'algoritmo, viene anche data una sorta di dimostrazione basata sulle proporzioni.

(II.37 ; G: II.72) **M**ostrerò inoltre che questo modo di moltiplicare deriva da ciò che accade tra i numeri tra loro proporzionali. Infatti quando tre numeri sono proporzionali, cosicché il primo sta al secondo come il secondo sta al terzo, allora la moltiplicazione del primo col terzo è uguale alla moltiplicazione del secondo in sé. E quando quattro numeri sono proporzionali, si avrà che come il primo sta al secondo così il terzo sta al quarto. Allora la moltiplicazione del primo nel quarto è uguale alla moltiplicazione del secondo nel terzo, come si trova in Euclide. Infatti un numero sale all'infinito per posizioni continue; poiché come la [*il numero in*] prima posizione sta alla seconda così la seconda sta alla terza e la terza alla quarta e ciascun antecedente al suo conseguente. Perciò la moltiplicazione di una seconda posizione in sé fa la stessa posizione fatta della moltiplicazione della prima con la terza. E la moltiplicazione di una seconda posizione nella terza fa la posizione fatta dalla moltiplicazione della prima con la quarta.

$a : b = b : c$
$a \times c = b \times b$

$a : b = c : d$
$a \times d = b \times c$

$a_I : a_{II} = a_{II} : a_{III} = a_{III} : a_{IV} = \ldots$

$a_{II} \times a_{II} = a_I \times a_{III}$
$a_{II} \times a_{III} = a_I \times a_{IV}$

(II.38 ; G: II.74) **S**i comincia così nelle moltiplicazioni delle figure in prima posizione, dalla cui moltiplicazione si ha o un numero in prima posizione o terminante in essa. Perciò dalla moltiplicazione della prima figura per la prima si pongono le unità al primo posto, e si tengono le decine per il secondo, alle quali si somma la moltiplicazione delle prime con le seconde, e ne viene un numero in seconda posizione, o terminante in essa. Per questo si pongono le unità sopra la seconda posizione, e per ogni decina che si ha, si conservi 1 al terzo grado. Quindi si moltiplicano le prime con le terze, e si aggiungono ad esse la moltiplicazione della seconda con la seconda; perché la moltiplicazione della seconda posizione fa la stessa posizione che fa la moltiplicazione delle prime posizioni con le terze. E perciò dalle moltiplicazioni delle prime figure per le terze e delle seconde nelle seconde si pongono le unità sopra la terza posizione; dopo di ciò si moltiplicano le prime per le quarte, e le seconde per le terze, essendo in quattro posizioni proporzionali; poiché come il primo sta al secondo, così il terzo sta al quarto, e da queste moltiplicazioni si ha il numero che termina in quarta posizione.

$a_I \times a_{III} = a_{II} \times a_{II}$

$a_I \times a_{IV} = a_{II} \times a_{III}$
$a_{II} : a_{II} = a_{III} : a_{IV}$

(II.39 ; G: II.76) **E** perciò si pongano le unità in quarta posizione, e dopo si moltiplichino le prime per le quinte, e le seconde per le quarte, e le terze per le terze; perché come la prima posizione sta alla seconda così la quarta sta alla quinta. Per cui la moltiplicazione della seconda posizione nella quarta fa la posizione fatta dalla moltiplicazione della prima nella quinta, cioè la quinta posizione; e inoltre la seconda posizione sta alla terza come la terza alla quarta. Per cui la moltiplicazione della terza posizione per la terza dà la posizione della moltiplicazione della seconda per la quarta, cioè la quinta posizione. E perciò le unità sono messe in quinta posizione, e così secondo la proporzionalità si ottiene il risultato della moltiplicazione di qualsiasi numero. E questo può essere chiaramente compreso da ciò che segue. E si deve osservare che come la prima posizione sta alla seconda, così la penultima sta all'ultima; e come la prima sta alla terza, così la terza dall'ultima sta all'ultima; e come la prima sta alla quarta, così la quarta dall'ultima sta all'ultima, e così via.

$a_I : a_{II} = a_{IV} : a_V$
$a_{II} \times a_{IV} = a_I \times a_V$

$a_{II} : a_{III} = a_{III} : a_{IV}$
$a_{III} \times a_{III} = a_{II} \times a_{IV}$

(II.40 ; G: II.78) **D**al momento che in questa moltiplicazione di cinque figure in cinque, dopo aver posto la quinta figura sopra la quinta, si moltiplichino la seconda per le quinte e la terza per le quarte; e queste moltiplicazioni vanno in sesta posizione; poiché quando la seconda posizione moltiplica la quinta dà la sesta posizione; che fa la moltiplicazione della terza posizione per la quarta, e quando la seconda posizione sta alla terza, così la quarta sta alla quinta. Poi la terza posizione è moltiplicata per le quinte e la quarta per la quarta, e si ha la settima posizione; perché moltiplicando la terza posizione, si ha la terza posizione dalla quinta, cioè la settima: dopo si moltiplicano la quarta per le quinte, che fanno l'ottava posizione. In ultimo si moltiplica la quinta posizione per la quinta, che dà la nona posizione; e così si ha il risultato di detta moltiplicazione. Dunque per tutto ciò che è stato detto sulla moltiplicazione, qualunque persona intelligente può ricevere una perfetta cultura del moltiplicare: tuttavia affinché gli inesperti abbiano qui un insegnamento perfetto, ho deciso di mostrare la moltiplicazione dell'ottava posizione.

$a_{II} \times a_V = a_{III} \times a_{IV}$
$a_{II} : a_{III} = a_{IV} : a_V$

$a_{III} \times a_V = a_{IV} \times a_{IV}$

Vogliamo scrivere le potenze di 10 (che rappresentano le cifre del prodotto) come somme di prodotti di potenze di 10 (che rappresentano le cifre dei fattori).

Iniziamo da $10^0 = 1$ (che rappresenta le unità)

$$1 = 1 \times 1$$

cioè dalle "*moltiplicazioni delle figure in prima posizione,* […] *si ha o un numero in prima posizione o terminante in essa*".

Grazie alla proprietà commutativa otteniamo

$$10 = 1 \times 10 = 10 \times 1$$

$$2 \times 10 = 1 \times 10 + 10 \times 1$$

ossia il prodotto delle unità con le decine e il prodotto delle decine con le unità danno le decine.

Consideriamo ora le proporzioni tra potenze di 10 consecutive

$$1 : 10 = 10 : 100 = 100 : 1000 = \cdots$$

Sfruttando la proprietà "prodotto dei medi uguale a prodotto degli estremi" otteniamo

$$1 : 10 = 10 : 100$$
$$1 \times 100 = 10 \times 10$$

da cui

$$100 = 1 \times 100 = 10 \times 10 = 100 \times 1$$

$$3 \times 100 = 1 \times 100 + 10 \times 10 + 100 \times 1$$

In generale possiamo scrivere *

$$(k+1) \times 10^k = \sum_{i+j=k} 10^i \times 10^j$$

(non è importante l'esatto coefficiente nel membro di sinistra, solo la potenza di 10).

Moltiplicando queste potenze per le corrispondenti cifre dei fattori (che possiamo interpretare come dei coefficienti) riotteniamo la formula del prodotto

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \times 10^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \times b_j\right) \times 10^k$$

e tenendo conto degli eventuali riporti, si ricavano le altre formule viste sopra.

---

* questa può anche essere vista come un'applicazione dei coefficienti binomiali / binomio di Newton / triangolo di Tartaglia

Esempio

(II.20 ; G: II.41) Per la chiarezza di questa cosa siano i numeri uguali 345 e 345 quelli che dobbiamo moltiplicare insieme, che si collochino a vicenda come si vedono essere collocati nella pagina ; e si moltiplichi 5 per 5 si avrà 25, si ponga il 5 sopra gli altri 5, come si vede nella seconda descrizione, e per le decine si conservi in mano il 2 e si moltiplichi il 5 del numero superiore per il 4 dell'inferiore, e il 5 dell'inferiore per il 4 del superiore ; ai quali si aggiunge il 2 conservato, fa 42 : si ponga il 2 sopra entrambi i 4, così come è mostrato nella terza descrizione, e si conservi il 4 per le quattro decine ; e si moltiplichi il 5 superiore per il 3 inferiore e il 5 inferiore per il 3 superiore e 4 per 4, e la somma di queste tre moltiplicazioni si sommi al 4 conservato in mano: si avrà 50 : si ponga lo 0 sopra entrambi i 3, come si mostra nella quarta descrizione, e si tenga in mano il 5, e si moltiplichi il 4 superiore per il 3 inferiore, e il 4 inferiore per il 3 superiore, e si aggiunga il 5, si avrà 29 : si metta 9 dopo lo 0, come appare nella quinta descrizione, e si conservi in mano il 2, e si moltiplichi 3 per 3, si avrà 9, che si sommi a 2, si avrà 11, che si ponga, come è mostrato nella sesta e ultima descrizione. Se questa moltiplicazione sia corretta si sa per mezzo del modo detto prima, cioè si addizionino le figure del 345 superiore, e togliamo 9, rimarrà 3 ; lo stesso si faccia col 345 inferiore e rimarrà ancora 3 ; e si moltiplichi 3 per 3, dal quale si toglie 9, rimane 0 che si tenga per il resto, allora sommando le figure che sono in cima alla moltiplicazione, cioè 1 e 1 e 2 e 5, si avrà 9, dal quale togliamo 9, rimane 0 come deve essere.

prima	345 345
seconda	5 345 345
terza	25 345 345
quarta	025 345 345
quinta	9025 345 345
ultima	119025 345 345

```
345
345

----------

000345
000345

5x5 + 0 = 25
5x4 + 4x5 + 2 = 42
5x3 + 4x4 + 3x5 + 4 = 50
5x0 + 4x3 + 3x4 + 0x5 + 5 = 29
5x0 + 4x0 + 3x3 + 0x4 + 0x5 + 2 = 11
5x0 + 4x0 + 3x0 + 0x3 + 0x4 + 0x5 + 1 = 1

119025

----------

345 % 9 = 3
345 % 9 = 3
119025 % 9 = 0

correct

===  "moltiplicazione.exe" ===
```

Capitolo 2 – Prova del 9

Nel secondo capitolo Fibonacci presenta anche la prova del 9, un test per controllare la correttezza dei conti svolti; questa verrà utilizzata estensivamente anche per le operazioni successive.

(II.5 ; *G*: II.15) **S**i viene a sapere se questa moltiplicazione è corretta in questo modo. Si sommino appunto le figure che sono nel 37 superiore, cioè 3 con 7, fa 10, dalle quali si tolga 9, rimarrà 1, che si conservi. Nello stesso modo si contino le figure del 37 inferiore, e si tolga 9, rimarrà ancora 1: si moltiplichi quindi l'1 che è rimasto dal 37 in alto per l'1 che è rimasto in basso, farà 1, che si chiama resto o porzione, e si conservi nella tavola sopra la moltiplicazione stessa, come si vede nella terza descrizione: poi si sommino le figure che sono in cima alla moltiplicazione, e dalla quantità sommata si tolga 9 tante volte quanto è possibile ; e se rimarrà 1 come è stato conservato per il resto, allora la moltiplicazione sarà corretta.

Verifica la correttezza della moltiplicazione con la prova del 9

(II.6 ; *G*: II.17) **P**er esempio: se sommiamo le figure che sono in cima alla moltiplicazione, cioè 1 e 3 e 6 e 9, avremo 19, dal quale togli per due volte il 9, rimarrà 1 come abbiamo detto debba rimanere come resto : e dal detto 19 cancella il 9 che si trova al primo posto di esso, rimarrà similmente 1. E prendi nota quando addizioni le figure del 37, cioè 3 con 7, allora dividi 37 per 9, divisione dalla quale rimane 1, come rimase dal 10 che risultò dalla somma del 3 e del 7, quando ne fu sottratto 9: infatti il resto che rimane da qualunque numero diviso per 9, è la somma creata dall'addizione di tutte le figure che fanno il numero stesso.

Spiega il modo per trovare il resto modulo 9 sommando le cifre

(II.7 ; *G*: II.18) **E** si deve osservare ancora quando *(PdA)* un qualche numero è diviso in parti e ogni singola parte è moltiplicata per un qualche numero, quelle moltiplicazioni raccolte in una sola sono uguali alla moltiplicazione di tutto il numero diviso per il numero per il quale furono moltiplicate tutte le parti dello stesso. Pertanto le due moltiplicazioni di 36 per 37 e di 1 per 37 congiunte in una sola sono uguali alla moltiplicazione di 37 per 37. Ma dalla moltiplicazione di 36 per 37 si ottiene un numero che è creato da un qualche insieme di nove unità, perché 36 è formato da [*gruppi di*] nove unità. Per cui del numero che viene da 36 per 37, se sarà diviso per nove, non rimarrà nulla di indivisibile. Parimenti la moltiplicazione di 1 per 37 è uguale alla somma della moltiplicazione di 1 per 36 e di 1 per 1. Ma dalla moltiplicazione di 1 per 36 viene un numero che si divide interamente per 9: quindi la moltiplicazione di 1 per 1, cioè 1, rimane non divisibile per 9. Dunque dal totale della moltiplicazione che proviene dal 37 per 37 diviso per 9 rimane 1, e questo 1 si ha dalla somma di tutte le figure che sono nel risultato di 37 per 37, come troviamo sopra. Ovvero dal detto risultato elimina il 9 rimarrà 136, dal quale togli 3 e 6 che sommati fanno 9: da 1369 diviso per 9 rimarrà nello stesso modo l'1 indivisibile.

Enuncia la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

Calcola 37x37 modulo 9

Dato un numero A , indichiamo con $[A]$ il resto della sua divisione per 9 (si dice anche che è stato ridotto modulo 9). Possiamo quindi scrivere

$$A = Q \times 9 + [A], \qquad 0 \leq [A] < 9$$

Più in generale possiamo considerare il resto modulo un qualsiasi numero intero positivo n , e lo indichiamo sempre $[A]$ oppure $[A]_n$

$$A = Q \times n + [A], \qquad 0 \leq [A] < n$$

Per iniziare osserviamo che vale

$$[[A]] = [A]$$

(ossia la riduzione in modulo è una proiezione) e

$$[A] = 0 \iff n \mid A$$

La riduzione modulo n gode di alcune interessanti proprietà *

$$[A+B] = [[A]+[B]]$$

$$[A \times B] = [[A] \times [B]]$$

Infatti siano A e B tali che

$$A = P \times n + [A], \qquad B = Q \times n + [B]$$

allora abbiamo

$$\begin{aligned} A+B &= (P \times n + [A]) + (Q \times n + [B]) \\ &= (P+Q) \times n + ([A]+[B]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= (P \times n + [A]) \times (Q \times n + [B]) \\ &= (P \times Q) \times n^2 + (P \times [B] + Q \times [A]) \times n + ([A] \times [B]) \end{aligned}$$

da cui, riducendo di nuovo, si ottengono le formule suddette.

Da queste formule si ricava un modo comodo per calcolare il resto modulo $\mathcal{B}-1$ di un numero scritto in base $\mathcal{B}$. Infatti abbiamo che

$$[\mathcal{B}^k]_{\mathcal{B}-1} = 1$$

(si dimostra per induzione usando la proprietà precedente per il prodotto).

Sia A tale che

$$A = \sum_k a_k \times \mathcal{B}^k$$

dove a_k sono le cifre di A nella base $\mathcal{B}$ (stiamo assumendo un sistema posizionale).

Allora

$$[A] = \left[\sum_k [a_k] \times [\mathcal{B}^k]\right] = \left[\sum_k [a_k] \times 1\right] = \left[\sum_k [a_k]\right]$$

cioè per calcolare il modulo basta sommare le cifre del numero.

Tornando alla nostra notazione decimale, ossia $\mathcal{B} = 10$, otteniamo esattamente il criterio della prova del 9.

* gli algebristi dicono che $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ è un anello (commutativo con identità)

```c
int mod9 (struct NUMBER num) {
    /* ... */

    int s = 0;
    for (int k = 0; k < l; k++) {       // somma le cifre
        s += num.digits[k];
    }

    /* ... */

    if (result.length > 1) {            // riduce di nuovo se possibile
        return mod9 (result);
    }
    else {
        return (s == 9) ? 0 : s;        // restituisce il modulo ...
    }                                   // ... (se è 9 restituisce 0)
}
```

```c
void cast_out_9 (struct NUMBER num1, struct NUMBER num2, struct NUMBER result) {
    int m1 = mod9 (num1),           // riduce il primo numero
        m2 = mod9 (num2),           // riduce il secondo numero
        mr = mod9 (result);         // riduce il risultato
    int M = (m1 * m2) % 9;

    printf ( (M == mr) ? "correct" : "wrong");  // controlla se sono uguali
}
```

Per l’addizione e la sottrazione si usa lo stesso l’algoritmo (cambiando opportunamente l’operazione).

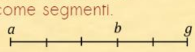
Osservazioni

La prova modulo n non è infallibile: se la prova non torna il risultato è sicuramente sbagliato, ma invece una prova corretta non assicura la correttezza del risultato (ossia ci possono essere falsi positivi).
Per esempio la prova non riesce a distinguere numeri diversi che hanno lo stesso resto. Un altro errore che la prova del 9 in particolare non può individuare è la permutazione delle cifre; infatti il resto modulo 9 dipende solo dalla somma delle cifre, non l'ordine.
Fibonacci non fa menzione di questo fatto.

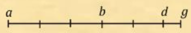
Nel capitolo 3 viene data una dimostrazione geometrica della prova del 9 per la somma.

(III.9 ; G: III.8) Infine per mostrare da dove venga tale prova, siano *ab* e *bg* due numeri che vogliamo sommare insieme, sia quindi *ag* la somma di questi numeri. Dico inoltre che dal resto del numero *ab* sommato col resto del numero *bg* si ha [*il resto di ag*]. Sia in primo luogo che ciascuno dei numeri *ab* e *bg* siano divisi integralmente per 9, e così 9 sarà la misura comune dei numeri *ab* e *bg*. Perciò tutto il numero *ag* si divide interamente per 9 e quindi il resto dello stesso sarà zero, come si è avuto dalla somma dei resti dei numeri *ab* e *bg*.

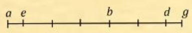
Dimostra la prova del 9 per la somma pensando i numeri come segmenti.



(III.10 ; G: III.9) Ancora uno di essi si divida interamente per 9 e non l'altro e sia il numero *ab* quello che si divide interamente per 9 e dal numero *bg* diviso per 9 rimanga il numero *dg*: quindi i numeri *db* e *ba* sono divisibili interamente per 9. E quindi tutto il numero *da* è divisibile per 9. E poiché il numero *ag* supera il numero *ad* del numero *dg* [NoT], e il numero *ad* è diviso interamente per 9, resterà quindi dal totale il numero *ag*: quindi *dg* [NoT] non divisibile per 9 che viene dalla somma del resto del numero *ab* che è zero con il resto del numero *bg* che è il numero *dg*.



(III.11 ; G: III.10) Di nuovo nessuno dei numeri *ab* e *bg* siano divisibili interamente per 9. Ma dal numero *ab* resti il numero *ae* e dal numero *bg* resti il numero *dg*. Di certo i residui, cioè i numeri *eb* e *bd*, si divideranno interamente per 9. Per cui tutto ed è divisibile, essendo costituito da un qualche insieme di nove: rimarranno quindi indivisibili i numeri *ae* e *dg* da tutto il numero *ag*, che sono i resti dei numeri *ab* e *bg*, dalla somma dei quali proviene il resto del numero *ag* come di doveva mostrare.



Nel capitolo 5 si introducono le prove per altri numeri.

(V.38 ; G: V.82) Infatti le moltiplicazioni, le addizioni, le sottrazioni o le divisioni dei numeri possono essere provati in altro modo con altri resti, cioè con quella del 7 e di tutti i numeri primi esistenti, come per 11 o per 13 e così via. Dimostreremo questa teorianelle pagine seguenti secondo il modo che ci sembrerà conveniente.

Classi dei resti modulo un numero primo

Inoltre viene spiegato che per fare la prova della divisione non si può usare un divisore del divisore.

(V.66 ; G: V.136) Se si volesse verificare tale divisione col resto del 13, si divida il 67898 scritto sopra per 13, resta 12, che si abbia come resto. Dopo ciò, si divida il 38 davanti alla linea di frazione posta per 13, resta 12 che si moltiplichi per l'11 della linea di frazione, e in più si addizioni il 6, che è sopra l'11, farà 138; che si divida per 13, rimane 8; che si moltiplichi per il 10 della linea di frazione e in più si aggiunga il 3 che è sopra il 10, farà 83; che si divida per 13, resta 5; che si moltiplichi per l'8 della linea di frazione e in più ci aggiunga il 5 che è sopra l'8, risulta 45 che si divida per 13, resta 6 che si moltiplichi per il 2 della linea di frazione, risulterà 12, come è stato conservato più sopra come resto. E bisogna stare attenti che nessuno si abitui a fare la prova di qualche divisione per qualche resto di qualche numero che sta sotto la linea di frazione della divisione, perché facilmente potrebbe essere ingannato a causa sua; perciò in questa divisione si proibisce di fare la prova per 11, perché dal resto che rimarrebbe da 38 o da qualsiasi altro numero moltiplicato per l'11, che è sotto la linea di frazione, e diviso per l'11 della prova, non avanzerebbe nulla: quindi non si potrebbe sapere con la prova dell'11, se questo 38 non fosse corretto.

$$b_1 \times \frac{\ldots a_3 a_2 a_1}{\ldots b_3 b_2 b_1} a = \frac{\ldots a_3 a_2}{\ldots b_3 b_2} (a \times b_1 + a_1)$$

Dovendo verificare se a=bq+r dati a e b la prova con un divisore di b non coinvolgerebbe q e quindi sarebbe non significativa

Infatti se B è divisibile per n , allora $[B]_n = 0$. Di conseguenza l'espressione

$$[A] = [B] \times [Q] + [R]$$

può essere soddisfatta da qualsiasi Q (quindi la prova non riuscirebbe a individuare un eventuale errore).

In realtà per evitare questo problema è necessario che il modulo sia coprimo col divisore (ossia non devono avere fattori in comune).
Infatti, se così non fosse, non si potrebbero distinguere tutti i Q che contengono i rimanenti fattori del modulo, dato che $B \times Q$ sarebbe divisibile per il modulo e quindi $[B] \times [Q] = 0$.

Ci si potrebbe chiedere in quali moduli succede che moltiplicare due numeri non nulli dà zero. In Teoria degli Anelli questi numeri sono anche detti divisori di zero e gli anelli che non contengono divisori di zero sono detti domini di integrità.
Il seguente risultato risponde alla nostra domanda:

$$\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} \ \text{è dominio di integrità} \iff p \text{ è primo}$$

Fibonacci sembra consapevole di questo fatto (anche se ovviamente non in questi termini), infatti quando parla della prova per numeri diversi dal 9 si riferisce esplicitamente a numeri primi.

Capitolo 3 – Moltiplicazione “a scacchiera”

Il terzo capitolo è dedicato all’addizione, ma viene anche brevemente esposto un secondo algoritmo per le moltiplicazioni, molto simile a quello usato oggigiorno.

(III.2 ; G: II.101) **E**bbene c’è un altro modo di moltiplicare (PDA) molto pregevole soprattutto per le moltiplicazioni di grandi numeri, che mostrerò nella moltiplicazione di 567 in 4321. Si costruisca un quadrilatero in forma di scacchiera, che abbia cinque posti in lunghezza, cioè uno in più del numero delle figure del numero maggiore, e con tre posti in altezza, quante sono le tre figure del numero minore, e si ponga il numero maggiore sopra il detto quadrilatero, e il minore si ponga davanti ad esso, come qui si vede, e si moltiplichi la prima figura del numero minore, cioè 7, per 1, cioè per la prima del numero maggiore, fa 7, che si ponga al primo posto della linea superiore, cioè sotto l’1, e si moltiplichi 7 per la seconda figura del numero maggiore, cioè per 2, si avrà 14, si ponga il 4 sotto il 2 dopo il 7 posto, cioè al secondo posto della linea superiore, e si tenga l’1, al quale si aggiunga la moltiplicazione di quello stesso 7 in 3, sarà 22, si ponga 2 al terzo posto dopo il 4 messo, e si conservi il 2, al quale si aggiunga la moltiplicazione di 7 per 4, cioè per l’ultima figura del numero maggiore, sarà 30, dal quale si ponga 0 in quarta posizione e 3 nella quinta.

Moltiplicazione “a scacchiera”

2 4 5 0 0 0 7

	4	3	2	1	
3	0	2	4	7	7
2	5	9	2	6	6
2	1	6	0	5	5

(III.3 ; G: II.103) **E** nello stesso modo di moltiplicherà il 6 singolarmente per 1 e per 2 e per 3 e per 4, avremo 6 al primo posto della seconda linea, e 2 nella seconda, e 9 nella terza, e 5 nella quarta, e 2 nella quinta; e lo stesso si faccia del 5 che è in ultima posizione del numero minore, e si avrà 5 al primo posto della terza linea, e 0 nel secondo, e 6 nel terzo, e 1 nel quarto, e 2 nel quinto.

(III.4 ; G: II.104) **P**oi dal 7 che è posto al primo posto si ponga 7 sopra l’1, e si aggiungano 6 e 4 che sono opposti a vicenda; [NdT] dopo quel 7 sarà 10: si ponga lo 0 sopra il 2 e si tenga l’1 che si aggiunga a 5 e a 2 e a 2 che a loro volta sono opposti in croce: dopo i sopraddetti 6 e 4 sarà 10: si ponga di nuovo 0 sopra la terza posizione, cioè sopra il 3 e si tenga di nuovo 1, che si aggiungerà al 6 e il 5 e il 3 che sono nella seguente opposizione: sarà 15; si ponga in quinta posizione e si tenga 1, che si aggiunga a 1 e 2 che sono nella seguente opposizione: sarà 4 che si pone in sesta posizione. Di seguito si ponga 2 in settima posizione per il e che si trova nell’angolo del quadrato dopo la detta opposizione di 1 e 2 e si avrà il prodotto [NdT] prestabilito.

Somma in diagonale, mentre oggi si somma in colonna:

```
    4321 x
     567 =
  -------
   30247
  25926
 21605
 -------
 2450007
```

Siano A e B due numeri rispettivamente di $n+1$ ed $m+1$ cifre

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

$$B = b_m \times 10^m + b_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + b_1 \times 10 + b_0$$

Sfruttando la proprietà associativa (della moltiplicazione) e distributiva (della moltiplicazione rispetto all’addizione) si può scrivere il loro prodotto in questo modo

$$A \times B = A \times (b_m \times 10^m + b_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + b_1 \times 10^1 + b_0 \times 10^0) =$$

$$= (A \times b_m) \times 10^m + (A \times b_{m-1}) \times 10^{m-1} + \cdots + (A \times b_1) \times 10^1 + (A \times b_0) \times 10^0$$

oppure, con una notazione più compatta

$$A \times B = A \times \sum_{i=0}^{m} b_i \times 10^i = \sum_{i=0}^{m} (A \times b_i) \times 10^i$$

Se definiamo

$$P_i = A \times b_i$$

possiamo riscrivere il prodotto come

$$A \times B = \sum_{i=0}^{m} P_i \times 10^i$$

Chiamiamo i P_i prodotti parziali.

Definiamo $p_j^{(i)} = (P_i)_j$ la cifra in posizione j (nella notazione posizionale) di P_i ; inoltre definiamo $p_j^{(i)} = 0$ se j è negativo o se supera la lunghezza di P_i .

Poniamo

$$S_k = \sum_{i=0}^{m} p_{k-i}^{(i)}, \qquad k = 0, \dots, n+m$$

Per ottenere le cifre del risultato applichiamo le solite formule

$$\begin{cases} R_{-1} = 0 \\ R_k = \delta(S_k + R_{k-1}) \end{cases}, \quad k = 0, \dots, n+m$$

$$c_k = \upsilon(S_k + R_{k-1})$$

```
int carry = 0, c1 = 0, c2 = 0, s = 0;           // carry = riporto, c1,c2 = cifre correnti,
                                                // s = accumulatore (per i prodotti parziali)
for (int j = 0; j < l2; j++) {
    carry = 0;
    for (int i = 0; i < lrow; i++) {
        c1 = (i < l1) ? num1.digits[i] : 0 ;    // mette degli 0 prima del numero se serve
        c2 = (j < l2) ? num2.digits[j] : 0 ;

        s = c1 * c2 + carry;                    // calcola la cifra del prodotto parziale

        M[j][i] = get_last_digit (s);           // estrae l'ultima cifra e la posiziona nella matrice
        carry = (int) (s / 10);                 // calcola il riporto successivo
    }
}


int c_j = 0;                                    // c_j = cifra corrente del prodotto parziale
carry = 0;                                      // carry = riporto
for (int k = 0; k < lmax; k++) {
    s = 0;                                      // s = accumulatore (per le cifre del risultato)
    for (int j = 0; j < l2; j++) {              // somma in colonna i prodotti parziali
        c_j = ((k-j >= 0) && (k-j < l1+1)) ? M[j][k-j] : 0 ;
            // riempe la matrice con degli 0 prima e dopo i prodotti parziali
        s += c_j;
    }
    s += carry;                                 // aggiunge il riporto

    d[k] = get_last_digit (s);                  // estrae l'ultima cifra e la posiziona nel risultato
    carry = (int) (s / 10);                     // calcola il riporto successivo
}
```

Le righe della matrice M contengono le cifre dei prodotti parziali.
Il primo blocco calcola i prodotti parziali e nel secondo vengono fatte le somme per calcolare le cifre del risultato.

Osservazioni

Osserviamo che l’algoritmo di Fibonacci differisce da quello usato oggi solo nel modo di disporre i numeri, in particolare i prodotti parziali (lui li somma in diagonale, mentre noi sommiamo in colonna).

Esempio

(III.2 ; G: II.101) Ebbene c'è un altro modo di moltiplicare (PdA) molto pregevole soprattutto per le moltiplicazioni di grandi numeri, che mostrerò nella moltiplicazione di 567 in 4321. Si costruisca un quadrilatero in forma di scacchiera, che abbia cinque posti in lunghezza, cioè uno in più del numero delle figure del numero maggiore, e con tre posti in altezza, quante sono le tre figure del numero minore, e si ponga il numero maggiore sopra il detto quadrilatero, e il minore si ponga davanti ad esso, come qui si vede, e si moltiplichi la prima figura del numero minore, cioè 7, per 1, cioè per la prima del numero maggiore, fa 7, che si ponga al primo posto della linea superiore, cioè sotto l'1, e si moltiplichi 7 per la seconda figura del numero maggiore, cioè per 2, si avrà 14, si ponga il 4 sotto il 2 dopo il 7 posto, cioè al secondo posto della linea superiore, e si tenga l'1, al quale si aggiunga la moltiplicazione di quello stesso 7 in 3, sarà 22, si ponga 2 al terzo posto dopo il 4 messo, e si conservi il 2, al quale si aggiunga la moltiplicazione di 7 per 4, cioè per l'ultima figura del numero maggiore, sarà 30, dal quale si ponga 0 in quarta posizione e 3 nella quinta.

(III.3 ; G: II.103) E nello stesso modo di moltiplicherà il 6 singolarmente per 1 e per 2 e per 3 e per 4, avremo 6 al primo posto della seconda linea, e 2 nella seconda, e 9 nella terza, e 5 nella quarta, e 2 nella quinta; e lo stesso si faccia del 5 che è in ultima posizione del numero minore, e si avrà 5 al primo posto della terza linea, e 0 nel secondo, e 6 nel terzo, e 1 nel quarto, e 2 nel quinto.

(III.4 ; G: II.104) Poi dal 7 che è posto al primo posto si ponga 7 sopra l'1, e si aggiungano 6 e 4 che sono opposti a vicenda; [NdT] dopo quel 7 sarà 10: si ponga lo 0 sopra il 2 e si tenga l'1 che si aggiunga a 5 e a 2 e a 2 che a loro volta sono opposti in croce: dopo i sopraddetti 6 e 4 sarà 10: si ponga di nuovo 0 sopra la terza posizione, cioè sopra il 3 e si tenga di nuovo 1, che si aggiungerà al 6 e il 5 e il 3 che sono nella seguente opposizione: sarà 15; si ponga in quinta posizione e si tenga 1, che si aggiunga a 1 e 2 che sono nella seguente opposizione: sarà 4 che si pone in sesta posizione. Di seguito si ponga 2 in settima posizione per il e che si trova nell'angolo del quadrato dopo la detta opposizione di 1 e 2 e si avrà il prodotto [NdT] prestabilito.

Moltiplicazione
"a scacchiera"

2 4 5 0 0 0 7

	4	3	2	1	
3	0	2	4	7	7
2	5	9	2	6	6
2	1	6	0	5	5

Somma in diagonale,
mentre oggi
si somma in colonna:

```
   4321 x
    567 =
  -------
   30247
  25926
 21605
 -------
 2450007
```

```
4321
567

----------

004321
000567

30247
25926
21605

0  7 0 0  = 7
0  4 6 0  = 10
1  2 2 5  = 10
1  0 9 0  = 10
1  3 5 6  = 15
1  0 2 1  = 4
0  0 0 2  = 2

2450007

----------

4321 % 9 = 1
567 % 9 = 0
2450007 % 9 = 0

correct

===  "molt_scacchiera.exe" ===
```

Capitolo 3 – Addizione di numeri interi

Nel terzo capitolo Fibonacci spiega come sommare due numeri interi.

> (III.1 ; G: III.1) Quando inoltre qualcuno abbia voluto sommare numeri quali voglia e per quanti possano essere, li metta nella tavola, secondo ciò che abbiamo detto prima riguardo alle moltiplicazioni dei numeri, cioè la prima posizione di tutti i numeri che abbia voluto sommare sotto la prima dello stesso che sia stato posto prima nella somma. E il secondo sotto il secondo, e così via per i seguenti. E allora cominci a contare nelle mani i numeri delle figure che sono nelle prime posizioni di tutti i numeri che siano stati posti in unione, salendo dal numero inferiore al superiore: ponga così le unità sopra la prima posizione dei numeri e tenga in mano le decine, a queste decine aggiunga i numeri che saranno trovati in seconda posizione, e ponga le unità sopra la seconda posizione e di nuovo conservi le decine. A questi aggiunga il calcolo dei numeri di terza posizione e così, ponendo le unità e tenendo le decine, contando i numeri passo a passo, si può avere il calcolo di tutti i numeri fino all'infinito. E perché si capisca meglio, si mostrino le somme di due numeri, e anche di tre, e così pure di molti.
>
> Come si esegue la somma di più numeri

Siano A e B due numeri entrambi di $n+1$ cifre

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

$$B = b_n \times 10^n + b_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + b_1 \times 10 + b_0$$

Sfruttando le proprietà associativa, commutativa (dell'addizione) e distributiva (della moltiplicazione rispetto all'addizione) si può scrivere la loro somma in questo modo

$$\begin{aligned} A + B &= (a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0) + \\ &\quad (b_n \times 10^n + b_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + b_1 \times 10^1 + b_0 \times 10^0) = \\ &= (a_n + b_n) \times 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) \times 10^{n-1} + \\ &\quad \cdots + (a_1 + b_1) \times 10^1 + (a_0 + b_0) \times 10^0 \end{aligned}$$

oppure, con una notazione più compatta

$$A + B = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i \right) + \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \times 10^j \right) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \times 10^k$$

Se i due numeri hanno un diverso un numero di cifre, si aggiungono tanti 0 davanti al più piccolo quanti servono per pareggiarli. Infatti qualsiasi numero si può pensare

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k \times 10^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \times 10^k$$

dove $a_k = 0$ per $k > n$.

Ponendo

$$S_k = a_k + b_k$$

si ottengono le cifre del risultato applicando le solite formule viste sopra.

```
    int carry = 0, c1 = 0, c2 = 0, s = 0;          // carry = riporto, c1,c2 = cifre correnti,
                                                   // s = accumulatore (per le somme parziali)
    for (int k = 0; k < lmax; k++) {
        c1 = (k < l1) ? num1.digits[k] : 0 ;       // mette degli 0 prima del numero se serve
        c2 = (k < l2) ? num2.digits[k] : 0 ;

        s = c1 + c2 + carry;                       // calcola la cifra del risultato

        d[k] = get_last_digit (s);                 // estrae l'ultima cifra e la posiziona nel risultato
        carry = (int) (s / 10);                    // calcola il riporto successivo
    }
```

Esempio

(III.6 ; G: III.5) Ancora se si volesse sapere la somma di 123 con 4567, si scrivano come qui si vede, e si sommi 7 con 3, sarà 10; si ponga 0 e si tenga 1 che si sommi con 6 e con 2, sarà 9 che si ponga. Ancora si sommi il 5 con l'1 che è in terza posizione, sarà 6 che si ponga sopra la stessa posizione, e per il 4 che si trova in quarta posizione del numero inferiore si ponga 4 in quarta posizione della somma risultante, non essendoci qualche altra figura sopra lei stessa nell'altro numero, cioè nel 123; e così si avrà per la loro addizione 4690.

4	6	9	0
	1	2	3
4	5	6	7

```
4567
123

----------

04567
00123

7 + 3 + 0 = 10
6 + 2 + 1 = 9
5 + 1 + 0 = 6
4 + 0 + 0 = 4
0 + 0 + 0 = 0

4690

----------

4567 % 9 = 4
123 % 9 = 6
4690 % 9 = 1

correct

===  "addizione.exe"  ===
```

Capitolo 4 – Sottrazione di numeri interi

Nel quarto capitolo Fibonacci spiega come sottrarre due numeri interi.

(IV.1 ; G: IV.1) Quando anche qualcuno volesse sottrarre un numero da un numero, scriva il numero minore sotto il maggiore, collocando le posizioni simili sotto le simili, e cominci a sottrarre la prima figura del numero minore dalla prima del maggiore; e ponga il numero restante sopra le prime figure. E si sottragga la seconda dalla seconda e si ponga il resto sopra la seconda, e la terza dalla terza. E le rimanenti dalle rimanenti in ordine, ponendo sempre i resti.

Come si esegue la sottrazione

(IV.2 ; G: IV.2) E quando la figura del numero minore non si potrà sottrarre dal numero maggiore, perché quella del numero minore è più grande di quella del maggiore nella stessa posizione: allora alla figura del numero maggiore va sommato dieci, e dal numero sommato sarà sottratta la figura del numero minore. E per la somma di detta decina si dovrà conservare in mano l'unità. E questa sarà da sommare alla figura successiva del numero minore e la quantità creata, se sarà possibile, sarà da sottrarre dalla figura superiore della stessa posizione: altrimenti la si sottragga dopo aver aggiunto una decina, come abbiamo detto sopra: e così gradualmente si dovrà procedere operando fino all'ultima figura del numero minore: e se il numero maggiore supererà in posizioni il minore, le figure presenti in quelle posizioni dovranno [NdT] essere poste saranno poste alla fine. E così si avrà il residuo di qualsiasi sottrazione di numeri.

La decina presa "in prestito" quando serve per fare la sottrazione invece di essere tolta dal minuendo viene aggiunta al sottraendo.

Ripetendo l'algoritmo dell'addizione mettendo – al posto di + , otteniamo

$$A - B = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i\right) - \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \times 10^j\right) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) \times 10^k$$

Poniamo

$$S_k = \begin{cases} a_k - b_k & \text{se } a_k \geq b_k \\ (a_k + 10) - (b_k + p_{k-1}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$p_k = \begin{cases} 0 & \text{se } a_k \geq b_k \text{ o } k = -1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove p_k rappresenta il prestito.
Si ottengono le cifre del risultato applicando le solite formule viste sopra.

```
int borrow = 0, carry = 0,          // borrow = prestito, carry = riporto, c1,c2 = cifre correnti,
    c1 = 0, c2 = 0, s = 0;          // s = accumulatore (per le differenze parziali)

for (int k = 0; k < lmax; k++) {
    c1 = (k < l1) ? num1.digits[k] : 0 ;       // mette degli 0 prima del numero se serve
    c2 = (k < l2) ? num2.digits[k] : 0 ;
    c2 += carry;                               // aggiunge il riporto (dovuto ad un eventuale prestito)

    borrow = (c1 < c2) ? 1 : 0;                // controlla se serve fare il prestito
    s = (c1 + borrow*10) - c2;                 // calcola la cifra del risultato

    d[k] = get_last_digit (s);                 // estrae l'ultima cifra e la posiziona nel risultato
    carry = borrow;                            // calcola il riporto successivo
}
```

Osservazioni

Per quanto riguarda i prestiti Fibonacci aggiunge 1 alle cifre del sottraendo

$$\begin{aligned} &\cdots + (a_{k+1} - b_{k+1}) \times 10^{k+1} + (a_k - b_k) \times 10^k + \cdots = \\ = &\cdots + (a_{k+1} - (b_{k+1} + 1)) \times 10^{k+1} + ((a_k + 10) - b_k) \times 10^k + \cdots \end{aligned}$$

mentre nell’algoritmo che viene insegnato oggi si toglie 1 dalle cifre del minuendo

$$\begin{aligned} &\cdots + (a_{k+1} - b_{k+1}) \times 10^{k+1} + (a_k - b_k) \times 10^k + \cdots = \\ = &\cdots + ((a_{k+1} - 1) - b_{k+1}) \times 10^{k+1} + ((a_k + 10) - b_k) \times 10^k + \cdots \end{aligned}$$

Chiaramente i due metodi sono equivalenti.

Al tempo di Fibonacci i numeri negativi non erano contemplati: c’era molta diffidenza e superstizione nei loro confronti (e in parte anche per la cifra 0).

Esempio

(IV.6 ; G: IV.7) Ancora se al contrario volessimo sottrarre 92 da 380, scritto 92 sotto 380 e essendo impossibile sottrarre 2 da 0 si aggiunga 10 al medesimo 0, sarà 10, dal quale si sottragga 2 che è nel numero minore, rimane 8 che si ponga e per il 10 sommato si tenga in mano 1, che si sommi al 9, sarà 10 che dovrebbe essere sottratto da 8, se fosse possibile, ma non essendolo, si sottragga da 18, rimane 8 che si ponga e si tenga 1, che si sottragga da 3, rimane 2 che si ponga, e così si avrà 288 come risultato della detta sottrazione.

288
380
92

```
380
92

----------

380
092

10 - 2 = 8
18 - 10 = 8
3 - 1 = 2

288

----------

380 % 9 = 2
92 % 9 = 2
288 % 9 = 0

correct

===  "sottrazione.exe" ===
```

Capitolo 5 – Numeri fratti

Nel quinto capitolo Fibonacci presenta i numeri “rotti” (o fratti). Questi vengono rappresentati con diversi tipi di frazioni.

Si parte dalle frazioni a cui siamo abituati (che qui saranno chiamate frazioni semplici od ordinarie);

(V.2 ; G: V.2) **Q**uando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato [*denominatore*] e quello superiore è chiamato denominante [*numeratore*] [NdT] . Così se sopra al numero 2 sia stata tracciata una linea, e sopra di essa sia scritta l'unità, questa unità attesta una parte delle due parti dell'uno intero, cioè la metà così: $\frac{1}{2}$ e se l'unità fosse stata posta sopra al numero 3 così: $\frac{1}{3}$ denota la terza [*parte*]; e se sopra al numero 7 così: $\frac{1}{7}$ la settima; e se sopra al 10, la decima, e se sopra al 19, intende una diciannovesima parte dell'uno intero, e così di seguito. Ancora se 2 è stato messo sopra il 3 così , $\frac{2}{3}$ intende due parti delle tre parti dell'uno intero, cioè due terzi. E se è sopra il 7 due settimi così: $\frac{2}{7}$ e se sopra il 23 indicheranno due ventitreesimi, e così via. Ancora se il sette sia stato posto sopra il nove così , $\frac{7}{9}$ indica sette noni dell'uno intero; e se il sette è sopra il 97, denoterà sette novantasettesimi. Ancora il 13 posto sopra il 29, indica tredici ventinovesimi. E se 13 è sopra 347, indicherà tredici trecentoquarantasettesimi, e così è da intendere per i restanti numeri.

Il significato di numeratore e denominatore.

vengono poi introdotte le frazioni multiple;

(V.3 ; G: V.6) **A**ncora se sotto una stessa linea siano stati posti più numeri, e sopra ciascuno di quegli stessi si scriveranno altri numeri, il numero che sia stato posto sopra il numero all'inizio della parte destra della linea, indicherà la parte o le parti del numero stesso posto sotto, come abbiamo già detto. Quello dunque sopra il secondo esprime le parti dello stesso secondo delle parti del primo numero posto sotto. Quello poi sopra il terzo indica le parti di questo terzo delle parti del secondo delle parti del primo, e così sempre quelli che seguiranno sopra la linea denotano le parti di tutte le parti precedenti sotto la linea, così, se sotto una qualche linea ci sono 2 e 7 e sopra il 2 ci sia 1 e sopra il 7 ci sia 4 come qui si vede $\frac{1\ \ 4}{2\ \ 7}$, si denotano quattro settimi e la metà di un settimo. Se però sopra il 7 ci fosse zero, così : $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 7}$, si indicherebbe solo la metà di un settimo.

Introduce le frazioni multiple

$$\frac{\ldots a_3 a_2 a_1}{\ldots b_3 b_2 b_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_3}{b_1 b_2 b_3} + \ldots$$

$$\frac{1\ \ 4}{2\ \ 7} = \frac{4}{7} + \frac{1}{14} = \frac{9}{14}$$

ed infine delle frazioni un po' più esoteriche.

(V.5 ; G: V.12) **E** se nella linea ci saranno più rotti e questa linea sarà terminata con un cerchietto, allora le sue frazioni indicheranno altro di quanto è stato detto, come in questa linea: $\frac{2\ \ 4\ \ 6\ \ 8}{3\ \ 5\ \ 7\ \ 9}\circ$, le cui frazioni indicano otto noni di un intero e sei settimi di otto noni, e quattro quinti di sei settimi di otto noni e due terzi di quattro quinti di sei settimi di otto noni dell' uno intero. E se questa linea terminasse dall'altra parte con il cerchietto, così: $\circ\frac{8\ \ 6\ \ 4\ \ 2}{9\ \ 7\ \ 5\ \ 3}$, denoterebbe solo due terzi di quattro quinti di sei settimi di otto noni dell'uno intero. Ancora se dei trattini si prolungassero sulla linea in questo modo $\frac{\underline{1}\ \ \underline{1}\ \ \underline{1}\ \ 5}{5\ \ 4\ \ 3\ \ 9}$, le sue frazioni denotano cinque noni e un terzo e un quarto e un quinto di un nono. Comprese così queste cose, come si vede sotto, si scrivano i riquadri predetti imparandoli a mente con grande studio.

Introduce vari tipi di frazioni

$$\frac{\cdots a_3 a_2 a_1}{\cdots b_3 b_2 b_1}\circ = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_3}{b_3} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_1}{b_1} + \cdots$$

$$\circ\frac{a_n \cdots a_3 a_2 a_1}{b_n \cdots b_3 b_2 b_1} = \frac{a_n}{b_n} \times \cdots \times \frac{a_3}{b_3} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_1}{b_1}$$

$$\frac{\underline{1}\ \ \underline{1}\ \ \underline{1}\ \ 5}{5\ \ 4\ \ 3\ \ 9} = \frac{5}{9} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{9} = \frac{347}{540}$$

Ecco i vari tipi di frazioni in notazione moderna (espansa e compatta). *

$$
\begin{aligned}
\frac{A_n \quad \cdots \quad A_1 \quad A_0}{B_n \quad \cdots \quad B_1 \quad B_0} &= \frac{A_0}{B_0} + \left(\frac{A_1}{B_1} \times \frac{1}{B_0}\right) + \cdots + \left(\frac{A_n}{B_n} \times \ldots \times \frac{1}{B_0}\right) \\
&= \frac{A_0}{B_0} + \frac{A_1}{B_1 \times B_0} + \cdots + \frac{A_n}{B_n \times \ldots \times B_0} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{\prod_{i=0}^{k} B_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_n \quad \cdots \quad A_1 \quad A_0}{B_n \quad \cdots \quad B_1 \quad B_0} o &= \frac{A_0}{B_0} + \left(\frac{A_1}{B_1} \times \frac{A_0}{B_0}\right) + \cdots + \left(\frac{A_n}{B_n} \times \ldots \times \frac{A_0}{B_0}\right) \\
&= \frac{A_0}{B_0} + \frac{A_1 \times A_0}{B_1 \times B_0} + \cdots + \frac{A_n \times \ldots \times A_0}{B_n \times \ldots \times B_0} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k} A_i}{\prod_{i=0}^{k} B_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
o\,\frac{A_n \quad \cdots \quad A_1 \quad A_0}{B_n \quad \cdots \quad B_1 \quad B_0} &= \frac{A_0}{B_0} \times \frac{A_1}{B_1} \times \ldots \times \frac{A_n}{B_n} \\
&= \frac{A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n}{B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_n} \\
&= \frac{\prod_{i=0}^{n} A_i}{\prod_{i=0}^{n} B_i}
\end{aligned}
$$

---

* non è stato trattato il caso delle frazioni con i trattini, dato che non era chiaro quale fosse la forma generale

```c
struct FRACTION {        // frazione semplice
    int num;             // numeratore
    int den;             // denominatore
};
```

```c
struct multFRACTION {   // frazione multipla
    int* num;            // numeratori
    int* den;            // denominatori
    int length;          // numero di frazioni
    int circle;          // cerchietto
};
```

Le frazioni multiple sono rappresentate tramite due vettori, che contengono rispettivamente i numeratori e i denominatori, ordinati al contrario (cioè da destra verso sinistra).
La variabile `circle` codifica la presenza o meno del cerchietto: se è minore di 0 (tipicamente -1) significa che non c'è, se è 0 significa che si trova a sinistra, se è maggiore di 0 significa che si trova a destra.

Per rappresentare la parte frazionaria di un numero, Fibonacci usa i "rotti dell'unità", ossia le frazioni proprie. Quindi il numero $123{,}456$ *, che in notazione posizionale (decimale) è da interpretarsi come

$$123{,}456 = 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 + 4 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100} + 6 \times \frac{1}{1000} =$$
$$= 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3}$$

Fibonacci lo pensa come

$$\begin{aligned} 123{,}456 \quad &= 123 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} = \\ &= 123 + \frac{6 \quad\ 5 \quad\ 4}{10 \quad 10 \quad 10} \end{aligned}$$

e lo scrive così

$$\frac{6 \quad\ 5 \quad\ 4}{10 \quad 10 \quad 10}123$$

---

* sto usando la virgola come separatore decimale

Questa notazione è ancora usata oggi nei paesi anglosassoni e viene chiamata numero misto (o frazione mista).
Lo spazio vuoto è da leggersi “e”, rappresenta quindi un segno + omesso (mentre spesso in algebra si usa al posto del puntino $\cdot$ che rappresenta un prodotto).

```
struct mixedNUMBER {               // numero misto
    int pint;                          // parte intera
    struct multFRACTION pfrac;         // parte frazionaria
};
```

Approfondimenti *

[…]

Più avanti Fibonacci definisce altri tipi di frazioni, per lo più scomparse dalla letteratura matematica moderna, una delle quali, particolarmente utilizzata nel corso del *Liber*, è quella che noi proponiamo di chiamare frazione multipla graduata. Si tratta di frazioni nelle quali compaiono uno stesso numero (maggiore o uguale a uno) di numeratori e denominatori.

> *Le frazioni, che sono in una sola linea, sono dette essere in posizione (in gradibus), e la prima posizione di quelle è la frazione che è all’inizio della linea nella parte destra.*
> *La seconda posizione è la frazione che segue verso sinistra.* (V.4)

Una frazione multipla di secondo grado è una frazione che si scrive

$$\frac{A_1 \quad A_0}{B_1 \quad B_0}$$

dove

> *Il numero che sia stato posto sopra il numero all’inizio della parte destra della linea, indicherà la parte o le parti del numero stesso posto sotto, come abbiamo già detto. Quello dunque sopra il secondo esprime le parti dello stesso secondo, delle parti del primo numero posto sotto.*

---

* parti di questo paragrafo sono tratte (opportunatamente adattate) dalla seguente scheda

Così l'espressione $\frac{A_1 \quad A_0}{B_1 \quad B_0}$ è una espressione abbreviata per descrivere una quantità ottenuta secondo il seguente preciso procedimento: l'uno intero viene diviso in B_0 parti e di queste se ne prendono A_0 , ma a queste si aggiungono un certo numero A_1 di parti più piccole ottenute dividendo ogni parte precedente in ulteriori B_1 parti.

Dunque

$$\frac{A_1 \quad A_0}{B_1 \quad B_0} = \frac{A_0}{B_0} + \frac{A_1}{B_1 \times B_0}$$

In generale possiamo avere frazioni multiple di grado grande quanto si vuole: dividiamo l'unità in B_0 parti poi dividiamo ognuna di queste parti in B_1 e ognuna di queste in B_2 e così via; fatto questo prendiamo A_0 parti del primo tipo, a queste sommiamo A_1 parti del secondo tipo, e poi A_2 parti del terzo e così via.
Otteniamo una frazione multipla di grado $n + 1$ definita dalla formula:

$$\frac{A_n \quad \cdots \quad A_2 \quad A_1 \quad A_0}{B_n \quad \cdots \quad B_2 \quad B_1 \quad B_0} =$$
$$= \frac{A_0}{B_0} + \frac{A_1}{B_1 \times B_0} + \frac{A_2}{B_2 \times B_1 \times B_0} + \cdots + \frac{A_n}{B_n \times \ldots \times B_2 \times B_1 \times B_0}$$

Fibonacci suggerisce di ordinare i denominatori in ordine decrescente da destra a sinistra

$$B_n \leq B_{n-1} \leq \cdots \leq B_0$$

Notiamo che, in questo caso le parti che via via si aggiungono diventano sempre più piccole crescendo i denominatori in forma "esponenziale". Ciò permette, come vedremo, di approssimare una frazione con numeri più "significativi".

Come caso particolare, spesso considerato in Fibonacci, si ha quando i numeratori sono tutti nulli tranne l'ultimo: ovviamente

$$\frac{1}{B_n \times B_{n-1} \times \ldots \times B_0} = \frac{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}{B_n \quad B_{n-1} \quad \cdots \quad B_0}$$

[…]

Le frazioni multiple sono molto comode quando certe unità di misura sono divise in parti e le parti in altre parti. Ad esempio ai tempi di Fibonacci la libra, che era una unità di conto molto diffusa, era divisa in 20 soldi e un soldo in 12 denari.
Se a denota un certo numero di denari allora la frazione $\frac{a}{240}$ di libra scritta come frazione graduata fornirà il numero di libre, di soldi e di denari complessivi.
Ad esempio la frazione

$$\frac{9\quad 5}{12\quad 20}7$$

rappresenta una somma di 7 libre e 5 ventesimi di libra e 9 duecento quarantesimi di libra, cioè 7 libre 5 soldi e 9 denari.

Ugualmente una giornata è divisa in 24 ore, ogni ora in 60 minuti e ogni minuto in 60 secondi quindi il tempo in giorni dato dall'espressione

$$\frac{9\quad 7}{60\quad 24}2 = 2 + \frac{7}{24} + \frac{9}{60 \times 24}$$

rappresenta 2 giorni, 7 ventiquattresimi di un giorno (cioè 7 ore) e 9 mille quattrocento quarantesimi di giorno (cioè 9 minuti).
"Infilzando i rotti" [cioè passando alla frazione semplice] si ottiene il numero complessivo 429 minuti.

[…]

Una frazione multipla i cui numeratori sono minori dei denominatori, in analogia con quelle ordinarie, si dice propria. Saranno queste quelle generalmente trattate da Fibonacci.

È intanto possibile semplificare queste frazioni graduate in modo che $A_i < B_i \;\; \forall i$.

Dim.

Supponiamo che

$$A_i < B_i \,, \qquad k-1 \leq i \leq n$$

e che $A_k \geq B_k$.

Dividiamo A_k per B_k , otteniamo

$$A_k = B_k \times Q_k + R_k \,, \qquad 0 \leq R_k < B_k$$

Passando alle frazioni abbiamo:
[indicando con $\mathcal{B} = B_{k-1} \times \ldots \times B_0$]

$$\begin{aligned} \cdots + \frac{A_{k-1}}{\mathcal{B}} + \frac{A_k}{B_k \times \mathcal{B}} + \cdots \quad &= \cdots + \frac{A_{k-1}}{\mathcal{B}} + \frac{B_k \times Q_k + R_k}{B_k \times \mathcal{B}} + \cdots \\ &= \cdots + \frac{A_{k-1}}{\mathcal{B}} + \frac{Q_k}{\mathcal{B}} + \frac{R_k}{B_k \times \mathcal{B}} + \cdots \\ &= \cdots + \frac{A_{k-1} + Q_k}{\mathcal{B}} + \frac{R_k}{B_k \times \mathcal{B}} + \cdots \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo sistemato la frazione k-esima senza modificare le frazioni con indice maggiore. Una semplice induzione a scendere, permette di formalizzare l’argomento semplificando via via le frazioni fino ad arrivare alla prima frazione.

■

La logica di questa dimostrazione è molto intuitiva. Pensando ancora all’esempio dei conti, se abbiamo più di 12 denari possiamo, per ogni 12 denari aumentare di uno il numero dei soldi fino a quando il numero dei denari è minore di 12, ugualmente se abbiamo più di 20 soldi possiamo per ogni 20 soldi aumentare il numero delle libre fino a quando il numero dei soldi è più piccolo di 20.

Per induzione sul grado della frazione multipla, possiamo verificare che

$$A_i < B_i \ \ \forall i \quad \Longrightarrow \quad \frac{A_n \quad A_{n-1} \quad \cdots \quad A_1 \quad A_0}{B_n \quad B_{n-1} \quad \cdots \quad B_1 \quad B_0} < 1$$

Dim.

La cosa è vera per $n = 1$ [abbiamo una frazione semplice propria].

Per ipotesi induttiva abbiamo

$$\frac{A_n \quad A_{n-1} \quad \cdots \quad A_0}{B_n \quad B_{n-1} \quad \cdots \quad B_0} = \frac{A}{B} < 1$$

[in particolare $B = B_n \times B_{n-1} \times \ldots \times B_0$], *
e dobbiamo verificare che la stessa cosa avviene aumentando di uno il grado.

Possiamo riscrivere il caso induttivo come

$$\frac{A_{n+1} \quad A_n \quad A_{n-1} \quad \cdots \quad A_0}{B_{n+1} \quad B_n \quad B_{n-1} \quad \cdots \quad B_0} = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1} \times (B_n \times B_{n-1} \times \ldots \times B_0)} + \frac{A_n \quad A_{n-1} \quad \cdots \quad A_0}{B_n \quad B_{n-1} \quad \cdots \quad B_0}$$

$$= \frac{A_{n+1}}{B_{n+1} \times B} + \frac{A}{B} = \frac{A_{n+1} + A \times B_{n+1}}{B_{n+1} \times B}$$

dove $A_{n+1} < B_{n+1}$ per ipotesi e $A < B$ per ipotesi induttiva.

Ma

$$A_{n+1} + A \times B_{n+1} < B_{n+1} + A \times B_{n+1} = B_{n+1} \times (1 + A) \leq B_{n+1} \times B$$

[abbiamo usato che A e B sono numeri interi, quindi $A < B \implies A + 1 \leq B$].

■

* per capire meglio come passare da frazioni multiple a frazioni semplici,
vedi la prossima sezione sull'algoritmo per "infilzare i rotti"

Capitolo 5 – “Infilzare i rotti”

Cerchiamo di capire come passare da frazioni multiple a frazioni semplici e viceversa.

> *Nei trattati d'abaco successivi, dal Trattato di Aritmetica di Paolo dall'Abaco, ca. 1350, fino al Trattato d'Aritmetica di Giuseppe Maria Figatelli, pubblicato nel 1664 e ristampato più volte per tutto il Settecento, il procedimento di passaggio dalla frazione multipla a quella ordinaria si ritrova sotto il nome di "infilzare i rotti". Il passaggio inverso, dalla frazione ordinaria alla multipla (o come si diceva, ai rotti in filza) è chiamato dal Figatelli "traslatare dei rotti".*
>
> Enrico Giusti e altri
> *Un ponte sul mediterraneo. Leonardo pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*

Fibonacci non espone esplicitamente un algoritmo per “infilzare i rotti”; in parte perché preferisce lavorare con le frazioni multiple, in parte perché è implicito nella definizione di frazione multipla.
Invece per “traslatare i rotti” si può usare l’algoritmo della divisione (in particolare quello basato sulla scomposizione del denominatore).

Qui vediamo come “infilzare i rotti”.

$$
\begin{aligned}
\frac{A_n \quad \cdots \quad A_1 \quad A_0}{B_n \quad \cdots \quad B_1 \quad B_0} &= \frac{A_0}{B_0} + \frac{A_1}{B_1 \times B_0} + \cdots + \frac{A_n}{B_n \times \ldots \times B_0} \\
&= \frac{A_0 \times (B_1 \times \ldots \times B_n) + A_1 \times (B_2 \times \ldots \times B_n) + \cdots + A_n}{B_0 \times \ldots \times B_n} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n} (A_k \times \prod_{i=k+1}^{n} B_i)}{\prod_{k=0}^{n} B_k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_n \quad \cdots \quad A_1 \quad A_0}{B_n \quad \cdots \quad B_1 \quad B_0} o &= \frac{A_0}{B_0} + \frac{A_1 \times A_0}{B_1 \times B_0} + \cdots + \frac{A_n \times \ldots \times A_0}{B_n \times \ldots \times B_0} \\
&= \frac{A_0 \times (B_1 \times \ldots \times B_n) + (A_0 \times A_1) \times (B_2 \times \ldots \times B_n) + \cdots + (A_0 \times \ldots \times A_n)}{B_0 \times \ldots \times B_n} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n} (\prod_{i=0}^{k} A_i \times \prod_{i=k+1}^{n} B_i)}{\prod_{k=0}^{n} B_k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
o \frac{A_n \quad \cdots \quad A_1 \quad A_0}{B_n \quad \cdots \quad B_1 \quad B_0} &= \frac{A_0}{B_0} \times \frac{A_1}{B_1} \times \ldots \times \frac{A_n}{B_n} \\
&= \frac{A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n}{B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_n} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n} A_k}{\prod_{k=0}^{n} B_k}
\end{aligned}
$$

Dalla forma compatta è facile implementare un algoritmo per la conversione.

```
int a, b;                                 // a = numeratore, b = denominatore
//-----------------------------------------------------------------------------------------
if (frac.circle < 0) {                  // senza cerchietto
    b = 1;
    for (int k = 0; k < l; k++) {             // moltiplica i denominatori
        b *= frac.den[k];
    }

    a = 0;
    for (int k = 0; k < l; k++) {
        int n = frac.num[k];                  // parte dal k-esimo numeratore ...
        for (int i = k+1; i < l; i++) {       // ... e moltiplica per i denominatori che vengono dopo
            n *= frac.den[i];
        }
        a += n;                               // aggiunge i prodotti parziali
    }
}
//-----------------------------------------------------------------------------------------
else if (frac.circle == 0) {            // cerchietto a sinistra
    a = 1;
    b = 1;
    for (int k = 0; k < l; k++) {
        a *= frac.num[k];                     // moltiplica i numeratori
        b *= frac.den[k];                     // moltiplica i denominatori
    }
}
//-----------------------------------------------------------------------------------------
else {                                  // cerchietto a destra
    b = 1;
    for (int k = 0; k < l; k++) {             // moltiplica i denominatori
        b *= frac.den[k];
    }

    a = 0;
    for (int k = 0; k < l; k++) {
        int n = frac.num[k];                  // parte dal k-esimo numeratore, ...
        for (int i = 0; i < k; i++) {         // ... moltiplica per i numeratori che vengono prima ...
            n *= frac.num[i];
        }
        for (int i = k+1; i < l; i++) {       // ... e moltiplica per i denominatori che vengono dopo
            n *= frac.den[i];
        }
        a += n;                               // aggiunge i prodotti parziali
    }
}
```

Capitolo 5 – Divisione di numeri interi

Nel quinto capitolo Fibonacci spiega come dividere due numeri interi.

Vengono distinti due casi a seconda che il divisore sia un numero primo o composto. Qui vedremo l'algoritmo che Fibonacci usa quando il divisore è primo.

Dopo aver mostrato una tabella delle divisioni per i numeri più piccoli (simile alle tavole pitagoriche dell'addizione e della moltiplicazione), viene spiegato come dividere numeri arbitrariamente grandi per numeri di una cifra;

Come si esegue la divisione di un qualsiasi numero intero per un numero di una cifra

(V.6 ; G: V.25) Conosciute dunque le divisioni scritte sopra e approfondite in modo ottimo con un frequente esercizio di ciò e se qualcuno volesse dividere qualunque numero di qualunque posizione per uno qualunque dei numeri suddetti, cioè di quelli che vanno da due fino a dieci, scriva il numero sulla tavola, e ponga la figura, figura per la quale abbia voluto dividere il numero, sotto la prima posizione del numero stesso; e inizi la divisione dall'ultima figura del numero e la divida, se sarà possibile, per il numero della figura per la quale abbia voluto dividere il numero, ponendo [*il quoziente della*] divisione più in basso sulla tavola sotto la medesima ultima posizione: e se dalla divisione avanzasse qualcosa, ponga tale avanzo sopra la medesima ultima figura; e lo unisca con figura successiva, e divida queste due figure, come se formassero un numero di due figure, e ponga il quoziente della divisione sotto la stessa figura successiva; e se ci fosse un avanzo, lo scriva sopra di essa. E così, unendo sempre nell'ordine qui sopra descritto, l'avanzo alla figura seguente, e ponendo il numero che sia risultato dalla divisione, e scrivendo l'avanzo più in su, procedendo passo a passo, si giungerà fino alla prima figura del numero.

(V.7 ; G: V.27) In verità, poiché spesso succede che le figure per le quali i numeri saranno divisi siano maggiori delle ultime figure degli stessi numeri, allora, non essendo possibile dividere questo numero per quelle, cominci la divisione dalle ultime figure, e da quelle successive; e le divida unite nel modo sopra descritto, e ponga il quoziente sotto le penultime, e proceda a calcolare, come abbiamo detto precedentemente, dagli avanzi fino alla fine: se non ci sarà un avanzo qualunque, divida solo la figura stessa, che si insegna ad unire finché si troverà l'avanzo: e se non potrà dividere quella figura, perché è minore di quella stessa per la quale si divide, ponga sotto di essa uno zero, e la aggiunga tutta intera come avanzo unendola alla figura successiva; e così avrà le quantità di qualunque delle dette divisioni.

poi viene spiegato come dividere per numeri primi di due cifre;

Divisione per un numero primo di due cifre

(V.23 ; G: V.55) Se allora qualcuno volesse dividere un numero qualsiasi per un numero qualunque di quelli scritti sopra, che siano senza regola, scriva il numero sulla tavola e sotto di esso ponga il numero primo stesso per il quale voleva dividere, collocando (se mai)ogni posizione simile sotto alla simile, e veda se le due ultime figure del numero da dividere faranno un numero più grande, o uguale, o minore dello stesso numero primo per il quale il numero sarà diviso. E se faranno un numero maggiore o uguale, l'ultima posizione del numero risultante deve cominciare sotto l'ultima posizione successiva (la posizione che segue l'ultima) del numero da dividere, cioè sotto la penultima, e proprio lì ponga a giudizio tale figura, che moltiplicata per quel numero divisore, faccia come risultato il numero delle due ultime figure dette prima, o pressappoco.

(V.24 ; G: V.57) E allora moltiplicherà questa per l'ultima figura dello stesso numero primo, cioè del divisore, e sottragga il risultato dall'ultima figura. E se dovesse avanzare qualcosa, scriva l'avanzo sopra la figura stessa. E moltiplichi la stessa figura posta per la prima dello stesso numero primo, cioè del divisore, e sottragga la moltiplicazione dall'unione del detto avanzo e della penultima figura, e se il resto fosse un numero di due figure, cioè più grande di 10, ponga la prima posizione di quel numero sopra la penultima figura, e l'ultima sopra l'ultima. Se poi questo avanzo fosse in prima posizione, cioè minore di 10, ponga la figura dello stesso sopra la penultima, e unisca questo avanzo con la terza figura dall'ultima. E sotto questa terza figura ponga a giudizio tale figura, che moltiplicata per lo stesso divisore dia il numero di detta unione, o quasi: come sia questo giudizio, si abbia dalla perizia; farò in modo di mostrare nelle seguenti divisioni, secondo le loro differenze.

(V.25 ; G: V.58) E allora moltiplichi la stessa figura posta sotto la terza per l'ultima del divisore, e sottragga il risultato, se sarà possibile, dall'ultima posizione del detto avanzo e del numero congiunto. Ma se lo sottrarrà dall'unione dell'ultima figura con la seguente, ponga il resto sopra la medesima posizione. E moltiplichi di nuovo la stessa per la prima del divisore, e sottragga il risultato dal numero rimanente, e ponga al di sopra l'avanzo. E così si applichi a procedere unendo sempre gli avanzi con le figure (seguenti) per le posizioni seguenti, e ponendo secondo giudizio le figure sotto le stesse posizioni, e moltiplicando secondo l'ordine prescritto finché si sarà arrivati alla fine del numero.

(V.26 ; G: V.60) Ma poiché spesso succederà che non si potrà sottrarre il numero divisore dall'unione dell'avanzo e della figura antecedente, allora si dovrà scrivere lo zero sotto la stessa figura antecedente e si uniranno essi, cioè all'antecedente o al seguente, e (al)l'altro all'avanzo, la figura antecedente o seguente, e sotto di essa si ponga quella figura che moltiplicata per il numero divisore farà il numero di quelle dette tre figure, e delle due figure antecedenti o seguenti, cioè delle stesse che risulteranno dall'unione della figura dell'avanzo e delle due figure antecedenti o conseguenti. Per cui se le due ultime figure del dividendo faranno un numero minore del divisore, come abbiamo detto prima, l'ultima posizione del numero risultante dovrà cominciare sotto la terza figura dall'ultima; e così potrai dividere qualunque numero per i suddetti numeri primi. E perché le cose dette siano capite meglio, saranno mostrate con i numeri.

e infine, in fondo al capitolo, viene spiegato come dividere per numeri primi di tre cifre e vengono mostrati degli esempi con quattro.

Vediamo l'algoritmo nel caso il divisore abbia un numero arbitrario di cifre (inoltre osserviamo che non è necessario che il divisore sia un numero primo).

Siano A e B due numeri rispettivamente di n ed m cifre e tali che $A \geq B$

$$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

$$B = b_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + b_1 \times 10 + b_0$$

Supponiamo di avere due funzioni $\chi(\,\cdot\,, B)$ e $\rho(\,\cdot\,, B)$ che restituiscono rispettivamente il quoziente e il resto della divisione per B di un numero A tale che $A < B \times 10$ (in particolare A possiede al più $m+1$ cifre).

Quindi possiamo scrivere

$$A = B \times \chi(A, B) + \rho(A, B)$$

Inoltre per definizione abbiamo che

$$0 \leq \chi(A, B) < 10, \qquad 0 \leq \rho(A, B) < B$$

Definiamo ricorsivamente i dividendi parziali A_k e i loro resti

$$A_k = a_k + R_{k+1} \times 10\,, \qquad \begin{cases} R_n = 0 \\ R_k = \rho(A_k, B) \end{cases}$$

per $k = n-1, \dots, 0$.

Osserviamo che R_k è ben definito in quanto vale $A_k < B \times 10$; infatti

$$A_{n-1} = a_{n-1} < 10 \leq B \times 10 \;\; *$$

$$A_k = a_k + R_{k+1} \times 10 < 10 + R_{k+1} \times 10 = (1 + R_{k+1}) \times 10 \leq B \times 10 \;\; **$$

Dividiamo A_k per B

$$A_k = B \times \chi(A_k, B) + R_k$$

e poniamo

$$q_k = \chi(A_k, B)$$

---

* ovviamente $B \neq 0$

** stiamo usando il fatto che $R_{k+1} < B$ e sono numeri interi

Il quoziente della divisione è dato da $Q = \sum_{k=0}^{n-1} q_k \times 10^k$ e il resto da R_0 .

Verifichiamo la correttezza di quanto detto, cioè che valga

$$A = B \times Q + R_0$$

Dim.

Basta sostituire le formule

$$\begin{cases} A_{n-1} = a_{n-1} \\ A_k = a_k + R_{k+1} \times 10, \qquad 0 \le k < n-1 \end{cases}$$

$$A_k = B \times q_k + R_k, \qquad 0 \le k \le n-1$$

nell'espressione di A :

$$\begin{aligned} A &= a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 = \\ &= A_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + (A_1 - R_2 \times 10) \times 10 + (A_0 - R_1 \times 10) = \\ &= (B \times q_{n-1} + R_{n-1}) \times 10^{n-1} + \cdots + (B \times q_1 + R_1 - R_2 \times 10) \times 10 \\ &\qquad + (B \times q_0 + R_0 - R_1 \times 10) = \\ &= B \times (q_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + q_1 \times 10 + q_0) \\ &\qquad + (R_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + R_1 \times 10 - R_2 \times 10^2 + R_0 - R_1 \times 10) = \\ &= B \times Q + R_0 \end{aligned}$$

la somma dei resti è telescopica, come si vede bene in notazione compatta

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \times 10^k = A_{n-1} \times 10^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (A_k - R_{k+1} \times 10) \times 10^k =$$

$$= (B \times q_{n-1} + R_{n-1}) \times 10^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (B \times q_k + R_k - R_{k+1} \times 10) \times 10^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (B \times q_k) \times 10^k + R_{n-1} \times 10^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (R_k \times 10^k - R_{k+1} \times 10^{k+1}) =$$

$$= B \times \sum_{k=0}^{n-1} q_k \times 10^k + R_0$$

$\blacksquare$

Per questo algoritmo invece di usare la struttura `mixedNUMBER`, è stata definita una struttura che svolge lo stesso ruolo ma mette meglio in evidenza le cifre.

```
struct DIVresult {               // numero misto
    struct NUMBER pint;              // parte intera
    struct NUMBER pfrac_num;         // numeratore
    struct NUMBER pfrac_den;         // denominatore
};
```

```
for (int k = lmax-1; k >= 0; k--) {

    shift (small, r[k]);                        // riposiziona il dividendo

    int q = 0;
    while (geq (small, num2)) {                 // finché il dividendo è maggiore ...
        detract (&small, num2);                 // ... sottrai il divisore
        q++;
    }

    d[k] = q;                                   // posiziona il quoziente parziale nel risultato
    for (int j = 0; j < small.length; j++) {    // aggiorna i resti
        r[k+j] = small.digits[j];
    }
}
```

I dividendi parziali vengono memorizzati nel vettore `small`. A ogni iterazione viene spostato di una posizione verso destra lungo le cifre del dividendo (in realtà è il vettore dei resti inizializzato con le cifre del dividendo).

La divisione parziale è stata implementata sottraendo ripetutamente il divisore finché il dividendo non è più piccolo. I quozienti parziali vanno a formare le cifre del quoziente finale.

Infine vengono aggiornati i resti. L’ultimo resto sarà il resto finale.

Osservazioni

Il funzionamento dell'algoritmo si basa sulla capacità di dividere per B numeri minori di $B \times 10$ (cioè di saper calcolare la funzione $\chi(\cdot, B)$).

Fibonacci non dà un metodo sistematico per fare ciò, ma usa delle euristiche caso per caso per cercare di approssimare il dividendo parziale con il divisore.

(V.23 ; G: V.55) **S**e allora qualcuno volesse dividere un numero qualsiasi per un numero qualunque di quelli scritti sopra, che siano senza regola, scriva il numero sulla tavola e sotto di esso ponga il numero primo stesso per il quale voleva dividere, collocando (se mai)ogni posizione simile sotto alla simile, e veda se le due ultime figure del numero da dividere faranno un numero più grande, o uguale, o minore dello stesso numero primo per il quale il numero sarà diviso. E se faranno un numero maggiore o uguale, l'ultima posizione del numero risultante deve cominciare sotto l'ultima posizione successiva (la posizione che segue l'ultima) del numero da dividere, cioè sotto la penultima, e proprio lì ponga a giudizio tale figura, che moltiplicata per quel numero divisore, faccia come risultato il numero delle due ultime figure dette prima, o pressappoco.

Divisione per un numero primo di due cifre

(V.27 ; G: V.62) **S**e qualcuno volesse dividere 18456 per 17, scriva il 17 sotto il 56 di 18456, e prenda $\frac{1}{17}$ da 18 che sono le ultime due figure del numero da dividere che è 1, e resta 1; e ponga 1 sotto l'8 dello stesso 18, e ponga l'1 rimanente sopra l'8, come è mostrato nella prima descrizione. E unisca lo stesso 1 con la figura antecedente, cioè con 4, farà 14 ed essendo questo 14 minore del numero divisore, cioè di 17, porrà 0 sotto lo stesso 4, cioè anteposto all'1 sotto l'8 e unirai questo 14 con la figura antecedente, cioè col 5, farà 145: porrà così sotto il detto 5 con giudizio una figura, tale che moltiplicata per 17 faccia circa 145:

Prima descrizione

	1			
1	8	4	5	6
			1	7
	1	0		

(V.28 ; G: V.63) **I**nfatti che tale giudizio si abbia da un criterio , si veda dal numero divisore, cioè da 17, a quale numero delle decine è più vicino: è infatti più vicino a 20: si divida quindi 145 per 20, che si fa in questo modo: si tralasci la prima figura del 20, cioè lo zero, dello stesso 20 rimarrà 2; e si tralasci ancora la prima figura di 145, cioè 5, resterà 14, che si divida per il detto 2, risulterà 7; e tale deve essere la figura che dovrà porre sotto il 5 o 1 in più, cioè 8 e ciò accade perché 17 è minore di 20: per cui $\frac{1}{17}$ di 145 è una parte maggiore di $\frac{1}{20}$ [*di 145*].

Come trovare 145 diviso 17.

Per esempio, nella divisione per numeri di una cifra si avvale della tabellina all'inizio del capitolo; nella divisione per numeri di due cifre approssima per eccesso o per difetto a seconda di qual è il multiplo di 10 più vicino al divisore.

(V.34 ; G: V.72) **M**ostrata pertanto la questione del dover decidere sulla posizione delle figure, quando dividiamo per 17 e per 19, mostriamo in particolare ora in che modo decidere nel porre le figure, volendo dividere per i restanti numeri primi al di sotto di cento. E questo è il modo, come quando dividiamo per 17 o per 19, prendiamo la metà del numero da dividere, tolta la prima figura, e [NdT] anche uno in più: questo poiché 17 e 19 sono minori di 20, come abbiamo già detto; così quando divideremo per 23, prenderemo la metà, e anche uno in meno, poiché 23 è maggiore di 20; e così quando divideremo per 29, dovremo prendere la terza [*parte*] e anche uno in più, poiché 29 è minore di 30, al quale è più vicino che ad altre decine. E così quando divideremo per 31, dovremo prendere la terza parte e anche uno in meno. E così nello stesso modo quando divideremo per 37, dovremo prendere la quarta parte e anche uno in più. E quando divideremo per 41 o per 43, dovremo prendere la quarta parte e anche uno in meno. E quando divideremo per 47, dovremo prendere la quinta parte e anche uno in più. E quando per 53, la quinta parte e anche uno in meno; e quando per 59, la sesta e anche uno in più. E quando per 61, la sesta e anche uno in meno. Quando per 67, la settima e anche uno in più. Quando per 71 o per 73, la settima e anche uno in meno. E quando per 79, dobbiamo prendere l'ottava e anche più. E quando per 83, l'ottava e anche uno meno. E quando per 89, dobbiamo prendere la nona, e anche uno in più. E quando divideremo per 97, dobbiamo prendere la decima parte del numero da dividere, tolta una figura, e anche uno in più. Per cui quando qualcuno dividerà un qualsiasi numero per uno qualunque di quelli scritti sopra, e non saprà se debba dare più o meno di quanto abbiamo detto, ponga quella parte che gli si mostra più sopra, e moltiplichi quella stessa parte per il numero del divisore, e se la moltiplicazione fosse maggiore del dividendo, ne dia uno in meno. E se la moltiplicazione sarà minore più di quanto debba, ne dia uno in più; e così potrà dividere qualunque numero per i numeri suddetti. Tuttavia noi spiegheremo ugualmente tutto questo in alcune divisioni.

Spiega come dividere un numero per un numero primo di due cifre approssimando il divisore per eccesso o per difetto.

Per fare la prova del 9 per la divisione basta verificare

$$[A] = [\ [[B] \times [Q]] + [R]\ ]$$

Bisogna stare attenti ai problemi di divisibilità di cui abbiamo già parlato nella sezione sulla prova (per Fibonacci non è un problema dato che per dividere per numeri composti usa un altro algoritmo).

Osserviamo che l'algoritmo di Fibonacci è sostanzialmente quello che viene usato ancora oggi (a meno della disposizione dei numeri e dei passaggi intermedi, che Fibonacci fa a mente). C'è una differenza importante però.

Per noi il risultato della divisione è costituito da due numeri Q e R tali che

$$A = B \times Q + R$$

non a caso questa divisone viene chiamata *divisione con resto*.

Per Fibonacci il risultato è un unico numero misto che incapsula sia il quoziente che il resto

$$\frac{R}{B}Q$$

La divisione quindi è sempre esatta, e l'uso delle frazioni per indicare la parte frazionaria è analogo al nostro mettere le cifre "dopo la virgola".

Esempio

Divisione di 13976 per 23

(V.35 ; G: V.76) Ugualmente se qualcuno volesse dividere 13976 per 23, ponga il 23 sotto il 76; e poiché il 23 è maggiore di 13, cioè più del numero delle due ultime figure del numero da dividere, devono essere calcolate le tre ultime figure il cui numero è 139. Dal quale deve iniziare l'ultima posizione del numero risultante sotto il 9 stesso; vi si ponga il 6 che si troverà così per mezzo del detto giudizio, visto che dobbiamo lasciare [*da parte*] la prima figura dal 139, cioè il 9, resta 13 che dobbiamo dividere per 2 poiché 23 è più vicino a 20 che a qualsiasi altra decina, risulterà sei e mezzo (PDA). Dal quale togliamo quel mezzo, dovendo porre di meno poiché 23 è più di 20 e poniamo 6 sotto il 9, come abbiamo detto; e si moltiplichi questo 6 per il 2 di 23, farà 12, che si toglierà dal 13, resta 1 che va posto sopra il 3 e si unisca col 9, farà 19. E si moltiplichi il 6 per il 3 che è nel 23, farà 18, che si sottragga dal 19, resta 1 che va posto sopra il 9 come si vede nella prima descrizione.

(V.36 ; G: V.78) E si unisca questo 1 con il 7 che lo precede nei numeri, farà 17; e poiché questo 17 è minore di 23, bisogna porre lo zero sotto quel 7 e bisogna unire il 6 in prima posizione del numero con il 17 stesso , farà 176: dopo di ciò si ponga sotto il detto 6 una figura tale che moltiplicata per 23 faccia quasi 176; e sarà 7 per il suddetto motivo, che è meno della metà di 17: si moltiplichi così questo 7 per il 2 che è nel 23, farà 14 che va sottratto da 17, resta 3, che si ponga sopra il 7 e lo si unisca con il 6 in prima posizione, farà 36, da cui si sottragga la moltiplicazione di 7 per il 3 di 23, resta 15 che si ponga sopra la linea di frazione del 23 conservato a parte, come si descrive in questa ultima descrizione.

Prima descrizione

```
    1
1   3   9   7   6
            2   3
        6
```

Ultima

```
                    3
            1   1   7
1           3   9   7   6
                    2   3
                6   0   7
15/23       6   0   7
```

Prova della divisione scritta sopra

(V.37 ; G: V.80) Se poi si volesse verificare la divisione scritta sopra con il resto del nove, si prenda il resto di 13976, che è 8, e si conservi da parte. E ancora si prenda il resto del risultato, cioè di 607, che è 4, e lo moltiplichi per il resto di 23 che è 5, risulterà 20; dal quale prenda il resto, è 2, e lo sommi col 15 che è sopra la linea del 23, farà 17 il cui resto è 8 come quello che abbiamo conservato prima da parte. Per esempio, poiché dal divisore moltiplicato per il risultato si ottiene il numero diviso, allora se moltiplichiamo la prova del divisore per la prova del risultato avremo la prova del numero diviso: ma dal numero diviso per 23 rimase 15, sottratto il quale da 13976 resta 13961, che diviso per 23 dà 607. Quindi dalla moltiplicazione di 23 per 607 si ha 13961. Perciò se si moltiplica il resto di 607 che è 4 per la prova di 23 che è 5, si ha 20 la cui prova, cioè 2, è la prova di 13961, alla quale si somma la prova del 15 messo sopra che è 6, fa 8, cioè la prova di 13976, e questo volli dimostrare.

Verifica con la prova del 9 l'esattezza della divisione

13976-15=607x23

```
13976
23

----------

13976
00023

001 - 23 * 0 = 001
013 - 23 * 0 = 013
139 - 23 * 6 = 001
017 - 23 * 0 = 017
176 - 23 * 7 = 015

15/23 607

----------

13976 % 9 = 8
23 % 9 = 5
607 % 9 = 4
15 % 9 = 6

correct

===  "divisione.exe" ===
```

Capitolo 5 – Divisione per numeri composti

Vediamo ora il secondo algoritmo di divisione.

(V.44 ; *G*: V.99) **P**oiché sembra che sia stato detto abbastanza sulla divisione dei numeri per i numeri di due figure che sono senza regola, cioè hasam, adesso invero si mostrino le loro divisioni per quelli che sono composti, cioè con regola; e sebbene dividere per i numeri composti è come dividere tutti i numeri per quelli primi, tuttavia in maniera più leggera e sottile, nelle pagine seguenti se ne mostra la dottrina, cioè come si trovino le loro regole. Cioè i numeri dai quali sono composti, e si pongano sotto un qualche linea di frazione, così che sempre i minori seguano i maggiori verso sinistra, come si insegna sopra in questo stesso capitolo: dopo questo si divida un numero che si dividere per il minore tra i componenti del divisore, cioè per il numero minore o la figura che sia stata messa sotto la linea di frazione; e se avanzerà qualcosa, lo si ponga sopra la stessa figura o numero, e il numero che risulta dalla divisione si divida per il numero antecedente, o la figura nella linea di frazione, e l'avanzo, se ci sarà, si ponga sopra quello stesso numero o figura antecedente. E così si applichi sempre a dividere sempre con metodo i numeri risultanti dalla divisione per i componenti antecedenti, fino ad arrivare alla fine degli stessi; e si devono porre gli avanzi sopra e si abitui a porre il risultato della divisione dell'ultima componente, cioè dell'ultimo numero che sta sotto la linea di frazione, davanti ad essa. E così si avrà la divisione di qualunque numero per qualunque numero fatta per qualunque numero composto di qualsiasi posizione. Infatti prima di chiarire tutto ciò con le dimostrazioni abbiamo giudicato necessario mostrare come trovare le composizioni dei numeri composti e anche di quelli che sono senza regola. Ed essendo già mostrati in una certa tabella messa sopra i numeri di due figure che sono senza regola, si mostrino in modo simile i divisori dei composti di due figure, singolarmente sotto la linea di frazione; mostreremo poi come trovare mediante una regola le composizioni delle altre posizioni.

Algoritmo per eseguire la divisione per un numero composto.

Prima di tutto Fibonacci spiega come scomporre un numero in fattori primi

(V.46 ; *G*: V.104) **Q**uando inoltre qualcuno abbia appreso per l'uso frequente le regole dei numeri scritti precedentemente nelle tavole, e abbia voluto trovare le regole, cioè le composizioni di qualunque numero [*come prodotto di fattori*] tra gli altri numeri di tre o più figure, o quale fosse un numero primo, cioè senza [NoT] regola, scriva il numero nella tavola, e dopo averlo scritto veda se il numero sia pari o dispari. Infatti, se sarà pari, si sappia che questo è composto. Se invece è dispari, sarà composto, oppure primo. Infatti i numeri pari sono composti o da pari e dispari, o solo da pari. Pertanto le regole di questi sono da trovare in primo luogo dai numeri pari, come sarà dimostrato a suo luogo. I numeri dispari invece sono composti solo da dispari. Per cui si cerchino le componenti stesse solo per mezzo dei dispari, dai quali prendiamo inizio.

Scomposizione di un numero in fattori primi

(V.47 ; *G*: V.106) **E** così quando una figura di prima posizione di un qualunque numero dispari fosse 5, si sappia che è composta dal 5, cioè che si può interamente dividere per 5. Se invece in prima posizione ci fosse un'altra figura dispari che rende dispari tutto il numero, acquisisca il resto per nove di esso, che se sarà zero, allora $\frac{1}{9}$ sarà nella sua composizione, e se sarà 3 o 6 allora ci sarà $\frac{1}{3}$; se invece il resto non sarà nessuno di questi, lo divida per 7; e se resterà qualcosa divida di nuovo il numero per 11 e se resterà qualcosa lo divida per 13 e sempre vada dividendo per i numeri primi in ordine, secondo come sono scritti nella tavola trascritta sopra, finché si troverà un qualche numero primo, per il quale si possa dividere il numero proposto senza alcun avanzo, o finché si arriverà alla radice del numero stesso: se non potrà essere diviso per nessuno di questi, allora questo numero sarà indicato come primo. Se invece si sarà potuto dividere per qualcuno dei predetti numeri primi senza avanzo, si divida ancora per lo stesso ciò che è risultato dalla divisione e si divida ancora il numero che è risultato dalla divisione per lo stesso numero primo, perché dal medesimo si comincerà a cercare le sue componenti in ordine per i restanti numeri primi fino alla sua radice, se questo non avrà composizione; e si vada avanti facendo sempre così, finché esso abbia avuto tutte le componenti. Avuti questi in modo perfetto, si impari a collocare con grande diligenza i minori prima dei maggiori sotto una linea di frazione. E così si avrà la regola, cioè la composizione di qualunque numero dispari.

Da una procedura per decomporre un numero intero nel prodotto di fattori primi.

(V.55 ; *G*: V.119) **S**e poi qualcuno volesse trovare la regola di un qualche numero pari, prenda in modo simile il suo resto per 9, che se sarà 0, avrà $\frac{1}{9}$. E se sarà 3 o 6 avrà $\frac{1}{6}$ nella sua composizione, se invece il resto non sarà nessuno di questi, veda quale sarà il resto dividendo per 8 il numero delle due figure che sono in prima e seconda posizione: se questo sarà 0, e la figura in terza posizione sarà pari, o 2 o 4 o 6 0 8, o 0, sappia che tutto il numero in qualunque posizione può essere diviso per 8. Se invece questa terza figura sarà dispari, come 1 o 3 o 5 o 7 o 9, lo stesso numero avrà $\frac{1}{4}$ nella sua composizione. Se poi quell'avanzo [*dividendo per 8*] sarà 4, e la figura in terza posizione sarà dispari, tutto il numero si dividerà in modo simile per 8. E se [*il numero in terza posizione*] sarà pari avrà solo $\frac{1}{4}$ nella sua composizione. Se invece quell'avanzo [*dividendo per 8*] sarà 2, o 6, il numero si dividerà, fra tutti i numeri pari, solo per 2.

$a=2a_0 + a_1\times10 + a_2\times10^2 + \ldots$

per $n>2$

$10^n = 8 \times 5^3 \times 10^{n-3}$

levando i multipli di 8 resta:

$2a_0 + a_1\times10 + a_2\times10^2$

(V.56 ; *G*: V.121) **E** in base a ciò prenda le composizioni pari dei numeri pari, fino ad avere la regola dello stesso , o incontri qualche numero dispari: del quale dispari si impegni a trovare la regola secondo il sovrascritto ordine dei numeri dispari. In verità se in prima posizione di qualunque numero pari ci sarà 0, lo tolga, e al suo posto metta 1/10 nella composizione di quel numero. E se sarà rimasto un altro 0 all'inizio del numero, lo si tolga ancora dal numero , e si avrà ancora 1/10 nella composizione dello stesso numero. E così sempre si deve intendere, finché lo 0 sarà all'inizio del numero. E affinché si capiscano più chiaramente le cose che sono state dette sulla ricerca delle regole dei numeri pari, queste siano mostrate con spiegazioni numeriche.

Quello di Fibonacci è un metodo a tentativi (*trial division*).

```
int factorize_rec (int n, list* ptx_head) {         // funzione ricorsiva
    int p = 2;                                          // parte da 2
    while (p*p <= n) {                                  // basta arrivare al quadrato di n
        if (n % p == 0) {                               // controlla se n è divisibile per p ...
            add_front (ptx_head, p);                    // ... in caso lo aggiunge alla lista ...
            return factorize_rec (n/p, ptx_head) + 1;   // ... e continua a fattorizzare
        }
        p++;
    }
    add_front (ptx_head, n);
    return 1;
}

int* factorize (int M) {
    list denlist = NULL;                                // lista per memorizzare i fattori trovati
    int l = 0;

    if (M != 1) {                                       // finché ci sono fattori ...
        l += factorize_rec (M, &denlist);               // ... li aggiunge alla lista
    }

    int* denvec = calloc (l+1, sizeof(int));
    copy (denlist, denvec);                             // ricopia tutto in un array
    denvec[l] = -1;

    free_list (denlist);

    return denvec;
}
```

Per comodità la fattorizzazione è stata divisa in due funzioni: la prima si occupa di gestire tutte le strutture coinvolte e la seconda calcola ricorsivamente i fattori primi. In particolare viene usata una lista per contenere temporaneamente i fattori trovati, così da poter contare quanti sono; dopo viene creato un vettore (allocato dinamicamente) dove ricopiare i fattori, che sarà l'oggetto restituito dalla funzione (per ricavare la lunghezza del vettore successivamente, viene posto un -1 alla fine).

Fibonacci non lascia i numeri decomposti in fattori primi, ma preferisce ricomporre i fattori che non superano 10 perché "è più bello".

Per questa procedura non c'è un algoritmo (Fibonacci sembra che la faccia a intuito), ma è stata implementata nella funzione `simple_den` *.

---

* della quale non riporto il codice perché è particolarmente lungo (e brutto)

Da qui in poi non lavoriamo più direttamente sulle cifre, ma pensiamo i numeri come un tutt'uno; i passaggi delle operazioni viste prima saranno sottointesi.

Per evidenziare questo cambiamento, i numeri saranno implementati come `int` e verranno usate le operazioni native del C: +, -, *, / e % (resto).

Siano A e B due numeri e sia

$$B = B_1 \times \ldots \times B_n \,, \qquad B_1 \leq \cdots \leq B_n$$

una fattorizzazione di B (non è necessario che i fattori siano primi).

Dividiamo ricorsivamente A per i fattori di B definendo

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_k = A_{k-1}/B_k \end{cases} , \qquad k = 1, \ldots, n$$
$$R_k = A_{k-1} \% B_k$$

cioè

$$A_{k-1} = B_k \times A_k + R_k \,, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Il risultato della divisione tra A e B sarà il seguente numero misto

$$\frac{R_1 \quad \cdots \quad R_n}{B_1 \quad \cdots \quad B_n} A_n$$

Dim.

Basta verificare

$$A = B \times \left(\frac{R_1 \quad \cdots \quad R_n}{B_1 \quad \cdots \quad B_n} A_n \right)$$

(ricordiamo che per Fibonacci la divisione è esatta).

Per definizione di frazione multipla

$$\frac{R_1 \quad \cdots \quad R_{n-1} \quad R_n}{B_1 \quad \cdots \quad B_{n-1} \quad B_n} A_n = A_n + \frac{R_n}{B_n} + \frac{R_{n-1}}{B_{n-1} \times B_n} + \cdots + \frac{R_1}{B_1 \times \ldots \times B_n}$$

Quindi

$$\left(\frac{R_1 \quad \cdots \quad R_{n-1} \quad R_n}{B_1 \quad \cdots \quad B_{n-1} \quad B_n} A_n \right) \times B = A_n \times \prod_{i=1}^{n} B_i + \sum_{k=1}^{n} \left(R_k \times \prod_{i=1}^{k-1} B_i \right)$$

Osserviamo che per $h = 1, \ldots, n$ vale

$$A_h \times \prod_{i=1}^{h} B_i + R_h \times \prod_{i=1}^{h-1} B_i = (A_h \times B_h + R_h) \times \prod_{i=1}^{h-1} B_i = A_{h-1} \times \prod_{i=1}^{h-1} B_i$$

dove abbiamo usato la definizione di A_h .

Applicando ripetutamente questa formula, si mostra (per induzione) che

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_1 \quad \cdots \quad R_{n-1} \quad R_n}{B_1 \quad \cdots \quad B_{n-1} \quad B_n} A_n \right) \times B \quad &= A_n \times \prod_{i=1}^{n} B_i + \sum_{k=1}^{n} \left(R_k \times \prod_{i=1}^{k-1} B_i \right) \\ &= \cdots \\ &= A_{n-j} \times \prod_{i=1}^{n-j} B_i + \sum_{k=1}^{n-j} \left(R_k \times \prod_{i=1}^{k-1} B_i \right) \\ &= \cdots \\ &= A_0 \end{aligned}$$

ma $A_0 = A$.

■

```
int* denvec = simple_den (factorize (n2));          // fattorizza il divisore
int l = length_vec (denvec);

/* ... */

int m = n1;
for (int k = l-1; k >= 0; k--) {
    result.pfrac.num[k] = m % result.pfrac.den[k];  // calcola il resto e lo posiziona nel numeratore
    m /= result.pfrac.den[k];                       // effettua la divisione
}
result.pint = m;                                    // resto della divisione
```

Osservazioni

L'algoritmo per la prova in questo caso è un po' diverso. Inoltre bisogna tenere conto dei problemi di divisibilità già visti nella sezione della prova del 9.

```c
void cast_out_X (int n1, struct mixedNUMBER result) { // prova
    int l = result.pfrac.length;
    int p = find_prime (result.pfrac.den, l);      // trova un numero primo diverso dai denominatori

    int m1 = n1 % p;                               // riduce il dividendo
    int mr = result.pint % p;                      // riduce la parte intera
    for (int k = 0; k < l; k++) {
        mr *= result.pfrac.den[k];                 // moltiplica per il denominatore, ...
        mr += result.pfrac.num[k];                 // ... aggiunge il numeratore ...
        mr = mr % p;                               // ... e riduce di nuovo
    }

    printf ( (m1 == mr) ? "correct" : "wrong");
}
```

La funzione `find_prime` restituisce il più piccolo primo diverso dai denominatori. In realtà, per come è implementata (parte a cercare da 7), questo numero è anche coprimo con tutti i denominatori (ricordiamo che per come li scrive Fibonacci, gli unici fattori della "regola" che non sono primi sono minori o uguali a 10).

Per fare meno conti, Fibonacci osserva che se ci sono dei fattori in comune tra dividendo e divisore, questi si possono semplificare.

> (V.67 ; G: V.138) *E* si sappia che per dividere i numeri c'è un'altra dottrina, cioè quando il numero da dividere ha una parte in comune con il divisore, cioè il fatto che il numero dividendo si può dividersi integralmente per qualche numero, o numeri che sono secondo la regola del divisore. Allora dapprima si divida il numero per il numero della composizione che il dividendo stesso avrà nella linea di frazione del divisore, sia che sia il maggiore nella linea di frazione, sia che sia il minore: infatti quando si sarà diviso questo per quello, dalla divisione non ci sarà alcun resto. E affinché ciò si comprenda più chiaramente, questo si mostri con i numeri nel seguito.

Per semplicità e per chiarezza (di come venga scomposto il divisore) questo non è stato implementato negli algoritmi.

Esempio

Divisione di 67898 per 1760

(V.65 ; G: V.135) Ma se si volesse dividere 67898 per 1760, trovata la regola di 1760, che è $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 8\ \ 10\ \ 11}$, si divida 67898 per 2, risulterà 33949, e resta 0; si ponga questo 0 sopra il 2 e si divida 33949 per 8, farà 4243 e resta 5, si ponga questo 5 sopra l'8 della linea di frazione, e si divida 4243 per 10, risulterà 424 e resta 3, cioè come se si togliesse la figura in prima posizione di 4243; si divida questo 424 per 11, farà 38 e resta 6, si ponga questo 6 sopra l'11 della linea di frazione e si ponga il 38 davanti alla linea di frazione; e così si otterrà, per la divisione richiesta $\frac{0\ \ 5\ \ 3\ \ 6}{2\ \ 8\ \ 10\ \ 11}38$.

$1760 = 2 \times 8 \times 10 \times 11$

Prova della divisione sovrascritta

(V.66 ; G: V.136) Se si volesse verificare tale divisione col resto del 13, si divida il 67898 scritto sopra per 13, resta 12, che si abbia come resto. Dopo ciò, si divida il 38 davanti alla linea di frazione posta per 13, resta 12 che si moltiplichi per l'11 della linea di frazione, e in più si addizioni il 6, che è sopra l'11, farà 138; che si divida per 13, rimane 8; che si moltiplichi per il 10 della linea di frazione e in più si aggiunga il 3 che è sopra il 10, farà 83; che si divida per 13, resta 5; che si moltiplichi per l'8 della linea di frazione e in più ci aggiunga il 5 che è sopra l'8, risulta 45 che si divida per 13, resta 6 che si moltiplichi per il 2 della linea di frazione, risulterà 12, come è stato conservato più sopra come resto. E bisogna stare attenti che nessuno si abitui a fare la prova di qualche divisione per qualche resto di qualche numero che sta sotto la linea di frazione della divisione, perché facilmente potrebbe essere ingannato a causa sua; perciò in questa divisione si proibisce di fare la prova per 11, perché dal resto che rimarrebbe da 38 o da qualsiasi altro numero moltiplicato per l'11, che è sotto la linea di frazione, e diviso per l'11 della prova, non avanzerebbe nulla: quindi non si potrebbe sapere con la prova dell'11, se questo 38 non fosse corretto.

$$b_1 \times \frac{\ldots a_3 a_2 a_1}{\ldots b_3 b_2 b_1} a = \frac{\ldots a_3 a_2}{\ldots b_3 b_2} (a \times b_1 + a_1)$$

Dovendo verificare se
a=bq+r dati a e b
la prova con un divisore di b non coinvolgerebbe q e quindi sarebbe non significativa

```
67898
1760

----------

1760 = 2x8x10x11

67898 = 2 x 33949 + 0
33949 = 8 x 4243 + 5
4243 = 10 x 424 + 3
424 = 11 x 38 + 6

0,5,3,6/2,8,10,11|38

----------

mod 7

67898 % 7 = 5
38 -> 3
3 x 11 + 6 -> 4
4 x 10 + 3 -> 1
1 x 8 + 5 -> 6
6 x 2 + 0 -> 5

correct

===  "composto.exe" ===
```

Notare che la funzione `find_prime` ha trovato 7 come primo per fare la prova, mentre Fibonacci usa 13.

Capitoli 6 e 7 – Operazioni con numeri (anche) fratti

Nel sesto capitolo Fibonacci spiega come moltiplicare tutti i restanti tipi di numeri introdotti. In particolare:

- interi con fratti/misti
- fratti/misti con fratti/misti
- misti con più frazioni
- parti dei precedenti

(VI.1.1 ; *G*: VI.1) **E** ancora quando vorrai moltiplicare qualunque numero di qualunque posizione [*con un numero qualunque di cifre*] che contiene uno o più rotti per un qualunque numero con uno o più rotti, scrivi il numero maggiore con il suo rotto, o rotti, sotto il numero minore con i suoi pezzetti, cioè numero sotto numero e pezzetti sotto pezzetti. E prendi il numero superiore con i suoi pezzetti. E da lì fai pezzetti uguali a quelli [*che sono*] con lo stesso numero. E similmente farai i suoi pezzetti dal numero inferiore. E moltiplicherai i pezzetti fatti del numero superiore per quelli fatti del numero inferiore. E dividerai il risultato per i pezzetti di entrambi i numeri sotto un'unica linea di frazione, cioè unita insieme, e avrai le moltiplicazioni di qualunque numero per i pezzetti. E perché ciò si mostri più chiaramente con le dimostrazioni numeriche dividiamo questo capitolo in otto parti.

$$\frac{n}{m}a = \frac{n}{m} + \frac{a\,m}{m} = \frac{n+a\,m}{m}$$

$$\frac{n}{m}a \times \frac{p}{q}b = \frac{(n+m\,a)\times(p+q\,b)}{m\,q}$$

Indice del capitolo

(VI.1.2 ; *G*: VI.3)

La **p**rima di queste [*parti*] sarà sulla moltiplicazione di numeri interi con un solo rotto sotto una linea di frazione.
La **s**econda sulla moltiplicazione dei numeri con due o tre rotti sotto una linea di frazione
La **t**erza sulla moltiplicazione dei numeri con due rotti sotto due linee di frazione
La **q**uarta sulla moltiplicazione di numeri con due linee di frazione con più rotti
La **q**uinta sulla moltiplicazione di numeri con tre linee di frazione
La **s**esta sulla moltiplicazione di rotti senza gli interi
La **s**ettima sulla moltiplicazione di numeri e rotti, le cui linee di frazione terminano in un cerchietto
L'**o**ttava sulla moltiplicazione di parti di numeri i rotti

Nel settimo mostra le restanti operazioni di addizione, sottrazione e divisione

(VII.1.0 ; *G*: VII.1)

Indice del capitolo

(VII.1) **D**ividiamo il settimo capitolo in sei parti. Nella prima di queste mostreremo l'addizione di una frazione con un'altra e la sottrazione di una frazione da altre, e la divisione di una frazione per un'altra.
(VII.2) **N**ella seconda la somma e la sottrazione di due frazioni con due, e la loro reciproca divisione.
(VII.3) **N**ella terza la divisione di numeri interi per interi e rotti e il loro contrario.
(VII.4) **N**ella quarta la divisione la somma e la differenza e la divisione di numeri interi con rotti con interi e rotti.
(VII.5) **N**ella quinta insegneremo anche le addizioni, le sottrazioni e le divisioni di parti di numeri con rotti
(VII.6) **N**ell'ultima poi, mostreremo la riduzione di più parti in un'unica parte.

Fibonacci distingue un gran numero di casistiche che possono essere ridotte ad un unico algoritmo generale. Per facilitare la comprensione sono stati implementati più algoritmi che distinguono alcuni casi fondamentali, invece di uno solo generale.

Qui vedremo solo le idee e i codici di quelli più semplici (infatti lo scheletro dell'algoritmo è il solito, cambiano i dettagli implementativi).

Intanto osserviamo che un numero misto si può riscrivere come una frazione semplice

$$\frac{A}{B}U = U + \frac{A}{B} = \frac{U \times B}{B} + \frac{A}{B} = \frac{U \times B + A}{B}$$

e analogamente per le frazioni multiple

$$\begin{aligned} \frac{A_n \quad \cdots \quad A_1}{B_n \quad \cdots \quad B_1}U &= U + \frac{A_1}{B_1} + \cdots + \frac{A_n}{B_n \times \ldots \times B_1} \\ &= \frac{U \times (B_1 \times \ldots \times B_n) + A_1 \times (B_2 \times \ldots \times B_n) + \cdots + A_n}{B_1 \times \ldots \times B_n} \end{aligned}$$

Osserviamo poi che, per le notazioni usate da Fibonacci, tutti i vari tipi di frazioni miste sono equivalenti a frazioni semplici dove il denominatore è prodotto di tutti i denominatori che compaiono nelle frazioni di partenza. Quindi per calcolare il risultato di operazioni che coinvolgono questi numeri basta saper calcolare i numeratori delle frazioni equivalenti.
Fibonacci non dà un nome a queste quantità, quindi da qui in poi mi riferirò a queste con le espressioni "numeratori equivalenti" e "denominatori equivalenti".

Dati due numeri misti $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ generici, equivalenti alle frazioni semplici $\frac{N}{B}$ e $\frac{M}{D}$, possiamo ricondurre le operazioni tra loro a operazioni tra le frazioni equivalenti

$$\mathcal{N} \times \mathcal{M} = \frac{N}{B} \times \frac{M}{D} = \frac{N \times M}{B \times D}$$

$$\mathcal{N} \pm \mathcal{M} = \frac{N}{B} \pm \frac{M}{D} = \frac{N \times D}{B \times D} \pm \frac{M \times B}{D \times B} = \frac{N \times D \pm M \times B}{B \times D}$$

$$\mathcal{N}/\mathcal{M} = \frac{N}{B}/\frac{M}{D} = \frac{N \times D}{B \times D}/\frac{M \times B}{D \times B} = \frac{N \times D}{B \times D} \times \frac{B \times D}{M \times B} = \frac{N \times D}{M \times B}$$

Lo schema dell'algoritmo generale consiste nel calcolare i numeratori equivalenti, cercando di fare meno conti possibile, e applicare le formule precedenti per ottenere due quantità che verranno divise tramite l'algoritmo di divisione per divisore composto.

Vediamo come si può semplificare il calcolo dei numeratori equivalenti nel caso di frazioni multiple

$$\begin{aligned}\frac{A_n \quad \cdots \quad A_1}{B_n \quad \cdots \quad B_1}U &= U + \frac{A_1}{B_1} + \cdots + \frac{A_n}{B_n \times \ldots \times B_1} \\ &= \frac{U \times (B_1 \times \ldots \times B_n) + A_1 \times (B_2 \times \ldots \times B_n) + \cdots + A_n}{B_1 \times \ldots \times B_n}\end{aligned}$$

Se indichiamo con $A_0 = U$, il numeratore equivalente è

$$A_0 \times (B_1 \times \ldots \times B_n) + A_1 \times (B_2 \times \ldots \times B_n) + A_2 \times (B_3 \times \ldots \times B_n) + \cdots \\ + A_{n-2} \times (B_{n-1} \times B_n) + A_{n-1} \times B_n + A_n$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{n}\left(A_k \times \prod_{i=k+1}^{n} B_i\right)$$

Osserviamo che possiamo mettere in evidenza

$$A_0 \times \prod_{i=1}^{n} B_i + A_1 \times \prod_{i=2}^{n} B_i = (A_0 \times B_1 + A_1) \times \prod_{i=2}^{n} B_i$$

Se definiamo

$$\begin{cases} N_0 = A_0 \\ N_h = N_{h-1} \times B_h + A_h, \qquad h = 1, \ldots, n \end{cases}$$

possiamo scrivere la seguente formula ricorsiva

$$N_{h-1} \times \prod_{i=h}^{n} B_i + A_h \times \prod_{i=h+1}^{n} B_i = (N_{h-1} \times B_h + A_h) \times \prod_{i=h+1}^{n} B_i = N_h \times \prod_{i=h+1}^{n} B_i$$

Applicando ripetutamente questa formula, si mostra (per induzione) che

$$N = \sum_{k=0}^{n}\left(A_k \times \prod_{i=k+1}^{n} B_i\right) = N_n$$

Quindi siamo passati da

$$\sum_{k=0}^{n}[1+n-(k+1)] = (n+1)(1+n) - \frac{(n+1)(n+2)}{2} =$$

$$= \frac{2(n+1)(n+1)-(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = O(n^2)$$

a sole $n = O(n)$ moltiplicazioni; il numero di addizioni è n in entrambi i casi.

Per numeri misti con più frazioni multiple, il ragionamento è analogo.
Infatti la notazione

$$\frac{A_{n_m}^{(m)} \quad \cdots \quad A_1^{(m)}}{B_{n_m}^{(m)} \quad \cdots \quad B_1^{(m)}} \cdots \frac{A_{n_2}^{(2)} \quad \cdots \quad A_1^{(2)}}{B_{n_2}^{(2)} \quad \cdots \quad B_1^{(2)}} \frac{A_{n_1}^{(1)} \quad \cdots \quad A_1^{(1)}}{B_{n_1}^{(1)} \quad \cdots \quad B_1^{(1)}} U$$

è da intendersi come

$$U + \frac{A_{n_1}^{(1)} \quad \cdots \quad A_1^{(1)}}{B_{n_1}^{(1)} \quad \cdots \quad B_1^{(1)}} + \frac{A_{n_2}^{(2)} \quad \cdots \quad A_1^{(2)}}{B_{n_2}^{(2)} \quad \cdots \quad B_1^{(2)}} + \cdots + \frac{A_{n_m}^{(m)} \quad \cdots \quad A_1^{(m)}}{B_{n_m}^{(m)} \quad \cdots \quad B_1^{(m)}}$$

ossia

$$U + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_{n_j}^{(j)} \quad \cdots \quad A_1^{(j)}}{B_{n_j}^{(j)} \quad \cdots \quad B_1^{(j)}}$$

Per rappresentare i diversi tipi di numeri misti, viene ridefinita una struttura opportuna da programma a programma.

```
// mult_1r1l.c -----------------------------------------------------------------

    struct MIXNUM {
        int pint;                       // parte intera
        struct FRACTION pfrac;          // parte frazionaria (una frazione semplice)
    };
```

```
// mult_+r1l.c -----------------------------------------------------------------

    struct MIXNUM {
        int pint;                       // parte intera
        struct multFRACTION pfrac;      // parte frazionaria (una frazione multipla)
    };
```

```
// mult_+r+l.c -----------------------------------------------------------------

    struct MIXNUM {
        int pint;                       // parte intera
        struct multFRACTION* pfrac;     // parte frazionaria (più frazioni multiple)
        int mFN;                        // numero di frazione multiple
    };
```

L'ultima viene usata anche in `miste.c` per gli algoritmi di addizione, sottrazione e divisione.

Moltiplicazione

```c
// mult_1r1l.c ------------------------------------------------------------------------------------

    int numTOT (struct MIXNUM mix) {    // calcola il numeratore equivalente
        int N = mix.pint;

        N *= mix.pfrac.den;
        N += mix.pfrac.num;

        return N;
    }

    struct mixedNUMBER mult (struct MIXNUM mix1, struct MIXNUM mix2) {
        int N1 = numTOT (mix1),                           // calcola i numeratori equivalenti
            N2 = numTOT (mix2);
        int N = N1 * N2;

        int* denvec1 = factorize (mix1.pfrac.den),        // fattorizza i denominatori delle frazioni
           * denvec2 = factorize (mix2.pfrac.den);

        /* ... */

        int* denvec_new = simple_den (denvec_all);        // riordina i fattori

        /* ... */

        int m = N;
        for (int k = L-1; k >= 0; k--) {
            result.pfrac.num[k] = m % result.pfrac.den[k];  // calcola il resto e lo posiziona nel numeratore
            m /= result.pfrac.den[k];                       // effettua la divisione
        }
        result.pint = m;                                  // resto della divisione
    }
```

La funzione `numTOT` si occupa di calcolare i numeratori equivalenti.

Dopo aver fattorizzato i denominatori, i fattori vengono messi in un unico vettore (`denvec_all`) e riordinati, eventualmente combinando quelli più piccoli per mezzo della funzione `simple_den` (il risultato di tutto ciò finisce nel vettore `denvec_new`). Segue la divisione del prodotto dei numeratori equivalenti per i fattori dei denominatori.

Per gli altri programmi lo schema è lo stesso, ma per gestire tutti i denominatori delle varie frazioni servono diversi cicli (e vettori per memorizzarne i fattori).

Esempi

(VI.1.3 ; G: VI.4) Se vuoi moltiplicare 11 e un mezzo per 22 e un terzo, scrivi il numero maggiore sotto il minore, cioè [NoT] $\frac{1}{3}22$ sotto $\frac{1}{2}11$, come qui si mostra: poi calcola i mezzi di $\frac{1}{2}11$; poiché il rotto che è con 11 esprime una metà, si fa così: moltiplicherai 11 per il 2 che è sotto la linea di frazione dopo l'11, e sopra addiziona 1, che è sopra la linea di frazione del 2; farà 23 mezzi: oppure raddoppia $\frac{1}{2}11$, farà 23: scrivi questo 23 sopra $\frac{1}{2}11$, come si mostra nella figura: con lo stesso metodo moltiplicherai 22 per il suo rotto [NoT] cioè per il 3 che è sotto la linea di frazione dopo il 22; farà 66 terzi, a cui sommi l'1 che è sopra il 3, e saranno 67 terzi, che devi serbare sopra $\frac{1}{3}22$, e questo è stato come triplicare $\frac{1}{3}22$: e moltiplicherai i 23 mezzi per i 67 terzi, farà 1541 sesti, che dividerai per i rotti che sono sotto le linee di frazione di entrambi i numeri, cioè per 2 e per 3; questa divisione si fa così: moltiplica 2 per 3, farà 6, per i quali dividi 1541; farà esattamente $\frac{5}{6}256$ per la moltiplicazione richiesta, come si dimostra nella figura sopra descritta.

23
$\frac{1}{2}11$
67
$\frac{1}{3}22$
$\frac{5}{6}256$
Totale

$$\left(\frac{1}{2}+11\right)\left(\frac{1}{3}+22\right) = \frac{23}{2}\times\frac{67}{3} = \frac{1541}{6} = \frac{5}{6}+256$$

```
1/2|11
1/3|22

----------

N1 = 23        N2 = 67
N = 1541

2 3
6

5/6|256

===  "mult_1r1l.exe" ===
```

(VI.2.1 ; G: VI.41) Se poi vorrai moltiplicare 13 più tre ottavi e la metà di un ottavo, che si scrive così $\frac{1\;\;3}{2\;\;8}13$, per 24 più due noni, e tre quarti di un nono, che si scrive così $\frac{3\;\;2}{4\;\;9}24$, scrivi l'argomento come qui si mostra. E moltiplica 13 per 8, e somma il 3, farà 107 ottavi; che moltiplichi per il 2, che è sotto la linea di frazione dopo l'8 [*cioè più a sinistra*], e somma l'1 che è sopra il 2 stesso, farà 215 sedicesimi, perché 2 e 8, che sono sotto la linea di frazione, moltiplicati fra loro, fanno 16: poni dunque il 215 sopra $\frac{1\;\;3}{2\;\;8}13$. Similmente moltiplica il 24 per i numeri sotto la linea di frazione, cioè per 9 e addiziona il 2 che è sopra il 9, farà 218 noni; che moltiplichi per il 4 che è sotto la linea di frazione dopo il 9 e addiziona il 3 che è sopra il 4, farà 875 trentaseiesimi; ponilo sopra $\frac{3\;\;2}{4\;\;9}24$, e moltiplica 215 per 875 e dividilo per i numeri che sono sotto le linee di frazione di entrambi i numeri, cioè per $\frac{1\;\;0\;\;0\;\;0}{2\;\;4\;\;8\;\;9}$ o per $\frac{1\;\;0\;\;0}{8\;\;8\;\;9}$ che è più bello, farà $\frac{5\;\;3\;\;5}{8\;\;8\;\;9}326$: e così potrai moltiplicare qualunque numero con due rotti sotto una linea di frazione per qualunque numero con due rotti sotto un'altra.

prova per 11 è 3
215 (6
$\frac{1\;\;3}{2\;\;8}13$
875
3) $\frac{3\;\;2}{4\;\;9}24$ (6
$\frac{5\;\;3\;\;5}{8\;\;8\;\;9}326$

```
1,3/2,8|13
3,2/4,9|24

----------

N1 = 215       N2 = 875
N = 188125

2 2 2 2 3 3 2 2
8 8 9

5,3,5/8,8,9|326

===  "mult_+r1l.exe" ===
```

(VI.3.1 ; *G*: VI.47) *S*e vuoi moltiplicare 15, e un terzo e un quarto dell'uno intero, che si scrive così $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$, con due linee separate, per un quinto e un sesto di 26, che si scrive così $\frac{1}{6}\ \frac{1}{5}26$, scrivi l'argomento come qui si mostra, e moltiplica 15 per il 3 che è sotto la prima linea e aggiungi l'1, che è sopra il 3, farà un terzo di 46; moltiplicalo per il 4 che è sotto l'altra linea, farà 184 dodicesimi, al quale aggiungi la moltiplicazione dell'1 che è sopra il 4 per 3: poiché un quarto è uguale a tre dodicesimi, saranno in modo simile 187 dodicesimi, che poni nella dimostrazione sopra $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}15$. Similmente moltiplica il 26 per i suoi rotti, cioè per 5, e aggiungi l'1 che è sopra il 5, [*farà 131 moltiplica per 6 e aggiungi 5*] sarà 791 trentesimi, che poni sopra $\frac{1}{6}\ \frac{1}{5}26$; e moltiplica 187 per 791, farà 147917; che dividi per tutti i numeri che sono sotto la linea di frazione, cioè per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 4\ \ 5\ \ 6}$ che, messi insieme, si convertono in $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 9\ \ 10}$, farà $\frac{1\ \ 7\ \ 8}{4\ \ 9\ \ 10}410$, come si vede nella dimostrazione.

$$\left(15+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(26+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$$

$$15+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{15\times3+1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{c} 187 \\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}15 \\ 791 \\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}26 \\ \frac{1\ \ 7\ \ 8}{4\ \ 9\ \ 10}410 \end{array}$$

```
1/4;1/3|15
1/6;1/5|26

----------

N1 = 187        N2 = 791
N = 147917

3 2 2 5 3 2
4 9 10

1,7,8/4,9,10|410

===  "mult_+r+l.exe" ===
```

(VI.4.1 ; *G*: VI.70) ***S***e vuoi moltiplicare 17 e cinque ottavi e mezzo ottavo e due noni e un quinto di un nono per 28 e quattro undicesimi e tre ottavi di un undicesimo e un quinto e due quinti di un quinto, scrivi i numeri come si vede in margine; e moltiplica 17 per quello della prima linea, cioè per 8, e somma 5; moltiplica tutto per 2 e somma 1, farà 283; moltiplicalo per i numeri che sono sotto la seconda linea, cioè per 9; e il totale per 5, farà 12735: ora prova se hai moltiplicato correttamente, cioè moltiplica il resto del 7 di 17, che è 3, per il il resto di 8, che è 1, e somma il 5 che è sopra l'8; il cui resto, cioè 1, moltiplica per 2 e aggiungi l'1 che è sopra al 2, farà 3, che è il resto di 283; moltiplicalo per il resto di 9, farà 6; moltiplicalo per il 5 sotto la linea, farà 30, il cui resto , cioè 2, è il resto del numero trovato, cioè di 12735:

$$\frac{1\quad 2}{5\quad 9}\,\frac{1\quad 5}{2\quad 8}\,17$$
$$\times$$
$$\frac{2\quad 1}{5\quad 5}\,\frac{3\quad 4}{8\quad 11}\,28$$

$$\frac{1\quad 5}{2\quad 8}\,17 = \frac{283}{2\times 8}$$

Verifica che
$((17\times 8+5)\times 2+1)\times 9\times 5 = 12735$
con la regola del 7

(VI.4.2 ; *G*: VI.72) ***P***oi moltiplica il 2 che è sopra il 9 per 5, e aggiungi l'1 che è sopra lo stesso 5; e per 2; e per 8 che è sotto la prima linea, farà 176, dal quale prendi la prova così: moltiplica il 2 che è sopra il 9 per 5 e aggiungi 1, farà 11; la cui prova, cioè 4, moltiplica per 2, farà 8; la cui prova, che è 1, moltiplicala per la prova di 8, viene 1; e tanto deve essere la prova di 176: e poiché è tale, sappiamo che 176 è corretto: sommiamolo quindi a 12735, farà 12911, la cui prova è 3, che risulta dalla somma delle prove dei numeri addizionati: serbala quindi sopra il 17;

$$\frac{1\quad 2}{5\quad 9}\,\frac{1\quad 5}{2\quad 8}\,17 = \frac{11}{5\times 9} + \frac{283}{2\times 8} = \frac{12911}{2\times 8\times 5\times 9}$$

Verifica con la prova del 7

(VI.4.3 ; *G*: VI.73) ***O***ccupati di moltiplicare nello stesso ordine 28 per le sue frazioni e ne risulta 63091: conservalo dunque sopra il 28, e allo stesso modo la loro prova, che è 0; moltiplica 12911 per 63091, dividi per tutti i numeri che sono sotto il 4 della linea di frazione, e disponi la linea di frazione; e avrai il totale richiesto, come si mostra in margine. La prova di questo totale è ciò che viene dalla moltiplicazione delle prove serbate per se stesse.

$$\overset{12911}{\frac{1\quad 2}{5\quad 9}\,\frac{1\quad 5}{2\quad 8}\,17} \qquad (3$$

$$\overset{63091}{\frac{2\quad 1}{5\quad 5}\,\frac{3\quad 4}{8\quad 11}\,28} \qquad (0$$

$$\frac{1\quad 6\quad 4\quad 1\quad 2\quad 7\quad 2}{2\quad 8\quad 9\quad 10\quad 10\quad 10\quad 11}\,514$$

```
1,2/5,9;1,5/2,8|17
2,1/5,5;3,4/8,11|28

----------

N1 = 12911     N2 = 63091
N = 814567901

2 2 2 2 3 3 5 11 2 2 2 5 5
2 8 9 10 10 10 11

1,6,4,1,2,7,2/2,8,9,10,10,10,11|514

===  "mult_+r+l.exe" ===
```

(VI.5.1 ; G: VI.78) **S**e vuoi moltiplicare 21 e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ per 32 e $\frac{3}{7}$ e $\frac{2}{9}$ e $\frac{1}{8}$, scrivi i numeri come si vede in margine; e moltiplica 21 per 3 e somma l'1 che è sopra il 3, farà 64; moltiplicalo per 4, e per il 5 che sono sotto la linea (o in una sola moltiplicazione: moltiplica 64 per 20), farà 1280 sessantesimi; e moltiplica l'1, che è sopra il 4 che è un quarto, per 5 che è sotto la terza linea; e per 3 che è sotto la prima, farà 15 sessantesimi. Ancora moltiplica l'1, che è sopra il 5 che è un quinto, per il 4 che è sotto la seconda linea, e per il 3 che è sotto la prima, farà 12 sessantesimi: somma quindi 1280 e 15 e 12 sessantesimi, farà 1307 sessantesimi; e tanti sessantesimi sono in $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}21$; la cui prova per 11 è 9, che si ha nell'ordine nel quale sono moltiplicati i numeri. Similmente calcola i rotti di $\frac{1}{8}\frac{2}{9}\frac{3}{7}32$, cioè moltiplica 32 per 7 e aggiungi il 3 che è sopra il 7; e moltiplica per 9 e per 8, farà 16344 cinquecentoquattresimi. Ancora moltiplica per 8 il 2 che è sopra il 9; poi per il 7, farà similmente 112 cinquecentoquattresimi. Ancora moltiplica l'1 che è sopra l'8 per 9, farà 9 settantaduesimi, moltiplicali per 7, farà 63 cinquecentoquattresimi, che sommati ai 112 cinquecentoquattresimi e a 16334, faranno 16519 cinquecentoquattresimi la cui prova per 11 è 8: poi moltiplica 1307 per 16519, e dividi il totale per 60 [*per*] 504, cioè per tutti i numeri che sono sotto le sei linee, cioè per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 4\ \ 5\ \ 7\ \ 8\ \ 9}$ e sistemali, cioè di $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 5}$ fai $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$ e di $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 3}$ fai 6; e così avrai per la sistemazione della linea di frazione $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10}$; e il totale della moltiplicazione richiesta è $\frac{5\ \ 3\ \ 7\ \ 5\ \ 9}{6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10}713$, come è mostrato in margine.

$$21+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$$
$$=\frac{1280}{60}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$$
$$=\frac{1280}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}$$

Verifica con la prova per 11

$$32+\frac{3}{7}+\frac{2}{9}+\frac{1}{8}=$$
$$=\frac{16344}{504}+\frac{112}{504}+\frac{63}{504}$$

1307

$\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}21$ (9

16519

$\frac{1}{8}\frac{2}{9}\frac{3}{7}32$ (8

$\frac{5\ \ 3\ \ 7\ \ 5\ \ 9}{6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10}713$

```
1/5;1/4;1/3|21
1/8;2/9;3/7|32

----------

N1 = 1307      N2 = 16519
N = 21590333

3 2 2 5 7 3 3 2 2 2
6 7 8 9 10

5,3,7,5,9/6,7,8,9,10|713

===  "mult_+r+l.exe" ===
```

Addizione, sottrazione e divisione

Nel caso delle frazioni semplici abbiamo due versioni dell'algoritmo che differiscono leggermente nel calcolo dei numeratori equivalenti (e in come è implementato il risultato).

```
// semplici.c ---------------------------------------------------------------

void op_v1 (struct FRACTION frac1, struct FRACTION frac2) {
    int a1 = frac1.num, b1 = frac1.den,
        a2 = frac2.num, b2 = frac2.den;

    int m = mcm (b1, b2);           // calcola mcm dei denominatori
    int N1 = (m / b1) * a1,         // calcola i numeratori equivalenti
        N2 = (m / b2) * a2;


    struct FRACTION result;

    // addizione
    result.num = N1 + N2;
    result.den = m;
    simplify (&result);

    // sottrazione
    if (N1 >= N2) {
        result.num = N1 - N2;
        result.den = m;
        simplify (&result);
    }
    else {
        result.num = N2 - N1;
        result.den = m;
        simplify (&result);
    }

    // divisione
    result.num = N1;
    result.den = N2;
    simplify (&result);

    // divisione (al contrario)
    result.num = N2;
    result.den = N1;
    simplify (&result);
}
```

La funzione `simplify` si occupa di semplificare la frazione semplice.

Questo algoritmo è quello più simile a quello che usiamo comunemente.

```
// semplici.c -----------------------------------------------------------------

void op_v2 (struct FRACTION frac1, struct FRACTION frac2) {
    int a1 = frac1.num, b1 = frac1.den,
        a2 = frac2.num, b2 = frac2.den;

    int d = MCD (b1, b2),             // calcola MCD ...
        m = mcm (b1, b2);             // ... e mcm dei denominatori
    int N1 = a1 * (b2 / d),           // calcola i numeratori equivalenti
        N2 = a2 * (b1 / d);


    struct mixedNUMBER result;

    // addizione
    result = mix_div (N1 + N2, m);

    // sottrazione
    if (N1 >= N2) {
        result = mix_div (N1 - N2, m);
    }
    else {
        result = mix_div (N2 - N1, m);
    }

    // divisione
    result = mix_div (N1, N2);

    // divisione (al contrario)
    result = mix_div (N2, N1);
}
```

La funzione `mix_div` esegue l'algoritmo della divisione per numero composto.

Questo algoritmo, a meno di adattare opportunamente il calcolo dei numeratori equivalenti, è quello che si generalizza al caso con le frazioni multiple.

Esempi

(VII.1.3 ; G: VII.8) Parimenti se vorrai sommare $\frac{2}{3}$ con $\frac{4}{5}$, cerca similmente in quale numero si trovino $\frac{4}{5}\ \frac{2}{3}$ così: moltiplicherai 3 per il 5 che è sotto la linea, farà 15; e in questo stesso numero si trovano $\frac{4}{5}\ \frac{2}{3}$: perciò prendi $\frac{2}{3}$ dal 15 che è 10, e $\frac{4}{5}$ di 15, che è 12, e addizionali, farà 22; dividilo per 15, farà $\frac{7}{15}1$ per l'addizione di $\frac{2}{3}$ con $\frac{4}{5}$.

Ugualmente scriverai altrimenti $\frac{4}{5}\ \frac{2}{3}$ come si vede in margine; e moltiplica il 2 che è sopra il 3 per 5, farà 10; ponilo sopra $\frac{2}{3}$, e il 4 che è sopra il 5 per 3, farà 12; ponilo sopra il $\frac{4}{5}$ nell'argomento. Somma quindi 10 col 12, sarà 22 come sopra; dividilo per i fratti che sono sotto la linea, cioè per $\frac{1\quad 0}{3\quad 5}$, farà [NdT] $\frac{1\quad 2}{3\quad 5}1$, come si vede nell'argomento, cioè $\frac{7}{15}1$ come abbiamo trovato in altro modo.

In verità, se avrai voluto sottrarre $\frac{2}{3}$ da $\frac{4}{5}$, troverai 10 e 12 trovati sopra in qualunque dei due modi descritti tu voglia: e sottrai 10 da 12, resta 2; dividilo per i fratti, cioè per $\frac{1\quad 0}{3\quad 5}$, farà $\frac{2\quad 0}{3\quad 5}$ cioè $\frac{2}{15}$ come resto della sottrazione richiesta. E se vuoi dividere $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$, dividi 12 per 10, farà $\frac{1}{15}1$; e tanto sta ad una parte intera dalla divisione stessa. E se vuoi dividere $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$, dividi 10 per 12, farà $\frac{5}{6}$.

$$\frac{22}{3\times5} = \left(\frac{22}{3}\right)\times\frac{1}{5} =$$
$$\left(7+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5} = \frac{7}{5}+\frac{1}{3\times5} =$$
$$1+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5} =$$
$$\frac{1\quad 2}{3\quad 5}1$$

12	10
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1\quad 2}{3\quad 5}1$	

```
2
3
4
5

2/3 + 4/5 = 22/15
4/5 - 2/3 = 2/15
2/3 / 4/5 = 5/6
4/5 / 2/3 = 6/5

2/3 + 4/5 = 1,2/3,5|1
4/5 - 2/3 = 2,0/3,5
2/3 / 4/5 = 0,5/2,6
4/5 / 2/3 = 2/10|1

===  "semplici.exe" ===
```

(VII.2.1 ; *G*: VII.19) ***S***e vorrai sommare $\frac{1\;1}{4\;3}$ con $\frac{1\;1}{7\;5}$, vedi in quale numero si trovino $\frac{1\;1\;1\;1}{4\;3\;7\;5}$, che si deve vedere in questo modo: moltiplica insieme i numeri che sono sotto le linee, cioè 3 per 4; che per 5; e che per 7, farà 420, che è il minimo multiplo dei numeri prescritti [il minimo comune multiplo], cioè che è il numero minore nel quale si trovano i rotti prescritti; poiché non hanno nessuna regola in comune tra loro. Prendi dunque $\frac{1}{3}$ di 420, che è 140, e sommalo con la quarta parte del medesimo 420 ***(PdA)***, cioè per 105, e con la quinta che è 84, e con la settima che è 60, farà 389; dividilo per 420, risulterà $\frac{389}{420}$ come somma dei rotti scritti sopra. Ed è la stessa cosa quando si chiede quali parti di un intero siano $\frac{1\;1}{7\;5}\;\frac{1\;1}{4\;3}$. Possiamo infatti, secondo un altro insegnamento dei numeri, sommare $\frac{1\;1}{4\;3}$ con $\frac{1\;1}{7\;5}$, cioè si scrivano i rotti secondo ciò che qui si vede; e moltiplica l'1 che è sopra il 3 per 4, e l'1 che è sopra il 4 per 3, farà 7; moltiplicalo per 5, e per 7, e che sono sotto le altre due linee dell'altro lato, farà 245, che è $\frac{1\;1}{4\;3}$ di 420, come troviamo sopra: poni dunque 245 sopra $\frac{1\;1}{4\;3}$ nel riquadro; poi vai a $\frac{1\;1}{7\;5}$; e moltiplica l'1 che è sopra il 5 per 7, e l'1 che è sopra il 7 per 5, [*la somma*] farà 12; moltiplicalo per 3 e per 4, che sono sotto la linea, farà 144, che è $\frac{1\;1}{7\;5}$ di 420: poni dunque 144 sopra $\frac{1\;1}{7\;5}$, e somma 144 con 245, farà 389; dividilo per i rotti, cioè per $\frac{1\;\;0\;\;0\;\;0}{3\;\;4\;\;5\;\;7}$, e sistema i rotti prescritti, farà $\frac{5\;\;1\;\;9}{6\;\;7\;\;10}$, che è uguale a $\frac{389}{420}$.

$$\frac{1}{4}\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\frac{1}{5}=$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{5}$$

Riduce le frazioni allo stesso denominatore

144	245
$\frac{1\;1}{7\;5}$	$\frac{1\;1}{4\;3}$
$\frac{5\;\;1\;\;9}{6\;\;7\;\;10}$	addizione

389 : 6 = 64 resto 5
64 : 7 = 9 resto 1
9 : 10 = 0 resto 9

Sottrazione di $\frac{1\;1}{7\;5}$ da $\frac{1\;1}{4\;3}$

(VII.2.2 ; *G*: VII.23) ***S***e in verità vorrai sottrarre $\frac{1\;1}{7\;5}$ da $\frac{1\;1}{4\;3}$, troverai i sopra scritti 245 e 144 nello stesso modo che vorrai dei due modi prescritti, e sottrai 144 da 245, resterà 101; dividilo per $\frac{1\;\;0\;\;0}{6\;\;7\;\;10}$ nel modo scritto prima, farà $\frac{5\;\;2\;\;2}{6\;\;7\;\;10}$ come residuo della detta sottrazione. E se dividerai $\frac{1\;1}{4\;3}$ per $\frac{1\;1}{7\;5}$, dividi 245 con la regola di 144, farà $\frac{1\;\;2\;\;6}{2\;\;8\;\;9}\,1$. E se avrai diviso 144 per la regola di 245 avrai $\frac{4\;\;0\;\;4}{5\;\;7\;\;7}$ come ciò che concerne la parte intera dalla divisione di $\frac{1\;1}{7\;5}$ per $\frac{1\;1}{4\;3}$, come è mostrato nel riquadro.

101 : 6 = 16 resto 5
16 : 7 = 2 resto 2
2 : 10 = 0 resto 2

$$\frac{245}{2\times8\times9}=\frac{1\;\;2\;\;6}{2\;\;8\;\;9}\,1$$

$$\frac{144}{5\times7\times7}=\frac{4\;\;0\;\;4}{5\;\;7\;\;7}\,1$$

```
1/4;1/3
1/7;1/5

----------

m = 420
m1 = 12        m2 = 35
N1 = 245       N2 = 144

1/4;1/3|0 + 1/7;1/5|0 = 5,1,9/6,7,10
1/4;1/3|0 - 1/7;1/5|0 = 5,2,2/6,7,10
1/4;1/3|0 / 1/7;1/5|0 = 1,2,6/2,8,9|1
1/7;1/5|0 / 1/4;1/3|0 = 4,0,4/5,7,7

===  "miste.exe"  ===
```

Addizione di $\frac{3}{4}13$ *con* $\frac{2}{5}171$

(VII.4.5) ; *G*: VII.84) ***S****e* invero vorrai sommare $\frac{3}{4}13$ con $\frac{2}{5}171$, scrivi i numeri come abbiamo detto prima; e moltiplica 13 per 4, e somma il 3 che è sopra il 4, farà 55 quarti; moltiplicali per il 5 che è sotto la linea dopo 171, farà 275 ventesimi, ponili sopra $\frac{3}{4}13$; e moltiplica 171 per la sua frazione, cioè per 5 e somma 2, farà 857 quinti; moltiplicali per il 4 che è sotto la linea dopo il 13, farà 3428 ventesimi, ponili sopra $\frac{2}{5}171$: poi somma 275 con 3428, farà 3703 ventesimi, dividili per i fratti, cioè per 4 e per 5, che sono sotto le linee di entrambi i numeri, farà $\frac{1\ \ 1}{2\ \ 10}185$ per la somma richiesta.

somma	
3428	275
$\frac{2}{5}171$	$\frac{3}{4}13$
$\frac{1\ \ 1}{2\ \ 10}185$	

Sottrazione di $\frac{3}{4}13$ *da* $\frac{2}{5}171$

(VII.4.8 ; *G*: VII.89) ***E*** se vorrai sottrarre $\frac{3}{4}13$ da $\frac{2}{5}171$, sottrai 275 da 3428, rimarrà 3153; dividilo per i fratti, farà $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}157$ come residuo della sottrazione richiesta.
Che questo risultato sia giusto, lo saprai con la prova del 7; sottrai il resto di 275, che è 2, dal resto di 3428, che è 5, tieni poi il residuo, che è 3, come resto di $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}157$.
Possiamo anche sottrarre in altro modo $\frac{3}{4}13$ da $\frac{2}{5}171$: sottrai 13 e $\frac{3}{4}$ da 171, rimane $\frac{1}{4}157$; aggiungi $\frac{2}{5}$, farà $\frac{1}{4}\frac{2}{5}157$, cioè $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}157$.

Divisione di $\frac{2}{5}171$ *per* $\frac{3}{4}13$

(VII.4.9 ; *G*: VII.91) ***E*** se vorrai dividere $\frac{2}{5}171$ per $\frac{3}{4}13$, dividi 3428 per la regola di 275, che è $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 5\ \ 11}$, farà $\frac{3\ \ 0\ \ 5}{5\ \ 5\ \ 11}12$ per la divisione richiesta, il cui resto per 7 deve essere 5, come lo è per il 3428, che viene diviso. E se vorrai dividere $\frac{3}{4}13$ per $\frac{2}{5}171$, dividi 275 per la regola di 3428, che è $\frac{1\ \ \ 0}{4\ \ 857}$, farà [NdT] $\frac{3\ \ 68}{4\ \ 857}$ di uno intero: il resto del sette di questi fratti è 2, come fu per 275.

divisione	
$\frac{2}{5}171$	$\frac{3}{4}13$

```
3/4|13
2/5|171

----------

m = 20
m1 = 4          m2 = 5
N1 = 275        N2 = 3428

3/4|13 + 2/5|171 = 1,1/2,10|185
2/5|171 - 3/4|13 = 1,6/2,10|157
3/4|13 / 2/5|171 = 3,68/4,857
2/5|171 / 3/4|13 = 3,0,5/5,5,11|12

===  "miste.exe"  ===
```

Addizione di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}15$ *con* $\frac{1}{7}\frac{3}{5}322$

(**VII.4.14** ; *G*: VII.100) ***E*** ancora se vorrai sommare $\frac{1}{4}\frac{1}{3}15$ con $\frac{1}{7}\frac{3}{5}322$, scrivi i numeri come qui è mostrato; e moltiplica 15 per le sue frazioni, cioè per 3, e somma 1; ancora per 4 e somma la moltiplicazione di 1, che è sopra il 4, per 3, farà 187 dodicesimi; moltiplicali per i numeri che sono sotto la linea dopo il 322, cioè per 5 e per 7, farà 6545 quattrocentoventesimi, ponili sopra $\frac{1}{4}\frac{1}{3}15$: poi moltiplica 322 per le sue frazioni, farà 11296 trentacinquesimi ; moltiplicali per i numeri che sono sotto la linea dopo il 15, farà 135552 quattrocentoventesimi, ponili sopra $\frac{1}{7}\frac{3}{5}322$: poi somma 6545 con 135552, farà 142097 quattrocentoventesimi; dividili per 420, cioè per tutti i numeri che sono sotto le linee, e riuniscili, farà $\frac{5\ \ 1\ \ 3}{6\ \ 7\ \ 10}338$ per la somma richiesta, il cui resto per 11 è 10.

Altrimenti somma $\frac{(PdA)}{}$ 15 con 322, farà 337; e somma $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$, secondo quanto insegnammo nella seconda parte di questo capitolo, farà $\frac{5\ \ 1\ \ 3}{6\ \ 7\ \ 10}1$; sommalo con 337, farà $\frac{5\ \ 1\ \ 3}{6\ \ 7\ \ 10}338$, come abbiamo detto prima

Sottrazione di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}15$ *da* $\frac{1}{7}\frac{3}{5}322$

(**VII.4.15** ; *G*: VII.104) ***E*** se vorrai sottrarre $\frac{1}{4}\frac{1}{3}15$ da $\frac{1}{7}\frac{3}{5}322$, sottrai 6545 da 135552, resterà 129007, che dividerai secondo la dimostrazione scritta sopra per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{6\ \ 7\ \ 10}$, farà $\frac{1\ \ 4\ \ 1}{6\ \ 7\ \ 10}307$ come abbiamo detto prima, come residuo della sottrazione richiesta.

Altrimenti sottrai 15 da 322, rimarrà 307; e sottrai $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ da $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$, rimarrà $\frac{1\ \ 4\ \ 1}{6\ \ 7\ \ 10}$; addizionalo con 307, farà $\frac{1\ \ 4\ \ 1}{6\ \ 7\ \ 10}307$ come abbiamo detto prima.

In verità se vorrai dividere $\frac{1}{7}\frac{3}{5}322$ per $\frac{1}{4}\frac{1}{3}15$, dividi 135552 per la regola di 6545, farà $\frac{2\ \ 6\ \ 0\ \ 12}{5\ \ 7\ \ 11\ \ 17}20$ per la divisione richiesta.

Divisione di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}15$ *per* $\frac{1}{7}\frac{3}{5}322$

(**VII.4.16** ; *G*: VII.105) ***U***gualmente se vorrai dividere $\frac{1}{4}\frac{1}{3}15$ per $\frac{1}{7}\frac{3}{5}322$, dividi 6545 per la regola di 135552, farà $\frac{5\ \ 2\ \ 0\ \ 17}{6\ \ 8\ \ 8\ \ 353}$ per la divisione richiesta: puoi sommare, e sottrarre, e dividere secondo il modo prescritto qualunque numero con due fratti: tuttavia proponiamo di mostrare subito qualche altro problema, nei quali possiamo semplificare i fattori in comune dei rotti.

```
1/4;1/3|15
1/7;3/5|322

----------

m = 420
m1 = 12       m2 = 35
N1 = 6545     N2 = 135552

1/4;1/3|15 + 1/7;3/5|322 = 5,1,3/6,7,10|338
1/7;3/5|322 - 1/4;1/3|15 = 1,4,1/6,7,10|307
1/4;1/3|15 / 1/7;3/5|322 = 5,2,0,17/6,8,8,353
1/7;3/5|322 / 1/4;1/3|15 = 2,6,0,12/5,7,11,17|20

===  "miste.exe"  ===
```

Osservazioni

Nella prima parte del capitolo 6 Fibonacci spiega meglio il criterio per raggruppare i denominatori di una frazione multipla.

(VI.1.12 ; *G*: VI.26) *P*uoi trovare in un altro modo più alla svelta questa moltiplicazione con la semplificazione, cioè dividendo il 65 trovato per il 5 che è sotto la linea di frazione, farà 13, moltiplicalo per 137, e dividilo per il 4 dell'altra linea di frazione, farà ugualmente $\frac{1}{4}445$, come è stato trovato sopra. Infatti sempre quando dobbiamo dividere qualche numero per 4 e per 5, cioè per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 5}$, se tale numero avrà $\frac{1}{5}$ [NdT], abituiamoci a dividerlo prima per 5 che per 4, per la divisione senza resto dello stesso, come abbiamo fatto per 8905. E se lo stesso numero si divide interamente per 4, abituiamoci a dividerlo prima per 4 che per 5. E se quel numero non si può dividere interamente né per 4 né per 5, abituiamoci a dividerlo per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$; dal momento che quattro per cinque fa 20, la cui scomposizione in fattori è $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$. E facciamo ciò per un'espressione più bella perché è più bello dire $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$ invece di $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 5}$, sebbene sia lo stesso. In modo simile devi intendere di certi altri numeri, cioè quando dovrai dividere per 3 e per 4, cioè per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 4}$, un qualche numero che non si divide perfettamente per alcuno di essi, dividilo per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 6}$, che è più bello. Parimenti se dovrai dividere per 4 e per 4 cioè per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 4}$, lo dividerai per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 8}$. E se dovrai per 3 e per 6, cioè per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 6}$, dividi per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 9}$, poiché la moltiplicazione di 2 per 9 fa tanto quanto quella di 3 per 6. Parimenti se dovrai dividere per 4 e per 6, cioè per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 6}$, dividi per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 8}$. E se dovrai dividere per $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 6}$ dividi per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 10}$. E se dovrai dividere per $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 8}$, dividi per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 10}$. E qualora dovessi dividere per $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 6}$, dividi per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 9}$, perché entrambe le frazioni, cioè $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 6}$ e $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 9}$, sono la regola [NdT] di 36. Ma noi scegliamo i numeri più estremi, che sono fino a dieci nella composizione dei numeri e perciò è più bello $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 9}$ che $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 6}$. E che tu intenda lo stesso per i casi precedenti. Ma se volessi dividere un qualche numero per qualche altro numero sotto il dieci, eccetto quelli che prima abbiamo insegnato a unire, nel caso non possano essere uniti, dividi lo per essi stessi. Così, se dovrai dividerlo per 5 e per 7, dividi lo stesso per $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 7}$, e così devi intendere per gli altri.

Considera più comodo operare con frazioni coi denominatori più piccoli

$$\frac{1\ \ 0}{4\ \ 5} = \frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$$

ma la seconda è preferibile perché 2 < 4.

In fondo alla prima parte spiega anche l'algoritmo di Euclide per il massimo comun divisore

(VI.1.15 ; G: VI.36) **P**er esempio: abbiamo $\frac{6}{9}$: infatti il 6 e il 9 sono condivisori, e il tre è la loro misura comune. Per questo dividi entrambi per 3, e ciò che risulterà dalla divisione del numero superiore, cioè 2, ponilo sopra una linea di frazione, e ciò che uscirà dalla divisione dell'inferiore ponilo sotto la stessa; e avrai $\frac{2}{3}$ al posto di $\frac{6}{9}$. Ancora, dati $\frac{5}{10}$ la loro misura comune è il 5, cioè il numeratore. Perciò se si dividono entrambi i numeri per 5, cioè il 5 e il 10, per la semplificazione $\frac{5}{10}$ risulterà $\frac{1}{2}$, e così intendi in casi simili. C'è dunque un modo di trovare la massima condivisione quando si hanno numeri condivisibili, cioè che tu divida il maggiore per il minore; e se da questa divisione non avanzerà nulla, allora il numero minore sarà la loro massima misura comune, come in $\frac{12}{72}$: e se dalla stessa divisione avanzerà qualcosa, conservalo come primo resto per il quale dividerai il numero minore; se nulla avanzerà da questa divisione, allora il primo resto sarà la misura comune dei numeri come in $\frac{10}{22}$, la cui misura comune è 2: perciò diviso 22 per 10, resterà 2, per il quale il 10 si divide interamente: e se dalla divisione del numero minore per il primo resto avanzasse qualcosa, lo chiamerai secondo resto: se il primo numero si divide interamente in esso, allora il secondo resto sarà la misura comune dei numeri, come in $\frac{12}{20}$, la cui misura comune è 4: perché, diviso 20 [NdT] per 12 , resta 8; diviso 12 per esso, resta 4, per il quale il 12 si divide interamente: e se dalla divisione del numero maggiore avanzerà qualcosa lo chiamerai ancora terzo resto, per esso dividerai il numero minore e farai sempre così finché nel numero maggiore non risulti un qualche resto per il quale il minore si divida perfettamente o finché nel numero minore non risulti un resto per il quale si divida il maggiore; e quel resto sarà la misura comune e massima, come in Euclide viene esposto con chiare dimostrazioni.

Espone l'algoritmo euclideo del massimo comun divisore

$72 = 6 \times 12 + 0$
6 è il MCD di 72 e 12

$22 = 2 \times 10 + 2$
$10 = 5 \times 2 + 0$
2 è il MCD di 22 e 10

$20 = 1 \times 12 + 8$
$12 = 1 \times 8 + 4$
$8 = 2 \times 4 + 0$
4 è il MCD di 20 e 12

e nella seconda parte come sommare frazioni semplici tramite il calcolo del minimo comune multiplo

(VI.3.6 ; G: VI.55-56) **E**d è da notare che (PdA) molte frazioni, che sono sotto linee diverse, possono essere ridotte ad una sola linea di frazione, cioè alle parti di un solo numero come sarà dimostrato a suo luogo. Ma qui ho ritenuto necessario mostrare in quale modo si uniscono due fazioni che sono sotto due linee: moltiplica il numero sotto la prima linea per il numero sotto la seconda; e ciò che risulta ponilo sotto una linea: poi moltiplica il numero sopra la prima linea per il numero che è sotto la seconda; e il numero che è sopra la seconda per il numero che è sotto la prima; unisci queste due moltiplicazioni; e poni ciò che ne verrà sopra la linea di frazione, e avrai ciò che hai cercato. Per esempio: vogliamo sommare $\frac{1}{2}$ con $\frac{2}{5}$, moltiplica il 2 per il 5 che sono sotto la linea, farà 10, che poni sotto una linea; e moltiplica l'1 che è sopra il 2 per 5, e il 2 che è sopra il 5 per il 2 che è sotto la linea, farà 5 e 4, cioè 9 : questo 9 ponilo sopra la linea, e avrai $\frac{9}{10}$ in luogo di $\frac{2}{5}\ \frac{1}{2}$. Altrimenti fa i decimi dall'uno intero, saranno 10 decimi: perciò per $\frac{1}{2}$ avremo $\frac{5}{10}$, e per $\frac{2}{5}$ avremo $\frac{4}{10}$; e così per $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$ avremo $\frac{9}{10}$, come abbiamo detto.

somma di frazioni

$\frac{2}{5}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5+4}{10}$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$

(VI.3.7 ; G: VI.58-59) **E** sebbene in questi due modi si possano ridurre due frazioni di due linee a una sola linea, tuttavia insegnerò come procedere in modo più diretto con le frazioni che hanno sotto la linea numeri comunicanti [*con fattori in comune*]. Così se vorrai ridurre a una sola frazione $\frac{2}{9}\ \frac{1}{3}$, poiché 3 e 9, che sono sotto la linea, sono comunicanti fra loro e il loro numero comune è il 3, dividi uno di questi numeri, cioè 3, o 9, per 3, cioè per la loro misura comune e moltiplica ciò che ne risulta per l'altro numero, e risulterà 9 come denominatore. Per esempio: moltiplicata la terza parte di 3 , cioè 1, per 9, o moltiplicata la terza parte di 9 per 3, sicuramente da qualunque moltiplicazione risulta il predetto 9: ponilo sotto una linea di frazione, e moltiplica 1, che è sopra il 3, per la terza parte di 9, farà 3 che conservi in mano; e moltiplica il 2 che è sopra il 9 per la terza parte di 3, cioè per 1, farà 2; che aggiungi al 3 serbato, farà 5; che poni sopra la linea sotto la quale è posto il 9, e avrai $\frac{5}{9}$ per $\frac{2}{9}\ \frac{1}{3}$.

Introduce il minimo comune multiplo

$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{3+2}{9} = \frac{5}{9}$

Conclusioni

Abbiamo visto i principali algoritmi dei primi 7 capitoli.

Per concludere voglio dire cosa si potrebbe fare per migliorare ed espandere questo lavoro.

Si potrebbe implementare i restanti algoritmi, in particolare:

- l'algoritmo di disgregazione del capitolo 7
- gli algoritmi dei capitoli 13-15, dedicati all'algebra

Si potrebbero implementare delle interfacce grafiche per rendere più chiaro anche visivamente come funzionano gli algoritmi, soprattutto quelli che si avvalgono di diagrammi.