

- 定义 $d_{pos,a,b,c}$, 代表着 pos 位置之前的数全部已经完毕了, 而 $pos, pos + 1, pos + 2$ 位置上的数分别是 a, b, c .
- 那如何从当前 pos 转移到 $pos + 1$? 有以下两个结论:
- 1: 设每一个操作记作 s_i , 则操作的集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_i\}$, 如果经过 S 集合操作后, 能得到目标序列, 称 S 为操作集。如果 s_i 操作的第一个数是 a , 则称 s_i 是对 a 的一个操作。容易得到: 操作的顺序对结果是没有影响的。
- 2: 设要从一个初始序列 $abcd \dots$ 转移到 $ABCD \dots$, 那么可以对所有操作进行排序, 对 a 的操作排在最前面, 对 b 的操作排在后面, 以此类推。可以得到, 在元素最少的操作集中, 所有对 a 的操作都是一个顺序的。证明: 设操作集 $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$, 设前 i 个操作是对 a 进行的。那么经过 $S' = \{s_1, s_2, \dots, s_i\}$ 后, a 就被转化为了 A , 设 b 变为了 b' , c 变为了 c' , S' 中有向上的和向下的, 分为 S'_{top}, S'_{down} 。不失一般性, 设经过 S'_{top} 的子集操作后 a 变为了 A , 也就是向上操作了 $d = (A - a + 10)$ 次。如果 b', c' 是分别处于 b 与 $(b + d) \bmod 10, c$ 与 $(c + d) \bmod 10$ 之间, 那么在对 a 进行 d 次向上操作时, 容易得到一种构造方法, 把 b 变成 b' , c 变成 c' , 那就可以用这些操作替换 S , 操作数减少。如果 a', b' 都不处于上面描述的区间里, 不妨设 b 向下移动的更大, 移动了 d' , 那么可以确定的是, S' 中的元素个数必然大于等于 $d + d'$, 那么我们就可以先单独把 a 向上操作 d 次, 在对 b 向下操作 d' 次, 同样的就能把 a 变成 A, b 变成 b', c 变成 c' , 把这些操作替换 S' , 得到的操作数只会减少。如果 a', b' 中只有一个位于上面描述的区间, 同样的我们可以构造出一种操作集合, 它的元素更少, 且对 a 的操作同向。
- 进一步的, 可以得到, 在最少操作集中, 对同一位置的操作都是同向的。