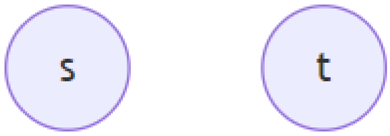
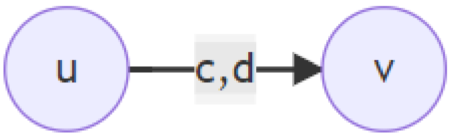
最小费用循环流：

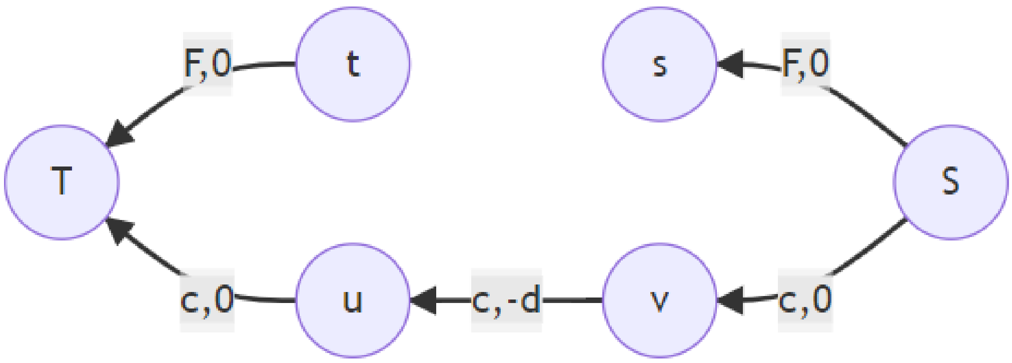
参考：https://blog.csdn.net/neweryyy/article/details/105792033

引理：

原图G源点汇点分别为s,t，流量为F时最小费用流的费用为F_1.构造一新图，构造规则为：引入新源点、新汇点S,T,对于原图中一边$e<u,v>$，其容量为$c(e)$,边权$d<0$，从 S 向 s 连一条容量为 F 费用为 0 的边，从t 向T 连一条容量为 F 费用为 0 的边；再从 S 向 v 连一条容量为 $c(e)$费用为 0 的边，从 u 向 T连一条容量为 $c(e)$ 费用为 0 的边.







则F_1=新图中流量为$F+\sum_{负权边}c(e)$的最小费用流的费用+$\sum_{负权边}c(e)\cdot d(e)$.

引理证明：

设原图为流量是F,最小费用流时，e这条边输送了t,那么把这条管道截断，把这t的流量通过新建的$<u,T>$边送给T,同理$<S,v>$边补充t给v,其它边上的情况保持不变，边$<t,T>,<S,s>$满载F.最后从$<s,v,u,T>$路径上补充$c(e)-t$的流量，则在新图中构建出了流量$F+\sum_{负权边}c(e)$的网络。从这个构建方法中，容易得到：F_1=新图中流量为$F+\sum_{负权边}c(e)$的最小费用流的费用+$\sum_{负权边}c(e)\cdot d(e)$.

同样的方法，可以反过来构造，由新图网络构造出原图网络。

则得证。

证明：

即流量为0时的最小费用。则$F=0$,则$< t,T >,< S,s >$是断开的。用上面的方法构造出这个新图。则答案就为新图中流量为$\sum_{负权边}c(e)$的最小费用流的费用+$\sum_{负权边}c(e)\cdot d(e)$.

由引理中证明的存在性，新图中流量为$\sum_{负权边}c(e)$即是新图新边满载的最大流，且存在。

如果有一点，和S有c_1的总流量，T有c_2的总流量。最后这些新的边都是满载的，且这些与S,T直接相连的边费用为0，则就可以直接相抵消，结果不变。

证毕。