

## SSP算法证明:

### 引理:

对于一个网络,  $G(V, E)$ , 存在着两种合法的流量分布  $f, f_1$ , 它们流量大小相等, 则必然可以用多个圈使得它们间相互转化。

构造一张新图  $G(V, E')$ ,  $< u, v >$  是原图的实边,  $< u, v > = f(u, v) - f_1(u, v)$ , 新图中的边一定是合法可以走的, 其数值大小一定小于容量, 容易得到对于任意结点都满足流量守恒, 这和电流回路是一样的, 可以分为多个子回路, 并且子回路的流量一定小于容量。

可以从源点出发, 画一个圈后回到源点, 重复画完其它圈, 就从  $f$  转化为了  $f_1$ 。

### 证明:

对于一张确定的图, 起始条件是初始图里没有负圈, 设  $f_i$  表示流量为  $i$  时它的最小权。那么自然得到  $f_0 = 0$ , 进行一次寻找得到最短路, 则得到的  $f_1$  是此时的最小值。

假设在上面的操作后, 得到的残余网络中有负圈, 则只要给负圈通流量, 则  $f_1$  就会变小, 矛盾。则此时残余网络中无负圈。那么可以进行一次寻找得到最短路, 值为  $f_2$ , 下面证明  $f_2$  确实是最小值。假设存在更小的  $f'_2$ ,  $f'_2$  由  $f'_1$  寻找一次得到, 这个路径记为  $f'_2 - f'_1$ , 起始点与终点肯定是源点与汇点, 它的长度也是这个值。我们同样可以由  $f_1$  开始构造出  $f'_2$ , 在  $f_1$  的基础上先画引理中所描圈, 画完之后就变成了  $f'_1$ , 再走  $f'_2 - f'_1$  这条路径, 这样, 就构造出了  $f'_2 - f_1$  这条路径, 它的值更小, 则矛盾, 则  $f_2$  是最小值。

以此类推, 归纳成立。