

匈牙利算法证明

引理

在一个没有达到最大匹配的二分图中，如果找到了一条增广路
 $a_0 - > b_0 - > a_1 - > b_1 - > a_2 - > b_2 \dots a_n - > b_{n+1}$.那么从 a_i 开始往后，也是一条增广路。

证明：

如果，在运行到 a_i 时， a_i 构建出了增广路，容易得到，在算法结束后， a_i 点仍是有边相连接的。

那么只需证明，在运行到 a_i 时，如果 a_i 无法构建增广路，那么在程序结束后，对 a_i 点仍无法构建出增广路。

反证。假设在程序结束时，以 a_i 为起始点构建出了一条增广路： $a_i, b_{i_1}, a_{i_2}, b_{i_2}, a_{i_3}, b_{i_3} \dots$

那么，在运行到 a_i 时， $a_i - > b_{i_1}$ 边是存在的。那么此时一定存在边 $a_{i'} - > b_{i_1}$ ，（如果 $i' = i_2$ ，就继续往下找，总能找到不相等的点）不然就找到一条增广路了。但是 b_{i_1} 只能和一个点相连，则后来运行过程中，一定构造出了某条增广路，包含了 $a_{i'}$ 这个结点。由引理，也就有从 $a_{i'}$ 点开始的一条增广路。回到了开始的证明过程。

以此往复，则无穷无尽，而边有限，矛盾。

所以该点不能再构造出增广路。

得证。