

第一次调用发生器，会随机生成 R 个数，使其中一些数对应着某一些事件的发生，剩余的数(假设 k 个)对应着第二次调用发生器，那么前后两个数可以看成 R 进制的数，其中 $k \cdot R$ 个数对应着合法的第二次调用的情形，则设一个事件 x 在第一次调用中对应 d_1 个数，第二次调用中对应 d_2 个数，则在这两次中它发生的概率为 $\frac{d_1}{R} + \frac{k}{R} \cdot \frac{d_2}{R}$ 。第二次调用可以看作在总共的 R^2 个数中，选取这 $k \cdot d_2$ 个数(低位是 k 个数中的某一个，高一位是 d_2 个数中的某一的)的概率。

首先，定义：

- 有 n 个事件，事件 x_i 发生的概率为 $\frac{a_i}{b_i}$ 。
- $D(x, k)$ 表示在第 k 层调用中(共 R^k 个数)，对应着事件 x 发生的数的个数。
- H_i 表示第 $i-1$ 层中合法的数中对应着进行第 i 次调用的数的个数。则 $H[1] = 1$ 。

由上面的定义，可以得到：

- $\frac{a_i}{b_i} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(i, k)}{R^k}$ 。
- $H_i \cdot R - \sum_{x=1}^{x=n} D(x, i) = H_{i+1}$ 。
- $H_i \cdot R^i - R^{i-1} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} D(x, 1) - R^{i-2} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} D(x, 2) - \dots - \sum_{x=1}^{x=n} D(x, i) = H_{i+1}$ 。
- $E = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_i}{R^{i-1}}$ 。

由第一个式子可以看出， $D(i, k)$ 可以看成 $\frac{a_i}{b_i}$ 的类 R 进制表示(每一位上的数可以大于 R)。不妨设某一个事件 x 的 $D(x, k) = t1 > R$, $D(x, k-1) = t2$, 很显然，可以化为 $D(x, k) = t1 - R$, $D(x, k-1) = t2 + 1$ 。在这种变换下，显然 $H_{k-1}, H_{k-2}, H_{k-3} \dots$ 不会改变值，经过简单的计算也得到， $H_{k+1}, H_{k+2}, H_{k+3} \dots$ 也不会改变值，而 H_k 变小。因此最优时，就是能够进位的话就进位，这其实就是 $\frac{a_i}{b_i}$ 的 R 进制表示。

下面讨论 $E = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_i}{R^{i-1}}$ 。在上面的情况下，得到：对于任意 $H_i, H_i < n$, 恒成立。

这两种解释：

1. 若 $H_i \geq n$, 则下一次调用时，合法的数有 $H_i \cdot R \geq n \cdot R$ 个，则下一步(或更下一步)必然有一个事件的 $D(x, i) > R$, 由上面的讨论，矛盾。
2. 若 $H_i \geq n$, 则至少可以为 n 个事件的每一个分配一个数，这样，期望值一定减少。

那么， $E = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_i}{R^{i-1}}$ 收敛。