匈牙利算法证明

引理

在一个没有达到最大匹配的二分图中，如果找到了一条增广路 $a_0->b_0->a_1->b_1->a_2->b_2...a_n->b_{n+1}$.那么从$a_i$开始往后，也是一条增广路。

证明：

如果，在运行到a_i时，a_i构建出了增广路，容易得到，在算法结束后，a_i点仍是有边相连接的。

那么只需证明，在运行到a_i时，如果a_i无法构建增广路，那么在程序结束后，对a_i点仍无法构建出增广路。

反证。假设在程序结束时，以a_i为起始点构建出了一条增广路：$a_i, b_{i_1}, a_{i_2}, b_{i_2}, a_{i_3}, b_{i_3}...$

那么，在运行到a_i时，$a_i->b_{i_1}$边是可以连接的（非匹配）。那么此时一定存在边$a_{i'}->b_{i_1}$（匹配），(如果$i'=i_2$，就继续往下找，非匹配、匹配的边始终交替出现，总能找到不相等的点）不然就找到一条增广路了。但是b_{i_1}只能和一个点相连，则后来运行过程中，一定构造出了某条增广路，包含了$a_{i'}$这个结点。由引理，也就有从$a_{i'}$点开始的一条增广路。回到了开始的证明过程。

以此往复，则无穷无尽，就构造出了无穷长的增广路，而边有限，那么只能是成环了。

然而增广路不可能是环，与它的定义矛盾。

所以该点不能再构造出增广路。

得证。