solution

第一次调用发生器，会随机生成R个数，使其中一些数对应着某一些事件的发生，剩余的数(假设k个)对应着第二次调用发生器，那么前后两个数可以看成R进制的数，其中$k*R$个数对应着合法的第二次调用的情形，则设一个事件x在第一次调用中对应d_1个数，第二次调用中对应d_2个数，则在这两次中它发生的概率为$\frac{d_1}{R}+\frac{k}{R}\cdot\frac{d_2}{R}$.第二次调用可以看作在总共的$R^2$个数中，选取这$k\cdot d_2$个数(低位是$k$个数中的某一个，高一位是$d_2$个数中的某一个)的概率。

首先，定义：

- 有n个事件，事件x_i发生的概率为$\frac{a_i}{b_i}$.
- $D(x,k)$表示在第k层调用中(共R^k个数)，对应着事件x发生的数的个数。
- H_i表示第$i-1$层中合法的数中对应着进行第i次调用的数的个数。则$H_1=1$.

由上面的定义，可以得到：

- $\frac{a_i}{b_i}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D(i,k)}{R^k}$.
- $H_i\cdot R-\sum_{x=1}^{x=n}D(x,i)=H_{i+1}$.
- $H_i\cdot R^i-R^{i-1}\cdot\sum_{x=1}^{x=n}D(x,1)-R^{i-2}\cdot\sum_{x=1}^{x=n}D(x,2)-...-\sum_{x=1}^{x=n}D(x,i)=H_{i+1}$.
- $E=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{H_i}{R^{i-1}}$.

由第一个式子可以看出，$D(i,k)$可以看成$\frac{a_i}{b_i}$的类R进制表示(每一位上的数可以大于R)。不妨设某一个事件x的$D(x,k)=t1>R,D(x,k-1)=t2$,很显然，可以化为$D(x,k)=t1-R,D(x,k-1)=t2+1$.在这种变换下，显然$H_{k-1},H_{k-2},H_{k-3}...$不会改变值，经过简单的计算也得到，$H_{k+1},H_{k+2},H_{k+3}...$也不会改变值，而$H_k$变小。因此最优时，就是能够进位的话就进位，这其实就是$\frac{a_i}{b_i}$的R进制表示。

下面讨论$E=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{H_i}{R^{i-1}}$.在上面的情况下，得到：对于任意$H_i,H_i<n$,恒成立。

这有两种解释：

1. 若$H_i>=n$,则下一次调用时，则本来所有$D(i,k)$可以加1，而这一位的1大于后面所有位取最高值R,而$\frac{a_i}{b_i}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D(i,k)}{R^k}$必须成立.则下一步(或更下一步）必然有一个事件的$D(x,i)>R$,由上面的讨论，矛盾。
2. 若$H_i>=n$,则至少可以为n个事件的每一个分配一个数，这样，期望值一定减少,矛盾。

那么，$E=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{H_i}{R^{i-1}}$收敛。