

# Régime harmonique

Outils Numériques / Semestre 5 /  
Institut d'Optique / B1\_4

Cas des équations  
différentielles

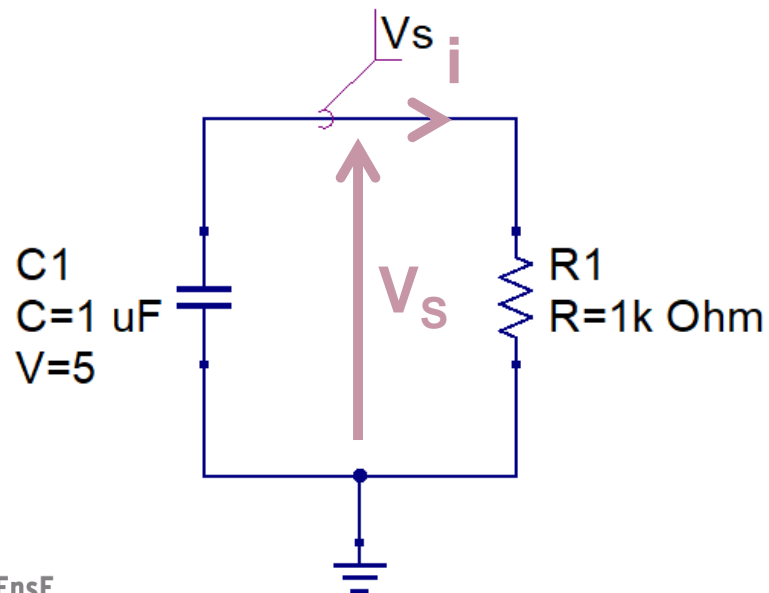
# Approche analytique



- Approche analytique

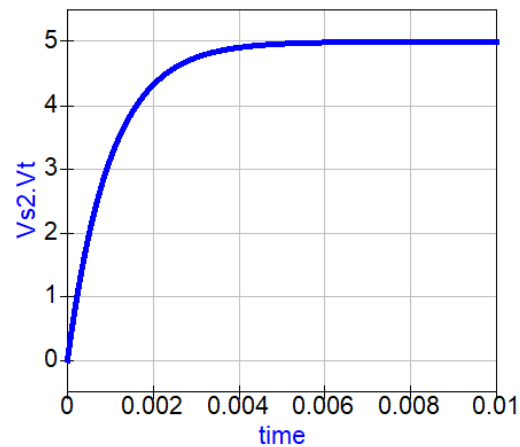
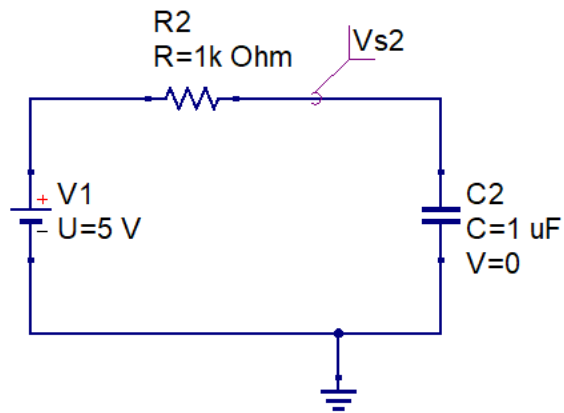
$$\Rightarrow V_s = -R_1 \cdot C_1 \cdot \frac{dV_s}{dt}$$

*Equation différentielle d'ordre 1*

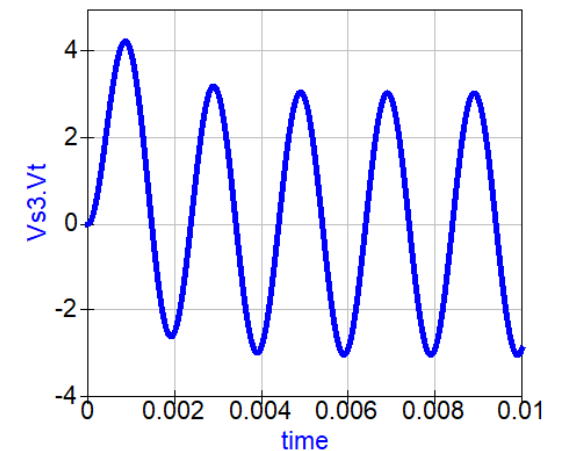
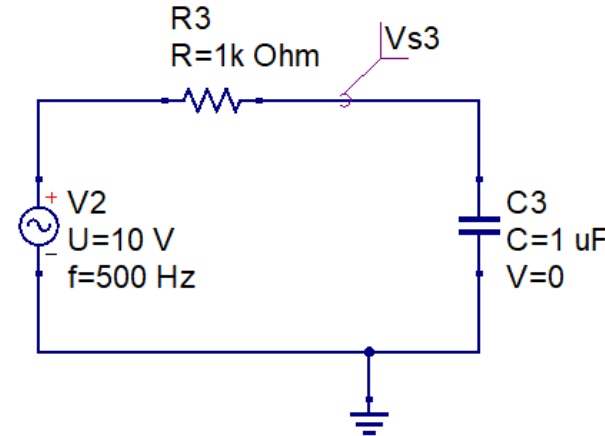


# Circuits similaires / Ordre 1

- Réponse à un échelon



- Régime forcé

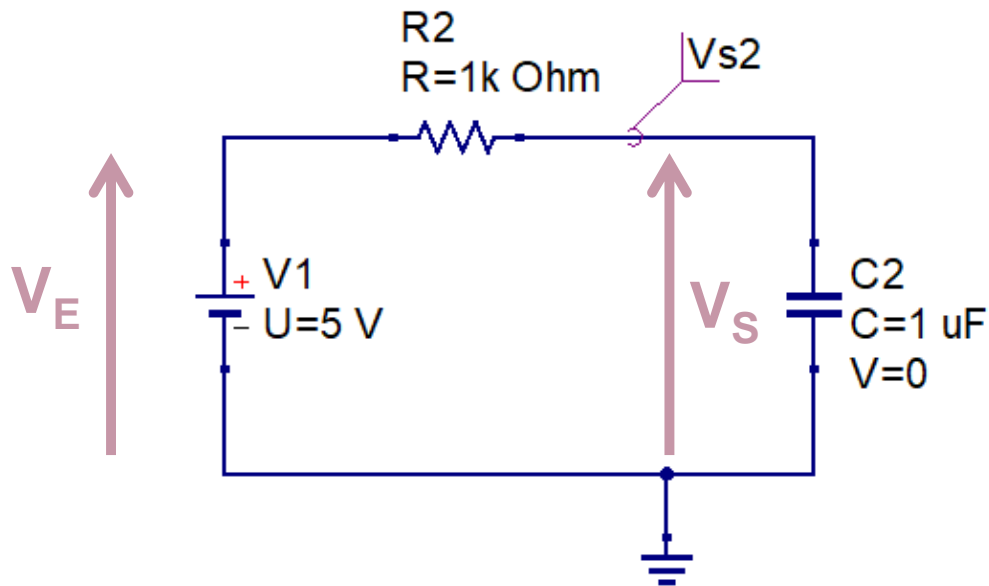


# Systeme linéaire d'ordre 1

- Filtre RC

- Fonction de transfert

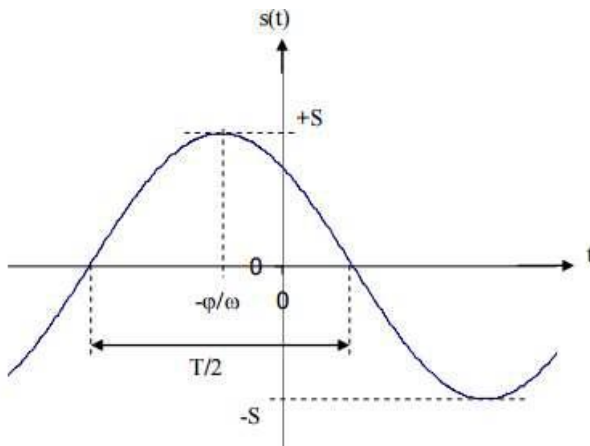
*Comportement fréquentiel*



$$H(p) = \frac{V_S}{V_E}$$

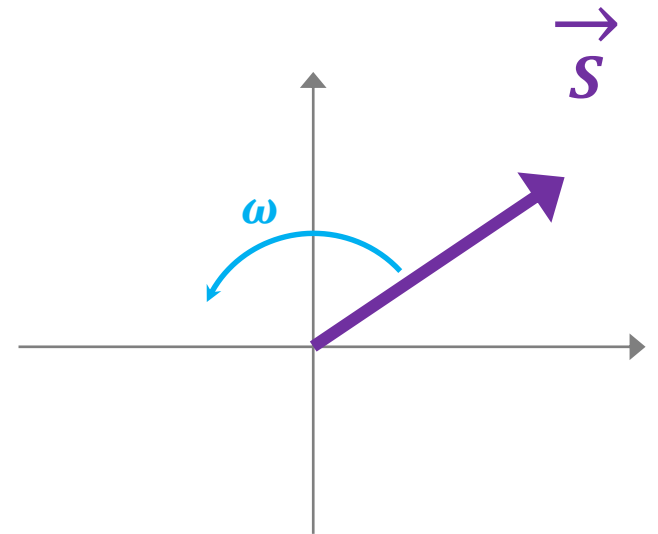
# Régime harmonique

- Système linéaire et invariant



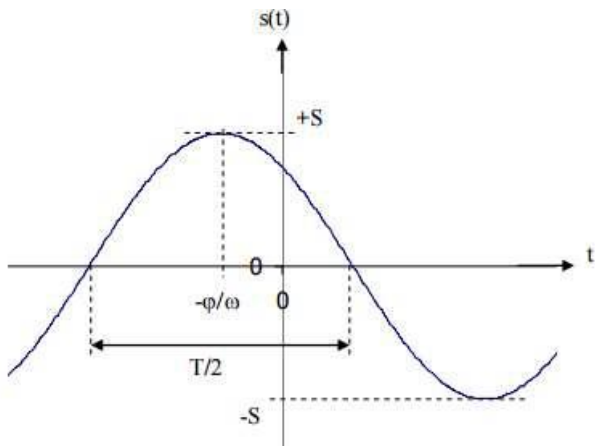
*Toutes les grandeurs physiques évoluent à la **même pulsation** !*

$$s(t) = S \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



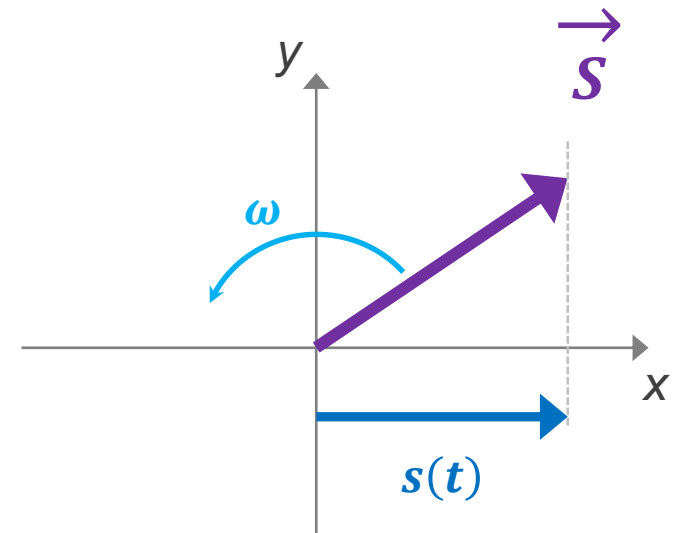
# Régime harmonique

- Système linéaire et invariant
- Représentation de Fresnel



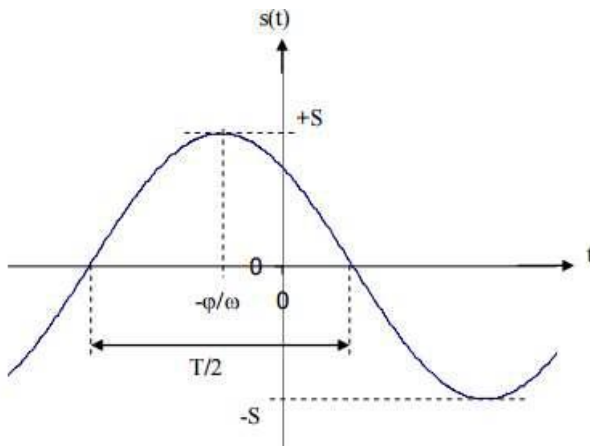
Toutes les grandeurs physiques évoluent à la **même pulsation** !

$$s(t) = S \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



# Régime harmonique

- Représentation complexe
- Représentation de Fresnel

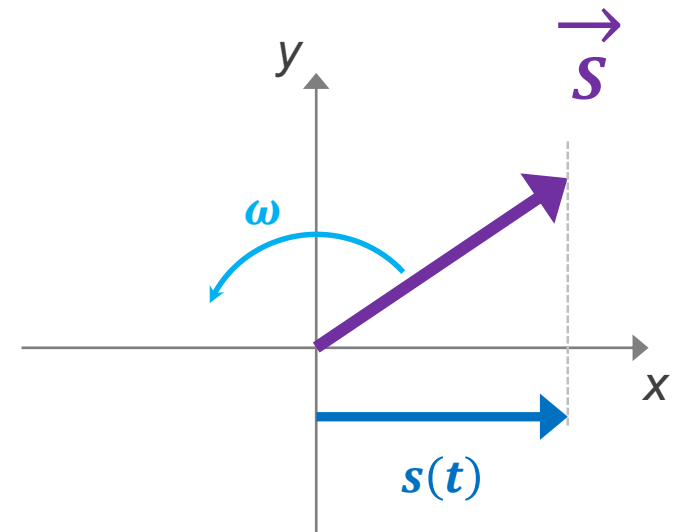


$$S(t) = S \cdot e^{-i(\omega \cdot t + \varphi)}$$

$$S(t) = \boxed{S \cdot e^{-i\varphi}} e^{-i\omega \cdot t}$$

$$s(t) = \Re(S(t))$$

Grandeur complexe



# Régime harmonique

- Représentation complexe

*Système linéaire et invariant*  
*Toutes les grandeurs physiques*  
*évoluent à la **même pulsation** !*

$$S(t) = S \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

Grandeur complexe

$$v(t) = V \cdot e^{-i\varphi 1} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

$$i(t) = I \cdot e^{-i\varphi 2} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

$$\Rightarrow \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V \cdot e^{-i\varphi 1}}{I \cdot e^{-i\varphi 2}}$$



# Régime harmonique

- Impédance complexe

$$Z_R = R$$

$$Z_C = \frac{1}{C \cdot p}$$

$$Z_L = L \cdot p$$

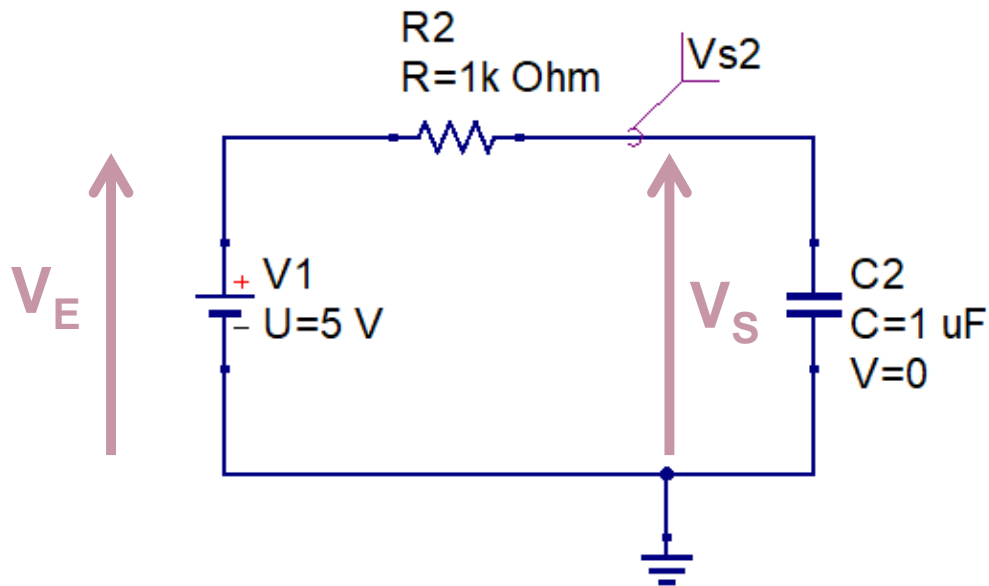
$$v(t) = V \cdot e^{-i\varphi_1} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

$$i(t) = I \cdot e^{-i\varphi_2} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

$$\Rightarrow \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V \cdot e^{-i\varphi_1}}{I \cdot e^{-i\varphi_2}}$$

# Systeme linéaire d'ordre 1

- Filtre RC

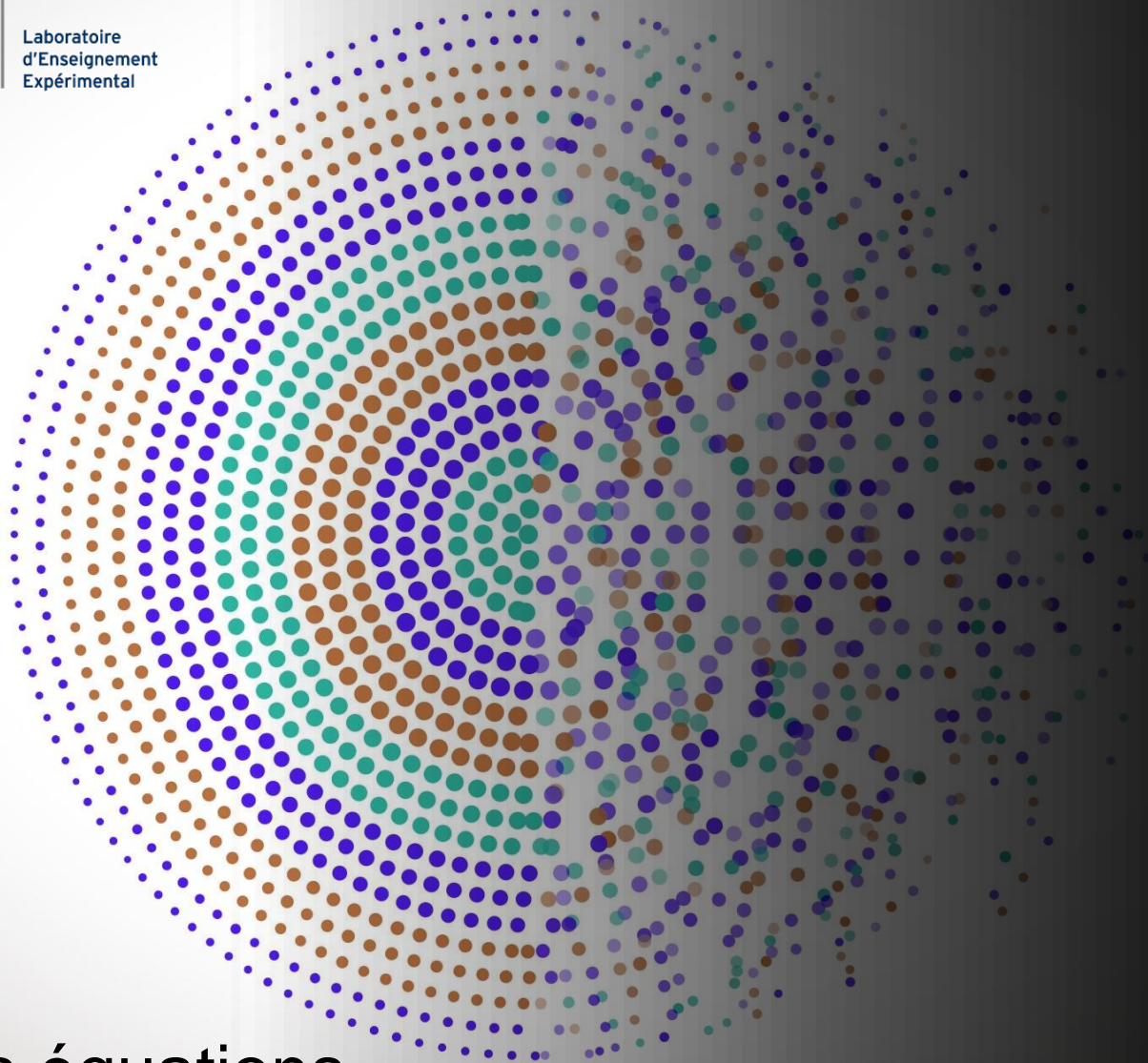


- Fonction de transfert

*Comportement fréquentiel*

$$V_S = V_E \cdot \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$



# Approche Système (control)

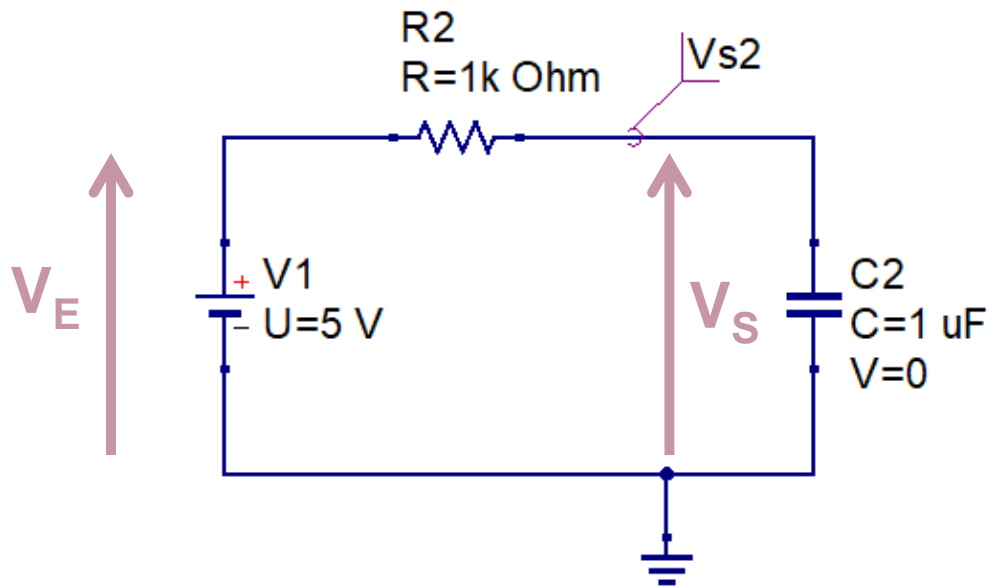
---

Outils Numériques / Semestre 5 /  
Institut d'Optique / B1\_4

Cas des équations  
différentielles

# Analyse d'un système linéaire

- Filtre RC



- Fonction de transfert

*Comportement fréquentiel*

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_s}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$

*Réponse en fréquence*

*Réponse indicielle*

*Réponse impulsionnelle*

# *control* pour l'étude des systèmes

- Définition d'un système

```
import control as ct
```

```
num = np.array( [aN, ... , ak, ... , a0] )  
den = np.array( [bN, ... , bk, ... , b0] )
```

```
tf_sys = ct.tf( num, den )
```

- Fonction de transfert

*Comportement fréquentiel*

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{num(p)}{den(p)}$$

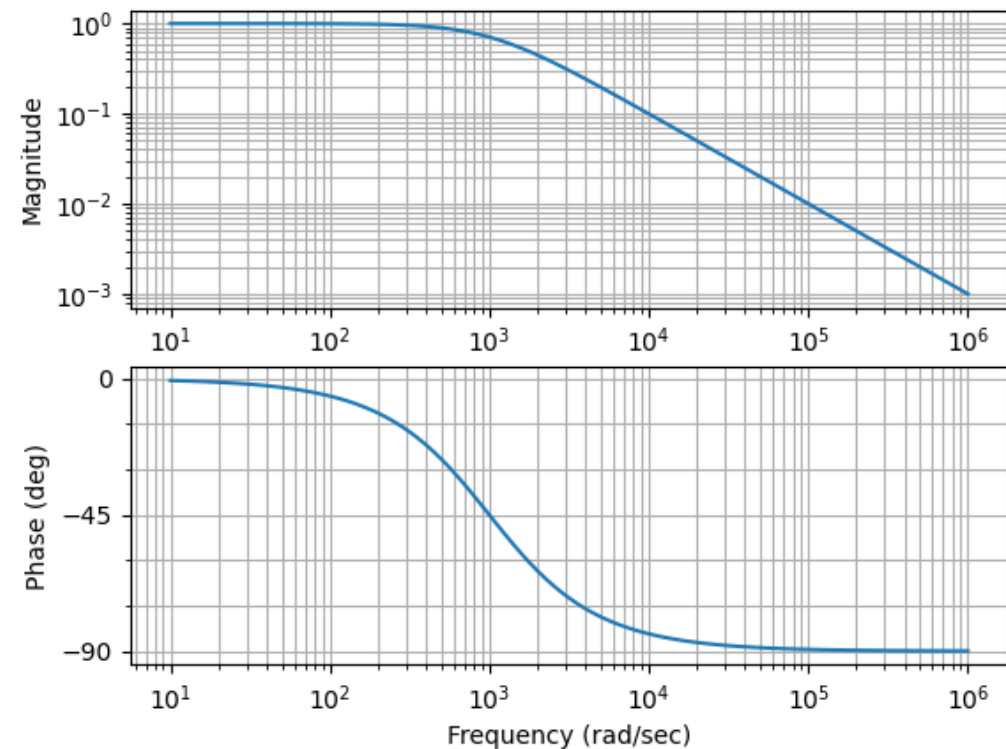
$$num(p) = \sum_{k=0}^N a_k p^k$$

$$den(p) = \sum_{k=0}^M b_k p^k$$

# *control* pour l'étude des systèmes

- Réponse en fréquence

```
ct.bode_plot(tf_sys)
```



# Réponse en fréquence / Filtre RC

**S'ENTRAINER**

- Comparaison

$$\rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$



+ Définir le système par sa fonction de transfert

+ Tracer le diagramme de Bode pour :

- R = 1 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 10 μF

```
ct.bode_plot( sys , omega=w)
```

# Réponse en fréquence / Filtre RC

OPTIMISATION

- Réponse en fréquence

```
w = np.logspace(start, stop, N)
```

```
mag, phase, w = ct.bode_plot(tf_sys, w,  
plot=False)
```

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$



**start** et **stop** sont des  
numéros de décade



# Réponse en fréquence / Filtre RC

**S'ENTRAINER**

- Comparaison

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$



+ Définir le système par sa fonction de transfert  
+ Tracer sur le même diagramme la réponse en fréquence des systèmes suivants :

- R = 1 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 10 μF

```
ct.bode_plot( sys , omega=w, plot=False)
```

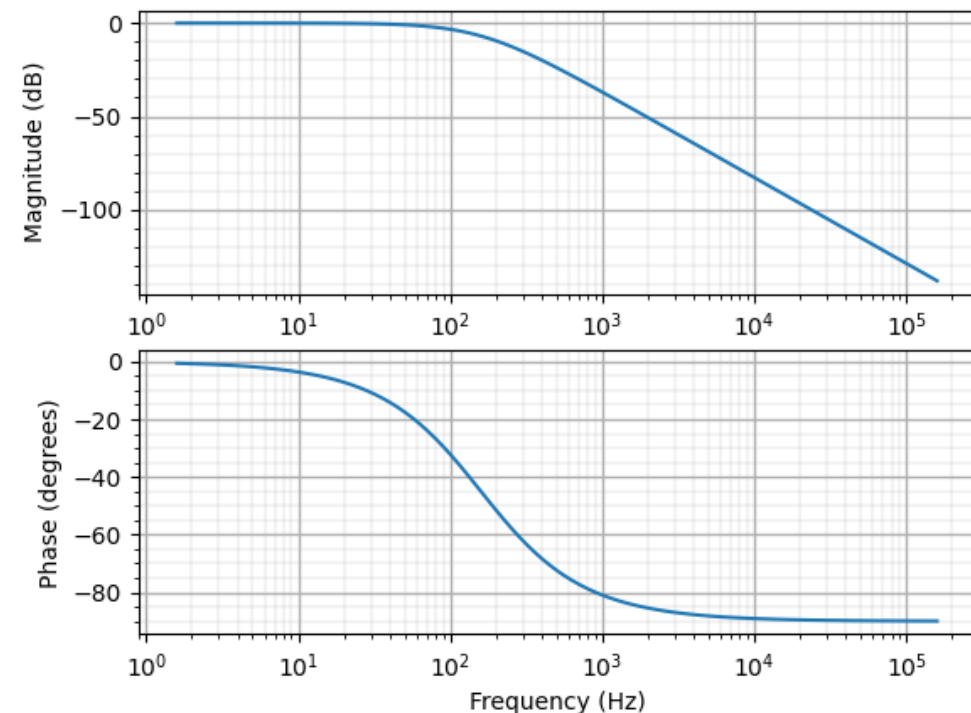
# Réponse en fréquence / Filtre RC

**OPTIMISATION**

- Affichage Bode

```
fig, axs = plt.subplots(2, 1)
fig.suptitle('Frequency Response ')
axs[0].plot(f, mag_db)
axs[0].set_ylabel('Magnitude (dB)')
axs[0].set_xscale('log')
axs[0].grid(which="major", linewidth = 1)
axs[0].grid(which="minor", linewidth = 0.2)
axs[0].minorticks_on()
```

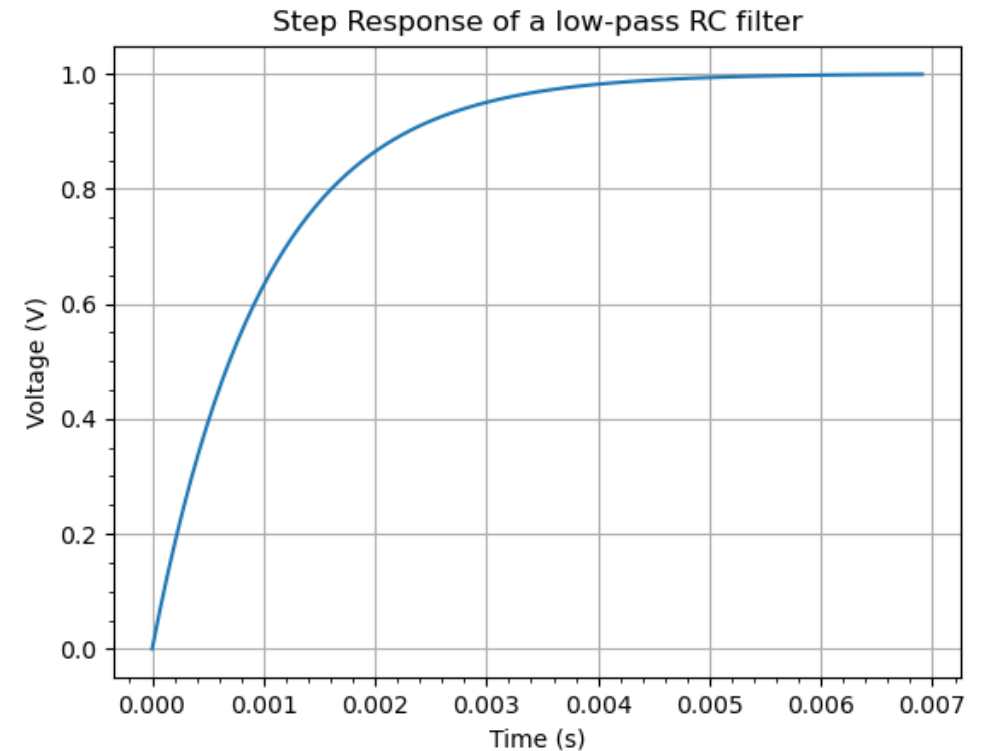
Frequency Response of a RC low-pass filter



# *control* pour l'étude des systèmes

- Réponse indicielle

```
t, y = ct.step_response(tf_sys)
```



# Réponse indicielle / Filtre RC

**S'ENTRAINER**

- Comparaison



+ Tracer sur le même diagramme la réponse indicielle des systèmes suivants :

- R = 1 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 10 μF

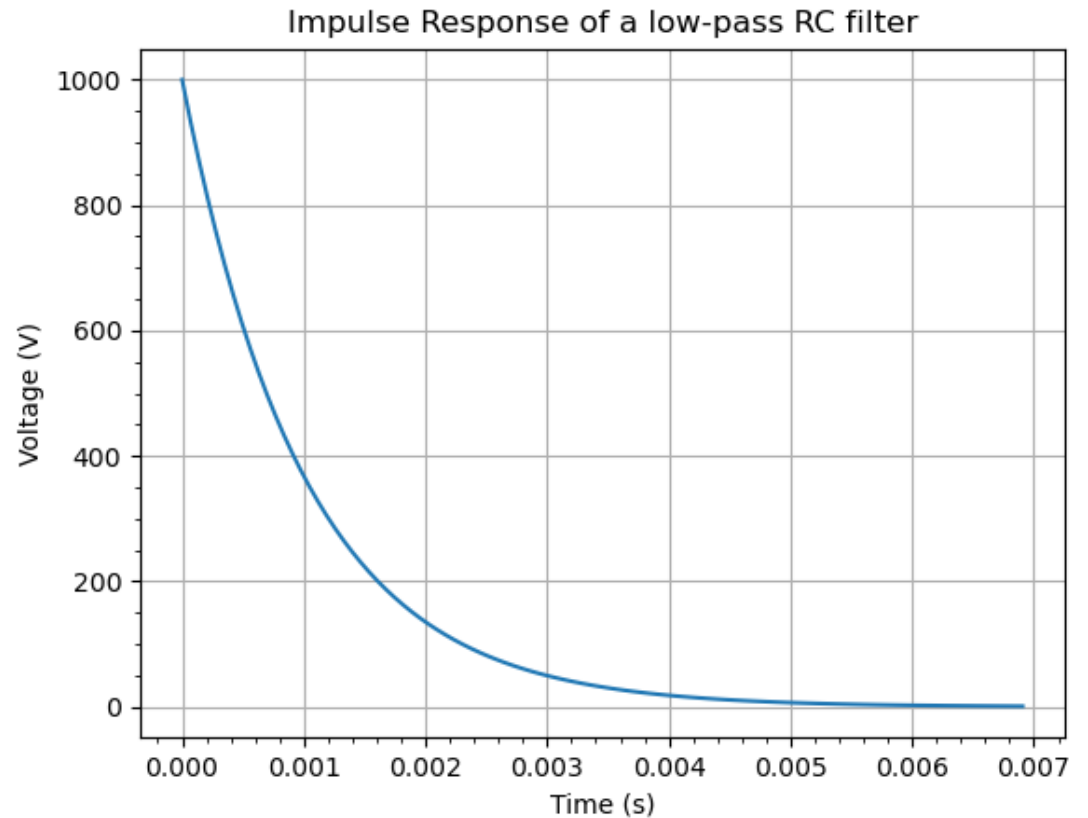
$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$

`ct.step_response( sys , T=t )`

# *control* pour l'étude des systèmes

- Réponse impulsionnelle

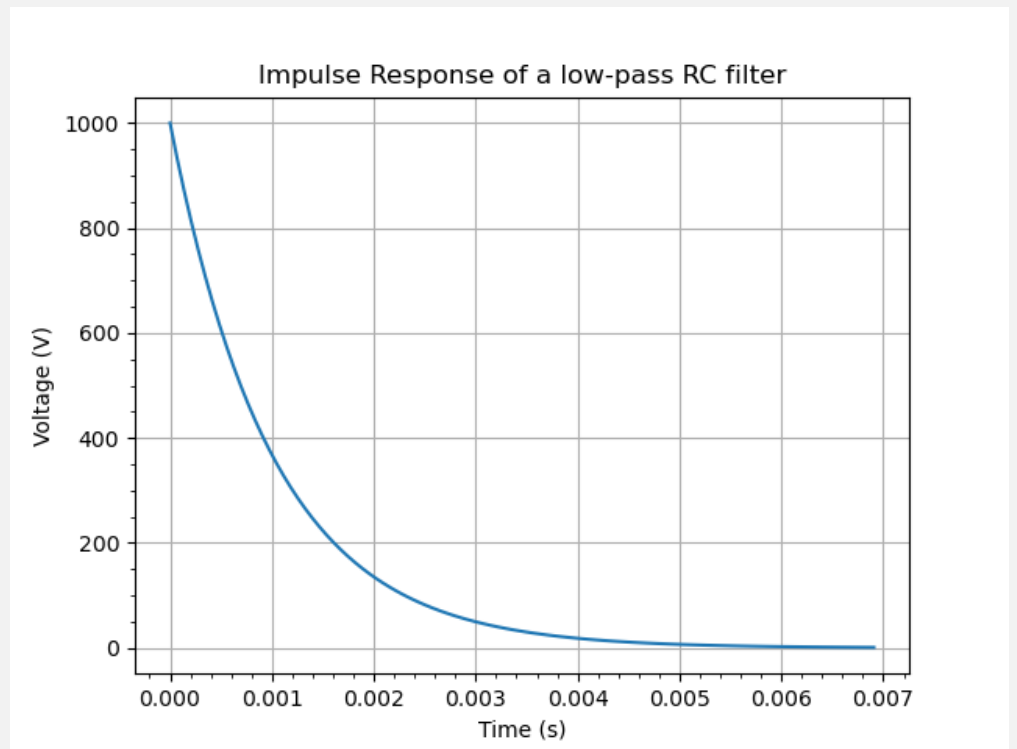
```
t, y = ct.impulse_response(tf_sys, T=t)
```



# Un peu de maths...

- Lien entre réponse en fréquence et impulsion ?

```
t = np.linspace(0, 1, 1001)
t, y = ct.impulse_response(tf_sys, T=t)
```



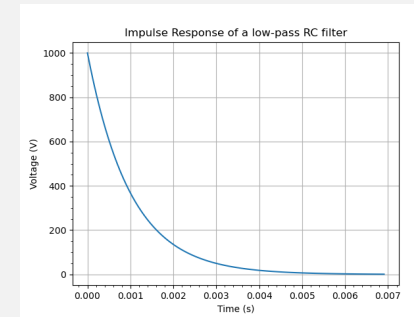
# Un peu de maths...

- Lien entre réponse en fréquence et impulsion ?

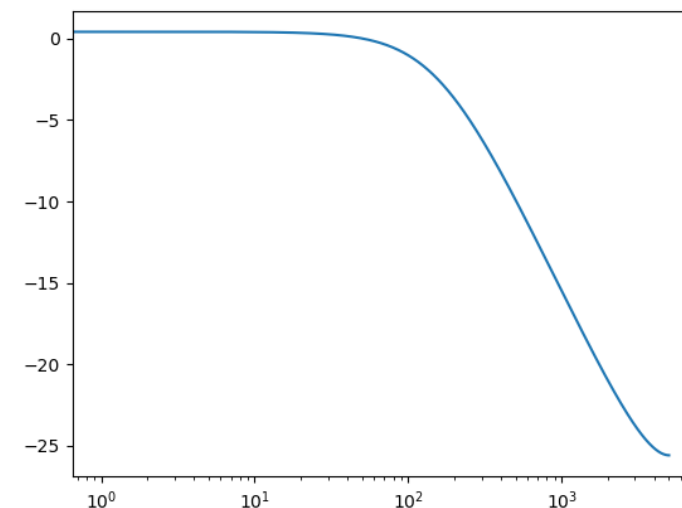
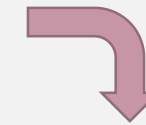
```
t = np.linspace(0, 1, 1001)  
t, y = ct.impulse_response(tf_sys, T=t)
```

```
import scipy as sc
```

```
tf = sc.fft.fft(y)/len(y)  
tf_half = tf[0:len(tf)//2]  
plt.figure()  
plt.plot(20*np.log10(np.abs(tf_half)))  
plt.xscale('log')  
plt.show()
```



Transformée  
de Fourier

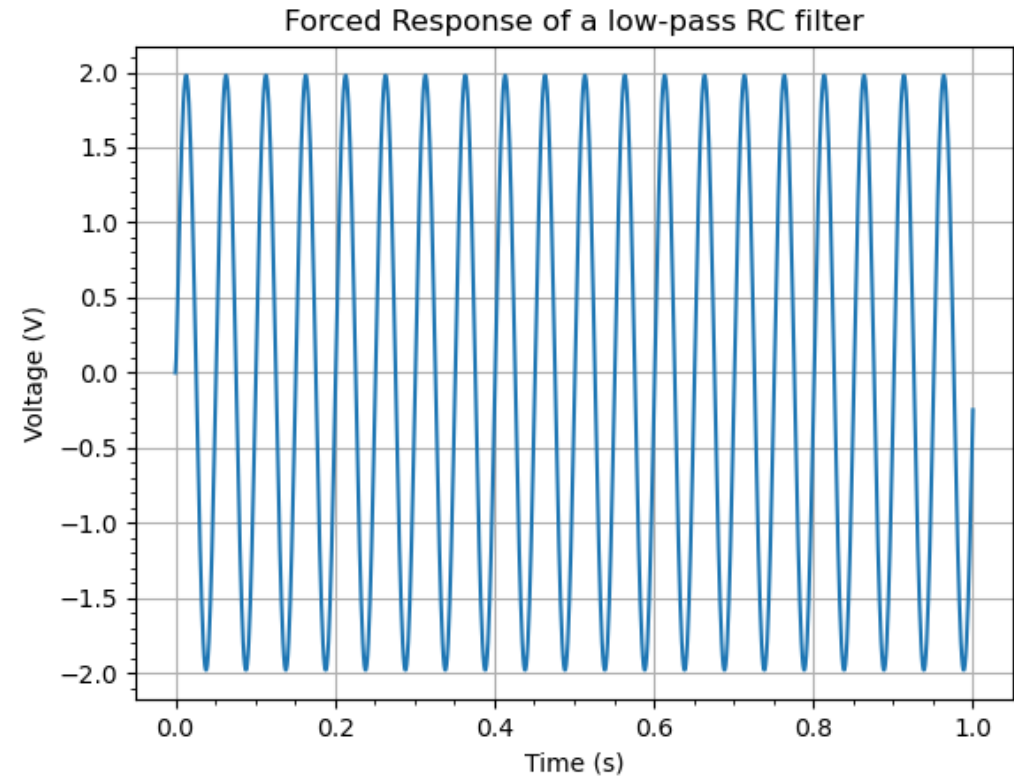


# *control* pour l'étude des systèmes

- Réponse forcée

```
t = np.linspace(0, 1, 1001)
u = 2 * np.sin(2*np.pi*20*t)

t, y = ct.forced_response(tf_sys, t, u)
```

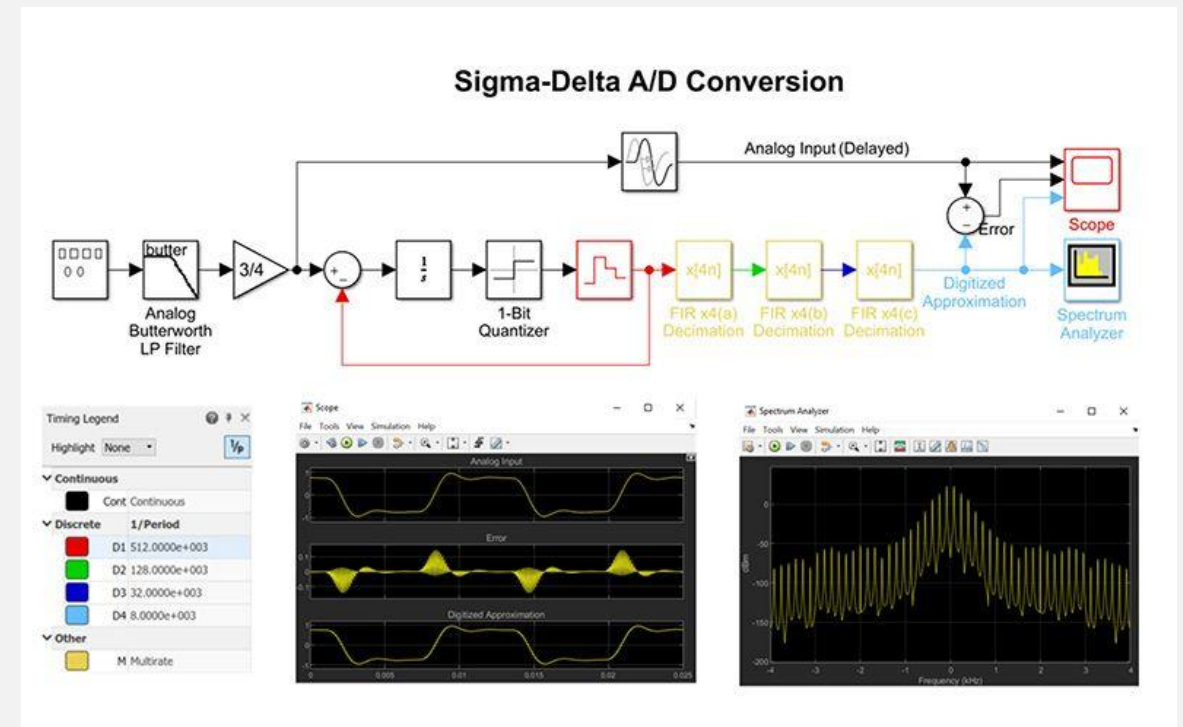




# Approche Système



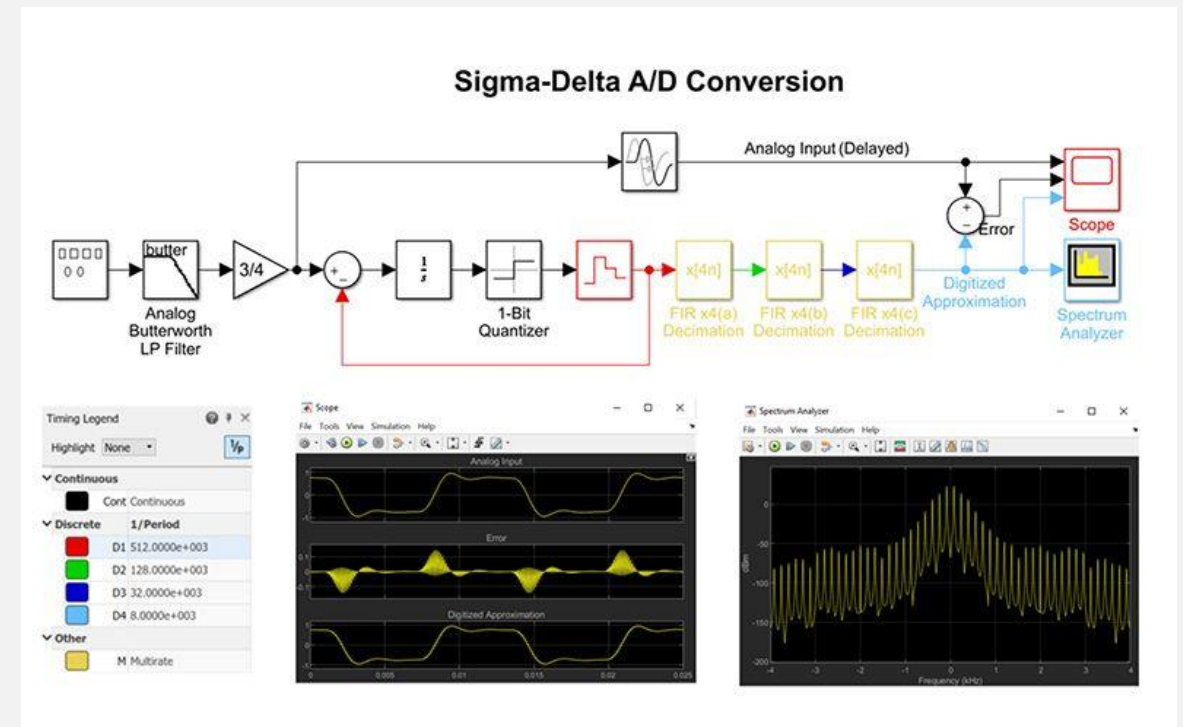
- MatLab et Simulink



# Approche Système



- MatLab et Simulink

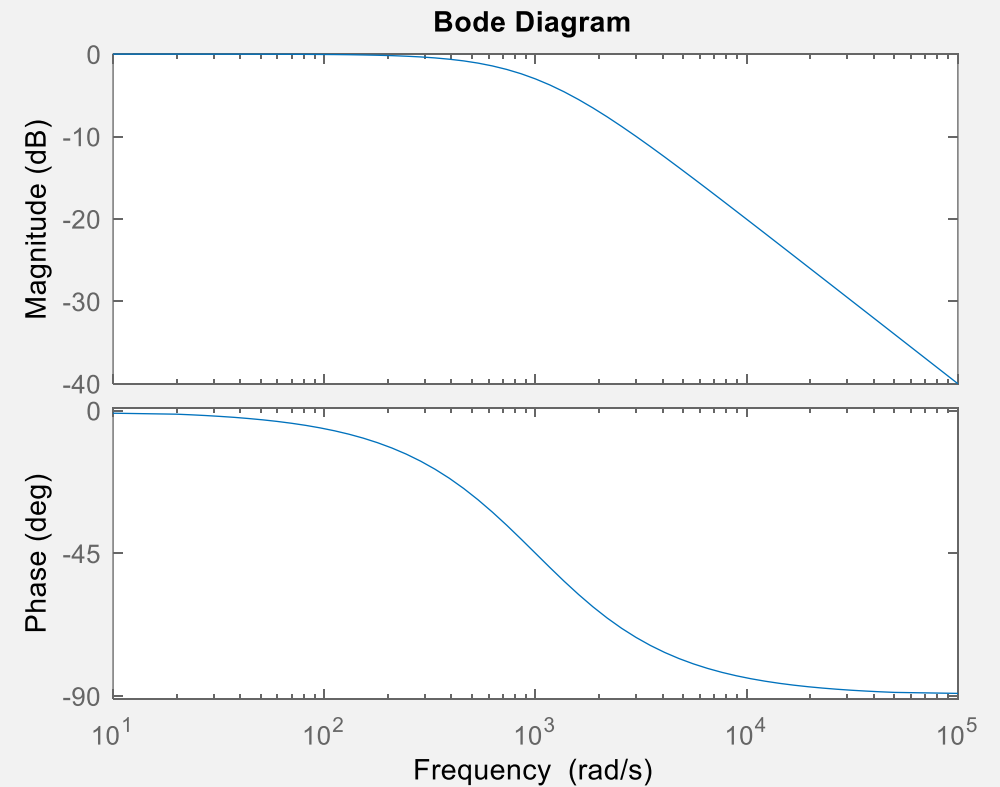


# Approche Système



- Filtre RC / Bode

```
R = 1e3;  
C = 1e-6;  
  
num = [1];  
den = [(R*C) 1];  
tf_sys = tf(num, den)  
  
bode(tf_sys)
```

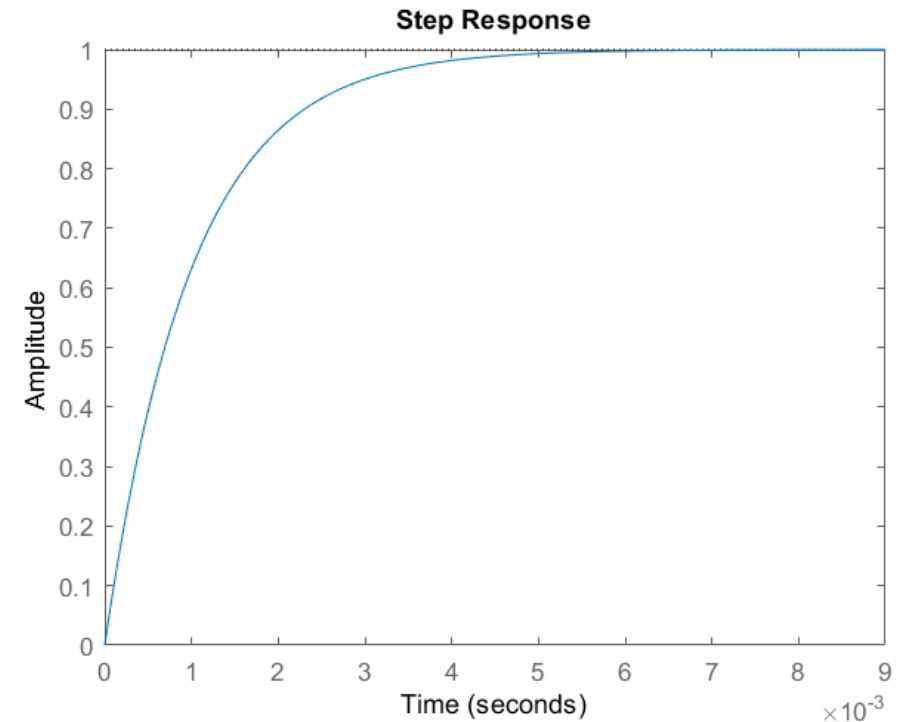


# Approche Système



- Filtre RC / Step

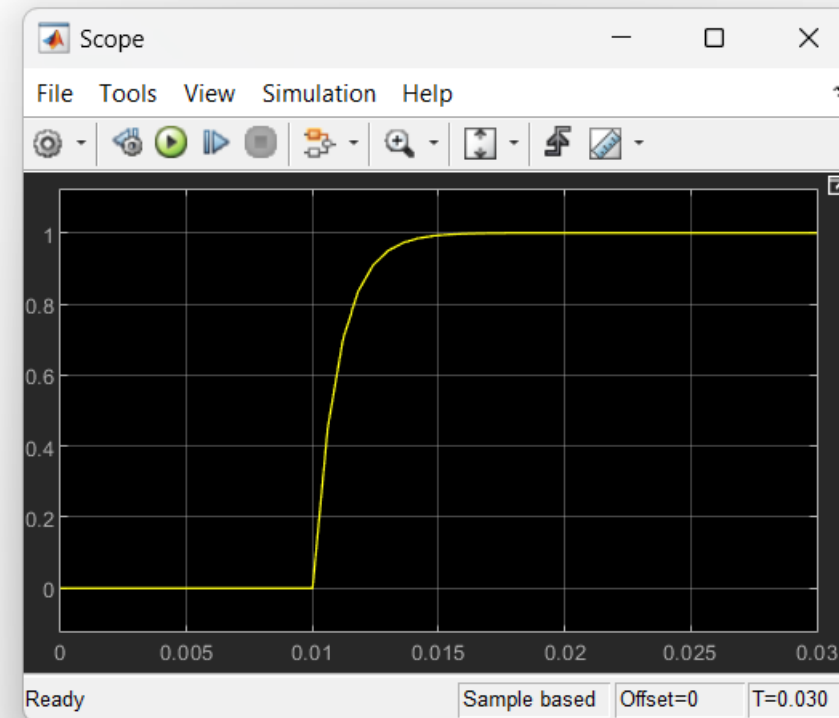
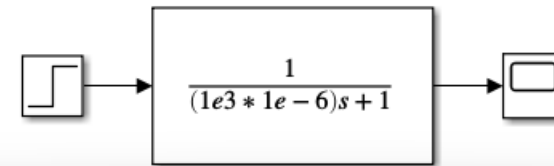
```
R = 1e3;  
C = 1e-6;  
  
num = [1];  
den = [(R*C) 1];  
tf_sys = tf(num, den)  
  
step(tf_sys)
```



# Approche Système



- Filtre RC / Step



# Etude d'un filtre du second ordre

ALLER PLUS LOIN

- Système du second ordre



+ Comparer les réponses en fréquence et les réponses indicielles des systèmes suivants :

- $G_0 = 1$  ,  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ,  $\omega_0 = 10k \text{ rd/s}$
- $G_0 = 1$  ,  $m = \frac{10}{\sqrt{2}}$  ,  $\omega_0 = 10k \text{ rd/s}$
- $G_0 = 1$  ,  $m = \frac{0,1}{\sqrt{2}}$  ,  $\omega_0 = 10k \text{ rd/s}$
- $G_0 = 10$  ,  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ,  $\omega_0 = 1k \text{ rd/s}$

$$H(p) = \frac{V_S}{V_E} = G_0 \cdot \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2 \cdot m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

# Bibliographie

Document rédigé par Julien VILLEMEJANE  
LEnsE / Institut d'Optique / France

<http://lense.institutoptique.fr/>

Création : Avril 2023

- ***TODO*** – *Auteur*  
link