Cinematica

1) $\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ (Velocità Media)

2) $v(t) = \frac{dv}{dt}$ (Velocità Istantanea)

3) $\langle \vec{a}(t) \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (accelerazione Media)

4) $a(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ (Accelerazione Istantanea)

Leggi orarie:

1) $v(t) = v_0 + a \cdot t$

2) $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

3) $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

Caduta di un grave

Moto unidimensionale su y con $a = -g$

Moto del proiettile

È un moto 2-D dove:
- asse x è un moto uniforme ($v_0 = v(t)$)
- asse-y è un moto uniformemente accelerato ($a = -g$)

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \qquad r = \begin{cases} x = (v_0 \cos\theta) t \\ y = (v_0 \sin\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

1) $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 - v_y^2}$ (Modulo della velocità)

2) $y = y_0 + \tan\theta \, x - \frac{gt}{2(v_0 \cos\theta)^2} x^2$ (traiettoria Parabolica)

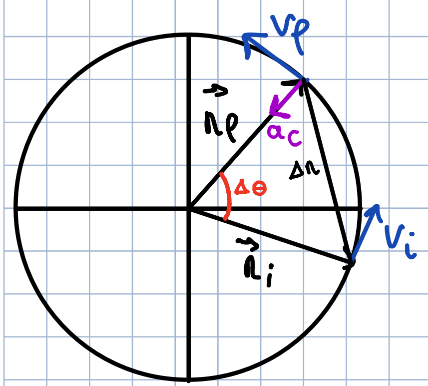
3) $t_m = \frac{V_0 \cdot \sin\theta}{g}$ (Istante in cui il proiettile raggiunge quota max) $\Rightarrow$ Per trovarlo pongo $V_y = 0$ in $V_y = \dots$

$h_m = y_0 + \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$ (Altezza massima) $\Rightarrow$ Sostituisco in y: $t = t_{max}$

4) $t_g = \frac{2 v_0 \sin(\theta)}{g}$ (Istante gittata max) $\Rightarrow$ $t_g = 2 \cdot t_{max}$

$x = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ (Gittata max) $\Rightarrow$ Considero $y = y_0$ e sostituisco t_g

Moto circolare uniforme



$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad \text{(Velocità Angolare Media)} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{(Velocità Angolare istantanea)}$$

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad \text{(Accelerazione angolare Media)} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{(Accelerazione angolare istantanea)}$$

Essendo i triangoli formati da v_i e v_f e r_i e r_f simili otteniamo

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

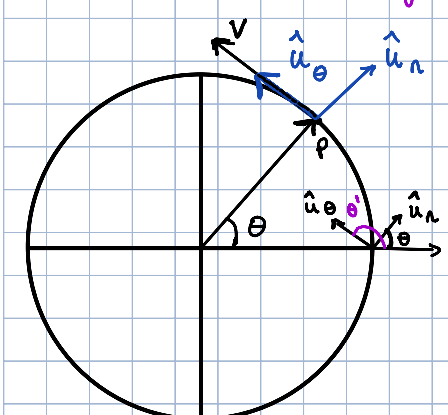
Essendo $\Delta r = v \cdot \Delta t$ otteniamo $a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$

Velocità	Velocità Angolare	Frequenza / Periodo	Accelerazione Centripeta
$V = \frac{\Delta r}{\Delta t}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$f = \frac{1}{T}$	$a_c = \frac{v^2}{r}$
$V = \frac{2\pi r}{T}$	$\omega = 2\pi f$	$T = \frac{1}{f}$	$a_c = \omega^2 r$
$V = r \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\omega = \frac{V}{r}$		
	$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$		

$$F_c = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \text{(Forza centripeta)}$$

$$h = r(1 - \cos\theta)$$

Moto circolare generico



Usiamo le coordinate polari

$$\begin{cases} \hat{u}_r = \cos\theta\, \hat{i} + \sin\theta\, \hat{j} \\ \hat{u}_\theta = -\sin\theta\, \hat{i} + \cos\theta\, \hat{j} \end{cases}$$

versori

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_\theta \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v \cdot \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} + \hat{u}_\theta \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\cos\theta \frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}\hat{j} = \frac{d\theta}{dt}\left(-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}\right) = -\frac{v}{R}\hat{u}_r$$

$$\vec{a} = \underbrace{-\frac{v^2}{r}\hat{u}_r}_{\text{componente radiale}} + \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta}_{\text{componente tangenziale}}$$

Se $= 0 \Rightarrow$ Moto circolare uniforme

componente radiale $= a_c$ — acc lungo la traiettoria

Dinamica = Descrive le cause delle variazioni di moto

Massa (kg) = Scalare che misura la resistenza di un oggetto rispetto alle var. di velocità

Forza $\left(N = \frac{kg \cdot m}{s^2}\right)$ = Quantità vettoriale che descrive le interazioni tra più corpi

Leggi di Newton

1) Se $\sum_i F_i = 0$ su un corpo allora il corpo è in stato di quiete o moto uniforme

$$\sum_i F_i = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0,\ \vec{v} = \text{cost}$$

2) Se $\sum_i F_i \neq 0$ su un corpo allora il corpo allora $\sum_i F_i = m \cdot \vec{a}$ del corpo $= \begin{cases} \sum_i F_{i_x} = ma_x \\ \sum_i F_{i_y} = ma_y \end{cases}$

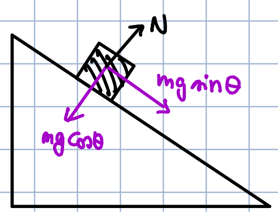
3) Se due corpi interagiscono tra di loro, entrambi esercitano una forza l'uno sull'altro uguale in modulo e direzione, ma verso opposto $\vec{F}_{a,b} = -\vec{F}_{b,a}$

Tipi di Forze:

1) contatto : Forze che per essere esercitate hanno bisogno che i due corpi siano a contatto

2) A distanza : Forze che possono essere esercitate senza il contatto tra i due corpi

Piano inclinato liscio

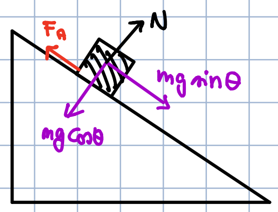


$$\vec{F} = \begin{cases} \sum_i F_{i_x} = mg\sin\theta = m \cdot a_x \\ \sum_i F_{i_y} = N - mg\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= g\sin\theta = a_0 \\ v_0 &= mg\cos\theta \\ v_f &= v_0 + a_0 T_f \\ v_f^2 - v_0^2 &= 2a_0(L) \end{aligned}}$$

$$\boxed{L = v_0 t_p + \frac{1}{2} a_0 t_p^2}$$

Piano inclinato Scabro



$$\vec{F} = \begin{cases} \sum_i F_{i_x} = mg\sin\theta - F_A = m \cdot a_x \\ \sum_i F_{i_y} = \underline{N - mg\cos\theta = 0} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$N = mg\cos\theta$$

F_A = Forza di attrito

Forza di attrito:

Forza che si oppone al moto di un corpo (Verso opposto al moto)

- Statico: Forza che fa sì che il corpo non si muova $|\vec{F_s}| = |\vec{F}_{ext}|$

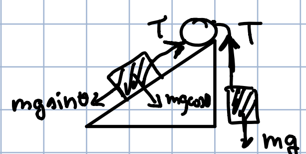
  Può valere al massimo $|\vec{F_s}| \leq \mu_s N$
  ↳ coefficente di attrito statico

- Dinamico: Forza che si oppone al movimento di un corpo quando esso è in moto

  $$|\vec{F_d}| = \mu_d \cdot N$$
  ↳ coefficente di attrito dinamico

Tensione

E' una forza applicata da un filo/fune/corda ideale (ynestendibile e peso trasc.)



Corpo$_1$: $\begin{cases} \sum_i F_{i_x} = T - m_a g\sin\theta = m_a a \\ \sum_i F_{i_x} = N - m_a g\cos\theta = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{m_b g - m_a g\sin\theta}{m_a + m_b} = a$

Corpo$_2$: $\begin{cases} \sum F_{i_x} = 0 \\ \sum F_{i_y} = T - m_b g = m_b a \end{cases}$ $\Rightarrow$ $T = m_b g - m_b a$

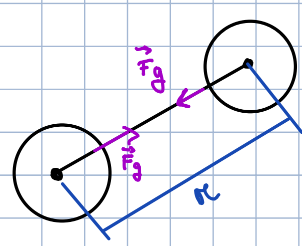
Forza di Gravità

$|\vec{F_g}| = m \cdot g$
↳ costante gravitazionale

Potenziale a una certa altezza h
↑
$U(h) = mgh$ ⇒ per $h = 0$, $U(h) = 0$

Forza Gravitazionale

E' una forza attrattiva tra due corpi



1) $|\vec{F}_g| = G \cdot \dfrac{M_A m_B}{r^2} = m_B \cdot \dfrac{v^2}{r}$

↓
Costante gravitazionale universale

Formule usate tra un pianeta ed un satellite principalmente:

1.s) $\vec{F_g} = -G\dfrac{Mm}{r^2}$

2) $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ ↳ periodo

3) $T^2 = \left(\dfrac{4\pi^2}{GM_A}\right) r^3 = K_s r^3$ ⟶ costante che dipende dal corpo di massa maggiore che sta sul centro della circonferenza

4) $r = \sqrt[3]{\dfrac{GM_A}{4\pi^2}} \cdot T^{2/3}$ Raggio orbita geostazionaria (Un satellite che percorre su quell'orbita coincide con la rotazione del pianeta)

Energia potenziale

5) $\boxed{\Delta U} = U_f - U_i = \displaystyle\int_{r_i}^{r_f} F_g(r)\,dr = GMm \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{1}{r^2}\,dr = \boxed{-GMm\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)}$

6) $U(r) = -\dfrac{GMm}{r}$ a meno di una costante cioè assumo per convenzione che $U(r \to \infty) = 0$

In questo caso il livello zero di U è posto a distanza infinita dal pianeta quindi i valori di $U(r)$ sono sempre negativi

OSSERVAZIONI: Energia potenziale negativa

- Se $E = K + U > 0$ ⇒ Corpo può andare all'infinito essendo che K non diventerà mai zero (traiettoria Iperparabolica)

- se $E = K + U = 0$ ⇒ Uguale a sopra (traiettoria parabolica

- Se $E = K + U < 0$ ⇒ Il corpo non può arrivare all'infinito ⇒ Moto confinato (traiettoria ellittica)

Per $E < 0$ si può calcolare la distanza massima $\boxed{r_{max} = -\dfrac{GMm}{E}}$

Orbita circolare: (Moto circolare Uniforme) ⇒ r costante, U costante, K costante, v costante

c'è l'accelerazione centripeta: $a_c = \dfrac{v^2}{r}$ → $\vec{F_c} = \vec{F_g} = -\dfrac{mv^2}{r} = -\dfrac{GMm}{r^2}$ → $K = -\dfrac{U}{2}$

$E = K + U = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{r} = \dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r} - \dfrac{GMm}{r} = \dfrac{GMm}{2r}$

↳ In orbita

Se devo far partire un satellite dalla sup. del pianeta e farlo arrivare in un orbita di raggio r con la velocità per orbitare necessito di:

$$E_i = E_p = \frac{GMm}{2r} = K_{in} - \frac{GmM}{r_p} \Rightarrow K_{in} = GMm\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2r}\right)$$

Energia legame: Energia per liberare il corpo dall'influsso del pianeta

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2r} = \frac{U}{2}}$$ per un moto circolare

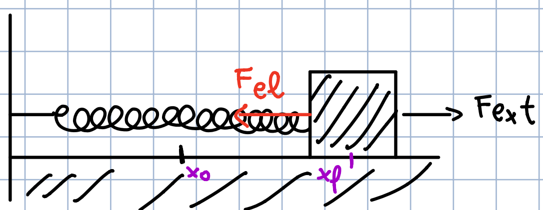
Velocità di fuga (Mandare a $r \to \infty$) Voglio $E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}}$

Campo Gravitazionale: $\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_p}$

Forze non costanti (che variano nel tempo)

Forza elastica: $\boxed{\vec{F}_{el} = -k(x - x_0)}$

Legge di hooke = la Forza elastica tende a far tornare la molla in posizione di riposo, opposta alla forza applicata sulla molla



$$\vec{F} = \begin{cases} \sum_i F_{ix} = F_{ext} - F_{el} = 0 \Rightarrow F_{ext} = -k\,\Delta x \\ \sum_i F_{iy} = 0 \end{cases}$$

Se in equilibrio

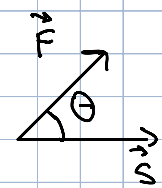
$$L = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F_{el}\, d\vec{r} = -k \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} x\, dx = -k \cdot \left(\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2}\right) =$$

Fissiamo $U(0) = 0$ cioè l'energia potenziale della molla a riposo

$$\Rightarrow U(x) = k\left(\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2}\right)$$

Lavoro = È l'energia scambiata tra 2 sistemi attraverso l'azione di una forza o più, che ha una componente non nulla nella direzione dello spostamento

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = F \cdot S \cdot \cos\theta \quad [J] \quad (\text{Prodotto scalare tra } \vec{F} \text{ e } \vec{S})$$



Osservazioni:

1) Se il corpo non si muove $\Rightarrow L = 0$
2) Se $\theta = 90°$ $\Rightarrow L = 0$
3) Se $\theta < 0°$ $\Rightarrow$ L negativo
4) Se $\theta > 0°$ $\Rightarrow$ L positivo

Lavoro non costante

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F_i \, dx \approx \sum (F_{x_i} dx_i + F_{y_i} dy_i)$$

Energia Cinetica: Misura la capacità di un corpo di compiere un lavoro

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad [J]$$

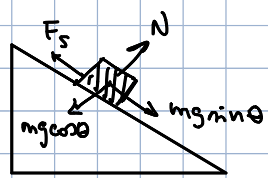
TEOREMA DELLE FORZE VIVE (dell'energia cinetica)

Se L_{TOT} compiuto su un corpo è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo stesso

$$L_{TOT} = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

↓

Somma di tutti i lavori di tutte le forze che agiscono su un corpo!



$$L_{TOT} = L_{F_s} + L_{F_p} + L_N$$

$$L_N = 0$$

Dimostrazione

1) $$\vec{F} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot v \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$L_{TOT} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \, d\vec{x} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{d\vec{x}} \, d\vec{x} = \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} m \cdot \vec{v} \, d\vec{v} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = \Delta K$$

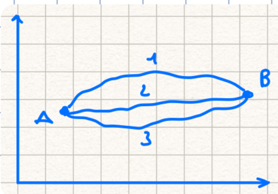
Potenza: Quantità di lavoro svolto in una certa quantità di tempo

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \left[W \cdot \frac{J}{s} \right]$$

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \left[W = \frac{J}{s} \right]$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Una forza è conservativa se il lavoro totale che compie su un corpo è nullo per qualunque percorso di andata/ritorno da A a B



$$L^{(1)}_{A \to B} = L^{(2)}_{A \to B} = L^{(3)}_{A \to B}$$

Esempi: Forza peso, Forza elastica, Forza elettromagnetica

Sistema conservativo: tutte le forze agenti nel sistema sono conservative

Energia Potenziale: Energia immagazzinata in un campo di forze o in un sistema di interazioni

$\downarrow$

Se il sistema è conservativo: $\Delta U = U_f - U_i = -L_{TOT}$

Il motivo del segno meno è per il fatto che l'energia potenziale deve diminuire rispetto a un lavoro positivo.

È possibile scegliere arbitrariamente il livello zero dell'energia potenziale, essa viene definita a meno di una costante additiva

$$U(x) = -L_{TOT} + U(x_0)$$ dove $U(x_0)$ è la costante additiva

1) $\vec{F}_x = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}$ $\quad \vec{F}_y = \frac{\partial U(x,y,z)}{y}$ $\quad \vec{F}_z = \frac{\partial U(x,y,z)}{z}$

Energia Meccanica: Somma dell'energia cinetica e energia potenziale

Se il sistema è conservativo:

$$\mathcal{E} = K + U = \text{costante} \iff \Delta \mathcal{E} = 0$$

$\downarrow$ tra 2 punti

$$\Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U = L_{\text{Forze conservative}}$$

Se il sistema non è conservativo:

TEOREMA DELL'ENERGIA GENERALIZZATO

In un sistema dove sono presenti forze conservative, vincoli, forze non conservative, la variazione di energia meccanica è uguale al lavoro fatto dalle forze non conservative.

$$\Delta(U+K) = \Delta \mathcal{E} = L_{\text{FORZE NON CONSERVATIVE}}$$

Elettromagnetismo

Una carica elettrica è sferica, con una certa massa m.

Protone = Carica positiva = $1,60207 \times 10^{-19}$ C

Nutrone = Carica Negativa = $-1,60207 \times 10^{-19}$ C

1) $\vec{F}_{ab} = K_e \dfrac{Q_a Q_b}{r^2}$ C (Forza di Coulomb)

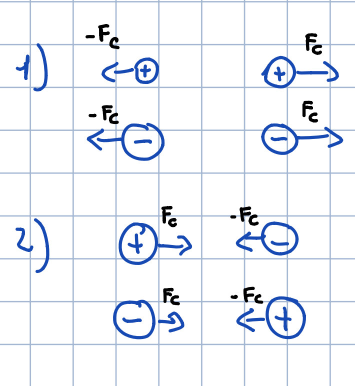
" elettrica

$$K_e = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$$

K_e: Costante di Coulomb

ε_0: Costante dielettrica del vuoto

Se:



OSSERVAZIONE: Cariche uguali si respingono

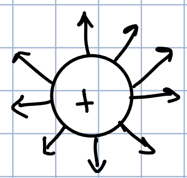
Cariche opposte si attraggono

Campo elettrico

linee che identificano la direzione del campo (Il campo è tangente alle linee di campo)

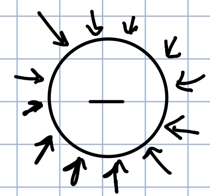
Insieme di $\boxed{\text{linee di campo}}$ generate da una carica elettrica che influiscono su altre cariche vicine ad essa. Più linee disegno più il campo è intenso e le linee di campo non si intersecano mai.

carica positiva:



Genera linee di campo uscenti

Carica negativa



Genera linee di campo entranti

1) $$\vec{E} = \frac{\vec{F}_c}{q_0}$$

Somma delle forze che agiscono su q_0

q_0: carica di prova

$$\left[\frac{N}{C}\right] \circ \left[\frac{V}{\text{metro}}\right]$$

Si ottiene che $$\boxed{\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2}\hat{r}}$$ cioè la intensità del campo elettrico

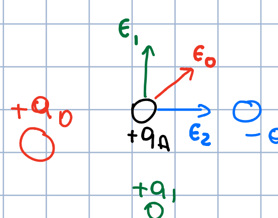
Q: carica che genera il campo

non dipende dalla carica di prova q_0 ma dalla sua distanza da Q. Ciò vuol dire che più è lontano q_0 da Q, meno è intenso il campo elettrico

Se ho più cariche: (Distribuzione di cariche)

Principio di sovrapposizione:

Se ho tante cariche $(q_1, q_2 \cdots) \Rightarrow$ il campo generato dalle cariche in un punto dello spazio è la somma vettoriale dei campi generati da ogni carica in quel punto



$$|\vec{E}_0| = k_e \cdot \frac{q_0}{r_0} \qquad |\vec{E}_1| = k_e \cdot \frac{q_1}{r_1} \qquad |\vec{E}_2| = k_e \frac{q_2}{r_2}$$

$$\vec{E}_{q_A} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Quindi su q_A ho una forza elettrica: $\vec{F}_c = q_0 \cdot \vec{E}_p$

Quindi:

La $\vec{F}_c$ emanata dalle altre cariche su una singola carica è pari a:

altre cariche — carica su cui misuriamo la F

$$F_c = \sum_i k_e \frac{q_i q_A}{r_i^2} = q_A k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i = q_A E_A$$

F_c: Forza risultante su q_A

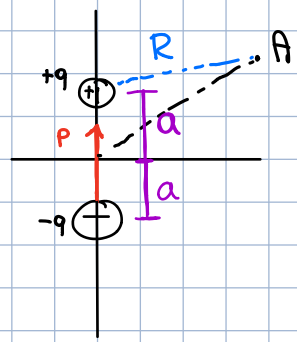
r_i: Distanza tra q_i e q_A

E_A: Campo elettrico generato su q_A

$$\vec{E}_A = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

$\vec{E}_A$: Somma vettoriale dei campi elettrici che agiscono su q_A

Dipolo elettrico: Composto da due cariche puntiformi uguali di segno opposto



Poste alla stessa distanza a dal centro

momento di dipolo: $\vec{p} = q \cdot 2a\ \hat{k}$ — $2a$: Distanza tra le due cariche

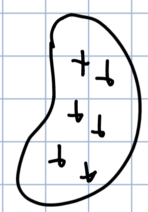
$\hat{p} = \frac{\vec{p}}{p}$

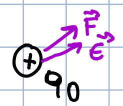
$$\vec{E}_A \simeq k_e \frac{p}{R^3}\left[3(\hat{r}\cdot\hat{p})\cdot\hat{r} - \hat{p}\right]$$

R: Distanza tra A e il polo positivo

⇒ Qualsiasi punto A nel campo elettrico del dipolo sente un E_A pari a quella formula

Distribuzione continua di cariche



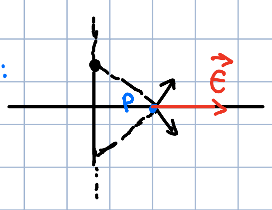


Densità di carica volumetrica: $\rho = \frac{Q}{V}$ (ρ: rho; V: volume)

Densità di carica superficiale: $\sigma = \frac{Q}{S}$ (S: superficie)

Densità di carica lineare: $\lambda = \frac{Q}{L}$ (L: lato)

Filo:



Carica distribuita omogeneamente sul filo

$\lambda = \frac{Q}{L}$ se il filo è molto lungo $E_x \simeq \frac{2 k_e \lambda}{R}$

Energia Potenziale elettrica: La forza elettrica è conservativa (Anche campo elettrico)

Quindi: $\Delta U = U_B - U_A = -L_{A\to B} = -\int_A^B \vec{F_c} \cdot d\vec{s} = -q_0 \int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$

1) $\Delta U = k_e\, q_1 q_2 \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$

2) $U(r) = k_e \frac{q_1 q_2}{r}$ Presuppone che $U_e(r \to \infty) = 0$

3) L'energia potenziale su una carica data più cariche: $U(r) = \sum_i k_e \frac{q_i q_0}{r_i}$ dove

carica i-esima; carica di prova

$U_i(r) = k_e \frac{q_i q_0}{r_i}$

4) $L = k_e\, q_1 q_2 \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$ $\Rightarrow$ Lavoro che la carica q_1 compie sulla carica q_2 per spostarla dal punto A al punto B

5) **Potenziale Elettrico:** $V = \frac{U}{q_0}$ $[V = \frac{J}{C}]$ potenziale elettrico generato da una carica su q_0

↓

Quantità scalare

$V = k_e \frac{Q}{r}$ potenziale elettrico generato da una carica puntiforme

$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$ Potenziale elettrico generato da più cariche puntiformi

V è una quantità legata all'energia ma indipendente dalla carica di prova q_0!

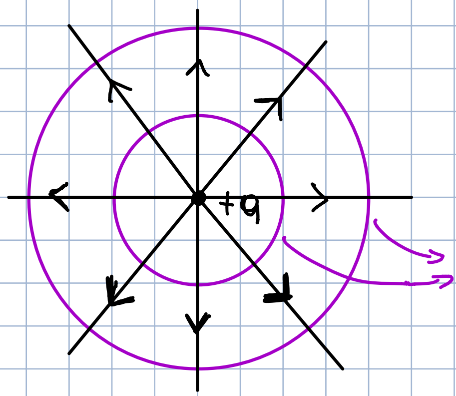
6) **Differenza di Potenziale:** $\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$

considerando $V(r \to \infty) = 0$ $\Rightarrow$ $V_P = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Relazioni tra V ed E:
1) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$
2) $\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

$\Rightarrow$ se $\vec{E} = 0 \Rightarrow V$ cost.

OSS: le superfici perpendicolari al campo elettrico sono equipotenziali (stesso potenziale elettrico). Questo perché la diff. di potenziale non cambia perché l'integrale di linea è nullo.



- Simmetria: Operazione geometrica che porta il poligono in se stesso

OSS: Il campo elettrico rimane invariato sotto operazioni di simmetria che non modificano la distrib. di cariche

- Flusso del campo elettrico: linee di campo che attraversano una superficie

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = E \cdot \hat{n} \cdot \Delta S$$

Flusso

Vettore campo elettrico

superficie orientata

Versore perpendicolare alla sup.

↓

Vettore con

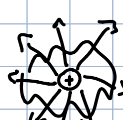
- modulo = Area superficie
- Direzione = ortogonale a quella individuata dal piano dove c'è la superficie
- verso = è definibile in base a come si fissano le convenzioni

1) Se $\vec{E}$ uniforme / superficie piana → $\phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos(\theta)$

2) Se $\vec{E}$ non uniforme e/o superficie non piana → $\phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$

FLUSSO SUP. CHIUSA: LINEE ENTRANTI − LINEE USCENTI


FLUSSO = 0

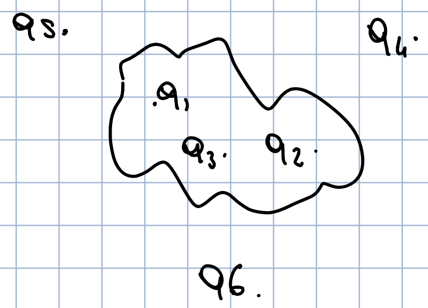

$\phi > 0$

Legge di Gauss:

superficie Gaussiana

Il flusso di un campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica contenuta dentro tale superficie diviso ε_0

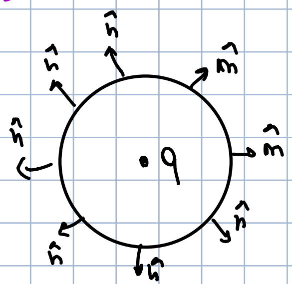
$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1+q_2+q_3)$$

Esempi:

0) Carica puntiforme



(1) $\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

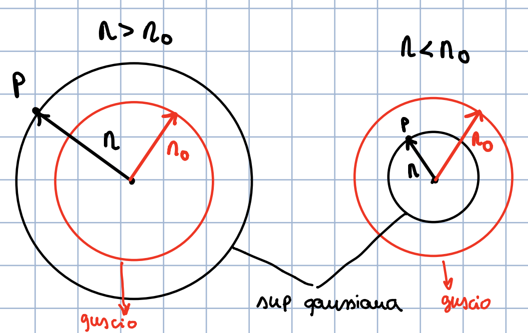
per def. (2) $\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot \oint d\vec{S} = E(4\pi R^2)$

$|\vec{E}|$ generato da Q è uguale in ogni punto della superficie

$1 = 2 \Rightarrow \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = E(4\pi R^2) \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{R^2}}$

1) Guscio uniformemente carico $\Rightarrow$ Cariche sul guscio $\Rightarrow S = 4\pi r^2$

Il guscio ha una densità superficiale di carica: $\sigma = \dfrac{Q_{int}}{A} = \dfrac{Q_{int}}{4\pi r_0^2}$



Il guscio presenta simmetria sferica quindi il campo elettrico è radiale.

$\Downarrow$

Campo elettrico in modulo uguale per tutti i punti equidistanti dal centro.

a) Punto fuori o sul guscio :

raggio punto   raggio guscio

- $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{k_e Q}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{r^2}{r_0^2}$ se $r \geq r_0$ ⇒ Fuori o sul guscio

- $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ se $r \geq r_0$

b) Punto Dentro al guscio

- $E = 0$ se $r < r_0$ ⇒ V cost. ⇒ I punti dentro il guscio sono equipotenziali

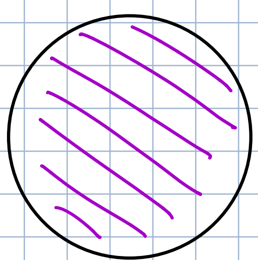
- $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$ se $r < r_0$

perché se V costante e $V(r = r_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$

essendo $v(r)$ una funzione continua abbiamo che

$$v(r < r_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2) Sfera uniformemente carica ⇒ Cariche distrib. sul volume della sfera.



$\rho = \frac{Q}{V}$ densità volumetrica di carica

$S = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $Q_{int} = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

$\boxed{\text{simmetria sferica}}$

a) Punto fuori o sulla sfera

- $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{k_e Q}{r^2}$ se $r \geq r_0$

- $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

- $\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$

b) Punto dentro la sfera

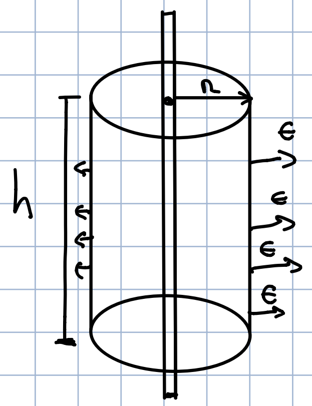
- $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{k_e Q}{r_0^3} \cdot r$

- $V = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_0^3} \cdot \left(3r_0^2 - r^2\right)$

- $\Delta V = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_0^3} \cdot \left(r_a^2 - r_b^2\right)$

3) Filo di lunghezza infinita

$$\lambda = \frac{Q}{h}$$



Il campo elettrico è radiale e:

- Sta nel piano perpendicolare all'asse del filo (cilindro)
- Non dipende dalla quota

$S = 2\pi r h \qquad V = \pi r^2 h$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \int_S dS \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi \varepsilon_0 r h}$$

$$r \geq r_0 \Rightarrow E = \frac{\lambda h}{2\pi \varepsilon_0 r \cdot h}$$

$$r < r_0 \Rightarrow E = \frac{\rho \pi r^2 h}{2\pi \varepsilon_0 r \cdot h}$$

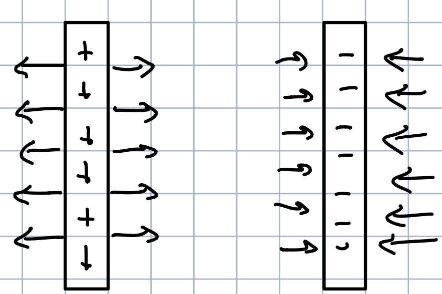
4) Piano infinitamente carico

Si considera una superficie Gaussiana cilindrica di sezione A equidisposta nei due piani. Per ragioni di simmetria il campo elettrico ha direzione perpendicolare al piano:

Simmetria di riflessione: Campo uguale e opposto su i due semipiani opposti

Simmetria di traslazione: Campo uguale in modulo in tutti i punti equidistanti dal piano, per simmetria di traslazione lungo il piano.

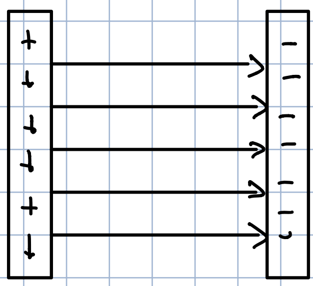
Il campo elettrico è:



- Perpendicolare al piano
- Uniforme (costante in modulo
- Uscente se superficie è carica positiva, entrante altrimenti

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2EA = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

5) Campo elettrico tra 2 piani carichi con carica opposta



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ In mezzo tra i due piani carichi

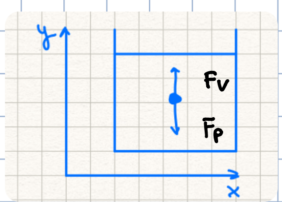
$$E = 0$$ Fuori

Dinamica dei sistemi fisici

Le equazioni differenziali vengono risolte andando a trovare tutte le soluzioni dell'eq. differenziale omogenea e una della eq. diff. non omogenea.

Per trovare tutte le soluzioni dell'eq. diff. non omogenea basta sommare la soluzione particolare e tutte le soluzioni dell'omogenea.

Fluido Viscoso:



coeff. di attrito viscoso $\Rightarrow$ Dipende dalla forma, dim del corpo e viscosità del mezzo

$\uparrow \; F_v = -b\,\vec{v}\;\hat{v}$ $\quad \vec{F}$ attrito viscoso

$\downarrow \; F_p = -mg\,\hat{J}$ $\quad$ Forza peso

All'inizio si comporta come una caduta di un grave poi si equilibra con

$\hookrightarrow \boxed{V_{lim} = \frac{mg}{b}}$ $\Rightarrow$ Avviene quando F_v e F_p si equilibrano cioè quando l'acc. diventa 0 ed abbiamo una vel limite.

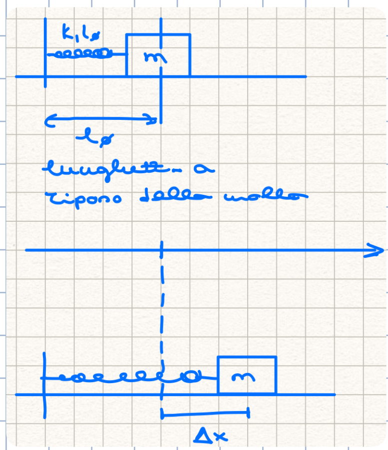
Eq diff: $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g$ con $\tau = \frac{m}{\gamma}$

$$v(t) = v_{lim} + Ae^{-t/\tau}$$

Se $v(0) = 0 \Rightarrow A = -V_{lim} \Rightarrow v(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

Se $v(0) = V_0 \Rightarrow$ $\quad v(t) = v_{lim} + (V_0 - V_{lim}) \cdot e^{-t/\tau}$

oscillatore armonico



Eq diff : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}$ dove $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$x(t) = c_1 \cos(\underline{\omega_0} t) + c_2 \sin(\underline{\omega_0} t)$

oppure Pulsazione

$x(t) = A \cos(\underline{\omega_0} t + \varphi)$ angolo di fase

con $c_1 = A\cos\varphi$ $c_2 = -A\sin\varphi$

$\tan\varphi = -c_2/c_1$ $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

le costanti c_1, c_2 e A, φ si determinano così:

$x(0) = c_1$ oppure $x(0) = A\cos(\varphi)$

$v_0(0) = c_2 \omega_0$ $v(0) = -A\omega\sin(\varphi)$

Velocità

$v(t) = -c_1\omega_0 \sin(\omega_0 t) + c_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$a(t) = -c_1\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - c_2\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t)$

$v_{max} = \pm\sqrt{\dfrac{k(A^2 - x^2)}{m}}$
$\downarrow \dfrac{T}{4}$

$a_{x\,max} = -\omega^2 x$

Nel caso forze presente F_0 : $x(t) = x_0 + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Energia:

Se $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$ $(\varphi = 0$ e $A = x_0)$

$K = \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$

$U = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$

$E = \frac{1}{2} k x_0$

Se $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$ $\left(\varphi = -\dfrac{\pi}{2}\right.$ e $\left.A = \dfrac{v_0}{\omega_0}\right)$

$U = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

$K = \frac{1}{2} m v_0^2 \sin^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

$E = \frac{1}{2} m v_0^2$

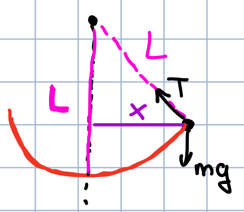
Il moto armonico può essere visto anche come la proiezione in una componente di un moto circolare uniforme

1) $x(t) = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \phi)$

2) $v_x(t) = v\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\omega A \sin(\omega t + \theta)$

3) $a_x(t) = a\cos(\theta + \pi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$

Pendolo semplice



$$\begin{cases} -T + mg\cos\theta = -m\dfrac{v^2}{L} & \text{comp. radiale} \\ -mg\sin\theta = mL\dfrac{d^2\theta}{dt^2} & \text{comp. tangenziale} \end{cases}$$

Componente tangenziale: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0$ con $\Omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

Per oscillazioni piccole cioè $\sin\theta \approx \theta$

$\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$ con pulsazione Ω e periodo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

$$\omega(t) = -\Omega A \sin(\Omega t + \phi)$$

A e ϕ si determinano con le condizioni iniziali

1) Se $\theta(0) = \theta_0$ e $\omega(0) = 0$

$$\boxed{A = \theta_0 \quad \text{e} \quad \phi = 0}$$

2) Se $\theta(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0$

$$\boxed{\phi = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad A = -\frac{v_0}{\Omega L}}$$

Forza interna: le forze esercitate da particelle interne al sistema sono esercitate su altre particelle interne al sistema.

Forza esterna: Forze esercitate da particelle interne al sistema da parte di agenti esterni

Leggi di conservazione:

1) Conservazione dell'energia $\Leftrightarrow$ lavoro delle forze esterne è 0

2) Conservazione della quantità di moto $\Leftrightarrow$ $\sum_i F_{i\,ext} = 0$

3) Conservazione del momento angolare

Quantità di moto: È un vettore definito dal prodotto $m \cdot \vec{v}$

$\vec{P} = m \cdot \vec{v}$ $\rightarrow$ Per un sistema di particelle $\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$

La variazione di quantità di moto è uguale alla somma delle forze esterne

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i F_{i\,ext}$$

Il che vuol dire che se $\sum_i F_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f \rightarrow \Delta P = 0$

cioè il sistema conserva la quantità di moto

Impulso: Forza applicata in un certo quantitativo di tempo

$$I = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{P}$$

Urti:

1) Elastici: Conservano la quantità di moto e l'energia cinetica

$\Delta \vec{P} = 0$ e $\Delta K = 0$ $\rightarrow$ $\vec{P}_i = \vec{P}_f$ e $K_i = K_f$

2) Anelastici: Conservano la quantità di moto ma non l'energia cinetica

$\Delta \vec{P} = 0$ e $\Delta K \neq 0$ $\rightarrow$ $\vec{P}_i = \vec{P}_f$ e $K_i \neq K_f$

URto elastico 1-D:

$$\begin{cases} p_{1_i} + p_{2_i} = p_{1_f} + p_{2_f} \\ k_{1_i} + k_{2_i} = k_{1_f} + k_{2_f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1_i} + m_2 v_{2_i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1_i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1_f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1_i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2_i} \\ v_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 - m_2} v_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 1) Se $m_1 = m_2$ $\begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1_i} \end{cases}$

2) Se $v_{2_i} = 0$ $\begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1_i} \\ v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1_i} \end{cases}$

3) $v_{2_i} = 0$ e $m_1 >> m_2$ $\Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \left(\frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right) v_{1i} \approx v_{1_i} \\ v_{2f} = \left(\frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right) v_{1_i} \approx 2 v_{1_i} \end{cases}$

4) $v_{2_i} = 0$ e $m_2 >> m_1$ $\Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \left(\frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\right) v_{1_i} \approx -v_{1_i} \\ v_{2f} = \left(\frac{2 \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}}\right) \cdot v_{1_i} \approx 0 \end{cases}$

URto elastico 2-D:

$$p \Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1i_x} + m_2 v_{2i_x} = m_1 v_{1f_x} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f_x} \cos\theta_2 \\ m_1 v_{1i_y} + m_2 v_{2i_y} = m_1 v_{1f_y} \sin\theta_1 + m_2 v_{2f_y} \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$k \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1_i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

URTO ANELASTICO 1-D:

$$P \Rightarrow \quad m_1 v_{1_i} + m_2 v_{2_i} = (m_1 + m_2) v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_1 v_{1_i} + m_2 v_{2_i}}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta K \Rightarrow \quad \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1_i}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2_i}^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(v_{1_i} - v_{2_i} \right) < 0$$

URTO ANELASTICO 2-D

$$P = \quad m_1 \vec{v}_{1_i} + m_2 v_{2_i} = (m_1 + m_2) \vec{v_f}$$

$$\vec{v_f} = \frac{m_1 \vec{v}_{1_i} + m_2 \vec{v}_{2_i}}{m_1 + m_2} = \begin{cases} v_{f_x} = \dfrac{m_1 v_{1_{ix}} + m_2 v_{2_{ix}}}{m_1 + m_2} \\ v_{f_y} = \dfrac{m_1 v_{1_{iy}} + m_2 v_{2_{iy}}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$