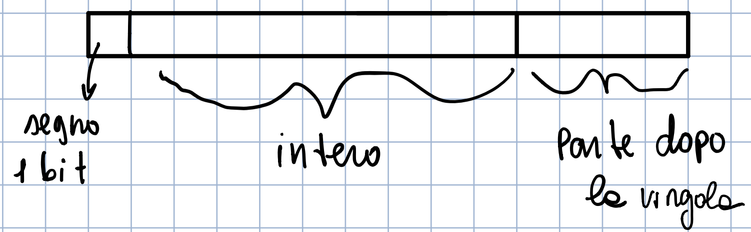
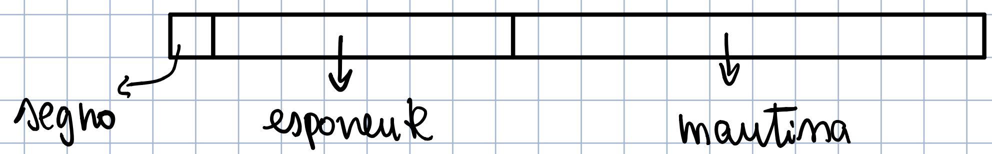
Virgola fissa



Ho sempre tot bit per la cifra frazionaria.

Virgola mobile

Virgola mobile: Posso avere bit diversi per la cifra frazionaria traslando l'esponente



$$x = \underbrace{f}_{0<f<1} \cdot \underbrace{\beta}_{\text{base}}^{\overbrace{e}^{\text{esponente}}}$$

Esempio: $1,23 = 0,123 \cdot 10^1$

OSS: Con la rapp. a virgola mobile si possono rapp. anche quelli a virgola fissa

teorema: Se $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, sia β una base di rappresentazione

$x = 0$ non si può rappresentare in modo normalizzato

Esistono unici:

1. un $p \in \mathbb{Z}$ detto esponente di rappresentazione
2. Una successione $\{d_i\}_{i \geq 1}$ di cifre t.c
   - a) $d_1 \neq 0$
   - b) $!\exists t : d_i = B-1 \quad \forall i \geq t$
   - c) $0 \leq d_i \leq \beta - 1$

allora:

$$x = \text{segno}(x) \cdot \beta^p \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} d_i B^{-i}}_{\text{mantissa}}$$

I punti a e b assicurano l'unicità della soluzione perché:

a) $d_1 \neq 0$ vuol dire che i numeri sono rappresentati in questa forma $0, \underset{\downarrow}{\_} \, ...$

questa cifra deve essere $\neq 0$

quindi non ho i casi $\underbrace{(0{,}0123)\cdot 10^3}_{\text{non va bene}} = \underbrace{(0{,}123)\cdot 10^2}_{\text{ok!}}$

rapp. unica

b) $....,\bar{9} = \sum_{i=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 1$

Dim: ↳ si usa la serie geometrica $\longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

se $-1 \leq q \leq 1$ converge

$$9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} = 1 \Rightarrow \underbrace{9 \cdot \left(\frac{1}{1-10^{-1}} - 10^0\right)}_{10-9=1} = 1$$

Esempio:

$$0{,}\overset{d_1}{1}\overset{d_2}{2}\overset{d_3}{3} \cdot \overset{\text{base}}{10}^{\overset{\text{esponente}}{2}} = 12{,}3$$

$$10^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} d_i 10^{-i} = 10^2 \cdot \left(1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}\right) =$$

$$= 10^2 \cdot (0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}003) =$$

$$= 10^2 \cdot (0{,}123) = 12{,}3$$

Serie Geometrica

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \overset{\text{se } q \neq 1}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Dim: $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$(1-q) \cdot (\quad // \quad) = 1 - q^{n+1}$

$1 - \cancel{q} + \cancel{q} - \cancel{q^2} + \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^n} + \cancel{q^n} - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$

Insieme di numeri di macchina

Estrarre dai numeri reali un sottoinsieme finito che possa rappresentare.

Su questo sottoinsieme cerco delle buone proprietà → Errore che commetto associando ad un num Reale un numero di macchina sia uniformemente buono sia per i num. grandi che piccoli (Buona approx.)

in modulo $|x|$

prendo tot cifre, non ∞, limito l'insieme

esp min

esp max

$$F(\beta, t, n, M) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R},\ x = \text{segno}(x) \cdot \beta^{p} \cdot \sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i},$$

$$d_1 \neq 0;\ 0 \leq d \leq \beta - 1,\ -n \leq p \leq M\}$$

β: base

t: numero di cifre della rapp.

n, M: range per l'esponente

OSSERVAZIONE: Se $\underbrace{x \in F}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{-x \in F}$ dato da segno(x) che può essere +/-

Simmetrico

Contare cardinalità dell'insieme (num nell'insieme)

$$\#(F) = 1 + 2 \cdot \underbrace{(n + M + 1)}_{\text{Possibili esponenti}} \cdot \left[\left(\underbrace{(\beta - 1)}_{\text{configurazioni di } d_1} \cdot \underbrace{\beta^{t-1}}_{}\right)\right]$$

→ configurazione totale cifre

1: lo zero

2: sia positivi che negativi ↓ simmetria dell'insieme

$(n+M+1)$: Possibili esponenti ↓ +1 perché c'è anche lo 0

$(\beta-1)$: configurazioni di d_1 ↓ perché d_1 non ammette 0

β^{t-1}: Ho $t-1$ cifre con β configurazioni diverse ciascuna ↓ $d_2, \dots, d_t$

Numeri che sono nell'insieme $F(2, 3, 1, 1)$

base, cifre, range esp. $-1 \leq x \leq 1$

Analizzo per i positivi, per i negativi è simmetrico

Esponenti possibili $= -1, 0, 1$

a) se $p = -1$ ho $x = \underbrace{2}_{\text{base}}^{-1} (.\overbrace{d_1 d_2 d_3}^{3 \text{ cifre}})_2$

$d_1 \neq 0$

$x = 2^{-1} (.1\, d_2\, d_3)_2$ perché è in base 2

0 1

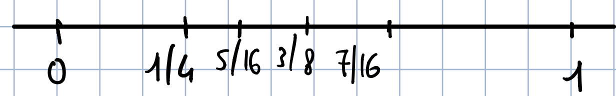
Possibili combinazioni:

$x = 2^{-1} (.100) = 1/4$

$x = 2^{-1} (.101) = 5/16$

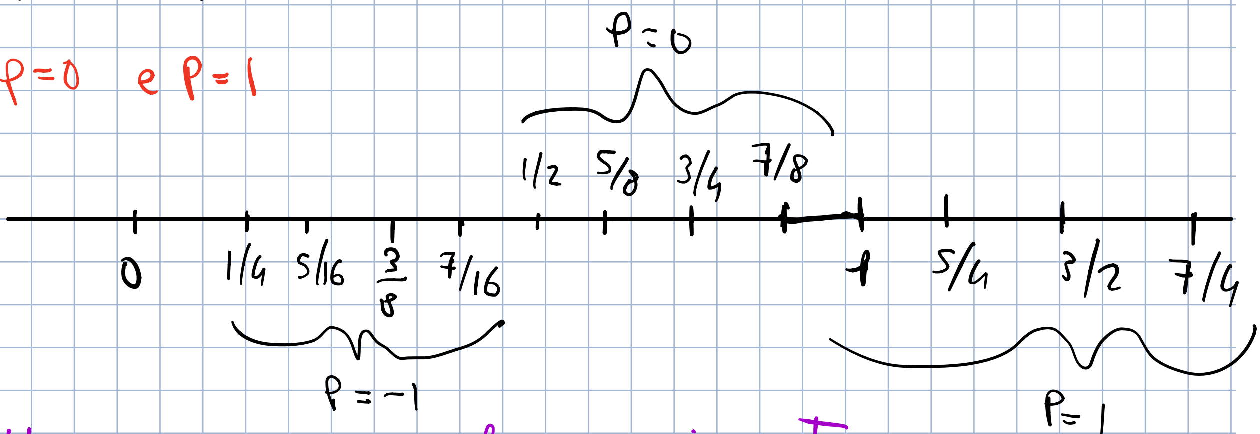
$x = 2^{-1} (.110) = 3/8$

$x = 2^{-1} (.111) = 7/16$



Ripeto per $p = 0$ e $p = 1$

ottengo:



I valori li abbiamo viceversa anche per i negativi

Infittiscono vicino allo 0 e si allontanano man mano che crescono va bene perché farò un errore relativo sempre della stessa grandezza

ω = Più piccolo numero rapp $= (0,1000..) \cdot \beta^{-m} = \beta^{-m-1}$

mantissa più piccola — esponente più piccolo

→ Numero rapp (in modulo) più vicino allo 0

esp + grande

Ω = Più grande numero rapp $= \beta^{M} \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} (\beta-1)\, \beta^{-i} \right) = \beta^{M} \left(1 - \beta^{-t} \right)$

→ Numero rapp (in modulo) più lontano dallo 0

Dato $a \in F$ trovare il numero di macchina che è succ. ad a

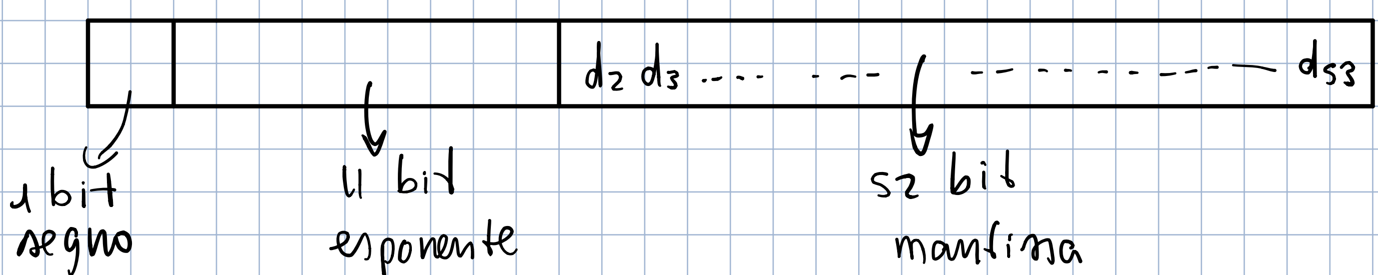
$$a = \beta^{p} \cdot \sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} = d_1 \cdot \beta^{p-1} + d_2 \cdot \beta^{p-2} + \dots + d_t \cdot \beta^{p-t}$$

$$b = a + \beta^{p-t}$$ ⇒ Numero succ ad a

quindi $|b-a| = \beta^{p-t}$ ⇒ Distanza tra 2 numeri succ. di macchina

---

Standard IEEE precisione doppia : 64 bit



quindi corrisponde a $F = (2, 53, 1021, 1024)$

esponenti $= 1024 + 1021 + 1 = 2046$ ⇒ mi conservo 2 configurazioni

$-1021 \leq p \leq 1024$ — 0000...000 — 111...11

Configurazioni esponenti speciali

1) Esponente = 111...11 ⇒ Serve per numeri speciali

a) Se esp. 111...1 e mantissa 000...0 ⇒ $+/- \infty$

b) Se esp. 111...1 e mantissa $\neq$ 00...0 → NaN → not a number

2) Esponente = 000...0 ⇒ Serve per i numeri denormalizzati → numeri che stanno tra 0 e ω

cioè: $0.0 \, d_2 d_3 d_4 \ldots d_{53}$

Se x non appartiene tra $|x| > \Omega$ da un overflow o $\pm$ infinito

Se $|x| \leq \omega$ errore di underflow o $\emptyset$

Aritmetica di Macchina

Associare un numero $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ a un numero rappresentabile nella macchina

Si approssima il numero x con $\tilde{x} \in F(\beta, t, n, m)$ commettendo:

$$\varepsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x} = \frac{\eta_x}{x} \Rightarrow \text{Errore relativo}$$

$$\eta_x = \tilde{x} - x \Rightarrow \text{Errore assoluto}$$

tipi di approssimazione:

- Troncamento: Prendo la t-esima cifra e tronco il numero ad essa

es: se $t=5 \Rightarrow x = 3{,}141592 \quad \tilde{x} = \text{tronc}(x) = 3{,}1415$

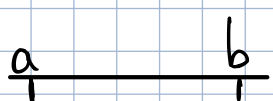
- Approssimazione $\Rightarrow$ se $t+1$ é ≥ 5 allora $d_t + 1$
  sennò d_t

es: se $t=5 \Rightarrow x = 3{,}141592 \quad \tilde{x} = \text{appr}(x) = 3{,}1416$

lemma: Se non abbiamo overflow o underflow

a) $|\tilde{x} - x| < \beta^{p-t}$ se $\tilde{x} = \text{tronc}(x)$

Distanza di 2 numeri succ di macchina



qualsiasi punto prenda nell'intervallo tra a e b con b succ ad a, nel troncamento "percorrerò" l'intero intervallo dalla cifra ad a e quello sarà il mio errore assoluto quindi è al max l'intervallo intero

se $3{,}7 = x \Rightarrow \text{tronc}(x) = 3$
se $3{,}2 = x \Rightarrow \text{tronc}(x) = 3$

b) $|\tilde{x} - x| < \frac{1}{2} \beta^{p-t}$ se $\tilde{x} = \text{arrot}(x)$

perché al massimo percorro metà dell'intervallo tra i due numeri successivi, quindi il mio errore sarà al massimo la metà dell'intervallo

se $3{,}7 = x \Rightarrow \text{arrot}(x) = 4$
se $3{,}2 = x \Rightarrow \text{arrot}(x) = 3$

teorema: Se $x \neq 0$, se non occorre overflow / underflow

$$|\varepsilon_x| = \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| \leq u = \begin{cases} \beta^{1-t} & \text{se } \tilde{x} = tron(x) \\ 1/2\, \beta^{1-t} & \text{se } \tilde{x} = appr(x) \end{cases}$$

Precisione di macchina

Da sapere

Dim:

$$\frac{1}{|x|} < ? \Rightarrow |x| > \beta^{p}(\beta^{-1}) = \beta^{p-1}$$

quindi:

- $\tilde{x} = tron(x) \rightarrow \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| \leq \frac{\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \beta^{1-t}$
- $\tilde{x} = arrot(x) \rightarrow \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| < \frac{\frac{1}{2}\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$

Operazioni di Macchina

le operazioni aritmetiche tra 2 numeri $\in F(\beta, t, n, M)$ possono dare come risultato un numero che $\notin F(\beta, t, n, M)$

Esempio: $x = 0{,}123$ $\quad y = 0{,}456 \cdot 10^3$

$$x + y = 456 + 0{,}123 = \underbrace{456{,}123}_{6 \text{ cifre}} \notin F(10, 3, n, M)$$

Per poter far rientrare il risultato nell'insieme dei numeri macchina devo approssimarlo, generando un ulteriore errore $\Rightarrow 0{,}456 \cdot 10^3$

↳ errore assoluto: 0,123

Operazioni aritmetiche di macchina: $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$

↳ non valgono le proprietà aritmetiche

$$\forall x, y \in \mathbb{F}(\beta, t, m, M), \quad x \oplus y = fl(x+y)$$

vale per tutte le operazioni

In assenza di overflow, underflow:

$$\forall x, y \in \mathbb{F}(\beta, t, m, M), \; x \oplus y = fl(x+y) = (x+y)(1+\varepsilon_1)$$

Errore locale dell'operazione

$$\frac{(x \oplus y) - (x+y)}{x+y}$$

$$x \to \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} = x(1+\varepsilon_x)$$

$$y \to \tilde{y} \Rightarrow \tilde{y} = y(1+\varepsilon_y)$$

$$\tilde{x} \oplus \tilde{y} = (x(1+\varepsilon_x) + y(1+\varepsilon_y))(1+\varepsilon_1)$$

$$= (x + \varepsilon_x + y + y\varepsilon_y)(1+\varepsilon_1)$$

$$\doteq (x+y) + x\varepsilon_y + y\varepsilon_y + x\varepsilon_1 + y\varepsilon_1 + \cancel{\varepsilon_x\varepsilon_1} + \cancel{\varepsilon_y\varepsilon_1}$$

Prodotto di due errori è molto piccolo e posso eliderlo

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{(\tilde{x} \oplus \tilde{y}) - (x+y)}{x+y} =$$

$$= \frac{x\varepsilon_x + y\varepsilon_y + (x+y)\varepsilon_1}{x+y} =$$

$$= \frac{x}{x+y}\varepsilon_x + \frac{y}{x+y}\varepsilon_y + \varepsilon_1$$

↳ Errore inerente / inevitabile

Errori nel calcolo di una funzione Razionale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione razionale e $x \in [a,b]$

Errori nel calcolo di $f(x)$ vengono generati da:

1) Approssimazione del dato x in macchina con la sua approssimazione $\tilde{x} \in F(\beta, t, m, M)$

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

$\Rightarrow$ Errore inerente/inevitabile generato nel calcolo di $f(x) \neq 0$

Misura la sensibilità di f, quindi del problema matematico (è indipendente dall'algoritmo)

Se ε_{in} è qualitativamente alto in valore assoluto

$\Rightarrow$ Problema MAL CONDIZIONATO

Viceversa $\Rightarrow$ BEN CONDIZIONATO

2) Approssimazione della funzione f in macchina mediante una sua realizzazione g

$$\varepsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

(la funzione g dipende dall'algoritmo usato per calcolare f)

Se ε_{alg} è qualitativamente elevato in valore assoluto diciamo che l'algoritmo è numericamente instabile

Viceversa $\Rightarrow$ Numericamente stabile

Errore totale: $\epsilon_{TOT} = \dfrac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \epsilon_{in} + \epsilon_{alg}$

Dim: $\epsilon_{TOT} = \dfrac{g(\tilde{x})-f(x)}{f(x)} = \dfrac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \dfrac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(x)} + \underbrace{\dfrac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\epsilon_{in}}$

$$= \epsilon_{in} + \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \cdot \frac{f(\tilde{x})}{f(x)} = \epsilon_{in} + \epsilon_{alg}(1+\epsilon_{in}) =$$

$$\doteq \epsilon_{in} + \epsilon_{alg} + \cancel{\epsilon_{in}\,\epsilon_{alg}} \doteq \epsilon_{in} + \epsilon_{alg}$$

Proprietà: 1) $(1+\epsilon_i)\cdot(1+\epsilon_J) = 1 + \epsilon_i + \epsilon_J$

2) $\dfrac{1}{1+\epsilon_x} \doteq (1-\epsilon_x)$ → Dim: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ con $x_0 = 0$ e $h = x$

3) $\epsilon_i \cdot \epsilon_J \doteq$ si elidono

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} f''(s)$$

$$\frac{1}{1+\epsilon_x} = 1 - \epsilon_x + \cancel{\frac{\epsilon_x}{2} f''(s)}$$

Valutare se un problema è ben condizionato e se un algoritmo è numericamente stabile

$f(x) = x^2 + 1$

$$g_1(\tilde{x}) = \tilde{x} \odot \tilde{x} \oplus 1 = (x^2(1+\epsilon_x)^2(1+\epsilon_1)+1)(1+\epsilon_2)$$

$$\doteq x^2(1+2\epsilon_x+\epsilon_1+\epsilon_2)(1+\epsilon_2)$$

$$\varepsilon_{Tot} = \underbrace{\frac{2x^2}{x^2+1}\varepsilon_x}_{\varepsilon_{in}} + \underbrace{\frac{x^2}{x^2+1}\varepsilon_1 + \varepsilon_2}_{\varepsilon_{alg}}$$

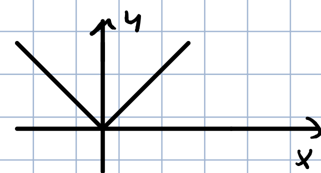
$$|\varepsilon_{in}| = \left|\frac{2x^2}{x^2+1}\varepsilon_x\right| = 2\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| \cdot |\varepsilon_x| = \frac{2x^2}{x^2+1}|\varepsilon_x| \leq 2u$$

↓ Ben condizionato

$$|\varepsilon_{alg}| = \left|\frac{x^2}{x^2+1}\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right| \leq \left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \leq 2u$$

→ Numericamente stabile

Proprietà valore assoluto



1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

3) $|a+b| \leq |a| + |b|$

4) $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$

5) $|a| \geq b \iff a \leq -b \lor a \geq b$

Studio errore inerente (condizionamento di un problema)

Prima: Def. funzione di taylor con resto di lagrange GENERALE

$$f \in C^{k+1}([a,b]) \quad e \quad x_0 \in (a,b)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + f^{k}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + \frac{f^{k+1}(\xi_k)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

↳ con $|\xi_k - x_0| < |x - x_0|$

↓ Proucia $= x_i$

Def: funzione di taylor con resto di lagrange fino al secondo

$f \in C^2([a,b])$ e $x_0 \in (a,b)$

$$f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)(\tilde{x}-x) + \frac{f''(\xi_2)(\tilde{x}-x_0)^2}{2}$$

Avendo fatto la premessa con la formula di taylor, abbiamo

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)} \doteq \frac{1}{f(x)}\left[f'(x)(\tilde{x}-x)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot(\tilde{x}-x)$$

$$= \boxed{\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot x \cdot \frac{(\tilde{x}-x)}{x}}$$

Errore relativo

coeff. di amplificazione

$$|\varepsilon_{in}| \doteq \left|\frac{x}{f(x)}\cdot f'(x)\right| |\varepsilon_x| < u \cdot \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|$$

Attenzione: Nel caso avessi più variabili $f(x_1,\dots,x_n)$ $R^n \to R$

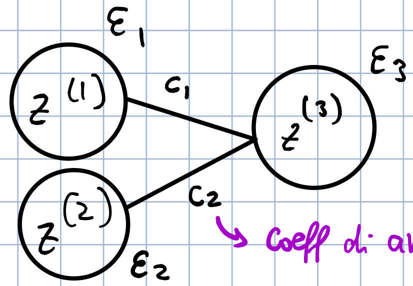
ho che l' $\varepsilon_{in} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(x_1,\dots,x_n)} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{Derivata parziale}} \varepsilon_{x_i}$

Coefficienti di amplificazione nelle 4 operazioni

Ogni operazione di macchina mi genera un errore. $\tilde{x} \; \textcircled{op} \; \tilde{y} = (\tilde{x} \; op \; \tilde{y})(1+\varepsilon_1)$

A seconda dell' op. eseguita può essere amplificato di una costante

Grafo:



$\longrightarrow \varepsilon_{alg} = \varepsilon_3 + c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2$

Coeff di ampl. dell'op $z^{(2)}$

I coeff delle 4 op. può essere calcolato tramite l'errore inerente:

1) $f(x,y) = x+y$

$$c_1 = \frac{x}{f(x)} \cdot \underbrace{f'(x)}_{=1} = \frac{x}{x+y}$$

$$c_2 = \frac{y}{f(x)} \cdot f'(y) = \frac{y}{x+y}$$

2) $f(x,y) = x-y$ $\qquad c_1 = \frac{x}{x-y} \qquad c_2 = \frac{-y}{x-y}$

3) $f(x,y) = x \cdot y$ $\qquad c_1 = \frac{x}{xy} \cdot y = 1 \qquad c_2 = 1$

4) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ $\qquad c_1 = 1 \qquad c_2 = -1$

Funzioni non razionali (esponenziale, log, $\sqrt{\ }$, ...)

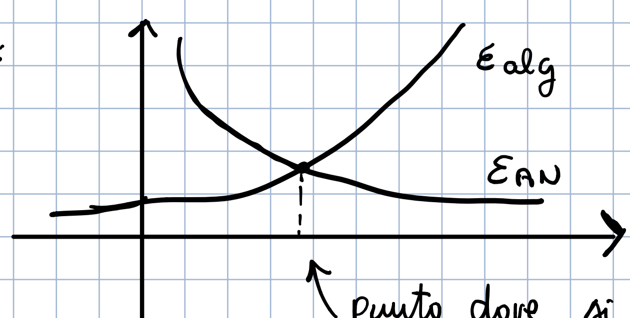
Nel caso di funzioni non razionali, bisogna approssimarle ad una funzione razionale. L'errore commesso nel fare questa operazione è detto ε_{AN} = Errore analitico

$$h(x) \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(x)$$

$h(x)$: Non razionale $\qquad f(x)$: razionale

Quindi si ha che $\varepsilon_{TOT} = \varepsilon_{AN} + \varepsilon_{in} + \varepsilon_{Alg}$

Attenzione:



ε_{AL} e ε_{AN} sono inversamente proporzionali

punto dove si minimizza la somma degli errori tra ε_{AN} e ε_{ALG}

Definizioni: $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} \Rightarrow \mathbb{F}^n$ spazio vettoriale

$\mathbb{F}^{n \times n}$ spazio matriciale

Norme vettoriali:

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Una norma vettoriale è una funzione $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$ t.c

vettore nullo

1) $\forall v \in \mathbb{F}^n$, $f(v) \geq 0$ e $f(v) = 0 \iff v = 0$

2) $\forall v \in \mathbb{F}^n$, $\alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow f(\alpha v) = |\alpha| \cdot f(v)$

3) $\forall v, z \in \mathbb{F}^n \Rightarrow f(v+z) \leq f(v) + f(z)$

Disuguaglianza triangolare

La norma viene indicata con $\|v\| = f(v)$

Distanza tra vettori: $d : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è una distanza su $\mathbb{F}^n$

$\forall v, w \in \mathbb{F}^n \qquad d(v,w) = \|v - w\|$

Proprietà della distanza derivate dalle norme

1) $d(v,w) \geq 0$ e $d(v,w) = 0 \iff v = w$

2) $d(v,w) = d(w,v)$

per la 2° proprietà delle norme

dim: $d(v,w) = \|v-w\| = \|-1 \cdot (w-v)\| = |-1| \cdot \|w-v\| = d(w,v)$

3) $d(v,w) \leq d(v,z) + d(z,w) \quad \forall z, w, v$

Norme Vettoriali "importanti"

1) $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ (chiamata "norma due" o "norma euclidea")

Se $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Se $x \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \|X\|_2 = \sqrt{x^H \cdot x}$ dove x^H = trasposto coniugato

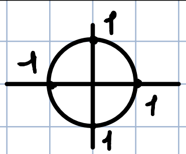
la def. deriva dal fatto che

$x_k = a + ib$ e $|x_k| = \sqrt{a^2+b^2}$

Dato $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ allora

$x^H = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ dove

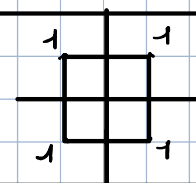
se $x_k = a+ib \Rightarrow \bar{x}_k = a-ib$



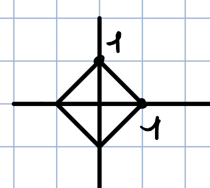
$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$

2) $\|X\|_\infty = \max_{i=1..n} |x_i|$ (chiamata "norma infinito" o "norma del max")

$C_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$



3) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (chiamata "norma uno") $\rightarrow$ $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 . \|x\|_1 = 1\}$



Dim: Dimostrare che $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ é una normale

1) $\|x_i\| \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$ Poiché $|x_i| \geq 0$ allora la somma degli $|x_i|$ $i=1...n$ é sicuramente ≥ 0

Inoltre, se $x=0 \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i = 1...n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$

Viceversa, se $x \neq 0 \rightarrow \|x\|_1 > 0$

$\exists k$ t.c $x_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq |x_k| > 0$

2) $\|\alpha \cdot x\|_1 = |\alpha| \cdot \|x\|_1$

Se $y = \alpha x \Rightarrow y_i = \alpha x_i$

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha|\,|x_i| = |\alpha| \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}^{\|x\|_1} = |\alpha| \cdot \|x\|_1$$

3) $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

Dato $z = x+y \Rightarrow z_i = x_i + y_i$

$$\|x+y\|_1 = \|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} y_i =$$

$$= \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Principio di equivalenza tra norme

$\Rightarrow$ le proprietà "qualitative" di norme diverse non cambiano

$\downarrow$

Se dimostro una cosa per una norma vale anche per le altre

Teorema: Siano $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ norme su $\mathbb{F}^n$

Due norme qualsiasi

$\forall v \in \mathbb{F}^n, \exists \alpha, \beta > 0$ t.c

$$\alpha \|v\|_b \leq \|v\|_a \leq \beta \|v\|_b$$

Cioè ci dice che le norme sono equivalenti

Questa proprietà ci serve perché se ho un certo vettore e_k dove ho che:

$$\lim_{k \to \infty} \|e_k\|_b = 0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|e_k\|_a = 0$$

allora $\underbrace{\alpha \|e_k\|_b}_{\text{tende a } 0} \leq \underbrace{\|e_k\|_a}_{\text{allora tende a } 0} \leq \underbrace{\beta \cdot \|e_k\|_b}_{\text{tende a } 0}$ per il teorema dei carabinieri

Questo perché: 1) $\|\cdot\|$ è una funzione continua

2) Sia $S = \{x \in \mathbb{F}^n : \|x\|_b = 1\}$ → Insieme chiuso e limitato

Ho che per $v \in S \Rightarrow \max \|v\|_a = \beta$ e $\min \|v\|_b = \alpha$

Norma matriciale

Una norma matriciale è una funzione $f: \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{R}$

1) $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n} \Rightarrow f(A) \geq 0$ e $f(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ — matrice identicamente nulla

2) $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}, \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow f(\alpha A) = |\alpha| f(A)$

3) $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ $f(A+B) \leq f(A) + f(B)$

4) $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ $f(A \cdot B) \leq f(A) \cdot f(B)$ → Submoltiplicatà

La norma matriciale si indica con $\|A\| = f(A)$

Distanza tra matrici $d: \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ $d(A, B) = \|A - B\|$

↓ stesse proprietà dei vettori

Osservazione: Per qualsiasi norma, $\|I\|_n \geq 1$

↳ Dim:

(a) $\|I\|_n > 0$ per la prop. 1 delle norme

perché $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(b) $\|I_n \cdot I_n\| \leq \|I_n\| \cdot \|I_n\|$ → Prop. 4

$$\cancel{\|I_n\|} \leq \|I_n\|^{\cancel{2}\,1}$$

→ Divido i membri per $\|I_n\|$ che è sicuramente positivo

$$1 \leq \|I_n\|$$

Norme Matriciali indotte dalle norme vettoriali

Data una norma vettoriale $\|\cdot\|$ su $\mathbb{F}^n$, si dice norma matriciale indotta da norma vettoriale $\|\cdot\|$ la funzione $f: \mathbb{F}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\forall A \in \mathbb{F}^{n\times n} \qquad f(A) = \max_{\substack{v\in\mathbb{F}^n \\ \|v\|=1}} \|Av\|$$

Norma vettoriale perché $A\cdot v$ è un vettore

Data una norma vettoriale prendo tutti quelle $= a$ 1

La definizione è ben posta perché:

1) $\|\cdot\|$ è continua
2) $\{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ è limitato

Vale Weierstrass → quindi può avere un max

Attenzione: Una norma vettoriale induce una norma matriciale

Proprietà matrici indotte:

1) Per ogni intero $m \geq 1 \Rightarrow \|A^m\| \leq \|A\|^m$
2) $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$
3) $\|I\| = 1$ → Dim: $\|I\| = \max_{\|v\|=1} \|I\cdot v\| = \max_{\|v\|=1} \|v\| = 1$
4) $\rho(A) \leq \|A\|$

Teorema di compatibilità delle norme:

Sia $\|\cdot\|_v$ su $\mathbb{F}^n$ una norma vettoriale e sia $\|\cdot\|_M$ su $\mathbb{F}^{n\times n}$ la norma matriciale indotta dalla norma vettoriale

$$\Rightarrow \forall A \in \mathbb{F}^{n\times n}, \ \forall v \in \mathbb{F}^n \qquad \|Av\|_v \leq \|A\|_M \cdot \|v\|_v$$

Dim: a) Se $v = 0$ $\Rightarrow$ vero perché $\|v\|_v = 0$ e $A \cdot v = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\|Av\|_v}_{= 0} \leq \|A\|_M \cdot \underbrace{\|v\|_v}_{= 0}$$

b) Sia $v \neq 0$ $\quad \|A\|_n = \max\limits_{\|x\|_v = 1} \|Ax\|_v$

$$\left\| A \boxed{\frac{v}{\|v\|}} \right\|_v \leq \|A\|_n$$

$$\left\| A \frac{v}{\|v\|_v} \right\| = \frac{1}{\|v\|_v} \cdot \|Av\|_v$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|v\|_v} \cdot \|Av\|_v \leq \|A\|_n$$

$$\Rightarrow \|Av\|_v \leq \|A\|_n \cdot \|v\|_v$$

vettore di norma unitaria 1 $\rightarrow$

Particolare x di norma 1 perché $\|A\|_n$ è il max di tutti i vettori $\|Ax\|_v$

Norme matriciali indotte comunemente usate

1) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

2) $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

3) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H \cdot A)}$

se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad A^H = A^T$

se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\quad A^H = \begin{bmatrix} a_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

Raggio spettrale $\rightarrow$ Data una matrice B, si dice raggio spettrale di B

$$\rho(B) = \max_{i=1 \dots n} |\lambda_i| \quad \text{dove } \lambda_i \text{ autovalore di } B$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$ e sono esattamente n

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

- $\|A\|_\infty = \max\{|1|+|-2|, |-3|+|0|\} = 3$
- $\|A\|_1 = \max\{|1|+|-3|, |-2|+|0|\} = 4$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)} =$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 10-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = (10-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \underline{\lambda^2 - 14\lambda + 36} = 0$$

$$\lambda_1 = 7 + \sqrt{13}$$
$$\lambda_2 = 7 - \sqrt{13}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{7+\sqrt{13}}$$

λ è autovalore per $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ se esiste un vettore $x \neq 0$, $x \in \mathbb{F}^n$ t.c. $A x = \underbrace{\lambda x}$

autovettore corrispondente a λ

$$0 = Ax - \lambda x = (A - \lambda I)x$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$A - \lambda I$ deve essere singolare (non invertibile) cioè $\det(A - \lambda I) = 0$

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ polinomio caratteristico

cerco i valori $\lambda \in \mathbb{C}$: $P(\lambda) = 0$

Per $n \geq 5$ per il teorema di Ruffini - Abel $\Rightarrow$ Non esistono formule per trovare le radici di un polinomio generico di grado $\geq n$

Norma di Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{traccia}(A^H \cdot A)}$$

traccia: somma degli elem. sulla diagonale

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\|A_F\| = \sqrt{1 + (-1)^2 + 2^2 + (-\tfrac{1}{2})^2}$$

Attenzione: $\|\cdot\|_F$ non è una norma matriciale indotta.

Dim: $\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$

Risoluzione di sistemi lineari:

Dato $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\underbrace{\det(A) \neq 0}$ $\Rightarrow$ Si cerca $x \in \mathbb{R}$: $Ax = b$

matrice invertibile

Se voglio studiare $Ax = b \rightsquigarrow \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ dove $\tilde{A} = A + \mathcal{E}$ dove $\mathcal{E}_{ij} = a_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}$

$\tilde{b} = b + e$ dove $e_i = b_i \cdot \delta_i$

$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x)$

oss: $\mathcal{E}$ = matrice errore

e = vettore errore

Condizionamento di un sistema lineare

Si considera per semplicità che $\mathcal{E} = 0$ cioè assumiamo che i valori di A siano già di macchina. Quindi solo il vettore b è perturbato.

Si assume anche che $b \neq 0$ quindi $x \neq 0$.

Otteniamo quindi: $Ax = b \rightsquigarrow A\tilde{x} = \tilde{b}$

teorema: se $b \neq 0$, $Ax = b$, A non singolare (invertibile) $\to \forall \lambda_i \in A \to \lambda_i \neq 0$

$\det(A) \neq 0$

Sia $\tilde{b} = b + e$ e $\tilde{x}$ soluzione $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\Rightarrow \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \mu(A) \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|} \quad \text{con } \mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

errore di rappr. di b

numero di condizionamento (amplificazione) di A

Dim:

a) $\|\tilde{x} - x\| \leq ?$ $\qquad Ax = b \longrightarrow x = A^{-1}b$

b) $\|x\| \geq ?$ $\qquad A\tilde{x} = \tilde{b} \to \tilde{x} = A^{-1}\tilde{b}$

a) $\|\tilde{x} - x\| = \|A^{-1}\tilde{b} - A^{-1}b\| = \|A^{-1} \cdot (\tilde{b} - b)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$

b) $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \dfrac{\|b\|}{\|A\|}$

Grazie al teorema della composizione tra norma vett. e norma matrix indotta

Quindi: $$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\mu(A)} \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}$$

Osservazioni:

1) $\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = 1 \Rightarrow \mu(A) \geq 1$

2) Se $\|\cdot\|_\infty$ $\quad u \cdot \|b\|_\infty \geq \|\tilde{b} - b\|_\infty$

u ↓ precisione di macchina

quindi: $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|_\infty} \leq \mu_\infty(A) \cdot \dfrac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq u \cdot \mu_\infty(A)$

numero di condiz. di A

3) Se A è simmetrica, cioè $A^T = A$

$$\mu(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Data $P_n(\lambda) = 0$ eq. di grado n

Per $n > 5$ non è possibile esprimere le radici di $P_n(\lambda)$, cioè gli autovalori in termini di funzioni elementari

$a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ $\Rightarrow$ Non ho formule per calcolarlo, devo approssimare.

Per approssimare utilizzo un insieme di successioni che convergono a λ

$$\{\eta_k\}_{k \geq 0} \longrightarrow \lambda$$

Ho bisogno di conoscere approssimativamente dove è localizzato lambda, perché dovrò scegliere la η_0 sufficientemente vicino a λ

Definizione di autovalore / autovettore

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice autovalore di A se

$\exists x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ t.c $Ax = \lambda x \rightarrow x$ autovettore destro

$\exists y \in \mathbb{C}^n, y \neq 0$ t.c $y^H A = \lambda y^H \longrightarrow y$ autovettore sinistro

Calcolo degli autovalori

Si calcolano partendo dalla equazione caratteristica: $\det(A - \lambda I) = 0$

$\| $

$P_n(\lambda)$ polinomio di grado esattamente n (Polinomio caratteristico)

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{con} \quad a_0 = \det(A)$$

$$a_{n-1} = \text{traccia}(A)$$

Teorema Fondamentale dell' algebra

Un polinomio di grado n ha esattamente n radici complesse se contate con la loro molteplicità

$$P_n(x) = (-1)^n \cdot \prod_{J=1}^{K} (x - \lambda_{Ji})^{\sigma_i}$$

Dove: K = # autovalori distinti

σ_i = Molteplicità algebrica di λ_{Ji} dove $\sum_i \sigma_i = n$ $\Rightarrow$ Es: Se ho $\lambda_1, \lambda_2 = 3$ allora $\sigma(\lambda_1) = 2$

Spettro di $A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Molteplicità Geometrica

La molteplicità geometrica di un autovalore è la dim. dell' autospazio

$$\gamma(\lambda_{Ji}) = \dim(\ker(A - \lambda_{Ji} I))$$

$\downarrow$ Numero di variabili libere

Autovalore che stiamo "analizzando"

TH: $\sigma_i \geq \gamma_i \quad \forall i \, . \, 1 \leq i \leq K$

Matrice diagonalizzabile:

1) Una matrice è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ $\sigma_i = \gamma_i \quad \forall i \,.\, i = 1 \dots K$ con $K = \#$ autovalori distinti

2) Una matrice è diagonalizzabile se è simile a una $\underbrace{\text{matrice diagonale}}_{\downarrow}$,

Cioè: $\exists V$ invertibile : $V^{-1} \cdot A \cdot V = D$

OSS:

$$V \cdot V^{-1} A V = V \cdot D \Rightarrow A \cdot V = V \cdot D \Rightarrow A V e_i = V \cdot D \cdot e_i$$

$$V = [\, v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n \,] \Rightarrow V \cdot e_i = V_i \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} e_i = d_i \cdot e_i$$

$A v_i = d_i v_i$ cioè v_i sono gli autovettori di A e d ha come valori gli autovalori

Definizione di matrici simili:

A è simile a B, $A \sim B$, se esiste una matrice V invertibile tale che:

$$B = V^{-1} \cdot A \cdot V$$

OSS: Se $A \sim B \Rightarrow \lambda(A) = \lambda(B)$

Dim: $P_n^{(A)}(\lambda) = P_n^{(B)}(\lambda)$

$$\det(B - \lambda I) = \det(V^{-1} \cdot A \cdot V - \lambda I) = \det(V^{-1} A \cdot V - \lambda V^{-1} V) =$$

$$= \det(V^{-1}(A - \lambda I) \cdot V) = \cancel{\det(V^{-1})} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \cancel{\det(V)} =$$

regola di Binet

perché sono uno il reciproco dell'altro

$$= \det(A - \lambda I)$$ dimostrato!!

Matrici Diagonalizzabili conosciute

1) Matrici quadrate di ordine n, con esattamente n autovalori distinti

2) Matrici simmetriche le quali sono diagonalizzabili con la matrice V di trasformazione che è ortogonale, cioè $V^T V = 1$

cioè:

$$A = A^T \Rightarrow \underbrace{\exists V \text{ ortogonale}}_{V^T \cdot V = I} \text{ t.c } V^T \cdot A \cdot V = D$$

(l'inversa di V è V^T)

e gli autovettori sono uno spazio vettoriale

OSS: le matrici simmetriche hanno tutti autovalori reali

3) Matrici Hermitiane $A = A^H \Rightarrow$ Diagonalizzabili con autovalori reali e

$\downarrow$

$\exists U$ unitaria t.c $U^H U = I$

quindi $U^H \cdot A = D$ nel caso di A complessa

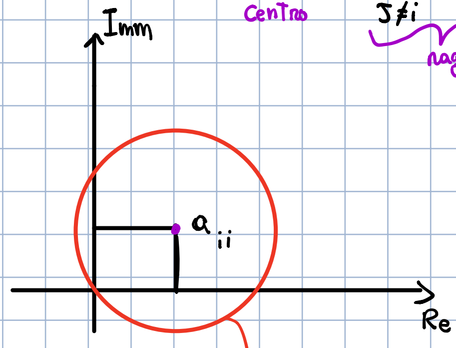
Teorema di Gershgorin → serve per determinare i valori che possono essere autovalori.

Non indica che tutti i punti dell'unione dei cerchi siano autovalori.

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\forall i = 1 \dots n \qquad K_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \underbrace{a_{ii}}_{\text{centro}}| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}_{\text{raggio}} \}$$

K_i → iesimo cerchio di Gershgorin



$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{ij}|$

Se λ è autovalore di $A \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ → unione degli n cerchi di G.

Cerchi di G. per colonna: $H_j = \{ z \in \mathbb{C}, \; |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} \}$ ⇒ Se λ è autovalore di A, allora $\lambda \in \bigcup_{j=1}^{n} H_j$

Attenzione: Se λ è autovalore di A, $\lambda \in \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \cap \bigcup_{j=1}^{n} H_j \right)}_{\text{Intersezione dei cerchi di riga e cerchi di colonna}}$

Dim:

A e A^T hanno gli stessi autovalori ⇒ $K_i(A^T) = H_j(A)$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & i+1 \\ 1 & 2 & 2-i \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{moduli } a_{1j} \\ \text{moduli } a_{2j} \\ \text{moduli } a_{3j} \end{array}$$

$K_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 4 \}$

1° riga; centro a_{11}; somma dei moduli a_{1j}

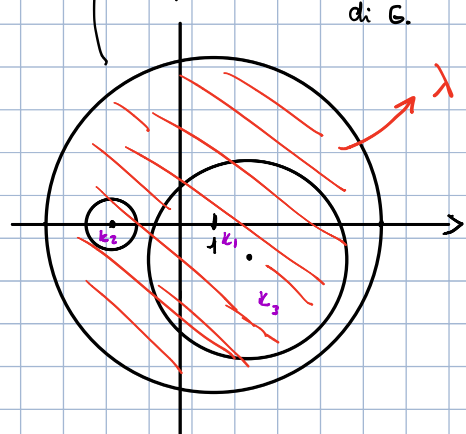
$K_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - (-2)| \leq |i+1| \}$

centro a_{22}; $|i+1| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$ → modulo a_{2j}

$K_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - (2-i)| \leq 3 \}$

centro a_{33}; modulo a_{3j}

Gli autovalori stanno tutti in questo spazio, cioè l'unione dei cerchi di G.



Dimostrazione:

Se λ è autovalore di $A \Rightarrow \exists x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0$ t.c $Ax = \lambda x$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = \lambda x_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = \lambda x_i$$

$$(\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} a_{ij} x_j$$

Sia p t.c $|x_p| = \max_{i=1\dots n} |x_i| = \|x\|_\infty$

indice della componente di modulo max di x

Poiché $x \neq 0 \Rightarrow |x_p| \neq 0$

$$(\lambda - a_{pp}) x_p = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j$$

$$|\lambda - a_{pp}|\,|x_p| = \Big|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} \cdot x_j\Big|$$

$$\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| \cdot |x_j|$$

Poiché $|x_p| > 0$ divido entrambi per $|x_p|$

$$|\lambda - a_{pp}| \leq \frac{1}{|x_p|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| \cdot |x_j|$$

$$|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} |a_{pj}| \cdot \underbrace{|x_j| \cdot \frac{1}{|x_p|}}_{\leq 1}$$

$$|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} |a_{pj}|$$

Cioè ho dimostrato che $\lambda \in K_p$ quindi poiché non so quale sia il valore di p, posso semplic. dire che $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

Base canonica $\Rightarrow$ $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ i-esimo.

i-esimo vettore della base canonica

Prodotto colonna · riga

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix} \rightarrow x_i y_j$$

Prodotto riga · colonna $\Rightarrow$ Scalare

Prodotti base canonica $\Rightarrow$ $e_i^T e_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Fattorizzazione LU

$$L = \left(\epsilon^{n-1} \cdot \ldots \cdot \epsilon^{(1)} \right)^{-1}$$

$\Downarrow$

$\epsilon^{(i)}$ = matrice triang. inferiore di cambiamento durante il metodo di Gauss

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & -1 \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & \alpha & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ -\alpha & & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ho modificato l'ultima riga moltiplicando la prima per $-\alpha$

U = triangolare superiore ottenuta applicando il metodo di Gauss

Ottengo quindi: $A = L \cdot U$ $\Rightarrow$ Se devo risolvere $Ax = b$

risolvo $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$ $y \rightarrow b^{(n-1)}$

Definizione: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A si dice fattorizzabile $L \cdot U$ se esistono U matrix triang superiore e L triang. inferiore, con elementi diagonali $=$ a 1 t.c. $A = L \cdot U$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{bmatrix} = L \cdot U$$

teorema (condizioni suff. per l'esistenza ed unicità della fatt. LU di una matrix)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ipotesi: Se $\overbrace{A(1:k, 1:k)}^{\text{minore principale di testa di ordine } k}$ è non singolare per $k = 1, \dots, n-1$

tesi: Esiste ed è unica la fatt. LU di A

Se sono tutte singolari è fattorizzabile LU

$\downarrow$

Se non lo sono non si può dire nulla potrebbe esserlo o no

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dim: Per induzione su n

Caso base: $n = 1$ $\quad A = [a] = \overbrace{[1]\cdot[a]}^{}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{L} \qquad \overset{\shortparallel}{U}$

è unica perché L deve avere gli elementi sulla diag uguale a 1

Supponiamo il th vero per matrici di ordine $m \leq n-1$ e dimostriamolo per A di dimensione n.

Se A di dim. n ∃ fatt. LU allora

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A(1:n-1,1:n-1) & z \\ \hline w^T & \alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L(1:n-1,1:n-1) & 0 \\ \hline x & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} U(1:n-1,1:n-1) & y \\ \hline 0^T & \beta \end{array}\right]$$

$\alpha = a_{nn}$

Devo dim. che questo sist. ha un'unica soluzione

$$\begin{cases} A(1:n-1,1:n-1) = L(1:n-1,1:n-1)\cdot U(1:n-1,1:n-1) + \cancel{0\cdot 0^T} \;\checkmark \\ z = L(1:n-1,1:n-1)\,y + \cancel{0\beta} \;\checkmark \\ w^T = x^T\cdot U(1:n-1,1:n-1) + \cancel{1\cdot 0^T} \;\checkmark \\ \alpha = x^T y + \beta \;\checkmark \end{cases}$$

- $A(1:n-1,1:n-1) = L(1:n-1,1:n-1)\cdot U(1:n-1,1:n-1)$

Posso usare l'ipotesi induttiva

$A(1:n-1,1:n-1)$ ha dim. $n-1$ e i suoi minori principali fino all'ordine $n-2$ sono non singolari per l'ipotesi del teorema perché coincidono con i minori principali di A

$\Rightarrow \exists$ uniche $L(1:n-1,\ 1:n-1)$ triang inf. con 1 sulle diag
e $U(1:n-1,\ 1:n-1)$ triang sup

- $z = L(1:n-1,\ 1:n-1)\, y$ $\rightarrow$ y esiste unico poiché L è non singolare perché è triang con gli 1 sulle diagonale

- $w^T = x^T \cdot U(1:n-1,\ 1:n-1)$ ha unica soluzione x^T poiche $U(1:n-1,\ 1:n-1)$ è non singolare infatti

$$\det(A(1:n-1,1:n-1)) = \det(L(1:n-1,\ 1:n-1)) \cdot \det(U(1:n-1,1:n-1)) = 1 \cdot \det(U(1:n-1,\ 1:n-1))$$

$\neq 0$ per ipotesi del teorema.

- $\alpha = x^T y + \beta \Rightarrow \beta = \alpha - x^T y$

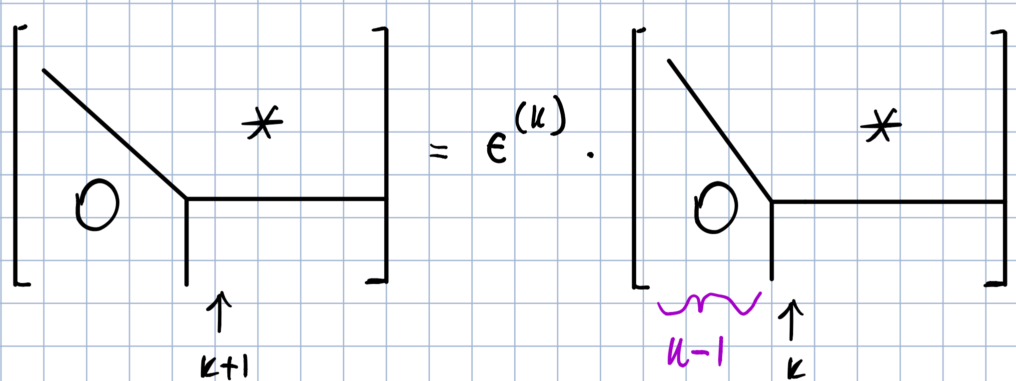
Metodo di Gauss

$$A^{(k)} = E^{(k)} \cdot A^{(k-1)}$$

$A^{(k)}$: Matrice con la k-esima colonna a 0

$E^{(k)}$: Matrice elementare di Gauss per azzerare la k-esima colonna

$A^{(k-1)}$: Matrice prima che la k'esima colonna venga azzerata



Matrici elementari di Gauss

Una matrice E si dice elementare di Gauss se esiste un k, $1 \leq k \leq n$ e un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ $v_1 = v_2 = \dots = v_k = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$E = I - v e_k^T$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & -v_{k+1} & \ddots & \\ & \vdots & & \\ & -v_n & & 1 \end{bmatrix}$$

Proprietà:

1) le matrici elementari di Gauss sono triangolari inferiori ed invertibili

2) la classe delle matrici elementari di Gauss è chiusa rispetto all'inversione

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & -v_{k+1} & \ddots & \\ & \vdots & & \\ & -v_n & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & +v_{k+1} & \ddots & \\ & \vdots & & \\ & +v_n & & 1 \end{bmatrix}$$

Dim:

$$(I - ve_k^T)(I + ve_k^T) = I - ve_k^T + ve_k^T - v(e_k^T v)e_k^T = I$$

3) Sia $x \in \mathbb{R}^n$, $x_k \neq 0$ $\Rightarrow$ Esiste una matrice elementare di Gauss t.c

$$E \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dim:

$$E = I - v e_k \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{x_{k+1}}{x_n} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_n} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \text{ comp.} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$E \cdot x = \left(I - v e_k^T \right) \cdot x = x - v e_k^T x =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) E_k e E_ℓ due matrici elementari di Gauss

$\ell > k$

$$E_k = I - v e_k^T \qquad E_\ell = I - w e_\ell^T$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{\ell+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$E_k E_\ell = I - v e_k^T - w e_\ell^T = \left(I - v e_k^T \right)\left(I - w e_\ell^T \right) =$$

$$= I - v e_k^T - w e_\ell^T + \cancel{v \underbrace{(e_k^T w)}_{\substack{\shortparallel \\ w_k = 0 \text{ perché } \ell > k}} e_\ell^T}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & -v_{k+1} & \ddots & & \\ & \vdots & & -w_{\ell+1} & \ddots \\ & -v_n & & -w_n & 1 \end{bmatrix}$$

5) $E \cdot y$ costa $O(n-k)$ flops

$\downarrow$ qualsiasi vettore

$$E_k y = \left(I - v e_k^T\right) \cdot y = y - v \left(\underbrace{e_k^T \cdot y}_{= y_k}\right) = y - y_k v =$$

$$= y - y_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} - y_k v_{k+1} \\ \vdots \\ y_n - y_k v_n \end{pmatrix} \rightarrow 2(n-k) \text{ floops}$$

Quindi:

Metodo di Gauss:

$$A^{(k)} = E^{(k)} \cdot A^{(k-1)} \qquad \text{dove} \qquad E^{(k)} = I - m e_k^T$$

$$m^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \\ \vdots \\ \dfrac{a_{nk}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-esima}$$

$$m_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Abbiamo quindi

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)}$ se $i \leq k \ \forall j$

$a_{ik}^{(k)} = 0$ per $i = k+1 \dots n$

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_i^{(k)} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$ per $i = k+1 \dots n$, $j = k+1 \dots n$

$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)}$ per $i = 1 \dots k$

$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_i^{(k)} \cdot b_k^{(k-1)}$ per $i = k+1 \dots n$

Costo computazionale

Fissato k

$m_i^k \to 1$ divisione per $i = k+1 \dots n$

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2\underbrace{(n-k)^2}_{\text{numero di elementi da aggiungere}} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \quad \text{flops}$$

$= \frac{2}{3} n^3 + O(n^2) \Rightarrow$ Costo per il calcolo della eliminazione Gaussiana e quindi la risoluzione del sistema lineare $Ax=b$

teorema: Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\det(A(1:k, 1:k)) \neq 0$ per $k = 1 \dots n-1$

$$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \qquad k = 1 \dots n-1$$

se ho una matrice con "struttura" ad esempio una matrice a banda come le tridiagonali il costo può essere molto inferiore

es: tridiagonali $Ax=b$ costo $O(n)$

Predominanza Diagonale

1) Per riga: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è predominante diagonale per riga se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1 \dots n$$

2) Per colonna: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è predominante diagonale per colonna se

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad j = 1 \dots n$$

Teorema: le matrici a predominanza diagonale sono invertibili

Dim: Si usa il teorema di Gershgorin e si dimostra che $\lambda = 0$ non può essere autovalore.

Cioè $0 \notin \bigcup_{J=1}^{n} K_i$ (cerchi per riga/colonna a seconda se la matrice è pred. diagonale per riga/colonna)

$$a_{ii} > \sum_{J=1} |a_{iJ}|$$

$$K_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq 1}}^{n} |a_{iJ}| \}$$

$$|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq i}}^{n} |a_{iJ}|$$

Assurdo perché dovrebbe essere > per via che siamo in una matrix a predominanza diagonale

Proprietà matrice a predominanza diagonale:

1) matrice a predominanza diagonale $\Rightarrow$ Invertibilità

2) Pred diag $\Rightarrow \exists !$ la fatt. LU

Dim:

A è a Pred diag $\Rightarrow A_k = A(1:k, 1:k)$ sono a pred diag

$\Rightarrow$ sono invertibili $\Rightarrow \exists !$ fatt. LU

Tecniche di Pivot

Quando faccio lo scambio tra 2 righe, moltiplico la matrice per una matrice di permutazione P.

Esempio: Se voglio scambiare le prime 2 righe, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Cioè sposto le righe anche della matrice identità.

Quindi dopo, se A non singolare, applicando Gauss ottengo

$$A^{(1)} = \epsilon^{(1)} \cdot \Big(\underbrace{P_1 \, A^{(0)}}_{} \Big)$$

Matrice che ha la 1° e la J-esima riga scambiate

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{J1} & a_J & \cdots & a_{Jn} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A_{22}^{(1)}} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$b^{(1)} = \epsilon^{(1)} \left(P_1 \, b^{(0)} \right)$$

In più, nel caso il primo elemento di $A_{22}^{(1)}$ fosse 0, posso riapplicare lo scambio di righe visto che la matrice $A_{22}^{(1)}$ è sicuramente non singolare

Cioè:

$$\det(A^{(1)}) = \underset{\substack{\| \\ 1}}{\det(\epsilon^{(1)})} \cdot \underset{\substack{\| \\ \pm 1}}{\det(P_1)} \cdot \underset{\substack{\not\parallel \\ 0}}{\det(A^{(0)})} \neq 0 \quad \text{per ipotesi}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = a_{J1}^{(0)} \cdot \det(A_{22}^{(1)}) \Rightarrow \det(A_{22}^{(1)}) \neq 0$$

Quindi avrò almeno un elemento diverso da 0 nella colonna A_{i2}

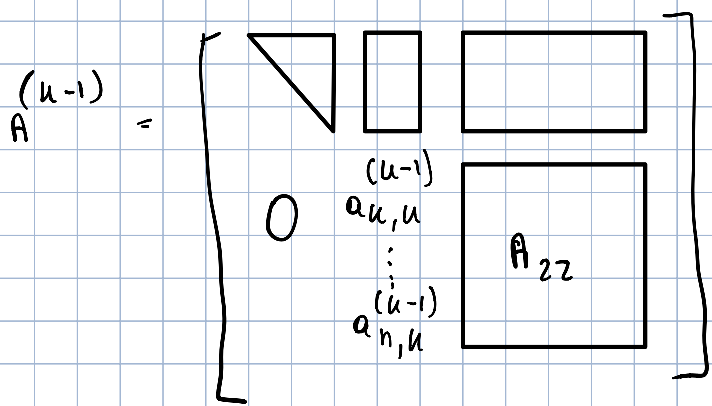
Si ottiene quindi che: $PA = L \cdot U$ con $\det(A) \neq 0$ $\Rightarrow$ Non è vero che ogni matrice sia fact. LU ma esiste sempre una matrice di permutazione t.c PA si fact LU

Tecnica del Massimo Pivot

Si sceglie la riga del pivot massimo da scambiare con la prima riga della matrice/sottomatrice

$$\forall k \quad |a_{jk}^{(k-1)}| = \max_{i=k \dots n} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

Esempio



Individuo j t.c $|a_{jk}^{(k-1)}| = \max_{i=k \dots n} |a_{ik}^{(k-1)}|$ e scambio la riga j con la riga k

Quando si calcola: $\underbrace{\tilde{L} \cdot \tilde{U}}_{\text{matrice effettiva da calcolare}} = A + F$

matrice di errore (Distanza tra A e $\tilde{L} \cdot \tilde{U}$)

$$\|F\| = O(u) \cdot \|L\| \cdot \|U\| \qquad |u_{ij}| \leq 2^n \max_{i,j=1 \dots n} |a_{ij}|$$

Con la tecnica del max pivot si limita $\|U\|$ e $\|L\|$

Metodi Iterativi per sistemi lineari

Il problema del metodo di Gauss è che non conserva la sparsità della matrice iniziale

↓

A è sparsa se il $\underbrace{nnz(A)}_{\text{number of nonzeroes}} = O(n)$

Quindi avendo: $x^{(0)}$ vettore di partenza e $x^{(k)}$ successione di vettori $k = 1, 2, \ldots$

$$\{x^{(k)}\} \to x$$ dove x è soluzione del sistema $Ax = b$

cioè $$\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

$x^{(k)}$ è una successione convergente a x

1) Possiamo scegliere una norma qualsiasi

2) $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$ cioè tutte le singole componenti di $x^{(k)}$ tendono a tutte le componenti di x

3) Bisogno di definire dei criteri di arresto poiché x non è noto

es: - $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$

- $\|Ax^{(k)} - b\|$

Metodi basati sulla decomposizione additiva di A

$A = M - N$

Se M è invertibile

$$Ax = b \iff (M - N)x = b \iff Mx - Nx = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$x = \boxed{M^{-1}N}\, x + \boxed{M^{-1}b} = Px + q$$

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad q \in \mathbb{R}^{n}$

Se scelgo $x^{(0)}$ $\Rightarrow$ $x^{(k)} = P\, x^{(k-1)} + q \qquad k = 1, \ldots$

Teorema: Se $\{x^{(k)}\}$ è convergente cioè $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)}\| = x^*$

allora x^* è soluzione del sistema di partenza

Dim: $g(x) = Px + q$ $\qquad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

g è continua (è lipschitziana)

Dim continuità

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x^{(k)}, x^* : \quad \|x^{(k)} - x\| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad \|g(x^{(k)}) - g(x)\| < \varepsilon$$

$$\|g(x^{(k)}) - g(x)\| = \|Px^{(k)} + q - (Px + q)\| =$$

$$= \|Px^{(k)} + q - Px - q\| = \|Px^{(k)} - Px\| = \|P(x^{(k)} - x)\|$$

$$\leq \underbrace{\|P\| \cdot \|x^{(k)} - x\|}_{\varepsilon}$$

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim \underbrace{g(x^{(k-1)})}_{= x^{(k)}} \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ è continua e} \\ \text{si scambia} \\ \text{con il limite}}}{=} g\Big(\underbrace{\lim_{k\to\infty} x^{(k-1)}}_{\text{tende a } x^*}\Big) = g(x^*)$$

quindi $x^* = Px^* + q \Rightarrow Ax^* = b$

se $A = M - N$,
- $P = M^{-1} N$
- $q = M^{-1} b$

Metodo Iterativo:

Scelto $x^{(0)}$ allora $x^{(k)} = P x^{(k-1)} + q$

Definizione: Un metodo si dice convergente se $\forall$ scelta di $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ la succesione degli $\{x^{(k)}\}$ é convergente.

Cioè $\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$

teorema: Condizioni sufficienti per la convergenza $\Rightarrow$ Se non sono verificate le condizioni non posso dire se converge o no

Un metodo iterativo definito $\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^k = P x^{(k-1)} + q \quad k = 1 \dots \end{cases}$

è convergente se esiste una norma matriciale indotta da una norma vettoriale t.c.:

$$\boxed{\|P\| < 1}$$

Dim: $x^{(k)} = P x^{(k-1)} + q$, $x = Px + q$

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x = P x^{(k-1)} + q - (Px + q) = P(x^{(k-1)} - x) =$$

errore al passo k-esimo

$$= P e^{(k-1)} = P(P \cdot e^{k-2}) = P^k \cdot e^{(0)}$$

$e^{(0)} = x^{(0)} - x$

Dobbiamo far vedere che se $\|P\| < 1 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|e^{(k)}\| = 0$

$$e^{(k)} = P^k \cdot e^{(0)}$$

$$\|e^{(k)}\| = \|P^k e^{(0)}\| \leq \|P^k\| \cdot \|e^0\| \leq \|P\|^k \cdot \|e^{(0)}\|$$

Norma vett. che induce la norma matriciale t.c $\|P\| < 1$

$$0 \leq \underbrace{\|e^{(k)}\|}_{\text{quindi } \to 0} \leq \underbrace{\|P\|^k \cdot \|e^{(0)}\|}_{k \to \infty}$$

$0 \xrightarrow{k \to \infty} 0$

tende a 0 perché $\|P\| < 1$

Per il teorema del confronto

$$\lim_{k \to \infty} \|e^{(k)}\| = \lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$$

teorema: Condizioni necessarie per la convergenza

Se il metodo converge allora $\rho(P) < 1$

Attenzione: Se un metodo non è convergente, non vuol dire che qualsiasi sia $x^{(0)}$ preso, il metodo sia non convergente

Dim:

Supponiamo che $\forall$ scelte $x^{(0)}$ la $\{x^{(k)}\} \to x$ cioè metodo convergente

Sia λ l'autovalore di P corrispondente a $\rho(P)$ cioè $\rho(P) = |\lambda| = \max_{i=1..n} |\lambda_i|$

Esiste $v \neq 0$ t.c. $Pv = \lambda v$, v autovettore di P corrispondente a λ

Sia $x^{(0)} = x + v$ con $x = Px + q$ un vettore di partenza

Poiché tutte le succ. sono convergenti anche la succ. generata a partire da $x^{(0)}$ è convergente cioè

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x \quad \text{è tale per cui } \|e^{(k)}\| \to 0$$

$$e^{(k)} = P^k \cdot e^{(0)} = P^k (x^{(0)} - x) = P^k (x + v - x) =$$

$$= P^k v = \lambda^k \cdot v$$

Sappiamo che $0 = \lim_{k\to\infty} \|e^{(k)}\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda^k v\| =$

$\downarrow$ per ipotesi

$$= \lim_{k\to\infty} |\lambda^k| \|v\| = \|v\| \lim_{k\to\infty} |\lambda|^k$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} |\lambda|^k = 0 \Rightarrow |\lambda| < 1$$

teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché un metodo sia convergente

$$\rho(P) < 1$$

Attenzione: - se $|\text{traccia}(P)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right| \geq n \Rightarrow \rho(P) \geq 1$

- se $|\det(P)| = \left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right| \geq 1 \Rightarrow \rho(P) \geq 1$

Metodo di Jacobi e Gauss - Seidel

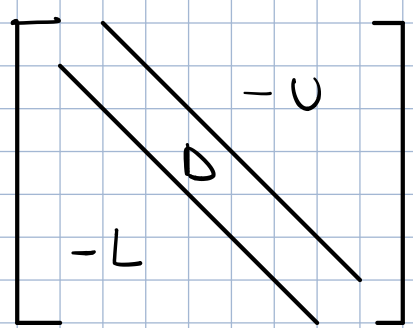
Jacobi → Pronuncia = Iacobi

Seidel → Pronuncia = Saidel

Dato $Ax = b$, assumiamo che $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

(senno' non sono applicabili)

A =



$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{se } i > j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$u_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{se } i < j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Jacobi

$M = D \qquad N = L + U$

$$\boxed{x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \qquad i = 1 \dots n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} J = D^{-1}(L+U) \qquad q = D^{-1} b \\ x^{(k)} = J x^{(k-1)} + q \end{array}}$$

→ Metodo di Jacobi

Gauss - Seidel

$M = D - L \qquad N = U$

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}$$

$i = 1 \dots n$

$$G = (D-L)^{-1} U \qquad q = (D-L)^{-1} b$$

Matrice di iterazione di Gauss-Seidel

$$x^{(k)} = G x^{(k-1)} + q$$

Metodo Gauss - Seidel

teorema: Condizioni sufficienti per la convergenza di Jacobi e G.S

Sia A a predominanza diagonale $\Rightarrow$

1) A invertibile
2) Jacobi e G.S sono applicabili
3) Jacobi e G.S sono metodi convergenti

OSS: Se $Ax = b$ con A predominanza diagonale non ho bisogno di costruire J o G.S per sapere se sono convergenti.

Dim:

1) Già fatto con Gershgorin

2) Metodo iterativo è applicabile se $\underline{M \text{ è invertibile}}$

Per J $\quad M = \text{diag}(\text{diag}(A)) \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \dots n$

Per G.S $\quad M = \begin{bmatrix} \diagdown \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \dots n$

Se A è a pred diag allora

$$|a_{ii}| > \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}_{\geq 0} \qquad i = 1 \dots n$$

$$\Rightarrow \quad |a_{ii} > 0| > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ii} \neq 0$$

3) Pred. diag $\Rightarrow$ conv. J e G.S

$$\updownarrow$$

$\rho(P) < 1 \quad$ dove $\quad P =$ matrice di it di Jacobi o G.S

$P = M^{-1} N \quad$ con M e N opportune

Se λ è autovalore di P

$$0 = \det(P - \lambda I) = \det(M^{-1}N - \lambda I) =$$

$$= \det(M^{-1}N - \lambda M^{-1}M) =$$

$$= \det(-M^{-1}(-N + \lambda M)) =$$

$$\overset{\text{binet}}{=} \underbrace{\det(-M^{-1})}_{\neq 0} \cdot \det(\lambda M - N)$$

λ è autovalore di $P \iff H = \lambda M - N$ è singolare

Assumo per assurdo che $|\lambda| \geq 1$

Voglio dim. che H risulti a pred. diag e quindi non singolare che è assurdo

Si parte dal fatto che A è a pred. diag.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1 \dots n$$

$$\iff \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1 \dots n$$

Poiché $|\lambda| \geq 1 \Rightarrow |\lambda| > 0$

$$|\lambda| |a_{ii}| > |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + |\lambda| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \geq$$

$|\lambda| \geq 1$ perché rimpiazzo λ con 1

$$\geq |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

Per Gauss - Seidel:

$$|\lambda a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & -a_{n-1,n} \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ \lambda a_{n1} & \cdots & & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

Pred. diag di H

cioè H è a pred. diag

quindi non singolare

ASSURDO!

Per Jacobi:

$$|\lambda a_{ii}| > |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

$|\lambda| \geq 1$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & & -a_{ij} \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \lambda M - N = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

quindi se $|\lambda| \geq 1$

Pred diag

$$|\lambda a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \qquad i=1 \ldots n$$

cioè H è a pred diag $\Rightarrow \det H \neq 0$ Assurdo!

CRITERI DI ARRESTO

Fissata a priori

1) $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq \text{tolleranza}$

2) $\| A x^{(k+1)} - b \| \leq \text{tolleranza}$

CRITERI ASSOLUTI

3) $\dfrac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|}{\| x^{(k)} \|} \leq \text{tolleranza}$

4) $\dfrac{\| A x^{(k+1)} - b \|}{\| x^{(k+1)} \|} \leq \text{tolleranza}$

CRITERI RELATIVI

Ho bisogno inoltre di un numero max di iterazioni n_max

Algoritmo:

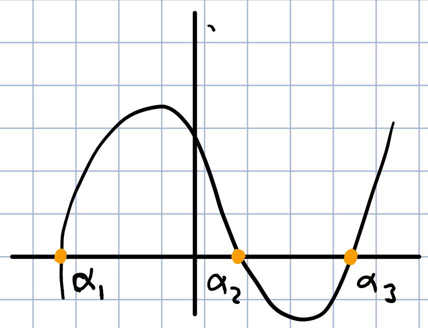
```
err = inf ; k=0 ;
while  err > tolleranza && k < n_max
        x^(k+1) = g(x^(k))
        err = norm( x^(k+1) - x^(k) )
        k = k+1
end
```

oss: se $\rho(P) < 1 \Rightarrow$ 1) $\| x^{(k)} - x \| \leq tol \cdot \| (P - I)^{-1} \|$

2) $\| x^{(k)} - x \| \leq tol \cdot \| A^{-1} \|$

Calcoli di zeri di una funzione

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ si cercano se esistono dei valori $\alpha_i \in (a,b)$ tali per cui $f(\alpha_i) = 0$



α_1 è detto 0 della funzione o anche radice di $f(x)=0$ o soluzione di $f(x)=0$

Se $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists$ radice $\in [a,b]$

Metodo di bisezione

$\Rightarrow$ Dividi per due fin quando non approssimi allo 0 $\Rightarrow$ Metodo costoso

$a_1 = a$

$b_1 = b$

for $k = 1,2 \ldots$

$c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$

if $(f(c_k) \cdot f(a_k) <= 0) \{ a_{k+1} = a_k$
$b_{k+1} = c_k \}$

else $\{ a_{k+1} = c_k$
$b_{k+1} = b_k \}$

end

end

Teorema: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua cioè $f \in C^0([a,b])$

$f(a) \cdot f(b) < 0$

Per le succ. generate con il metodo di bisezione

$$\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \alpha \quad \text{t.c} \quad f(\alpha)=0$$

OSS: $b_k - a_k = \frac{(b-a)}{2^{k-1}}$ $\qquad \alpha \in [a_k, b_k] \quad \forall k$

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| < \varepsilon \Rightarrow b_k - a_k < \varepsilon$$

$$\frac{b-a}{2^{k-1}} < \varepsilon \qquad b-a < \varepsilon(2^k-1)$$

cresce molto

$$k \geq \left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) + 1 \right\rceil$$

Il metodo di bisezione è lento

Metodi di iterazione funzionale

$f(x) = 0 \qquad x = g(x)$

sono eq. se $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = g(\alpha)$

Metodo iterativo

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{i+1} = g(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots \end{cases}$$

teorema: Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^0[a,b]$

$x_{i+1} = g(x_i)$

se $x_i \in [a,b]$, e $\lim_{i\to\infty} x_i = \alpha \Rightarrow \alpha \in [a,b]$ e $g(\alpha) = \alpha$

Dim: se $\alpha = \lim_{i\to\infty} x_i = \lim_{i\to\infty} g(x_{i-1})$

$$= g\left(\lim_{i\to\infty} x_{i-1}\right) = g(\alpha)$$

Cont. di g

Cioè α è punto fisso per g

Def. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(\alpha) = \alpha$, $\alpha \in (a,b)$

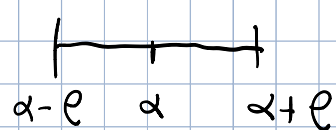
il metodo $\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{i+1} = g(x_i) \quad \text{con } i \geq 0 \end{cases}$

si dice convergente localmente in α se $\exists\, \rho > 0$:

$\forall\, x_0 \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho] \subset [a,b]$

$\Rightarrow$

1. $x_i \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$
2. $\lim_{i\to\infty} x_i = \alpha$



↓

1. Sono tutti dentro questo intervallo
2. Convergono ad α

Significato convergenza locale:

Se parto succ. vicino alla succ, ho una convergenza locale

teorema del punto fisso:

continua derivabile con derivata' continua

Ipotesi:

Ipotesi

Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\cdot\ g \in C^1([a,b])$

$\cdot\ \alpha$ sia punto fisso per g

cioè $g(\alpha) = \alpha$ con $\alpha \in (a,b)$

se esiste $\rho > 0 : |g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

$\Rightarrow \quad \forall x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

cioè $\rightarrow$ Se tutti i punti intorno ad α $-1 < g'(x) < 1$ allora ho convergenza locale

Tesi

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

$\cdot\ x_i \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \quad \forall i = 1 \dots n$

$\cdot\ \lim_{i \to \infty} x_i = \alpha$

Dim: Sia $\lambda = \max_{x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]} |g'(x)| \Rightarrow$ Per ipotesi $\lambda < 1$

Funzione continua perché la comp. di funz. continue è continua.

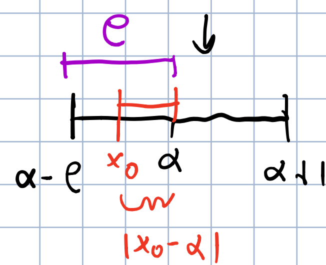
Intervallo chiuso

esiste max per il teorema di Weierstrass

Per induzione dimostriamo che se $x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

$$\Rightarrow \quad |x_i - \alpha| \leq \lambda^i \cdot \rho \qquad i \geq 0$$

Caso base: $i=0$ $\qquad |x_0-\alpha| \leq \lambda^0 \cdot e = e$ $\qquad$ vero per ipotesi su x_0

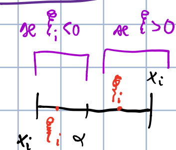


Supponiamo che la diseq. sia verificata fino all'indice i e dimostriamo che vale per $i+1$

$$|x_{i+1}-\alpha| \leq \lambda^{i+1} e$$

$$|x_{i+1}-\alpha| = |\underset{x_{i+1}}{g(x_i)} - \underset{\alpha}{g(\alpha)}| \overset{\text{th. lagrange}}{=} |g'(\xi_i)(x_i-\alpha)|$$

dove ξ_i è tale che

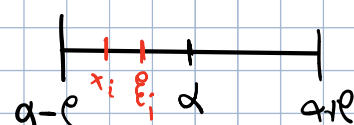


Dipende se $\xi_i<\alpha$ o $\xi_i>0$

$$|\xi_i-\alpha| \leq |x_i-\alpha|$$

$$= |g'(\xi_i)| \cdot |x_i-\alpha|$$

si nota che $\xi \in [\alpha-e, \alpha+e]$ perché per il teorema di lagrange ξ_i sta tra x_i e α



Per ip. induttiva infatti

$$|x_i-\alpha| \leq \lambda^i e \leq e \Rightarrow |\alpha-e| \leq x_i \leq |\alpha+e|$$

Visto che $x_i \in (\alpha-e, \alpha+e] \Rightarrow g'(\xi_i) \leq \lambda$

$$|g'(\xi_i)||x_i-\alpha| \leq \lambda |x_i-\alpha| \leq \lambda \cdot \lambda^i e = \lambda^{i+1} e$$

Dimostrato che (1° punto della tesi)

$$|x_i - \alpha| \leq \lambda^i \rho \leq \rho \quad \rightarrow \quad x_i \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$$

2° punto

$$0 \leq |x_i - \alpha| \leq \lambda^i \rho$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

quindi per il teorem. del confronto

$$\lim_{i\to\infty} |x_i-\alpha| = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i \rightarrow \alpha$$

teorema: Sia $g \in [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad g \in C^1([a,b])$

e $\alpha = g(\alpha)$, $\alpha \in (a,b)$

Se $|g'(\alpha)| < 1 \rightarrow$ il metodo è localmente convergente

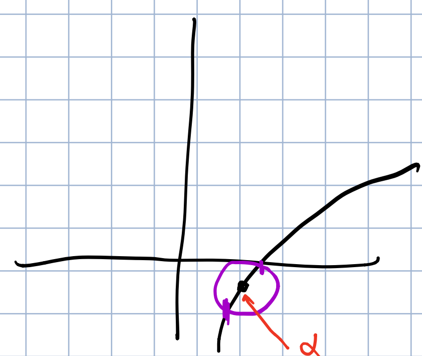
Dim: Per il teorema della perm. del segno

$$h(x) = |g'(x)| - 1 < 0 \qquad h \text{ è continua}$$

$$h(\alpha) < 0$$

$$\Rightarrow \exists \rho : \forall x \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$$

$$h(x) < 0$$



Velocità di convergenza

Se $0 < |g'(\alpha)| < 1$ cioè ho conv. locale ma $g'(\alpha) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|} = g'(\xi_i) \qquad |\xi_i - \alpha| \leq |x_i - \alpha|$$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|} = \lim_{i \to \infty} |g'(\xi_i)| = |g'(\alpha)|$$

Più $|g'(\alpha)|$ è vicino a 0, più è veloce

Più $|g'(\alpha)|$ è vicino a 1, più è lento

Se $|g'(\alpha)| \neq 0$ e il metodo è conv $\Rightarrow$ la conv è di tipo lineare

Se $|g'(\alpha)| = 0 \Rightarrow \lim_{i \to \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|} = 0$ e ho conv. super lineare (più veloce)

Convergenza quadratica

$$\lim_{i = \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|^2} = L \in \mathbb{R}, \quad L \neq 0$$

Metodo delle tangenti

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$

Teorema convergenza locale del metodo delle tangenti

1) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2([a,b])$

e sia $\alpha : f(\alpha) = 0$, $\alpha \in (a,b)$

Se $f'(\alpha) \neq 0$

$\Rightarrow$ il metodo delle tangenti è localmente convergente

cioè $\exists\, \rho > 0$ t.c $\forall x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{è t.c } x_k \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$$

e $\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$

2) Se $x_k \neq \alpha$ $\forall k \geq 0$ $\Rightarrow$ la conv. è almeno di ordine 2 (quadratico)

cioè $$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = l \in \mathbb{R}$$

1) Se $f'(\alpha)\neq 0$ e $f\in C^2$

$$\Rightarrow \exists\, \delta>0 : f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$ é definita $\forall x \in I_\delta$

in particolare $g\in C^1(I_\delta)$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)\,f'(x) - f''(x)\cdot f(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$= \frac{f''(x)\cdot f(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$g'(\alpha) = \frac{f''(\alpha)\cdot \overset{=0}{f(\alpha)}}{\underset{\neq 0}{[f'(\alpha)]^2}} = 0$$

Per il corollario al teorema del punto fisso che questo ci garantisca convergenza locale

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} = ?$$

Considero lo sviluppo di Taylor di $f'(x)$ nel punto x_n arrestato al secondo ordine

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + f''(\xi_n)\frac{(x-x_n)^2}{2}$$

dove $|\xi_n - x| \leq |x_n - x|$

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + f''(\xi_k)\frac{(\alpha-x_n)^2}{2}$$

dove $|\xi_n - \alpha| \leq |x_n - \alpha|$

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_n)}\frac{(\alpha-x_n)^2}{2}$$

$$\underbrace{\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)} - \alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_n)}(x_n-\alpha)^2$$

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_n)}(x_n-\alpha)^2 \qquad \text{dove } |\xi_n - \alpha| \leq |x_k - \alpha|$$

$x_n \neq \alpha$

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

→ perché $\xi \to \alpha$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_{k+1}-\alpha|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}\right| = \frac{1}{2}\frac{|f''(\alpha)|}{|f'(\alpha)|}$$

quindi l'ordine di convergenza è almeno 2 (quadratica)

Ho convergenza (lineare) anche se $f'(\alpha)=0$

teorema di convergenza in largo

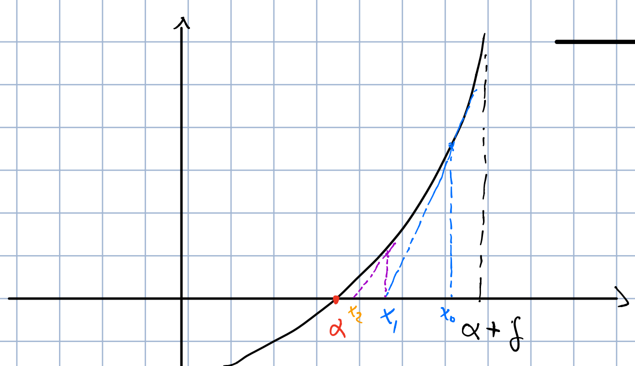
Sia $f: [a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in C^2[[a,b)]$, $f(\alpha)=0$ $\quad \alpha \in (a,b)$

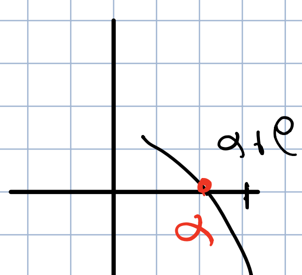
Se $\exists\, \delta > 0 : \forall x \in [\alpha, \alpha+\delta] = S \subset [a,b]$

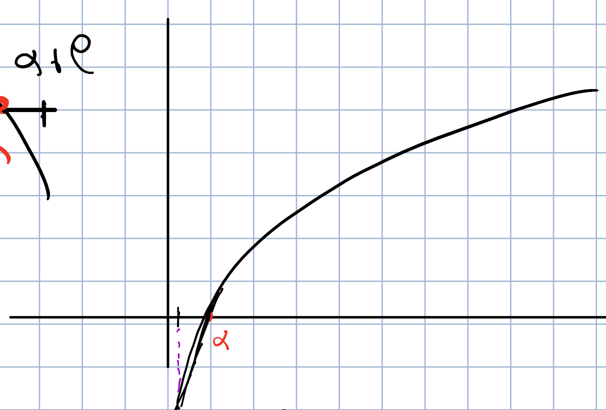
si ha che:

1. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$
2. $f(x)\cdot f''(x) > 0 \quad \forall x \in S$

$\Rightarrow$ il metodo delle tangenti scegliendo $x_0 \in S$ è convergente ad α (in modo monotono decrescente)







devo prendere come $S = [\alpha-\rho, \alpha]$ conv. monotona crescente

Dim: $S = [\alpha, \alpha+\delta]$ $\quad f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$

Poiché f' è continua $\Rightarrow$ $f'(x)$ non cambia segno

Assumiamo che $f'(x) > 0$

Quindi $f(x) > 0 \quad \forall x \in S$ e anche $f''(x) > 0$

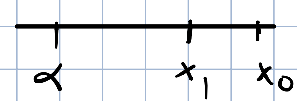
$x_0 \in S$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0$$

quindi $x_1 \leq x_0$

Dimostriamo che

$x_1 - \alpha > 0$ cioè che $x_1 > \alpha$



$$x_1 - \alpha = g(x_0) - g(\alpha) \overset{\text{lagrange}}{=} g'(y_0)(x_0 - \alpha)$$

$|y_0 - \alpha| < |x_0 - \alpha|$

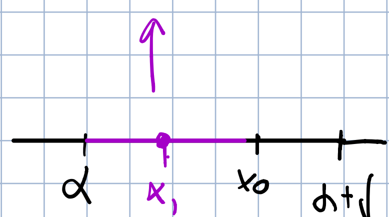
$x_1 - \alpha = g(x_0)$ con $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$g'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$y_0 \in S$ perché sta tra α e x_0 e $x_0 \in S$

$$x_1 - \alpha = \frac{f(y_0)\, f''(y_0)}{\underbrace{[f'(y_0)]^2}_{>0}} \underbrace{(x_0 - \alpha)}_{\geq 0} > 0$$

x_1 sarà su questo pezzo



$$\alpha < x_1 < x_0 \leq \alpha + \delta$$

Si dimostra per induzione che $\alpha < x_{n+1} < x_n < \alpha + \delta$

$\{x_n\}$ è monotona e inf. limitata $\Rightarrow$ ammette limite finito