Riassunto RO

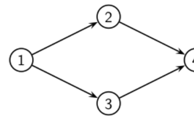
Definizioni:

1)

Grafi orientati

Un grafo orientato è una coppia di insiemi (N, A), dove $A \subseteq N \times N$, cioè A è un insieme di coppie ordinate di elementi di N.
N è chiamato l'insieme dei nodi, mentre A è l'insieme degli archi.

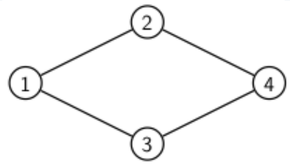
Per ogni arco (i, j), il nodo i è detto la coda dell'arco, mente il nodo j è la testa.

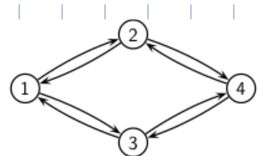


2)

Grafi non orientati

Un grafo non orientato è una coppia di insiemi (N, A), dove A è un insieme di coppie non ordinate di elementi di N.



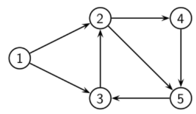


3)

Cammini orientati e non orientati

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un cammino in G è una sequenza di nodi $i_1, i_2, \ldots, i_p \in N$ tale che $(i_1, i_2) \in A$ oppure $(i_2, i_1) \in A$, $(i_2, i_3) \in A$, oppure $(i_3, i_2) \in A \ldots$, $(i_{p-1}, i_p) \in A$ oppure $(i_{p-1}, i_p) \in A$.

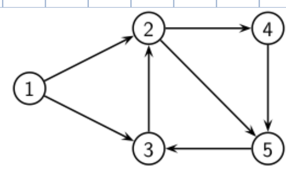
Un cammino $i_1, i_2, \ldots, i_p$ è detto orientato se $(i_1, i_2) \in A$, $(i_2, i_3) \in A$, $\ldots$, $(i_{p-1}, i_p) \in A$. Altrimenti è detto non orientato.



Un cammino orientato è $1, 2, 4$. Anche $1, 2, 5, 3, 2, 4$ è un cammino orientato.
$1, 2, 5, 4$ è un cammino non orientato.
$1, 4, 3$ non è un cammino.

4)

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un cammino semplice in G è un cammino $i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, i_p$ tale che i nodi $i_1, \ldots, i_{p-1}$ sono diversi tra loro.

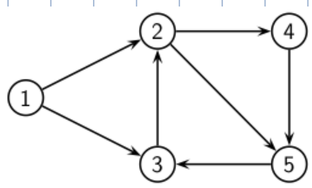


$1, 2, 4$ è un cammino semplice orientato.
$1, 3, 5$ è un cammino semplice non orientato.
$1, 2, 5, 3, 2, 4$ non è un cammino semplice.

5)

Cicli

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un ciclo in G è un cammino semplice $i_1, i_2, \ldots, i_p$, dove $i_p = i_1$.

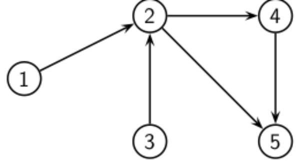


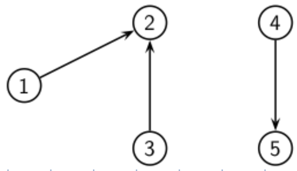
$2, 5, 3, 2$ è un ciclo orientato.
$1, 2, 4, 5, 3, 1$ è un ciclo non orientato.
$1, 2, 4, 5, 2, 3, 1$ non è un ciclo (è un cammino non semplice).

6)

Grafi connessi

Un grafo orientato $G = (N, A)$ è connesso se per ogni $i, j \in N$ esiste un cammino in G da i a j.

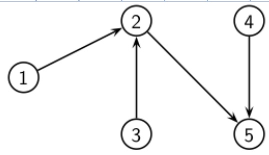
Il grafo  è connesso

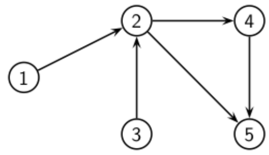
Il grafo  non è connesso

7)

Alberi

Un grafo orientato $G = (N, A)$ è un albero se è connesso e non contiene cicli.

Il grafo  è un albero

Il grafo  non è un albero

8)

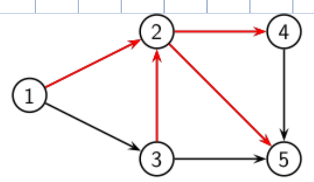
Teorema

Supponiamo che $G = (N, A)$ sia un albero.

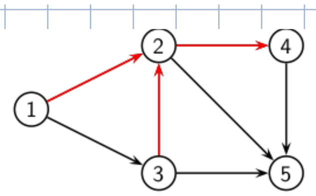
- Se N contiene n nodi, allora A contiene esattamente $n - 1$ archi.
- G contiene almeno due nodi che hanno un solo arco incidente (detti foglie).
- Ogni coppia di nodi in G è connessa da un unico cammino.

9)

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un albero di copertura di G è un insieme di archi $T \subseteq A$ tale che il sottografo $G' = (N, T)$ sia un albero.



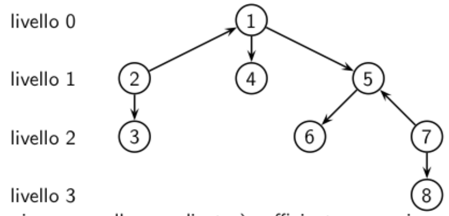
$T = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (2, 5)\}$ è un albero di copertura



$T = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2)\}$ non è un albero di copertura

10)

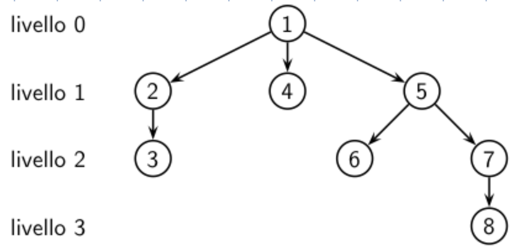
Un albero radicato è un albero in cui un nodo è chiamato radice (l'albero è pensato "appeso" dalla sua radice).



Per memorizzare un albero radicato è sufficiente memorizzare il predecessore di ogni nodo:
1 è il predecessore di 2, 4, 5
2 è il predecessore di 3
5 è il predecessore di 6, 7
7 è il predecessore di 8

11)

Un albero radicato in r e orientato è un albero tale che esiste un unico cammino orientato da r ad ogni altro nodo.



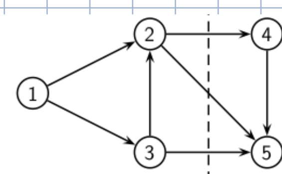
L'albero nella slide precedente è radicato in 1 ma non è orientato.

12)

Dato un grafo orientato (N, A), un taglio è una partizione (N', N'') dell'insieme dei nodi, cioè

$$N', N'' \subseteq N, \quad N' \cap N'' = \emptyset, \quad N' \cup N'' = N.$$

Gli archi del taglio sono gli archi aventi un estremo in N' e l'altro in N''.



un taglio è (N', N''), dove $N' = \{1, 2, 3\}$ e $N'' = \{4, 5\}$.
Gli archi del taglio sono (2,4), (2,5), (3,5).

Problema dei cammini minimi

Modello da un nodo s a un nodo t

Modello 1

Variabili: per ogni $(i, j) \in A$, definiamo x_{ij} = numero di volte che si attraversa l'arco (i, j) [flusso sull'arco (i, j)].

Funzione obiettivo: $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$

Vincoli:

$$\sum_{(i,s)\in A} x_{is} - \sum_{(s,j)\in A} x_{sj} = -1 \qquad \text{(1 unità di flusso deve uscire da } s\text{)}$$

$$\sum_{(i,t)\in A} x_{it} - \sum_{(t,j)\in A} x_{tj} = 1 \qquad \text{(1 unità di flusso deve entrare in } t\text{)}$$

$$\sum_{(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{(k,j)\in A} x_{kj} = 0 \qquad \forall\ k \in N \setminus \{s, t\}$$

(i nodi diversi da s e t sono nodi di transito)

Modello 2

La matrice di incidenza E di un grafo orientato (N, A) ha dimensione $|N| \times |A|$, cioè ha una riga per ogni nodo $k \in N$ ed una colonna per ogni arco $(i, j) \in A$, ed è così definita:

$$E_{k,(i,j)} = \begin{cases} -1 & \text{se } k = i, \\ 1 & \text{se } k = j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il modello può essere scritto nella forma compatta

$$\begin{cases} \min\ c^{\mathsf{T}} x \\ Ex = b \\ x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^{|A|} \end{cases}$$

dove c è il vettore dei costi, x è il vettore dei flussi e b il vettore dei bilanci ai nodi

$$b_k = \begin{cases} -1 & \text{se } k = s, \\ 1 & \text{se } k = t, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Modello da un nodo s a tutti gli altri nodi

$$E_{k,(i,j)} = \begin{cases} -1 & \text{se } k = i, \\ 1 & \text{se } k = j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} -(n-1) & \text{se } i = r, \\ 1 & \text{se } i \neq r, \end{cases}$$

e considerare il modello

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ Ex = b \\ x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^{|A|} \end{cases}$$

Esistenza delle soluzioni ottime

Il problema dei cammini minimi ammette (almeno) una soluzione ottima se e solo se non esistono cicli orientati di costo negativo.

Condizioni di ottimalità

Teorema (condizioni di Bellman)

Sia T un albero di copertura radicato in r e orientato, π il corrispondente vettore dei potenziali dei nodi.

T è un albero dei cammini minimi se e solo se $\pi_j \leq \pi_i + c_{ij}, \quad \forall\,(i,j) \notin T.$

Archi che non appartengono all'albero scelto

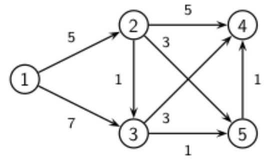
Se $\pi_j < \pi_i + c_{ij}, \quad \forall\,(i,j) \notin T.$ Allora la soluzione ottima è unica

π_J = Potenziale nodo J

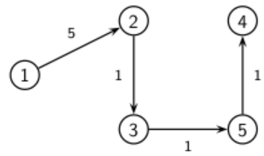
π_i = Potenziale nodo precedente di J

c_{iJ} = costo arco (i,J)

Esempio



Il seguente albero è ottimo?



I potenziali dei nodi sono $\pi = (0, 5, 6, 8, 7)$ Controlliamo le condizioni di Bellman:
arco $(1, 3)$: $6 = \pi_3 \leq \pi_1 + c_{13} = 0 + 7$? SI.
arco $(2, 4)$: $8 = \pi_4 \leq \pi_2 + c_{24} = 5 + 5$? SI.
arco $(2, 5)$: $7 = \pi_5 \leq \pi_2 + c_{25} = 5 + 3$? SI.
arco $(3, 4)$: $8 = \pi_4 \leq \pi_3 + c_{34} = 6 + 3$? SI. Pertanto l'albero è ottimo.

Algoritmi per trovare il cammino minimo

1) Dijkstra (solo se $c_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A$)

0. Poni

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = r \\ -1 & \text{se } i \neq r \end{cases} \qquad \pi_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = r \\ +\infty & \text{se } i \neq r \end{cases} \qquad U = N$$

(l'albero inizialmente è costituito solo da archi fittizi da r agli altri nodi)

1. Se $U = \emptyset$ allora stop
2. Seleziona un nodo $u \in U$ con potenziale minimo: $u = \arg\min_{i \in U} \pi_i$
3. Per ogni arco $(u, v) \in A$ controlla la condizione di Bellman:
   se $\pi_v > \pi_u + c_{uv}$ allora $p_v = u$, $\pi_v = \pi_u + c_{uv}$
4. $U = U \setminus \{u\}$ e torna al passo 1.

teorema: Se $c_{ij} \geq 0$ per ogni $(i, j) \in A$, allora l'algoritmo di Dijkstra trova un albero dei cammini minimi dopo $|N|$ iterazioni.

2) Bellman-Ford (anche se ci sono c_{ij} negativi)

considera gli archi entranti per ogni nodo a ogni iterazione e fa il confronto con i valori all'iterazione precedente

Algoritmo

0. Poni

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = r \\ -1 & \text{se } i \neq r \end{cases} \qquad \pi_i^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } i = r \\ +\infty & \text{se } i \neq r \end{cases} \qquad k = 1$$

(l'albero inizialmente è costituito solo da archi fittizi da r agli altri nodi)

1. Per ogni nodo $j \in N$:
   trova $u = \arg\min_{i \in BS(j)} \{\pi_i^{k-1} + c_{ij}\}$
   ($BS(j) = \{i \in N :$ esiste un arco $(i, j) \in A\}$ è la stella entrante in j)
   se $\pi_j^{k-1} > \pi_u^{k-1} + c_{uj}$ allora $p_j = u$, $\pi_j^k = \pi_u^{k-1} + c_{uj}$
   altrimenti $\pi_j^k = \pi_j^{k-1}$
2. Se $\pi^k = \pi^{k-1}$ allora stop (p fornisce un albero ottimo)
3. Se $k = |N|$ allora stop (p fornisce un ciclo orientato di costo negativo)
   altrimenti $k = k + 1$ e torna al passo 1.

teorema:

L'algoritmo di Bellman-Ford trova un albero dei cammini minimi oppure un ciclo orientato di costo negativo dopo al più $|N|$ iterazioni.

3) Programmazione dinamica

Dopo aver definito un ordinamento topologico dei nodi, l'algoritmo di programmazione dinamica per trovare un albero dei cammini minimi di radice 1 è il seguente:

1. Poni $\pi_1 = 0$.
2. Per ogni nodo $j = 2, \dots, n$:
   trova $u = \arg\min_{i<j}\{\pi_i + c_{ij}\}$
   poni $p_j = u, \ \ \pi_j = \pi_u + c_{uj}$

Albero di copertura di costo minimo

Modello 1

Sia $N = \{1, \dots, n\}$.

Per ogni $i, j \in N$ con $i < j$, definiamo le variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'albero contiene l'arco } (i,j), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Modello di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i\in N} \sum\limits_{\substack{j\in N \\ j>i}} c_{ij}x_{ij} & \\ \sum\limits_{i\in N} \sum\limits_{\substack{j\in N \\ j>i}} x_{ij} = n-1 & \text{(l'albero contiene } n-1 \text{ archi)} \\ \sum\limits_{i\in S} \sum\limits_{\substack{j\in S \\ j>i}} x_{ij} \leq |S|-1 & \forall\ S \subset N \text{ tale che } |S| \geq 3 \\ & \text{(eliminazione dei cicli)} \\ x_{ij} \in \{0,1\} & i,j \in N \text{ con } i<j \end{cases}$$

Modello 2

Variabili decisionali: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'albero contiene l'arco } (i,j), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Modello di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i\in N} \sum\limits_{\substack{j\in N \\ j>i}} c_{ij}x_{ij} & \\ \sum\limits_{i\in N} \sum\limits_{\substack{j\in N \\ j>i}} x_{ij} = n-1 & \text{(l'albero contiene } n-1 \text{ archi)} \\ \sum\limits_{i\in S} \sum\limits_{\substack{j\notin S \\ j>i}} x_{ij} + \sum\limits_{i\notin S} \sum\limits_{\substack{j\in S \\ j>i}} x_{ij} \geq 1 & \forall\ S \subset N \text{ tale che } |S| \geq 1 \\ & \text{(vincoli di connessione)} \\ x_{ij} \in \{0,1\} & i,j \in N \text{ con } i<j \end{cases}$$

Condizione di ottimalità basata sui cicli:

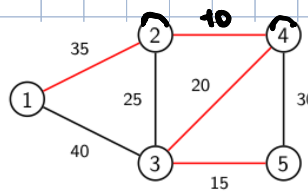
Osservazione. Se ad un albero di copertura T viene aggiunto un arco $(u,v) \notin T$, si forma un ciclo (perché in T esiste un cammino da u a v).

Teorema

Sia T un albero di copertura.

T è un albero di copertura di costo minimo se e solo se per ogni arco $(u,v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i,j) appartenente al ciclo ottenuto aggiungendo a T l'arco (u,v).

Esempio:



Applicando la condizione di ottimalità basata sui cicli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1,2),(2,4),(3,4),(3,5)\}$ è ottimo.

$(u,v) \notin T_1$	c_{uv}	ciclo C	altri archi di C	costi	cond. ott. vera
(1,3)	40	1-2-4-3-1	(1,2) (2,4) (3,4)	35, 10, 20	si
(2,3)	25	2-4-3-2	(2,4) (3,4)	10, 20	si
(4,5)	30	4-3-5-4	(3,4) (3,5)	20, 15	si

Quindi T_1 è un albero di copertura di costo minimo.

Condizione di ottimalità basata sui tagli

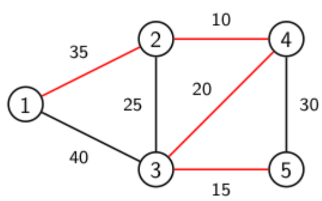
Osservazione. Se da un albero di copertura T viene eliminato un arco $(u,v) \in T$, si formano 2 componenti connesse N' e N'', e quindi un taglio (N', N'') tale che (u,v) è l'unico arco del taglio che appartiene a T.

Teorema

Sia T un albero di copertura.
T è un albero di copertura di costo minimo se e solo se per ogni arco $(u,v) \in T$ si ha $c_{uv} \le c_{ij}$ per ogni arco (i,j) del taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u,v).

Esempio :

Esempio 1. Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo:



Applicando la condizione di ottimalità basata sui tagli, dire se l'albero di copertura $T_1 = \{(1,2),(2,4),(3,4),(3,5)\}$ è ottimo.

$(u,v) \in T_1$	c_{uv}	taglio (N', N'')	altri archi taglio	costi	cond. vera
(1,2)	35	({1}, {2,3,4,5})	(1,3)	40	si
(2,4)	10	({1,2}, {3,4,5})	(1,3) (2,3)	40, 25	si
(3,4)	20	({1,2,4}, {3,5})	(1,3) (2,3) (4,5)	40, 25, 30	si
(3,5)	15	({1,2,3,4}, {5})	(4,5)	30	si

Quindi T_1 è un albero di copertura di costo minimo.

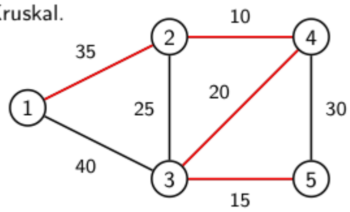
Algoritmi:

1) Algoritmo di Kruskal (basato sui cicli)

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $k = 1$.
1. Se $|T| = n - 1$ allora stop
2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$
3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esempio

Esempio 3. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.



Archi in ordine crescente di costo: $\{(2,4),(3,5),(3,4),(2,3),(4,5),(1,2),(1,3)\}$.

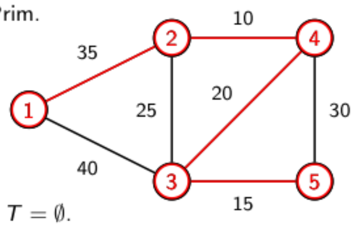
$T = \emptyset$,	$(2,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4)\}$,	$(3,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5)\}$,	$(3,4)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(2,3)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(4,5)$ forma un ciclo con gli archi di T? SI
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4)\}$,	$(1,2)$ forma un ciclo con gli archi di T? NO
$T = \{(2,4),(3,5),(3,4),(1,2)\}$	STOP

2) Algoritmo di Prim (basato sui tagli)

0. Scegli un nodo $i \in N$, poni $S = \{i\}$ e $T = \emptyset$.
1. Se $|T| = n-1$ allora stop
2. Trova un arco (u,v) di costo minimo tra gli archi appartenenti al taglio $(S, N \setminus S)$ ed inseriscilo in T.
3. Inserisci in S l'estremo di (u,v) che non appartiene ad S e torna al passo 1.

Esempio:

Esempio 4. Trovare un albero di copertura di costo minimo sul seguente grafo utilizzando l'algoritmo di Prim.

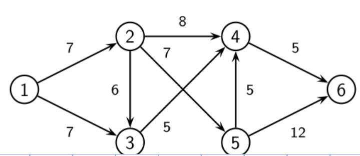


Scegliamo $i = 1$, $S = \{1\}$, $T = \emptyset$.
Taglio $(\{1\},\{2,3,4,5\})$, $(1,2) = \arg\min\{c_{12}, c_{13}\}$, $T = \{(1,2)\}$, $S = \{1,2\}$
Taglio $(\{1,2\},\{3,4,5\})$, $(2,4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{24}\}$, $T = \{(1,2),(2,4)\}$, $S = \{1,2,4\}$
Taglio $(\{1,2,4\},\{3,5\})$, $(3,4) = \arg\min\{c_{13}, c_{23}, c_{34}, c_{45}\}$, $T = \{(1,2),(2,4),(3,4)\}$, $S = \{1,2,3,4\}$
Taglio $(\{1,2,3,4\},\{5\})$, $(3,5) = \arg\min\{c_{35}, c_{45}\}$, $T = \{(1,2),(2,4),(3,4),(3,5)\}$, $S = \{1,2,3,4,5\}$ stop

Problema del flusso massimo

Sia (N, A) un grafo orientato in cui è definita una capacità superiore u_{ij} per ogni arco $(i,j) \in A$. Dati un nodo origine $s \in N$ e un nodo destinazione $t \in N$, vogliamo spedire la massima quantità di flusso da s a t in modo da rispettare le capacità superiori degli archi.

Esempio 1. Trovare il flusso di valore massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul seguente grafo (sugli archi sono riportate le capacità superiori).



Modello

Variabili:
ad ogni arco $(i,j) \in A$ associamo x_{ij} = flusso sull'arco (i,j)
v = flusso totale uscente dal nodo s

Modello:

$$\max \; v$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{(i,s)\in A} x_{is} - \sum_{(s,j)\in A} x_{sj} = -v & \\
\displaystyle\sum_{(i,t)\in A} x_{it} - \sum_{(t,j)\in A} x_{tj} = v & \\
\displaystyle\sum_{(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{(k,j)\in A} x_{kj} = 0 & \forall\, k \in N \setminus \{s,t\}
\end{array}\right\} \text{vincoli di bilancio}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \forall\, (i,j) \in A \qquad \text{vincoli di capacità}$$

Condizioni di ottimalità

Definizioni :

Un taglio è una partizione di N in due sottoinsiemi (N_s, N_t)

Un taglio ammissibile è un taglio (N_s, N_t) tale che $s \in N_s$ e $t \in N_t$

Dato un taglio ammissibile (N_s, N_t) ed un flusso x, si definiscono:

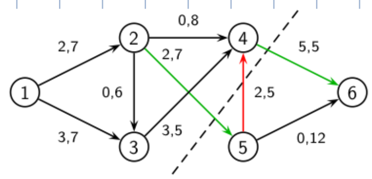
$A^+ = \{(i,j) \in A : \ i \in N_s, \ j \in N_t\}$ insieme degli archi diretti del taglio

$A^- = \{(i,j) \in A : \ i \in N_t, \ j \in N_s\}$ insieme degli archi inversi del taglio

$u(N_s, N_t) = \sum_{(i,j)\in A^+} u_{ij}$ capacità del taglio

$x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j)\in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in A^-} x_{ij}$ flusso sul taglio

Esempio:



Il taglio (N_s, N_t), dove $N_s = \{1,2,3,4\}$ e $N_t = \{5,6\}$, è ammissibile.
archi diretti: $A^+ = \{(2,5),(4,6)\}$
archi inversi: $A^- = \{(5,4)\}$
capacità del taglio: $u(N_s, N_t) = u_{25} + u_{46} = 7 + 5 = 12$
flusso sul taglio: $x(N_s, N_t) = x_{25} + x_{46} - x_{54} = 2 + 5 - 2 = 5$.

valore del flusso : somma dei flussi uscenti dalla sorgente

Condizioni :

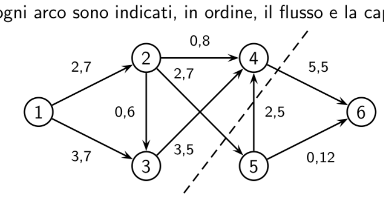
Lemma
Se x è un flusso ammissibile e (N_s, N_t) è un taglio ammissibile, allora
- $v = x(N_s, N_t)$ (valore del flusso = flusso sul taglio)
- $x(N_s, N_t) \le u(N_s, N_t)$ (flusso sul taglio $\le$ capacità del taglio)

Capacità del taglio: somma delle capacità degli archi che vanno dall'insieme di nodi dove è contenuta la sorgente a quello dove è contenuta la destinazione

Flusso del taglio: somma del flusso degli archi dal insieme Ns a Nt meno gli archi da Nt a Ns

Esempio

Esempio 2. Si consideri il problema del flusso massimo da 1 a 6 sul seguente grafo in cui su ogni arco sono indicati, in ordine, il flusso e la capacità superiore:

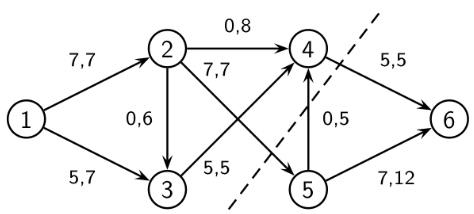


valore del flusso: $v = x_{12} + x_{13} = 2 + 3 = 5$
flusso sul taglio: $x(N_s, N_t) = x_{25} + x_{46} - x_{54} = 2 + 5 - 2 = 5$.
capacità del taglio: $u(N_s, N_t) = u_{25} + u_{46} = 7 + 5 = 12$

Teorema: Se esistono un flusso ammissibile x ed un taglio ammissibile (N_s, N_t) tali che $x(N_s, N_t) = u(N_s, N_t)$, allora x è un flusso di valore massimo e (N_s, N_t) è un taglio di capacità minima.

Esempio:

Esempio 3. Si consideri il problema del flusso massimo da 1 a 6 sul seguente grafo in cui su ogni arco sono indicati, in ordine, il flusso e la capacità superiore:



valore del flusso: $v = x_{12} + x_{13} = 7 + 5 = 12$
flusso sul taglio: $x(N_s, N_t) = x_{25} + x_{46} - x_{54} = 7 + 5 - 0 = 12$
capacità del taglio: $u(N_s, N_t) = u_{25} + u_{46} = 7 + 5 = 12$
Quindi il flusso è di valore massimo ed il taglio è di capacità minima.

Se facendo il taglio ho il flusso del taglio = alla capacità del taglio allora il flusso è di valore max e il taglio è di capacità minima

Definizioni:

1) **Grafo residuo**

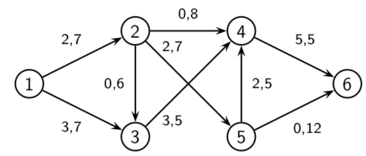
Dato un flusso ammissibile x, il grafo residuo relativo ad x è il grafo $G(x) = (N, A(x))$ avente gli stessi nodi del grafo G, mentre gli archi e le loro capacità residue r_{ij} sono definiti come segue:

se $(i,j) \in A$ con $x_{ij} < u_{ij}$ (arco non saturo) allora $(i,j) \in A(x)$ con $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$

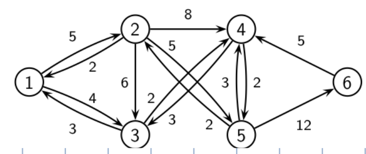
se $(i,j) \in A$ con $x_{ij} > 0$ (arco non vuoto) allora $(j,i) \in A(x)$ con $r_{ji} = x_{ij}$

Esempio

Esempio 4. Si consideri il problema del flusso massimo da 1 a 6 sul seguente grafo in cui su ogni arco sono indicati, in ordine, il flusso e la capacità superiore:



Il grafo residuo associato al flusso indicato sugli archi è il seguente (sugli archi sono indicate le capacità residue):

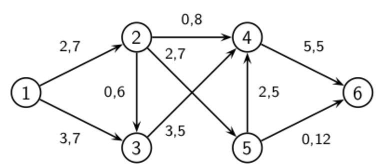


2) **Cammino aumentante**

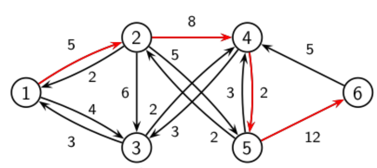
Dato un flusso ammissibile x, un cammino aumentante rispetto ad x è un cammino orientato da s a t nel grafo residuo $G(x)$.

Esempio:

Esempio 4. Si consideri il problema del flusso massimo da 1 a 6 sul seguente grafo in cui su ogni arco sono indicati, in ordine, il flusso e la capacità superiore:



Il grafo residuo è:



1-2-5-6 è un cammino aumentante (ed è un cammino orientato nel grafo iniziale)
1-2-4-5-6 è un cammino aumentante (ma non è un cammino orientato nel grafo iniziale)

Per verificare se un flusso è max basta vedere se esistono cammini aumentanti nel grafo residuo

Algoritmi:

1) Ford-Fulkerson ⇒ Algoritmo di Edmonds-Karp per cercare il cammino aumentante

Algoritmo

0. Poni $x = 0$ (flusso nullo su tutti gli archi) e $G(x) = G$
1. Se esiste un cammino aumentante C rispetto ad x allora
   aggiorna il flusso:
   calcola $\delta = \min\{r_{ij} : (i,j) \in C\}$ (max quantità da spedire lungo C) → Min flusso camm. aumentante
   per ogni $(i,j) \in A$:
   se $(i,j) \in C$ allora $x_{ij} = x_{ij} + \delta$ → Archi con stesso senso rispetto al camm. aum.
   se $(j,i) \in C$ allora $x_{ij} = x_{ij} - \delta$ → Archi con senso opposto rispetto al camm. aumentante
   altrimenti stop
2. Aggiorna il grafo residuo $G(x)$ e torna al passo 1

teorema:

Se le capacità degli archi sono intere, allora l'algoritmo di Ford-Fulkerson trova un flusso di valore massimo dopo un numero finito di iterazioni.
All'ultima iterazione un taglio di capacità minima (N_s, N_t) si può calcolare nel modo seguente:

$$N_s = \{ i \in N : \text{ esiste in } G(x) \text{ un cammino orientato da } s \text{ a } i \},$$
$$N_t = \{ i \in N : \text{ non esiste in } G(x) \text{ un cammino orientato da } s \text{ a } i \},$$

Un altro taglio di capacità minima (N'_s, N'_t) si può ottenere nel modo seguente:

$$N_s = \{ i \in N : \text{ non esiste in } G(x) \text{ un cammino orientato da } i \text{ a } t \},$$
$$N_t = \{ i \in N : \text{ esiste in } G(x) \text{ un cammino orientato da } i \text{ a } t \},$$

Il taglio di capacità minima è unico se e solo se i due tagli precedenti coincidono.

1) TAGLIO CAP. MINIMA

N_S = Nodi dai quali non è raggiungibile la destinazione

N_T = Nodi da cui è raggiungibile la destinazione

Edmons-Karp

L'algoritmo di Edmonds-Karp è una visita a ventaglio del grafo residuo e trova un cammino aumentante con il minimo numero di archi.
Usa un vettore p di predecessori dei nodi ed un insieme Q di nodi.

1. Poni $p_i := \begin{cases} -1 & \text{se } i \neq s \\ 0 & \text{se } i = s \end{cases}$, $Q := \boxed{s}$
2. **if** $Q = \emptyset$
   then STOP (p fornisce un taglio di capacità minima
   $N_s = \{i \in N : p_i \neq -1\}, N_t = \{i \in N : p_i = -1\}$)
   else estrai il primo elemento i di Q.
3. **if** $(i, t) \in A(x)$ **then** $p_t := i$, STOP (p fornisce un cammino aumentante).
4. In $G(x)$ analizza gli archi uscenti da i in ordine lessicografico
   Per ogni $(i, j) \in A(x)$:
   if $p_j := -1$ **then** $p_j := i$, aggiungi j in fondo a Q.
   Torna al passo 2.

NEL GRAFO RESIDUO

2) TAGLIO CAP MINIMA

N_S: Nodi raggiungibili dalla sorgente alla fine dell'algoritmo (quando non ho più cammini aumentanti

N_t = Nodi non raggiungibili dalla sorgente

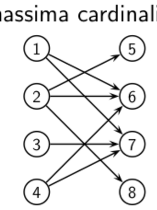
Problema dell'accoppiamento di max cardinalità

Un grafo orientato (N, A) è detto bipartito se esistono due insiemi $O, D \subset N$ tali che $N = O \cup D$ e $A \subseteq O \times D$.
In un grafo bipartito (N, A) un accoppiamento è un insieme di archi $M \subseteq A$ tale che su ogni nodo di N incide al più un arco di M.

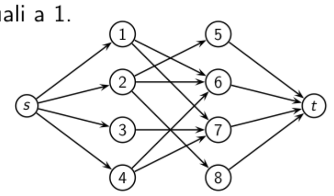
Il problema dell'accoppiamento di massima cardinalità in un grafo bipartito (N, A) consiste nel trovare un accoppiamento con il massimo numero di archi.

Problema dell'accoppiamento di massima cardinalità

Il problema dell'accoppiamento di massima cardinalità su un grafo bipartito (N, A) è equivalente al problema del flusso massimo sul grafo (N', A'), dove $N' = N \cup \{s, t\}$, $A' = A \cup \{(s, i) : i \in O\} \cup \{(j, t) : j \in D\}$ e le capacità superiori di tutti gli archi sono uguali a 1.
Esempio. L'accoppiamento di massima cardinalità sul grafo



è equivalente al problema del flusso massimo sul grafo seguente in cui le capacità superiori degli archi sono uguali a 1.



Flusso di costo minimo

Problema

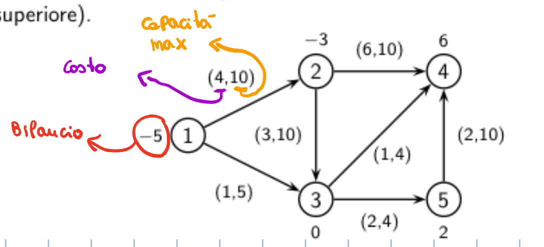
Dato un grafo orientato (N, A) in cui sono definiti

- un costo c_{ij} per spedire una unità di flusso sull'arco $(i, j) \in A$
- una capacità superiore u_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$
- un bilancio b_i per ogni nodo $i \in N$ (i è detto sorgente se $b_i < 0$, i è detto pozzo se $b_i > 0$)

trovare un flusso sugli archi che rispetti i bilanci dei nodi e le capacità degli archi e che sia di costo totale minimo.

Esempio ⇓

Esempio 1. Trovare un flusso di costo minimo sul seguente grafo (su ogni nodo è indicato il bilancio, su ogni arco sono indicati, in ordine, il costo e la capacità superiore).



Modello

Variabili decisionali: per ogni arco $(i, j) \in A$ definiamo x_{ij} = flusso sull'arco (i, j)

Modello di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{(k,j)\in A} x_{kj} = b_k \qquad \forall\, k \in N \qquad \text{(vincoli di bilancio)} \\ 0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \forall\, (i,j) \in A \qquad \text{(vincoli di capacità)} \end{cases}$$

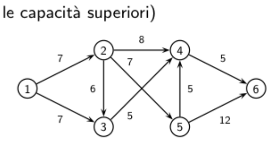
Casi particolari

1) Il problema dell'albero dei cammini minimi di radice r è un particolare problema di flusso di costo minimo, dove le capacità superiori $u_{ij} = +\infty$ per ogni $(i, j) \in A$ ed i bilanci sono $b_r = -(n-1)$ e $b_i = 1$ per ogni $i \neq r$.

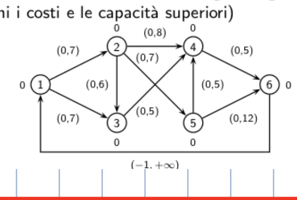
2) Il problema del flusso massimo da s a t su un grafo (N, A) equivale ad un problema di flusso di costo minimo sul grafo $(N, A \cup \{(t, s)\})$, dove $b_i = 0$ per ogni $i \in N$, $c_{ij} = 0$ per ogni $(i, j) \in A$, $c_{ts} = -1$ e $u_{ts} = +\infty$. Tale problema è chiamato di circolazione.

Esempio:

Esempio 2. Il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul seguente grafo (sugli archi sono indicate le capacità superiori)



equivale al problema di flusso di costo minimo sul seguente grafo (sui nodi sono indicati i bilanci mentre sugli archi i costi e le capacità superiori)



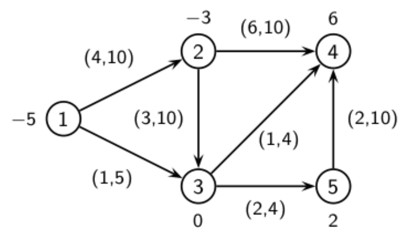
Esistenza delle soluzioni

Per determinare se esistono soluzioni ammissibili per il problema del flusso di costo minimo su un grafo (N, A), si può risolvere il problema del flusso massimo sul grafo (N', A'), dove
$N' = N \cup \{s, t\}$,
$A' = A \cup \{(s, i) : \ i \in N \text{ tale che } b_i < 0\} \cup \{(j, t) : \ j \in N \text{ tale che } b_j > 0\}$,
$u'_{si} = -b_i$, $u'_{jt} = b_j$, $u'_{ij} = u_{ij}$ per ogni $(i, j) \in A$.

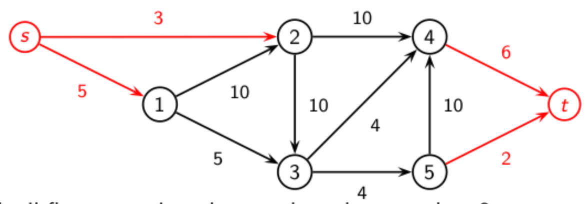
Sia x il flusso di valore massimo sul grafo (N', A').
Se il valore di x è uguale a $\sum\limits_{\substack{i \in N \\ b_i > 0}} b_i$ (cioè tutti gli archi di $A' \setminus A$ sono saturi),
allora x è ammissibile per il problema del flusso di costo minimo,
altrimenti il flusso di costo minimo non ammette soluzioni ammissibili.

Esempio

Esempio 3. Per trovare una soluzione ammissibile per il flusso di costo minimo sul grafo



si può risolvere il problema del flusso massimo sul seguente grafo (sugli archi sono indicate le capacità superiori):



Verificare che il flusso massimo da s a t ha valore uguale a 8.

Condizioni di ottimalità

Ad ogni flusso x associamo il grafo residuo $G(x) = (N, A')$ in cui l'insieme degli archi A' è così definito:

- se $(i, j) \in A$ con $x_{ij} < u_{ij}$, allora $(i, j) \in A'$ con capacità residua $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ e costo $c'_{ij} = c_{ij}$,
- se $(i, j) \in A$ con $x_{ij} > 0$, allora $(j, i) \in A'$ con capacità residua $r_{ji} = x_{ij}$ e costo $c'_{ji} = -c_{ij}$.

Teorema
Sia x un flusso ammissibile.
x è ottimo se e solo se in $G(x)$ non esistono cicli orientati di costo negativo (chiamati cicli aumentanti rispetto a x).

Definizione:

Pseudoflussi

Uno pseudoflusso x è un flusso che rispetta i vincoli di capacità degli archi ($0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$) ma non necessariamente i vincoli di bilancio dei nodi.

Se x è uno pseudoflusso, allora

$$e_x(i) = \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - b_i$$

è chiamato lo sbilanciamento del nodo i rispetto a x.

Indichiamo con
$E_x = \{i \in N : \; e_x(i) > 0\}$ l'insieme dei nodi con eccesso di flusso
$D_x = \{i \in N : \; e_x(i) < 0\}$ l'insieme dei nodi con difetto di flusso
$g(x) = \sum_{i\in E_x} e_x(i)$ lo sbilanciamento complessivo di x.
Uno pseudoflusso x è ammissibile (cioè rispetta anche i vincoli di bilancio) se e solo se $E_x = D_x = \emptyset$ se e solo se $g(x) = 0$.

Uno pseudoflusso x è detto minimale se ha costo minimo tra tutti gli pseudoflussi aventi lo stesso vettore di sbilanciamenti e_x.
Teorema. x è minimale se e solo se non esistono cicli aumentanti rispetto a x.

Algoritmo dei cammini minimi successivi

Algoritmo

0. Per ogni $(i,j) \in A$ poni $x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } c_{ij} \geq 0, \\ u_{ij} & \text{se } c_{ij} < 0. \end{cases}$
1. Se $E_x = \emptyset$ allora stop (x è ottimo)
2. Aggiungi a $G(x)$ un nodo r e gli archi (r,i) per ogni $i \in E_x$ con costo $c_{ri} = 0$ e capacità residua $r_{ri} = +\infty$.
   Trova in $G(x)$ un albero dei cammini minimi T di radice r.
3. Trova $t = \arg\min_{i\in D_x} \pi_i$ (nodo di D_x con potenziale minimo). → nodo con sbilanciamento negativo e il minimo
   Se $\pi_t = +\infty$ allora stop (non esistono flussi ammissibili)
4. Indica con P il cammino da r a t contenuto nell'albero T (P passa per un nodo $s \in E_x$).
   Calcola $\delta = \min\{e_x(s), -e_x(t), \min\{r_{ij} : \; (i,j) \in P\}\}$ (max quantità da spedire lungo P).
5. Aggiorna x spedendo δ unità di flusso lungo il cammino P e torna al passo 1.

teorema: Se le capacità ed i bilanci sono numeri interi, allora l'algoritmo trova una soluzione ottima dopo un numero finito di iterazioni.

Bilanciamento nodi nello pseudoflusso:

flusso entrante − flusso uscente − bilanciamento

Costo pseudoflusso:

$$\sum \Big(\underbrace{\text{flusso su arco}}_{\text{nello pseudoflusso}} \cdot \underbrace{\text{costo arco}}_{\text{nel grafo iniziale}} \Big)$$

Flusso da inviare:

$$f = \min\Big(\text{bilanciamento sorgente},\ -(\text{Bilanciamento destinazione}),\ \min \text{ capacità archi grafo residuo cammino costo minimo}\Big)$$

Soluzione accettabile:

- $\sum$ sbilanciamenti pseudoflusso $= 0 \Rightarrow g(x) = 0$
- Nessun ciclo di costo negativo nel grafo residuo

Cambiare soluzione ottima:

Cambiare il costo di un arco in modo da avere un ciclo di costo negativo nel grafo residuo

---

Programmazione lineare

Ogni problema di Programmazione lineare può essere rappresentato nella forma matriciale seguente:

PL in Forma generale

$$\begin{cases} \max \ (\text{o } \min) \ c^T x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \end{cases}$$

PL in Forma canonica

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ A x \leq b \end{cases}$$

dove $x = (\text{variabili}) \rightarrow$ esempio: $x = \begin{pmatrix} x_L \\ x_P \\ \vdots \end{pmatrix}$

Se ho m vincoli e n variabili allora:

delle var

A = matrice $m \times n$ → matrice che contiene i parametri dei vincoli

b = vettore con m componenti → vettore che contiene a quanto devo essere inferiori i vincoli

c = vettore con n componenti

↳ vettore che contiene i parametri delle var nella funzione obbiettivo

Risoluzione Grafica

Se ho come modello di un programma un insieme rappresentabile in 2 dimensioni, posso utilizzare la rapp. grafica

Esempio:

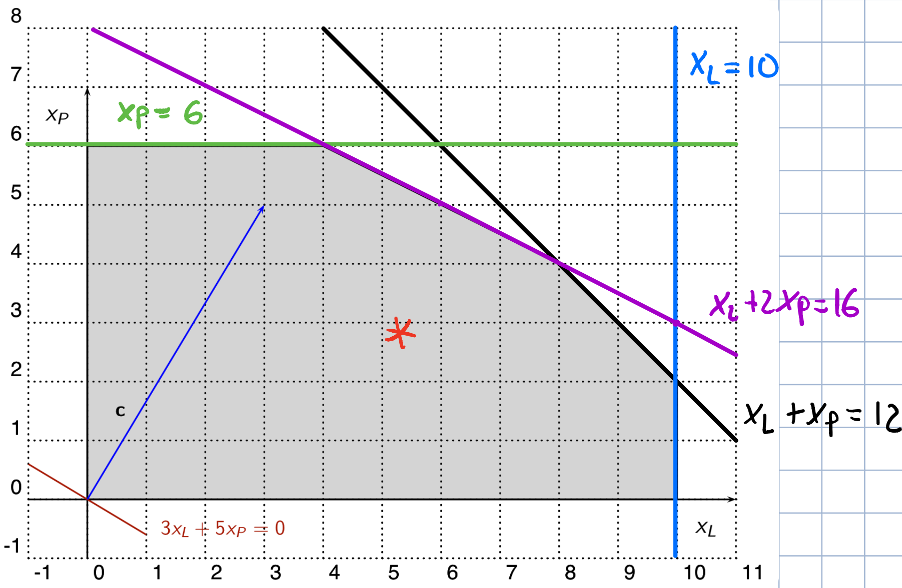
$$\begin{cases} \max \; 3x_L + 5x_P \\ x_L + x_P \leq 12 \\ x_L \leq 10 \\ x_P \leq 6 \\ x_L + 2x_P \leq 16 \\ -x_L \leq 0 \\ -x_P \leq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

x_L e $x_P \geq 0$

⇒ 1° quadrante



* Regione ammissibile: Piano formato dalle combinazione dei vincoli

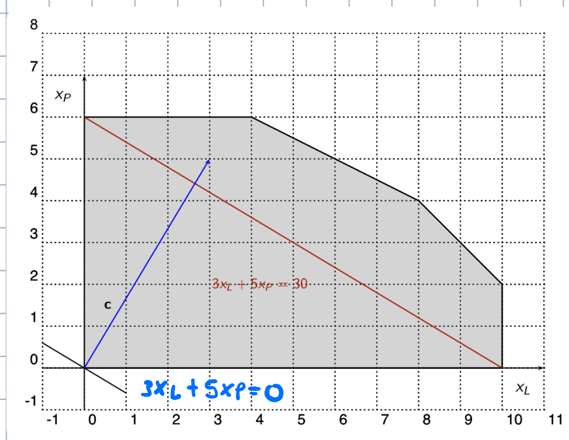
Retta c: Retta perpendicolare alla retta composta dalla funzione obbiettivo

obbiettivo traslata

Insieme di livello della fun obbiettivo: Posizione della retta "a seconda di come scelgo il risultato (si muove sulla retta c)

$$L(v) = \{ x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v \}$$ dove v é un valore fissato

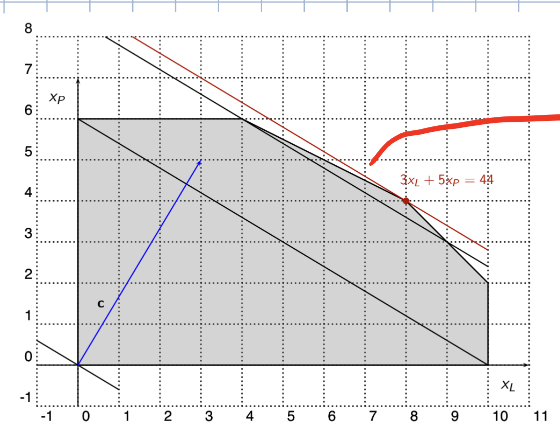
Esempio:



Retta obbiettivo traslata scegliendo

V = 30

Soluzione ottima: Punto raggiungibile traslando la retta obbiettivo il più possibile (tutta la reg ammissibile sta sotto la retta)



La regg ammissibile sta tutta sotto la retta obb traslata.

⇓

Il punto dove tocca é la soluzione ottima

In questo caso la sol. ottima si ottiene con $x_L = 8$ e $x_P = 4$ cioé 44

Da Forma generale a forma canonica

Ogni problema di PL può essere scritto in forma canonica

1) $\min c^T x = -\max(-c^T x)$

2) $a^T x \geq b \quad = \quad -a^T x \leq -b$

3) $a^T x = b \quad = \quad \begin{cases} a^T x \leq b \\ a^T x \leq -b \end{cases}$

Esempio:

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 + 9x_2 = 17 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} -\max(-2x_1 - 5x_2) \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 17 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq -17 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_1 - 3x_2 \leq -1 \end{array}$$

Combinazioni convesse

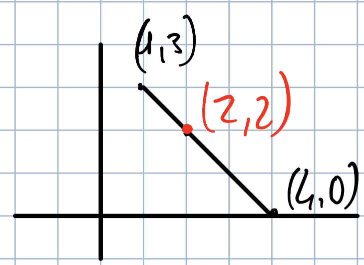
Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione convessa dei vettori $x^1 \dots x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coeff. $\alpha_1 \dots \alpha_m \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ t.c:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$$

Esempio:

$(2,2)$ è comb. convessa di $(4,0)$ e $(1,3)$ infatti:

$$(2,2) = \frac{1}{3}(4,0) + \frac{2}{3}(1,3)$$



Graficamente: si ha che $(2,2)$ sta sul segmento che congiunge $(4,0)$ e $(1,3)$

2,2 è comb. convessa di $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,3)$ infatti

$$(2,2) = \frac{1}{4}(1,1) + \frac{1}{4}(3,1) + \frac{1}{2}(2,3)$$

Graficamente: si ha che 2,2 è contenuto nel triangolo composto da 3 punti

Involucro convesso: l'insieme $K \in \mathbb{R}^n$ di tutte le comb. convesse di K
$conv(K)$

Esempio: Per $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,3)$ l'involucro convesso è il triangolo formato da 3 punti (GRAFICAMENTE)

Insieme convesso: l'insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto convesso se $\forall x, y \in K$ il vettore
$\alpha x + (1-\alpha) y \in K \quad \forall \alpha \in [0,1]$

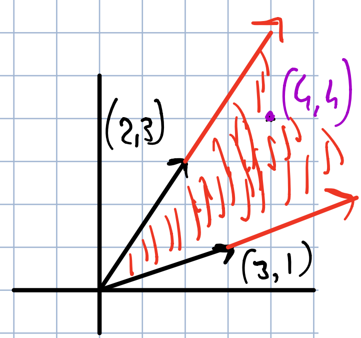
Qualsiasi coppia di punti io prenda dell'insieme, il segmento che li congiunge sta interamente dentro l'insieme

---

Combinazione conica: Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto comb. conica dei vettori $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coeff $\alpha_1, \ldots \alpha_m \geq 0$ t.c. $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$

Esempio: $(4,4)$ è comb. conica di $(2,3)$, $(3,1)$ infatti:

$$(4,4) = \frac{8}{7}(2,3) + \frac{4}{7}(3,1)$$



Graficamente: $(4,4)$ sta nel cono formato dai 2 vettori

Involucro conico: l'insieme $K \in \mathbb{R}^n$ di tutte le comb. coniche di K
$cono(K)$

Graficamente: tutto il cono formato dai due vettori

Cono: Insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto cono se $\forall x \in K$ il vettore $\alpha x \in K$ per ogni $\alpha \geq 0$

---

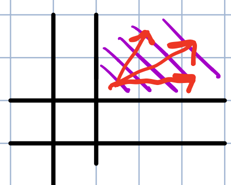
l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ è un sem. chiuso di $\mathbb{R}^n$

Poliedri: (Può essere limitato o no)

- → Intersezione di un numero finito di semispazi chiusi
- → Insieme delle soluzioni di un sistema di diseq. lineari $Ax \leq b$

La reg. ammissibile di un PL è detta poliedro

Direzione di recessione: è un vettore d t.c $x + \alpha d \in P$ $\forall x \in P$ e $\alpha > 0$
di un poliedro P



L'insieme di tutte le direzioni di recessione di P è un cono convesso denotato con REC(P)

Se il vettore sta dentro il poliedro per qualsiasi α

Teorema: Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \Rightarrow rec(P) = \{x \in \mathbb{R} : Ax \leq 0\}$

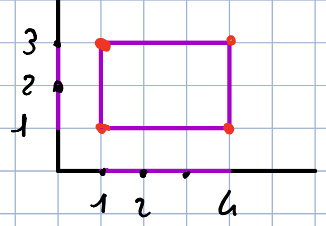
↳ cono di recessione

Direzione di linearità: Vettore d t.c $x + \alpha d \in P$ $\forall x \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
di un poliedro P

L'insieme di tutte le direzioni di linearità di P è un sottospazio vettoriale denotato con lineal(P)

Teorema: Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \Rightarrow lineal(P) = \{x \in \mathbb{R} : Ax = 0\}$

Vertici: x è un vertice se non esistono 2 punti $y, z \in P$ diversi da x t.c x è combinazione convessa di y e z



$(1,1), (4,1), (1,3), (4,3)$

Teorema: Un poliedro ha vertici solo se $\text{lineal}(P) = 0$

Teorema di decomposizione dei poliedri

Se P è un poliedro, allora esistono un sottoinsieme finito $\{v_1, \dots, v_m\}$ di P ed un insieme finito $\{d_1, \dots, d_2\}$ di direzioni di rec di P t.c.:

$$P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\} + \underbrace{\text{cono}\{d_1, \dots, d_q\}}_{\text{rec}(P)}$$

Corollari:

1) Se $\text{lineal}(P) = \{0\} \Rightarrow v_1, \dots, v_m$ sono vertici di P
2) Se P è un poliedro limitato $\Rightarrow P = \text{conv}(V)$ dove V è l'insieme dei suoi vertici

Direzione di crescita

Se $c^T d > 0 \Rightarrow d$ è una direzione di crescita

Teorema Fondamentale della PL

Teorema fondamentale della PL

Consideriamo un problema di PL in forma canonica

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Ax \le b\} \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

Teorema fondamentale della PL
Supponiamo che la regione ammissibile
$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}$.

- Il valore ottimo di $(\mathcal{P})$ è finito se e solo se $c^T d^j \le 0$ per ogni $j = 1, \dots, q$, cioè nessuna direzione di recessione di P è una direzione di crescita.
- Se il valore ottimo di $(\mathcal{P})$ è finito, allora esiste un indice $i \in \{1, \dots, m\}$ tale che v^i è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$.

Corollario. Se il poliedro P è limitato, allora un suo vertice è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$.

Esempi:

Teorema fondamentale della PL

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Sappiamo che $P = \text{conv}\{(1,2),(2,1)\} + \text{cono}\{(1,0),(0,1)\}$.
Il valore ottimo è $+\infty$ poiché la direzione di recessione $d = (1,0)$ è una direzione di crescita, cioè $(2,-3)^T(1,0) = 2 > 0$.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ -2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Il valore ottimo è finito perché nessuna delle due direzioni di recessione $(1,0)$ e $(0,1)$ è di crescita, cioè $(-2,-3)^T(1,0) = -2$ e $(-2,-3)^T(0,1) = -3$.
La soluzione ottima è il vertice $(2,1)$.

Problema duale

Se consideriamo un problema di PL in forma canonica chiamato PROBLEMA PRIMALE $\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases}$

Allora il problema PL definito come:

$$\begin{cases} \min\ y^T b \\ y \in D = \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T,\ y \geq 0\} \end{cases}$$

è detto PROBLEMA DUALE

	Primale	Duale
Obiettivo	max	min
Variabili	n	m
Vincoli	m	n

Esempio:

Primale | Duale

Esempio. Il problema duale di

$$\begin{cases} \max\ 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (\mathcal{P})$$

$$\begin{cases} \min\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + y_3 = 4 \\ y_2 + y_3 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

teorema: Il problema duale è eq. al problema primale

Proprietà del problema duale (lemma di Farkas)

Se nel problema primale esiste una direzione di recessione che è anche di crescita se e solo se la reg. ammissibile del prob. duale è vuota

$$\begin{cases} c^T x > 0 \\ Ax < 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

se uno dei due ammette soluzioni, l'altro non le ammette

teorema di dualità forte:

Se il problema primale ha regione ammissibile $P \neq 0$ allora:

1) Se il poliedro duale $D = \emptyset \Rightarrow$ Valore ottimo $V(P) = +\infty$

2) Se il poliedro duale $D \neq 0 \Rightarrow V(P)$ finito e $V(P) = V(D)$

P.S: $V(P)$ = valore ottimo del problema primale

CONDIZIONE DI OTTIMALITÀ

teorema degli scarti complementari

Teorema (degli scarti complementari)

Supponiamo che $\bar{x}$ sia una soluzione ammissibile del primale $(\mathcal{P})$.
Allora $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ del sistema

$$\begin{cases} \bar{y}^T A = c^T & \text{(ammissibilità} \\ \bar{y} \geq 0 & \text{duale)} \\ \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 & \text{(scarti complementari)} \end{cases}$$

Qualunque soluzione $\bar{y}$ di questo sistema è una soluzione ottima del duale $(\mathcal{D})$.

Esempi:

1

Esempio. Dire se $\bar{x} = (1,1)$ è ottima per il problema

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$

$\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y \ge 0 \\ y^T(0,0,1,1) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y_3 = y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 = 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Poiché $\bar{y} = (2/3, 5/3, 0, 0)$ è una soluzione del sistema, $\bar{x}$ è ottima.

2

Esempio. Dire se $\bar{x} = (0,0)$ è ottima per il problema

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$

$\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y \ge 0 \\ y^T(3,3,0,0) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = 0 \\ y_3 = -3 \\ y_4 = -4 \\ y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

che è impossibile, quindi $\bar{x}$ non è ottima.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se $P \neq \emptyset$ e limitato, allora un vertice di P è ottimo per il primale.
I vertici di un poliedro sono definiti in modo geometrico $\to$ abbiamo bisogno di proprietà algebriche dei vertici.
Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \le b \end{cases}$$

dove A è una matrice $m \times n$ con $\text{rank}(A) = n$ (e quindi $\text{lineal}(P) = \{0\}$).
[Questa ipotesi non è restrittiva perché ogni problema di PL è equivalente ad uno in cui le variabili $x \ge 0$, ponendo eventualmente $x = y - z$ con $y, z \ge 0$.]

Definizione
Una base è un insieme B di n indici di riga tali che la sottomatrice A_B sia invertibile, cioè $\det(A_B) \neq 0$. Indichiamo con N l'insieme degli indici non in base.

$$A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}$$

Data una base B, il vettore $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ è chiamato soluzione di base primale.
$\bar{x}$ è ammissibile se $A_N \bar{x} \le b_N$. $\bar{x}$ è degenere se esiste $i \in N$ tale che $A_i \bar{x} = b_i$.

$$\text{Det}(A) = ad - bc$$

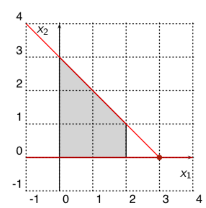
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esempio:

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Righe che A_i prendono da A

$B = \{1,2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dentro il poliedro

$\bar{x}$ è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$
e non degenere perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

$B = \{1,3\}$ non è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile: $\det(A_B) = 0$.

Rette non si intersecano

$B = \{2,4\}$ è una base e la relativa soluzione di base primale non è ammissibile:
$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \not\le \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$ e non degenere.

Gli altri vincoli non scelti non vincolano il punto
↓
non sta sulla retta delle altre condizioni

Fuori dal poliedro

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Perché le soluzioni di base sono importanti?

Teorema

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}$.
$\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ammissibile.

Come riconoscere un vertice ottimo?

Definizione

Data una base B, il vettore $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$ dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0$

è chiamato soluzione di base duale.
$\bar{y}$ è ammissibile se $\bar{y}_B \geq 0$. $\bar{y}$ è degenere se esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i = 0$.

Teorema (condizione sufficiente di ottimalità)

Sia $\bar{x}$ una soluzione di base primale ammissibile relativa alla base B.
Se la soluzione di base duale $\bar{y}$ relativa alla stessa base è ammissibile, allora $\bar{x}$ è ottima per il problema primale (e $\bar{y}$ è ottima per il duale).

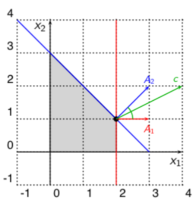
Dim. $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono in scarti complementari, cioè $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$.

esempio 1

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max \; 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



A_1 e A_2 vettori base
c deve stare nel cono tra A_1 e A_2 per essere ammissibile

$\bar{x} = (2, 1)$ è una soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1, 2\}$.
La soluzione di base duale relativa a B è

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1), \quad \bar{y}_N = 0.$$

$\bar{y}$ è ammissibile perché $\bar{y}_B \geq 0$, ossia $c \in cono(A_1, A_2)$, quindi $\bar{x}$ è ottima.

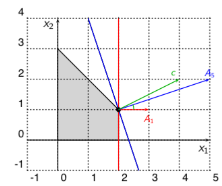
esempio 2

Caratterizzazione algebrica dei vertici

La condizione di ottimalità basata sull'ammissibilità della soluzione di base duale è sufficiente ma non necessaria.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max \; 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\bar{x} = (2, 1)$ è ottima ed è una soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1, 5\}$.
La soluzione di base duale relativa a B è

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 1), \quad \bar{y}_N = 0.$$

$\bar{y}$ non è ammissibile perché $\bar{y}_1 < 0$, ossia $c \notin cono(A_1, A_5)$, ma $\bar{x}$ è ottima.

Non è necessaria che $\bar{y}$ sia ammissibile per far sì che $\bar{x}$ sia ottima

Algoritmo del simplesso primale

1. Trova una base B tale che la relativa soluzione di base primale $\bar{x} := A_B^{-1}\, b_B$ sia ammissibile.

   Inversa matrice composta dalle basi scelte

   Vettore Risultato basi scelte

2. Calcola la soluzione di base duale

$$\bar{y} := \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \qquad \text{with} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0$$

3. **Se** $\bar{y}_B \geq 0$ **allora** STOP ($\bar{x}$ è ottima).
   altrimenti trova l'indice uscente → Minimo indice che ha $\bar{y} < 0$

$$h := \min\{i \in B : \; \bar{y}_i < 0\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)}$$

   poni $W := -A_B^{-1}$ e denota W^h la h-esima colonna di W. → Prendo l'h-esima colonna di W

4. **Se** $A_i\, W^h \leq 0$ per ogni $i \in N$ **allora** STOP (valore ottimo di $(\mathcal{P})$ è $+\infty$) → Calcolo $A_i W^h$ per tutte le A che non $\in$ alla base e guardo se sono ≤ 0

   altrimenti calcola $\vartheta := \min\left\{\dfrac{b_i - A_i\,\bar{x}}{A_i\, W^h} : \quad i \in N, \; A_i\, W^h > 0\right\}$, ϑ Rin tra $A_i W^h > 0$

   trova l'indice entrante

$$k := \min\left\{i \in N : \; A_i\, W^h > 0, \; \frac{b_i - A_i\,\bar{x}}{A_i\, W^h} = \vartheta\right\} \quad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

   aggiorna la base $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ e torna al passo 2.

Levo dalla base h

inserisco K

K = indice del risultato ϑ

Applico l'algoritmo del simplesso primale sui vincoli e trovo la sol. ottima

Teorema

L'algoritmo del simplesso primale termina dopo un numero finito di iterazioni.

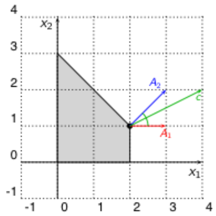
- Se il valore ottimo del problema è $+\infty$, l'algoritmo trova una direzione di recessione che è anche di crescita.
- Se il valore ottimo del problema è finito, l'algoritmo trova un vertice ottimo.

Esempio con soluzione

Esempio che non ha soluzione

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



partendo dalla base $B = \{3,4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2,1)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2,-1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = 1$, $A_2 W^3 = 1$, $\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$, $k = 1$.

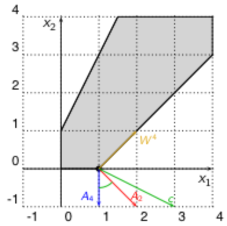
Iterazione 2. $B = \{1,4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\bar{y}_B^T = (2,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2,-1)$, $h = 4$, $W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A_2 W^4 = 1$, $A_3 W^4 = 0$, $k = 2$.

Iterazione 3. $B = \{1,2\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B^T = (1,1) \ge 0$ stop, $\bar{x}$ è ottimo.

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



partendo dalla base $B = \{3,4\}$.

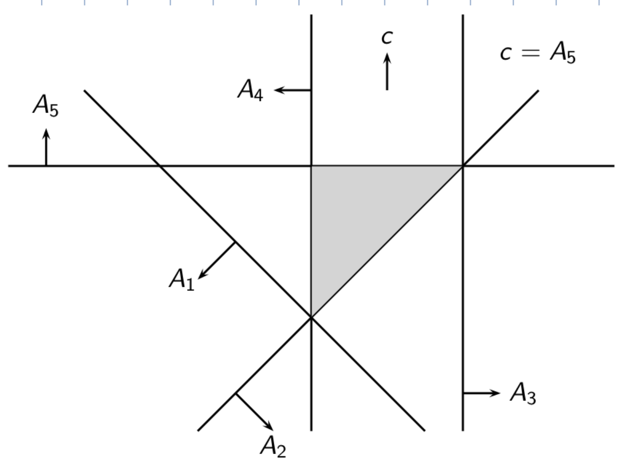
Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2,-1)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2,1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = -2$, $A_2 W^3 = 1$, $k = 2$.

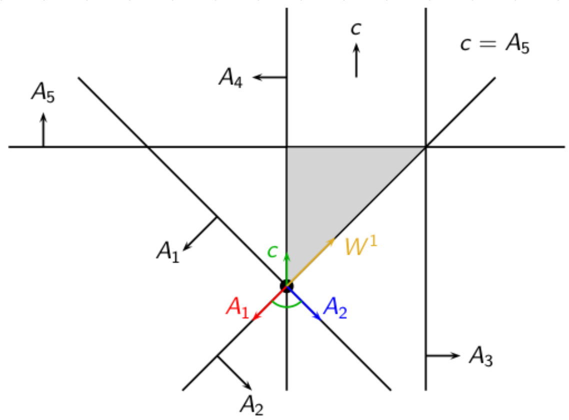
Iterazione 2. $B = \{2,4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\bar{y}_B^T = (2,-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2,-1)$, $h = 4$, $W^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A_1 W^4 = -1$, $A_3 W^4 = -1$ stop, il valore ottimo è $+\infty$.

Geometricamente

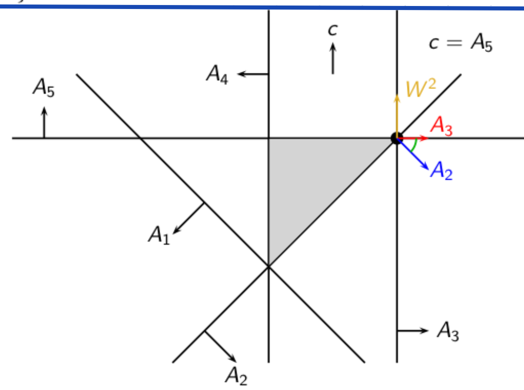


1)



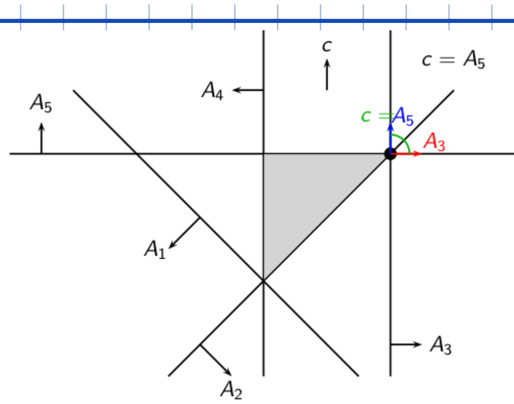
Iterazione 1. $B = \{1,2\}$, $\bar{x}$ indicata in figura, $c \in \operatorname{int}\operatorname{cono}(-A_1, -A_2)$, quindi $\bar{y}_1 < 0$, $\bar{y}_2 < 0$. Indice uscente $h = 1$, W^1 indicata in figura, indice entrante $k = \min\{3,5\} = 3$.

2)



Iterazione 2. $B = \{2,3\}$, $\bar{x}$ indicata in figura, $c \in \operatorname{int}\operatorname{cono}(-A_2, A_3)$, quindi $\bar{y}_2 < 0$, $\bar{y}_3 > 0$. Indice uscente $h = 2$, W^2 indicata in figura, indice entrante $k = 5$.

3)



Finito perchè c sta nel cono tra A_5 e A_3

Iterazione 3. $B = \{3,5\}$, $\bar{x}$ indicata in figura, $c = A_5$, quindi $\bar{y}_3 = 0$, $\bar{y}_5 = 1$, stop $\bar{x}$ è ottima.

Algoritmo del simplesso duale

1. Trova una base B tale che la relativa soluzione di base duale
$$\bar{y} := \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \qquad \text{with} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0$$
sia ammissibile.
2. Calcola la soluzione di base primale $\bar{x} := A_B^{-1} b_B$.
3. **Se** $A_N \bar{x} \leq b_N$ **allora** STOP ($\bar{x}$ è ottima).
altrimenti trova l'indice entrante
$$k := \min\{i \in N : \; A_i \bar{x} > b_i\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)}$$
poni $\eta_B := A_k A_B^{-1}$.
4. **Se** $\eta_B \leq 0$ **allora** STOP (la regione ammissibile di $(\mathcal{P})$ è vuota)
altrimenti calcola $\vartheta := \min\left\{ \dfrac{\bar{y}_i}{\eta_i} : \quad i \in B, \; \eta_i > 0 \right\}$,
trova l'indice uscente
$$h := \min\left\{ i \in B : \; \eta_i > 0, \; \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} = \vartheta \right\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$
aggiorna la base $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ e torna al passo 2.

Esempio 1

Esempio. Risolviamo il problema
$$\begin{cases} \max \; x_2 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
con l'algoritmo del simplesso duale partendo dalla base $B = \{1, 2\}$.

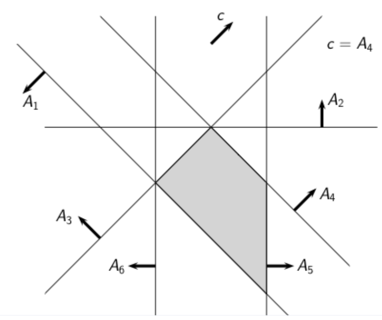
Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B^T = (0,1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,0)$ quindi $\bar{y}$ è ammissibile. $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$$A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N,$$
$k = \min\{3, 4, 5\} = 3$, $\eta_B = A_3 A_B^{-1} = (-1, 0)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-2, 1)$, $h = 2$.

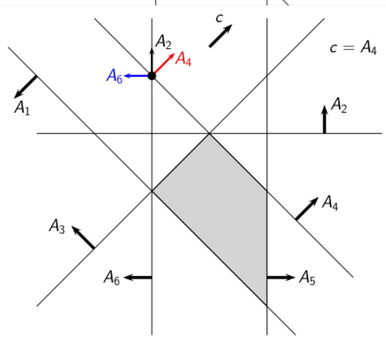
Iterazione 2. $B = \{1, 3\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$\bar{y}_B^T = (0,1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,0)$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$$A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$k = \min\{4, 5\} = 4$, $\eta_B = A_4 A_B^{-1} = (-2, 1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 2)$, $\vartheta = \min\{1, 0\} = 0$, $h = 3$.

Iterazione 3. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$\bar{y}_B^T = (0,1)\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,0)$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$$A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
stop. $\bar{x} = (0, 4)$ è una soluzione ottima del primale e $\bar{y} = (1, 0, 0, 0, 0)$ una soluzione ottima del duale.

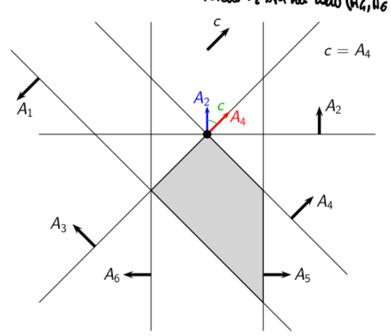
Esempio 2

Esercizio. Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del simplesso duale il problema di PL in figura, partendo dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione, trovare la base, la soluzione di base primale, l'indice entrante, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B, l'indice uscente.





Iterazione 1. $B = \{4, 6\}$, $c = A_4$, quindi $\bar{y}_4 = 1$ e $\bar{y}_6 = 0$. $\bar{x}$ indicata in figura viola i vincoli 2 e 3, $k = \min\{2, 3\} = 2$.
$A_2 \in \operatorname{int} \operatorname{cono}(A_4, A_6)$, quindi $\underbrace{\eta_4 > 0, \; \eta_6 > 0}_{\text{perché } A_2 \text{ sta nel cono } (A_4, A_6)}$. Poiché $0 = y_6/\eta_6 < y_4/\eta_4$, si ottiene $h = 6$.



Iterazione 2. $B = \{2, 4\}$, $c = A_4$, quindi $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_4 = 1$. $\bar{x}$ indicata in figura è ammissibile e quindi è ottima.

Programmazione lineare intera

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera nella forma

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \le b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \qquad (P)$$

dove i dati A, b, c sono a componenti intere e la regione ammissibile Ω è limitata.

Teorema
Il problema (P) è NP-hard.

Relazione tra PLI e PL

1) Il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \le b \end{cases} \qquad (RC)$$

è detto rilassamento continuo di (P).

2) **Teorema**

- Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del valore ottimo di (P).
- Se la soluzione ottima di (RC) è ammissibile per (P), allora è ottima anche per (P).

Spesso la soluzione ottima di (RC) non è ammissibile per (P)...

3) **Relazioni tra PLI e PL**

Consideriamo i problemi:

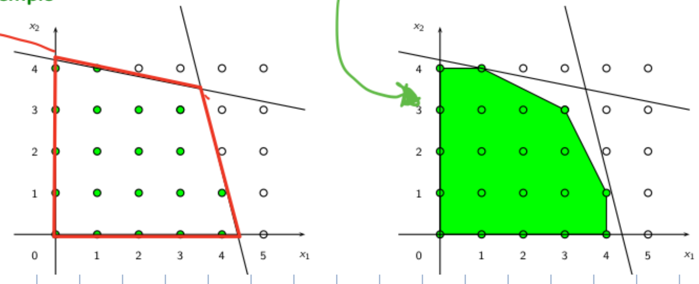
soluzione P

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^T x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

dove conv(Ω) è l'involucro convesso delle soluzioni ammissibili, cioè il più piccolo insieme convesso che contiene Ω.

Esempio

Poliedro RC



$\Updownarrow$

Teorema

- conv(Ω) è un poliedro
- I vertici di conv(Ω) appartengono a Ω, cioè sono a componenti intere $\in \mathbb{Z}$
- I problemi

$$\begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

Corollario
Il problema di PLI

$$\max_{x \in \Omega} c^{\mathsf{T}} x$$

è equivalente al problema di PL

$$\max_{x \in \text{conv}(\Omega)} c^{\mathsf{T}} x$$

In generale è difficile trovare i vincoli che definiscono conv(Ω) ...

Caratterizzare Ω

1) Per alcuni particolari problemi si riesce a caratterizzare conv(Ω).

Teorema
Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^n : \ Ax \leq b\}$. Se A è una matrice totalmente unimodulare (cioè il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata è 0 oppure 1 oppure −1), allora

$$\text{conv}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\},$$

cioè conv(Ω) coincide con la regione ammissibile del rilassamento continuo.

Esempi
In un problema di flusso di costo minimo con variabili intere:

$$\begin{cases} \min \ c^{\mathsf{T}} x \\ E x = b \\ 0 \leq x \leq u \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

la matrice dei vincoli è totalmente unimodulare. Quindi per risolverlo basta trovare un vertice ottimo del suo rilassamento continuo.
Lo stesso vale per il problema del cammino minimo.

2)

Disuguaglianze valide e piani di taglio

In generale è difficile caratterizzare conv(Ω).
Si aggiungono vincoli alla regione ammissibile del rilassamento continuo in modo da approssimare conv(Ω).

Definizioni
La disequazione $p^{\mathsf{T}} x \leq p_0$ è detta disuguaglianza valida (DV) per l'insieme Ω se

$$p^{\mathsf{T}} x \leq p_0 \qquad \forall \ x \in \Omega.$$

Un piano di taglio è una disuguaglianza valida $p^{\mathsf{T}} x \leq p_0$ per Ω tale che $p^{\mathsf{T}} \bar{x} > p_0$, dove $\bar{x}$ è l'ottimo del rilassamento continuo.

Idea alla base del metodo dei piani di taglio:
se P è la regione ammissibile del rilassamento continuo e la soluzione ottima $\bar{x}$ di $\max\limits_{x \in P} c^{\mathsf{T}} x$ appartiene ad Ω, allora $\bar{x}$ è ottima anche per $\max\limits_{x \in \Omega} c^{\mathsf{T}} x$;
altrimenti si costruisce un piano di taglio $p^{\mathsf{T}} x \leq p_0$ in modo da tagliare fuori $\bar{x}$ e poi risolvere il nuovo problema di PL:

$$\begin{cases} \max \ c^{\mathsf{T}} x \\ x \in P \\ p^{\mathsf{T}} x \leq p_0 \end{cases}$$

Piani di taglio di Gomory

Supponiamo che il problema di PLI sia nella forma

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

e che $\bar{x}$ sia una soluzione di base (relativa alla base B) ottima del rilassamento continuo di (P). Poniamo:

base sol. ottimo

$$A = (A_B\ A_N) \qquad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \widetilde{A} = A_B^{-1} A_N \qquad \widetilde{b} = \bar{x}_B.$$

La parte frazionaria di un numero reale z è $\{z\} := z - \lfloor z \rfloor$, dove $\lfloor z \rfloor$ è la parte intera inferiore di z (o arrotondamento per difetto all'intero più vicino).
Esempio: $\{2.3\} = 2.3 - 2 = 0.3, \qquad \{-1.4\} = -1.4 - (-2) = 0.6.$

Teorema

Se esiste un indice $r \in B$ tale che $\widetilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$, allora

$$\sum_{j \in N} \{\widetilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\widetilde{b}_r\}$$

è un piano di taglio (detto di Gomory) per il problema (P).

⇓ Esempio

Piani di taglio di Gomory

Esempio

Consideriamo di nuovo il problema

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

Trasformiamo i vincoli di $\leq$ in vincoli di $=$ aggiungendo variabili di scarto x_3, x_4:

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 + x_3 = 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 + x_4 = 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 35 \end{pmatrix}, \qquad c^T = (1, 3, 0, 0).$$

Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo è $\bar{x} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0\right)$.

Quindi la base ottima è $B = \{1, 2\}$,

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} & \frac{5}{38} \\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} & \frac{5}{38} \\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38} \end{pmatrix}.$$

Poiché $\widetilde{b} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ha entrambe le componenti non intere, esistono due tagli di Gomory.

Esempio

Se $r = 1$, allora il piano di taglio di Gomory è

$$\left\{-\frac{1}{19}\right\} x_3 + \left\{\frac{5}{38}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{7}{2}\right\},$$

cioè

$$\frac{18}{19} x_3 + \frac{5}{38} x_4 \geq \frac{1}{2},$$

ossia

$$36 x_3 + 5 x_4 \geq 19,$$

che nelle variabili (x_1, x_2) equivale a

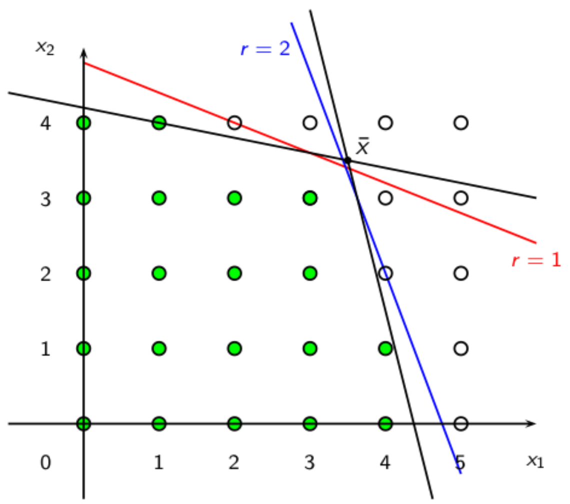
$$36(21 - x_1 - 5x_2) + 5(35 - 8x_1 - 2x_2) \geq 19$$

cioè

$$2x_1 + 5x_2 \leq 24.$$

Analogamente, per $r = 2$ si ottiene il piano di taglio $8x_1 + 3x_2 \leq 38$.

Esempio



Riassunto Ro parte 2

Formule utili: $\det(A) = ad - bc$ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A_i x \leq b_i \Rightarrow A_i x + s_i = b_i$

$A_i x \geq b_i \Rightarrow -A_i x \leq -b_i$

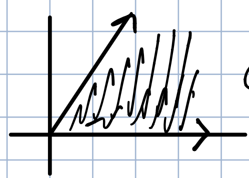
$A_i x = b_i \Rightarrow \begin{cases} A_i x \geq b_i \\ -A_i x \leq -b_i \end{cases}$

Convesso

- conv(K) = Insieme di tutte le comb. convesse dei punti K
- $\underbrace{\text{Un insieme è detto convesso}}_{\text{Qualsiasi 2 punti prendo dell'insieme, se li congiungo con un segmento sta dentro l'insieme}}$ se $\alpha x + (1-\alpha) y \in$ $\forall x, y \in K$ e $\alpha \in [0,1]$

Conico

- Cono(K) = Insieme di tutti i punti che stanno dentro il cono generato da 2 vettori
- Un insieme è detto cono se per ogni $x \in K \Rightarrow \alpha x \in K$ $\forall \alpha \geq 0$



cono

1) $\min c^T x = -\max(-c^T x)$

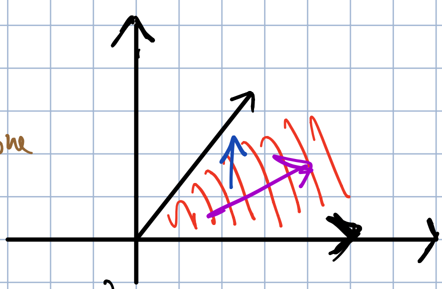
Poliedro: $a^T x \leq b$

- Direzione di recessione: Vettore d t.c $x + \alpha d \in$ Poliedro $\forall x \in P$ e $\alpha > 0$

Insieme dir. di recessione

Rec (P)

$Rec(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$

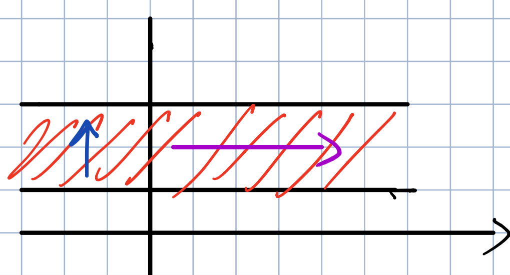


Non è dir. di rec.

- Direzione di linearità: Vettore d t.c $x + \alpha d \in$ Poliedro $\forall x \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Insieme dir. di linearità

lineal(P)



$lineal(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

- **Vertici** : Non esistono y e z t.c x comb. convessa di y e z

  $\hookrightarrow$ $\text{lineal}(P) = \{0\} \iff P$ ha vertici

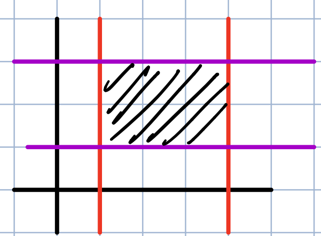
Decomposizione dei poliedri

$$P = \underbrace{\text{conv}\{v^1, \dots, v^m\}}_{\text{insieme convesso che delimitato dai vertici } v^1, \dots, v^m} + \underbrace{\text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}}_{\text{rec}(P)}$$

rec(P) → Serve per prendere lo spazio non limitato del poliedro nel caso ci fosse

- se $\text{lineal}(P) = \{0\} \Rightarrow v^1, \dots, v^m$ vertici di P
- se P poliedro limitato $\Rightarrow P = \text{conv}(V)$ dove V è l'insieme dei suoi vertici

Esempio:



$$P = \text{conv}\{(1,1), (4,1), (1,3), (4,3)\}$$

Teorema fondamentale della P.L

Consideriamo problema:

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \quad (P_L)$$

OSS : Direzione di crescita: Direzione di recessione d t.c $\boxed{c^T \cdot d > 0}$

Se $P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}$ allora

Se $P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \text{cono}\{d^1, \dots, d^s\}$ allora:

- P_R ha valore ottimo finito se ogni direzione di recessione non è di crescita $\Rightarrow c^T \cdot d_J \leq 0 \quad \forall J$
- Se P_R ha valore ottimo finito $\Rightarrow$ esiste vertice $\in v^1, \dots, v^m$ t.c v^i è una soluzione ottima

Problema Primale e duale

Primale: $\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$ (P_R) Duale: $\begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$ (D)

Lemma di Farkas:

$\begin{cases} c^T x > 0 \\ Ax \leq 0 \end{cases}$ (P_R) e $\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$ (D)

Sono una l'alternativa dell'altro, quindi:

Se ho una dir. di crescita in P_R allora D ha la reg. ammissibile vuota

---

Proprietà:

- Se $D = \emptyset \Rightarrow$ il valore ottimo di P_R $\quad V(P_R) = +\infty$
- Se $D \neq \emptyset \Rightarrow$ il valore ottimo di P_R è finito e $V(P_R) = V(D)$

Condizioni di ottimalità (teorema degli scarti complementari)

Sia $\bar{x}$ una sol. ammissibile per il primale (PR)

$\Rightarrow \bar{x}$ ottima se e solo se $\exists \bar{y}$ in D

$\bar{y}^T A = c^T$

$$\begin{cases} \bar{y}^T A = c \\ \bar{y} \geq 0 \\ \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

$\bar{y}^T A = c$, $\bar{y} \geq 0$ } classico prob. duale

$\bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 \Rightarrow$ scarti complementari

Qualunque soluzione $\bar{y}$ di questo sistema è una soluzione ottima del duale (D)

Se $\bar{y} = (0,1,0,0,1)$, i vincoli A_2 e A_5 sono attivi su $\bar{x}$ quindi troviamo precisi direzioni: $A_i \cdot d < 0$ per i vincoli attivi in $\bar{x}$

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Se $P \neq 0$ e limitato $\Rightarrow$ vertice P è $\bar{x}$ di P_R

Definizione: Una base è un insieme di n indici riga t.c la sottomatrice di A_B sia invertibile $(\det(A_B) \neq 0)$

Gli indici restanti gli indico con l'insieme "N" (indici non in base)

$$A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_B \\ B_N \end{pmatrix}$$

Soluzione di base primale: $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ di una certa base B

$\downarrow$

- $\bar{x}$ è $\underbrace{\text{ammissibile}}_{\text{Dentro il poliedro}}$ se $A_N \bar{x} \leq b_N$ (sostituendo $\bar{x}$ ai vincoli non in base la sol. è vera per tutti)
- $\bar{x}$ è $\underbrace{\text{degenere}}_{\text{Sta sulla retta di un vincolo non in base}}$ se esiste $i \in N$ t.c $A_i \bar{x} = b_i$ (sostituendo $\bar{x}$ ai vincoli non in base ne trovo uno uguale al termine a destra del $\leq$)

Utilizzo Caratterizzazione algebrica dei vertici

- $\bar{x}$ è un vertice di $P \Leftrightarrow \bar{x}$ è una soluzione di base primale ammissibile

Riconoscere vertice ottimo:

Prerequisiti

Data una base B, $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$ dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$, $\bar{y}_N = 0$

soluzione di base duale

$c^T = \sum_{i \in B} \bar{y}_i \cdot A_i$

- $\bar{y}$ è ammissibile se $\bar{y}_B \geq 0$
- $\bar{y}$ è degenere se esiste $i \in B$ t.c. $\bar{y}_i = 0$

Considero $\bar{x}$ soluzione di base primale ammissibile relativa alla base B

Se la soluzione di base duale $\bar{y}$ relativa alla stessa base è ammissibile

Allora $\Rightarrow$ $\bar{x}$ è ottimo per il problema primale e $\bar{y}$ per quello duale

Attenzione: È una condizione sufficiente ma non necessaria.

Cioè: Se trovo $\bar{y}$ ammissibile sulla stessa base $\bar{x}$ sono sicuro della sua ottimalità, ma non è vero che se non ho $\bar{y}$ ammissibile $\bar{x}$ non sia una sol. ottima

Algoritmo del simplesso primale (trova la sol. ottima $\bar{x}$)

1. Trova una base B tale che la relativa soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ sia ammissibile.
2. Calcola la soluzione di base duale

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0.$$

3. **Se** $\bar{y}_B \geq 0$ **allora** STOP, $\bar{x}$ è ottima. Se la soluzione del problema duale è ammissibile allora ho trovato l'ottimo
   altrimenti trova l'indice uscente

   h = minimo indice i delle $\bar{y}_i < 0$ (come indice!!)

$$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} \quad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

   poni $W = -A_B^{-1}$ e denota W^h la h–esima colonna di W → direzione di recessione
4. **Se** $A_i W^h \leq 0$ per ogni $i \in N$ **allora** STOP, valore ottimo del primale $= +\infty$. se w^h è una direzione di crescita per qualsiasi riga io prenda di A non in base allora la sol. ottima è $+\infty$
   altrimenti calcola $\vartheta := \min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} : \quad i \in N, \boxed{A_i W^h > 0} \right\}$, Solo per dir. di recessione che non sono di crescita
   trova l'indice entrante → Spostamento per trovare il nuovo vertice da analizzare

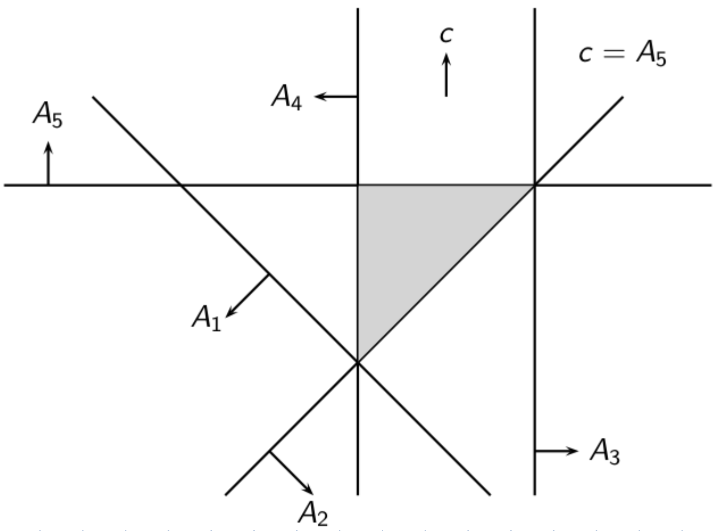
$$k = \min \left\{ i \in N : \; A_i W^h > 0, \; \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} = \vartheta \right\} \quad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

   aggiorna la base $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, calcola $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ e torna al passo 2.

→ Prima guardo l'indice del minimo valore, se il valore minimo è più di uno prendo l'indice minimo!!!

Soluzione grafica:

Esercizio. Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del simplesso primale il problema di PL in figura, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione, trovare la base, la soluzione di base primale, il segno delle componenti della soluzione di base duale, l'indice uscente, la direzione di spostamento, l'indice entrante.



1) Considero i vincoli imposti dalla base attiva e considero il vertice alla loro intersezione

2) Se c è contenuto nel cono formato dai due vincoli allora ho trovato $\bar{x}$. $(A_2, A_3) \Rightarrow y_2 > 0$ e $y_3 > 0 \Rightarrow \bar{x}$ ottimo

se c non è contenuto se è contenuto in $(A_2, -A_3) \Rightarrow \bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_3 < 0$ quindi $h = 3$, nel caso fosse $(-A_2, -A_3) \Rightarrow y_2 < 0$ e $y_3 < 0$ quindi $h = 2$

e disegno la direzione di crescita w che sta sul vincolo che resta in base e ha direzione negativa se c ha direzione negativa e viceversa.

3) Se ho più vincoli sullo stesso punto, il vertice che trovo muovendomi è sempre il solito $\theta = 0$

4) Considero k = l'indice minimo dei vincoli che entrano in azione dopo aver effettuato lo spostamento al vertice successivo

avér effettuato lo spostamento al vertice successivo

5) Sostituisco nella base h con K e rinizio dal punto 1

Algoritmo del simplesso duale

1. Trova una base B tale che la relativa soluzione di base duale

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0,$$

c^T = vettore riga $(\dots)$

sia ammissibile.

2. Calcola la soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$.
   b_B = vettore colonna $\left(\vdots\right)$
3. **Se** $A_N \bar{x} \leq b_N$ **allora** STOP, $\bar{x}$ è ottima. se $\bar{x}$ è dentro il poliedro termina, $\bar{x}$ è ottima
   altrimenti trova l'indice entrante

$$k = \min\{i \in N : \ A_i \bar{x} > b_i\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

Considero l'indice minimo di quelli non in base che rispettano $A_i \bar{x} > b_i$

poni $\eta_B := A_k A_B^{-1}$.

A_k vettore riga

4. **Se** $\eta_B \leq 0$ **allora** STOP, la regione ammissibile del primale è vuota.
   altrimenti calcola $\vartheta = \min\left\{\frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : \quad i \in B, \ \eta_i > 0\right\}$, Di quanto muoversi
   trova l'indice uscente

$$h = \min\left\{i \in B : \ \eta_i > 0, \ \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} = \vartheta\right\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

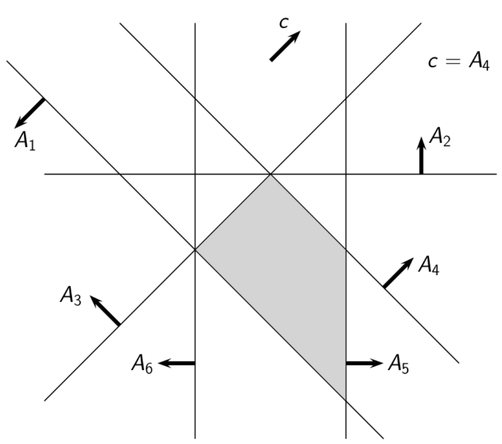
Individuo minimo che deve uscire per fare entrare k

aggiorna la base $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, calcola $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$ e torna al passo 2.

Prima guarda il valore minimo, se ce n'è più di uno guarda l'indice minimo!!!

Algoritmo del simplesso duale graficamente

Esercizio. Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del simplesso duale il problema di PL in figura, partendo dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione, trovare la base, la soluzione di base primale, l'indice entrante, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B, l'indice uscente.



1) Considero i vincoli imposti dalla base e prendo come punto la loro intersezione $(\bar{x})$

2) Guardo i vincoli che vengono violati da $\bar{x}$ e prendo h = ind minimo fra essi

3) Guardo il cono in cui è contenuto c per determinare le y

es: c nel cono$(A_1, -A_2)$ $\Rightarrow$ $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$

4) Guardo il cono dove è contenuto il vincolo A_h e determino n_B

es: $A_h \in (-A_1, A_2)$ $\Rightarrow$ $n_1 < 0$ e $n_2 > 0$

5) Calcolo/vedo il segno degli $\frac{y_i}{n_i}$ (per $n_i > 0$) e prendo il minimo valore degli $\frac{y_i}{n_i}$

6) L'indice del min valore con $n_i > 0$ è l'indice uscente k, quindi sostituisco h con k nella base e ripeto il procedimento

Attenzione: Se trovo $n_B \leq 0$ $\Rightarrow$ reg ammiss vuota e se nessun vincolo viene violato $\bar{x}$ è ottimo

Attenzione: Se il vincolo violato e c corrispondono $\Rightarrow$ $y_i = n_i$

PLI (Programmazione lineare intera)

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \quad (P_R)$$

oss: P è NP-HARD

Definizione: Il problema

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \quad (RC)$$

è detto rilassamento continuo di P_R

Relazione fra P_R e RC

1) Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del val ottimo di (P_R)

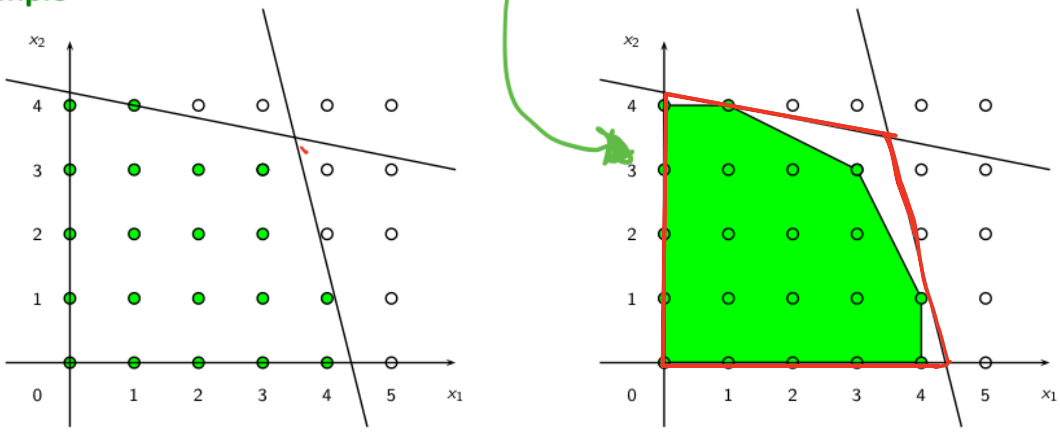
2) Se la sol. ottima di (RC) è ammissibile per (P_R), allora è ottima anche per (P_R)

3) Consideriamo i problemi:

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in \Omega \end{cases} (RC) \qquad \begin{cases} \max c^T x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases} (P_R)$$

dove conv(Ω) è l'involucro convesso delle soluzioni ammissibili, cioè il più piccolo insieme convesso che contiene Ω.

Esempio



Devo non considerare le componenti non intere di (RC)

In rosso: Poliedro di (RC)

$\boxed{\Omega}$

In verde: Poliedro di (P_R)

$\boxed{\text{conv}(\Omega)}$

Teorema:

1) conv(Ω) è un poliedro

2) I vertici di conv(Ω) appartengono a Ω (componenti intere)

3)
$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^T x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

Hanno lo stesso val. ottimo e una sol. ottima comune

Trovare i vincoli che definiscono conv(Ω)

1) Matrici totalmente unimodulari (problema particolare)

Teorema

Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^n : \ Ax \leq b\}$. Se A è una matrice totalmente unimodulare (cioè il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata è 0 oppure 1 oppure -1), allora

$$\text{conv}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\},$$

cioè conv(Ω) coincide con la regione ammissibile del rilassamento continuo.

2) Piani di taglio

In generale è difficile caratterizzare conv(Ω) quindi si aggiungono vincoli alla regione ammissibile del rilassamento continuo in modo da approssimare conv(Ω)

Definizioni

Disuguaglianza valida (DV): $p^T x \leq p_0 \quad \forall x \in \Omega$

Piano di taglio: Disuguaglianza valida per Ω t.c $p^T \bar{x} > p_0$ dove $\bar{x}$ è l'ottimo di RC

Si taglia fuori l'ottimo se non è accettabile per P_R

Piano di taglio di Gomory (per tagliare fuori l'ottimo non ammissibile)

Supponiamo che PLI sia nella forma: (Deve essere in questa forma)!

$$(P) \begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

con $\bar{x}$ ottimo per RC di P (trovato graficamente), possiamo:

$$A = \begin{pmatrix} A_B & A_N \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N \qquad \tilde{b} = \bar{X}_B$$

Gli indici si considerano verticalmente (Colonne) !!!

e parte frazionaria di un numero $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$

Se esiste un indice $r \in B$ t.c $\tilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$ allora

$$\sum_{J \in N} \{\tilde{a}_{rJ}\} x_J \geq \{\tilde{b}_r\}$$

le componenti della matrice $\tilde{A}$ si considerano in riga gli indici

Enumerazione implicita

Se so che un certo insieme del poliedro ha valore massimo inferiore al valore calcolato nel punto che prendo in considerazione, allora sono sicuro di poter rimuovere la parte con il valore max inferiore perché sicuramente non troverò lì il massimo $\bar{X}$

Definizioni:

- $V_I(P)$ = Valutazione inferiore (stima per difetto) del val. ottimo di P

  Valore della fun. obbiettivo in un qualunque punto ammissibile del poliedro P

- $V_S(P)$ = Valutazione superiore (stima per eccesso) del val. ottimo di P

  Valore ottimo di un RC di un poliedro contenuto nel poliedro principale

Metodo branch and Bound

1) Branch: Partizionare la reg. ammissibile in sotto-regioni

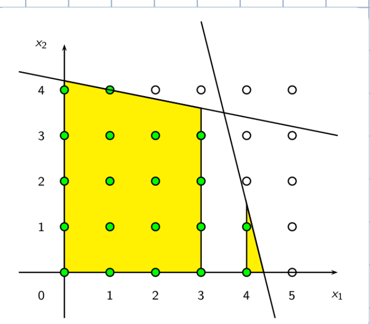
2) Bound: Stimare il val. ottimo di ogni sotto-problema

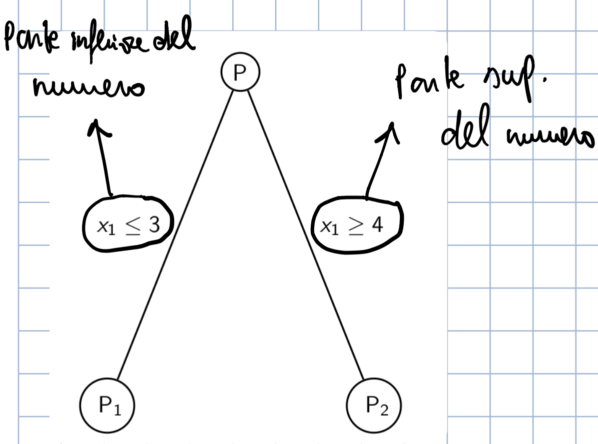
3) Potatura: Scartare le sotto-regioni che non contengono soluzioni migliori di quella corrente

4) Visita: In quale ordine visitare i nodi dell'albero decisionale

1) Branch binario

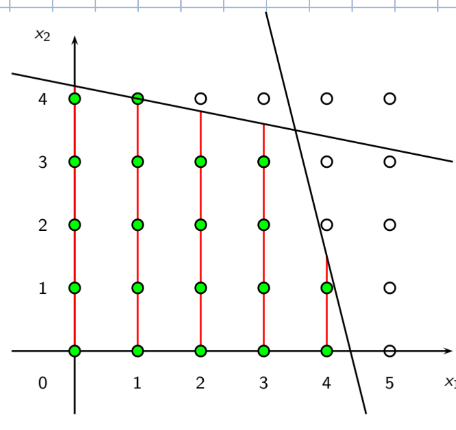
(Divido il poliedro in 2 sottoparti)

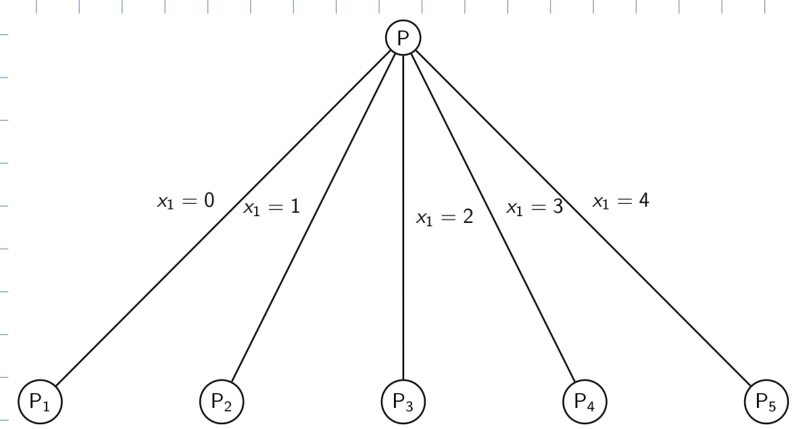




2) Branch non binario

(Divido P in tanti sotto insiemi





2) Bound: Calcolo $V_i(P)$ e $V_s(P)$

3) Potatura (criteri):

- Sottoproblema P_i non ha sol. ammissibili
- $V_s(P_i) \leq V_i(P)$ (soluzioni ammissibili di P_i non sono migliori della sol.

ammissibile corrente)

$-\ V_S(P_i) > V_I(P)$ e sol. ottima di P_i ammissibile per P

$\Rightarrow$ Aggiorno $V_i(P) = V_S(P_i)$

4) Visita:

Depth first (in profondità)

- Il prossimo nodo da visitare è uno dei figli del nodo attualmente visitato (se rimasto aperto)
- questa strategia trova rapidamente una soluzione ammissibile, occupa poca memoria, ma non tiene conto della qualità della soluzione trovata

Best first

- Il prossimo nodo da visitare è il più promettente, cioè quello con il massimo valore di v_S
- trova rapidamente una soluzione ammissibile, occupa molto memoria, ma tiene conto della qualità della soluzione trovata

Breadth first (in ampiezza)

- Si esplorano prima tutti i nodi dello stesso livello
- in generale non fornisce buone prestazioni dal punto di vista computazionale

Algoritmo metodo branch and link

1. Genera il nodo radice P, trova una soluzione ammissibile per P e calcola una $v_I(P)$.
2. Se tutti i nodi sono stati visitati, allora STOP (la soluzione ammissibile corrente è ottima).
3. Seleziona un nodo P_i da visitare.
4. Se P_i non contiene soluzioni ammissibili, allora chiudi il nodo P_i e torna al passo 2.
5. (Bound) risolvi un rilassamento di P_i e calcola $v_S(P_i)$.
   - se $v_S(P_i) \leq v_I(P)$, allora chiudi il nodo P_i e torna al passo 2.
   - se $v_S(P_i) > v_I(P)$ e la soluzione ottima del rilassamento di P_i è ammissibile per P, allora chiudi il nodo P_i, aggiorna la soluzione ammissibile, poni $v_I(P) = v_S(P_i)$ e torna al passo 2.
6. (Branch) Partiziona la regione ammissibile di P_i in sotto-regioni e genera nuovi nodi da visitare. Torna al passo 2.

Problema dello zaino (Branch and bound)

Dati n oggetti di valore $v_1, \dots, v_n$ e peso $p_1, \dots, p_n$, ed un contenitore di capacità C, quali oggetti inserisco nel contenitore, rispettando la sua capacità, in modo da massimizzare il valore totale degli oggetti inseriti?

Variabili: $x_i = \begin{cases} 1 & \text{se oggetto } i \text{ viene inserito,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Modello di PLI:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i \\ \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \leq C \\ x_i \in \{0,1\}, \qquad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Calcolo ottimo rilassamento continuo

1. Ordina gli oggetti in ordine decrescente di valore per unità di peso (rendimento) $\frac{v_i}{p_i}$

Valore

Peso

→ Inserisco gli oggetti in ordine di rendimento fin quando ho spazio

2. Trova l'indice h tale che $\sum_{i=1}^{h} p_i \leq C$ e $\sum_{i=1}^{h+1} p_i > C$,

→ trovi l'indice h che va fuori peso dello zaino

3. Poni $\bar{x}_1 = 1, \ldots, \bar{x}_h = 1$, $\bar{x}_{h+1} = \frac{C - \sum_{i=1}^{h} p_i}{p_{h+1}}$, $\bar{x}_{h+2} = 0, \ldots, \bar{x}_n = 0$.

Ne inserisci una parte

trovo $\bar{x}$ che è la sol. ottima

Il valore ottimo calcolato da $\bar{x}$ se con la virgola va approssimato al alla parte inferiore.

Il valore approssimato è $V_s(P)$.

Calcolo di un valore ammissibile da cui partire

1. Ordina gli oggetti in ordine decrescente di rendimento $\frac{v_i}{p_i}$ → ordino per rendimento
2. Poni $\bar{C} = C$ ($\bar{C}$ rappresenta la capacità residua del contenitore)
3. **for** $i = 1, \ldots, n$ **do**
   - **if** $p_i \leq \bar{C}$
     - **then** $x_i = 1$, $\bar{C} = \bar{C} - p_i$
   - **else** $x_i = 0$

   end

→ Inserisco l'oggetto se lo posso inserire interamente senno vado al successivo

trovo una x composta unicamente da 0 e 1

Il valore trovato approssimato alla parte inferiore è $V_i(P)$

Algoritmo

1) Prendo la parte frazionaria di $\bar{x}$ e creo 2 rami dell'

albero. Un arco con la parte inferiore (0) e un arco con la parte sup. (1)

2) Analizzo P_1 applicando l'algoritmo e trovo $\bar{x}$.
Calcolo il valore per $\bar{x}$ e trovo $V_s(P_1)$

Caso $V_s(P_1)$ non ammissibile (in $\bar{x}$ ho una parte frazionaria)

1) Se $V_s(P_1) > V_i(P)$ il nodo P_1 rimane <u>APERTO</u> e genero i nodi sulla parte frazionaria di $\bar{x}$ di P_1

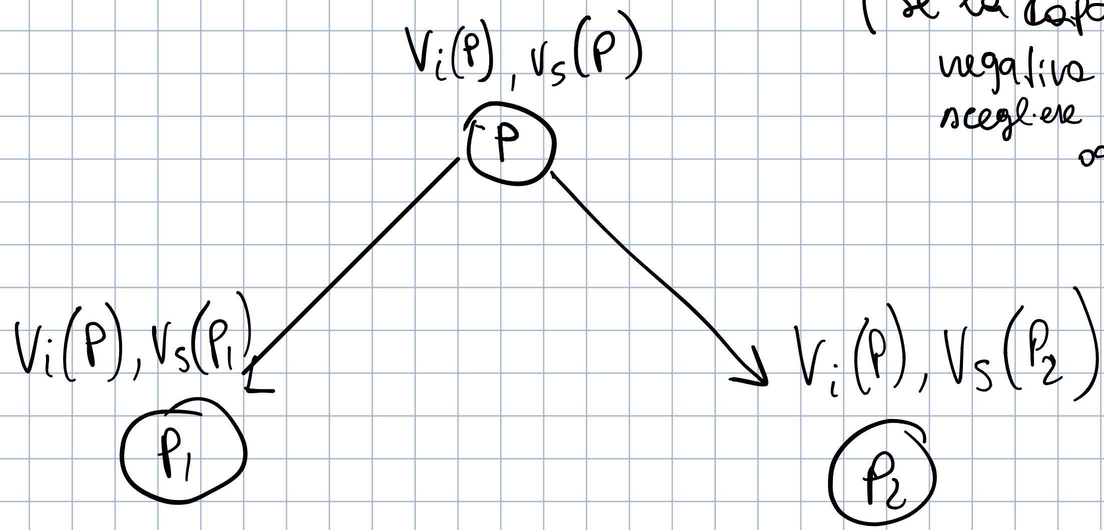
2) Se $V_s(P_1) \leq V_i(P)$ chiudo P_1

Caso $V_s(P_1)$ ammissibile (in $\bar{x}$ non ho parti frazionarie)

1) Se $V_s(P_1) \leq V_i(P)$ chiudo P_1

2) Se $V_s(P_1) > V_i(P)$ aggiorno $V_i(P) = V_s(P_1)$ e chiudo P_1

Caso nessuna sol. ammissibile: chiudo il nodo e segno $\emptyset$ sul nodo (se la capacità diventa negativa quando devo scegliere per forza degli oggetti, e il loro peso supera la capacità)



trovare r-albero

1) Albero di copertura su i nodi tranne il nodo r (Ordino in ordine crescente gli archi, e li aggiungo fin quando non ho unito tutti i nodi tranne il nodo r e non formano un ciclo

2) Aggiungo all'albero trovato gli archi di minor costo che uniscono il nodo r con l'albero di copertura

Ciclo hamiltoniano

Un r-albero è un ciclo hamiltoniano se e solo se:

1) Ogni nodo ha grado 2

2) Non ci sono sottocicli

Algoritmo:

1) trovo $V_i(P)$ facendo l'r-albero richiesto sul grafo

2) trovo $V_s(P)$ applicando l'algoritmo:

0. Scegli un nodo qualunque i, poni $k = i$ (nodo corrente), $U = N \setminus \{i\}$ (nodi non visitati), $C = i$ (ciclo - sequenza di nodi).] → Punto da cui nodo

1. Se $U = \emptyset$, allora aggiungi i in fondo a C e STOP.] Se non ho più nodi da visitare stop.

2. Scegli il nodo di U più vicino a k, cioè $j = \arg\min\{i \in U : c_{ki}\}$. → Prendo l'arco che costa meno degli archi uscenti dal nodo

3. Aggiungi j in fondo a C, poni $U = U \setminus \{j\}$ e $k = j$. Torna al passo 1.

Considero il nodo opposto all'arco scelto e riapplico l'algoritmo

Attenzione: L'arco scelto non deve collegare un nodo già visitato, non devo creare cicli

3) Costruisco l'albero per il metodo branch and bound e seguo l'ordine degli archi dati dal prof. ponendoli in un lato $=0$ (non posso prenderlo) e $=1$ (devo prenderlo)

Su ogni sottoproblema applico l'R-Albero!!!

Se trovo un r-albero che è anche un ciclo hamiltoniano la sol. è ammissibile, sennò no.

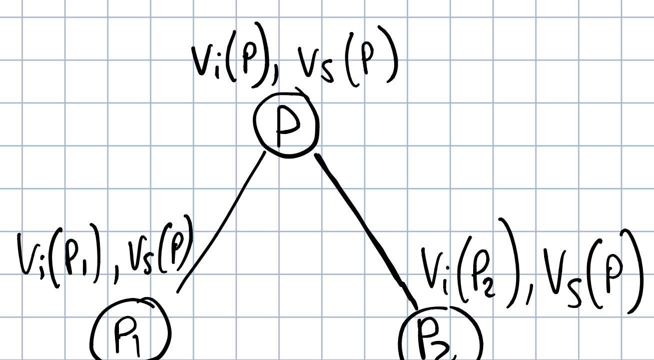
Per ogni sottoproblema trovo $V_I(P_i)$

r-albero Non ammissibile

- Se $V_I(P_i) \geq V_S(P)$ chiudo P_i
- Se $V_I(P_i) < V_S(P)$ P_i rimane aperto

r-albero ammissibile

- Se $V_I(P_i) \geq V_S(P)$ chiudo il nodo
- Se $V_I(P_i) < V_S(P)$ si aggiorna $\underbrace{V_S(P) = V_I(P_i)}_{\text{per tutti i nodi a quel lvl e ai lvl sottostanti}}$ e chiudo il nodo



Se gli archi che devo scegliere ($x_{ij}=1$) formano un ciclo allora l'insieme delle soluzioni è $\emptyset$