A Series Of SERIES

Just Some Series Notes.

Series is series is series.

1 NONSENCE

Cauthy 收敛定理

$$\forall\varepsilon\left(\exists N\left(\forall n,m>N\left(\left|\sum_{m}^{n}a_i\right|<\varepsilon\right)\right)\right)\iff\sum a_i\longrightarrow a.$$

为了简写记作 $\overrightarrow{\sum} a_i$, 在这里无穷级数的和定义为部分和的极限:

$$\sum a_i := \lim\sum^{n} a_i.$$

显然

$$\lim a_i \neq 0 \implies \overset{\not\rightarrow}{\sum} a_i.$$

- 比如 $\overset{\not\rightarrow}{\sum}(-)^i$.

另, 级数是否收敛只取决与无穷远处的形状, 与有限处无关.

2 审敛

为了方便记忆, 以下审敛法都写成极限形式, 这意味着判别力比原来要弱.

比较判别 若 $|a_n| = \mathcal{O}(|b_n|)$, 则:

$$\overset{\not\rightarrow}{\sum}|a_i| \implies \overset{\not\rightarrow}{\sum}|b_i|,$$

$$\overrightarrow{\sum}|b_i| \implies \overrightarrow{\sum}|a_i|.$$

p 级数法

$$\overrightarrow{\sum}\frac{1}{i^n},\ \text{iff}\ \Re(n)>1,\ \text{otherwise}\ \overset{\not\rightarrow}{\sum}\frac{1}{i^n}.$$

d'Alembert 审敛 若

$$\limsup\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < 1 \implies \overrightarrow{\sum} a_i,$$

$$\liminf\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| > 1 \implies \overset{\nrightarrow}{\sum} a_i.$$

否则不能判定.

Cauthy 审敛 若

$$\limsup\left|\sqrt[i]{a_i}\right| < 1 \implies \overrightarrow{\sum} a_i,$$

$$\liminf\left|\sqrt[i]{a_i}\right| > 1 \implies \overset{\nrightarrow}{\sum} a_i,$$

否则不能判定.

Raabe 审敛 若

$$\lim i\left(\left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| - 1\right) > 1 \implies \overrightarrow{\sum} a_i,$$

$$\lim i\left(\left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| - 1\right) < 1 \implies \overset{\nrightarrow}{\sum} a_i,$$

否则不能判定.

积分判别法

$$\forall x \geqslant 1(f(x) \searrow \wedge f(x) > 0) \implies \sum f(i) \text{ 与 } \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 共敛散}.$$

Leibniz 审敛

$$\forall x \geqslant 1(f(x) \searrow \wedge f(x) > 0 \wedge \lim f(x) = 0) \implies \overrightarrow{\sum}(-)^i f(i).$$

Dirichlet 审敛 若 a_i 单调, 则:

$$\exists M\left(\left|\sum^n b_i\right| < M(\lim a_i = 0)\right) \implies \overrightarrow{\sum} a_i b_i.$$

Abel 审敛 若 a_i 单调, $\overset{\rightarrow}{\sum} b_i$, 则:

$$\exists M(a_i < M) \implies \overset{\rightarrow}{\sum} a_i b_i.$$

Ermakov 审敛

$$\exists F(\forall x > F(f(x) \searrow \wedge f(x) > 0)) \wedge \exists G(\forall x > G(g(x) \nearrow \wedge g(x) > \wedge g(x) \in \mathcal{C}^1))$$

$$\implies \exists X\left(\forall x > X\left(\begin{matrix} \dfrac{f(g)g'}{f} \leqslant q < 1 \implies \overset{\rightarrow}{\sum} f(i) \\ \dfrac{f(g)g'}{g} \geqslant 1 \implies \overset{\not\rightarrow}{\sum} f(i) \end{matrix}\right)\right).$$

Cauthy 的凝聚判别

$$\exists N(n > N(a_n \searrow \wedge a_n \geqslant 0)) \implies \sum a_i \text{ 与 } \sum 2^i a_{2^i} \text{ 共敛散}.$$

3 绝对与条件收敛

$$\overset{\rightarrow}{\sum} |a_i| =: \sum a_i \text{绝对收敛},$$

$$\overset{\not\rightarrow}{\sum} |a_i| \wedge \overset{\rightarrow}{\sum} a_i =: \sum a_i \text{条件收敛}.$$

绝对收敛的级数可以任意改变运算顺序, 但条件收敛不可以.

4 函数项级数

一致收敛

$$\forall \varepsilon > 0(\forall x \in \mathcal{I}(\exists N(\forall n, m > N(\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon)))) =: \sum f_i(x) \text{在 } \mathcal{I} \text{ 上一致收敛}.$$

记作 $\sum f_i(x) \rightrightarrows f(x)$.

一致收敛的级数可以交换求和与积分, 求导, 极限. 显然连续函数项的级数若一致收敛, 则和函数必然连续. 一致收敛是对整个区间而言的, 比普通的逐点收敛强.

显然, 若 $f_i(x) \not\rightrightarrows 0$, 则 $\overset{\not\rightrightarrows}{\sum} f_i(x)$.

内闭一致收敛 实际上就是在开区间 $\mathcal{I}$ 内的任意一个闭区间上都一致收敛.

- 比如 $\sum i\exp(-i^2x)$ 在 $(0,\infty)$ 上不一致收敛, 具体是靠近 $x=0$ 时收敛速度无限衰减, 但在 $(0,\infty)$ 上内闭一致收敛.

Weierstrass 判别法

$$\overrightarrow{\sum}\sup_{x\in\mathcal{I}}|f_i(x)| \implies \overset{\rightrightarrows}{\sum_{x\in\mathcal{I}}} f_i(x).$$

Dirichlet 判别 若 $f_n(x)$ 对 n 单调

$$\exists M\left(\forall n\left(\forall x\in\mathcal{I}\left(\left|\sum^{n} g_i(x)\right|<M\right)\right)\right)\wedge f_i(x)\rightrightarrows 0 \implies \overset{\rightrightarrows}{\sum} f_i(x)g_i(x).$$

其中我们称 $\exists M\left(\forall n\left(\forall x\in\mathcal{I}\left(\left|\sum^{n} g_i(x)\right|<M\right)\right)\right)$ 为 $g_i(x)$ 的部分和在 $\mathcal{I}$ 上一致有界.

Abel 判别 若 $f_n(x)$ 对 n 单调且在 $\mathcal{I}$ 上一致有界, 则:

$$\overset{\rightrightarrows}{\sum} b_i(x) \implies \overset{\rightrightarrows}{\sum} f_i(x)g_i(x).$$

5 幂级数

Abel 第一定理

$$\overrightarrow{\sum} a_ix^i \implies \forall|y|<|x|\left(\overrightarrow{\sum}|a_iy^i|\right).$$

这意味着幂级数的收敛区域必然是个圆形的(半径可以无穷大也可以是 0), 否则若圆外有收敛点则可以推出以收敛圆到圆外的区域收敛而得到矛盾, 此时收敛圆的半径被称为**收敛半径**R, 不妨认为收敛圆全是开集(也有可能是闭集).

因此收敛圆内部绝对收敛, 外部发散, 圆上另需讨论.

$$\lim\left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| = R.$$

如果左边极限存在的话(无穷也行).
另外的一件事是:

$$\forall x \in U_R(0)\left(\overset{\rightrightarrows}{\sum} a_i x^i\right).$$

这意味着在收敛圆内部, 幂级数**内闭一致收敛**(要注意到收敛圆上的点上的收敛速度可能无限慢甚至发散). 同时也在收敛圆上解析.

Taylor 级数

$$\sum a_i x^i \longrightarrow f(x) \implies a_n = \frac{\mathscr{D}^n(f)|_0}{n!}.$$

这意味着我们能对一些函数进行级数展开, 此处不讨论什么东西能展.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_0 \frac{x^i}{i!}, && R = \infty,\\
\sin x &= \sum_0 (-)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}, && R = \infty,\\
\cos x &= \sum_0 (-)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}, && R = \infty,\\
\arctan x &= \sum_0 (-)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1}, && R = 1, x \neq \pm\mathrm{i},\\
\ln(1+x) &= \sum_1 (-)^{i-1} \frac{x^i}{i}, && R = 1, x \neq -1,\\
(1+x)^a &= \sum_0 \binom{a}{i} x^i, && \text{if } a \in \mathbb{N}^+, R = \infty, \text{otherwise } R = 1, x \neq -1,
\end{aligned}$$

6 一些奇怪的话

二重级数

$$\left(\sum a_i\right)\cdot\left(\sum b_i\right) =: \sum a_i b_j.$$

同理, 二重级数也有绝对收敛/一致收敛/条件收敛等概念, 此处不在阐述(往后默认绝对收敛).

Mertens 定理

$$\overrightarrow{\sum}|a_i b_j| \implies \overrightarrow{\sum} a_i b_j = \sum_i \sum_j^i a_i b_{i-j}.$$

这实际上是将二重级数矩形排列后沿对角线求和(由于绝对收敛的级数可以交换求和).

7 一些例题

这里的例题以计算为主, 对严谨性**完全不会涉及**.

审敛

1. $\sum \frac{1}{i\ln i}$ 发散; 由于 $\int^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \sim \ln\ln x \to \infty$.
2. $\sum \frac{1}{i(\ln\ln i)^q}$ 发散; 由于 $\forall n > \left\lceil \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{q^2}} \right\rceil \implies (\ln\ln n)^q < \ln n \implies \sum \frac{1}{i(\ln\ln i)^q} > \sum \frac{1}{n\ln n}$.
3.