1 Euler 方程

Euler 方程是一种特殊的线性微分方程：

$$\mathscr{E}_n(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} a_i t^i \mathscr{D}_t^i(x) = 0.$$

实际上存在初等解法，设 $y = \ln t$ ，则：

$$\begin{aligned}
t\mathscr{D}_t(x) &= t\mathscr{D}_y(x)\mathscr{D}_t(y) = t\mathscr{D}_y(x)\frac{1}{t},\\
t^2\mathscr{D}_t^2(x) &= t^2\mathscr{D}_t(\mathscr{D}_t(x)) = t^2\mathscr{D}_t\left(\frac{\mathscr{D}_y(x)}{t}\right) = -\mathscr{D}_y(x) + t\mathscr{D}_y^2(x)\mathscr{D}_t(y) = \mathscr{D}_y^2(x) - \mathscr{D}_y(x).
\end{aligned}$$

事实上有：

$$t^n\mathscr{D}_t^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1}(\mathscr{D}_y - i)(x) = \mathscr{D}_y(\mathscr{D}_y - 1)\cdots(\mathscr{D} - n + 1)x.$$

此处可以用数学归纳法证明，但是非常繁琐，此处从略。

因此我们将 $\mathscr{E}_n(x)$ 转变成了一个同阶的常系数线性微分方程，因此可以按照方法解之得到 y ，最后按照 $y = \ln t$ 代入即可。

$$\oiint x \,\mathrm{d}x.$$