

1 Euler 方程

Euler 方程是一种特殊的线性微分方程：

$$\mathcal{E}_n(x) := \sum_{i=1}^n a_i t^i \mathcal{D}_t^i(x) = 0.$$

实际上存在初等解法，设 $y = \ln t$ ，则：

$$\begin{aligned} t \mathcal{D}_t(x) &= t \mathcal{D}_y(x) \mathcal{D}_t(y) = t \mathcal{D}_y(x) \frac{1}{t}, \\ t^2 \mathcal{D}_t^2(x) &= t^2 \mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t(x)) = t^2 \mathcal{D}_t\left(\frac{\mathcal{D}_y(x)}{t}\right) = -\mathcal{D}_y(x) + t \mathcal{D}_y^2(x) \mathcal{D}_t(y) = \mathcal{D}_y^2(x) - \mathcal{D}_y(x). \end{aligned}$$

事实上有：

$$t^n \mathcal{D}_t^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathcal{D}_y - i)(x) = \mathcal{D}_y(\mathcal{D}_y - 1) \cdots (\mathcal{D}_y - n + 1)x.$$

此处可以用数学归纳法证明，但是非常繁琐，此处从略。

因此我们将 $\mathcal{E}_n(x)$ 转变成了一个同阶的常系数线性微分方程，因此可以按照方法解之得到 y ，最后按照 $y = \ln t$ 代入即可。