0 符号约定

1 一些一阶 ODE 的初等解法

2 存在性定理和唯一性定理

首先考虑比较普遍的情况：

$$y' = f(x, y).$$

此时若 f 在矩形区域 $\widetilde{R}: \left\{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a,\ \left|y - y_0\right| \leqslant b\right\}$ 上连续且满足 Lipschitz 条件：

$$\exists L > 0,\ \text{s.t.}\ \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \widetilde{R},\ \left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leqslant L\left|y_1 - y_2\right|.$$

对 I.V.P : $y(x_0) = y_0$，存在且仅存在一个解在矩形区域: $\hat{R} : \left\{(x, y) : |x - x_0| \leqslant h,\ \left|y - y_0\right| \leqslant b\right\}$ 上成立，其中 h 满足：

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},\ M = \max\left|f(x, y)\right| \left((x, y) \in \widetilde{R}\right).$$

对方程：

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{Ω}$$

1. 首先证明求解该 I.V.P 等价求解：

$$y = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t. \tag{Γ}$$

   充分性：不妨设 $\psi(x)$ 是 (Ω) 的解，则有：

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = f(x, \psi).$$

   由于连续直接积分得到：

$$\psi(x) - \psi(0) = \int_{x_0}^x f(t, \psi(t))\,\mathrm{d}t.$$

   必要性：$\psi(x)$ 是 (Γ) 的解，对 x 作微分就有：

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = f(x, \psi).$$

■

2. 设立 Picard 序列：
$$\begin{cases} \psi_0(x) = y_0, \\ \psi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi(t, \psi_0)\,\mathrm{d}t, \\ \vdots \\ \psi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi(t, \psi_0)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$
然后是证明在 $\hat{R}$ 上面，以下方程成立：
$$\left|\psi_n(x) - y_0\right| \leqslant b,\ \forall\ |x - x_0| \leqslant h.$$
3. 然后是证明 Picard 序列一致收敛“
4. 接下来是证明存在性
5. 最后是唯一性

另外地，Lipschitz 条件可以变成更强的对 y 偏导连续条件。

2.1 解的延拓

由唯一性定理，在 $|x - x_0| \leqslant h$ 內解存在且唯一，如果 $f(x, y)$ 在 $\hat{G}$ 上面內闭满足 Lipschitz 条件，那这个解可以延拓到任意接近 $\hat{G}$ 的边界。

2.2 解对初值的连续性

如果 $f(x, y)$ 满足上面那些条件，则它的唯一解 $\psi(x, x_0, y_0)$ 对 x, x_0, y_0 都是连续的，若 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 连续，则是可微的。此处有（不加证明）：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) \exp\left(\displaystyle\int_{x_0}^{x} \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\psi} \mathrm{d}t\right) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y_0} = \exp\left(\displaystyle\int_{x_0}^{x} \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\psi} \mathrm{d}t\right) \end{cases}.$$

3 高阶 ODE

3.1 齐次线性微分方程的解的结构

考虑一种普遍的情况：
$$\mathscr{L}[x] = 0. \tag{HOM}$$

其中 $\mathscr{L}$ 代表线性算符：

$$\mathscr{L} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathscr{D}^i.$$

为了考虑函数是否有线性关系，定义 Wronsky 矩阵如下：

$$\mathscr{W} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

上面的 x_j 都是函数。

同时用线性代数的方法考虑线性相关/无关，比如多项式的基 $1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n$ 是线性无关的（废话）。另外有关 Wronsky 行列式的一些定理：

1. 如果函数 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 在区间 I 上是线性相关的，则在该区间上 Wronsky 行列式恒为 0：

   - 证明如下：

     按照线性代数的知识，如果要线性相关则需要存在一组不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots c_n$ 使得：

     $$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \equiv 0.$$

     在区间上面恒成立，将该式连续求导 $n-1$ 次：

     $$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{(m)} = 0, \qquad m = 0, 1, \cdots n-1.$$

     这其实就是：

     $$\boldsymbol{\mathscr{W}} \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{0}. \tag{Θ}$$

     其中

     $$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

     由于 x_j 线性无关，因此不全为零的常数 $\{c_1, c_2, \cdots c_n\}$ 存在，这意味着 (Θ) 这个方程存在至少两个解（还有零解），因此 $|\mathscr{W}| = 0$。

     另外，逆定理一般不成立。

2. 如果函数 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 是 (HOM) 的解，且在区间 I 上是线性无关的，则在该区间上 Wronsky 行列式恒不为 0：

   - 这个是 (HOM) 的解的条件非常重要，没有它不成立的（因为不能用唯一性定理）。证明如下：
     用反证法，如果 $\mathscr{W}(t_0) = 0$，那么

     $$\boldsymbol{\mathscr{W}}(t_0) \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{0}.$$

     有非零解，那么考虑此时的

     $$x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

     当然是 (HOM) 的解，同时注意到：

     $$\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mathscr{W}}(t_0) \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{0}.$$

     这意味着初始条件也确定了，同时留意到 $x \equiv 0$ 也是满足 I.V.P 的，因此由唯一性得到

     $$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0.$$

     还记得此的 c_j 不全为 0，这意味着 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 线性相关，矛盾！因此证毕。

3. 如果对应 n 阶的齐次线性微分方程 $\mathscr{L}[x] = 0$ ，我们找到了其 n 个线性无关解，那么这 n 个解的张成构成了方程的解空间。

   - 易知这 n 个解的张成被包含于方程的解空间，同时对于张成元素 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{c}$ 中的 $\boldsymbol{c}$ 的每一个元素函数无关，即：

     $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

4 线性微分方程组