前言

这篇文章（如果写得完的话）应该是一篇 ODE 的小短文，按照笔者的想法，笔者更倾向于将叙述形式变为两个人之间的对话，这两个人就叫做“朱鹭子”和“琪露诺”吧（笑），至于为什么……那只是因为笔者喜欢罢了（笑）。

由于笔者才疏学浅，其中必定错漏百出，请多指教。

Innocent FIVE
小飞舞

目录

朱鹭子和琪露诺

0 什么是 ODE

朱鹭子：ODE 被称为“常微分方程”，是一种奇怪的方程，它代表了一些奇怪的量之间的奇怪关系，我记得你是学过微积分的吧?

琪露诺：呃……学过一点（挠头）。

朱鹭子：那就好，线性代数呢?

琪露诺：emmmm ……只看过那本同济的……

朱鹭子：我的天……那本啊……算了也没关系，都一样的……行，那我开始说了啊……

1 一阶 ODE 的初等解法

朱鹭子：一阶的 ODE 在某种意义上是最简单的 ODE 了，所以我们可以先来研究它。我们知道，ODE 事关待求解函数 $x(t)$ 的导数，这个导数可能是很高阶的，比如：

$$\mathscr{D}_t^n(x) = f(t, x).$$

此时我们……

琪露诺：等等等等，这个 $\mathscr{D}$ 是什么……

朱鹭子：哦这个啊，我们管它叫“求导算符”，这里这样写指的是对 t 求 n 次导，同时，我们也默认 x 是关于 t 的函数。我么继续，上面这个式子是一个 n 阶的 ODE，我们不想讨论它，我们直接来看最简单的：

$$\mathscr{D}_t(x) = f(t)g(x).$$

这种被称为“变量分离方程”。

1.1 变量分离方程

朱鹭子：这种我们可以这样做：

$$\frac{\mathscr{D}_t(x)}{g(x)} = f(t).$$

两边积分就可以得到：

$$\int \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{A}$$

琪露诺：诶等等，这个 $\mathscr{D}_t(x)$ 到哪里去了?

朱鹭子：啊这个的话……实际上是有

$$\int \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathscr{D}_t(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}t.$$

这个，这个你不是有学的吗?

琪露诺：呃我忘了……

朱鹭子：啊这……好，现在我们看 A 方程的两边，左边只和 x 有关，右边只和 t 有关，那么我们实际上就把 $x(t)$ 解出来了，虽然用的是隐式方程的表示法。

琪露诺：原来如此，这有什么要注意的地方吗?

朱鹭子：有，积分记得加上常数。接下来我们来看另外一种方程。

1.2 线性微分方程

朱鹭子：好，我们来看看这种:

$$\mathscr{D}_t(x) + p(t)x = f(t). \tag{B}$$

这种被称为线性微分方程。

琪露诺：诶……这个线性指的是什么意思呢……

朱鹭子：我们可以这样理解。假设 x_1 和 x_2 都是方程 B 的解，那么我们考虑:

$$x_3 = cx_1 + (1-c)x_2.$$

这个是不是方程 B 的解呢?

琪露诺： emmmm 好像是的。

朱鹭子：对，没错，这里实际上是有:

$$\begin{cases} \mathscr{D}_t^n(x_1+x_2) = \mathscr{D}_t^n(x_1) + \mathscr{D}_t^n(x_2), \\ \mathscr{D}_t^n(cx_1) = c\cdot\mathscr{D}_t^n(x_1). \end{cases} \tag{C}$$

这里指的是求导算符的函数线性，另外我们考虑更普遍的形式:

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{D}_t^n + a_{n-1}(t)\mathscr{D}_t^{n-1} + \cdots a_1(t)\mathscr{D}_t + a_0(t) = \mathscr{D}_t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\mathscr{D}_t^i,$$

$$\mathscr{L}_2 = \mathscr{D}_t^n + b_{n-1}(t)\mathscr{D}_t^{n-1} + \cdots b_1(t)\mathscr{D}_t + b_0(t) = \mathscr{D}_t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t)\mathscr{D}_t^i.$$

那么算符 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 满足：

$$(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)(x) = \mathscr{L}_1(x) + \mathscr{L}_2(x).$$

这被称为算符线性。

因此合并起来就是：

$$(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)(x_1 + x_2) = \mathscr{L}_1(x_1) + \mathscr{L}_1(x_2) + \mathscr{L}_2(x_1) + \mathscr{L}_2(x_2).$$

琪露诺：哦哦，原来线性指的是我可以随意拆掉括号啊……

朱鹭子：不可以哦，只是满足 C 方程罢了，你只能在规定的范围内行动。虽说如此，线性方程确实是比较简单的一类。好，我们来看 B 方程，这个怎么解呢？

琪露诺：我在寺子屋里见过这些题，一般来说左边都是一些函数的导数，然后两边积分就可以求出函数出来。

朱鹭子：没错，但是在这里，这个 $p(x)$ 是如此随机，左边很可能不是个新函数的导数，我们应该怎么办呢？

琪露诺：emmmm 呜哇哇……

朱鹭子：事实上，我们可以乘上一个新的函数，改变左边那一坨的结构：

$$B \implies h(t)\mathscr{D}_t(x) + h(t)p(t)x = f(t)h(t). \tag{D}$$

琪露诺：可是这样左边还是很怪啊，看起来根本不像个导数……

朱鹭子：是的，所以我们硬来，考虑新的函数 $h(t)x$，那么它的导数就是：

$$\mathscr{D}_t(h(t)x(t)) = h(t)\mathscr{D}_t(x) + \mathscr{D}_t(h(t))x.$$

这样我们观察 D 式，我们可以强行要求：

$$h(t)p(t) = \mathscr{D}_t(h(t)).$$

琪露诺：看起来像那个巫女的作风……

朱鹭子：不是哦，~~灵梦哪有那么聪明~~。好了，接下来我们的任务就是解出这个奇怪的 $h(t)$，还记得变量分离方程吗？ $h(t)$ 的约束就是这个变量分离方程哦。

琪露诺：记得，所以我们只要：

$$h(t)p(t) = \mathscr{D}_t(h(t)) \implies \int \frac{1}{h(t)}\,\mathrm{d}h = \int p(t)\,\mathrm{d}t.$$

这意味着：

$$\ln h(t) = \int p(t)\,\mathrm{d}t \implies h(t) = \mathrm{e}^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}.$$

朱鹭子：不对哦，你积分没加常数。

琪露诺：呜哇……那加了常数之后，就是：

$$\ln h(t) = \int p(t)\,\mathrm{d}t + c_1 \implies h(t) = \mathrm{e}^{c_1}\cdot\mathrm{e}^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}.$$

是这样吗？

朱鹭子：其实你可以不加的，因为你有一个积分号没有被消掉……但先不管这个，我们可以看到 h 我们已经求出来了，接下来呢？

琪露诺：那这个 c_1 怎么确定啊？

朱鹭子：不用确定，都是满足条件的不是吗？为了容易算我们就让它是 0 好了。

琪露诺：哦哦，那这样子 C 方程就是：

$$\mathscr{D}_t(h(t)x) = f(t)h(t).$$

这是一个变量分离方程，我可以对它进行积分：

$$h(t)x = \int f(t)h(t)\,\mathrm{d}t \implies x = \frac{\int f(t)h(t)\,\mathrm{d}t}{h(t)}.$$

最后是代入 $h(t)$ 的方程得到：

$$x = \frac{\int f(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}}.$$

哇，这啥啊……

朱鹭子：你做的是正确的，这就是 B 方程的解啦。

1.3 常数变易法

琪露诺：原来如此，所以这一节我完全懂了对吧。

朱鹭子：不是哦，再和你说些东西，我们回过头考虑一种更简单的情况：

$$\mathscr{D}_t(x) + p(t)x = 0.$$

琪露诺：我知道我知道，这是分离变量方程！

朱鹭子：对，他的解是 $x = c_1 \exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)$，我们反倒可以这样考虑，这个 c_1 并不是一个常数，而是一个函数 $c_1(t)$，此时 $x = c_1(t)\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)$ 反倒是方程 B 的解，那么会发生什么事呢？

琪露诺：我猜猜……将这个新东西带进去之后会得到一个新的方程。

朱鹭子：没错，我们试试看：

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}_t(x) + p(t)x = \mathscr{D}_t\left(c_1(t)\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)\right) + p(t)c_1(t)\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \mathscr{D}_t(c_1(t))\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right) + c_1(t)\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)(-p(t)) + p(t)c_1(t)\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \mathscr{D}_t(c_1(t))\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(t)\end{aligned}$$

琪露诺：所以这个 $c_1(t)$ 就满足：

$$c_1'(t) = f(t)\exp\left(\int p(t)\,\mathrm{d}t\right) \implies c_1(t) = \int\left[f(t)\exp\left(\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}t.$$

天……这太多积分号了叭……

朱鹭子：确实，但这玩意不是和你之前求的 B 方程的解差不多吗？

琪露诺：哦也是，那这个方法有什么用呢？

朱鹭子：用处多了，以后我们在解更普遍的方程会用到这个解法，这被称为**常数变易法**。

琪露诺：哦……

朱鹭子：接下来我们看些更神奇的。

1.4 恰当微分方程

考虑一些更通用的情况：

$$\mathscr{D}_t(x) = f(x,t).$$

我们可以把它写成微分形式：

$$f(x,t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x = 0.$$

再考虑更一般的情况：

$$T(x,t)\,\mathrm{d}t + X(x,t)\,\mathrm{d}x = 0.$$

琪露诺：这是啥……

朱鹭子：看到了吗？这其实是微分方程的一种特殊写法，看到这你想到了什么？

琪露诺：emmm ……第二类线积分？

朱鹭子：没错！第二类线积分里面有些很好算的情况，那就是“路径无关”的时候，此时应该由什么判别呢？

琪露诺：emmm 由 Green 公式应该有：

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial t}.$$

朱鹭子：在函数性质良好的前提下，可以这么做，那么如果是路径无关的话接下来这么求解方程呢？

琪露诺：呃……

朱鹭子：事实上，路径无关场就是梯度场，这意味着存在一个函数 u 使得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = X.$$

所以方程就变成了：

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

左边就是 u 的全微分啦，所以我们就有：

$$u = c_1.$$

这样就解出了 x 了。

琪露诺：那如果没有路径无关怎么办？

朱鹭子：你可以想一下，我们之前怎么解决不是全微分的问题的。

琪露诺：emmm 难道你说的是，乘上一个新的函数？

朱鹭子：可以这样做，看看吧：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = hT, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = hX.$$

接下来呢？

琪露诺：呃……不知道了。

朱鹭子：事实上我们可以考虑 Young 定理：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial u} \implies \frac{\partial (hT)}{\partial x} = \frac{\partial (hX)}{\partial t}.$$

接下来我们可以用乘法法则分离它们:

$$X\frac{\partial h}{\partial t} - T\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t}\right) h.$$

琪露诺:好的,那这个方程怎么解?

朱鹭子:事实上这是一个偏微分方程……单纯解它比解原来的 ODE 更困难。

琪露诺:啊这……这不就是……寄了吗?

朱鹭子:差不多吧,不过的确有一些比较简单的情况。

- 当 $\dfrac{\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t}}{X} = p(t)$ 与 x 无关的时候。我们有:

$$h(t,x) = \exp\left(\int p(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

- 当 $\dfrac{\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t}}{T} = q(x)$ 与 t 无关的时候。我们有:

$$h(t,x) = \exp\left(-\int q(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

- 当 $\dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial t} = p(t)X - q(x)T$ 的时候。我们有:

$$h(t,x) = c_1 \exp\left(\int p(t)\,\mathrm{d}t + \int q(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

琪露诺:前两个还好,第三个也太那啥了,这个只有天才才能看出来吧。

朱鹭子:这个不管,反正算是比较简单的情况了(笑)。当然你也可以直接用看就把这个 h(我们管它叫积分因子)找出来。

琪露诺:这能看出来的吗?

朱鹭子:看你的直觉了……比如说这个?

$$\left(x^2 + y^2 + x\right)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0.$$

琪露诺:哇……看起来好难……哭……

朱鹭子:看,其实我们仔细观察的话倒是可以看出一些对偶量:

$$\left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}x = 0.$$

尝试 $h=\dfrac{1}{x^2+y^2}$，我们可以得到：

$$\mathrm{d}x+\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0 \implies \mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)=0.$$

所以最后的结果就是：

$$x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=c_1.$$

琪露诺：这根本不是人能看出来的……

朱鹭子：诶别说，这种对那只九尾策士的确是显然的题……

琪露诺：啊。所以，一阶微分方程就到这里了？

朱鹭子：不对哦，这只是一些基础的，还有一些奇怪的情况需要提及一下。那就是其解的参数表示。

琪露诺：emmm 好像确实之前没有讲关于参数方程的任何内容呢……

朱鹭子：我们来看一些隐式方程：

$$x=f(t,x').$$

这种反倒是将 x 分离出来了，此时怎么办呢？

琪露诺：emmm 这不又是一个一般的式子吗，怎么可能会有什么通法？

朱鹭子：你想想看吧，这种和之前的有什么不同？

琪露诺：emmm 首先是 x' 不能再随意地被分离出来，然后是左边是 x……

朱鹭子：差不多，想想左边有没有办法变成 x' 呢？

琪露诺：啊，你是说求导？

朱鹭子：对咯：

$$\mathscr{D}_t(x)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial\left(x'\right)}\mathscr{D}_t^2(x).$$

我们不妨设 $p=\mathscr{D}_t(x)$，那么这个方程就可以变为：

$$p=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\mathscr{D}_t(p).$$

琪露诺：可是这个方程不还是很怪吗？也不是有通解的那种……诶等等，这下好像 $\mathscr{D}_t(p)$ 就分离出来了：

$$\mathscr{D}_t(p)=\frac{p-\partial f/\partial t}{\partial f/\partial p}.$$

接下来我只要按照前面三种方法做就可以解出 p，然后积分就可以得到 x 了对吧？

朱鹭子：差不多是这样，但是如果你解出来 p，但是却是无法分离的，导致你没法直接积分，那该怎么办呢？况且你既然能解出 p，把它往 f 里面一代，不就把 x 解出来了吗，为什么要积分呢？

琪露诺：啊啊啊哇。

朱鹭子：最令人难受的应该是你解出来得到这个吧：

$$\psi(t, p, c_1) = 0.$$

你看，你甚至连通解的参数都是嵌在函数里面的，此时你不考虑参数方程还能怎么办呢？

琪露诺：通解参数是什么哇？

朱鹭子：啊，就里面这个 c_1，事实上对于一个 n 阶的微分方程，它的通解将会长得像：

$$x = \psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n).$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 相互独立，这到时候说一下唯一性定理你可能会更明白一些。

琪露诺：好吧，所以最后的参数方程就是：

$$\begin{cases} \psi(t, p, c_1) = 0, \\ x = f(t, p). \end{cases}$$

这样咯？那参数就是那个 t 咯。

朱鹭子：t 是自变量，p 才是参数。你要知道 p 才是我们想要消去的那个，所以 p 是参数。

琪露诺：哦。所以这其实是一种“差不多解出来了但还有一步要走”的情况吧？

朱鹭子：的确，看看这种？

$$t = f(x, x').$$

这下反倒是自变量被分离出来了。

琪露诺：麻……这是强行走成反函数的路线吗……

朱鹭子：要清楚你现在考虑的是微分结构，不要乱反函数。

琪露诺：呜……首先我左右两边对 t 求导：

$$1 = \frac{\partial f}{\partial x}\mathscr{D}_t(x) + \frac{\partial f}{\partial (x')}\mathscr{D}_t^2(x).$$

然后再设 $p=\mathscr{D}_t(x)$，这样子就行啦：

$$1=\frac{\partial f}{\partial x}p+\frac{\partial f}{\partial p}\mathscr{D}_t(p).$$

朱鹭子：不错，这也有另外一种方法，那就是上来直接对 x 求导：

$$\mathscr{D}_x(t)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\mathscr{D}_x(p).$$

然后由于一阶微分形式的不变性，我们可以把它改写为：

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial f}{\partial p}\mathscr{D}_t(p).$$

也和你写的一样哦。

琪露诺：哇塞。

朱鹭子：嗯，来点更怪的例子，如果你最后解出来是这样子的：

$$\begin{cases} x'=X(c), \\ t=T(c). \end{cases}$$

这种情况呢？你该怎么得到——没有其他条件了——那个 x 呢？

琪露诺：寄。我试试看，首先是：

$$\mathscr{D}_c(x)=\mathscr{D}_t(x)\mathscr{D}_c(t)=X(c)T'(c)\implies\begin{cases} x=\displaystyle\int X(c)T'(c)\,\mathrm{d}c, \\ t=T(c). \end{cases}$$

依据微分形式不变性好像是这样的？

朱鹭子：的确。总而言之，你就得构造这个 $\mathscr{D}_c(x)$ 然后对其积分，虽然得到的结果是参数方程，不过也值了不是吗？

琪露诺：听起来是这样没错啦……

2 存在唯一性定理

朱鹭子：在此之前，我们得到的 ODE 全都无视了它是否有没有解，解是否唯一，这里倒是准备和你说一下这些。

琪露诺：存在性吗……感觉很枯燥……

定理 2.1: 存在唯一性定理

对于一个将导数分离出来的 ODE：

$$\mathscr{D}_t(x) = f(t, x).$$

如果 f 在开区域 $\overline{\mathcal{I}}$ 上面满足：任意 $\overline{\mathcal{I}}$ 中的闭矩形区域 $\overline{\mathcal{G}}$ 上都满足 Lipschitz 条件：

$$\left|f(t, x_1) - f(t, x_2)\right| \leqslant L\left|x_1 - x_2\right|, \ \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \overline{\mathcal{G}}.$$

且有初始条件：$x(t_0) = x_0$，则存在解 $x = X(t)$ 在点 (t_0, x_0) 的邻域内有定义，且该解可以延拓到任意接近 $\overline{\mathcal{I}}$ 的边界。

琪露诺：？？？？？？？这都啥啊……

朱鹭子：这确实很怪……让我尝试说明一下。为了方便，我们先从单变量的实函数开始说明：

$$y = f(x) \text{ 或者 } f : \overline{\mathcal{I}} \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}.$$

如果存在常数 L 使得：

$$\left|f(a) - f(b)\right| \leqslant L\left|a - b\right|, \ \forall a, b \in \overline{\mathcal{I}}.$$

则我们称 f 满足 Lipschitz 条件，而 $L_{\min}$ 被称为 Lipschitz 常数，如果这个常数小于一，我们会称 f 是**压缩映射**。这个我们先不管了，你只要先知道，如果 f 是在区域内满足 Lipschitz 条件，那么给出 x 的一个初值条件时候，x 唯一可解。

八云蓝和琪露诺