

---

## 前言

这篇文章（如果写得完的话）应该是一篇 ODE 的小短文，按照笔者的想法，笔者更倾向于将叙述形式变为两个人之间的对话，这两个人就叫做“朱鹭子”和“琪露诺”吧（笑），至于为什么……那只是因为笔者喜欢罢了（笑）。

由于笔者才疏学浅，其中必定错漏百出，请多指教。

Innocent FIVE  
小飞舞

# 目录

## 0 什么是 ODE

朱鹭子：ODE 被称为“常微分方程”，是一种奇怪的方程，它代表了一些奇怪的量之间的奇怪关系，我记得你是学过微积分的吧？

琪露诺：呃……学过一点（挠头）。

朱鹭子：那就好，线性代数呢？

琪露诺：emmmm……只看过那本同济的……

朱鹭子：我的天……那本啊……算了也没关系，都一样的……行，那我开始说了啊……

## 1 一阶 ODE 的初等解法

朱鹭子：一阶的 ODE 在某种意义上是最简单的 ODE 了，所以我们可以先来研究它。我们知道，ODE 事关待求解函数  $x(t)$  的导数，这个导数可能是很高阶的，比如：

$$\mathcal{D}_t^n(x) = f(t, x).$$

此时我们……

琪露诺：等等等等，这个  $\mathcal{D}$  是什么……

朱鹭子：哦这个啊，我们管它叫“求导算符”，这里这样写指的是对  $t$  求  $n$  次导，同时，我们也默认  $x$  是关于  $t$  的函数。我么继续，上面这个式子是一个  $n$  阶的 ODE，我们不想讨论它，我们直接来看最简单的：

$$\mathcal{D}_t(x) = f(t)g(x).$$

这种被称为“变量分离方程”。

### 1.1 变量分离方程

朱鹭子：这种我们可以这样做：

$$\frac{\mathcal{D}_t(x)}{g(x)} = f(t).$$

两边积分就可以得到：

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t) dt. \quad (\text{A})$$

琪露诺：诶等等，这个  $\mathcal{D}_t(x)$  到哪里去了？

朱鹭子：啊这个的话……实际上是有

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{\mathcal{D}_t(x)}{g(x)} dt.$$

这个，这个你不是有学的吗？

琪露诺：呃我忘了……

朱鹭子：啊这……好，现在我们看 A 方程的两边，左边只和  $x$  有关，右边只和  $t$  有关，那么我们实际上就把  $x(t)$  解出来了，虽然用的是隐式方程的表示法。

琪露诺：原来如此，这有什么要注意的地方吗？

朱鹭子：有，积分记得加上常数。接下来我们来看另外一种方程。

## 1.2 线性微分方程

朱鹭子：好，我们来看看这种：

$$\mathcal{D}_t(x) + p(t)x = f(t). \quad (\text{B})$$

这种被称为线性微分方程。

琪露诺：诶……这个线性指的是什么意思呢……

朱鹭子：我们可以这样理解。假设  $x_1$  和  $x_2$  都是方程 B 的解，那么我们考虑：

$$x_3 = cx_1 + (1 - c)x_2.$$

这个是不是方程 B 的解呢？

琪露诺：emmmm 好像是。

朱鹭子：对，没错，这里实际上是有：

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^n(x_1 + x_2) = \mathcal{D}_t^n(x_1) + \mathcal{D}_t^n(x_2), \\ \mathcal{D}_t^n(cx_1) = c \cdot \mathcal{D}_t^n(x_1). \end{cases} \quad (\text{C})$$

这里指的是求导算符的函数线性，另外我们考虑更普遍的形式：

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{D}_t^n + a_{n-1}(t)\mathcal{D}_t^{n-1} + \dots a_1(t)\mathcal{D}_t + a_0(t) = \mathcal{D}_t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\mathcal{D}_t^i,$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{D}_t^n + b_{n-1}(t)\mathcal{D}_t^{n-1} + \dots b_1(t)\mathcal{D}_t + b_0(t) = \mathcal{D}_t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t)\mathcal{D}_t^i.$$

那么算符  $\mathcal{L}_1$  和  $\mathcal{L}_2$  满足：

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)(x) = \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(x).$$

这被称为算符线性。

因此合并起来就是：

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)(x_1 + x_2) = \mathcal{L}_1(x_1) + \mathcal{L}_1(x_2) + \mathcal{L}_2(x_1) + \mathcal{L}_2(x_2).$$

琪露诺：哦哦，原来线性指的是我可以随意拆掉括号啊……

朱鹭子：不可以哦，只是满足 C 方程罢了，你只能在规定的范围内行动。虽说如此，线性方程确实是比较简单的一类。好，我们来看 B 方程，这个怎么解呢？

琪露诺：我在寺子屋里见过这些题，一般来说左边都是一些函数的导数，然后两边积分就可以求出函数出来。

朱鹭子：没错，但是在这里，这个  $p(x)$  是如此随机，左边很可能不是个新函数的导数，我们应该怎么办呢？

琪露诺：emmmm 呜哇哇……

朱鹭子：事实上，我们可以乘上一个新的函数，改变左边那一坨的结构：

$$B \implies b(t)\mathcal{D}_t(x) + b(t)p(t)x = f(t)b(t). \quad (D)$$

琪露诺：可是这样左边还是很怪啊，看起来根本不像个导数……

朱鹭子：是的，所以我们硬来，考虑新的函数  $b(t)x$ ，那么它的导数就是：

$$\mathcal{D}_t(b(t)x(t)) = b(t)\mathcal{D}_t(x) + \mathcal{D}_t(b(t))x.$$

这样我们观察 D 式，我们可以强行要求：

$$b(t)p(t) = \mathcal{D}_t(b(t)).$$

琪露诺：看起来像那个巫女的作风……

朱鹭子：不是哦，灵梦哪有那么聪明。好了，接下来我们的任务就是解出这个奇怪的  $b(t)$ ，还记得变量分离方程吗？ $b(t)$  的约束就是这个变量分离方程哦。

琪露诺：记得，所以我们只要：

$$b(t)p(t) = \mathcal{D}_t(b(t)) \implies \int \frac{1}{b(t)} db = \int p(t) dt.$$

这意味着：

$$\ln b(t) = \int p(t) dt \implies b(t) = e^{\int p(t) dt}.$$

朱鹭子：不对哦，你积分没加常数。

琪露诺：呜哇……那加了常数之后，就是：

$$\ln b(t) = \int p(t) dt + c_1 \implies b(t) = e^{c_1} \cdot e^{\int p(t) dt}.$$

是这样吗？

朱鹭子：其实你可以不加的，因为你有一个积分号没有被消掉……但先不管这个，我们可以看到  $b$  我们已经求出来了，接下来呢？

琪露诺：那这个  $c_1$  怎么确定啊？

朱鹭子：不用确定，都是满足条件的不是吗？为了容易算我们就让它为 0 好了。

琪露诺：哦哦，那这样子 C 方程就是：

$$\mathcal{D}_t(b(t)x) = f(t)b(t).$$

这是一个变量分离方程，我可以对它进行积分：

$$b(t)x = \int f(t)b(t) dt \implies x = \frac{\int f(t)b(t) dt}{b(t)}.$$

最后是代入  $b(t)$  的方程得到：

$$x = \frac{\int f(t)e^{\int p(t) dt} dt}{e^{\int p(t) dt}}.$$

哇，这啥啊……

朱鹭子：你做的是正确的，这就是 B 方程的解啦。

### 1.3 常数变易法

琪露诺：原来如此，所以这一节我完全懂了对吧。

朱鹭子：不是哦，再和你说些东西，我们回过头考虑一种更简单的情况：

$$\mathcal{D}_t(x) + p(t)x = 0.$$

琪露诺：我知道我知道，这是分离变量方程！

朱鹭子：对，他的解是  $x = c_1 \exp\left(-\int p(t) dt\right)$ ，我们反倒可以这样考虑，这个  $c_1$  并不是一个常数，而是一个函数  $c_1(t)$ ，此时  $x = c_1(t) \exp\left(-\int p(t) dt\right)$  反倒是方程 B 的解，那么会发生什么事呢？

琪露诺：我猜猜……将这个新东西带进去之后会得到一个新的方程。

朱鹭子：没错，我们试试看：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_t(x) + p(t)x &= \mathcal{D}_t\left(c_1(t) \exp\left(-\int p(t) dt\right)\right) + p(t)c_1(t) \exp\left(-\int p(t) dt\right) \\ &= \mathcal{D}_t(c_1(t)) \exp\left(-\int p(t) dt\right) + c_1(t) \exp\left(-\int p(t) dt\right) (-p(t)) + p(t)c_1(t) \exp\left(-\int p(t) dt\right) \\ &= \mathcal{D}_t(c_1(t)) \exp\left(-\int p(t) dt\right) = f(t)\end{aligned}$$

琪露诺：所以这个  $c_1(t)$  就满足：

$$c_1'(t) = f(t) \exp\left(\int p(t) dt\right) \implies c_1(t) = \int \left[f(t) \exp\left(\int p(t) dt\right)\right] dt.$$

天……这太多积分号了叭……

朱鹭子：确实，但这玩意不是和你之前求的 B 方程的解差不多吗？

琪露诺：哦也是，那这个方法有什么用呢？

朱鹭子：用处多了，以后我们在解更普遍的方程会用到这个解法，这被称为常数变易法。

琪露诺：哦……

朱鹭子：接下来我们看些更神奇的。

## 1.4 恰当微分方程

考虑一些更通用的情况：

$$\mathcal{D}_t(x) = f(x, t).$$

我们可以把它写成微分形式：

$$f(x, t) dt - dx = 0.$$

再考虑更一般的情况：

$$T(x, t) dt + X(x, t) dx = 0.$$

琪露诺：这是啥……

朱鹭子：看到了吗？这其实是微分方程的一种特殊写法，看到这你想到了什么？

琪露诺：emmm……第二类线积分？

朱鹭子：没错！第二类线积分里面有些很好算的情况，那就是“路径无关”的时候，此时应该由什么判别呢？

琪露诺：emmm 由 Green 公式应该有：

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial t}.$$

朱鹭子：在函数性质良好的前提下，可以这么做，那么如果是路径无关的话接下来这么求解方程呢？

琪露诺：呃……

朱鹭子：事实上，路径无关场就是梯度场，这意味着存在一个函数  $u$  使得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = X.$$

所以方程就变成了：

$$\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

左边就是  $u$  的全微分啦，所以我们就有：

$$u = c_1.$$

这样就解出了  $x$  了。

琪露诺：那如果没有路径无关怎么办？

朱鹭子：你可以想一下，我们之前怎么解决不是全微分的问题的。

琪露诺：emmm 难道你说的是，乘上一个新的函数？

朱鹭子：可以这样做，看看吧：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = bT, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = bX.$$

接下来呢？

琪露诺：呃……知道了。

朱鹭子：事实上我们可以考虑 Young 定理：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \implies \frac{\partial(bT)}{\partial x} = \frac{\partial(bX)}{\partial t}.$$

接下来我们可以用乘法法则分离它们：

$$X \frac{\partial b}{\partial t} - T \frac{\partial b}{\partial x} = \left( \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t} \right) b.$$

琪露诺：好的，那这个方程怎么解？

朱鹭子：事实上这是一个偏微分方程……单纯解它比解原来的 ODE 更困难。

琪露诺：啊这……这不就是……寄了吗？

朱鹭子：差不多吧，不过的确有一些比较简单的情况。



- 当  $\frac{\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t}}{X} = p(t)$  与  $x$  无关的时候。我们有：

$$b(t, x) = \exp\left(\int p(t) dt\right).$$

- 当  $\frac{\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t}}{T} = q(x)$  与  $t$  无关的时候。我们有：

$$b(t, x) = \exp\left(-\int q(x) dx\right).$$

- 当  $\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t} = p(t)X - q(x)T$  的时候。我们有：

$$b(t, x) = c_1 \exp\left(\int p(t) dt + \int q(x) dx\right).$$

琪露诺：前两个还好，第三个也太那啥了，这个只有天才才能看出来吧。

朱鹭子：这个不管，反正算是比较简单的情况了（笑）。当然你也可以直接用看就把这个  $b$ （我们管它叫积分因子）找出来。