

Фундаментальные теоремы машинного обучения

2020

Содержание

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Теорема о связи распределений в экспонентном семействе (Бернштейн фон Мизес) | 1 |
| 1.1 | Асимптотическая нормальность | 1 |
| 1.2 | Теорема Бернштейна фон Мизеса | 1 |

1 Теорема о связи распределений в экспонентном семействе (Бернштейн фон Мизес)

1.1 Асимптотическая нормальность

Пусть заданы объекты из некоторого распределения:

$$\mathbf{X}^n = \{X_i\}_{i=1}^n,$$

где n число объектов.

Пусть задано некоторое открытое подмножество $\Theta \in \mathbb{R}^d$. Подмножество Θ задает множество статистических моделей $\mathcal{P}^n = \{P_\theta^n | \theta \in \Theta\}$. Пусть для каждого n существует мера P_θ^n которая доминирует все меры из множества \mathcal{P}^n . Пусть также все меры задаются своей плотностью p_θ^n .

Определение 1.1. Рассмотрим некоторую внутреннюю точку $\theta^* \in \Theta$ и последовательность $\delta_n \rightarrow 0$. Пусть существует вектор $\Delta_{\theta^*}^n$ и невырожденная матрица V_{θ^*} , такие, что последовательность $\{\Delta_{\theta^*}^n\}$ ограничена по вероятностной мере, а также для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ выполняется:

$$\sup_{h \in K} \left| \log \frac{p_{\theta^* + \delta_n h}^n(\mathbf{X}^n)}{p_{\theta^*}^n(\mathbf{X}^n)} - h^\top V_{\theta^*} \Delta_{\theta^*}^n - \frac{1}{2} h^\top V_{\theta^*} h \right| \xrightarrow{P_\theta^n} 0.$$

Тогда модель \mathcal{P}^n удовлетворяет условия локальной асимптотической нормальности в точке θ^* (local asymptotic normality).

Априорное распределение заданное на множестве Θ обозначим Π , а его плотность π . Предположим, что π положительно в некоторой окрестности точки θ^* .

Апостериорное распределение построенное на основе множестве объектов \mathbf{X}^n обозначим $\Pi_n(A|\mathbf{X}^n)$, где A некоторое борелевское множество. Будем обозначать случайную величину из апостериорного распределения как ϑ .

1.2 Теорема Бернштейна фон Мизеса

Теорема 1. Пусть для некоторой точки θ^* выполнено условия локальной асимптотической нормальности (Опр.1.1). Пусть задано априорное распределение Π . Пусть для некоторой последовательности чисел $M_n \rightarrow \infty$ выполняется следующее условие:

$$P_0^n \Pi_n(\|\vartheta - \theta^*\| > \delta_n M_n | \mathbf{X}^n) \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Тогда последовательность апостериорных распределений сходится к последовательности нормальных:

$$\sup_B \left| \Pi_n\left(\frac{\vartheta - \theta^*}{\delta_n} \in B | \mathbf{X}^n\right) - N_{\Delta_{\theta^*}^n, V_{\theta^*}^{-1}}(B) \right| \xrightarrow{P_0^n} 0.$$

Доказательство. Апостериорное распределение для величины $H = \frac{\vartheta - \theta^*}{\delta_n}$ полученное для выборки \mathbf{X}^n обозначим Π_n . Также обозначим $N_{\Delta_{\theta^*}^n, V_{\theta^*}^{-1}}$ как Φ_n . Рассмотрим некоторый компакт $K \subset \mathbb{R}^d$. Рассмотрим условное апостериорное распределение:

$$\begin{aligned} \Pi_n^K(B|\mathbf{X}^n) &= \Pi_n(B \cap K | \mathbf{X}^n) / \Pi_n(K | \mathbf{X}^n), \\ \Phi_n^K(B) &= \Phi_n(B \cap K) / \Phi_n(K). \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторый компакт $K \subset \mathbb{R}^d$. Для любой окрестности $U(\theta^*) \subset \Theta$ существует некоторый номер n , такой, что $\theta^* + K\delta_n \subset U(\theta^*)$.

Рассмотрим функцию $f_n : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_n(g, h) = \left(1 - \frac{\phi_n(h)s_n(g)\pi_n(g)}{\phi_n(g)s_n(h)\pi_n(h)} \right)_+,$$

где ϕ_n, π_n — распределение Φ_n и Π_n соответственно, s_n является отношением правдоподобия:

$$s_n(h) = \frac{p_{\theta^*+h\delta_n}^n}{p_{\theta^*}^n}.$$

Рассмотрим две произвольные последовательности $\{h_n\}, \{g_n\} \subset K$:

$$\begin{aligned} \log \frac{\phi_n(h_n)s_n(g_n)\pi_n(g_n)}{\phi_n(g_n)s_n(h_n)\pi_n(h_n)} &= \\ &= (g_n - h_n)^\top \mathbf{V}_{\theta^*} \Delta_{\theta^*}^n + \frac{1}{2} h^\top \mathbf{V}_{\theta^*} h_n - \frac{1}{2} g_n^\top \mathbf{V}_{\theta^*} g_n + o(1) - \\ &= -\frac{1}{2} (h_n - \Delta_{\theta^*}^n)^\top \mathbf{V}_{\theta^*} (h_n - \Delta_{\theta^*}^n) + \frac{1}{2} (g_n - \Delta_{\theta^*}^n)^\top \mathbf{V}_{\theta^*} (g_n - \Delta_{\theta^*}^n) = o(1), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где первое слагаемое получено используя локальную асимптотическую нормальность (Опр.1.1), а второе с плотности нормального распределения. Тогда из (1.2) получаем, что:

$$\sup_{g, h \in K} f_n(g, h) \xrightarrow{P_0} 0. \quad (1.3)$$

Обозначим за Ξ_n событие, что $\Pi_n(K) > 0$. Рассмотрим некоторое $\eta > 0$, которое задает следующее множество:

$$\Omega_n = \left\{ \sup_{g, h \in K} f_n(g, h) \leq \eta \right\}_*, \quad (1.4)$$

где $*$ обозначает измеримое покрытие множества. Из (1.3) и (1.4) получаем следующее неравенство:

$$P_0^n \|\Pi_n^K - \Phi_n^K\|_{\mathbb{I}_{\Xi_n}} \leq P_0^n \|\Pi_n^K - \Phi_n^K\|_{\mathbb{I}_{\Xi_n \cap \Omega_n}} + 2P_0^n \|\Pi_n^K - \Phi_n^K\|_{\mathbb{I}_{\Xi_n \setminus \Omega_n}}, \quad (1.5)$$

где \mathbb{I}_{Ξ_n} — индикаторная функция, $\|\cdot\|$ является вариационной нормой (total-variational norm). Второе слагаемое равняется нулю в силу (1.3). Используя свойство данной нормы первое слагаемое принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_0^n \|\Pi_n^K - \Phi_n^K\|_{\mathbb{I}_{\Xi_n \cap \Omega_n}} &= P_0^n \int_K \left(1 - \frac{d\Phi_n^K}{d\Pi_n^K} \right)_+ d\Pi_n^K \mathbb{I}_{\Xi_n \cap \Omega_n} = \\ &= P_0^n \int_K \left(1 - \int_K \frac{s_n(g)\pi_n(g)\phi_n^K(h)}{s_n(h)\pi_n(h)\phi_n^K(g)} d\Phi_n^K(g) \right)_+ d\Pi_n^K \mathbb{I}_{\Xi_n \cap \Omega_n}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Йенсена, а также (1.3) получаем следующее:

$$\frac{1}{2} P_0^n \|\Pi_n^K - \Phi_n^K\|_{\mathbb{I}_{\Xi_n \cap \Omega_n}} \leq P_0^n \int \left(1 - \frac{s_n(g)\pi_n(g)\phi_n^K(h)}{s_n(h)\pi_n(h)\phi_n^K(g)} \right)_+ d\Phi_n^K(g) d\Pi_n^K \mathbb{I}_{\Xi_n \cap \Omega_n} \leq \eta.$$

Подставляя в (1.5) получаем, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ выполняется, что $P_0^n \|\Pi_n^K - \Phi_n^K\|_{\mathbb{I}_{\Xi_n}} \rightarrow 0$.

Рассмотрим последовательность шаров $\{K_m\}$ с центром в нуле с радиусом M_m , причем $M_m \rightarrow \infty$.

Рассмотрим множество $\{\Xi_n | \Xi_n = \{\Pi_n(K_n) > 0\}\}$, по условию теоремы (1.1) получим, что $P_0^n(\Xi_n) \rightarrow 0$. Также получаем, что $P_0^n \|\Pi_n^{K_n} - \Phi_n^{K_n}\| \rightarrow 0$.

Теперь рассмотрим $P_0^n \|\Pi_n - \Phi_n\|$:

$$\begin{aligned} P_0^n \|\Pi_n - \Phi_n\| &\leq P_0^n \|\Pi_n - \Pi_n^{K_n}\| + P_0^n \|\Phi_n - \Phi_n^{K_n}\| \\ &\leq 2 \left(\Pi(\mathbb{R}^d \setminus K_n) \right) + 2 \left(\Phi(\mathbb{R}^d \setminus K_n) \right) \rightarrow 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

так как увеличивая радиус компакта в бесконечность мы покроем все множество \mathbb{R}^d . Выражение (1.6) заканчивает доказательство данной теоремы. \square

Список литературы

- [1] *Kleijn, B. J. K., and van der Vaart, A. W.* (2012). The Bernstein-Von-Mises theorem under misspecification. *Electronic Journal of Statistics*, 6, 354-381. <https://doi.org/10.1214/12-EJS675>