0.1 Колмогоровская сложность моделей

Одним из фундаментальных способов определить сложность произвольного математического объекта является колмогоровская сложность. Ниже представлено формальное определение колмогоровской сложности и основные ее свойства.

Определение 1. *Пусть задано вычислимое частично определенное отображение из множества бинарных слов в себя:*

$$T : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*.$$

Колмогоровской сложностью бинарной строки x назовем минимальную длину описания относительно T:

$$K_T(x) = \min_{p \in \{0,1\}^*} \{|p| : T(p) = x\},$$

Заметим, что колмогоровская сложность зависит от отображения T. В [?] доказано, что колмогоровсксая сложность $K_T(x)$ при двух отображениях T_1, T_2 отличается лишь на некоторую константу, не зависящих от строки x. Поэтому для дальнейшего изложения зафиксируем некоторое отображение T и положим $K(x) = K_T(x)$.

TODO: Здесь рисунок + мотивация.

Обобщим понятие колмогоровскор сложности на случай двух бинарных строк.

Определение 2. *Пусть задано вычислимое и частично определенное отображение из декартового произведения двух множеств бинарных слов в себя:*

$$T : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*.$$

Условной колмогоровской сложностью бинарной строки y при условии x назовем минимальную длину описания относительно D:

$$K_T(y|x) = \min_{p \in \{0,1\}^*} \{|p| : T(p, y) = x\},$$

TODO: пояснить как связаны $K(x), K(y|x)$.

Рассмотрим некоторые свойства условной колмогоровской сложности. **Оценка условной Колмогоровской сложности [?]**

$$K(x, y) \leq K(x) + K(y|x) + O(\log K(x, y)).$$

Количество информации в паре x,y симметрично с точностью до константы:

$$I(x : y) = I(y : x) + O(\log K(x, y)),$$

где величина $I(x : y) = K(y) - K(y|x)$ задает количество информации в x об объекте y.

Отметим, что схожими свойствами обладает взаимная информация, определение которой дано ниже.

Определение 3. *Пусть задана дискретная случайная величина x с вероятностным распределением p, принимающая значения $x_1, \dots, x_n$, Энтропией распределения случайной величины x назовем:*

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p(x = x_i) \log\ p(x = x_i).$$

Взаимной информацией I двух случайных величин x, y назовем следующее выражение:

$$I(x, y) = H(x) - H(x|y), \quad H(x) = -\sum_i p_x(x_i) \log p_x(x_i)$$

$$I(x, y) = I(y, x).$$

Таким образом, свойства количества информации $I(x : y)$ и взаимной информации, во многом совпадают. Докажем теорему о связи колмогоровской сложности и энтропии распределения, подытоживающую связь этих двух математических объектов.

Теорема 1. *[?] Пусть задана некоторая строка x длины n с частотами $p = (p_0, 1 - p_0)$ появлений нулей и единиц в строке. Тогда*

$$K(x) \leq H(x) + O(\log m).$$

Неравенство обращается в равенство для большинства строк x длины n.

Доказательство. Всего слов, которые можно получить с использованием заданных частот:

$$C = \frac{m!}{(p_0 m)!((1 - p_0)m)!}.$$

Т.к. количество таких слов конечно, то их можно пронумеровать и построить отображение, выдающее строку x по ее порядковому номеру. Таким образом, условная колмогоровская сложность ограничена сверху:

$$K(x|C, p_0) \leq \log C + O(1).$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{(2\pi + o(1))n} \frac{n}{e}^n.$$

И получим оценку:

$$C \leq 2^{nH(x)+O(\log n)}, \quad K(x|C, p_0) \leq nH(x) + O(\log n).$$

Для того, чтобы избавиться от условия в $K(x|C, p_0)$ потребуется $O(\log n)$ бит для описания чисел $p_0 n, p_1 n$, дающих в сумме n.

TODO: Поскольку слов с более короткими описаниями меньше, чем C, то для большинства слов будет достигаться предложенная оценка. □

Частным случаем колмогоровской сложности является префиксная колмогоровская сложность. Эта сложность задается машиной Тьюринга специального вида, имеющей две ленты: однонаправленную ленту для чтения и двунаправленную рабочую ленту. Будем полагать что машина Тьюринга T останавливается на p с выводом x: $T(p) = x$, если вся запись p осталась слева от читающей каретки, x осталась слева от пишущей каретки и T остановлена.

Определение 4. *Префиксная Колмогоровская сложность:*

$$KP(x) = \min_{p \in \{0,1\}^*, i \in \mathcal{N}} \{|i| + |p| : T_i(p) = x\},$$

где $|i|$ — длина описания i-й префиксной машины Тьюринга.

Отметим, что префиксная колмогоровская сложность является частным случаем колмогоровской сложности, а потому:

$$K(x) \leq KP(x).$$

Теорема (без доказательств) 1. *Пусть задана вычислимая функция p_x вероятности на множестве бинарных строк. Тогда*

$$0 \leq \mathsf{E}_{p_x} KP(x) - H(x) \leq KP(p_x) + O(1).$$

Таким образом, существует связь между энтропией и колмогровоской сложностью (как для обычного варианта сложности, так и для префиксной колмогоровской сложности): для простых распределений в смысле сложности фукнкции p_x энтропия будет приближать матожиданием префиксной колмогровской сложности.