Модельная общность для неускоренных и ускоренных блочно-покомпонентных методов

Жолобов Владимир,
Научный руководитель: Александр Гасников

MIPT

Moscow, 2020

Введение

Цель

Построить модельную общность для ускоренных и неускоренных блочно-покомпонентных методов.

Введение

Пример для неускоренного случая

$$x_{k+1} = \arg\min_{x \in Q} \{ V[x_k](x) + \alpha \langle \tilde{\nabla} f(x_k), x - x_k \rangle \}$$

Предположения

Выпуклость

Для всех $x \in Q$ модель $\psi_i(y, x)$ выпукла по $y \in Q$ и существует $\gamma > 0$ такая, что для любых $x, y \in Q$

$$\mathbb{E}_i \psi_i(y, x) \leq \frac{1}{\gamma}(f(y) - f(x))$$

Гладкость

Для любых x_k, x_{k+1}, полученных алгоритмом верно

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \psi_i(x_{k+1}, x_k) + V[x_k](x_{k+1})$$

Предположения

Функция V

$$V[z](x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i||x^{(i)} - z^{(i)}||_2^2, \quad Q = \otimes_{i=1}^{n} Q_i$$

Алгоритм с модельной общностью для неускоренного случая

Algorithm 3: Non-accelerated Random Block-Coordinate Descent (NR-BCD)

Input: starting point $x_0 \in Q^0 = \otimes_{i=1}^{n} Q_i^0$, number of iterations N, prox-setup: $d(x)$, $V[u](x)$, see subsection 1.1.

Set $k = 0$.

repeat

Choose randomly $i \in \{1, \ldots, n\}$ ($\mathbb{P}(i = j) = 1/n$ for all $j = 1, \ldots, n$)

$$x_{k+1} = \arg\min_{x \in Q} \{V[x_k](x) + \psi_i(x, x_k)\} \tag{62}$$

Set $k = k + 1$.

until $k \le N$;

Output: The point x_N.

Скорость сходимости

Theorem

При данных предположениях и x_k, сгенерированных с помощью алгоритма скорость сходимости имеет вид для $N \geq 1$

$$\mathbb{E}f(\overline{x}_N) - f(x^*) \leq \frac{\gamma}{N}(f(x_0) - f(x^*)) + \frac{\gamma}{N}V[x_0](x^*),$$

где $\overline{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k$, x^* решение оптимизационнной задачи.

Дальнейшие исследования

- В дальнейшем планируется построить модельную общность для ускоренных блочно-покомпонентных методов.

Литература

1. Dvinskikh D. M. et al. Accelerated and Unaccelerated Stochastic Gradient Descent in Model Generality //Mathematical Notes. – 2020. – T. 108. – №. 3. – C. 511-522.
2. Gasnikov A. V., Tyurin A. I. Fast gradient descent for convex minimization problems with an oracle producing a (, l)-model of function at the requested point //Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2019. – T. 59. – №. 7. – C. 1085-1097.