Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Динамическое программирование и процессы управления»

Студент 415 группы
Е. Н. Грачев

Руководитель практикума
Ю. Ю. Минаева

Москва, 2014

Содержание

1 Постановка задачи

Дана линейная управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0), \\ u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \\ u(t) \in \mathbb{R}^m, x(t) \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Построить внутренние эллипсоидальные оценки множества и трубки достижимости системы при наличии фазового ограничения $x(t) \in \mathcal{Y}(t)$. Фазовое ограниченеие задано в виде выпуклого компакта $\mathcal{Y}(T) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid |x_i(t)| \leqslant y_i(t),\ i = 1, \dots, n\}$ В качестве примера рассмотреть следующую колебательную систему: Двойной математический маятник состоит из двух невесомых стержней длины l_1 и l_2 и двух грузов массой m. Маятник совершает малые колебания в вертикальной плоскости. К нижнему шарику приложено управляющее ускорение u. Задано фазовое ограничение: угол отклонения верхнего груза от вертикальной оси $\varphi_1(t)$ не может превышать по модулю некоторой заданной величины $|\varphi_1(t)| \leqslant y_1$, $y_1 > 0$.

Требования к программе: Для выполнения задания разрешается использовать функции Ellipsoidal Toolbox для задания эллипсоидов, поиска пересечения эллипсоида и гиперплоскости (и множества $\mathcal{Y}(t)$). Не разрешается использоваться функции Ellipsoidal Toolbox для построения проекции эллипсоида на плоскость, построения внутренней или внешней оценки геометрической суммы и разности эллипсоидов, для пересечения и объединения эллипсоидов. Изобразить полученные эллипсоидальные оценки следующими способами:

1. В проекции на двумерную статическую плоскость, заданную векторами (l_1, l_2) размерности n.
2. В проекции на двумерную динамическую плоскость, заданную векторами $(l_1(t), l_2(t))$.
3. Проекцию трубки достижимости на плоскость (l_1, l_2) во времени $t \in [t_0, t_1]$.
4. Проекцию трубки достижимости на плоскость $(l_1(t), l_2(t))$ во времени $t \in [t_0, t_1]$.

Перебор направлений, в которых строится оценка, следует производить не по всему пространству, а в той плоскости, на которую строится проекция множества достижимости. Предусмотреть возможность изображения пересечения (объединения) некоторого количества оценок, взятых в различных направлениях, а также вывод отдельных оценок в одном выбранном направлении. Графический интерфейс программы можно не делать. Все входные данные и параметры должны задаваться в одном файле, а не во всей программе. В программе должны корректно обрабатываться ситуации, когда из-за фазовых ограничений трубки «схлопываются».

Требования к отчету:

1. В отчете все формулы, по которым строится оценка, должны быть выведены от начала и до конца.

2. В качестве примера рассмотреть колебательную систему из варианта задания прошлого семестра. Параметры подобраться самостоятельно. Сравнить трубки достижимости при наличии фазового ограничения и без него. Проиллюстрировать разные случаи.

2 Теоретическая часть

3 Необходимые определения

Определение 1. *Множество* $\{x \in \mathbb{R}^n | \langle x-q, Q^{-1}(x-q)\rangle \leqslant 1\}$*, где* Q *— симметрическая, положительно определенная матрица, называется эллипсоидом с центром в точке* $q \in \mathbb{R}^n$ *и матрицей* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Обозначение:* $\mathcal{E}(q, Q)$*.*

Определение 2. *Опорной функцией множества* $M \subset \mathbb{R}^n$ *называется* $\rho(l|M) = \sup\limits_{x\in M}\langle l, x\rangle$*.*

Опорной функцией эллипсоида $\mathcal{E}(q, Q)$ является $\rho(l|\mathcal{E}(q,Q)) = \langle l, q\rangle + \langle l, Ql\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Определение 3. *Полурасстоянием Хаусдорфа между двумя множествами* A *и* B *называется*

$$h_+(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subseteq B + B_\varepsilon(0)\},$$

$$h_-(A, B) = h_+(B, A).$$

Определение 4. *Расстоянием Хаусдорфа между двумя множествами* A *и* B *называют*

$$h(A, B) = \max\{h_+, h_-\}.$$

Определение 5. *Суммой по Минковскому множеств* A *и* B *называется такое множество* S*, что*

$$S = \cup_{a\in A, b\in B}\{a + b\}.$$

Определение 6. *Геометрической разностью двух множеств* $A \in \mathbb{R}^n$ *и* $B \in \mathbb{R}^n$ *называется множество всех векторов* $A - B = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall b \in B x + b \in A\}$*.*

Опорная функция геометрической разности множеств равна овыпукленной разности опорных функций исходных множеств. Овыпукленная функция — максимальная функция среди всех выпуклых функций, меньших исходной:

$$\rho(l|A - B) = conv(\rho(l|A) - \rho(l|B)).$$

3.1 Внутренняя оценка геометрической разности двух эллипсоидов

Рассмотрим геометрическую разность эллипсоидов $\mathcal{E}_1(q_1, Q_1) - \mathcal{E}_2(q_2, Q_2)$. Она может в общем случае не являться эллипсоидом. Однако, как и в случае разности, можно построить эллипсоид, явлюящийся внутренней аппроксимацией разности. Параметры эллипсоида внутренней оценки $\mathcal{E}_-(q, Q)$ определяются по формулам:

$$q = q_1 - q_2,$$

$$Q = (p_1 - p_2)\left(\frac{1}{p_1}Q_1 - \frac{1}{p_2}Q_2\right),$$

где $p_1 p_2 > 0$. При этом, касание по направлению l будет происходить при $p_i = \langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}}$.

4 Метод решения задачи

Определение 7. *Множеством достижимости достижимости в момент времени t называется множество $\mathcal{X}[t]$ всех точек x, в которые можно попасть из начального множества $\mathcal{X}_0$ в момент времени t при выборе какого-либо допустимого управления u:*

$$\mathcal{X} = \{x | \exists u(s) : t_0 \leqslant s \leqslant t \Rightarrow x(t, t_0, x_0) = x\}.$$

Определение 8. *Трубкой достижимости называется множество $X[\cdot] = \mathcal{X}[\cdot, t_0, \mathcal{X}_)]$.*

Определение 9. *Множеством достижимости при фазовых ограничениях в момент времени t $Y(t)$ и начальном положении $(t_0, \mathcal{X}_0)$ называется множество*

$$\mathcal{X}[t] = \{x | \exists u(s) : t_0 \leqslant s \leqslant t \Rightarrow x(t, t_0, x_0) = x \in Y(t)\}.$$

Аналогично для трубки достижимости при фазовых ограничениях.

Для решения задачи воспользуемся эволюционным уравнением:

$$\lim_{\sigma \leftarrow 0} \frac{1}{\sigma} h \left\{\mathcal{X}[t+\sigma], (\mathcal{X}[t] + \sigma B(t)\mathcal{P}[t]) \cap \mathcal{Y}[t+\sigma]\right\} = 0.$$

Предполагая непрерывность по Хаусдорфу множеств $\mathcal{X}[t]$ и $\mathcal{Y}[t]$, перепишем выражения для этих множеств для момента времени $t + \sigma$ в следующем виде:

$$\mathcal{X}[t+\sigma] = \mathcal{X}[t] + \sigma A(t)\mathcal{X}[t] + \sigma B(t)\mathcal{P}[t],$$

Таким образом, исходное эволюционное уравнение эквивалентно следующему уравнению:

$$\mathcal{X}[t+\sigma] = ((I + \sigma A(t))\mathcal{X}[t] + \sigma B(t)\mathcal{P}[t]) \cap \mathcal{Y}[t+\sigma] + o(\sigma).$$

Будем строить внутренние эллипсоидальные оценки множества достижимости. Пусть эллипсоид $\mathcal{E}_-(q_-[t], Q_-[t])$ — внутренняя эллипсоиадальная аппроксимация множества достижимости в момент времени t без фазовых ограничений. Тогда для момента времени $t + \sigma$ справедливо:

$$\mathcal{E}_-(q_-[t+\sigma], Q_-[t+\sigma]) = ((I + \sigma A(t))\mathcal{E}_-(q_-[t], Q_-[t]) + \sigma B(t)\mathcal{E}_-(p(t), P(t)) =$$

$$= \mathcal{E}_-((I+\sigma A(t))q_-[t], (I+\sigma A(t))Q_-[t](I+\sigma A(t))^T) + \mathcal{E}_-(\sigma B(t)p(t), \sigma B(t)P(t)\sigma B^T(t)) =$$

$$= \mathcal{E}_-\left(q_1 + q_2, S_1 Q_1^{\frac{1}{2}} + S_2 Q_2^{\frac{1}{2}}\right),$$

где

$$q_1 + q_2 = (I + \sigma A(t))q_-[t] + \sigma B(t)p(t),$$

$$Q_1 = I + \sigma A(t))Q_-[t](I + \sigma A(t))^T,$$

$$Q_2 = \sigma B(t)P(t)\sigma B^T(t),$$

а матрицы S_1 и S_2 удовлетворяют следующим свойствам:

$$S_i S_i^T = S_i^T S_i = I, i = 1, 2.$$

Данная формула дает возможность итерационного построения внутренней эллипсоидальной оценки множества достижимости — с некоторым шагом σ будем строить множество достижимости до тех пор, пока не достигнем момента времени t_1, а за начальное значение $\mathcal{X}[t]$ возьмем эллипсоид $\mathcal{E}(x_0, X_0)$.

Для того, чтобы выполнялись фазовые ограничения $\mathcal{Y}(t)$ на множество достижимости, будем на каждом шаге t полученную оценку пересекать с множеством $\mathcal{Y}(t)$ и строить эллипсоидальную оценку пересечения двух множеств средствами Ellipsoidal Toolbox, а именно с помощью функции intersection_ia.

Для того, чтобы касание эллипсоидальной оценки происходило по направлению $l, (l \in \mathbb{R}^n, ||l|| = 1)$, нужно чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$S_1 Q_1^{\frac{1}{2}} l = \lambda S_2 Q_2^{\frac{1}{2}} l, \lambda > 0.$$

Поэтому, будем брать матрицу S_1 равную единичной, а матрицу S_2 находить из этого соотношения. Для этого воспользуемся функцией ell_valign, входящей в состав Ellipsoidal Toolbox.

Для более точного построения множества достижимости будем проводить перебор направлений, вдоль которых происходит касание эллипсоидальной оценки и множества. В силу того, что по условию задачи необходимо построить проекции трубки достижимости и множества достижимости на некоторую плоскость, порожденную векторами l_1 и l_2, то перебор направлений будем производить по единичной сфере, принадлежащей этой плоскости, а в соотношении для матриц S_1 и S_2 в качестве матриц Q_1 и Q_2 будем использовать проекции конфигурационных матриц эллипсоиадальных оценок, полученных из эволюционного уравнения. После этого полученные оценки будем объединять.

Проекция матрицы Q и вектора q на плоскость (l_1, l_2) вычисляются по следующим формулам:

$$P = (l_1, l_2),$$
$$\widehat{Q} = P'QP,$$
$$\widehat{q} = P'q.$$

5 Вывод уравнений движений системы из примера

Построим уравнения движения маятника. Для этого возьмем за обобщенные координаты углы между вертикалью и положением первого и второго стержня и обозначим их за φ_1 и φ_2. Потенциальная энергия системы выражается как сумма потенциальных энергий первого и второго шариков:

$$\Pi = -mgl_1 \cos\varphi_1 - mg(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2).$$

Если выразить линейные скорости шариков через их угловые скорости, то получим, что

$$v_1 = l_1\dot{\varphi}_1,$$
$$v_2 = v_1 + l_2\dot{\varphi}_2 = l_1\dot{\varphi}_1 + l_2\dot{\varphi}_2.$$

Используя эти соотношения, построим выражение для кинетической энергии:

$$K = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m}{2}\left(2l_1^2\dot{\varphi}_1{}^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + l_2^2\dot{\varphi}_2{}^2\right).$$

Выпишем лагранжиан системы и с помощью уравнений Лагранжа второго рода получим уравнения движения системы:

$$L = K - \Pi = \frac{m}{2}\left(2l_1^2\dot{\varphi}_1{}^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + l_2^2\dot{\varphi}_2{}^2\right) + mg(2l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2).$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0,$$

где за q_i обозначены обобщенные координаты (в нашем случае — φ_1 и φ_2).

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = 2ml_1^2\dot{\varphi}_1 + ml_1l_2\dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = ml_2^2\dot{\varphi}_1 + ml_1l_2\dot{\varphi}_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -2mgl_1 \sin\varphi_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -mgl_2 \sin\varphi_2.$$

Окончательно получим:

$$\begin{cases} 2ml_1^2\ddot{\varphi}_1 + ml_1l_2\ddot{\varphi}_2 + 2mgl_1\sin\varphi_1 = 0, \\ ml_2\ddot{\varphi}_2 + ml_1l_2\ddot{\varphi}_1 + mgl_2\sin\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Сократим на m оба уравнения и на l_1 и l_2 первое и второе уравнения соответственно, затем вычитая одно уравнение из другого получим два уравнения, в которые входят только $\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\begin{cases} l_1\ddot{\varphi}_1 + g(2\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) = 0, \\ l_2\ddot{\varphi}_2 - g(2\sin\varphi_1 - 2\sin\varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Приведем систему к нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \psi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = -g\dfrac{2\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2}{l_1}, \\ \dot{\psi}_2 = g\dfrac{2\sin\varphi_1 - 2\sin\varphi_2}{l_2}. \end{cases}$$

В силу того, что по условию задачи маятник совершает малые колебания, можно заменить $sin\varphi$ на φ. Сделав это преобразование, получим окончательный вид системы, которая будет являться линейной и стационарной:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \psi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = -g\dfrac{2\varphi_1 - \varphi_2}{l_1}, \\ \dot{\psi}_2 = g\dfrac{2\varphi_1 - 2\varphi_2}{l_2}. \end{cases}$$

5.1 Некоторые сведения из теории управления

Для начала запишем уравнения системы с использованием управления. Так как управляющее устройство прикреплено только ко второму шарику, то уравнения движения системы с управлением примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \psi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = -g\dfrac{2\varphi_1 - \varphi_2}{l_1}, \\ \dot{\psi}_2 = g\dfrac{2\varphi_1 - 2\varphi_2}{l_2} + u. \end{cases}$$

6 Примеры работы программы

6.1 Пример 1

В данной системе матрицы A, B, P, X_0 являются единичными матрицам в $\mathbb{R}^3$, векторы p, x_0 — нулевыми. Диапазон времени: $t_0 = 0$, $t_1 = 3$, фазовые ограничения отсутствуют. За статичные направления l_1 и l_2 взяты векторы $[1, 0, 0]$ и $[0, 1, 0]$, за динамичные — $l_1(t) = [\sin(t); \cos(t); t], l_2(t) = [\cos(t); \sin(t); t]$. %endcenter

6.2 Пример 2

В данной системе:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{pmatrix}$$

$$x_0 = [0, 0, 0]^T, p = [0, 0, 0]^T, t_0 = 0, t_1 = 3.$$

В данной системе есть фазовые ограничения $x_1 \leqslant 3$.

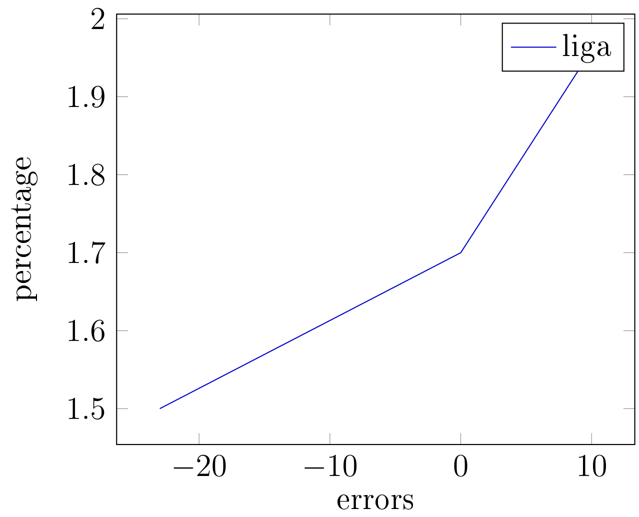
6.3 Пример 3

Рассмотрим колебательную систему из задания прошлого семестра. В этой системе:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\frac{g}{l_1} & \frac{g}{l_1} & 0 & 0 \\ 2\frac{g}{l_2} & -2\frac{g}{l_2} & 0 & 0, \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1, \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1, \end{pmatrix}$$

$$x_0 = [0.1, 0.3, 1, 1]^T, p = [0, 0, 0, 0]^T, t_0 = 0, t_1 = 3, l_1 = 2, l_2 = 1.$$

На систему наложены фазовые ограничения $|x_1| \leqslant y_1$, $y_1 = 1$.



Проекция множества достижимости на статическую плоскость (l_1, l_2).

Проекция трубки достижимости на статическую плоскость (l_1, l_2).

Проекция трубки достижимости на статическую плоскость (l_1, l_2).

Из рисунков трубки достижимости видно, что фазовые ограничения выполняются.

7 Библиография

Список литературы

[1] *Голубев Ю. Ф.* Основы теоретической механики: Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн. — М.:Изд-во МГУ, 2000.

[2] *P. Gagarinov, Alex A. Kurzhanskiy* Ellipsoial toolbox: ver. 2.0 beta 1, 2013.