eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ZIENTZIA ETA TEKNOLOGIA FAKULTATEA

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

1. Ordenagailuaren aritmetika eta erroreen analisia

Jon Asier Bárcena-Petisco (Euskal Herriko Unibertsitatea) - Zenbakizko Metodoak I irakasgaia

Gai honetan ikusiko ditugun edukiak

- Sistema bitarra.
- Puntu higikorreko zenbakiak.
- Ordenagailuak egiten dituzten errore ohikoenak.
- Taylorren polinomioak eta hondarraren forma integrala.
- Zenbaki garrantzitsuen kalkuluak: e, π, φ (urrezko zenbakia), $\ln(2)$.

1.1. Sistema bitarra.

Zenbaki-sistema bitarra

Definizioa

Zenbaki **sistema bitarra** 2 oinarria erabiltzen duen zenbatzeko sistema da. Hau da, sistema bitarrean digitu bakarrak $\{0, 1\}$ dira, eta $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-r} \in \{0, 1\}$ badugu,

$$(a_k a_{k-1} \ldots a_0\ ' a_{-1} \ldots a_{-r})_2 := \sum_{i=-r}^{k} a_i 2^i.$$

Era berean, $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0, a_{-1}, \ldots \in \{0, 1\}$ badugu:

$$(a_k a_{k-1} \ldots a_0\ ' a_{-1} \ldots)_2 := \sum_{i=-\infty}^{k} a_i 2^i.$$

Bitarra erabiltzen dugula azpimarratzeko parentesiak eta 2 jarriko dugu azpiindize bezala.

Oharra

Serie infinitua erabiltzen da zenbaki dezimal bitar periodikoa edo irrazionala bada. Gainera, argi dago serie infinitua beti dela konbergentea; hortaz, zenbaki bat adierazten du.

Zenbaki bitarrak: adibideak

Adibideak

- Sistema bitarrean 2 zenbakia $(10)_2$ bezala adierazten da.
- $(1001)_2 = 9$ dugu.
- $(0'1)_2 = 0'5$ dugu.
- $(1+1)_2 = (10)_2$ dugu.

Zenbaki bitarrak: adibideak

Adibideak

- Sistema bitarrean 2 zenbakia $(10)_2$ bezala adierazten da.
- $(1001)_2 = 9$ dugu.
- $(0'1)_2 = 0'5$ dugu.
- $(1+1)_2 = (10)_2$ dugu.
- $(0'\overline{01})_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$.
- $(0'\overline{1})_2 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1 = (1)_2$ dugu; hortaz, sistema dezimalean bezala, badaude zenbaki batzuk adierazpen bat baino gehiagorekin.

Zenbaki errealak eta sistema bitarra

Proposizioa

Zenbaki erreal guztiek adierazpen bitarra dute.

Frogaren laburpena.

1. Hasteko, $\mathbb{N}$-ko zenbakiak. Erreaz froga daiteke n adierazpen bitarra badu, $n+1$ ere duela.

Zenbaki errealak eta sistema bitarra

Proposizioa

Zenbaki erreal guztiek adierazpen bitarra dute.

Frogaren laburpena.

1. Hasteko, $\mathbb{N}$-ko zenbakiak. Erreaz froga daiteke n adierazpen bitarra badu, $n+1$ ere duela.
2. Honekin $\mathbb{Z}$-ko zenbakiak dutela berehalakoa da.

Zenbaki errealak eta sistema bitarra

Proposizioa

Zenbaki erreal guztiek adierazpen bitarra dute.

Frogaren laburpena.

1. Hasteko, $\mathbb{N}$-ko zenbakiak. Erreaz froga daiteke n adierazpen bitarra badu, $n+1$ ere duela.
2. Honekin $\mathbb{Z}$-ko zenbakiak dutela berehalakoa da.
3. Izan bedi $x \in (0,1)$. Orduan, froga daiteke edozein $n \in \mathbb{N}$ baliorako existitzen dela $k_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ zein $x \in \left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right)$. Hortaz, froga daiteke $k_n/2^n$ adieraz bitarraren lehenengo n digituak, eta $k_{n+1}/2^{n+1}$ aurrekoaren digitu berberak dituela, bukaeran 0 edo 1 hartuz. Adierazpenaren limitea hartuz n infinitura doanean lortzen da x-ren adierazpen bitarra.

Zenbaki errealak eta sistema bitarra

Proposizioa

Zenbaki erreal guztiek adierazpen bitarra dute.

Frogaren laburpena.

1. Hasteko, $\mathbb{N}$-ko zenbakiak. Erreaz froga daiteke n adierazpen bitarra badu, $n+1$ ere duela.
2. Honekin $\mathbb{Z}$-ko zenbakiak dutela berehalakoa da.
3. Izan bedi $x \in (0,1)$. Orduan, froga daiteke edozein $n \in \mathbb{N}$ boliorako existitzen dela $k_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ zein $x \in \left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right)$. Hortaz, froga daiteke $k_n/2^n$ adieraz bitarraren lehenengo n digituak, eta $k_{n+1}/2^{n+1}$ aurrekoaren digitu berberak dituela, bukaeran 0 edo 1 hartuz. Adierazpenaren limitea hartuz n infinitura doanean lortzen da x-ren adierazpen bitarra.
4. Aurreko bi emaitzak aplikatuz, argi geratzen da edozein zenbaki erreal adierazpen bitarra duela.

□

Zenbaki bitarren abantailak

- Batuketak askoz errazagoak dira, nahikoa da lau erregela ikastea.
- Biderketak ere oso errazak dira, lau erregela ikasi behar baitira.
- Bit-ak gordetzea oso sinplea da, nahikoa baita led moduko bat piztuta edo itzalita uztea. Praktikan, horrek esan nahi du nahikoa dela makinak bi “boltaje” maila ezberdinekin soilik egin behar dutela lan.

Zenbaki bitarren desabantailak

- Ez gaude ohituta sistema bitarrekin lan egitera. Esaten badigute zenbaki bat sistema dezimalean, askoz errazago identifikatuko dugu bitarrean baino.
- Informazioa sistema dezimalean ematen ohi da eta sistema bitarrera pasatu behar dugu.
- Sistema dezimalean baino zenbaki gutxiago idatz daitezke zenbaki dezimal zehatz bat bezala.
- Zenbakiak luzeagoak dira sistema bitarrean.

Bitarretik dezimalera: 2 zenbakiaren berreturak

Era sinple bat da kontuan izatea $(10^k)_2 = 2^k$ eta batuketak egitea; hots, 2 **zenbakiaren berreturen** erabilera:

Adibidea

- $(1001)_2 = (10^3)_2 + (10^0)_2 = 2^3 + 2^0 = 8 + 1 = 9$.
- $(1001011)_2 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 64 + 8 + 2 + 1 = 75$.

Bitarretik dezimalera: 2 zenbakiaren berreturak

Era sinple bat da kontuan izatea $(10^k)_2 = 2^k$ eta batuketak egitea; hots, 2 **zenbakiaren berreturen** erabilera:

Adibidea

- $(1001)_2 = (10^3)_2 + (10^0)_2 = 2^3 + 2^0 = 8 + 1 = 9.$
- $(1001011)_2 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 64 + 8 + 2 + 1 = 75.$
- $(0'0101)_2 = 2^{-2} + 2^{-4} = 0'25 + 0'0625 = 0'3125.$
- $(101'01)_2 = 2^2 + 2^0 + 2^{-2} = 4 + 1 + 0'25 = 5'25.$

Bitarretik dezimalera (ii): distribuzio propietatea

Ikus dezagun nola lortu zenbakia 2-ren jakin gabe. Horretarako, zati osoan eta hondarrean **distribuzio propietatea** erabiliko dugu:

Adibidea

- $(1101)_2 = (1 + 10(10(1 + 10)))_2 = 1 + 2(2(1 + 2)) = 1 + 2(2(3)) = 13.$
- Hona hemen zenbaki handiago bat:

$$\begin{aligned}(1001011)_2 &= (1 + 10(1 + 10(0 + 10(1 + 10(0 + 10(0 + 10))))))_2 \\ &= 1 + 2(1 + 2(2(1 + 2(2(2))))) \\ &= 1 + 2(1 + 4(1 + 8)) = 1 + 2(1 + 36) = 1 + 74 = 75.\end{aligned}$$

Bitarretik dezimalera (ii): distribuzio propietatea

Ikus dezagun nola lortu zenbakia 2-ren jakin gabe. Horretarako, zati osoan eta hondarrean **distribuzio propietatea** erabiliko dugu:

Adibidea

- $(1101)_2 = (1+10(10(1+10)))_2 = 1+2(2(1+2)) = 1+2(2(3)) = 13.$
- Hona hemen zenbaki handiago bat:

$$\begin{aligned}(1001011)_2 &= (1+10(1+10(0+10(1+10(0+10(0+10))))))_2\\ &= 1+2(1+2(2(1+2(2(2)))))\\ &= 1+2(1+4(1+8)) = 1+2(1+36) = 1+74 = 75.\end{aligned}$$

- Antzera egin daiteke zatikizko atalarekin:

$$(0'0101)_2 = 2^{-1}(0+2^{-1}(1+2^{-1}(0+2^{-1}))) = 0'5\cdot(0'5\cdot(1'25)) = 0'3125.$$

- $(1101'0101)_2 = (1101)_2 + (0'0101) = 13 + 0'3125 = 13'3125.$

Bitarretik dezimalera zenbaki osoen kasua

Bitarretik dezimalera pasatzeko metodoa zenbaki oso positiboen kasuan distribuzioa erabiliz.

Sarrera: $(a_k a_{k-1} \dots a_0)_2 \in \mathbb{N}$ zenbakia, non $a_i \in \{0, 1\}$.

1: $a := 0$
2: **for** $i := k, ..., 0$ **do**
3: $\quad a := 2 \cdot a + a_i$
4: **end for**

Irteera: a

Metodoaren zuzentasunaren frogapena

Proposizioa

Izan bedi $b = (b_k b_{k-1} \ldots b_0)_2 \in \mathbb{N}$ *zenbakia. Orduan, aurreko metodoaren irteera* b *da.*

Frogapena.

Indukzioz froga daiteke n iterazio egin eta gero:

$$a = \sum_{j=k+1-n}^{k} 2^{j-k-1+n} b_j$$

dela. Totalean $k+1$ iterazio daudenez, aurreko metodoa aplikatu ostean:

$$a = \sum_{j=0}^{k} 2^j b_j = b$$

dugu, emaitza frogatuz. □

Bitarretik dezimalera $(0, 1)$ zenbakien kasua

Bitarretik dezimalera pasatzeko metodoa $(0, 1)$ zenbakien kasuan distribuzioa erabiliz.

Sarrera: $0'a_{-1}a_{-2}\dots a_{-k}$ zenbakia, non $a_i \in \{0, 1\}$:
1: $a := 0$
2: **for** $i := -k, \dots, -1$ **do**
3: $\quad a := 2^{-1} \cdot (a + a_i)$
4: **end for**
Irteera: a

Oharra

Metodo hau soilik aplika daiteke digitu kopurua finitua denean. Infinitua denean, nahi dugun zehaztasun arabera trunkatu edo borobildu behar dugu. Metodo honen zuzentasunaren frogapena aurrekoaren analogoa da.

Dezimaletik bitarrera: zenbaki osoen kasua

Dezimala bitarrera pasatzeko **zatiketaren metodoa** aplika daiteke. Metodoa behin eta berriz 2-gatik zatitzea eta hondarrak geratzean datza:

Adibidea

- $13 = 1 + 2(6) = 1 + 2(2(3)) = 1 + 2(2(1 + 2)) = (1 + 10(10(1 + 10)))_2 = (1101)_2.$
- $35 = 1 + 2(17) = 1 + 2(1 + 2(8)) = (1 + 10(1 + 10^4))_2 = (100011)_2.$

Dezimaletik bitarrera: zenbaki osoen kasua

Dezimala bitarrera pasatzeko **zatiketaren metodoa** aplika daiteke. Metodoa behin eta berriz 2-gatik zatitzea eta hondarrak geratzean datza:

Adibidea

- $13 = 1 + 2(6) = 1 + 2(2(3)) = 1 + 2(2(1+2)) = (1 + 10(10(1+10)))_2 = (1101)_2.$
- $35 = 1 + 2(17) = 1 + 2(1 + 2(8)) = (1 + 10(1 + 10^4))_2 = (100011)_2.$

Metodo honekin froga daiteke edozein zenbaki oso dezimal bitar bezala adieraz daitekeela.

Zatiketaren metodoa: pseudokodea

Zatiketaren metodoa

Sarrera: $n \in \mathbb{N}$ zenbakia.

$i := -1$
while $n \geq 1$ **do**
  $i := i + 1$
  if $n - 2\lfloor n/2 \rfloor = 1$ **then** $a_i := 1$
  else $a_i := 0$
  end if
  $n := \lfloor n/2 \rfloor$,
end while

Irteera: $(a_i a_{i-1} \ldots a_0)_2$.

Zatiduraren metodoaren zuzentasuna.

Proposizioa

Izan bedi $n = (b_k b_{k-1} \dots b_0)_2 \in \mathbb{N}$. Orduan, metodoaren irteera $(b_k b_{k-1} \dots b_0)_2$ da.

Frogapena.

Izan bedi n_j zenbakia n-k hartzen duen balioa begiztak j iterazio egin eta gero. Orduan, indukzioz froga daiteke:

$$n_j = (b_k \dots b_j)_2,$$

eta

$$a_i = b_i \quad \forall i = 0, \dots, j-1.$$

Hortaz, erraz froga daiteke totalean $k+1$ iterazio egiten duela eta irteera $(b_k b_{k-1} \dots b_0)_2$ dela. $\square$

Dezimaletik bitarrera: zatikizko atala

Balio dezimala lortzeko **biderkaduraren metodoa** aplika daiteke zatikizko atalarekin. Metodoa da behin eta berriz 2-gatik biderkatzea eta zati osoarekin geratzean datza. Adibidez,

$$\begin{aligned} 0'375 &= 2^{-1}(0 + 0'75) = 2^{-1}(2^{-1}(1 + 0.5)) \\ &= 2^{-1}(2^{-1}(1 + 2^{-1})) = (10^{-1}(10^{-1}(1 + 10^{-1})))_2 \\ &= (0'011)_2. \end{aligned}$$

Biderkaduraren metodoa: pseudokodea

Biderkaduraren metodoa

Sarrera: $x \in [0, 1)$ zenbakia, $k \in \mathbb{N}$

for $i := 1, \ldots, k$ **do**

  if $2x \geq 1$ **then** $a_{-i} := 1$, $x := 2x - 1$

  else $a_{-i} := 0$, $x := 2x$

  end if

end for

Irteera: $(0'a_{-1}a_{-2} \ldots a_{-k})_2$.

Biderkaduraren metodoa: zuzentasuna

Proposizioa

Izen bedi $x \in [0,1)$ *zein* $x = (0'b_{-1}b_{-2}\ldots)_2$ *zein* $\forall N \in \mathbb{N}$ *existitzen da* $n \geq N$ *zein* $b_{-n} = 0$*. Orduan, biderkaduraren metodoaren irteera* k *iterazio aplikatzen dugunean* $(0'b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-k})_2$ *da.*

Frogapena zatiduraren metodoaren zuzentasunaren frogapenaren analogoa da.

Biderkaduraren metodoa: zuzentasuna

Proposizioa

Izen bedi $x \in [0,1)$ *zein* $x = (0'b_{-1}b_{-2}\ldots)_2$ *zein* $\forall N \in \mathbb{N}$ *existitzen da* $n \geq N$ *zein* $b_{-n} = 0$*. Orduan, biderkaduraren metodoaren irteera* k *iterazio aplikatzen dugunean* $(0'b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-k})_2$ *da.*

Frogapena zatiduraren metodoaren zuzentasunaren frogapenaren analogoa da.

Oharra

Beharrezkoa da "zein $\forall N \in \mathbb{N}$ existitzen da $n \geq N$ zein $b_n = 0$" hipotesia 1 periodikoko adierazpena ekiditezko, algoritmoak 0 periodikoko adierazpena lehenesten baitu.

Ordenagailuen kalkuluak: dezimal periodikoak

Ordenagailuen munduan, kalkulu bitarra egiteko orduan, zenbaki periodikoak ez dira existitzen. Ordenagailuek memento batetik aurrera biribiltze bat egiten dute eta dezimalak ez dute kontsideratzen. Hau da, biderkaduraren metodoa aplikatzean borobiltze edo trunkatzen da zifra batetik aurrera; adibidez, $0'6$ bitarrera pasatzeko.

Dezimaletik biterrera

Oharra

Zenbaki arrazional bat dugunean, alde batetik zati erreala aldatu behar dugu, eta beste alde batetik zati dezimala. Adibidez,

$$35'375 = 35 + 0'375 = (100011)_2 + (0'011)_2 = (10011'011)_2.$$

Dezimaletik biterrera

Oharra

Zenbaki arrazional bat dugunean, alde batetik zati erreala aldatu behar dugu, eta beste alde batetik zati dezimala. Adibidez,

$$35'375 = 35 + 0'375 = (100011)_2 + (0'011)_2 = (10011'011)_2.$$

Zatiketa eta biderkaduraren metodoekin froga daiteke edozein zenbaki dezimal bitarrean adieraz daitekeela.

Metodoen algoritmoa edozein oinarritan

Ikusi ditugun algoritmoak edozein a oinarritik edozein b oinarrira pasatzeko erabil daitezke. Ohartu algoritmo batzuk eskatzen dutela eragiketak egitea a oinarrian eta beste batzuk b oinarrian. Hemen, adibidez, kalkuluak sistema dezimalean egiteko formulatu ditugu algoritmoak, baina ere bertsio baliokidea dute kalkuluak sistema bitarrean egiteko.

1.2. Zenbakien kodifikazioa ordenagailuetan.

Ordenagailuen kalkuluak eta bitarra

Ordenagailu programa gehienek kalkuluak bitarretan egiten dute. Orokorrean, erabiltzaileak zenbaki bat sartzen du sistema dezimalean, ordenagailuak bitarrera pasatzen du, kontuak egiten ditu, emaitza dezimalera pasatzen du, eta zenbaki hori itzultzen du. Sistema batetik bestera pasatzera borobiltze erroreak egin daitezke.

Zenbakiak eta notazio zientifikoa

Ordenagailuak **notazio zientifikoa** erabiltzen ohi dute. Hots, zenbakiak adierazten ditu $\pm[1,10)$ tartean bider 10^k motako berreketa bat.

Adibidea

- $12456 = 1'2345 \cdot 10^4$,
- $-0'0456 = -4'56 \cdot 10^{-2}$,
- $(0'0011101)_2 = (1'1101 \cdot 10^{-3})_2$.

Zenbakiak eta notazio zientifikoa

Ordenagailuak **notazio zientifikoa** erabiltzen ohi dute. Hots, zenbakiak adierazten ditu $\pm[1, 10)$ tartean bider 10^k motako berreketa bat.

Adibidea

- $12456 = 1'2345 \cdot 10^4$,
- $-0'0456 = -4'56 \cdot 10^{-2}$,
- $(0'0011101)_2 = (1'1101 \cdot 10^{-3})_2$.

Notazio zientifikoan dauden digituei **zifra esanguratsuak** deritzogu. Matlabek, kontrako agindurik ematen ez badiozu (adibidez, **format long**) emaitzak sistema dezimaleko notazio zientifikoan erakutsiko dizu, 5 digitu esanguratsuekin.

Notazio zientifikoa eta bukaerako 0-ak

Notazio zientifikoa erabiltzen dugunean bukaerako 0-ak esanahi bat dute. Adibidez, ez da berdina $1'23$ edo $1'2300$. Lehengoa esan nahi du biribilketa bat egin dugula hirugarren dezimala eta gerokoa kentzeko; hortaz, esaten ari gara $[1'225, 1'235]$ tarteko balio batekin lan egiten ari garela. Aldiz, $1'2300$ balioa esan nahi du $[1'22995, 1'23005]$ tarteko balio batekin lan egiten ari garela. Hortaz, notazio zientifikoan lan egiten ari garenean bukaerako 0-ak ez dira erredundanteak.

Puntu higikorreko zenbakiak

Programa informatikoek zenbakiak sistema bitarrean gordetzen dute, eta bit kopuru finko bat erabiltzen dute:

- Lehenengo bit-a **ikurrerako** erabiltzen da.
- Hurrengoak zenbakiaren zifra esanguratsuak adierazteko, **mantisa** deitzen dena.
- Azkenak, **berretzailea** adierazteko erabiltzen dira. Gogoratu digitu horietatik bat erabiltzen dela berretzailearen ikurra adierazteko.

Matlab eta puntu higikorreko zenbakiak

Matlaben kasuan, defektuz zenbakiek 64 digitu dute, 52 mantisarako eta 11 berretzailerako (1 ikurra, 10 modulua) (ikusi `https://es.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/floating-point-numbers.html`).

Edozein zenbaki gordetzeko, zenbaki horretara biribiltzen du gordetzeko. Moduluan hori baino handiagoa bada, **Inf** edo -**Inf** bezala adierazten du.

Matlabek beste formatuak ditu erabili daitekeenak.

Puntu higikorreko zenbakia eta binarioa erabiltzearen ondorioa

Puntu higikorra erabiltzeagatik, Matlabek ez ditu emaitza zehatzak ematen:

- $1 - 3 * (4/3 - 1) \to 2.2204e - 16$
- $1 - (0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1) \to 1.1102e - 16$
- $(2^{53} + 1) - 2^{53} \to 0$
- $\sin(pi) \to 1.2246e - 16$

Errore mota sinpleenak

- **Biribiltze erroreak:** biribiltzeak erabiltzean gertatzen diren erroreak, adibidez, aurreko kasu guztiak. Ezer esaten ez bada, biribiltzeak dira zenbaki hurbilenera, baina ere izan daitezke trunkaketa (esanguratsu ez diren digituak baztertzea).
- **Ezeztapen erroreak:** biribiltze errorearen kasu berezi bat zeinetan kenketa bat dagoen bi zenbaki handien artean. Adibidez, aurreko kasuen artean hirugarren kasua.
- **Diskretizazio erroreak:** biribiltze errorearen kasu berezi bat. Gertatzen dira ordenagailuak zenbaki kopuru finituarekin lan egiten duelako; adibidez, azken bi kasuak.

Errore absolutua eta errore erlatiboa

Definizioa

Izan bedi $N \in \mathbb{N}$ eta $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$. $x \in \mathbb{R}^N$ balioak $\overline{x}$ hurbiltzen badu, **errore absolutua** $\|x - \overline{x}\|$ balioa da. Gainera, $\overline{x} \neq 0$ bada, **errore erlatiboa** $\frac{\|x-\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|}$ da.

$N = 1$ denean norma balio absolutuagatik ordezka daiteke.

Errore absolutua eta errore erlatiboa

Definizioa

Izan bedi $N \in \mathbb{N}$ eta $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$. $x \in \mathbb{R}^N$ balioak $\overline{x}$ hurbiltzen badu, **errore absolutua** $\|x - \overline{x}\|$ balioa da. Gainera, $\overline{x} \neq 0$ bada, **errore erlatiboa** $\frac{\|x-\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|}$ da.

$N = 1$ denean norma balio absolutuagatik ordezka daiteke.

Adibidea

10^6 erabiltzen badugu 1000067 hurbiltzeko, errore absolutua 67 da, baina errore erlatiboa $6'6996 \cdot 10^{-5}$ inguru da, oso txikia.

1.3. Funtzio elementalak ordenagailuaren bitartez ebaluatzeko erak.

Ordenagailuak zenbakiak eta funtzioak kalkulatzeko ideia nagusiak

Zenbaki arrazionalak batzen, biderkatzen eta zatitzen dakigunez, kalkulatu nahi ditugun zenbakiak, adibidez e eta π, nahiko da zenbaki arrazionalen serie bat bezala adieraztea haien balioen hurbilpenen bat lortzeko.

Era berean, polinomioak ebaluatzen dakigunez, funtzio elementalen (trigonometriak, esponentzialak, logaritmoa eta arrazionalak) hurbilpen bat lortzeko, polinomioen bidez hurbilduko ditugu.

Definizio batzuk

Definizioak

Izan bedi $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$ eta $a \in I$.

- **Taylorren n. ordenako polinomioa** a**-n zentratuta** honako polinomioa da:

$$T_{n,a}[f](x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

- **Taylorren n. ordenako hondarra** a**-n zentratuta** honako funtzioa da:

$$R_{n,a}[f](x) = f(x) - T_{n,a}[f](x).$$

Gainera, $f \in C^{\infty}(I)$ bada, **Taylorren seriea** a**-n zentratuta**, $T_a[f]$ denotatzen dena, hurrengo berreduren seriea da:

$$T_a[f](x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Taylorren polinomioen aplikazioak

- Funtzio elementalen kalkulua: trigonometrikoak, esponentziala, logaritmoa.
- Zenbaki berezien kalkulua: e, π, urrezko zenbakia, $\ln(2)$, etc.

Taylorren seriearen mugak.

- Posible da Taylorren seriea dibergitzea. Adibidez, $\frac{1}{1-x}$ funtzioaren Taylorren seriea $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ da, baina bakarrik konbergitzen du $(-1, 1)$ tartean. Hortaz, tarte horretatik kanpo ez dugu hurbilpenik lortuko. Kasu horretan, komeni da Taylorren seriea beste puntu batean kalkulatzea edo beste trikimailua erabiltzea.

Taylorren seriearen mugak.

- Posible da Taylorren seriea dibergitzea. Adibidez, $\frac{1}{1-x}$ funtzioaren Taylorren seriea $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ da, baina bakarrik konbergitzen du $(-1,1)$ tartean. Hortaz, tarte horretatik kanpo ez dugu hurbilpenik lortuko. Kasu horretan, komeni da Taylorren seriea beste puntu batean kalkulatzea edo beste trikimailua erabiltzea.
- Posible da Taylorren seriea konbergente izatea, baina ez funtziorantz. Adibidez, e^{-1/x^2} Taylorren seriea jatorrian $0=\sum_{i=0}^{\infty} 0 \cdot x^i$ da; hortaz, jatorritik kanpo ez du funtziorantz konbergituko.

Hondarraren forma integrala

Proposizioa (Hondarraren forma integrala)

Izan bedi $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$ *eta* $a \in I$. *Orduan,*

$$R_{n,a}[f](x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x-s)^n ds.$$

Hondarraren forma integrala: frogapena.

Frogapena.

Zatikazko integrazioa behin eta berriro eginez:

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x-s)^n ds &= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1} ds \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \int_a^x \frac{f^{(n-1)}(s)}{(n-2)!}(x-s)^{n-2} ds \\
&= \cdots \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \int_a^x f'(s) ds \\
&= -\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + f(x) \\
&= -T_{n,a}[f](x) + f(x) \\
&= R_{n,a}[f](x),
\end{aligned}$$

emaitza frogatuz. □

e zenbakiaren kalkulua

Esponentzialaren Taylorren seriea erabiliz, e kalkula dezakegu; izan ere, $e = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + R_{n,0}[e^x](1)$, non

$$0 < R_{n,0}[e^x](1) < \frac{e}{(n+1)!}.$$

Estimazio hori honela froga daiteke:

$$R_{n,0}[e^x](1) < \frac{e}{n!} \int_0^1 (1-s)^n ds = \frac{e}{(n+1)!}.$$

Esponentziala funtzioaren kalkulua Taylorren seriea erabiliz

Orokorrean, edozein $x \in \mathbb{R}$ baliorako:

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Taylorren polinomioen eta hondarraren forma integralaren aplikazio gehiago ariketetan ikusiko ditugu.

Esponentzialaren kalkuluak programatzeko aholkuak

Ohartu x^n eta $n!$ kalkulatzea konputazionalki garestia izan daitekeela. Kalkulu asko aurrezteko, gomendagarria da batugaiak segida bat bezala ikustea; hots,

$$t_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Hortaz, erraz froga daiteke hurrengo errepikapen erlazioa:

$$t_n = \frac{x}{n} t_{n-1}.$$

Horrekin, ordenagailuak ez du x^n eta $n!$-ren kalkulua 0-tik hasi behar, eta programak azkarrago funtzionatuko dute.