# Ariketak Zenbakizko Metodoak I 2022/23

Jon Asier Bárcena-Petisco

## 1 Errore kalkulua eta Taylorren serieak

**Ariketa 1.1. Egia edo gezurra.** Esan hurrengo baieztapenak egia edo gezurra diren, eta justifika ezazu erantzuna.

1. Zenbaki irrazional guztiek sistema bitarrean infinitu digitu dezimal ez-nulu dituzte zatikizko atalean.
2. Sistema bitarrean periodikoa ez den zenbaki arrazionala ez da periodikoa sistema dezimalean.
3. Notazio zientifikoa erabiltzen dugunean $3'52$ eta $3'5200$ gauza bera adierazten dute.
4. 20 erabiltzean 15 hurbiltzeko egiten den errore erlatiboa 70 erabiltzen denean 60 hurbiltzeko baino handiago da.
5. Izan bedi $a, b \in \mathbb{R}$ zein $a < b$ eta $f \in C^{n+1}([a,b])$. Orduan,
$$|R_{n,a}[f](b)| \leq \frac{\max_{s\in[a,b]} |f^{(n+1)}(s)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

---

**Ariketa 1.2. Sinuaren hurbilpena Taylorren polinomioen bidez.**

1. Froga ezazu $\sin x = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$ edozein $x \in \mathbb{R}$ baliorako, eta bereziki sinuaren Taylorren seriea jatorrian konbergentea dela.

2. Lor ezazu, MATLAB-en laguntzaz,

$$\frac{\left(\frac{13\pi}{3}\right)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

balioaren maximoaren hurbilpen bat $i \in \mathbb{N}$ balioetarako. Zein $i$-ren balioak maximizatzen du adierazpen hori?

3. Lor ezazu:

$$\left| \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\left(\frac{13\pi}{3} - 4\pi\right)^{2i+1}}{(2i+1)!} \right|$$

balioaren goi-bornea hondarraren forma integrala erabiliz.

4. Aurreko emaitzak erabiliz, zein puntuan hobe da kalkulatzea Taylorren seriea $\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ lortzeko: 0 edo $4\pi$-n? Zergatik?

---

**Ariketa 1.3. Taylorren serieak eta urrezko zenbakia**

1. Kalkulatu $f(x) = \sqrt{x}$ funtzioaren Taylorren seriea $x = 4$ puntuan.

2. Froga ezazu $|R_{n,4}[f](5)| < \frac{1}{4^n}$ edozein $n \geq 1$ baliorako.

3. Aurreko emaitzak erabiliz, sortu algoritmo bat $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ balioaren hurbilpena lortzeko.

4. Inplementa ezazu aurreko algoritmoa MATLAB-en.

---

**Ariketa 1.4. $e$ zenbakiaren irrazionalitatea.** $e$ zenbakiaren irrazionala dela absurdora eramanez frogatuko duzu. Horretarako,

1. Frogatu hurrengo berdintza:

$$n!e = n!T_{n,0}[e^x](1) + n!R_{n,0}[e^x](1).$$

2. Frogatu $n!T_{n,0}[e^x](1)$ zenbaki osoa dela

3. Frogatu $e$ arrazionala bada, eta $n$ behar bezain handia, orduan $n!e$ zenbaki osoa dela.

4. Ondorioztatu $e$ arrazionala bada, $n!R_{n,0}[e^x](1)$ zenbaki osoa dela $n$ behar bezain handia bada.

5. Frogatu $n$ behar bezain handia bada, $R_{n,0}[e^x](1) \in (0,(n!)^{-1})$.

6. Lortu absurdoa aurreko atalak konbinatuz.

---

**Ariketa 1.5.** $\ln(2)$ **balioaren zenbakizko kalkulua.**

1. Eman ezazu $\ln(x)$ Taylorren seriea 1 puntuan.

2. Froga ezazu $|R_{n,1}[\ln](2)| \leq \frac{1}{n+1}$ dela.

3. Erabili aurreko emaitza $T_{n,1}[\ln](2)$ seriea $\ln(2)$ baliora konbergitzen duela frogatzeko.

4. Zenbat da
$$|T_{n+1,1}[\ln](2) - T_{n,1}[\ln](2)|?$$

5. Froga ezazu $|R_{n,1}[\ln](1/2)| < 2^{-n}$ dela.

6. Kalkulatu $\ln(2)$ hurbilpenak MATLAB-en bidez, $T_{n,1}[\ln](2)$ erabiliz.

7. Kontuan izanik $\ln(2) = -\ln(1/2)$ dela, kalkulatu $\ln(2)$ hurbilpenak MATLAB-en bidez, $T_{n,1}[\ln](1/2)$ erabiliz.

8. Zein konbergitzen du azkarrago? Zergatik?

---

**Ariketa 1.6.** $\pi$**-ren kalkulua ordenagailuaren bitartez.**

1. Froga ezazu edozein $n \in \mathbb{N}$ eta $x \neq 1$ baliorako: $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

2. Froga ezazu, aurreko emaitza erabiliz, edozein $x \in (-1,1)$ baliorako:
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^{2i} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

3. Froga ezazu, aurreko emaitza erabiliz:

$$\arctan(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}s^{2n+2}}{1+s^2}ds.$$

4. Froga ezazu $|x| < 1$ bada:

$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}s^{2n+2}}{1+s^2}ds\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

5. Froga ezazu $|x| < 1$ bada:

$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}s^{2n+2}}{1+s^2}ds\right| \geq \frac{|x|^{2n+3}}{4n+6}.$$

6. Froga ezazu edozein $a, b \in \mathbb{R}$ balioetarako:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

**Laguntza:** erabili $\sin(a+b)$ eta $\cos(a+b)$ betetzen duten berdintzak.

7. Aurreko formula erabiliz, froga ezazu $a, b \in \mathbb{R}$ betetzen badute:

$$\arctan(a) + \arctan(b) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

orduan:

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

Hemen, $\arctan := \tan^{-1}_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ kontsideratzen dugu.

8. Froga ezazu

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

9. Aurreko emaitzak erabiliz, eman algoritmo bat $\pi$-ren balioaren hurbilpen bat lortzeko.

10. Inplementa ezazu algoritmo hori MATLAB-en.

# 2 Erroen kalkulua eta optimizazio problemak $\mathbb{R}$-n

**Ariketa 2.1. Regula falsi metodoa.** Ariketa honen helburua bisekzioa baino hobea dirudien zenbakizko metodo bat matematikoki aztertzea da.

1. Irakurri Mijangosen Zenbakizko metodoak MATLAB erabiliz. 2. edizioa [1] liburuan dagoen azalpena regula falsi metodoari buruz (88 eta 89 orrialdeak).

2. Eman regula falsi metodoa inplementatzeko pseudo-kodea.

3. Froga ezazu, liburu horren notazioa erabiliz, $p_n \in (a_n, b_n)$ dagoela edozein $n \in \mathbb{N}$ baliorako zein $f(a_n)f(b_n) < 0$.

4. Froga ezazu, liburu horren notazioa erabiliz, posiblea dela $a_{n+1} - b_{n+1} > 2^{-1}(a_n - b_n)$.

5. Froga ezazu posible dela regula falsi metodoaren iterazio bat egin eta gero bisekzioaren metodoaren iterazio bat egin eta gero baino tarte handiago lortzea.

6. Regula falsi metodoa aplikatzen dugunean, liburuaren notazioa erabiliz, $|a_n - b_n| \to 0$ dugu beti? Baiezko kasuan, eman frogapena. Ezezko kasuan, eman kontradibidea. **Laguntza:** Mijangosen liburuan pista bat ematen da.

---

**Ariketa 2.2. Banach-en Puntu Finkoaren Teorema.** Teorema honek honelakoa dio $\mathbb{R}$-n gaudenean:

*Teorema* 1. *Izan bedi $I \subset \mathbb{R}$ tarte itxi bat finitua edo infinitua, eta $f \in C^0(I; I)$ zein existitzen den $K < 1$ zein:*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

*Orduan, $f$ funtzioak puntu finko bakarra du $I$-n.*

1. Froga ezazu Banach-en Puntu Finkoaren Teorema. Horretarako:

   (a) Frogatu edozein $x, y \in I$ eta $n \in \mathbb{N}$ balioetarako:

$$|f^n(x) - f^n(y)| \leq K^n|x - y|.$$

[1] `https://web-argitalpena.adm.ehu.es/listaproductos.asp?IdProducts=UCPDF215457&titulo=Zenbakizko%20metodoak%20MATLAB%20erabiliz.%202.%20edizioa`

(b) Frogatu edozein $x \in I$ eta $n, m \in \mathbb{N}$ zein $m > n$ balioetarako:

$$|f^m(x) - f^n(x)| \le |f^m(x) - f^{m-1}(x)| + |f^{m-1}(x) - f^{m-2}(x)| + \cdots + |f^{n+1}(x) - f^n(x)|.$$

(c) Frogatu edozein $x \in I$ eta $n, m \in \mathbb{N}$ zein $m > n$ balioetarako:

$$|f^m(x) - f^n(x)| \le \frac{K^n}{1-K}|f(x) - x|.$$

(d) Frogatu edozein $x \in I$ baliorako $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-ren segida dela.

(e) Justifikatu zergatik edozein $x \in I$ baliorako $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea den.

(f) Frogatu $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren limitea $f$-ren puntu finkoa dela.

(g) Frogatu, absurdora eramanez, puntu finkoa bakarra dela.

2. Eman kontradibide bat erakusteko (1) $K = 1$ balioarekin betetzeak ez duela inplikatzen puntu finkoaren bakartasuna.

3. Eman kontradibide bat erakusteko (1) $K = 1$ balioarekin betetzeak ez duela inplikatzen puntu finkoaren existentzia.

4. Eman Banach-en Puntu Finkoaren Teoremaren hipotesiak suposatuz, puntu finkoaren hurbilpena lortzen duen algoritmo baten pseudokodea.

5. Froga ezazu $f \in C^1(I; I)$ bada zein $\sup_{x\in I} |f'(x)| < 1$ den, aurreko teoremaren hipotesiak betetzen direla.

---

**Ariketa 2.3. Egia edo gezurra.** Esan hurrengo baieztapenak egia edo gezurra diren, eta justifika ezazu erantzuna.

1. Hirugarren mailako polinomio bat gutxienez puntu finko erreal bat du.

2. Izan bedi $f \in C^0([0,1];[0,1])$ zein $f(0) = -1$, $f(1/2) = -1/2$ eta $f(1) = 1$. Suposa dezagun $1/3$ eta $2/3$ direla funtzioak tarte horretan dituen erro bakarrak. Orduan, bisekzio metodoa aplikatzen dugunean, $a_n$ eta $b_n$ (tarteen ezker eta eskuin limiteak) $2/3$ errora konbergituko dute.

3. Izan bedi $f \in C^0([0,1];[0,1])$ zein $f(x) = 2x - 1/2$ edozein $x \in [3/8, 5/8]$. Orduan, edozein $x_0 \in [3/8, 5/8] \setminus \{1/2\}$ bada eta $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren limitea existitzen bada, limite hori ezin da $1/2$ izan.

4. Izan bedi $f \in C^0([0,1])$ zein $f(x) < 0$ edozein $x \in [0, e^{-1})$ eta $f(x) > 0$ edozein $x \in (e^{-1}, 1]$. Suposa dezagun bisekzio metodoa aplikatzen dugula $a_0 = 0$ eta $b_0 = 1$ izanik. Orduan, $a_n \to e^{-1}$ konbergentzia $Q$-lineala dugu.

5. $x_n \to x$ modu $Q$-koadratiko batean konbergitzen badu, modu $Q$-linealean konbergitzen du.

---

**Ariketa 2.4. Urrezko zenbakiaren kalkulua Newton-Raphson-en metodoaren bidez.** Ariketa honetan urrezko zenbakia kalkulatuko dugu Newton-Raphson-en metodoaren bitarten, eta Taylorren seriearen metodoarekin konparatuko dugu. Gogoratu urrezko zenbakia $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dela, eta $f(x) = x^2 - x - 1$ ekuazioaren erroa dela. Gogoratu Newton-Raphson-en metodoa:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

behin eta berriz aplikatzean datzala.

1. Froga ezazu:
$$\frac{3}{2} < \varphi < 2.$$

2. Froga ezazu:
$$g(x) - \varphi = \frac{(\varphi - x)^2}{2x - 1}. \tag{2}$$
**Laguntza**: begiratu Newton-Raphson-en frogapenaren lehenengo atala.

3. Erabili (2) frogatzeko $x \in [3/2, 2]$ bada:
$$|g(x) - \varphi| \leq \frac{1}{2}|x - \varphi|^2.$$

4. Froga ezazu, indukzioa erabiliz, $x \in [3/2, 2]$ bada eta $n = 0, 1, \ldots$ bada:
$$|g^n(x) - \varphi| < \frac{1}{2^{2^n}}.$$

5. Froga ezazu:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)8^{n+1}}{2^{2^{(n+1)}}}}{\frac{n8^n}{2^{2^n}}} = 0.$$

6. Zenbat da
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n8^n}{2^{2^n}}?$$

7. Kalkulatu urrezko zenbakiaren hurbilpena MATLAB-en bidez, Newton-Raphson-en metodoa erabiliz. Begiratu zelan konbergitzen duen **format long** erabiliz.

8. Urrezko zenbakia kalkulatzeko, zer da hobeto: $\sqrt{5}$ 4 zentratuta n. mailako Taylor polinomio baten bidez hurbiltzea, 1.3 ariketan egin dugun bezala, edo $\varphi$ Newton-Raphson-en metodoarekin $n$ iterazio egitea? Hau erantzuteko kontuan izan ordenagailu batentzat gehi 1 eta zati 2 egitea ez duela kosturik.

   **Laguntza:** emaitza guztiz justikatzeko komeni da aurreko limitea erabiltzea konparatzea Newton-Raphson-en konbergentzia abiadura Taylorren polinomioaren $n+1$. gaiarekin.

---

**Ariketa 2.5. Gradientearen igoeraren metodoa**

1. Enuntzia ezazu gradientearen metodoa maximo lokalak kalkulatzeko. Zehatzago, enuntzia ezazu konbergentzia teorema kasu honetarako.

2. Froga ezazu enuntziatu duzun teorema.

3. Idatzi aplikatu behar den pseudo-kodea maximo lokalak gradientearen metodoarekin kalkulatzeko.

---

**Ariketa 2.6. Ebakitzailearen metodoa.** Ariketa honetan irakurri behar duzue hurrengo testua ebakitzailearen metodoari buruz, eta erantzun behean dauden galderei ziurtatzeko ulertu duzuela.

*Teorema 2. Izan bedi $f \in C^3([a,b])$ eta $x^* \in (a,b)$ zein*

$$f(x^*) = 0, \quad f''(x^*) \neq 0, \quad \textit{eta} \quad \min_{[a,b]} |f'| > 0. \tag{1}$$

*Izan bedi*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

*segidak definitutako errepikapen erlazioa. Orduan existitzen da $\delta > 0$ zein $x_0, x_1 \in (x - \delta, x + \delta)$ bada, $x_n \to x^*$, Q-konbergentzia ordena $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ izanik.*

*Frogapena.* Izan bedi

$$e_n := x_n - x^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

errorea. Orduan,

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)(e_n - e_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{4}$$

Jarraitzeko, $f$-ren Taylorren polinomioa erabiliz $x^*$-n zentratua, (4) berdintza bihurtzen da:

$$e_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}f''(x^*)e_n e_{n-1} + R_{2,x^*}[f](x_n) + e_n K[x_n, x_{n-1}]}{f'(x^*) + 1/2 f''(x^*)(e_n + e_{n-1}) + K[x_n, x_{n-1}]}, \tag{5}$$

non

$$K[x_n, x_{n-1}] := \frac{1}{e_n - e_{n-1}} \left[ \int_{x^*}^{x_n} \frac{f'''(s)}{2}((x_n - s)^2 - (x_{n-1} - s)^2) ds + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f'''(s)}{2}(x_{n-1} - s)^2 ds \right].$$

Hortaz, erraz froga daiteke existitzen dela $\delta > 0$ zein $|e_0|, |e_1| < \delta$ inplikatzen duen

$$|e_{n+1}| < \frac{|e_n|}{2} \quad \forall n \geq 1, \tag{6}$$

eta bereziki

$$e_n \to 0. \tag{7}$$

Hau kontuan izanik, $|e_0|, |e_1| < \delta$ bada:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n e_{n-1}} \frac{2f'(x^*)}{f''(x^*)} = 1. \tag{8}$$

Hortaz, izan bedi

$$a_n := \ln(|e_n|).$$

Orduan,

$$\lim_{n\to\infty} \left[ a_{n+1} - a_n - a_{n-1} - \ln\left( \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} \right) \right] = 0. \tag{9}$$

Dei dezagun:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad C = \ln\left( \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} \right), \quad r_n = a_{n+1} - a_n - a_{n-1} - C.$$

Jarraitzeko, frogatuko dugu:[2]

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - \Phi a_n - \frac{C}{\Phi} = 0. \tag{10}$$

Deitzen badiogu:

$$\varepsilon_n = a_{n+1} - \Phi a_n - \frac{C}{\Phi},$$

erraz froga daiteke:

$$\varepsilon_{n+1} = -\frac{\varepsilon_n}{\Phi} + r_{n+1}. \tag{11}$$

Hemendik, berehalakoa da $\varepsilon_n \to 0$; hots, (10). Hortaz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\Phi}} = \left(\frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x)|}\right)^{1/\Phi}. \tag{12}$$

□

1. Idatzi ebakitzailearen metodoaren pseudo-kodea.
2. Froga ezazu (2) eta (3) inplikatzen dutela (4).
3. Atal honetan frogatuko dugu (4) inplikatzen duela (5):
   (a) Froga ezazu:
   $$f(x_n) = f'(x^*)e_n + \frac{f''(x^*)}{2}e_n^2 + R_{2,x^*}[f](x_n).$$
   (b) Froga ezazu hurrengo berdintza:
   $$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{e_n - e_{n-1}} = f'(x^*) + \frac{1}{2}f''(x^*)(e_n + e_{n-1}) + K[x_n, x_{n-1}].$$
   Horretarako, lagungarri izango zaizu Taylorren hondarraren forma integrala erabiltzea.

[2] Hurrengo limitea nondik datorren ulertzeko, Matematika Diskretuak jakin behar da. Zehatz mehatz, motibazioa da

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + C_1$$

segidako soluzio orokorra

$$\alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 + \alpha_3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

motakoa dela; hortaz, azken batukaria trunka dezakegu zerora doalako (gogoratu $a_n \to -\infty$), eta beste biekin ordezkatuz lor daitezke $\alpha_1$ eta $\alpha_2$ zenbakien balioa.

(c) Emaitza hauek guztiak erabiliz, froga ezazu (4) inplikatzen duela (5).

4. Froga ezazu $\delta$ balioaren existentzia zein (6) betetzen den. Horretarako:

   (a) Froga ezazu existitzen dela $C > 0$ soilik $f$-ren menpekoa zein:

   $$K[x_n, x_{n-1}] \leq C(e_n^2 + e_{n-1}^2)$$

   (b) Froga ezazu existitzen dela $\delta_1 > 0$ zein $|e_n|, |e_{n-1}| < \delta_1$ inplikatzen duen:

   $$|f'(x^*) + 1/2 f''(x^*)(e_n + e_{n-1}) + K[x_n, x_{n-1}]| > |f'(x^*)|/2.$$

   (c) Hau erabiliz, froga ezazu existitzen dela $\delta_2 > 0$ zein $|e_n|, |e_{n-1}| < \delta_2$ bada:

   $$\left| \frac{\frac{1}{2} f''(x^*) e_n e_{n-1} + R_{2,x^*}[f](x_n) + e_n K[x_n, x_{n-1}]}{f'(x^*) + 1/2 f''(x^*)(e_n + e_{n-1}) + K[x_n, x_{n-1}]} \right| < \frac{e_n}{2}$$

   (d) Froga ezazu, indukzioa erabiliz, $|e_1|, |e_0| < \delta_2$ bada, $|e_n| < \delta_2$ edozein $n \in \mathbb{N}$, eta (6) desberdintza dugula.

   (e) Konturatu frogapeneko $\delta$ aurreko ataletako $\delta_2$ dela.

5. Froga ezazu (6) inplikatzen duela (7).

6. Froga ezazu (5) eta (7) ekuazioek eta (4c) ataleko estimazioak inplikatzen dutela (8).

7. Froga ezazu (8) inplikatzen duela (9).

8. Froga ezazu (11). Horretarako, laguntzen du aldagai bakoitzaren balioa zein den jakitea.

9. Jarraitzeko, $\varepsilon_n \to 0$ frogatuko dugu. Horretarako, $r_n \to 0$ dugula erabiliko dugu. Horretarako, izan bedi $\eta > 0$ eta $N_1(\eta) > 0$ zein $|r_n| < \eta$ edozein $n \geq N_1$ baliorako.

   (a) Froga ezazu:

   $$|\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{|\varepsilon_n|}{\Phi} + \eta \quad \forall n \geq N_1.$$

   (b) Froga ezazu $|\varepsilon_n| > \frac{\Phi}{\Phi - 1}\eta$ eta $n \geq N_1(\eta)$ bada:

   $$|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$$

(c) Froga ezazu $|\varepsilon_n| < \frac{\Phi}{\Phi-1}\eta$ eta $n \geq N_1(\eta)$ bada:

$$|\varepsilon_{n+1}| < \frac{\Phi}{\Phi - 1}\eta.$$

(d) Froga ezazu ez bada existitzen $N_2 \geq N_1(\eta)$ zein $|\varepsilon_{N_2}| < \frac{\Phi}{\Phi-1}\eta$, orduan $|\varepsilon_n|$ beherakorra da memento batetik aurrera $\ell$ limite bat du zein $\ell \geq \frac{\Phi}{\Phi-1}\eta$ eta:

$$\ell \leq \frac{\ell}{\Phi} + \eta$$

(e) Suposatuko dugu (9d) ataleko hipotesia betetzen dela $\eta > 0$ balio baterako. Kontuan izanik $r_n \to 0$, froga ezazu $\ell$ halabeharrez

$$\ell \leq \frac{\ell}{\Phi}$$

betetzen duela, eta esan zergatik hori absurdoa den.

(f) Hortaz, existitzen da $N_2(\eta) \geq N_1(\eta)$ zein $|\varepsilon_{N_2(\eta)}| < \frac{\Phi}{\Phi-1}\eta$. Aurreko atalak erabiliz, froga ezazu

$$|\varepsilon_n| < \frac{\Phi}{\Phi - 1}\eta \quad \forall n \geq N_2(\eta).$$

(g) Jakinik $\eta > 0$ arbitrarioa dela, froga ezazu $\varepsilon_n \to 0$.

10. Froga ezazu (10) inplikatzen duela (12).

**Gehiago sakontzeko borondatezko atala:** eman Newton-Raphson-en metodoaren beste frogapen bat teknika hauek erabiliz.