1) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $a < b$.

   a) Wieviele Wörter w gibt es mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{gradlex}} w \leq_{\text{gradlex}} a$ gilt? Wieviele mit $\epsilon \leq_{\text{gradlex}} w \leq_{\text{gradlex}} b$? Mit $\epsilon \leq_{\text{lex}} w \leq_{\text{lex}} a$? Mit $\epsilon \leq_{\text{lex}} w \leq_{\text{lex}} b$?

   b) Zeigen Sie, dass wenn $w, v \in \Sigma^*$ zwei Wörter sind, $w <_{\text{lex}} v$ und $\ell(w) = \ell(v)$ gelten, es ein Wort $u \in \Sigma^*$ gibt, für das $w <_{\text{lex}} u <_{\text{lex}} v$ gilt.

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $a < b$.

   a) Es gibt zwei Wörter w mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{gradlex}} w \leq_{\text{gradlex}} a$ gilt: ϵ und a.

   Es gibt drei Wörter w mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{gradlex}} w \leq_{\text{gradlex}} b$ gilt: ϵ, a, b.

   Es gibt zwei Wörter w mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{lex}} w \leq_{\text{lex}} a$ gilt: ϵ und a.

   Es gibt jedoch unendlich viele Wörter w mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \leq_{\text{lex}} w \leq_{\text{lex}} b$ gilt. Z.B. haben wir:

$$\epsilon <_{\text{lex}} a <_{\text{lex}} aa <_{\text{lex}} aaa <_{\text{lex}} aaaa <_{\text{lex}} \ldots <_{\text{lex}} b.$$

   b) Wenn $w <_{\text{lex}} v$ und $\ell(w) = \ell(v)$ gelten, dann gibt es laut der Definition von $<_{\text{lex}}$ ein $k \in \{0, \ldots, \ell(w) - 1\}$, so dass $w_i = v_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ gilt, aber $w_k < v_k$ ist. Dann gilt aber auch für $w' = wa$, dass $w'_i = v_i$ (für alle $i \in \{0, \ldots, k-1\}$) und $w'_k < v_k$ ist. Also ist $w' <_{\text{lex}} v$. Da die ersten $\ell(w)$ Zeichen von w und w' übereinstimmen, w' aber länger ist als w, folgt (wieder aus der Definition von $<_{\text{lex}}$): $w <_{\text{lex}} w'$. Also haben wir $w < w' < v$.

2) Sei P die formale Sprache der Palindrome über dem Alphabet $\{a, b\}$. Zeigen Sie die Aussage

„Wenn $x \in P$ und $\ell(x)$ gerade, dann hat x eine gerade Anzahl von as.“

mittels wohlfundierter Induktion.

Hinweis: Wählen Sie die wohlfundierte Ordnung $\leq$ derart, dass es nur einen Basisfall gibt.

Lösung. Wir wählen die graduiert-lexikographische Ordnung $\leq_{\text{gradlex}}$ (mit $a < b$).

- BASIS: Da $\leq_{\text{gradlex}}$ total ist, ist ϵ das einzige minimale Element. In der Tat hat ϵ eine gerade Anzahl von as.
- SCHRITT: Sei w ein beliebiges nicht-minimales Element. Somit ist $w \neq \epsilon$. Die Induktionshypothese gilt für alle x mit $x <_{\text{gradlex}} w$ und besagt, dass wenn x ein Palindrom gerader Länge ist, dass x dann eine gerade Anzahl an as enthält. Wir zeigen „$w \in P$ und $\ell(w)$ gerade impliziert w hat gerade Anzahl an as“. Da w ein Palindrom gerader Länge ungleich ϵ ist, hat w eine der beiden Gestalten
  - $w = axa$
  - $w = bxb$

  Beachte, dass auch x ein Palindrom gerader Länge ist. Da $x <_{\text{gradlex}} w$ hat x eine gerade Anzahl von as und somit auch w. □

3) Gegeben sei die Funktion f auf den natürlichen Zahlen (0 inkludiert), welche besagt, dass $f(n) = 1$ wenn n gerade ist und $f(n) = n \cdot f(\frac{n-1}{2})$ sonst. Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass $f(n)$ ungerade ist.

4) Betrachten Sie den binären logischen Operator $\overline{\wedge}$ (NAND) mit folgender Wahrheitstafel:

$\overline{\wedge}$	T	F
T	F	T
F	T	T

Beweisen Sie mittels struktureller Induktion über die Syntax der Aussagenlogik (siehe Beispiel 3.11), dass es für jede aussagenlogische Formel F eine äquivalente Formel F' gibt, welche als einzigen Operator $\overline{\wedge}$ verwendet.

5) Wie ist "klein-o" definiert, bzw. was bedeutet der Zusammenhang $f \in \mathrm{o}(g)$?

Zeigen oder widerlegen Sie: für alle reele Zahlen $m > 0$, gilt

$$\log(n) \in \mathrm{o}(n^m)\ .$$

5 Wie ist die transitive Hülle einer Relation R definiert?
Zeichnen Sie den gerichteten Graph G der durch die Relation

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,4),(3,2),(3,4),(4,5)\}$$

auf $M = \{1,2,3,4,5\}$ gegeben ist.

Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Floyd-Warshall die transitive Hülle von R.

6 Gegeben ein gerichteter Graph G durch die Relation

$$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),(3,5),(4,5),(5,5)\}$$

auf $M = \{1,2,3,4,5\}$ und Kantenbewertung

$b((1,2)) = 2, b((1,3)) = 5, b((1,4)) = 7, b((2,3)) = 1, b((2,4)) = 4, b((3,4)) = 2, b((3,5)) = 1,$
$b((4,5)) = 3, b((5,5)) = 1.$

Ist G ein Wurzelbaum? Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Floyd-Warshall die Eckenabstände im Graphen G.