Limes(Grenzwert)

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L$$

Der Limes(Grenzwert) L einer Funktion $f(n)$ ist der Wert, dem sich die Funktionswerte mit zunehmendem n immer mehr(unendlich nahe) annähern. Das bedeutet, dass es für jeden Toleranzbereich $\epsilon \in \mathbb{R}$ eine Stelle m gibt, ab der für jedes $n \geq m$ gilt, dass $f(n)$ innerhalb dieses Toleranzbereiches um L liegt ($|f(n) - L| < \epsilon$).

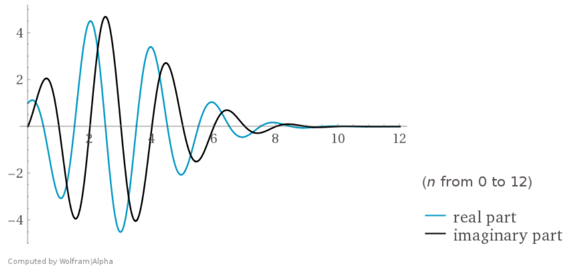

Abbildung 1: $f(n) = \frac{(-3)^n}{n!}$

Rechenregeln

Wenn $\lim_{n\to\infty} f(n) = L_f$ und $\lim_{n\to\infty} g(n) = L_g$ existieren, dann gilt

- Summensatz
$$\lim_{n\to\infty} f(n) \pm \lim_{n\to\infty} g(n) = L_f \pm L_g = \lim_{n\to\infty} (f(n) \pm g(n))$$
- Produktsatz
$$\lim_{n\to\infty} f(n) * \lim_{n\to\infty} g(n) = L_f * L_g = \lim_{n\to\infty} (f(n) * g(n))$$
- Quotientensatz ($L_g \neq 0$)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{L_f}{L_g}$$
- Regel von l'Hospital ($g'(n) \neq 0; \lim_{n\to c} g(n) = \pm\infty$) *oder* $\lim_{n\to c} f(n) = \lim_{n\to c} g(n) = 0$
$$\lim_{n\to c} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to c} \frac{f'(n)}{g'(n)}$$
Durch die Regel von l'Hospital lässt sich oft der Grenzwert von unbestimmten Ausdrücken wie $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ oder $\infty * 0$ berechnen.

Beispiele

- Sei
$$f(n) = \frac{\pi n^2 - n}{5n^2 - 3n - \frac{2}{n^5}}$$
, dann ist
$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi n^2 - n}{5n^2 - 3n - \frac{2}{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\pi - \frac{1}{n})}{n^2(5 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^7})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi - \frac{1}{n}}{5 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^7}}$$

. Da $\lim_{n\to\infty}\pi = \pi$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty}5 = 5$ können die Teilfunktionen mit Summen- und Produktsatz durch ihre Grenzwerte ersetzt werden:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi-\frac{1}{n}}{5-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^7}} = \frac{\pi-0}{5-0-0} = \frac{\pi}{5}$$

- l'Hospital: $\frac{\infty}{\infty}, k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{(n^k)'}{(e^n)'} = \lim_{n\to\infty}\frac{k*n^{k-1}}{e^n} = k*\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}}{e^n} = \cdots = k!*\lim_{n\to\infty}\frac{n^0}{e^n} = k!*0 = 0$$

$\limsup$ und $\liminf$

Einige Funktionen besitzen keinen Eindeutigen Grenzwert(z.B. *sin* und *cos*), der Wertebereich einer Funktion ist aber oft doch eingeschränkt. Um dennoch Aussagen über solche Funktionen machen zu können kann man den Grenzwert des Supremums(Infimums) berechnen, um eine obere(untere) Schranke zu finden. Wenn die Funktion einen Grenzwert besitzt(Infimum = Supremum), dann gilt $\lim = \limsup = \liminf$.

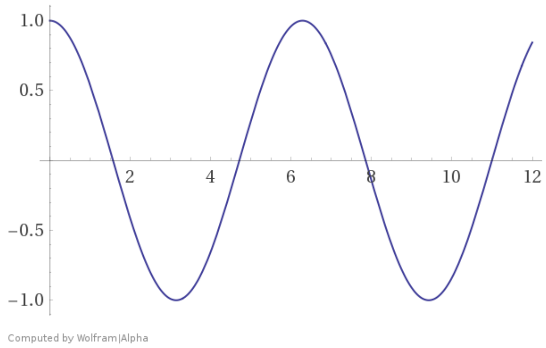

Abbildung 2: $g(n) = cos(n)$