Mathematik I WS 15/16

Thomas Dinges[1] Jonas Wolf [2]

25. November 2015

Inoffizielles Skript für die Vorlesung Mathematik I im WS 15/16, bei Britta Dorn.
Alle Angaben ohne Gewähr. Fehler können gerne via E-Mail gemeldet werden.

[1]thomas.dinges@student.uni-tuebingen.de
[2]mail@jonaswolf.de

Inhaltsverzeichnis

1 Logik

Aussagenlogik

Eine **logische Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch (also nie beides zugleich) ist. Wahre Aussagen haben den Wahrheitswert 1 (auch wahr, w, true, t), falsche den Wert 0 (auch falsch, f, false).

Notation: Aussagenvariablen $A, B, C, ...A_1, A_2$.

Beispiele:

- 2 ist eine gerade Zahl (1)
- Heute ist Montag (1)
- 2 ist eine Primzahl (1)
- 12 ist eine Primzahl (0)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (1)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Aussage, aber unbekannt, ob 1 oder 0)
- 7 (keine Aussage)
- Ist 173 eine Primzahl? (keine Aussage)

Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen (**Junktoren**, z.B. und, oder, ...) kompliziertere bilden. Diese werden Ausdrücke genannt (auch Aussagen sind Ausdrücke). Durch sogenannte **Wahrheitstafeln** gibt man an, wie der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Werte der Teilaussagen bedingt ist. Im folgenden seien A, B Aussagen.

Die wichtigsten Junktoren:

1.1 Negation

Verneinung von A: $\neg A$ (auch $\bar{A}$), *nicht* A, ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Beispiele:

- A: 6 ist durch 3 teilbar. (1)
- $\neg A$: 6 ist nicht durch 3 teilbar. (0)
- B: 4,5 ist eine gerade Zahl (0)
- $\neg B$: 4,5 ist keine gerade Zahl. (1)

1.2 Konjunktion

Verknüpfung von A und B durch *und*: $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiele:

- $\underbrace{\text{6 ist eine gerade Zahl}}_{A(1)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (1)
- $\underbrace{\text{9 ist eine gerade Zahl}}_{A(0)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (0)

1.3 Disjunktion

oder: $A \vee B$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

⚠ Einschließendes oder, kein entweder...oder.

Beispiele:

- 6 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)

- 9 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)
- 7 ist gerade oder durch 3 teilbar. (0)

1.4 XOR

entweder oder: A xor B, $A \oplus B$ (ausschließendes oder, exclusive or).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.5 Implikation

wenn, dann, $A \Rightarrow B$:

- wenn A gilt, dann auch B
- A impliziert B
- aus A folgt B
- A ist hinreichend für B,
- B ist notwendig für A

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Merke: *ex falso quodlibet* : aus einer falschen Aussage kann man alles folgern!

(Die Implikation $A \Rightarrow B$ sagt nur, dass B wahr sein muss, falls A wahr ist. Sie sagt nicht, dass B tatsächlich war ist.)

Beispiele:

- Wenn $1 = 0$, bin ich der Papst. (1)

1.6 Äquivalenz

genau dann wenn, $A \Leftrightarrow B$ (dann und nur dann wenn, g.d.w, äquivalent, if and only if, iff)

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiele:

- Heute ist Montag genau dann wenn morgen Dienstag ist. (1)
- Eine natürliche Zahl $\underbrace{\text{ist durch 6 teilbar}}_{A}$ g. d. w. sie $\underbrace{\text{durch 3 teilbar ist}}_{B}$. (0)

  $A \Rightarrow B$ (1)

  $B \Rightarrow A$ (0)

Festlegung

$\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren: $(\neg A \wedge B)$ heißt $(\neg A) \wedge B$

1.7 Beispiel

a)

Wann ist der Ausdruck $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ wahr?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

⚠ Klammerung relevant

Welche Wahrheitswerte ergeben sich für

- $A \vee (B \wedge \neg A) \wedge B$?

- $A \vee B \wedge \neg A \wedge B$?

$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ und $(A \oplus B)$ haben dieselben Wahrheitstafeln. Ausdrücke sehen unterschiedlich aus (Syntax), aber haben dieselbe Bedeutung (Semantik). Dies führt zu *1.8 Definition*.

b)

Wann ist $(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$ falsch?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel: alle möglichen Belegungen von A, B, C mit $0/1$

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg(C \vee A)$	$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

oder überlegen:

$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$ ist nur 0, wenn

$(A \wedge B) = 1$, also $A = 1$ und $B = 1$

und

$\neg(C \vee A) = 0$ ist.

(Wissen: $A = 1$), also $\underline{C = 0}$ oder $\underline{C = 1}$ möglich.

1.8 Definition

Haben zwei Ausdrücke α und β bei jeder Kombination von Wahrheitswerten ihrer Aussagevariablen den gleichen Wahrheitswert, so heißen sie logisch äquivalent; man schreibt $\alpha \equiv \beta$. ('$\equiv$' ist kein Junktor, entspricht '$=$')

Es gilt: Falls $\alpha \equiv \beta$ gilt, hat der Ausdruck $\alpha \Leftrightarrow \beta$ immer den Wahrheitswert 1.

1.9 Satz

Seien A, B, C Aussagen. Es gelten folgende logische Äquivalenzen:

a) Doppelte Negation: $A \equiv \neg(\neg A)$

b) Kommutativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- $(A \oplus B) \equiv (B \oplus A)$
- $(A \Leftrightarrow B) \equiv (B \Leftrightarrow A)$

  ⚠ gilt nicht für '$\Rightarrow$' !! ($A \Rightarrow B \not\equiv B \Rightarrow A$)

c) Assoziativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \equiv A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

d) Distributivität:

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

e) Regeln von DeMorgan:

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

f) $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

g) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

h) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

(Alle Äquivalenzen gelten auch, wenn die Aussagevariablen durch Ausdrücke ersetzt werden.)

Beweis: Jeweils mittels Wahrheitstafel (Übung!), zum Beispiel:

a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
1	0	1
0	1	0

e)

A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

1.10 Bemerkung

(1.9 f): $(A \Rightarrow B) \equiv \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}_{\text{wird \underline{Kontraposition} genannt, wichtig für Beweis. Wird im Sprachgebrauch oft falsch verwendet.}}$

Beispiel: Pit ist $\underset{A}{\text{ein}}$ Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist $\underset{B}{\text{ein}}$ Hund.

äquivalent zu: $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Pit ist kein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist kein Dackel.

aber nicht zu: $B \Rightarrow A$

Pit ist ein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist ein Dackel.

und nicht zu: $\neg A \Rightarrow \neg B$

Pit ist kein Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist kein Hund.

Beispiel: Sohn des Logikers / bellende Hunde ($\rightarrow$ Folien)

1.11 Bemerkung (Logisches Umformen)

Sei α ein Ausdruck. Ersetzen von Teilausdrücken von α durch logisch äquivalente Ausdrücke liefert einen zu α äquivalenten Ausdruck. So erhält man eventuell kürzere/einfachere Ausdrücke, zum Beispiel:

$\neg(A \Rightarrow B) \underset{1.9\text{ g)}}{\equiv} \neg(\neg A \vee B) \underset{1.9\text{ e)}}{\equiv} \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \underset{1.9\text{ a)}}{\equiv} A \wedge \neg B$

1.12 Definition

Ein Ausdruck heißt Tautologie, wenn er für jede Belegung seiner Aussagevariablen, immer den Wert 1 annimmt. Hat er immer Wert 0, heißt er Kontradiktion. Gibt es mindestens eine Belegung der Aussagevariablen, so dass der Ausdruck Wert 1 hat, heißt er erfüllbar.

1.13 Beispiel

a) $A \vee \neg A$ Tautologie
$A \wedge \neg A$ Kontradiktion

b) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.11).
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.9g).

c) $A \wedge \neg B$ ist erfüllbar (durch $A = 1, B = 0$).

Prädikatenlogik

Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, dass formal wie eine Aussage aussieht, aber eine oder mehrere Variablen enthält.

Beispiel: $P(x): \underbrace{x}_{Variable} \underbrace{< 10}_{\text{Prädikat (Eigenschaft)}}$

$Q(x): x$ studiert Informatik $R(y): y$ ist Primzahl und $y^2 + 2$ ist Primzahl.

Eine Aussageform$P(x)$ wird zur Aussage, wenn man die Variable durch ein konkretes Objekt ersetzt. Diest ist nur dann sinnvoll, wenn klar ist, welche Werte für x erlaubt sind, daher wird oft die zugelassene Wertemenge mit angegeben. (hier Vorgriff auf Kapitel *Mengen*)

Im Beispiel:

$P(3)$ ist wahr, $P(42)$ falsch.

$R(2)$ ist falsch, $R(3)$ ist wahr.

Oft ist die Frage interessant, ob es wenigstens ein x gibt, für das $P(x)$ wahr ist, oder ob $P(x)$ sogar für alle zugelassenen x wahr ist.

1.14 Definition

Sei $P(x)$ eine Aussageform.

a) Die Aussage *Für alle x (aus einer bestimmten Menge M) gilt $P(x)$.* ist wahr genau dann wenn $P(x)$ für alle in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\forall}_{\text{für alle, für jedes}} \quad x \quad \underbrace{\in M}_{\text{aus der Menge M}} \quad \underbrace{:}_{\text{gilt}} \quad \underbrace{P(x)}_{\text{Eigenschaft}}$

auch $\underbrace{\forall}_{x \in M} P(x)$.

Das Symbol $\forall$ heißt All- Quantor, die Aussage All- Aussage.

b) Die Aussage *Es gibt (mindestens) ein x aus M, das die Eigenschaft P(x) besitzt.* ist wahr, g.d.w P(x) für mindestens eines der in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\exists}_{\text{es gibt, es existiert}} \quad x \in M \quad \underbrace{:}_{\text{so dass gilt}} \quad P(x).$

$\exists$ heißt Existenzquantor, die Aussage Existenzmenge.

1.15 Beispiel / Bemerkung

Übungsgruppe G: $\underbrace{a}_{Anna} \underbrace{b}_{Bob} \underbrace{c}_{Clara}$

$B(x) : x$ ist blond. $W(x) : x$ ist weiblich.

$B(a) = 1, W(b) = 0)$

1. Alle Studenten der Gruppe sind blond. (1)

   $\forall x \in G$: x ist blond

   $\forall x \in G$: B(x) (1)

   Das bedeutet: a blond $\wedge$ b blond $\wedge$ c blond
   $\underbrace{B(a)}_{1} \wedge \underbrace{B(b)}_{1} \wedge \underbrace{B(c)}_{1}$

   $\forall$ ist also eine Verallgemeinerung der Konjunktion.

2. Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   $\underbrace{W(a)}_{1} \wedge \underbrace{W(b)}_{0} \wedge \underbrace{W(c)}_{1}(0)$

3. Es gibt einen Studenten der Gruppe, der weiblich ist. (1)

   $\exists x \in G$: W(x) (1)

   bedeutet: $\underbrace{W(a)}_{1} \vee \underbrace{W(b)}_{0} \vee \underbrace{W(c)}_{1} = 1$

   $\exists$ ist verallgemeinerte Disjunktion.

4. Aussage A: Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   Verneinung von A? $\neg A$

   ⚠ Nicht korrekt wäre: Alle Studenten der Gruppe sind männlich. (Wahrheitswert ist auch 0)

   Korrekt: Nicht alle Studenten der Gruppe sind weiblich (1) Es gibt (mindestens) einen Studenten der Gruppe, der nicht weiblich ist. (1)

allgemeiner:

1.16 Negation von All- und Existenzaussagen

a) $\neg(\forall x \in M : P(x)) \equiv \exists x \in M : \neg P(x)$

b) $\neg(\exists x \in M : P(x)) \equiv \forall x \in M : \neg P(x)$

(Verallgemeinerung der Regeln von DeMorgan) (vergleiche Beispiel 1.15, 4):

$\neg(\forall x \in G : W(x))$

$\equiv \neg(W(a) \wedge W(b) \wedge W(c)$

$\underbrace{\equiv}_{DeMorgan} (\neg W(a)) \vee (\neg W(b)) \vee (\neg(W(c))$

$\equiv \exists x \in G : \neg W(x)$

Bemerkung

Aussageformen können auch mehrere Variablen enthalten, Aussagen mit mehreren Quantoren sind möglich.

Zum Beispiel:

$\exists x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$
$\exists x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$

$\forall x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$
$\forall x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$

Negation dann durch mehrfaches Anwenden von 1.16, zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x, y, z)) \\
&\equiv \exists x \in X : \neg(\forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x, y, z)) \\
&\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y : \neg(\exists z \in Z : P(x, y, z)) \\
&\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad \forall z \in Z : \neg P(x, y, z))
\end{aligned}
$$

Also:
ändere $\exists$ in $\forall$,
$\forall$ in $\exists$,
verneine Prädikat.

2 Mengen

2.1 Definition (Georg Cantor, 1845-1918)

Eine <u>Menge</u> ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten (<u>Elementen</u>) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Im Folgenden seien A, B Mengen.

a) $x \in A : x$ ist Element der Menge A
$x \notin A : x$ ist nicht Element der Menge A
oder auch:
$A \ni x : x$ ist Element der Menge A
$A \not\ni x : x$ ist nicht Element der Menge A

b) Eine Menge kann beschrieben werden durch:

- Aufzählung ihrer Elemente, zum Beispiel:
  $M_1 = \{a, b, c\}$ $\quad$ ($= \{c, a, b\}$, d.h. Reihenfolge spielt keine Rolle)
  Achtung: Keine Wiederholungen!
  $M_2 = \{\smiley, \frownie\}$
  $M_3 = \{\underline{3}, \underline{\{1, 2\}}, \underline{M_1}\}$
  geht nur bei endlichen Mengen oder bestimmten unendlichen Mengen, zum Beispiel:
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$ Menge der ganzen Zahlen

- Charakterisierung ihrer Elemente:
  $A = \{x \mid x$ besitzt die Eigenschaft $E\}$, z.B.:
  $A = \{n \underbrace{\mid}_{\text{sprich: } \textit{"mit der Eigenschaft"}} n \in \mathbb{N}$ und n ist gerade$\}$
  $= \{2, 4, 6, 8, ...\}$
  $= \{x \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2 \cdot k\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

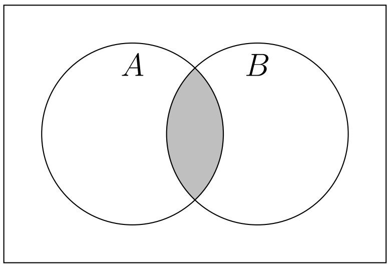
  Bsp: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ Menge der rationalen Zahlen

c) Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die Menge ohne Elemente (<u>leere Menge</u>)

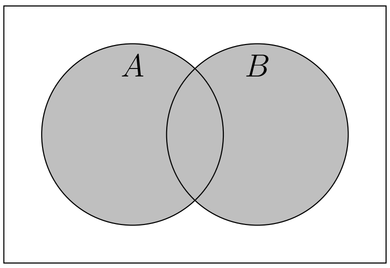
d) Mit $|A|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente der Menge A (<u>Kardinalität</u> oder <u>Mächtigkeit</u> von A), zum Beispiel:
$\big|\{1, a, *\}\big| = 3, \quad \big|\emptyset\big| = 0, \quad |\mathbb{N}| = \infty, \quad \big|\{\mathbb{N}\}\big| = 1$

e) $A \cap B \underbrace{:=}_{\text{wird definiert als}} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ heißt <u>Durchschnitt</u> oder <u>Schnittmenge</u> von A und B.

Grafische Veranschaulichung: Venn-Diagramm (⚠ gilt nicht als Beweis)



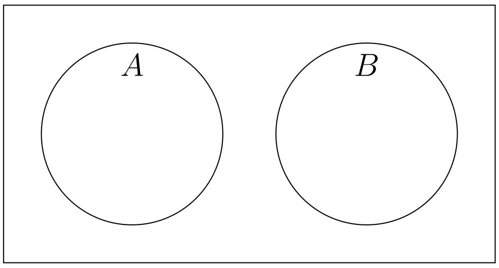
f) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ heißt <u>Vereinigung</u> von A und B.



Beispiele: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4\}$

$A \cap B = \{2, 3\}$,
$A \cap C = \emptyset$,
$B \cap C = \{4\} = C$,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

g) A und B heißen <u>disjunkt</u>, falls gilt $A \cap B = \emptyset$



h) A heißt <u>Teilmenge</u> von B, $A \subseteq B$, falls gilt:
$x \in A \Rightarrow x \in B$
Oder in Worten: Jedes Element von A ist auch Element von B.

Dasselbe bedeutet die Notation
$B \supseteq A$
(B ist Obermenge von A)

Beispiel: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)

Es gilt: $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A.

Achtung: Unterschied $\subseteq, \in$!
Zum Beispiel:
$A = \{1, \mathbb{N}\}$ (hier ist die Menge $\mathbb{N}$ ein Element von A, keine Teilmenge!)
$1 \in A, \quad \mathbb{N} \in A, \quad \mathbb{N} \not\subseteq A, \quad 2 \notin A, \quad \{1\} \subseteq A$

i) Zwei Mengen A, B heißen <u>gleich</u> ($A = B$, falls gilt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ (also $x \in A \Rightarrow / \Leftarrow / \Leftrightarrow x \in B$.

Darin liegt ein Beweisprinzip: Man zeigt $A = B$, indem man zeigt:

- $x \in A \Rightarrow x \in B$
- $x \in B \Rightarrow x \in A$ (mehr später)

Beispiel: $A = 2, 3, 4, \qquad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \text{ und } x < 5\}$ $A = B$

j) $A \subsetneq B (A \subsetneqq B)$ bedeutet $A \subseteq B$, aber $A \neq B$.

(d.h. $\exists x \in B$ mit $x \notin A$, aber $x \in B$)

(A ist <u>echte</u> Teilmenge von B.)

k) Mit $P(A) := \{B \mid \text{B ist eine Teilmenge von A}\} = \{B \mid B \subseteq A\}$ bezeichnen wir die Menge aller (echten oder nicht echten) Teilmengen von A, die sogenannte Potenzmenge von A. ($\emptyset \subseteq A \forall A, A \subseteq A \forall A$)

Beispiel:

$A = \{1,\}, P(A) = \{\emptyset, \{\underbrace{1}_{A}\}\}$

$B = \{1,2\}, P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\underbrace{1,2}_{B}\}\}$

$C = \{1,2,3\}, P(C) = ...$ (8 Elemente)

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Was ist $P(P(A))$?
$P(P(A)) = P(\{\emptyset, \{1\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}$

l) $A \backslash B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ heißt die Differenz (A *ohne* B).

Ist $A \subseteq X$ mit einer Obermenge X, so heißt $X \backslash A$ das Komplement von A (bezüglich X). Wir schreiben A_X^C oder kurz A^C (wenn X aus dem Kontext klar ist).

m) $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ heißt die symmetrische Differenz von A und B.

2.2 Bemerkung

Verallgemeinerung der Vereinigung und des Durchschnitts:

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge ... \wedge x \in A_n\}$$

$$=: \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup ... \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee ... \vee x \in A_n\}$$

$$=: \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Beziehungsweise noch allgemeiner:

Sei S eine Menge von Mengen (*System von Mengen*)

$\cap A = \{x \mid x \in A \forall A \in S\}$
$A \subset S$

$\cup A = \{x \mid \exists A \in S \text{ mit } x \in A\}$
$A \in S$

2.3 Definition

Seien A, B Mengen.

$A \underbrace{x}_{Kreuz} B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Die Menge aller geordneten Paare, heißt kartesisches Produkt von A und B (nach René Descartes, 1596 - 1650).

Dabei legen wir fest: $(a, b) = (a', b')(\text{mit } a, a' \in A, b, b' \in B) :$
$\Leftrightarrow a = a'$ und $b = b$‘.

Allgemein sei für Mengen $A_1, ...A_n (n \in \mathbb{N})$
$A_1 x A_2 x ... x A_n := \{a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i, \forall i = 1...n\}$
die Menge aller geordneten n-Tupel (mit analoger Gleichheitsdefinition).

$(n = 2 : \text{Paare}, n = 3 : \text{Tripel})$

Schreibweise:

$$A_1 \times ... \times A : n =: \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$$

Ist eine der Mengen $A_1, ...A_n$ leer, setzen wir $A_1 \times ... \times A_n = \emptyset$.

Statt $A \times A$ schreiben wir auch A^2, statt $\underbrace{A \times ... \times A}_{n-Faktoren} = A^n$.

2.4 Beispiel

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$

$(1, 3) \in A \times B, \underbrace{(3, 1)}_{B \times A} \notin A \times B,$

$(\underbrace{3}_{B \times B}, \underbrace{3}_{A \times A}) \in A \times B \in B \times A$

$(1,2) \in A \times B, \in A \times A$

$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$

$B \times A = ...$

$B \times B = B^2 = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

2.5 Satz (Rechenregeln für Mengen)

Seien A, B, C, X Mengen. Dann gilt:

a) $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
(Kommutativgesetz)

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(Assoziativgesetz)

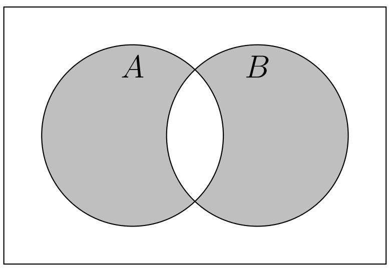
c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(Disbributivgesetz)

d) $A, B \subseteq X$, dann
$(A \cap B)_X^C = A_X^C \cup B_X^C$
$(A \cup B)_X^C = A_X^C \cap B_X^C$
(Regeln von DeMorgan)

e) $A \subseteq X$, dann $(A_X^C)_X^C = A$

f) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$(= \{x \mid x \in A \oplus x \in B\})$



g) $A \cap B = A$ genau dann, wenn $A \subseteq B$
$(A \cap B) = A \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B)$

h) $A \cup B = A \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq A$

Beweis

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
$= \{x \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$
Kommutativgesetz 1.9 b)

$A \cap B$ analog

b), c) Übung, wie a)
benutze Assoziativgesetz (1.9 c)) bzw. Distributivgesetz (1.9 d)) für logische Äquivalenzen.

d) $(A \cap B)_X^C$
$= \{x \mid x \in X \setminus (A \cap B)\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge (x \notin (A \cap B))\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge \neg(x \in (A \cap B))\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\}$
De Morgan 1.9 e)
$= \{x \mid ((x \in X) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in X) \wedge (x \notin B))\}$
$= A_X^C \cup B_X^C$

2. Regel analog

e) ähnlich

f) g) h) später

3 Beweismethoden

Ein mathematischer Beweis ist die Herleitung der Wahrheit (oder Falschheit) einer Aussage aus einer Menge von Axiomen (nicht beweisbare Grundtatsachen) oder bereits bewiesenen Aussagen nmittels logischen Folgerungen.

Bewiesene Aussagen werden Sätze genannt.

Lemma - Hilfssatz, der nur als Grundlage für wichtigeren Satz formuliert und bewiesen wird.

Theorem - wichtiger Satz

<u>Korollar</u> - einfache Folgerung aus Satz, z.B. Spezialfall

<u>Definition</u> - Benennung/Bestimmung eines Begriffs/Symbols

$\square$ - Zeichen für Beweisende ($\blacksquare$, q.e.d., wzbw...)

Mathematische Sätze haben oft die Form:

Wenn V (Voraussetzung) gilt, dann gilt auch B (Behauptung)

(V, B: Aussagen), kurz: $V \Rightarrow B$

Zu zeigen ist also, dass $V \Rightarrow B$ eine wahre Aussage ist.

3.1 Direkter Beweis

Gehe davon aus, dass V wahr ist, folgere daraus, dass B wahr ist.

$$
\left[\begin{array}{l} \text{Sei } V \text{ wahr, } \Rightarrow \ldots \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow \ldots \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow \ldots \\ \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow B \text{ ist wahr} \end{array}\right]
$$

Beispiel: $\underbrace{\text{Sei } n \in \mathbb{N}. \text{ Ist } n \text{ gerade}}_{V}, \underbrace{\text{so ist auch } n^2 \text{ gerade}}_{B}$.

<u>Beweis:</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. // V ist wahr $\Rightarrow n = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

($\exists k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2 \cdot k$)

$\Rightarrow n^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot (2k^2)$

$\Rightarrow n^2$ ist gerade. // B ist wahr

$\square$

3.2 Beweis durch Kontraposition

vgl. Satz 1.9 f) $\quad A \Rightarrow B \quad \equiv \quad \neg B \Rightarrow \neg A$

Statt $V \Rightarrow B$ zu zeigen, können wir also auch $\neg B \Rightarrow \neg V$ zeigen.

[Es gelte $\neg B \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow \ldots$

$\vdots$
$\Rightarrow$ es gilt $\neg V$]

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$.

$\underbrace{\text{Ist } n^2 \text{ gerade}}_{V}$, $\underbrace{\text{so ist auch } n \text{ gerade}}_{B}$.

Beweis durch Kontraposition:

Sei n ungerade. // $\neg B$ gilt.

$\Rightarrow n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{\underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}}$

$\Rightarrow n^2$ ist ungerade. // $\neg V$ gilt.

$\square$

3.3 Beweis durch Widerspruch, indirekter Beweis

Zu zeigen ist Aussage A. Wir gehen davon aus, dass A nicht gelte ($\neg A$ ist wahr) und folgern durch logische Schlüsse eine zweite Aussage B, von der wir wissen, dass sie falsch ist. Wenn alle logischen Schlüsse korrekt waren, muss also $\neg A$ falsch gewesen sein, also A wahr.

($((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$ ist Tautologie)

Beispiel: [Euklid] $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Wir nehmen an, dass die Aussage falsch ist, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ gilt, das heißt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit p. q. $\in \mathbb{Z} (q \neq 0)$ teilerfremd (vollständig gekürzter Bruch)

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Rightarrow p^2 = 2q^2$, also ist p^2 gerade, damit aber auch p gerade (Beispiel in 3.2), also $p = 2 * r$ mit $r \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow p^2 = (2r)^2 = 2q^2$
$\Rightarrow 4r^2 = 2q^2$
$\Rightarrow \underline{2r^2 = q^2}$

$\Rightarrow q^2$ gerade
$\Rightarrow q$ gerade

Also: p gerade, q gerade, Widerspruch zu p, q teilerfremd.

Also war die Annahme falsch, es muss $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gelten. $\square$

3.4 Vollständige Induktion

Eine Methode, um Aussagen über natürliche Zahlen zu beweisen.

Beispiel: Gauß

$1 + 2 + ... + 100 =?$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & ... & 50 \\ +\ 100 & 99 & 98 & ... & 51 \\ \hline 101 & 101 & 101 & ... & 101 \end{array}$$

$50 * 101 = 5050$

$(= \frac{100}{2} * 101)$

Allgemein:
$1 + 2 + 3 + ... + n \underbrace{=}_{Vermutung} \frac{n(n+1)}{2}$

$(n \in \mathbb{N})$

3.4.1 Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben (oft $n_0 = 1$).
Für jedes $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$, sei $A(n)$ eine Aussage, die von n abhängt.

Es gelte:

1. $A(n_0)$ ist wahr (*Induktionsanfang*)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$: $\underbrace{\text{Ist} A(n) \text{wahr,}}_{Induktionsvorraussetzung} \underbrace{\text{so ist} A(n+1) \text{wahr}}_{Induktionsbehauptung}$. (*Induktionsschritt*)

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr. (*Dominoprinzip*)

(Bemerkung: gilt auch für $\mathbb{N}_0$ ($n_0 = 0$ auch möglich) und für $n_0 \in \mathbb{Z}$, Behauptung gilt dann für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$).

Beispiel:

a) Kleiner Gauß $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis:

$A(n): 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Induktionsanfang $(n=1): A(1): 1 = \frac{1*(1+1)}{2}$
- Induktionsschritt:

  Induktionsvorraussetzung: sei $n \geq 1$. Es gelte $A(n)$, d.h. $1+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

  Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, d.h. $1+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

  Beweis: $\underbrace{1+2+...+n}+(n+1) \underbrace{=}_{Ind.vor.} \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)$

  $$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

  $$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  $A(n+1)$ $\square$

b) $A(n): 2^n \geq n \forall n \in \mathbb{N}$

- Induktionsanfang: $(n=1): A(1)$ gilt: $2^1 \geq 1$
- Induktionsschritt:

  Induktionsvorraussetzung: Sei $n \geq 1$. Es gelte $A(n)$, d.h. $2^n \geq n$

  Induktionsbehauptung: (Zu zeigen!): Es gilt $A(n+1)$, d.h. $2^{2+1} \geq n+1$.

  Beweis: $2^{n+1} = 2 * 2^n \underbrace{\geq}_{Ind.vor.} 2 * n$

  $$= n+n$$

  $$\geq n+1,$$

  also $2^{n+1} \geq n+1$ $\square$

3.4.2 Bemerkung

Für Formeln wie in Beispiel 3.4.1a) benutzen wir das *Summenzeichen* Σ (sigma, großes griechisches S)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad 1+2+3+...+n \; k = 1k = 2k = 3k = n$$

weitere Bsp:

$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2*1+2*2+...2*n$ $\sum_{k=4}^{n} 2k = 2*4+2*5+....2*n$

$\sum_{k=1}^{3} 7 = 7+7+7 = 21$

allg. $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_n \; (a_m, a_{m+1}, ...a\text{–}n \in \mathbb{R})$

h heißt Summationszeichen

$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i$

Schreibweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k, \sum_{k=1,k\neq 2}^{4} a_k = a_1 + a_3 + a_4$$

Für $n < m$ setzt man

$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0(\textit{leere Summe})$, z.B. $\sum_{k=7}^{3} k = 0$

Produktzeichen Π

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m * a_{m+1}...a_n,$$

für $n < m$ setze $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$

Rechenregeln für Summen (zu beweisen z.B. durch vollständige Induktion)

a)

$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)*a$

$(\sum_{k=3}^{5} a = a+a+a = (5-3+1)*a)$

b)

$\sum_{k=m}^{n}(c*a_k) = c*\sum_{k=m}^{n} a_k$

c) Indexverschiebung

$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + ...a_n$
$= a_{(m+e)-e} + a_{(m+1+e)-e} + ... + a_{(n+e)-e}$
neuer Summationsindex $j := k+e$

(k durchläuft Werte: $m, m+1..., n$,
j durchläuft Werte: $m+e, m+1+e, ...n+e$)

also gilt $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+e}^{n+e} a_{j-e}$

(Beispiel: $\sum_{k=0}^{5} a_k * x^{k+2} = \sum_{j=2}^{7} a_{j-2} * x^j$)

d) Addition von Summen gleicher Länge

$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$

e) Aufspalten

$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{n} a_k$ für $m < l < n$

f) Teleskopsumme

$\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$

$\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k+1} = (a_m - a_{m+1} + (a_{m+1} - a_{m+2} + (a_{m+2}...) + (a_n - an + 1))$

g) Doppelsummen

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{im} = a_{11} + a_{12} + ... + a_{1m}$

$+a_{21} + a_{22} + a_{2m}$

3.4.3 Verschärftes Induktionsprinzip

$A(n), n_0$ wie in 3.4.1

Es gelte:

(1) $A(n_0)$ ist wahr

(2) $\forall n \geq n_0$:
Sind $A(n_0)$, ... , $A(n)$ wahr, so ist $A(n+1)$ wahr.

(d.h. $A(n_0) \wedge A(n_0+1) \wedge ... \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$)

Dann ist A(n) wahr für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

<u>Beispiel:</u> $A(n)$: Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist Primzahl oder Produkt von Primzahlen.

<u>Beweis:</u>

<u>Induktionsanfang:</u> $(n_0 = 2)$. $n = 2$ ist Primzahl ✓

Induktionsschritt: Sei $n \geq n_0 \qquad (n \geq 2)$

• Induktionsvoraussetzung:

Aussage gilt für $2, 3, 4, ..., n$

$(A(2), A(3), A(4), ..., A(n)$ wahr)

• Induktionsbehauptung:

$A(n+1)$ gilt, d.h. $n+1$ ist Primzahl oder Produkt von Primzahlen.

Beweis:

- falls $n+1$ Primzahl, so gilt $A(n+1)$
- falls $n+1$ keine Primzahl, dann ist $n+1 = k \cdot l$, für $k, l \in \mathbb{N}$, $1 < k < n+1, 1 < l < n+1$ ($k = l$ möglich).

  Nach Induktionsvoraussetzung:

  Aussage gilt für k und $l \Rightarrow n+1$ ist Produkt von Primzahlen.
  ($A(n+1)$ ist wahr) $\square$

3.5 Schubfachprinzip

3.5.1 Idee

In einem Schrank befinden sich n verschiedene Paar Schuhe. Wie viele Schuhe muss man maximal herausziehen, bis man sicher ein zusammenpassendes Paar hat?

(Antwort: $n+1$)

3.5.2 Satz

(Schubfachprinzip, engl.: *pigeon hole principle*)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$.

Verteilt man n Objekte auf k Fächer, so gibt es ein Fach, das mindestens $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte enthält.

(Dabei bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl z mit $x \leq z$.)

Beweis (durch Kontraposition):

$(\underbrace{n \text{ Objekte}, k \text{ Fächer}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\exists \text{ Fach mit mind. } \lceil \frac{n}{k} \rceil \text{ Objekten}}_{B}$

statt $A \Rightarrow B$ zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$)

$(\neg B)$ Jedes Fach enthalte höchstens $\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$ Objekte.

Dann ist die Gesamtzahl von Objekten höchstens

$$k \cdot \underbrace{(\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1)}_{< \frac{n}{k}} < k \cdot \frac{n}{k} = n$$

$(\neg A)$ es gibt also <u>weniger</u> als n Objekte $\square$

3.5.3 Beispiel

a) Wieviele Menschen müssen auf einer Party sein, damit <u>sicher</u> 2 am selben Tag Geburtstag haben?

367

b) Auf jeder Party mit mindestens 2 Gästen gibt es 2 Personen, die dieselbe Anzahl <u>Freunde</u> auf der Party haben.

Beweis: Sei n die Anzahl der Partygäste. Jeder Gast kann mit $0, 1, 2, ..., n-1$ Gästen befreundet sein (n Möglichkeiten).

Aber: Es kann nicht sein, dass ein Gast 0 Freunde hat und gleichzeitig ein Gast $n-1$ (=alle) Freunde hat.

$\Rightarrow$ Es gibt $n-1$ mögliche Werte für die Anzahl der Freunde, entspricht $n-1$ Fächern.

Jeder der n Gäste trägt sich in ein Fach ein
$\Rightarrow$ mindestens 2 Gäste sind im selben Fach. $\square$

c) In Berlin gibt es mindestens 2 Personen, die genau dieselbe Anzahl Haare auf dem Kopf haben.

Beweis: Anzahl Haare im Durchschnitt:

blond	150.000
braun	110.000
schwarz	100.000
rot	90.000

zur Sicherheit: maximal 1 Millionen Haare möglich
entspricht 1 Mio Fächer.

Anzahl Einwohner in Berlin: 3,5 Millionen $\Rightarrow$ Behauptung 3.5.2 $\square$

3.6 Weitere Beweistechniken (Werkzeugkiste)

a) Wichtigste Technik: Ersetzen eines mathematischen Begriffs durch seine Definition (und umgekehrt). $A(\subset B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\})$

b) Aussagen der Form $\forall a \in S$ gilt $P(a)$:
beginne mit: Sei $a \in S$, zeige $P(a)$.

c) Aussage der Form $\exists a \in S$ mit $P(a)$
oft: finde/gebe konkretes Element a an, für dass $P(a)$ gilt.

d) Gleichheit von Mengen zeigt man oft mittels Inklusion (vgl. Definition 2.1(i))

Zu zeigen: $A = B$ $(A, B$ Mengen)
zeige: $A \subseteq B$ (Sei $a \in A \Rightarrow ... \Rightarrow ... \Rightarrow a \in B$) 2.1 (i))
und $B \subseteq A$ (Sei $b \in B \Rightarrow ... \Rightarrow ... \Rightarrow b \in A$)

$\subseteq$ ...
$\supseteq$ ...

<u>Beispiel:</u> 2.5f)

$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Beweis:
$\subseteq$ Sei $x \in A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

1. Fall :
   $x \in A \backslash B$, dann gilt $x \in A$, also $x \in A \cup B$

   Außerdem $x \notin B$, also gilt auch $x \notin A \cap B$

   $\Rightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

2.Fall
   Ist $x \in B \backslash A$, so argumentiere analog.

$\supseteq$ sei $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
$\Rightarrow x \in A$ oder $x \in B$.

1.Fall

$x \in A$, so ist $x \notin B$, da $x \notin A \cap B$
$\Rightarrow x \in A \backslash B \subseteq (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$
$= A \triangle B$,
d.h. $x \in A \triangle B$.

2.Fall (1. Fall analog)

$x \in B$, so $x \notin A$, da $x \notin A \cap B$
$\Rightarrow x \in B \backslash A \subseteq A \triangle B$
Also $x \in A \triangle B$

e) Äquivalenzen ($A \Leftrightarrow B, A, B$ Aussagen) werden meist in 2 Schritten bewiesen:

Hinrichtung zeigt $A \Rightarrow B$,
Rückrichtung zeigt $B \Rightarrow A$.

$\Rightarrow$: ...
$\Leftarrow$: ...

(oft auch eine von beiden mittels Kontraposition)

Beispiel: 2.5g) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

Beweis:
$\Rightarrow$: Sei $A \cap B = A$. Dann ist $A = A \cap B \subseteq B$
$\Leftarrow$: Sei $A \subseteq B$. Dann ist $A \subseteq A$ und $A \subseteq B$,
also ist $A \subseteq A \cap B$
außerdem $A \cap B \subseteq A$

$\Rightarrow A = A \cap B$ □

2.5h) analog.

f) Äquivalenzen der Form:
Sei ... . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) ...
- b) ...
- c) ..
- d) ...

Zeigt man durch *Ringschluss*:
Zeige $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$
(oder andere Reihenfolge, soll *Ring* geben.)

4 Abbildungen

4.1 Definition

a) Eine Abbildung (oder Funktion)

$$f : A \to B$$

besteht aus

- zwei nicht-leeren Mengen:
  A, dem Definitionsbereich von f
  B, dem Bildbereich von f
- und einer Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet

Wir schreiben dann $b = f(a)$, nennen b das Bild oder den Funktionswert von a (unter f), und a (ein) Urbild von b (unter f).

Notation:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

b) Die Menge $G_f := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$ heißt der Graph von f.

4.2 Beispiele

Siehe Folien!

4.3 Beispiele

a) A Menge

$$\begin{aligned} id_A : A &\to A \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

identische Abbildung

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$ ist Abbildung (aus der Schule bekannt als $f(x) = x^2$)

c) $\wedge$ kann als Abbildung aufgefasst werden, $+$ ebenso:

$$\begin{aligned} \wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} &\to \{0,1\} \\ (A,B) &\mapsto A \wedge B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\mapsto a+b \end{aligned}$$

Allgemein bezeichnet man eine Abbildung $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ $(n,m \in \mathbb{N})$ als boolesche Funktion.

4.4 Definition

Zwei Abbildungen $f : A \to B$, $g : C \to D$ heißen gleich (in Zeichen: $f = g$), wenn:

- $A = C$
- $B = D$
- $f(a) = g(a)$

$\forall a \in A (= C)$

4.5 Beispiel

$f : \{0,1\} \to \{0,1\}, x \mapsto x$
$g : \{0,1\} \to \{0,1\}, x \mapsto x^2$

$f = g$

4.6 Definition

Sei $f : A \to B$, seien $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ Teilmengen.

Dann heißt

a) $f(A_1) := \{f(a) \mid a \in A_1\} \subseteq B$ das Bild von A_1 (unter f) (Bildmenge).

(Beispiel: $$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \\ A_1 &= \{1,3\} \\ f(A_1) &= \{f(1), f(3)\} = \{2,6\} \end{aligned}$$)

b) $f^{-1}(B_1) := \{a \in A \mid f(a) \in B_1\} \subseteq A$
das Urbild von B_1 (unter f).

(Beispiel oben: $B_1 = \{8, 14, 100\}, f^{-1}(B_1) = \{4, 7, 50\}$
$B_2 = \{3\}, f^{-1}(B_2) = \emptyset$)

c) f surjektiv, falls gilt: $f(a) = B$

(d.h. $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$)

[alle Elemente von B werden getroffen]

d) f injektiv, falls gilt:

$\forall a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ gilt $f(a_1) \neq f(a_2)$

(äquivalent: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$)

[kein Element von B wird doppelt getroffen]

e) f bijektiv, falls f surjektiv und injektiv (f ist Bijektion).

[jedes Element wird genau einmal getroffen]

4.7 Beispiele

siehe Folien

a) f aus Beispiel in 4.6 a) ist injektiv, aber nicht surjektiv:

$f(\mathbb{N})$ ist Menge der geraden natürlichen Zahlen, nicht $\mathbb{N}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

nicht surjektiv:

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \neq \mathbb{R}$

nicht injektiv:

$f(1) = f(-1) = 1$
$f(2) = f(-2) = 4$

$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$x \mapsto x^2$

injektiv, surjektiv, bijektiv

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x + 1$

ist surjektiv:

Sei $y \in \mathbb{R}$. Zeige: $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $y = 2x + 1$ (vgl. 3.6 b))

Wähle $x = \frac{y-1}{2}$

f ist injektiv:

angenommen, es gibt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
mit $f(x_1) = f(x_2)$, d.h.
$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$,
dann folgt $x_1 = x_2$. $\circledast$

4.8 Definition

Sei $f : A \to B$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrfunktion.

$f^{-1} : B \to A$, indem wir jedem $b \in B$ dasjenige $a \in A$ zuordnen, für das $f(a) = b$ gilt.

4.9 Beispiel

$A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$

$f : (A \to B)$ bijektiv
$a_1 \to b_2$
$a_2 \to b_3$
$a_3 \to b_1$

$f^{-1} : B \to A$
$b_1 \to a_3$
$b_2 \to a_1$
$b_3 \to a_2$

4.10 Bemerkung

Man kann jedem $b \in B$ wirklich ein $a \in A$ zuordnen, das $f(a) = b$ erfüllt, denn f ist surjektiv. Nur ein solches a, denn f ist injektiv.

4.11 Definition

Seien $g : A \to B \qquad f : B \to C$
Abbildungen.

Dann heißt die Abbildung: $f \circ g : A \to C$
$a \to (f \circ g)(a) :=$
$f(g(a)) \forall a \in A$

die Hintereinanderausführung oder Komposition von f mit g.

f nach g

$A \underbrace{\to}_{g} B \underbrace{\to}_{f} C$

4.12 Beispiel

$A = B = C = \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x + 1 \qquad x \to 2x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2 * (x + 1)$
$= 2x + 2$

hier also $f \circ g \neq g \circ f$!

4.13 Satz

Die Komposition {inj., surj., bij} Abbildungen ist {inj., surj., bij}

Beweis: Pü / Ü

4.14 Satz (Charakterisierung bijektiver Abbildungen)

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

f ist bijektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$.

Diese Abbildung g ist eindeutig und genau die Umkehrfunktion von f, also $g = f^{-1}$.

f^{-1} ist ebenfalls bijektiv und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei f bijektiv. Dann existiert für jedes $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $\underline{b = f(a)}$.

Definiere nun also $g : B \to A$ mit $\underline{g(b) = a}$, dann gilt die Aussage:

$(g \circ f)(a) = g(\underline{f(a)}) = g(\underline{b}) = a = id_A(a)$

$(f \circ g)(b) = f(\underline{g(b)}) = f(\underline{a}) = b = id_B(b)$

"$\Leftarrow$" Es existiere Abbildung g wie angegeben (zu zeigen: f ist bijektiv)

- **f surjektiv:** Sei $b \in B$. Dann ist $g(b) \in A$, $f(\underbrace{g(b)}_{\text{das ist das gesuchte } a! \ (a := g(b))}) = id_B(b) = b$, d.h.

  $g(b)$ ist Urbild von b unter f.

- **f injektiv:**

  Sei $\underline{f(a_1) = f(a_2)}$

  Dann ist $\underline{\underline{a_1}} = g(\underline{f(a_1)}) = g(f(a_2)) = \underline{\underline{a_2}}$

- **Eindeutigkeit von g:**

  Angenommen es gäbe Abbildungen g_1, g_2 mit angegebenen Eigenschaften.

  Sei $b \in B$. Dann gibt es genau ein $a \in A$ mit $\underline{f(a) = b}$.

  Also $g_1(b) = g_1(\underline{f(a)}) = a = g_2(\underline{f(a)}) = g_2(\underline{b})$,
  d.h. $g_1 = g_2$

- **f^{-1} bijektiv, $(f^{-1})^{-1} = f$:**

  folgt aus $f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$,
  wende Aussage des Satzes auf f^{-1} an. $\square$

4.15 Bemerkung / Definition

Bijektivität erlaubt präzise Definition der Endlichkeit / Unendlichkeit von Mengen:

a) Menge $M \neq \emptyset$ heißt <u>endlich</u> $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \exists$ bijektive Abbildung $f : \{1, ..., n\} \to M$.

   ($\emptyset$ wird auch als endlich bezeichnet).

   Andernfalls heißt M <u>unendlich</u>.

   [Hilberts Hotel]

b) Zwei Mengen M_1, M_2 heißen <u>gleichmächtig</u>, falls es eine bijektive Abbildung $g : M_1 \to M_2$ gibt.

   <u>Beispiel:</u> $\mathbb{N}, 2\mathbb{N}$ (alle geraden natürlichen Zahlen) gleichmächtig:

$$g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n$$

ist bijektiv.

c) Menge M heißt <u>abzählbar unendlich</u>, wenn M gleichmächtig ist wie $\mathbb{N}$, d.h. $\exists$ bijektive Abbildung.

   $h : \mathbb{N} \to M$.

<u>Beispiel:</u>

- $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich: $h = id_{\mathbb{N}}$
- $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich: $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 (x \to x - 1)$ ist bijektiv.
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich: (Geschichte vom Teufel: $h \to \mathbb{Z}$
  $1 \to 0$
  $2 \to 1$
  $3 \to -1$
  $4 \to 2$
  $\underbrace{5}_{Tag} \to \underbrace{-2}_{Zahl}$
  $\vdots$

allgemein:

$$x \to \begin{cases} k & \text{falls } x = 2k+1 (\text{für } k = 0,1,2,...) \\ -k & \text{falls } x = 2k (\text{für } k = 1,2,3,...) \end{cases}$$

- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich:

$$\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}...$$

$$\frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{4}\frac{2}{5}...$$

$$\frac{3}{1}\frac{3}{2}\frac{3}{3}\frac{3}{4}\frac{3}{5}...$$

$$\vdots$$

  Cantorsches Diagonalverfahren.

- $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar unendlich!
  (Beweis von Cantor, 2. Diagonalisierungsargument) $\to$ eventuell später

- $P(\mathbb{N}$ ist nicht abzählbar unendlich (allgemein: $\mid A \mid < \mid P(A) \mid$ Satz von Cantor.)

4.16 Satz (Wichtiger Satz für endliche Mengen)

Seien $A, B \neq \emptyset$ endliche Mengen, $\mid A \mid = \mid B \mid$, und $f : A \to B$ eine Abbildung.

Dann gilt f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv.

Beweis:

Wir setzen $n :\mid A \mid = \mid B \mid$. Es genügt zu zeigen f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv.

$\Rightarrow$ Sei f injektiv, d.h. falls $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$, dann gilt $f(a_1) \neq f(a_2)$.

D.h., verschiedene Elemente aus A werden auf verschiedene Elemente aus B abgebildet, die n Elemente aus A also auf n verschiedene Elemente aus B.
Da B genau n Elemente besitzt, ist f surjektiv. ($f(A) = B$).

[formaler: d.h. $\mid (f(A) \mid = \mid A \mid = \mid B \mid$.
Da $f(A) \subseteq B$ endlich, folgt $f(A) = B$. $\square$

4.17 Das Prinzip der rekursiven Definition von Abbildungen

Sei $B \neq \emptyset$ Menge, $n_0 \in \mathbb{N}$, $\qquad A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$.

Man kann eine Funktion $f : A \to B$ definieren durch

- Angabe des Startwerts $f(n_0)$
- Beschreibung, wie man für jedes $n \in A$ den Funktionswert f(n+1) aus $f(n)$ berechnet (Rekursionsschritt).

4.18 Beispiel

a) Die Fakultätsfunktion: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$
mit $f(0) = 0 \underbrace{\;!\;}_{\text{Fakultät}} = 1$ (Startwert)

$f(n+1) = (n+1)! = n!(n+1)$ für alle $n \leq 0$

Also:
$f(1) = 1! = 0! * 1$
$f(2) = 2! = 1! * 2 = 1 * 2 = 2$
$f(3) = 3! = 2! * 3 = 1 * 2 * 3$
$f(4) = 4! = 3! * 4 = 1 * 2 * 3 * 4$
$\vdots$
$f(70) = 70! \approx 1,2 * 10^{100}$

b) Potenzen: für festes $x \in \mathbb{R}$ definiere
$x^0 = 1$
$x^{n+1} = x^n * x$ für alle $n \geq 0$

$(Px : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} \qquad n \to x^n)$

c) Eine Pflanze verdopple jeden Tag die Anzahl ihrer Knospen und produziere eine zusätzliche.

$f : \mathbb{N} \to N$ beschreibe die Anzahl der Knospen nach n Tagen.

$f(1) = 1$
$f(2) = 2 * 1 + 1 = 3$
$f(3) = 2 * 3 * 1 = 7$
$f(4) = 2 * 7 + 1 = 15$
$\vdots$