Mathematik I WS 15/16

Thomas Dinges[1] Jonas Wolf [2]

30. November 2015

Inoffizielles Skript für die Vorlesung Mathematik I im WS 15/16, bei Britta Dorn.
Alle Angaben ohne Gewähr. Fehler können gerne via E-Mail gemeldet werden.

[1]thomas.dinges@student.uni-tuebingen.de
[2]mail@jonaswolf.de

Inhaltsverzeichnis

1 Logik

Aussagenlogik

Eine **logische Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch (also nie beides zugleich) ist. Wahre Aussagen haben den Wahrheitswert 1 (auch wahr, w, true, t), falsche den Wert 0 (auch falsch, f, false).

Notation: Aussagenvariablen $A, B, C, ...A_1, A_2$.

Beispiele:

- 2 ist eine gerade Zahl (1)
- Heute ist Montag (1)
- 2 ist eine Primzahl (1)
- 12 ist eine Primzahl (0)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (1)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Aussage, aber unbekannt, ob 1 oder 0)
- 7 (keine Aussage)
- Ist 173 eine Primzahl? (keine Aussage)

Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen (**Junktoren**, z.B. und, oder, ...) kompliziertere bilden. Diese werden Ausdrücke genannt (auch Aussagen sind Ausdrücke). Durch sogenannte **Wahrheitstafeln** gibt man an, wie der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Werte der Teilaussagen bedingt ist. Im folgenden seien A, B Aussagen.

Die wichtigsten Junktoren:

1.1 Negation

Verneinung von A: $\neg A$ (auch $\bar{A}$), *nicht* A, ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Beispiele:

- A: 6 ist durch 3 teilbar. (1)
- $\neg A$: 6 ist nicht durch 3 teilbar. (0)
- B: 4,5 ist eine gerade Zahl (0)
- $\neg B$: 4,5 ist keine gerade Zahl. (1)

1.2 Konjunktion

Verknüpfung von A und B durch *und*: $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiele:

- $\underbrace{\text{6 ist eine gerade Zahl}}_{A(1)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (1)
- $\underbrace{\text{9 ist eine gerade Zahl}}_{A(0)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (0)

1.3 Disjunktion

oder: $A \vee B$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

⚠ Einschließendes oder, kein entweder...oder.

Beispiele:

- 6 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)

- 9 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)
- 7 ist gerade oder durch 3 teilbar. (0)

1.4 XOR

entweder oder: A xor B, $A \oplus B$ (ausschließendes oder, exclusive or).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.5 Implikation

wenn, dann, $A \Rightarrow B$:

- wenn A gilt, dann auch B
- A impliziert B
- aus A folgt B
- A ist <u>hinreichend</u> für B,
- B ist <u>notwendig</u> für A

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Merke: *ex falso quodlibet* : aus einer falschen Aussage kann man alles folgern!

(Die Implikation $A \Rightarrow B$ sagt nur, dass B wahr sein muss, <u>falls</u> A wahr ist. Sie sagt nicht, dass B tatsächlich war ist.)

Beispiele:

- Wenn $1 = 0$, bin ich der Papst. (1)

1.6 Äquivalenz

genau dann wenn, $A \Leftrightarrow B$ (dann und nur dann wenn, g.d.w, äquivalent, if and only if, iff)

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiele:

- Heute ist Montag genau dann wenn morgen Dienstag ist. (1)
- Eine natürliche Zahl $\underbrace{\text{ist durch 6 teilbar}}_{A}$ g. d. w. sie $\underbrace{\text{durch 3 teilbar ist}}_{B}$. (0)

  $A \Rightarrow B$ (1)

  $B \Rightarrow A$ (0)

Festlegung

$\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren: $(\neg A \wedge B)$ heißt $(\neg A) \wedge B$

1.7 Beispiel

a)

Wann ist der Ausdruck $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ wahr?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

⚠ Klammerung relevant

Welche Wahrheitswerte ergeben sich für

- $A \vee (B \wedge \neg A) \wedge B)$?

- $A \lor B \land \neg A \land B$?

$(A \lor B) \land \neg(A \land B)$ und $(A \oplus B)$ haben dieselben Wahrheitstafeln. Ausdrücke sehen unterschiedlich aus (Syntax), aber haben dieselbe Bedeutung (Semantik). Dies führt zu *1.8 Definition*.

b)

Wann ist $(A \land B) \Rightarrow \neg(C \lor A)$ falsch?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel: alle möglichen Belegungen von A, B, C mit 0/1

A	B	C	$(A \land B)$	$\neg(C \lor A)$	$(A \land B) \Rightarrow \neg(C \lor A)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

oder überlegen:

$(A \land B) \Rightarrow \neg(C \lor A)$ ist nur 0, wenn

$(A \land B) = 1$, also $A = 1$ und $B = 1$

und

$\neg(C \lor A) = 0$ ist.

(Wissen: $A = 1$), also $\underline{C = 0}$ oder $\underline{C = 1}$ möglich.

1.8 Definition

Haben zwei Ausdrücke α und β bei jeder Kombination von Wahrheitswerten ihrer Aussagevariablen den gleichen Wahrheitswert, so heißen sie logisch äquivalent; man schreibt $\alpha \equiv \beta$. ('$\equiv$' ist kein Junktor, entspricht '=')

Es gilt: Falls $\alpha \equiv \beta$ gilt, hat der Ausdruck $\alpha \Leftrightarrow \beta$ immer den Wahrheitswert 1.

1.9 Satz

Seien A, B, C Aussagen. Es gelten folgende logische Äquivalenzen:

a) Doppelte Negation: $A \equiv \neg(\neg A)$

b) Kommutativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- $(A \oplus B) \equiv (B \oplus A)$
- $(A \Leftrightarrow B) \equiv (B \Leftrightarrow A)$

  ⚠ gilt nicht für '$\Rightarrow$' !! ($A \Rightarrow B \not\equiv B \Rightarrow A$)

c) Assoziativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \equiv A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

d) Distributivität:

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

e) Regeln von DeMorgan:

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

f) $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

g) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

h) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

(Alle Äquivalenzen gelten auch, wenn die Aussagevariablen durch Ausdrücke ersetzt werden.)

<u>Beweis:</u> Jeweils mittels Wahrheitstafel (Übung!), zum Beispiel:

a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
1	0	1
0	1	0

e)

A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

1.10 Bemerkung

(1.9 f): $(A \Rightarrow B) \equiv \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}_{\text{wird Kontraposition genannt, wichtig für Beweis. Wird im Sprachgebrauch oft falsch verwendet.}}$

Beispiel: Pit ist $\underset{A}{\text{ein}}$ Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist $\underset{B}{\text{ein}}$ Hund.

äquivalent zu: $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Pit ist kein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist kein Dackel.

aber nicht zu: $B \Rightarrow A$

Pit ist ein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist ein Dackel.

und nicht zu: $\neg A \Rightarrow \neg B$

Pit ist kein Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist kein Hund.

Beispiel: Sohn des Logikers / bellende Hunde ($\rightarrow$ Folien)

1.11 Bemerkung (Logisches Umformen)

Sei α ein Ausdruck. Ersetzen von Teilausdrücken von α durch logisch äquivalente Ausdrücke liefert einen zu α äquivalenten Ausdruck. So erhält man eventuell kürzere/einfachere Ausdrücke, zum Beispiel:

$$\neg(A \Rightarrow B) \underset{1.9\text{ g)}}{\equiv} \neg(\neg A \vee B) \underset{1.9\text{ e)}}{\equiv} \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \underset{1.9\text{ a)}}{\equiv} A \wedge \neg B$$

1.12 Definition

Ein Ausdruck heißt <u>Tautologie</u>, wenn er für jede Belegung seiner Aussagevariablen, immer den Wert 1 annimmt. Hat er immer Wert 0, heißt er <u>Kontradiktion</u>. Gibt es mindestens eine Belegung der Aussagevariablen, so dass der Ausdruck Wert 1 hat, heißt er <u>erfüllbar</u>.

1.13 Beispiel

a) $A \vee \neg A$ Tautologie
   $A \wedge \neg A$ Kontradiktion

b) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.11).
   $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.9g).

c) $A \wedge \neg B$ ist erfüllbar (durch $A = 1, B = 0$).

Prädikatenlogik

Eine <u>Aussageform</u> ist ein sprachliches Gebilde, dass formal wie eine Aussage aussieht, aber eine oder mehrere Variablen enthält.

Beispiel: $P(x): \underbrace{x}_{Variable} \underbrace{< 10}_{\text{Prädikat (Eigenschaft)}}$

$Q(x)$: x studiert Informatik $R(y)$: y ist Primzahl und $y^2 + 2$ ist Primzahl.

Eine Aussageform$P(x)$ wird zur Aussage, wenn man die Variable durch ein konkretes Objekt ersetzt. Diest ist nur dann sinnvoll, wenn klar ist, welche Werte für x erlaubt sind, daher wird oft die zugelassene Wertemenge mit angegeben. (hier Vorgriff auf Kapitel *Mengen*)

Im Beispiel:

$P(3)$ ist wahr, $P(42)$ falsch.

$R(2)$ ist falsch, $R(3)$ ist wahr.

Oft ist die Frage interessant, ob es wenigstens ein x gibt, für das $P(x)$ wahr ist, oder ob $P(x)$ sogar für alle zugelassenen x wahr ist.

1.14 Definition

Sei $P(x)$ eine Aussageform.

a) Die Aussage *Für alle x (aus einer bestimmten Menge M) gilt $P(x)$.* ist wahr genau dann wenn $P(x)$ für alle in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\forall}_{\text{für alle, für jedes}} \quad x \quad \underbrace{\in M}_{\text{aus der Menge M}} \quad \underbrace{:}_{\text{gilt}} \quad \underbrace{P(x)}_{\text{Eigenschaft}}$

auch $\underbrace{\forall}_{x \in M} P(x)$.

Das Symbol $\forall$ heißt All- Quantor, die Aussage All- Aussage.

b) Die Aussage *Es gibt (mindestens) ein x aus M, das die Eigenschaft P(x) besitzt.* ist wahr, g.d.w P(x) für mindestens eines der in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\exists}_{\text{es gibt, es existiert}} \quad x \in M \quad \underbrace{:}_{\text{so dass gilt}} \quad P(x).$

$\exists$ heißt Existenzquantor, die Aussage Existenzmenge.

1.15 Beispiel / Bemerkung

Übungsgruppe G: $\underbrace{a}_{Anna} \underbrace{b}_{Bob} \underbrace{c}_{Clara}$

$B(x)$: x ist blond. $W(x)$: x ist weiblich.

$B(a) = 1, W(b) = 0)$

1. Alle Studenten der Gruppe sind blond. (1)

   $\forall x \in G$: x ist blond

   $\forall x \in G$: B(x) (1)

   Das bedeutet: a blond $\wedge$ b blond $\wedge$ c blond
   $\underbrace{B(a)}_{1} \wedge \underbrace{B(b)}_{1} \wedge \underbrace{B(c)}_{1}$

   $\forall$ ist also eine Verallgemeinerung der Konjunktion.

2. Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   $\underbrace{W(a)}_{1} \wedge \underbrace{W(b)}_{0} \wedge \underbrace{W(c)}_{1}(0)$

3. Es gibt einen Studenten der Gruppe, der weiblich ist. (1)

   $\exists x \in G$: W(x) (1)

   bedeutet: $\underbrace{W(a)}_{1} \vee \underbrace{W(b)}_{0} \vee \underbrace{W(c)}_{1} = 1$

   $\exists$ ist verallgemeinerte Disjunktion.

4. Aussage A: Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   Verneinung von A? $\neg A$

   ⚠ Nicht korrekt wäre: Alle Studenten der Gruppe sind männlich. (Wahrheitswert ist auch 0)

   Korrekt: Nicht alle Studenten der Gruppe sind weiblich (1) Es gibt (mindestens) einen Studenten der Gruppe, der nicht weiblich ist. (1)

allgemeiner:

1.16 Negation von All- und Existenzaussagen

a) $\neg(\forall x \in M : P(x)) \equiv \exists x \in M : \neg P(x)$

b) $\neg(\exists x \in M : P(x)) \equiv \forall x \in M : \neg P(x)$

(Verallgemeinerung der Regeln von DeMorgan) (vergleiche Beispiel 1.15, 4):

$\neg(\forall x \in G : W(x))$

$\equiv \neg(W(a) \wedge W(b) \wedge W(c)$

$\underbrace{\equiv}_{DeMorgan} (\neg W(a)) \vee (\neg W(b)) \vee (\neg(W(c))$

$\equiv \exists x \in G : \neg W(x)$

Bemerkung

Aussageformen können auch mehrere Variablen enthalten, Aussagen mit mehreren Quantoren sind möglich.

Zum Beispiel:

$\exists x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$
$\exists x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$

$\forall x \in X \quad \exists y \in Y : P(x,y)$
$\forall x \in X \quad \forall y \in Y : P(x,y)$

Negation dann durch mehrfaches Anwenden von 1.16, zum Beispiel:

$\neg(\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x,y,z))$
$\equiv \exists x \in X : \neg(\forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x,y,z))$
$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y : \neg(\exists z \in Z : P(x,y,z))$
$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad \forall z \in Z : \neg P(x,y,z))$

Also:
ändere $\exists$ in $\forall$,
$\forall$ in $\exists$,
verneine Prädikat.

2 Mengen

2.1 Definition (Georg Cantor, 1845-1918)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten (Elementen) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Im Folgenden seien A, B Mengen.

a) $x \in A : x$ ist Element der Menge A
$x \notin A : x$ ist nicht Element der Menge A
oder auch:
$A \ni x : x$ ist Element der Menge A
$A \not\ni x : x$ ist nicht Element der Menge A

b) Eine Menge kann beschrieben werden durch:

- Aufzählung ihrer Elemente, zum Beispiel:
  $M_1 = \{a, b, c\}$ $\quad$ ($= \{c, a, b\}$, d.h. Reihenfolge spielt keine Rolle)
  Achtung: Keine Wiederholungen!
  $M_2 = \{☺, ☹\}$
  $M_3 = \{\underline{3}, \underline{\{1,2\}}, \underline{M_1}\}$
  geht nur bei endlichen Mengen oder bestimmten unendlichen Mengen, zum Beispiel:
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$ Menge der ganzen Zahlen

- Charakterisierung ihrer Elemente:
  $A = \{x \mid x$ besitzt die Eigenschaft $E\}$, z.B.:
  $A = \{n \underbrace{\ \mid\ }_{\text{sprich: } \textit{"mit der Eigenschaft"}} n \in \mathbb{N}$ und n ist gerade$\}$
  $= \{2, 4, 6, 8, ...\}$
  $= \{x \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2 \cdot k\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

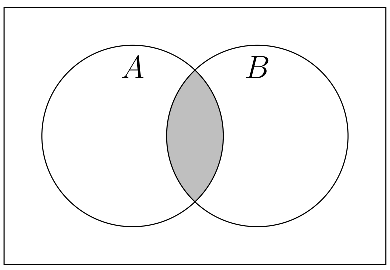
  Bsp: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ Menge der rationalen Zahlen

c) Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die Menge ohne Elemente (<u>leere Menge</u>)

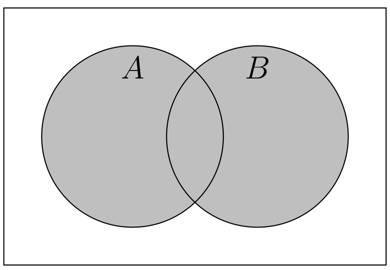
d) Mit $|A|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente der Menge A (<u>Kardinalität</u> oder <u>Mächtigkeit</u> von A), zum Beispiel:
$\big|\{1, a, *\}\big| = 3, \quad \big|\emptyset\big| = 0, \quad |\mathbb{N}| = \infty, \quad \big|\{\mathbb{N}\}\big| = 1$

e) $A \cap B \underbrace{:=}_{\text{wird definiert als}} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ heißt <u>Durchschnitt</u> oder <u>Schnittmenge</u> von A und B.

Grafische Veranschaulichung: Venn-Diagramm (⚠ gilt nicht als Beweis)



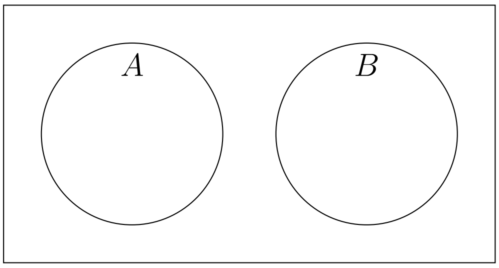
f) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ heißt <u>Vereinigung</u> von A und B.



Beispiele: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4\}$

$A \cap B = \{2, 3\}$,
$A \cap C = \emptyset$,
$B \cap C = \{4\} = C$,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

g) A und B heißen <u>disjunkt</u>, falls gilt $A \cap B = \emptyset$



h) A heißt <u>Teilmenge</u> von B, $A \subseteq B$, falls gilt:
$x \in A \Rightarrow x \in B$
Oder in Worten: Jedes Element von A ist auch Element von B.

Dasselbe bedeutet die Notation
$B \supseteq A$
(B ist Obermenge von A)

Beispiel: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)

Es gilt: $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A.

Achtung: Unterschied $\subseteq, \in$!
Zum Beispiel:
$A = \{1, \mathbb{N}\}$ (hier ist die Menge $\mathbb{N}$ ein Element von A, keine Teilmenge!)
$1 \in A, \quad \mathbb{N} \in A, \quad \mathbb{N} \not\subseteq A, \quad 2 \notin A, \quad \{1\} \subseteq A$

i) Zwei Mengen A, B heißen <u>gleich</u> ($A = B$, falls gilt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ (also $x \in A \Rightarrow / \Leftarrow / \Leftrightarrow x \in B$.

Darin liegt ein Beweisprinzip: Man zeigt $A = B$, indem man zeigt:

- $x \in A \Rightarrow x \in B$
- $x \in B \Rightarrow x \in A$ (mehr später)

Beispiel: $A = 2, 3, 4, \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \text{ und } x < 5\}$ $A = B$

j) $A \subsetneq B (A \subsetneqq B)$ bedeutet $A \subseteq B$, aber $A \neq B$.

(d.h. $\exists x \in B$ mit $x \notin A$, aber $x \in B$)

(A ist <u>echte</u> Teilmenge von B.)

k) Mit $P(A) := \{B \mid \text{B ist eine Teilmenge von A}\} = \{B \mid B \subseteq A\}$ bezeichnen wir die Menge aller (echten oder nicht echten) Teilmengen von A, die sogenannte Potenzmenge von A. ($\emptyset \subseteq A \forall A, A \subseteq A \forall A$)

Beispiel:

$A = \{1, \}, P(A) = \{\emptyset, \{\underbrace{1}_{A}\}\}$

$B = \{1, 2\}, P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\underbrace{1, 2}_{B}\}\}$

$C = \{1, 2, 3\}, P(C) = ...$ (8 Elemente)

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Was ist $P(P(A))$?
$P(P(A)) = P(\{\emptyset, \{1\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}$

l) $A \backslash B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ heißt die Differenz (A *ohne* B).

Ist $A \subseteq X$ mit einer Obermenge X, so heißt $X \backslash A$ das Komplement von A (bezüglich X). Wir schreiben A_X^C oder kurz A^C (wenn X aus dem Kontext klar ist).

m) $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ heißt die symmetrische Differenz von A und B.

2.2 Bemerkung

Verallgemeinerung der Vereinigung und des Durchschnitts:

$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge ... \wedge x \in A_n\}$

$$=: \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$A_1 \cup ... \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee ... \vee x \in A_n\}$

$$=: \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Beziehungsweise noch allgemeiner:

Sei S eine Menge von Mengen (*System von Mengen*)

$\cap A = \{x \mid x \in A \forall A \in S\}$
$A \subset S$

$\cup A = \{x \mid \exists A \in S \text{ mit } x \in A\}$
$A \in S$

2.3 Definition

Seien A, B Mengen.

$A \underbrace{x}_{Kreuz} B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Die Menge aller geordneten Paare, heißt kartesisches Produkt von A und B (nach René Descartes, 1596 - 1650).

Dabei legen wir fest: $(a, b) = (a', b')$(mit $a, a' \in A, b, b' \in B$) :
$\Leftrightarrow a = a'$ und $b = b$‘.

Allgemein sei für Mengen $A_1, ...A_n (n \in \mathbb{N})$
$A_1 x A_2 x ... x A_n := \{a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i, \forall i = 1...n\}$
die Menge aller geordneten n-Tupel (mit analoger Gleichheitsdefinition).

($n = 2$: Paare, $n = 3$: Tripel)

Schreibweise:

$$A_1 \times ... \times A : n =: \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$$

Ist eine der Mengen $A_1, ...A_n$ leer, setzen wir $A_1 \times ... \times A_n = \emptyset$.

Statt $A \times A$ schreiben wir auch A^2, statt $\underbrace{A \times ... \times A}_{n-Faktoren} = A^n$.

2.4 Beispiel

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$

$(1, 3) \in A \times B, \underbrace{(3, 1)}_{B \times A} \notin A \times B,$

$(\underbrace{3}_{B \times B}, \underbrace{3}_{A \times A}) \in A \times B \in B \times A$

$(1,2) \in A \times B, \in A \times A$

$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$

$B \times A = ...$

$B \times B = B^2 = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

2.5 Satz (Rechenregeln für Mengen)

Seien A, B, C, X Mengen. Dann gilt:

a) $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
(Kommutativgesetz)

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(Assoziativgesetz)

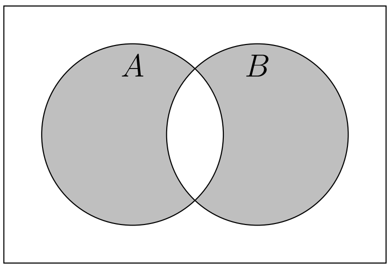
c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(Disbributivgesetz)

d) $A, B \subseteq X$, dann
$(A \cap B)_X^C = A_X^C \cup B_X^C$
$(A \cup B)_X^C = A_X^C \cap B_X^C$
(Regeln von DeMorgan)

e) $A \subseteq X$, dann $(A_X^C)_X^C = A$

f) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$(= \{x \mid x \in A \oplus x \in B\})$



g) $A \cap B = A$ genau dann, wenn $A \subseteq B$
$(A \cap B) = A \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B)$

h) $A \cup B = A \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq A$

Beweis

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Kommutativgesetz 1.9 b) $= \{x \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$

$A \cap B$ analog

b), c) Übung, wie a)
benutze Assoziativgesetz (1.9 c)) bzw. Distributivgesetz (1.9 d)) für logische Äquivalenzen.

d) $(A \cap B)_X^C$
$= \{x \mid x \in X \setminus (A \cap B)\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge (x \notin (A \cap B))\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge \neg(x \in (A \cap B))\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$
De Morgan 1.9 e) $= \{x \mid x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\}$
$= \{x \mid ((x \in X) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in X) \wedge (x \notin B))\}$
$= A_X^C \cup B_X^C$

2. Regel analog

e) ähnlich

f) g) h) später

3 Beweismethoden

Ein mathematischer <u>Beweis</u> ist die Herleitung der Wahrheit (oder Falschheit) einer Aussage aus einer Menge von <u>Axiomen</u> (nicht beweisbare Grundtatsachen) oder bereits bewiesenen Aussagen nmittels logischen Folgerungen.

Bewiesene Aussagen werden <u>Sätze</u> genannt.

<u>Lemma</u> - Hilfssatz, der nur als Grundlage für wichtigeren Satz formuliert und bewiesen wird.

<u>Theorem</u> - wichtiger Satz

Korollar - einfache Folgerung aus Satz, z.B. Spezialfall

Definition - Benennung/Bestimmung eines Begriffs/Symbols

$\square$ - Zeichen für Beweisende ($\blacksquare$, q.e.d., wzbw...)

Mathematische Sätze haben oft die Form:

Wenn V (Voraussetzung) gilt, dann gilt auch B (Behauptung)

(V, B: Aussagen), kurz: $V \Rightarrow B$

Zu zeigen ist also, dass $V \Rightarrow B$ eine wahre Aussage ist.

3.1 Direkter Beweis

Gehe davon aus, dass V wahr ist, folgere daraus, dass B wahr ist.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Sei } V \text{ wahr, } \Rightarrow \dots \\ \qquad\qquad \Rightarrow \dots \\ \qquad\qquad \Rightarrow \dots \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \Rightarrow B \text{ ist wahr} \end{array}\right]$$

Beispiel: $\underbrace{\text{Sei } n \in \mathbb{N}. \text{ Ist } n \text{ gerade}}_{V}$, $\underbrace{\text{so ist auch } n^2 \text{ gerade}}_{B}$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. // V ist wahr $\Rightarrow n = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

($\exists k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2 \cdot k$)

$\Rightarrow n^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot (2k^2)$

$\Rightarrow n^2$ ist gerade. // B ist wahr

$\square$

3.2 Beweis durch Kontraposition

vgl. Satz 1.9 f) $\quad A \Rightarrow B \quad \equiv \quad \neg B \Rightarrow \neg A$

Statt $V \Rightarrow B$ zu zeigen, können wir also auch $\neg B \Rightarrow \neg V$ zeigen.

[Es gelte $\neg B \Rightarrow \dots$

$\qquad \Rightarrow \dots$

$\qquad \Rightarrow \dots$

$\vdots$
$\Rightarrow$ es gilt $\neg V$]

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$.

$\underbrace{\text{Ist } n^2 \text{ gerade}}_{V}$, $\underbrace{\text{so ist auch } n \text{ gerade}}_{B}$.

Beweis durch Kontraposition:

Sei n ungerade. // $\neg B$ gilt.

$\Rightarrow n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{\underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}}$

$\Rightarrow n^2$ ist ungerade. // $\neg V$ gilt.

$\square$

3.3 Beweis durch Widerspruch, indirekter Beweis

Zu zeigen ist Aussage A. Wir gehen davon aus, dass A nicht gelte ($\neg A$ ist wahr) und folgern durch logische Schlüsse eine zweite Aussage B, von der wir wissen, dass sie falsch ist. Wenn alle logischen Schlüsse korrekt waren, muss also $\neg A$ falsch gewesen sein, also A wahr.

($((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$ ist Tautologie)

Beispiel: [Euklid] $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Wir nehmen an, dass die Aussage falsch ist, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ gilt, das heißt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit p. q. $\in \mathbb{Z}(q \neq 0)$ teilerfremd (vollständig gekürzter Bruch)

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Rightarrow p^2 = 2q^2$, also ist p^2 gerade, damit aber auch p gerade (Beispiel in 3.2), also $p = 2 * r$ mit $r \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow p^2 = (2r)^2 = 2q^2$
$\Rightarrow 4r^2 = 2q^2$
$\Rightarrow \underline{2r^2 = q^2}$

$\Rightarrow q^2$ gerade
$\Rightarrow q$ gerade

Also: p gerade, q gerade, Widerspruch zu p, q teilerfremd.

Also war die Annahme falsch, es muss $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gelten. $\square$

3.4 Vollständige Induktion

Eine Methode, um Aussagen über natürliche Zahlen zu beweisen.

Beispiel: Gauß

$1 + 2 + ... + 100 =?$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & ... & 50 \\ +\ 100 & 99 & 98 & ... & 51 \\ \hline 101 & 101 & 101 & ... & 101 \end{array}$$

$50 * 101 = 5050$

$(= \frac{100}{2} * 101)$

Allgemein:
$1 + 2 + 3 + ... + n \underbrace{=}_{Vermutung} \frac{n(n+1)}{2}$

$(n \in \mathbb{N})$

3.4.1 Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben (oft $n_0 = 1$).
Für jedes $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$, sei $A(n)$ eine Aussage, die von n abhängt.

Es gelte:

1. $A(n_0)$ ist wahr (*Induktionsanfang*)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$: $\underbrace{\text{Ist} A(n) \text{wahr,}}_{Induktionsvorraussetzung} \underbrace{\text{so ist} A(n+1) \text{wahr}}_{Induktionsbehauptung}$. (*Induktionsschritt*)

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr. (*Dominoprinzip*)

(Bemerkung: gilt auch für $\mathbb{N}_0$ ($n_0 = 0$ auch möglich) und für $n_0 \in \mathbb{Z}$, Behauptung gilt dann für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$).

Beispiel:

a) Kleiner Gauß $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\forall n\in\mathbb{N}$

<u>Beweis</u>:

$A(n): 1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

- Induktionsanfang $(n=1): A(1): 1=\frac{1*(1+1)}{2}$
- Induktionsschritt:

  Induktionsvorraussetzung: sei $n\geq 1$. Es gelte $A(n)$, d.h. $1+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

  Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, d.h. $1+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

  Beweis: $\underbrace{1+2+...+n}+(n+1)\underbrace{=}_{Ind.vor.}\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)$

  $$=\frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

  $$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  $A(n+1)$ $\square$

b) $A(n): 2^n\geq n\forall n\in\mathbb{N}$

- Induktionsanfang: $(n=1): A(1)$ gilt: $2^1\geq 1$
- Induktionsschritt:

  Induktionsvorraussetzung: Sei $n\geq 1$. Es gelte $A(n)$, d.h. $2^n\geq n$

  Induktionsbehauptung: (Zu zeigen!): Es gilt $A(n+1)$, d.h. $2^{2+1}\geq n+1$.

  Beweis: $2^{n+1}=2*2^n\underbrace{\geq}_{Ind.vor.}2*n$

  $$=n+n$$

  $$\geq n+1,$$

  also $\quad 2^{n+1}\geq n+1$ $\square$

3.4.2 Bemerkung

Für Formeln wie in Beispiel 3.4.1a) benutzen wir das *Summenzeichen* Σ (sigma, großes griechisches S)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad 1+2+3+...+n \; k = 1k = 2k = 3k = n$$

weitere Bsp:

$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2*1+2*2+...2*n$ $\sum_{k=4}^{n} 2k = 2*4+2*5+....2*n$

$\sum_{k=1}^{3} 7 = 7+7+7 = 21$

allg. $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_n$ $(a_m, a_{m+1}, ...a\text{–}n \in \mathbb{R})$

h heißt Summationszeichen

$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i$

Schreibweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k, \sum_{k=1,k\neq 2}^{4} a_k = a_1 + a_3 + a_4$$

Für $n < m$ setzt man

$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0(\textit{leere Summe})$, z.B. $\sum_{k=7}^{3} k = 0$

Produktzeichen Π

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m * a_{m+1}...a_n,$$

für $n < m$ setze $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$

<u>Rechenregeln für Summen</u> (zu beweisen z.B. durch vollständige Induktion)

a)

$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)*a$

$(\sum_{k=3}^{5} a = a+a+a = (5-3+1)*a)$

b)

$\sum_{k=m}^{n}(c*a_k) = c*\sum_{k=m}^{n} a_k$

c) Indexverschiebung

$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + ...a_n$
$= a_{(m+e)-e} + a_{(m+1+e)-e} + ... + a_{(n+e)-e}$
neuer Summationsindex $j := k + e$

(k durchläuft Werte: $m, m+1..., n$,
j durchläuft Werte: $m+e, m+1+e, ...n+e$)

also gilt $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+e}^{n+e} a_{j-e}$

(Beispiel: $\sum_{k=0}^{5} a_k * x^{k+2} = \sum_{j=2}^{7} a_{j-2} * x^j$)

d) Addition von Summen gleicher Länge

$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$

e) Aufspalten

$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{n} a_k$ für $m < l < n$

f) Teleskopsumme

$\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$

$\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k+1} = (a_m - a_{m+1} + (a_{m+1} - a_{m+2} + (a_{m+2}...) + (a_n - an + 1))$

g) Doppelsummen

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{im} = a_{11} + a_{12} + ... + a_{1m}$

$+a_{21} + a_{22} + a_{2m}$

3.4.3 Verschärftes Induktionsprinzip

$A(n), n_0$ wie in 3.4.1

Es gelte:

(1) $A(n_0)$ ist wahr

(2) $\forall n \geq n_0$:
Sind $A(n_0)$, ... , $A(n)$ wahr, so ist $A(n+1)$ wahr.

(d.h. $A(n_0) \wedge A(n_0+1) \wedge ... \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$)

Dann ist A(n) wahr für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

<u>Beispiel:</u> $A(n)$: Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist Primzahl oder Produkt von Primzahlen.

<u>Beweis:</u>

<u>Induktionsanfang:</u> ($n_0 = 2$). $n = 2$ ist Primzahl ✓

Induktionsschritt: Sei $n \geq n_0 \qquad (n \geq 2)$

• Induktionsvoraussetzung:

Aussage gilt für $2, 3, 4, ..., n$

($A(2), A(3), A(4), ..., A(n)$ wahr)

• Induktionsbehauptung:

$A(n+1)$ gilt, d.h. $n+1$ ist Primzahl oder Produkt von Primzahlen.

Beweis:

- falls $n+1$ Primzahl, so gilt $A(n+1)$
- falls $n+1$ keine Primzahl, dann ist $n+1 = k \cdot l$, für $k, l \in \mathbb{N}$, $1 < k < n+1, 1 < l < n+1$ ($k = l$ möglich).

  Nach Induktionsvoraussetzung:

  Aussage gilt für k und $l \Rightarrow n+1$ ist Produkt von Primzahlen.
  ($A(n+1)$ ist wahr) $\square$

3.5 Schubfachprinzip

3.5.1 Idee

In einem Schrank befinden sich n verschiedene Paar Schuhe. Wie viele Schuhe muss man maximal herausziehen, bis man sicher ein zusammenpassendes Paar hat?

(Antwort: $n+1$)

3.5.2 Satz

(Schubfachprinzip, engl.: *pigeon hole principle*)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$.

Verteilt man n Objekte auf k Fächer, so gibt es ein Fach, das mindestens $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte enthält.

(Dabei bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl z mit $x \leq z$.)

Beweis (durch Kontraposition):

$(\underbrace{n \text{ Objekte}, k \text{ Fächer}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\exists \text{ Fach mit mind. } \lceil \frac{n}{k} \rceil \text{ Objekten}}_{B}$

statt $A \Rightarrow B$ zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$)

($\neg B$) Jedes Fach enthalte höchstens $\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$ Objekte.

Dann ist die Gesamtzahl von Objekten höchstens

$$k \cdot \underbrace{(\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1)}_{< \frac{n}{k}} < k \cdot \frac{n}{k} = n$$

($\neg A$) es gibt also <u>weniger</u> als n Objekte □

3.5.3 Beispiel

a) Wieviele Menschen müssen auf einer Party sein, damit <u>sicher</u> 2 am selben Tag Geburtstag haben?

367

b) Auf jeder Party mit mindestens 2 Gästen gibt es 2 Personen, die dieselbe Anzahl <u>Freunde</u> auf der Party haben.

Beweis: Sei n die Anzahl der Partygäste. Jeder Gast kann mit $0, 1, 2, ..., n-1$ Gästen befreundet sein (n Möglichkeiten).

Aber: Es kann nicht sein, dass ein Gast 0 Freunde hat und gleichzeitig ein Gast $n-1$ (=alle) Freunde hat.

$\Rightarrow$ Es gibt $n-1$ mögliche Werte für die Anzahl der Freunde, entspricht $n-1$ Fächern.

Jeder der n Gäste trägt sich in ein Fach ein
$\Rightarrow$ mindestens 2 Gäste sind im selben Fach. □

c) In Berlin gibt es mindestens 2 Personen, die genau dieselbe Anzahl Haare auf dem Kopf haben.

Beweis: Anzahl Haare im Durchschnitt:

blond	150.000
braun	110.000
schwarz	100.000
rot	90.000

zur Sicherheit: maximal 1 Millionen Haare möglich
entspricht 1 Mio Fächer.

Anzahl Einwohner in Berlin: 3,5 Millionen $\Rightarrow$ Behauptung 3.5.2 $\square$

3.6 Weitere Beweistechniken (Werkzeugkiste)

a) Wichtigste Technik: Ersetzen eines mathematischen Begriffs durch seine Definition (und umgekehrt). $A(\subset B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\})$

b) Aussagen der Form $\forall a \in S$ gilt $P(a)$:
beginne mit: Sei $a \in S$, zeige $P(a)$.

c) Aussage der Form $\exists a \in S$ mit $P(a)$
oft: finde/gebe konkretes Element a an, für dass $P(a)$ gilt.

d) Gleichheit von Mengen zeigt man oft mittels Inklusion (vgl. Definition 2.1(i))

Zu zeigen: $A = B$ $(A, B$ Mengen)
zeige: $A \subseteq B$ (Sei $a \in A \Rightarrow ... \Rightarrow ... \Rightarrow a \in B$) 2.1 (i))
und $B \subseteq A$ (Sei $b \in B \Rightarrow ... \Rightarrow ... \Rightarrow b \in A$)

$\subseteq$ ...
$\supseteq$ ...

Beispiel: 2.5f)

$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Beweis:
$\subseteq$ Sei $x \in A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

1. Fall :
$x \in A \backslash B$, dann gilt $x \in A$, also $x \in A \cup B$

Außerdem $x \notin B$, also gilt auch $x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

2.Fall
Ist $x \in B \backslash A$, so argumentiere analog.

$\supseteq$ sei $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
$\Rightarrow x \in A$ oder $x \in B$.

1.Fall

$x \in A$, so ist $x \notin B$, da $x \notin A \cap B$
$\Rightarrow x \in A \backslash B \subseteq (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$
$= A \triangle B$,
d.h. $x \in A \triangle B$.

2.Fall (1. Fall analog)

$x \in B$, so $x \notin A$, da $x \notin A \cap B$
$\Rightarrow x \in B \backslash A \subseteq A \triangle B$
Also $x \in A \triangle B$

e) Äquivalenzen ($A \Leftrightarrow B, A, B$ Aussagen) werden meist in 2 Schritten bewiesen:

Hinrichtung zeigt $A \Rightarrow B$,
Rückrichtung zeigt $B \Rightarrow A$.

$\Rightarrow$: ...
$\Leftarrow$: ...

(oft auch eine von beiden mittels Kontraposition)

Beispiel: 2.5g) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

Beweis:
$\Rightarrow$: Sei $A \cap B = A$. Dann ist $A = A \cap B \subseteq B$
$\Leftarrow$: Sei $A \subseteq B$. Dann ist $A \subseteq A$ und $A \subseteq B$,
also ist $A \subseteq A \cap B$
außerdem $A \cap B \subseteq A$

$\Rightarrow A = A \cap B$ □

2.5h) analog.

f) Äquivalenzen der Form:
Sei ... . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) ...
- b) ...
- c) ..
- d) ...

Zeigt man durch *Ringschluss*:
Zeige $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$
(oder andere Reihenfolge, soll *Ring* geben.)

4 Abbildungen

4.1 Definition

a) Eine Abbildung (oder Funktion)

$$f : A \to B$$

besteht aus

- zwei nicht-leeren Mengen:
  A, dem Definitionsbereich von f
  B, dem Bildbereich von f
- und einer Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet

Wir schreiben dann $b = f(a)$, nennen b das Bild oder den Funktionswert von a (unter f), und a (ein) Urbild von b (unter f).

Notation:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

b) Die Menge $G_f := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$ heißt der Graph von f.

4.2 Beispiele

Siehe Folien!

4.3 Beispiele

a) A Menge

$$\begin{aligned} id_A : A &\to A \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

identische Abbildung

b) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$ ist Abbildung (aus der Schule bekannt als $f(x) = x^2$)

c) $\wedge$ kann als Abbildung aufgefasst werden, $+$ ebenso:

$$\begin{aligned} \wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} &\to \{0,1\} \\ (A, B) &\mapsto A \wedge B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

Allgemein bezeichnet man eine Abbildung $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ als boolesche Funktion.

4.4 Definition

Zwei Abbildungen $f : A \to B$, $g : C \to D$ heißen gleich (in Zeichen: $f = g$), wenn:

- $A = C$
- $B = D$
- $f(a) = g(a)$

$\forall a \in A (= C)$

4.5 Beispiel

$f : \{0,1\} \to \{0,1\}, x \mapsto x$
$g : \{0,1\} \to \{0,1\}, x \mapsto x^2$

$f = g$

4.6 Definition

Sei $f : A \to B$, seien $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ Teilmengen.

Dann heißt

a) $f(A_1) := \{f(a) \mid a \in A_1\} \subseteq B$ das Bild von A_1 (unter f) (Bildmenge).

(Beispiel: $$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \\ A_1 &= \{1,3\} \\ f(A_1) &= \{f(1), f(3)\} = \{2,6\} \end{aligned}$$)

b) $f^{-1}(B_1) := \{a \in A \mid f(a) \in B_1\} \subseteq A$
das Urbild von B_1 (unter f).

(Beispiel oben: $B_1 = \{8, 14, 100\}, f^{-1}(B_1) = \{4, 7, 50\}$
$B_2 = \{3\}, f^{-1}(B_2) = \emptyset$)

c) f surjektiv, falls gilt: $f(a) = B$

(d.h. $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$)

[alle Elemente von B werden getroffen]

d) f injektiv, falls gilt:

$\forall a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ gilt $f(a_1) \neq f(a_2)$

(äquivalent: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$)

[kein Element von B wird doppelt getroffen]

e) f bijektiv, falls f surjektiv und injektiv (f ist Bijektion).

[jedes Element wird genau einmal getroffen]

4.7 Beispiele

siehe Folien

a) f aus Beispiel in 4.6 a) ist injektiv, aber nicht surjektiv:

$f(\mathbb{N})$ ist Menge der geraden natürlichen Zahlen, nicht $\mathbb{N}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

nicht surjektiv:

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \neq \mathbb{R}$

nicht injektiv:

$f(1) = f(-1) = 1$
$f(2) = f(-2) = 4$

$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$x \mapsto x^2$

injektiv, surjektiv, bijektiv

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x + 1$

ist surjektiv:

Sei $y \in \mathbb{R}$. Zeige: $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $y = 2x + 1$ (vgl. 3.6 b))

Wähle $x = \frac{y-1}{2}$

f ist injektiv:

angenommen, es gibt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
mit $f(x_1) = f(x_2)$, d.h.
$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$,
dann folgt $x_1 = x_2$. $\circledast$

4.8 Definition

Sei $f : A \to B$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrfunktion.

$f^{-1} : B \to A$, indem wir jedem $b \in B$ dasjenige $a \in A$ zuordnen, für das $f(a) = b$ gilt.

4.9 Beispiel

$A(a_1, a_2, a_3)$ $\qquad$ $B(b_1, b_2, b_3)$

$f : (A \to B)$ bijektiv
$a_1 \to b_2$
$a_2 \to b_3$
$a_3 \to b_1$

$f^{-1} : B \to A$
$b_1 \to a_3$
$b_2 \to a_1$
$b_3 \to a_2$

4.10 Bemerkung

Man kann jedem $b \in B$ wirklich ein $a \in A$ zuordnen, das $f(a) = b$ erfüllt, denn f ist surjektiv. Nur ein solches a, denn f ist injektiv.

4.11 Definition

Seien $g : A \to B \qquad f : B \to C$
Abbildungen.

Dann heißt die Abbildung: $f \circ g : A \to C$
$a \to (f \circ g)(a) :=$
$f(g(a)) \forall a \in A$

die Hintereinanderausführung oder Komposition von f mit g.

f nach g

$A \underbrace{\to}_{g} B \underbrace{\to}_{f} C$

4.12 Beispiel

$A = B = C = \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x + 1 \qquad x \to 2x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2 * (x + 1)$
$= 2x + 2$

hier also $f \circ g \neq g \circ f$!

4.13 Satz

Die Komposition {inj., surj., bij} Abbildungen ist {inj., surj., bij}

Beweis: Pü / Ü

4.14 Satz (Charakterisierung bijektiver Abbildungen)

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

f ist bijektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$.

Diese Abbildung g ist eindeutig und genau die Umkehrfunktion von f, also $g = f^{-1}$.

f^{-1} ist ebenfalls bijektiv und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei f bijektiv. Dann existiert für jedes $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $\underline{b = f(a)}$.

Definiere nun also $g : B \to A$ mit $\underline{g(b) = a}$, dann gilt die Aussage:

$(g \circ f)(a) = g(\underline{f(a)}) = g(\underline{b}) = a = id_A(a)$

$(f \circ g)(b) = f(\underline{g(b)}) = f(\underline{a}) = b = id_B(b)$

"$\Leftarrow$" Es existiere Abbildung g wie angegeben (zu zeigen: f ist bijektiv)

- **f surjektiv:** Sei $b \in B$. Dann ist $g(b) \in A$, $f(\underbrace{g(b)}_{\text{das ist das gesuchte } a! \text{ (} a := g(b) \text{)}}) = id_B(b) = b$, d.h.

  $g(b)$ ist Urbild von b unter f.

- **f injektiv:**

  Sei $\underline{f(a_1) = f(a_2)}$

  Dann ist $\underline{\underline{a_1}} = g(\underline{f(a_1)}) = g(f(a_2)) = \underline{\underline{a_2}}$

- **Eindeutigkeit von g:**

  Angenommen es gäbe Abbildungen g_1, g_2 mit angegebenen Eigenschaften.

  Sei $b \in B$. Dann gibt es genau ein $a \in A$ mit $\underline{f(a) = b}$.

  Also $g_1(b) = g_1(\underline{f(a)}) = a = g_2(\underline{f(a)}) = g_2(\underline{b})$,
  d.h. $g_1 = g_2$

- **f^{-1} bijektiv, $(f^{-1})^{-1} = f$:**

  folgt aus $f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$,
  wende Aussage des Satzes auf f^{-1} an. $\square$

4.15 Bemerkung / Definition

Bijektivität erlaubt präzise Definition der Endlichkeit / Unendlichkeit von Mengen:

a) Menge $M \neq \emptyset$ heißt endlich $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \exists$ bijektive Abbildung $f : \{1, ..., n\} \to M$.

   ($\emptyset$ wird auch als endlich bezeichnet).

   Andernfalls heißt M unendlich.

   [Hilberts Hotel]

b) Zwei Mengen M_1, M_2 heißen gleichmächtig, falls es eine bijektive Abbildung $g : M_1 \to M_2$ gibt.

   Beispiel: $\mathbb{N}, 2\mathbb{N}$ (alle geraden natürlichen Zahlen) gleichmächtig:

$$g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n$$

   ist bijektiv.

c) Menge M heißt abzählbar unendlich, wenn M gleichmächtig ist wie $\mathbb{N}$, d.h. $\exists$ bijektive Abbildung.

   $h : \mathbb{N} \to M$.

Beispiel:

- $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich: $h = id_{\mathbb{N}}$
- $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich: $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 (x \to x - 1)$ ist bijektiv.
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich: (Geschichte vom Teufel: $h \to \mathbb{Z}$
  $1 \to 0$
  $2 \to 1$
  $3 \to -1$
  $4 \to 2$
  $\underbrace{5}_{Tag} \to \underbrace{-2}_{Zahl}$
  $\vdots$

allgemein:

$$x \to \begin{cases} k & \text{falls } x = 2k+1 (\text{für } k = 0,1,2,...) \\ -k & \text{falls } x = 2k (\text{für } k = 1,2,3,...) \end{cases}$$

- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich:

$$\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}...$$

$$\frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{4}\frac{2}{5}...$$

$$\frac{3}{1}\frac{3}{2}\frac{3}{3}\frac{3}{4}\frac{3}{5}...$$

$$\vdots$$

  Cantorsches Diagonalverfahren.

- $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar unendlich!
  (Beweis von Cantor, 2. Diagonalisierungsargument) $\to$ eventuell später

- $P(\mathbb{N}$ ist nicht abzählbar unendlich (allgemein: $\mid A \mid < \mid P(A) \mid$ Satz von Cantor.)

4.16 Satz (Wichtiger Satz für endliche Mengen)

Seien $A, B \neq \emptyset$ endliche Mengen, $\mid A \mid = \mid B \mid$, und $f : A \to B$ eine Abbildung.

Dann gilt f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv.

Beweis:

Wir setzen $n := \mid A \mid = \mid B \mid$. Es genügt zu zeigen f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv.

$\Rightarrow$ Sei f injektiv, d.h. falls $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$, dann gilt $f(a_1) \neq f(a_2)$.

D.h., verschiedene Elemente aus A werden auf verschiedene Elemente aus B abgebildet, die n Elemente aus A also auf n verschiedene Elemente aus B.
Da B genau n Elemente besitzt, ist f surjektiv. $(f(A) = B)$.

[formaler: d.h. $\mid (f(A) \mid = \mid A \mid = \mid B \mid$.
Da $f(A) \subseteq B$ endlich, folgt $f(A) = B$. $\square$

4.17 Das Prinzip der rekursiven Definition von Abbildungen

Sei $B \neq \emptyset$ Menge, $n_0 \in \mathbb{N}$, $\qquad A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$.

Man kann eine Funktion $f : A \to B$ definieren durch

- Angabe des Startwerts $f(n_0)$
- Beschreibung, wie man für jedes $n \in A$ den Funktionswert f(n+1) aus $f(n)$ berechnet (Rekursionsschritt).

4.18 Beispiel

a) Die Fakultätsfunktion: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$
mit $f(0) = 0 \underbrace{\;!\;}_{\text{Fakultät}} = 1$ (Startwert)

$f(n+1) = (n+1)! = n!(n+1)$ für alle $n \geq 0$

Also:
$f(1) = 1! = 0! * 1$
$f(2) = 2! = 1! * 2 = 1 * 2 = 2$
$f(3) = 3! = 2! * 3 = 1 * 2 * 3$
$f(4) = 4! = 3! * 4 = 1 * 2 * 3 * 4$
$\vdots$ $f(70) = 70! \approx 1,2 * 10^{100}$

b) Potenzen: für festes $x \in \mathbb{R}$ definiere
$x^0 = 1$
$x^{n+1} = x^n * x$ für alle $n \geq 0$

$(Px : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} \qquad n \to x^n)$

c) Eine Pflanze verdopple jeden Tag die Anzahl ihrer Knospen und produziere eine zusätzliche.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beschreibe die Anzahl der Knospen nach n Tagen.

$f(1) = 1$
$f(2) = 2 * 1 + 1 = 3$
$f(3) = 2 * 3 * 1 = 7$
$f(4) = 2 * 7 + 1 = 15$
$\vdots$
$f(n+1) = 2 * f(n) + 1$

Wieviele Knospen gibt es nach 100 Tagen?
$\Rightarrow$ Geschlossene / explizite Form von f gefragt.

Vermutung: $f(n) = 2^n - 1$

(Bemerkung: bessere Methoden (statt vermuten / raten) in der Vorlesung *Algorithmen*, dort z.B. auch mathematische Strukturen wie oben, diese werden *Bäume* (Graphen) genannt.

Beweis: vollständige Induktion

Induktionsanfang:
$f(1) = 2^1 - 1 = 1$

Induktionsschritt:
Indunktionsvorraussetzung:
sei $f(n) = 2^n - 1 \forall n \geq 1$

Induktionsbehauptung:
$f(n+1) = 2^{n+1} - 1$

Beweis:

$$f(n+1) \underbrace{=}_{Definition} 2 * f(n) + 1$$
$$\underbrace{=}_{Ind.vor.} 2(2^n - 1) + 1$$
$$= 2^{n+1} - 2 + 1$$
$$= 2^{n+1} - 1$$

□

4.19 Bemerkung

Die rekursive Definition kann verallgemeinert werden: benutze zur Definition von $f(n+1)$ die vorigen $k(k \in \mathbb{N}$ Werte von f, also $\underbrace{f(n), f(n-1), ..., f(n-k+1)}_{\text{k Stück}}$

und gebe k Startwerte $f(n_0), f(n_0+1), ..., f(n_0+k-1)$

4.20 Beispiel (Fibonacci-Zahlen)

$k = 2$

$f(1) = 1$
$f(2) = 1$
$f(n+1) = f(n) + f(n+1)$

$(f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2,$
$f(4) = 2 + 1 = 3$
$f(5) = 3 + 2 = 5 ... f(6) = 8, f(7) = 13...)$

explizite Form:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

5 Relationen

5.1 Definition

Seien $M_1, ..., M_n$
nicht leere Mengen
$(n \in \mathbb{N})$.

a)

Eine <u>n-stellige Relation</u> über $M_1, ..., M_n$ ist eine...