

# Mathematik I WS 15/16

Thomas Dinges<sup>1</sup>      Jonas Wolf<sup>2</sup>

28. Oktober 2015

Inoffizielles Skript für die Vorlesung Mathematik I im WS 15/16, bei Britta Dorn.  
Alle Angaben ohne Gewähr. Fehler können gerne via E-Mail gemeldet werden.

---

<sup>1</sup>thomas.dinges@student.uni-tuebingen.de

<sup>2</sup>mail@jonaswolf.de

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Logik

## Aussagenlogik

Eine **logische Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch (also nie beides zugleich) ist. Wahre Aussagen haben den Wahrheitswert 1 (auch wahr, w, true, t), falsche den Wert 0 (auch falsch, f, false).

Notation: Aussagenvariablen  $A, B, C, \dots A_1, A_2$ .

Beispiele:

- 2 ist eine gerade Zahl (1)
- Heute ist Montag (1)
- 2 ist eine Primzahl (1)
- 12 ist eine Primzahl (0)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (1)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Aussage, aber unbekannt, ob 1 oder 0)
- 7 (keine Aussage)
- Ist 173 eine Primzahl? (keine Aussage)

Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen (**Junktoren**, z.B. und, oder, ...) kompliziertere bilden. Diese werden **Ausdrücke** genannt (auch Aussagen sind Ausdrücke). Durch sogenannte **Wahrheitstabeln** gibt man an, wie der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Werte der Teilaussagen bedingt ist. Im folgenden seien  $A, B$  Aussagen.

Die wichtigsten Junktoren:

### 1.1 Negation

Verneinung von  $A$ :  $\neg A$  (auch  $\bar{A}$ ), *nicht A*, ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn  $A$  falsch ist.

Wahrheitstafel:

$A$	$\neg A$
1	0
0	1

Beispiele:

- $A$ : 6 ist durch 3 teilbar. (1)
- $\neg A$ : 6 ist nicht durch 3 teilbar. (0)
- $B$ : 4,5 ist eine gerade Zahl (0)
- $\neg B$ : 4,5 ist keine gerade Zahl. (1)

## 1.2 Konjunktion

Verknüpfung von A und B durch *und*:  $A \wedge B$  ist genau dann wahr, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiele:

- $\underbrace{6 \text{ ist eine gerade Zahl}}_{A(1)} \text{ und } \underbrace{\text{durch 3 teilbar.}}_{B(1)}$ . (1)
- $\underbrace{9 \text{ ist eine gerade Zahl}}_{A(0)} \text{ und } \underbrace{\text{durch 3 teilbar.}}_{B(1)}$ . (0)

## 1.3 Disjunktion

*oder*:  $A \vee B$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\triangleq$  Einschließendes oder, kein entweder...oder.

Beispiele:

- 6 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)

- 9 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)
- 7 ist gerade oder durch 3 teilbar. (0)

## 1.4 XOR

*entweder oder*:  $A \text{ xor } B$ ,  $A \oplus B$  (ausschließendes oder, exclusive or).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

## 1.5 Implikation

*wenn, dann*,  $A \Rightarrow B$ :

- wenn A gilt, dann auch B
- A impliziert B
- aus A folgt B
- A ist hinreichend für B,
- B ist notwendig für A

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(Die Implikation  $A \Rightarrow B$  sagt nur, dass B wahr sein muss, falls A wahr ist. Sie sagt nicht, dass B tatsächlich wahr ist.)

Beispiele:

- Wenn  $1 = 0$ , bin ich der Papst. (1)

## 1.6 Äquivalenz

genau dann wenn,  $A \Leftrightarrow B$  (dann und nur dann wenn, g.d.w, äquivalent, if and only if, iff)

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiele:

- Heute ist Montag genau dann wenn morgen Dienstag ist. (1)
- Eine natürliche Zahl  $\underbrace{\text{ist durch 6 teilbar}}_A$  g. d. w. sie  $\underbrace{\text{durch 3 teilbar ist.}}_B$  (0)

$$A \Rightarrow B \text{ (1)}$$

$$B \Rightarrow A \text{ (0)}$$

## Festlegung

$\neg$  bindet stärker als alle anderen Junktoren:  $(\neg A \wedge B)$  heißt  $(\neg A) \wedge B$

## 1.7 Beispiel

a)

Wann ist der Ausdruck  $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$  wahr?

→ Wahrheitstafel

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

△ Klammerung relevant

Welche Wahrheitswerte ergeben sich für

- $A \vee (B \wedge \neg A) \wedge B$ ?

- $A \vee B \wedge \neg A \wedge B$ ?

$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$  und  $(A \oplus B)$  haben dieselben Wahrheitstafeln. Ausdrücke sehen unterschiedlich aus (Syntax), aber haben dieselbe Bedeutung (Semantik). Dies führt zu 1.8 Definition.

b)

Wann ist  $(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$  falsch?

→ Wahrheitstafel: alle möglichen Belegungen von  $A, B, C$  mit 0/1

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg(C \vee A)$	$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

oder überlegen:

$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$  ist nur 0, wenn

$$(A \wedge B) = 1, \text{ also } A = 1 \text{ und } B = 1$$

und

$$\neg(C \vee A) = 0 \text{ ist.}$$

(Wissen:  $A = 1$ ), also  $C = 0$  oder  $C = 1$  möglich.

## 1.8 Definition

Haben zwei Ausdrücke  $\alpha$  und  $\beta$  bei jeder Kombination von Wahrheitswerten ihrer Aussagevariablen den gleichen Wahrheitswert, so heißen sie logisch äquivalent; man schreibt  $\alpha \equiv \beta$ . ( $\equiv$  ist kein Junktor, entspricht '=')

Es gilt: Falls  $\alpha \equiv \beta$  gilt, hat der Ausdruck  $\alpha \Leftrightarrow \beta$  immer den Wahrheitswert 1.

## 1.9 Satz

Seien  $A, B, C$  Aussagen. Es gelten folgende logische Äquivalenzen:

a) **Doppelte Negation:**  $A \equiv \neg(\neg A)$

b) **Kommutativität von  $\wedge, \vee, \oplus, \Leftrightarrow$ :**

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- $(A \oplus B) \equiv (B \oplus A)$
- $(A \Leftrightarrow B) \equiv (B \Leftrightarrow A)$

$\triangle$  gilt nicht für ' $\Rightarrow$ ' !! ( $A \Rightarrow B \neq B \Rightarrow A$ )

c) **Assoziativität von  $\wedge, \vee, \oplus, \Leftrightarrow$ :**

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \equiv A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

d) **Distributivität:**

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

e) **Regeln von DeMorgan:**

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

f)  $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

g)  $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

h)  $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

(Alle Äquivalenzen gelten auch, wenn die Aussagevariablen durch Ausdrücke ersetzt werden.)

Beweis: Jeweils mittels Wahrheitstafel (Übung!), zum Beispiel:



a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
1	0	1
0	1	0

e)

A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

## 1.10 Bemerkung

(1.9 f):  $(A \Rightarrow B) \equiv \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}$   
 wird Kontraposition genannt, wichtig für Beweis. Wird im Sprachgebrauch oft falsch verwendet.

**Beispiel:** Pit ist ein Dackel.  $\Rightarrow$  Pit ist ein Hund.  
 $\underset{A}$   $\underset{B}$

äquivalent zu:  $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Pit ist kein Hund.  $\Rightarrow$  Pit ist kein Dackel.

aber nicht zu:  $B \Rightarrow A$

Pit ist ein Hund.  $\Rightarrow$  Pit ist ein Dackel.

und nicht zu:  $\neg A \Rightarrow \neg B$

Pit ist kein Dackel.  $\Rightarrow$  Pit ist kein Hund.

**Beispiel:** Sohn des Logikers / bellende Hunde ( $\rightarrow$  Folien)

## 1.11 Bemerkung (Logisches Umformen)

Sei  $\alpha$  ein Ausdruck. Ersetzen von Teilausdrücken von  $\alpha$  durch logisch äquivalente Ausdrücke liefert einen zu  $\alpha$  äquivalenten Ausdruck. So erhält man eventuell kürzere/einfachere Ausdrücke, zum Beispiel:

$$\neg(A \Rightarrow B) \stackrel{1.9 \text{ g)}}{=} \neg(\neg A \vee B) \stackrel{1.9 \text{ e)}}{=} \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \stackrel{1.9 \text{ a)}}{=} A \wedge \neg B$$

## 1.12 Definition

Ein Ausdruck heißt Tautologie, wenn er für jede Belegung seiner Aussagevariablen, immer den Wert 1 annimmt. Hat er immer Wert 0, heißt er Kontradiktion. Gibt es mindestens eine Belegung der Aussagevariablen, so dass der Ausdruck Wert 1 hat, heißt er erfüllbar.

## 1.13 Beispiel

- a)  $A \vee \neg A$  Tautologie  
 $A \wedge \neg A$  Kontradiktion
- b)  $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$  Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.11).  
 $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$  Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.9g).
- c)  $A \wedge \neg B$  ist erfüllbar (durch  $A = 1, B = 0$ ).

## Prädikatenlogik

Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, dass formal wie eine Aussage aussieht, aber eine oder mehrere Variablen enthält.

Beispiel:  $P(x) : \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{< 10}_{\text{Prädikat (Eigenschaft)}}$

$Q(x) : x$  studiert Informatik  $R(y) : y$  ist Primzahl und  $y^2 + 2$  ist Primzahl.

Eine Aussageform  $P(x)$  wird zur Aussage, wenn man die Variable durch ein konkretes Objekt ersetzt. Dies ist nur dann sinnvoll, wenn klar ist, welche Werte für  $x$  erlaubt sind, daher wird oft die zugelassene Wertemenge mit angegeben. (hier Vorgriff auf Kapitel *Mengen*)

Im Beispiel:

$P(3)$  ist wahr,  $P(42)$  falsch.

$R(2)$  ist falsch,  $R(3)$  ist wahr.

Oft ist die Frage interessant, ob es wenigstens ein  $x$  gibt, für das  $P(x)$  wahr ist, oder ob  $P(x)$  sogar für alle zugelassenen  $x$  wahr ist.

## 1.14 Definition

Sei  $P(x)$  eine Aussageform.

a) Die Aussage *Für alle  $x$  (aus einer bestimmten Menge  $M$ ) gilt  $P(x)$*  ist wahr genau dann wenn  $P(x)$  für alle in Frage kommenden  $x$  wahr ist.

Schreibweise:  $\underbrace{\forall}_{\text{für alle, für jedes}} \underbrace{x \in M}_{\text{aus der Menge } M} \underbrace{:}_{\text{gilt}} \underbrace{P(x)}_{\text{Eigenschaft}}$

auch  $\underbrace{\forall_{x \in M}}_{\text{für alle } x \text{ in } M} P(x)$ .

Das Symbol  $\forall$  heißt All-Quantor, die Aussage All-Aussage.

b) Die Aussage *Es gibt (mindestens) ein  $x$  aus  $M$ , das die Eigenschaft  $P(x)$  besitzt* ist wahr, g.d.w  $P(x)$  für mindestens eines der in Frage kommenden  $x$  wahr ist.

Schreibweise:  $\underbrace{\exists}_{\text{es gibt, es existiert}} \underbrace{x \in M}_{\text{aus der Menge } M} \underbrace{:}_{\text{so dass gilt}} \underbrace{P(x)}_{\text{Eigenschaft}}$

$\exists$  heißt Existenzquantor, die Aussage Existenzmenge.

## 1.15 Beispiel / Bemerkung

Übungsgruppe G:  $\underbrace{a}_{\text{Anna}} \underbrace{b}_{\text{Bob}} \underbrace{c}_{\text{Clara}}$

$B(x) : x$  ist blond.  $W(x) : x$  ist weiblich.

$B(a) = 1, W(b) = 0$

1. Alle Studenten der Gruppe sind blond. (1)

$\forall x \in G: x$  ist blond

$\forall x \in G: B(x)$  (1)

Das bedeutet:  $a$  blond  $\wedge b$  blond  $\wedge c$  blond

$\underbrace{B(a)}_1 \wedge \underbrace{B(b)}_1 \wedge \underbrace{B(c)}_1$

$\forall$  ist also eine Verallgemeinerung der Konjunktion.

2. Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

$\underbrace{W(a)}_1 \wedge \underbrace{W(b)}_0 \wedge \underbrace{W(c)}_1$

3. Es gibt einen Studenten der Gruppe, der weiblich ist. (1)

$$\exists x \in G: W(x) \quad (1)$$

$$\text{bedeutet: } \underbrace{W(a)}_1 \vee \underbrace{W(b)}_0 \vee \underbrace{W(c)}_1 = 1$$

$\exists$  ist verallgemeinerte Disjunktion.

4. Aussage A: Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

Verneinung von A?  $\neg A$

$\triangle$  Nicht korrekt wäre: Alle Studenten der Gruppe sind männlich. (Wahrheitswert ist auch 0)

Korrekt: Nicht alle Studenten der Gruppe sind weiblich (1) Es gibt (mindestens) einen Studenten der Gruppe, der nicht weiblich ist. (1)

allgemeiner:

## 1.16 Negation von All- und Existenzaussagen

$$\text{a) } \neg(\forall x \in M : P(x)) \equiv \exists x \in M : \neg P(x)$$

$$\text{b) } \neg(\exists x \in M : P(x)) \equiv \forall x \in M : \neg P(x)$$

(Verallgemeinerung der Regeln von DeMorgan) (vergleiche Beispiel 1.15, 4):

$$\neg(\forall x \in G : W(x))$$

$$\equiv \neg(W(a) \wedge W(b) \wedge W(c))$$

$$\equiv \underbrace{(\neg W(a)) \vee (\neg W(b)) \vee (\neg W(c))}_{\text{DeMorgan}}$$

$$\equiv \exists x \in G : \neg W(x)$$

### Bemerkung

Aussageformen können auch mehrere Variablen enthalten, Aussagen mit mehreren Quantoren sind möglich.

Zum Beispiel:

$$\exists x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$$

$$\exists x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$$

$$\forall x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$$

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$$

Negation dann durch mehrfaches Anwenden von 1.16, zum Beispiel:

$$\neg(\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x, y, z))$$

$$\equiv \exists x \in X : \neg(\forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x, y, z))$$

$$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y : \neg(\exists z \in Z : P(x, y, z))$$

$$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad \forall z \in Z : \neg P(x, y, z)$$

**Also:**

ändere  $\exists$  in  $\forall$ ,  
 $\forall$  in  $\exists$ ,  
 verneine Prädikat.

## 2 Mengen

### 2.1 Definition (Georg Cantor, 1845-1918)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten (Elementen) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Im Folgenden seien  $A, B$  Mengen.

- a)  $x \in A : x$  ist Element der Menge  $A$   
 $x \notin A : x$  ist nicht Element der Menge  $A$   
 oder auch:  
 $A \ni x : x$  ist Element der Menge  $A$   
 $A \not\ni x : x$  ist nicht Element der Menge  $A$

- b) Eine Menge kann beschrieben werden durch:

- Aufzählung ihrer Elemente, zum Beispiel:  
 $M_1 = \{a, b, c\}$  ( $= \{c, a, b\}$ , d.h. Reihenfolge spielt keine Rolle)  
**Achtung:** Keine Wiederholungen!  
 $M_2 = \{\odot, \odot\}$   
 $M_3 = \{\underline{3}, \underline{\{1, 2\}}, \underline{M_1}\}$   
 geht nur bei endlichen Mengen oder bestimmten unendlichen Mengen,  
 zum Beispiel:  
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  Menge der natürlichen Zahlen mit der Null

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$  Menge der ganzen Zahlen

- Charakterisierung ihrer Elemente:

$A = \{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}$ , z.B.:

$A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ist gerade}\}$

sprich: "mit der Eigenschaft"

$= \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$= \{x \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2 \cdot k\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Bsp:  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$  Menge der rationalen Zahlen

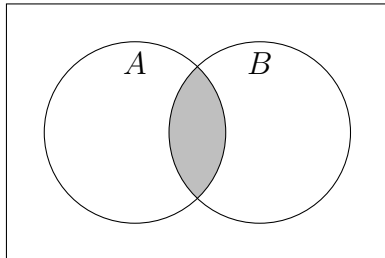
c) Mit  $\emptyset$  bezeichnen wir die Menge ohne Elemente (leere Menge)

d) Mit  $|A|$  bezeichnen wir die Anzahl der Elemente der Menge  $A$  (Kardinalität oder Mächtigkeit von  $A$ ), zum Beispiel:

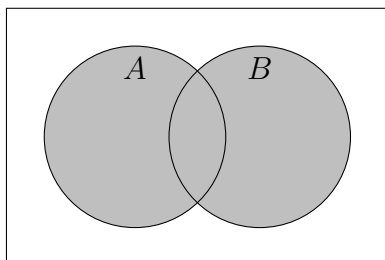
$$|\{1, a, *\}| = 3, \quad |\emptyset| = 0, \quad |\mathbb{N}| = \infty, \quad |\{\mathbb{N}\}| = 1$$

e)  $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$  heißt Durchschnitt oder Schnittmenge von  $A$  und  $B$ .  
wird definiert als

Grafische Veranschaulichung: Venn-Diagramm ( $\triangleq$  gilt nicht als Beweis)



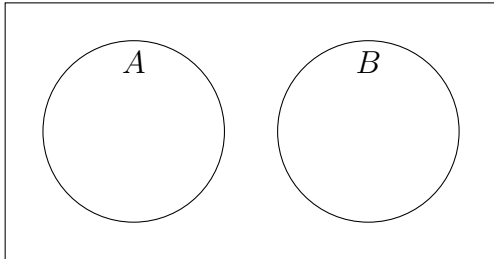
f)  $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$  heißt Vereinigung von  $A$  und  $B$ .



**Beispiele:**  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ ,  $C = \{4\}$

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{2, 3\}, \\
A \cap C &= \emptyset, \\
B \cap C &= \{4\} = C, \\
A \cup B &= \{1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}$$

g)  $A$  und  $B$  heißen disjunkt, falls gilt  $A \cap B = \emptyset$



h)  $A$  heißt Teilmenge von  $B$ ,  $A \subseteq B$ , falls gilt:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Oder in Worten: Jedes Element von  $A$  ist auch Element von  $B$ .

Dasselbe bedeutet die Notation

$$B \supseteq A$$

( $B$  ist Obermenge von  $A$ )

Beispiel:  $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  (reelle Zahlen)

Es gilt:  $\emptyset \subseteq A$  für jede Menge  $A$ .

**Achtung:** Unterschied  $\subseteq, \in$  !

Zum Beispiel:

$A = \{1, \mathbb{N}\}$  (hier ist die Menge  $\mathbb{N}$  ein Element von  $A$ , keine Teilmenge!)

$$1 \in A, \quad \mathbb{N} \in A, \quad \mathbb{N} \not\subseteq A, \quad 2 \notin A, \quad \{1\} \subseteq A$$

i) Zwei Mengen  $A, B$  heißen gleich ( $A = B$ , falls gilt:  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  (also  $x \in A \Rightarrow / \Leftarrow / \Leftrightarrow x \in B$ ).

Darin liegt ein Beweisprinzip: Man zeigt  $A = B$ , indem man zeigt:

- $x \in A \Rightarrow x \in B$
- $x \in B \Rightarrow x \in A$  (mehr später)

Beispiel:  $A = 2, 3, 4, \quad B = \{x \in \mathbb{N} | x > 1 \text{ und } x < 5\} \quad A = B$

j)  $A \subsetneq B$  ( $A \subsetneq B$ ) bedeutet  $A \subseteq B$ , aber  $A \neq B$ .

(d.h.  $\exists x \in B$  mit  $x \notin A$ , aber  $x \in B$ )

( $A$  ist echte Teilmenge von  $B$ .)