Mathematik I WS 15/16

Thomas Dinges[1] Jonas Wolf [2]

22. Oktober 2015

Inoffizielles Skript für die Vorlesung Mathematik I im WS 15/16, bei Britta Dorn.
Alle Angaben ohne Gewähr. Fehler können gerne via E-Mail gemeldet werden.

[1]thomas.dinges@student.uni-tuebingen.de
[2]mail@jonaswolf.de

Inhaltsverzeichnis

1 Logik

Aussagenlogik

Eine **logische Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch (also nie beides zugleich) ist. Wahre Aussagen haben den Wahrheitswert 1 (auch wahr, w, true, t), falsche den Wert 0 (auch falsch, f, false).

Notation: Aussagenvariablen $A, B, C, ...A_1, A_2$.

Beispiele:

- 2 ist eine gerade Zahl (1)
- Heute ist Montag (1)
- 2 ist eine Primzahl (1)
- 12 ist eine Primzahl (0)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (1)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Aussage, aber unbekannt, ob 1 oder 0)
- 7 (keine Aussage)
- Ist 173 eine Primzahl? (keine Aussage)

Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen (**Junktoren**, z.B. und, oder, ...) kompliziertere bilden. Diese werden Ausdrücke genannt (auch Aussagen sind Ausdrücke). Durch sogenannte **Wahrheitstafeln** gibt man an, wie der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Werte der Teilaussagen bedingt ist. Im folgenden seien A, B Aussagen.

Die wichtigsten Junktoren:

1.1 Negation

Verneinung von A: $\neg A$ (auch $\bar{A}$), *nicht* A, ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Beispiele:

- A: 6 ist durch 3 teilbar. (1)
- $\neg A$: 6 ist nicht durch 3 teilbar. (0)
- B: 4,5 ist eine gerade Zahl (0)
- $\neg B$: 4,5 ist keine gerade Zahl. (1)

1.2 Konjunktion

Verknüpfung von A und B durch *und*: $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiele:

- $\underbrace{\text{6 ist eine gerade Zahl}}_{A(1)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (1)
- $\underbrace{\text{9 ist eine gerade Zahl}}_{A(0)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (0)

1.3 Disjunktion

oder: $A \vee B$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

⚠ Einschließendes oder, kein entweder...oder.

Beispiele:

- 6 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)

- 9 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)
- 7 ist gerade oder durch 3 teilbar. (0)

1.4 XOR

entweder oder: A xor B, $A \oplus B$ (ausschließendes oder, exclusive or).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.5 Implikation

wenn, dann, $A \Rightarrow B$:

- wenn A gilt, dann auch B
- A impliziert B
- aus A folgt B
- A ist <u>hinreichend</u> für B,
- B ist <u>notwendig</u> für A

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(Die Implikation $A \Rightarrow B$ sagt nur, dass B wahr sein muss, <u>falls</u> A wahr ist. Sie sagt nicht, dass B tatsächlich war ist.)

Beispiele:

- Wenn $1 = 0$, bin ich der Papst. (1)

1.6 Äquivalenz

genau dann wenn, $A \Leftrightarrow B$ (dann und nur dann wenn, g.d.w, äquivalent, if and only if, iff)

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiele:

- Heute ist Montag genau dann wenn morgen Dienstag ist. (1)
- Eine natürliche Zahl $\underbrace{\text{ist durch 6 teilbar}}_{A}$ g. d. w. sie $\underbrace{\text{durch 3 teilbar ist}}_{B}$. (0)

  $A \Rightarrow B$ (1)

  $B \Rightarrow A$ (0)

Festlegung

$\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren: $(\neg A \wedge B)$ heißt $(\neg A) \wedge B$

1.7 Beispiel

a)

Wann ist der Ausdruck $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ wahr?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

⚠ Klammerung relevant

Welche Wahrheitswerte ergeben sich für

- $A \vee (B \wedge \neg A) \wedge B$?

- $A \vee B \wedge \neg A \wedge B$?

$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ und $(A \oplus B)$ haben dieselben Wahrheitstafeln. Ausdrücke sehen unterschiedlich aus (Syntax), aber haben dieselbe Bedeutung (Semantik). Dies führt zu *1.8 Definition*.

b)

Wann ist $(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$ falsch?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel: alle möglichen Belegungen von A, B, C mit 0/1

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg(C \vee A)$	$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

oder überlegen:

$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$ ist nur 0, wenn

$(A \wedge B) = 1$, also $A = 1$ und $B = 1$

und

$\neg(C \vee A) = 0$ ist.

(Wissen: $A = 1$), also $\underline{C = 0}$ oder $\underline{C = 1}$ möglich.

1.8 Definition

Haben zwei Ausdrücke α und β bei jeder Kombination von Wahrheitswerten ihrer Aussagevariablen den gleichen Wahrheitswert, so heißen sie logisch äquivalent; man schreibt $\alpha \equiv \beta$. ('$\equiv$' ist kein Junktor, entspricht '$=$')

Es gilt: Falls $\alpha \equiv \beta$ gilt, hat der Ausdruck $\alpha \Leftrightarrow \beta$ immer den Wahrheitswert 1.

1.9 Satz

Seien A, B, C Aussagen. Es gelten folgende logische Äquivalenzen:

a) Doppelte Negation: $A \equiv \neg(\neg A)$

b) Kommutativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- $(A \oplus B) \equiv (B \oplus A)$
- $(A \Leftrightarrow B) \equiv (B \Leftrightarrow A)$

  ⚠ gilt nicht für '$\Rightarrow$' !! ($A \Rightarrow B \not\equiv B \Rightarrow A$)

c) Assoziativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \equiv A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

d) Distributivität:

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

e) Regeln von DeMorgan:

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

f) $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

g) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

h) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

(Alle Äquivalenzen gelten auch, wenn die Aussagevariablen durch Ausdrücke ersetzt werden.)

Beweis: Jeweils mittels Wahrheitstafel (Übung!), zum Beispiel:

a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
1	0	1
0	1	0

e)

A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

1.10 Bemerkung

(1.9 f): $(A \Rightarrow B) \equiv \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}_{\text{wird \underline{Kontraposition} genannt, wichtig für Beweis. Wird im Sprachgebrauch oft falsch verwendet.}}$

Beispiel: $\underbrace{\text{Pit ist ein Dackel.}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\text{Pit ist ein Hund.}}_{B}$

äquivalent zu: $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Pit ist kein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist kein Dackel.

aber nicht zu: $B \Rightarrow A$

Pit ist ein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist ein Dackel.

und nicht zu: $\neg A \Rightarrow \neg B$

Pit ist kein Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist kein Hund.

Beispiel: Sohn des Logikers / bellende Hunde ($\rightarrow$ Folien)

1.11 Bemerkung (Logisches Umformen)

Sei α ein Ausdruck. Ersetzen von Teilausdrücken von α durch logisch äquivalente Ausdrücke liefert einen zu α äquivalenten Ausdruck. So erhält man eventuell kürzere/einfachere Ausdrücke, zum Beispiel:

$$\neg(A \Rightarrow B) \underset{1.9\text{ g)}}{\equiv} \neg(\neg A \vee B) \underset{1.9\text{ e)}}{\equiv} \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \underset{1.9\text{ a)}}{\equiv} A \wedge \neg B$$

1.12 Definition

Ein Ausdruck heißt Tautologie, wenn er für jede Belegung seiner Aussagevariablen, immer den Wert 1 annimmt. Hat er immer Wert 0, heißt er Kontradiktion. Gibt es mindestens eine Belegung der Aussagevariablen, so dass der Ausdruck Wert 1 hat, heißt er erfüllbar.

1.13 Beispiel

a) $A \vee \neg A$ Tautologie
   $A \wedge \neg A$ Kontradiktion

b) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.11).
   $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.9g).

c) $A \wedge \neg B$ ist erfüllbar (durch $A = 1, B = 0$).

Prädikatenlogik

Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, dass formal wie eine Aussage aussieht, aber eine oder mehrere Variablen enthält.

Beispiel: $P(x) : \underbrace{x}_{Variable} \underbrace{< 10}_{\text{Prädikat (Eigenschaft)}}$

$Q(x) : x$ studiert Informatik $R(y) : y$ ist Primzahl und $y^2 + 2$ ist Primzahl.

Eine Aussageform$P(x)$ wird zur Aussage, wenn man die Variable durch ein konkretes Objekt ersetzt. Diest ist nur dann sinnvoll, wenn klar ist, welche Werte für x erlaubt sind, daher wird oft die zugelassene Wertemenge mit angegeben. (hier Vorgriff auf Kapitel *Mengen*)

Im Beispiel:

$P(3)$ ist wahr, $P(42)$ falsch.

$R(2)$ ist falsch, $R(3)$ ist wahr.

Oft ist die Frage interessant, ob es wenigstens ein x gibt, für das $P(x)$ wahr ist, oder ob $P(x)$ sogar für alle zugelassenen x wahr ist.

1.14 Definition

Sei $P(x)$ eine Aussageform.

a) Die Aussage *Für alle x (aus einer bestimmten Menge M) gilt $P(x)$.* ist wahr genau dann wenn $P(x)$ für alle in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\forall}_{\text{für alle, für jedes}} \quad x \quad \underbrace{\in M}_{\text{aus der Menge M}} \quad \underbrace{:}_{\text{gilt}} \quad \underbrace{P(x)}_{\text{Eigenschaft}}$

auch $\underbrace{\forall}_{x \in M} P(x)$.

Das Symbol $\forall$ heißt All- Quantor, die Aussage All- Aussage.

b) Die Aussage *Es gibt (mindestens) ein x aus M, das die Eigenschaft P(x) besitzt.* ist wahr, g.d.w P(x) für mindestens eines der in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\exists}_{\text{es gibt, es existiert}} \quad x \in M \quad \underbrace{:}_{\text{so dass gilt}} \quad P(x).$

$\exists$ heißt Existenzquantor, die Aussage Existenzmenge.

1.15 Beispiel / Bemerkung

Übungsgruppe G: $\underbrace{a}_{Anna}\underbrace{b}_{Bob}\underbrace{c}_{Clara}$

$B(x) : x$ ist blond. $W(x) : x$ ist weiblich.

$B(a) = 1, W(b) = 0)$

1. Alle Studenten der Gruppe sind blond. (1)

   $\forall x \in G$: x ist blond

   $\forall x \in G$: B(x) (1)

   Das bedeutet: a blond $\wedge$ b blond $\wedge$ c blond
   $\underbrace{B(a)}_{1} \wedge \underbrace{B(b)}_{1} \wedge \underbrace{B(c)}_{1}$

   $\forall$ ist also eine Verallgemeinerung der Konjunktion.

2. Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   $\underbrace{W(a)}_{1} \wedge \underbrace{W(b)}_{0} \wedge \underbrace{W(c)}_{1}(0)$

3. Es gibt einen Studenten der Gruppe, der weiblich ist. (1)

   $\exists x \in G$: W(x) (1)

   bedeutet: $\underbrace{W(a)}_{1} \wedge \underbrace{W(b)}_{0} \wedge \underbrace{W(c)}_{1} = 1$

   $\exists$ ist verallgemeinerte Disjunktion.

4. Aussage A: Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   Verneinung von A? $\neg A$

   ⚠ Nicht korrekt wäre: Alle Studenten der Gruppe sind männlich. (Wahrheitswert ist auch 0)

   Korrekt: Nicht alle Studenten der Gruppe sind weiblich (1) Es gibt (mindestens) einen Studenten der Gruppe, der nicht weiblich ist. (1)

allgemeiner:

1.16 Negation von All- und Existenzaussagen

a) $\neg(\forall x \in M : P(x)) \equiv \exists x \in M : \neg P(x)$

b) $\neg(\exists x \in M : P(x)) \equiv \forall x \in M : \neg P(x)$

(Verallgemeinerung der Regeln von DeMorgan) (vergleiche Beispiel 1.15, 4):

$\neg(\forall x \in G : W(x))$

$\equiv \neg(W(a) \wedge W(b) \wedge W(c)$

$\underbrace{\equiv}_{DeMorgan} (\neg W(a)) \vee (\neg W(b)) \vee (\neg(W(c))$

$\equiv \exists x \in G : \neg W(x)$