Mathematik I WS 15/16

Thomas Dinges[1] Jonas Wolf [2]

27. Oktober 2015

Inoffizielles Skript für die Vorlesung Mathematik I im WS 15/16, bei Britta Dorn. Alle Angaben ohne Gewähr. Fehler können gerne via E-Mail gemeldet werden.

[1]thomas.dinges@student.uni-tuebingen.de
[2]mail@jonaswolf.de

Inhaltsverzeichnis

1 Logik 3
1.1 Negation . . . 3
1.2 Konjunktion . . . 4
1.3 Disjunktion . . . 4
1.4 XOR . . . 5
1.5 Implikation . . . 5
1.6 Äquivalenz . . . 6
1.7 Beispiel . . . 6
1.8 Definition . . . 7
1.9 Satz . . . 8
1.10 Bemerkung . . . 9
1.11 Bemerkung (Logisches Umformen) . . . 9
1.12 Definition . . . 10
1.13 Beispiel . . . 10
1.14 Definition . . . 11
1.15 Beispiel / Bemerkung . . . 11
1.16 Negation von All- und Existenzaussagen . . . 12

2 Mengen 13
2.1 Definition (Georg Cantor, 1845-1918) . . . 13

1 Logik

Aussagenlogik

Eine **logische Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch (also nie beides zugleich) ist. Wahre Aussagen haben den Wahrheitswert 1 (auch wahr, w, true, t), falsche den Wert 0 (auch falsch, f, false).

Notation: Aussagenvariablen $A, B, C, ...A_1, A_2$.

Beispiele:

- 2 ist eine gerade Zahl (1)
- Heute ist Montag (1)
- 2 ist eine Primzahl (1)
- 12 ist eine Primzahl (0)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (1)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Aussage, aber unbekannt, ob 1 oder 0)
- 7 (keine Aussage)
- Ist 173 eine Primzahl? (keine Aussage)

Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen (**Junktoren**, z.B. und, oder, ...) kompliziertere bilden. Diese werden Ausdrücke genannt (auch Aussagen sind Ausdrücke). Durch sogenannte **Wahrheitstafeln** gibt man an, wie der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Werte der Teilaussagen bedingt ist. Im folgenden seien A, B Aussagen.

Die wichtigsten Junktoren:

1.1 Negation

Verneinung von A: $\neg A$ (auch $\bar{A}$), *nicht* A, ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Beispiele:

- A: 6 ist durch 3 teilbar. (1)
- $\neg A$: 6 ist nicht durch 3 teilbar. (0)
- B: 4,5 ist eine gerade Zahl (0)
- $\neg B$: 4,5 ist keine gerade Zahl. (1)

1.2 Konjunktion

Verknüpfung von A und B durch *und*: $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiele:

- $\underbrace{\text{6 ist eine gerade Zahl}}_{A(1)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (1)
- $\underbrace{\text{9 ist eine gerade Zahl}}_{A(0)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (0)

1.3 Disjunktion

oder: $A \vee B$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

⚠ Einschließendes oder, kein entweder...oder.

Beispiele:

- 6 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)

- 9 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)
- 7 ist gerade oder durch 3 teilbar. (0)

1.4 XOR

entweder oder: A xor B, $A \oplus B$ (ausschließendes oder, exclusive or).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.5 Implikation

wenn, dann, $A \Rightarrow B$:

- wenn A gilt, dann auch B
- A impliziert B
- aus A folgt B
- A ist <u>hinreichend</u> für B,
- B ist <u>notwendig</u> für A

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(Die Implikation $A \Rightarrow B$ sagt nur, dass B wahr sein muss, <u>falls</u> A wahr ist. Sie sagt nicht, dass B tatsächlich war ist.)

Beispiele:

- Wenn $1 = 0$, bin ich der Papst. (1)

1.6 Äquivalenz

genau dann wenn, $A \Leftrightarrow B$ (dann und nur dann wenn, g.d.w, äquivalent, if and only if, iff)

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiele:

- Heute ist Montag genau dann wenn morgen Dienstag ist. (1)
- Eine natürliche Zahl $\underbrace{\text{ist durch 6 teilbar}}_{A}$ g. d. w. sie $\underbrace{\text{durch 3 teilbar ist}}_{B}$. (0)

  $A \Rightarrow B$ (1)

  $B \Rightarrow A$ (0)

Festlegung

$\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren: $(\neg A \wedge B)$ heißt $(\neg A) \wedge B$

1.7 Beispiel

a)

Wann ist der Ausdruck $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ wahr?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

⚠ Klammerung relevant

Welche Wahrheitswerte ergeben sich für

- $A \vee (B \wedge \neg A) \wedge B$)?

- $A \lor B \land \neg A \land B$?

$(A \lor B) \land \neg(A \land B)$ und $(A \oplus B)$ haben dieselben Wahrheitstafeln. Ausdrücke sehen unterschiedlich aus (Syntax), aber haben dieselbe Bedeutung (Semantik). Dies führt zu *1.8 Definition*.

b)

Wann ist $(A \land B) \Rightarrow \neg(C \lor A)$ falsch?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel: alle möglichen Belegungen von A, B, C mit 0/1

A	B	C	$(A \land B)$	$\neg(C \lor A)$	$(A \land B) \Rightarrow \neg(C \lor A)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

oder überlegen:

$(A \land B) \Rightarrow \neg(C \lor A)$ ist nur 0, wenn

$(A \land B) = 1$, also $A = 1$ und $B = 1$

und

$\neg(C \lor A) = 0$ ist.

(Wissen: $A = 1$), also $\underline{C = 0}$ oder $\underline{C = 1}$ möglich.

1.8 Definition

Haben zwei Ausdrücke α und β bei jeder Kombination von Wahrheitswerten ihrer Aussagevariablen den gleichen Wahrheitswert, so heißen sie logisch äquivalent; man schreibt $\alpha \equiv \beta$. ('$\equiv$' ist kein Junktor, entspricht '=')

Es gilt: Falls $\alpha \equiv \beta$ gilt, hat der Ausdruck $\alpha \Leftrightarrow \beta$ immer den Wahrheitswert 1.

1.9 Satz

Seien A, B, C Aussagen. Es gelten folgende logische Äquivalenzen:

a) Doppelte Negation: $A \equiv \neg(\neg A)$

b) Kommutativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- $(A \oplus B) \equiv (B \oplus A)$
- $(A \Leftrightarrow B) \equiv (B \Leftrightarrow A)$

  ⚠ gilt nicht für '$\Rightarrow$' !! ($A \Rightarrow B \not\equiv B \Rightarrow A$)

c) Assoziativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \equiv A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

d) Distributivität:

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

e) Regeln von DeMorgan:

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

f) $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

g) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

h) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

(Alle Äquivalenzen gelten auch, wenn die Aussagevariablen durch Ausdrücke ersetzt werden.)

<u>Beweis:</u> Jeweils mittels Wahrheitstafel (Übung!), zum Beispiel:

a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
1	0	1
0	1	0

e)

A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

1.10 Bemerkung

(1.9 f): $(A \Rightarrow B) \equiv \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}_{\text{wird \underline{Kontraposition} genannt, wichtig für Beweis. Wird im Sprachgebrauch oft falsch verwendet.}}$

Beispiel: Pit ist $\underset{A}{\text{ein}}$ Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist $\underset{B}{\text{ein}}$ Hund.

äquivalent zu: $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Pit ist kein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist kein Dackel.

aber nicht zu: $B \Rightarrow A$

Pit ist ein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist ein Dackel.

und nicht zu: $\neg A \Rightarrow \neg B$

Pit ist kein Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist kein Hund.

Beispiel: Sohn des Logikers / bellende Hunde ($\rightarrow$ Folien)

1.11 Bemerkung (Logisches Umformen)

Sei α ein Ausdruck. Ersetzen von Teilausdrücken von α durch logisch äquivalente Ausdrücke liefert einen zu α äquivalenten Ausdruck. So erhält man eventuell kürzere/einfachere Ausdrücke, zum Beispiel:

$\neg(A \Rightarrow B) \underset{1.9\text{ g)}}{\equiv} \neg(\neg A \vee B) \underset{1.9\text{ e)}}{\equiv} \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \underset{1.9\text{ a)}}{\equiv} A \wedge \neg B$

1.12 Definition

Ein Ausdruck heißt Tautologie, wenn er für jede Belegung seiner Aussagevariablen, immer den Wert 1 annimmt. Hat er immer Wert 0, heißt er Kontradiktion. Gibt es mindestens eine Belegung der Aussagevariablen, so dass der Ausdruck Wert 1 hat, heißt er erfüllbar.

1.13 Beispiel

a) $A \vee \neg A$ Tautologie
   $A \wedge \neg A$ Kontradiktion

b) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.11).
   $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.9g).

c) $A \wedge \neg B$ ist erfüllbar (durch $A = 1, B = 0$).

Prädikatenlogik

Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, dass formal wie eine Aussage aussieht, aber eine oder mehrere Variablen enthält.

Beispiel: $P(x) : \underbrace{x}_{Variable} \underbrace{< 10}_{\text{Prädikat (Eigenschaft)}}$

$Q(x) : x$ studiert Informatik $R(y) : y$ ist Primzahl und $y^2 + 2$ ist Primzahl.

Eine Aussageform$P(x)$ wird zur Aussage, wenn man die Variable durch ein konkretes Objekt ersetzt. Diest ist nur dann sinnvoll, wenn klar ist, welche Werte für x erlaubt sind, daher wird oft die zugelassene Wertemenge mit angegeben. (hier Vorgriff auf Kapitel *Mengen*)

Im Beispiel:

$P(3)$ ist wahr, $P(42)$ falsch.

$R(2)$ ist falsch, $R(3)$ ist wahr.

Oft ist die Frage interessant, ob es wenigstens ein x gibt, für das $P(x)$ wahr ist, oder ob $P(x)$ sogar für alle zugelassenen x wahr ist.

1.14 Definition

Sei $P(x)$ eine Aussageform.

a) Die Aussage *Für alle x (aus einer bestimmten Menge M) gilt $P(x)$.* ist wahr genau dann wenn $P(x)$ für alle in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\forall}_{\text{für alle, für jedes}} \quad x \quad \underbrace{\in M}_{\text{aus der Menge M}} \quad \underbrace{:}_{\text{gilt}} \quad \underbrace{P(x)}_{\text{Eigenschaft}}$

auch $\underbrace{\forall}_{x \in M} P(x)$.

Das Symbol $\forall$ heißt All- Quantor, die Aussage All- Aussage.

b) Die Aussage *Es gibt (mindestens) ein x aus M, das die Eigenschaft P(x) besitzt.* ist wahr, g.d.w P(x) für mindestens eines der in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\exists}_{\text{es gibt, es existiert}} \quad x \in M \quad \underbrace{:}_{\text{so dass gilt}} \quad P(x).$

$\exists$ heißt Existenzquantor, die Aussage Existenzmenge.

1.15 Beispiel / Bemerkung

Übungsgruppe G: $\underbrace{a}_{Anna} \underbrace{b}_{Bob} \underbrace{c}_{Clara}$

$B(x)$: x ist blond. $W(x)$: x ist weiblich.

$B(a) = 1, W(b) = 0)$

1. Alle Studenten der Gruppe sind blond. (1)

   $\forall x \in G$: x ist blond

   $\forall x \in G$: B(x) (1)

   Das bedeutet: a blond $\wedge$ b blond $\wedge$ c blond
   $\underbrace{B(a)}_{1} \wedge \underbrace{B(b)}_{1} \wedge \underbrace{B(c)}_{1}$

   $\forall$ ist also eine Verallgemeinerung der Konjunktion.

2. Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   $\underbrace{W(a)}_{1} \wedge \underbrace{W(b)}_{0} \wedge \underbrace{W(c)}_{1}(0)$

3. Es gibt einen Studenten der Gruppe, der weiblich ist. (1)

   $\exists x \in G$: W(x) (1)

   bedeutet: $\underbrace{W(a)}_{1} \vee \underbrace{W(b)}_{0} \vee \underbrace{W(c)}_{1} = 1$

   $\exists$ ist verallgemeinerte Disjunktion.

4. Aussage A: Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   Verneinung von A? $\neg A$

   ⚠ Nicht korrekt wäre: Alle Studenten der Gruppe sind männlich. (Wahrheitswert ist auch 0)

   Korrekt: Nicht alle Studenten der Gruppe sind weiblich (1) Es gibt (mindestens) einen Studenten der Gruppe, der nicht weiblich ist. (1)

allgemeiner:

1.16 Negation von All- und Existenzaussagen

a) $\neg(\forall x \in M : P(x)) \equiv \exists x \in M : \neg P(x)$

b) $\neg(\exists x \in M : P(x)) \equiv \forall x \in M : \neg P(x)$

(Verallgemeinerung der Regeln von DeMorgan) (vergleiche Beispiel 1.15, 4):

$\neg(\forall x \in G : W(x))$

$\equiv \neg(W(a) \wedge W(b) \wedge W(c)$

$\underbrace{\equiv}_{DeMorgan} (\neg W(a)) \vee (\neg W(b)) \vee (\neg(W(c))$

$\equiv \exists x \in G : \neg W(x)$

Bemerkung

Aussageformen können auch mehrere Variablen enthalten, Aussagen mit mehreren Quantoren sind möglich.

Zum Beispiel:

$\exists x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$
$\exists x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$

$\forall x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$
$\forall x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$

Negation dann durch mehrfaches Anwenden von 1.16, zum Beispiel:

$\neg(\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x, y, z))$
$\equiv \exists x \in X : \neg(\forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x, y, z))$
$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y : \neg(\exists z \in Z : P(x, y, z))$
$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad \forall z \in Z : \neg P(x, y, z))$

Also:
ändere $\exists$ in $\forall$,
$\forall$ in $\exists$,
verneine Prädikat.

2 Mengen

2.1 Definition (Georg Cantor, 1845-1918)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten (Elementen) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Im Folgenden seien A, B Mengen.

a) $x \in A : x$ ist Element der Menge A
$x \notin A : x$ ist nicht Element der Menge A
oder auch:
$A \ni x : x$ ist Element der Menge A
$A \not\ni x : x$ ist nicht Element der Menge A

b) Eine Menge kann beschrieben werden durch:

- Aufzählung ihrer Elemente, zum Beispiel:
  $M_1 = \{a, b, c\}$ $\quad$ ($= \{c, a, b\}$, d.h. Reihenfolge spielt keine Rolle)
  Achtung: Keine Wiederholungen!
  $M_2 = \{☺, ☹\}$
  $M_3 = \{\underline{3}, \underline{\{1, 2\}}, \underline{M_1}\}$
  geht nur bei endlichen Mengen oder bestimmten unendlichen Mengen, zum Beispiel:
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$ Menge der ganzen Zahlen

- Charakterisierung ihrer Elemente:
  $A = \{x \mid x$ besitzt die Eigenschaft $E\}$, z.B.:
  $A = \{n \underbrace{\mid}_{\text{sprich: "mit der Eigenschaft"}} n \in \mathbb{N}$ und n ist gerade$\}$
  $= \{2, 4, 6, 8, ...\}$
  $= \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}$ mit $x = 2 \cdot k\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

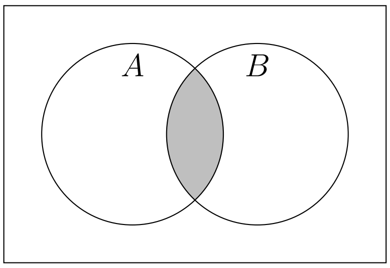
  Bsp: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ Menge der rationalen Zahlen

c) Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die Menge ohne Elemente (leere Menge)

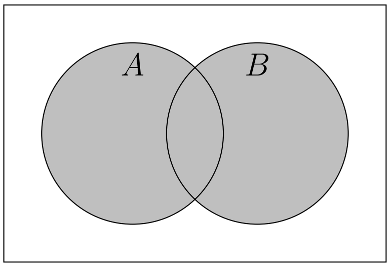
d) Mit $|A|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente der Menge A (Kardinalität oder Mächtigkeit von A), zum Beispiel:
$\big|\{1, a, *\}\big| = 3, \quad \big|\emptyset\big| = 0, \quad |\mathbb{N}| = \infty, \quad \big|\{\mathbb{N}\}\big| = 1$

e) $A \cap B \underbrace{:=}_{\text{wird definiert als}} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ heißt Durchschnitt oder Schnittmenge von A und B.

Grafische Veranschaulichung: Venn-Diagramm (⚠ gilt nicht als Beweis)



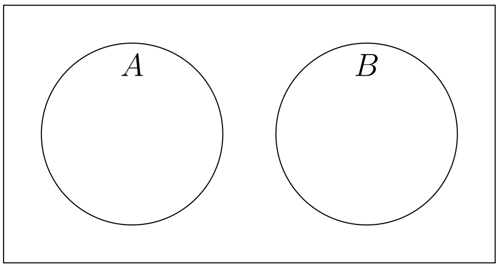
f) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ heißt Vereinigung von A und B.



Beispiele: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4\}$

$A \cap B = \{2, 3\}$,
$A \cap C = \emptyset$,
$B \cap C = \{4\} = C$,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

g) A und B heißen disjunkt, falls gilt $A \cap B = \emptyset$



h) A heißt Teilmenge von B, $A \subseteq B$, falls gilt:

$x \in A \Rightarrow x \in B$
Oder in Worten: Jedes Element von A ist auch Element von B.

Dasselbe bedeutet die Notation
$B \supseteq A$
(B ist Obermenge von A)

Beispiel: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)

Es gilt: $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A.

Achtung: Unterschied $\subseteq, \in$!
Zum Beispiel:
$A = \{1, \mathbb{N}\}$ (hier ist die Menge $\mathbb{N}$ ein Element von A, keine Teilmenge!)
$1 \in A, \qquad \mathbb{N} \in A, \qquad \mathbb{N} \not\subseteq A, \qquad 2 \notin A, \qquad \{1\} \subseteq A$