

Mathematik I WS 15/16

Thomas Dinges¹ Jonas Wolf²

30. Oktober 2015

Inoffizielles Skript für die Vorlesung Mathematik I im WS 15/16, bei Britta Dorn.
Alle Angaben ohne Gewähr. Fehler können gerne via E-Mail gemeldet werden.

¹thomas.dinges@student.uni-tuebingen.de

²mail@jonaswolf.de

Inhaltsverzeichnis

1	Logik	3
1.1	Negation	3
1.2	Konjunktion	4
1.3	Disjunktion	4
1.4	XOR	5
1.5	Implikation	5
1.6	Äquivalenz	6
1.7	Beispiel	6
1.8	Definition	7
1.9	Satz	8
1.10	Bemerkung	9
1.11	Bemerkung (Logisches Umformen)	9
1.12	Definition	10
1.13	Beispiel	10
1.14	Definition	11
1.15	Beispiel / Bemerkung	11
1.16	Negation von All- und Existenzaussagen	12
2	Mengen	13
2.1	Definition (Georg Cantor, 1845-1918)	13

1 Logik

Aussagenlogik

Eine **logische Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch (also nie beides zugleich) ist. Wahre Aussagen haben den Wahrheitswert 1 (auch wahr, w, true, t), falsche den Wert 0 (auch falsch, f, false).

Notation: Aussagenvariablen $A, B, C, \dots A_1, A_2$.

Beispiele:

- 2 ist eine gerade Zahl (1)
- Heute ist Montag (1)
- 2 ist eine Primzahl (1)
- 12 ist eine Primzahl (0)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (1)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Aussage, aber unbekannt, ob 1 oder 0)
- 7 (keine Aussage)
- Ist 173 eine Primzahl? (keine Aussage)

Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen (**Junktoren**, z.B. und, oder, ...) kompliziertere bilden. Diese werden **Ausdrücke** genannt (auch Aussagen sind Ausdrücke). Durch sogenannte **Wahrheitstabeln** gibt man an, wie der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Werte der Teilaussagen bedingt ist. Im folgenden seien A, B Aussagen.

Die wichtigsten Junktoren:

1.1 Negation

Verneinung von A : $\neg A$ (auch \bar{A}), *nicht* A , ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Beispiele:

- A : 6 ist durch 3 teilbar. (1)
- $\neg A$: 6 ist nicht durch 3 teilbar. (0)
- B : 4,5 ist eine gerade Zahl (0)
- $\neg B$: 4,5 ist keine gerade Zahl. (1)

1.2 Konjunktion

Verknüpfung von A und B durch *und*: $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiele:

- $\underbrace{6 \text{ ist eine gerade Zahl}}_{A(1)} \text{ und } \underbrace{\text{durch 3 teilbar.}}_{B(1)}$. (1)
- $\underbrace{9 \text{ ist eine gerade Zahl}}_{A(0)} \text{ und } \underbrace{\text{durch 3 teilbar.}}_{B(1)}$. (0)

1.3 Disjunktion

oder: $A \vee B$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

\triangle Einschließendes oder, kein entweder...oder.

Beispiele:

- 6 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)

- 9 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)
- 7 ist gerade oder durch 3 teilbar. (0)

1.4 XOR

entweder oder: $A \text{ xor } B$, $A \oplus B$ (ausschließendes oder, exclusive or).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.5 Implikation

wenn, dann, $A \Rightarrow B$:

- wenn A gilt, dann auch B
- A impliziert B
- aus A folgt B
- A ist hinreichend für B,
- B ist notwendig für A

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(Die Implikation $A \Rightarrow B$ sagt nur, dass B wahr sein muss, falls A wahr ist. Sie sagt nicht, dass B tatsächlich wahr ist.)

Beispiele:

- Wenn $1 = 0$, bin ich der Papst. (1)

1.6 Äquivalenz

genau dann wenn, $A \Leftrightarrow B$ (dann und nur dann wenn, g.d.w, äquivalent, if and only if, iff)

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiele:

- Heute ist Montag genau dann wenn morgen Dienstag ist. (1)
- Eine natürliche Zahl $\underbrace{\text{ist durch 6 teilbar}}_A$ g. d. w. sie $\underbrace{\text{durch 3 teilbar ist.}}_B$ (0)

$$A \Rightarrow B \text{ (1)}$$

$$B \Rightarrow A \text{ (0)}$$

Festlegung

\neg bindet stärker als alle anderen Junktoren: $(\neg A \wedge B)$ heißt $(\neg A) \wedge B$

1.7 Beispiel

a)

Wann ist der Ausdruck $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ wahr?

\rightarrow Wahrheitstafel

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

\triangle Klammerung relevant

Welche Wahrheitswerte ergeben sich für

- $A \vee (B \wedge \neg A) \wedge B$?

- $A \vee B \wedge \neg A \wedge B$?

$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ und $(A \oplus B)$ haben dieselben Wahrheitstafeln. Ausdrücke sehen unterschiedlich aus (Syntax), aber haben dieselbe Bedeutung (Semantik). Dies führt zu 1.8 Definition.

b)

Wann ist $(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$ falsch?

→ Wahrheitstafel: alle möglichen Belegungen von A, B, C mit 0/1

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg(C \vee A)$	$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

oder überlegen:

$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$ ist nur 0, wenn

$$(A \wedge B) = 1, \text{ also } A = 1 \text{ und } B = 1$$

und

$$\neg(C \vee A) = 0 \text{ ist.}$$

(Wissen: $A = 1$), also $C = 0$ oder $C = 1$ möglich.

1.8 Definition

Haben zwei Ausdrücke α und β bei jeder Kombination von Wahrheitswerten ihrer Aussagevariablen den gleichen Wahrheitswert, so heißen sie logisch äquivalent; man schreibt $\alpha \equiv \beta$. (\equiv ist kein Junktor, entspricht '=')

Es gilt: Falls $\alpha \equiv \beta$ gilt, hat der Ausdruck $\alpha \Leftrightarrow \beta$ immer den Wahrheitswert 1.

1.9 Satz

Seien A, B, C Aussagen. Es gelten folgende logische Äquivalenzen:

a) **Doppelte Negation:** $A \equiv \neg(\neg A)$

b) **Kommutativität von $\wedge, \vee, \oplus, \Leftrightarrow$:**

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- $(A \oplus B) \equiv (B \oplus A)$
- $(A \Leftrightarrow B) \equiv (B \Leftrightarrow A)$

\triangle gilt nicht für ' \Rightarrow ' !! ($A \Rightarrow B \neq B \Rightarrow A$)

c) **Assoziativität von $\wedge, \vee, \oplus, \Leftrightarrow$:**

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \equiv A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

d) **Distributivität:**

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

e) **Regeln von DeMorgan:**

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

f) $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

g) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

h) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

(Alle Äquivalenzen gelten auch, wenn die Aussagevariablen durch Ausdrücke ersetzt werden.)

Beweis: Jeweils mittels Wahrheitstafel (Übung!), zum Beispiel:

a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
1	0	1
0	1	0

e)

A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

1.10 Bemerkung

(1.9 f): $(A \Rightarrow B) \equiv \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}$
 wird Kontraposition genannt, wichtig für Beweis. Wird im Sprachgebrauch oft falsch verwendet.

Beispiel: Pit ist ein Dackel. \Rightarrow Pit ist ein Hund.
 \underset{A} \underset{B}

äquivalent zu: $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Pit ist kein Hund. \Rightarrow Pit ist kein Dackel.

aber nicht zu: $B \Rightarrow A$

Pit ist ein Hund. \Rightarrow Pit ist ein Dackel.

und nicht zu: $\neg A \Rightarrow \neg B$

Pit ist kein Dackel. \Rightarrow Pit ist kein Hund.

Beispiel: Sohn des Logikers / bellende Hunde (\rightarrow Folien)

1.11 Bemerkung (Logisches Umformen)

Sei α ein Ausdruck. Ersetzen von Teilausdrücken von α durch logisch äquivalente Ausdrücke liefert einen zu α äquivalenten Ausdruck. So erhält man eventuell kürzere/einfachere Ausdrücke, zum Beispiel:

$$\neg(A \Rightarrow B) \stackrel{1.9 \text{ g)}}{=} \neg(\neg A \vee B) \stackrel{1.9 \text{ e)}}{=} \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \stackrel{1.9 \text{ a)}}{=} A \wedge \neg B$$

1.12 Definition

Ein Ausdruck heißt Tautologie, wenn er für jede Belegung seiner Aussagevariablen, immer den Wert 1 annimmt. Hat er immer Wert 0, heißt er Kontradiktion. Gibt es mindestens eine Belegung der Aussagevariablen, so dass der Ausdruck Wert 1 hat, heißt er erfüllbar.

1.13 Beispiel

- a) $A \vee \neg A$ Tautologie
 $A \wedge \neg A$ Kontradiktion
- b) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.11).
 $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.9g).
- c) $A \wedge \neg B$ ist erfüllbar (durch $A = 1, B = 0$).

Prädikatenlogik

Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, dass formal wie eine Aussage aussieht, aber eine oder mehrere Variablen enthält.

Beispiel: $P(x) : \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{< 10}_{\text{Prädikat (Eigenschaft)}}$

$Q(x) : x$ studiert Informatik $R(y) : y$ ist Primzahl und $y^2 + 2$ ist Primzahl.

Eine Aussageform $P(x)$ wird zur Aussage, wenn man die Variable durch ein konkretes Objekt ersetzt. Dies ist nur dann sinnvoll, wenn klar ist, welche Werte für x erlaubt sind, daher wird oft die zugelassene Wertemenge mit angegeben. (hier Vorgriff auf Kapitel *Mengen*)

Im Beispiel:

$P(3)$ ist wahr, $P(42)$ falsch.

$R(2)$ ist falsch, $R(3)$ ist wahr.

Oft ist die Frage interessant, ob es wenigstens ein x gibt, für das $P(x)$ wahr ist, oder ob $P(x)$ sogar für alle zugelassenen x wahr ist.

1.14 Definition

Sei $P(x)$ eine Aussageform.

a) Die Aussage *Für alle x (aus einer bestimmten Menge M) gilt $P(x)$* ist wahr genau dann wenn $P(x)$ für alle in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\forall}_{\text{für alle, für jedes}} \underbrace{x \in M}_{\text{aus der Menge } M} \underbrace{:}_{\text{gilt}} \underbrace{P(x)}_{\text{Eigenschaft}}$

auch $\underbrace{\forall_{x \in M}} P(x)$.

Das Symbol \forall heißt All-Quantor, die Aussage All-Aussage.

b) Die Aussage *Es gibt (mindestens) ein x aus M , das die Eigenschaft $P(x)$ besitzt* ist wahr, g.d.w $P(x)$ für mindestens eines der in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\exists}_{\text{es gibt, es existiert}} \underbrace{x \in M}_{\text{so dass}} \underbrace{:}_{\text{gilt}} P(x)$.

\exists heißt Existenzquantor, die Aussage Existenzmenge.

1.15 Beispiel / Bemerkung

Übungsgruppe G: $\underbrace{a}_{\text{Anna}} \underbrace{b}_{\text{Bob}} \underbrace{c}_{\text{Clara}}$

$B(x) : x$ ist blond. $W(x) : x$ ist weiblich.

$B(a) = 1, W(b) = 0$

1. Alle Studenten der Gruppe sind blond. (1)

$\forall x \in G: x$ ist blond

$\forall x \in G: B(x)$ (1)

Das bedeutet: a blond $\wedge b$ blond $\wedge c$ blond

$\underbrace{B(a)}_1 \wedge \underbrace{B(b)}_1 \wedge \underbrace{B(c)}_1$

\forall ist also eine Verallgemeinerung der Konjunktion.

2. Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

$\underbrace{W(a)}_1 \wedge \underbrace{W(b)}_0 \wedge \underbrace{W(c)}_1$

3. Es gibt einen Studenten der Gruppe, der weiblich ist. (1)

$$\exists x \in G: W(x) \quad (1)$$

$$\text{bedeutet: } \underbrace{W(a)}_1 \vee \underbrace{W(b)}_0 \vee \underbrace{W(c)}_1 = 1$$

\exists ist verallgemeinerte Disjunktion.

4. Aussage A: Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

Verneinung von A? $\neg A$

\triangle Nicht korrekt wäre: Alle Studenten der Gruppe sind männlich. (Wahrheitswert ist auch 0)

Korrekt: Nicht alle Studenten der Gruppe sind weiblich (1) Es gibt (mindestens) einen Studenten der Gruppe, der nicht weiblich ist. (1)

allgemeiner:

1.16 Negation von All- und Existenzaussagen

$$\text{a) } \neg(\forall x \in M : P(x)) \equiv \exists x \in M : \neg P(x)$$

$$\text{b) } \neg(\exists x \in M : P(x)) \equiv \forall x \in M : \neg P(x)$$

(Verallgemeinerung der Regeln von DeMorgan) (vergleiche Beispiel 1.15, 4):

$$\neg(\forall x \in G : W(x))$$

$$\equiv \neg(W(a) \wedge W(b) \wedge W(c))$$

$$\equiv \underbrace{(\neg W(a)) \vee (\neg W(b)) \vee (\neg W(c))}_{\text{DeMorgan}}$$

$$\equiv \exists x \in G : \neg W(x)$$

Bemerkung

Aussageformen können auch mehrere Variablen enthalten, Aussagen mit mehreren Quantoren sind möglich.

Zum Beispiel:

$$\exists x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$$

$$\exists x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$$

$$\forall x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$$

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$$

Negation dann durch mehrfaches Anwenden von 1.16, zum Beispiel:

$$\neg(\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x, y, z))$$

$$\equiv \exists x \in X : \neg(\forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x, y, z))$$

$$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y : \neg(\exists z \in Z : P(x, y, z))$$

$$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad \forall z \in Z : \neg P(x, y, z)$$

Also:

ändere \exists in \forall ,
 \forall in \exists ,
 verneine Prädikat.

2 Mengen

2.1 Definition (Georg Cantor, 1845-1918)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten (Elementen) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Im Folgenden seien A, B Mengen.

- a) $x \in A : x$ ist Element der Menge A
 $x \notin A : x$ ist nicht Element der Menge A
 oder auch:
 $A \ni x : x$ ist Element der Menge A
 $A \not\ni x : x$ ist nicht Element der Menge A

- b) Eine Menge kann beschrieben werden durch:

- Aufzählung ihrer Elemente, zum Beispiel:
 $M_1 = \{a, b, c\} \quad (= \{c, a, b\}, \text{ d.h. Reihenfolge spielt keine Rolle})$
Achtung: Keine Wiederholungen!
 $M_2 = \{\odot, \odot\}$
 $M_3 = \{\underline{3}, \underline{\{1, 2\}}, \underline{M_1}\}$
 geht nur bei endlichen Mengen oder bestimmten unendlichen Mengen,
 zum Beispiel:
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen mit der Null

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen

- Charakterisierung ihrer Elemente:

$A = \{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}$, z.B.:

$A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ist gerade}\}$

sprich: "mit der Eigenschaft"

$= \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$= \{x \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2 \cdot k\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Bsp: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ Menge der rationalen Zahlen

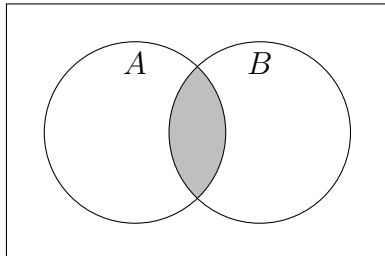
c) Mit \emptyset bezeichnen wir die Menge ohne Elemente (leere Menge)

d) Mit $|A|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente der Menge A (Kardinalität oder Mächtigkeit von A), zum Beispiel:

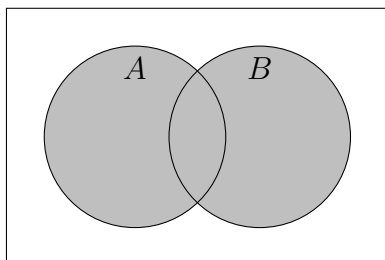
$$|\{1, a, *\}| = 3, \quad |\emptyset| = 0, \quad |\mathbb{N}| = \infty, \quad |\{\mathbb{N}\}| = 1$$

e) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ heißt Durchschnitt oder Schnittmenge von A und B .
wird definiert als

Grafische Veranschaulichung: Venn-Diagramm (\triangle gilt nicht als Beweis)



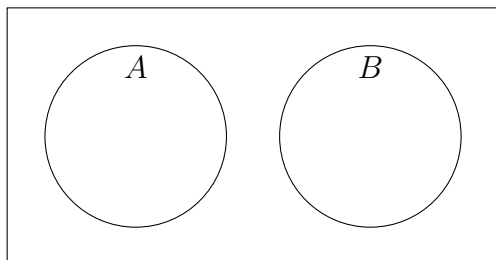
f) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ heißt Vereinigung von A und B .



Beispiele: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4\}$

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{2, 3\}, \\
A \cap C &= \emptyset, \\
B \cap C &= \{4\} = C, \\
A \cup B &= \{1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}$$

g) A und B heißen disjunkt, falls gilt $A \cap B = \emptyset$



h) A heißt Teilmenge von B , $A \subseteq B$, falls gilt:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Oder in Worten: Jedes Element von A ist auch Element von B .

Dasselbe bedeutet die Notation

$$B \supseteq A$$

(B ist Obermenge von A)

Beispiel: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)

Es gilt: $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A .

Achtung: Unterschied \subseteq, \in !

Zum Beispiel:

$A = \{1, \mathbb{N}\}$ (hier ist die Menge \mathbb{N} ein Element von A , keine Teilmenge!)

$$1 \in A, \quad \mathbb{N} \in A, \quad \mathbb{N} \not\subseteq A, \quad 2 \notin A, \quad \{1\} \subseteq A$$

i) Zwei Mengen A, B heißen gleich ($A = B$, falls gilt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ (also $x \in A \Rightarrow / \Leftarrow / \Leftrightarrow x \in B$).

Darin liegt ein Beweisprinzip: Man zeigt $A = B$, indem man zeigt:

- $x \in A \Rightarrow x \in B$
- $x \in B \Rightarrow x \in A$ (mehr später)

Beispiel: $A = 2, 3, 4, \quad B = \{x \in \mathbb{N} | x > 1 \text{ und } x < 5\} \quad A = B$

j) $A \subsetneq B$ ($A \subsetneq B$) bedeutet $A \subseteq B$, aber $A \neq B$.

(d.h. $\exists x \in B$ mit $x \notin A$, aber $x \in B$)

(A ist echte Teilmenge von B .)