Mathematik I WS 15/16

Thomas Dinges[1] Jonas Wolf [2]

9. November 2015

Inoffizielles Skript für die Vorlesung Mathematik I im WS 15/16, bei Britta Dorn.
Alle Angaben ohne Gewähr. Fehler können gerne via E-Mail gemeldet werden.

[1]thomas.dinges@student.uni-tuebingen.de
[2]mail@jonaswolf.de

Inhaltsverzeichnis

1 Logik

Aussagenlogik

Eine **logische Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch (also nie beides zugleich) ist. Wahre Aussagen haben den Wahrheitswert 1 (auch wahr, w, true, t), falsche den Wert 0 (auch falsch, f, false).

Notation: Aussagenvariablen $A, B, C, ...A_1, A_2$.

Beispiele:

- 2 ist eine gerade Zahl (1)
- Heute ist Montag (1)
- 2 ist eine Primzahl (1)
- 12 ist eine Primzahl (0)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (1)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Aussage, aber unbekannt, ob 1 oder 0)
- 7 (keine Aussage)
- Ist 173 eine Primzahl? (keine Aussage)

Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen (**Junktoren**, z.B. und, oder, ...) kompliziertere bilden. Diese werden Ausdrücke genannt (auch Aussagen sind Ausdrücke). Durch sogenannte **Wahrheitstafeln** gibt man an, wie der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Werte der Teilaussagen bedingt ist. Im folgenden seien A, B Aussagen.

Die wichtigsten Junktoren:

1.1 Negation

Verneinung von A: $\neg A$ (auch $\bar{A}$), *nicht* A, ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Beispiele:

- A: 6 ist durch 3 teilbar. (1)
- $\neg A$: 6 ist nicht durch 3 teilbar. (0)
- B: 4,5 ist eine gerade Zahl (0)
- $\neg B$: 4,5 ist keine gerade Zahl. (1)

1.2 Konjunktion

Verknüpfung von A und B durch *und*: $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiele:

- $\underbrace{\text{6 ist eine gerade Zahl}}_{A(1)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (1)
- $\underbrace{\text{9 ist eine gerade Zahl}}_{A(0)}$ und $\underbrace{\text{durch 3 teilbar}}_{B(1)}$. (0)

1.3 Disjunktion

oder: $A \vee B$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

⚠ Einschließendes oder, kein entweder...oder.

Beispiele:

- 6 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)

- 9 ist gerade oder durch 3 teilbar. (1)
- 7 ist gerade oder durch 3 teilbar. (0)

1.4 XOR

entweder oder: A xor B, $A \oplus B$ (ausschließendes oder, exclusive or).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.5 Implikation

wenn, dann, $A \Rightarrow B$:

- wenn A gilt, dann auch B
- A impliziert B
- aus A folgt B
- A ist <u>hinreichend</u> für B,
- B ist <u>notwendig</u> für A

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(Die Implikation $A \Rightarrow B$ sagt nur, dass B wahr sein muss, <u>falls</u> A wahr ist. Sie sagt nicht, dass B tatsächlich war ist.)

Beispiele:

- Wenn $1 = 0$, bin ich der Papst. (1)

1.6 Äquivalenz

genau dann wenn, $A \Leftrightarrow B$ (dann und nur dann wenn, g.d.w, äquivalent, if and only if, iff)

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiele:

- Heute ist Montag genau dann wenn morgen Dienstag ist. (1)
- Eine natürliche Zahl $\underbrace{\text{ist durch 6 teilbar}}_{A}$ g. d. w. sie $\underbrace{\text{durch 3 teilbar ist}}_{B}$. (0)

  $A \Rightarrow B$ (1)

  $B \Rightarrow A$ (0)

Festlegung

$\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren: $(\neg A \wedge B)$ heißt $(\neg A) \wedge B$

1.7 Beispiel

a)

Wann ist der Ausdruck $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ wahr?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

⚠ Klammerung relevant

Welche Wahrheitswerte ergeben sich für

- $A \vee (B \wedge \neg A) \wedge B)$?

- $A \vee B \wedge \neg A \wedge B$?

$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ und $(A \oplus B)$ haben dieselben Wahrheitstafeln. Ausdrücke sehen unterschiedlich aus (Syntax), aber haben dieselbe Bedeutung (Semantik). Dies führt zu *1.8 Definition*.

b)

Wann ist $(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$ falsch?

$\rightarrow$ Wahrheitstafel: alle möglichen Belegungen von A, B, C mit 0/1

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg(C \vee A)$	$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

oder überlegen:

$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(C \vee A)$ ist nur 0, wenn

$(A \wedge B) = 1$, also $A = 1$ und $B = 1$

und

$\neg(C \vee A) = 0$ ist.

(Wissen: $A = 1$), also $\underline{C = 0}$ oder $\underline{C = 1}$ möglich.

1.8 Definition

Haben zwei Ausdrücke α und β bei jeder Kombination von Wahrheitswerten ihrer Aussagevariablen den gleichen Wahrheitswert, so heißen sie logisch äquivalent; man schreibt $\alpha \equiv \beta$. ('$\equiv$' ist kein Junktor, entspricht '=')

Es gilt: Falls $\alpha \equiv \beta$ gilt, hat der Ausdruck $\alpha \Leftrightarrow \beta$ immer den Wahrheitswert 1.

1.9 Satz

Seien A, B, C Aussagen. Es gelten folgende logische Äquivalenzen:

a) Doppelte Negation: $A \equiv \neg(\neg A)$

b) Kommutativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- $(A \oplus B) \equiv (B \oplus A)$
- $(A \Leftrightarrow B) \equiv (B \Leftrightarrow A)$

  ⚠ gilt nicht für '$\Rightarrow$' !! ($A \Rightarrow B \not\equiv B \Rightarrow A$)

c) Assoziativität von $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Leftrightarrow$:

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \equiv A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

d) Distributivität:

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

e) Regeln von DeMorgan:

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

f) $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

g) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

h) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

(Alle Äquivalenzen gelten auch, wenn die Aussagevariablen durch Ausdrücke ersetzt werden.)

Beweis: Jeweils mittels Wahrheitstafel (Übung!), zum Beispiel:

a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
1	0	1
0	1	0

e)

A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

1.10 Bemerkung

(1.9 f): $(A \Rightarrow B) \equiv \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}_{\text{wird \underline{Kontraposition} genannt, wichtig für Beweis. Wird im Sprachgebrauch oft falsch verwendet.}}$

Beispiel: Pit ist $\underset{A}{\text{ein}}$ Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist $\underset{B}{\text{ein}}$ Hund.

äquivalent zu: $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Pit ist kein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist kein Dackel.

aber nicht zu: $B \Rightarrow A$

Pit ist ein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist ein Dackel.

und nicht zu: $\neg A \Rightarrow \neg B$

Pit ist kein Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist kein Hund.

Beispiel: Sohn des Logikers / bellende Hunde ($\rightarrow$ Folien)

1.11 Bemerkung (Logisches Umformen)

Sei α ein Ausdruck. Ersetzen von Teilausdrücken von α durch logisch äquivalente Ausdrücke liefert einen zu α äquivalenten Ausdruck. So erhält man eventuell kürzere/einfachere Ausdrücke, zum Beispiel:

$$\neg(A \Rightarrow B) \underset{1.9\text{ g)}}{\equiv} \neg(\neg A \vee B) \underset{1.9\text{ e)}}{\equiv} \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \underset{1.9\text{ a)}}{\equiv} A \wedge \neg B$$

1.12 Definition

Ein Ausdruck heißt Tautologie, wenn er für jede Belegung seiner Aussagevariablen, immer den Wert 1 annimmt. Hat er immer Wert 0, heißt er Kontradiktion. Gibt es mindestens eine Belegung der Aussagevariablen, so dass der Ausdruck Wert 1 hat, heißt er erfüllbar.

1.13 Beispiel

a) $A \vee \neg A$ Tautologie
   $A \wedge \neg A$ Kontradiktion

b) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.11).
   $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ Tautologie (vergleiche Beispiel in 1.9g).

c) $A \wedge \neg B$ ist erfüllbar (durch $A = 1, B = 0$).

Prädikatenlogik

Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, dass formal wie eine Aussage aussieht, aber eine oder mehrere Variablen enthält.

Beispiel: $P(x): \underbrace{x}_{Variable} \underbrace{< 10}_{\text{Prädikat (Eigenschaft)}}$

$Q(x)$: x studiert Informatik $R(y)$: y ist Primzahl und $y^2 + 2$ ist Primzahl.

Eine Aussageform$P(x)$ wird zur Aussage, wenn man die Variable durch ein konkretes Objekt ersetzt. Diest ist nur dann sinnvoll, wenn klar ist, welche Werte für x erlaubt sind, daher wird oft die zugelassene Wertemenge mit angegeben. (hier Vorgriff auf Kapitel *Mengen*)

Im Beispiel:

$P(3)$ ist wahr, $P(42)$ falsch.

$R(2)$ ist falsch, $R(3)$ ist wahr.

Oft ist die Frage interessant, ob es wenigstens ein x gibt, für das $P(x)$ wahr ist, oder ob $P(x)$ sogar für alle zugelassenen x wahr ist.

1.14 Definition

Sei $P(x)$ eine Aussageform.

a) Die Aussage *Für alle x (aus einer bestimmten Menge M) gilt $P(x)$.* ist wahr genau dann wenn $P(x)$ für alle in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\forall}_{\text{für alle, für jedes}} \quad x \quad \underbrace{\in M}_{\text{aus der Menge M}} \quad \underbrace{:}_{\text{gilt}} \ \underbrace{P(x)}_{\text{Eigenschaft}}$

auch $\underbrace{\forall}_{x\in M} P(x)$.

Das Symbol $\forall$ heißt All- Quantor, die Aussage All- Aussage.

b) Die Aussage *Es gibt (mindestens) ein x aus M, das die Eigenschaft P(x) besitzt.* ist wahr, g.d.w P(x) für mindestens eines der in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\exists}_{\text{es gibt, es existiert}} \quad x \in M \quad \underbrace{:}_{\text{so dass gilt}} \quad P(x).$

$\exists$ heißt Existenzquantor, die Aussage Existenzmenge.

1.15 Beispiel / Bemerkung

Übungsgruppe G: $\underbrace{a}_{Anna}\underbrace{b}_{Bob}\underbrace{c}_{Clara}$

$B(x)$: x ist blond. $W(x)$: x ist weiblich.

$B(a) = 1, W(b) = 0)$

1. Alle Studenten der Gruppe sind blond. (1)

   $\forall x \in G$: x ist blond

   $\forall x \in G$: B(x) (1)

   Das bedeutet: a blond $\wedge$ b blond $\wedge$ c blond
   $\underbrace{B(a)}_{1} \wedge \underbrace{B(b)}_{1} \wedge \underbrace{B(c)}_{1}$

   $\forall$ ist also eine Verallgemeinerung der Konjunktion.

2. Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   $\underbrace{W(a)}_{1} \wedge \underbrace{W(b)}_{0} \wedge \underbrace{W(c)}_{1}(0)$

3. Es gibt einen Studenten der Gruppe, der weiblich ist. (1)

   $\exists x \in G$: W(x) (1)

   bedeutet: $\underbrace{W(a)}_{1} \vee \underbrace{W(b)}_{0} \vee \underbrace{W(c)}_{1} = 1$

   $\exists$ ist verallgemeinerte Disjunktion.

4. Aussage A: Alle Studenten der Gruppe sind weiblich. (0)

   Verneinung von A? $\neg A$

   ⚠ Nicht korrekt wäre: Alle Studenten der Gruppe sind männlich. (Wahrheitswert ist auch 0)

   Korrekt: Nicht alle Studenten der Gruppe sind weiblich (1) Es gibt (mindestens) einen Studenten der Gruppe, der nicht weiblich ist. (1)

allgemeiner:

1.16 Negation von All- und Existenzaussagen

a) $\neg(\forall x \in M : P(x)) \equiv \exists x \in M : \neg P(x)$

b) $\neg(\exists x \in M : P(x)) \equiv \forall x \in M : \neg P(x)$

(Verallgemeinerung der Regeln von DeMorgan) (vergleiche Beispiel 1.15, 4):

$\neg(\forall x \in G : W(x))$

$\equiv \neg(W(a) \wedge W(b) \wedge W(c)$

$\underbrace{\equiv}_{DeMorgan} (\neg W(a)) \vee (\neg W(b)) \vee (\neg(W(c))$

$\equiv \exists x \in G : \neg W(x)$

Bemerkung

Aussageformen können auch mehrere Variablen enthalten, Aussagen mit mehreren Quantoren sind möglich.

Zum Beispiel:

$\exists x \in X \quad \exists y \in Y : P(x, y)$
$\exists x \in X \quad \forall y \in Y : P(x, y)$

$\forall x \in X \quad \exists y \in Y : P(x,y)$
$\forall x \in X \quad \forall y \in Y : P(x,y)$

Negation dann durch mehrfaches Anwenden von 1.16, zum Beispiel:

$\neg(\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x,y,z))$
$\equiv \exists x \in X : \neg(\forall y \in Y \quad \exists z \in Z : P(x,y,z))$
$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y : \neg(\exists z \in Z : P(x,y,z))$
$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad \forall z \in Z : \neg P(x,y,z))$

Also:
ändere $\exists$ in $\forall$,
$\forall$ in $\exists$,
verneine Prädikat.

2 Mengen

2.1 Definition (Georg Cantor, 1845-1918)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten (Elementen) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Im Folgenden seien A, B Mengen.

a) $x \in A : x$ ist Element der Menge A
$x \notin A : x$ ist nicht Element der Menge A
oder auch:
$A \ni x : x$ ist Element der Menge A
$A \not\ni x : x$ ist nicht Element der Menge A

b) Eine Menge kann beschrieben werden durch:

- Aufzählung ihrer Elemente, zum Beispiel:
  $M_1 = \{a, b, c\}$ $\quad$ ($= \{c, a, b\}$, d.h. Reihenfolge spielt keine Rolle)
  Achtung: Keine Wiederholungen!
  $M_2 = \{☺, ☹\}$
  $M_3 = \{\underline{3}, \underline{\{1,2\}}, \underline{M_1}\}$
  geht nur bei endlichen Mengen oder bestimmten unendlichen Mengen, zum Beispiel:
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$ Menge der ganzen Zahlen

- Charakterisierung ihrer Elemente:
  $A = \{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}$, z.B.:
  $A = \{n \underbrace{\mid}_{\text{sprich: "\textit{mit der Eigenschaft}"}} n \in \mathbb{N} \text{ und n ist gerade}\}$
  $= \{2, 4, 6, 8, ...\}$
  $= \{x \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2 \cdot k\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

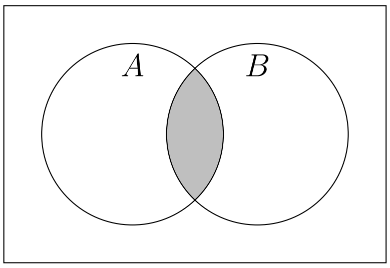
  Bsp: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ Menge der rationalen Zahlen

c) Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die Menge ohne Elemente (leere Menge)

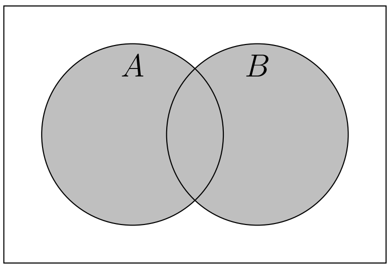
d) Mit $|A|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente der Menge A (Kardinalität oder Mächtigkeit von A), zum Beispiel:
$\big|\{1, a, *\}\big| = 3, \quad \big|\emptyset\big| = 0, \quad |\mathbb{N}| = \infty, \quad \big|\{\mathbb{N}\}\big| = 1$

e) $A \cap B \underbrace{:=}_{\text{wird definiert als}} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ heißt Durchschnitt oder Schnittmenge von A und B.

Grafische Veranschaulichung: Venn-Diagramm (⚠ gilt nicht als Beweis)



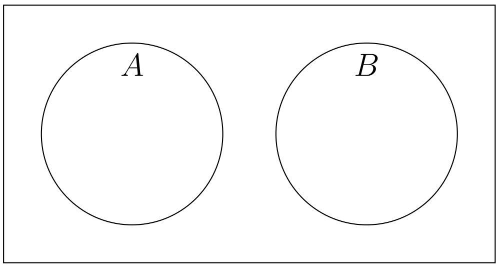
f) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ heißt Vereinigung von A und B.



Beispiele: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4\}$

$A \cap B = \{2, 3\}$,
$A \cap C = \emptyset$,
$B \cap C = \{4\} = C$,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

g) A und B heißen disjunkt, falls gilt $A \cap B = \emptyset$



h) A heißt Teilmenge von B, $A \subseteq B$, falls gilt:
$x \in A \Rightarrow x \in B$
Oder in Worten: Jedes Element von A ist auch Element von B.

Dasselbe bedeutet die Notation
$B \supseteq A$
(B ist Obermenge von A)

Beispiel: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)

Es gilt: $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A.

Achtung: Unterschied $\subseteq, \in$!
Zum Beispiel:
$A = \{1, \mathbb{N}\}$ (hier ist die Menge $\mathbb{N}$ ein Element von A, keine Teilmenge!)
$1 \in A, \qquad \mathbb{N} \in A, \qquad \mathbb{N} \not\subseteq A, \qquad 2 \notin A, \qquad \{1\} \subseteq A$

i) Zwei Mengen A, B heißen gleich ($A = B$, falls gilt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ (also $x \in A \Rightarrow / \Leftarrow / \Leftrightarrow x \in B$.

Darin liegt ein Beweisprinzip: Man zeigt $A = B$, indem man zeigt:

- $x \in A \Rightarrow x \in B$
- $x \in B \Rightarrow x \in A$ (mehr später)

Beispiel: $A = 2, 3, 4, \qquad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \text{ und } x < 5\}$ $A = B$

j) $A \subsetneq B (A \subsetneqq B)$ bedeutet $A \subseteq B$, aber $A \neq B$.

(d.h. $\exists x \in B$ mit $x \notin A$, aber $x \in B$)

(A ist echte Teilmenge von B.)

k) Mit $P(A) := \{B \mid \text{B ist eine Teilmenge von A}\} = \{B \mid B \subseteq A\}$ bezeichnen wir die Menge aller (echten oder nicht echten) Teilmengen von A, die sogenannte Potenzmenge von A. ($\emptyset \subseteq A \forall A, A \subseteq A \forall A$)

Beispiel:

$A = \{1,\}, P(A) = \{\emptyset, \{\underbrace{1}_{A}\}\}$

$B = \{1, 2\}, P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\underbrace{1, 2}_{B}\}\}$

$C = \{1, 2, 3\}, P(C) = ...$ (8 Elemente)

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Was ist $P(P(A))$?
$P(P(A)) = P(\{\emptyset, \{1\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}$

l) $A \backslash B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ heißt die Differenz (A *ohne* B).

Ist $A \subseteq X$ mit einer Obermenge X, so heißt $X \backslash A$ das Komplement von A (bezüglich X). Wir schreiben A_X^C oder kurz A^C (wenn X aus dem Kontext klar ist).

m) $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ heißt die symmetrische Differenz von A und B.

2.2 Bemerkung

Verallgemeinerung der Vereinigung und des Durchschnitts:

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge ... \wedge x \in A_n\}$$

$$=: \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup ... \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee ... \vee x \in A_n\}$$

$$=: \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Beziehungsweise noch allgemeiner:

Sei S eine Menge von Mengen (*System von Mengen*)

$\cap A = \{x \mid x \in A \forall A \in S\}$
$A \subset S$

$\cup A = \{x \mid \exists A \in S \text{ mit } x \in A\}$
$A \in S$

2.3 Definition

Seien A, B Mengen.

$A \underbrace{x}_{Kreuz} B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Die Menge aller geordneten Paare, heißt kartesisches Produkt von A und B (nach René Descartes, 1596 - 1650).

Dabei legen wir fest: $(a, b) = (a', b')$(mit $a, a' \in A, b, b' \in B$) :
$\Leftrightarrow a = a'$ und $b = b$‘.

Allgemein sei für Mengen $A_1, ...A_n (n \in \mathbb{N})$
$A_1 x A_2 x ... x A_n := \{a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i, \forall i = 1...n\}$
die Menge aller geordneten n-Tupel (mit analoger Gleichheitsdefinition).

($n = 2$: Paare, $n = 3$: Tripel)

Schreibweise:

$$A_1 x ... x A : n =: X_{i=1}^n A_i$$

Ist eine der Mengen $A_1, ...A_n$ leer, setzen wir $A_1 x ... x A_n = \emptyset$.

Statt AxA schreiben wir auch A^2, statt $\underbrace{Ax...xA}_{n-Faktoren} = A^n$.

2.4 Beispiel

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$

$(1, 3) \in AxB, \underbrace{(3, 1)}_{BxA} \notin AxB,$

$(\underbrace{3}_{BxB}, \underbrace{3}_{AxA}) \in AxB \in BxA$

$(1, 2) \in AxB, \in AxA$

$AxB = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$

$BxA = ...$

$BxB = B^2 = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

2.5 Satz (Rechenregeln für Mengen)

Seien A, B, C, X Mengen. Dann gilt:

a) $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
(Kommutativgesetz)

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(Assoziativgesetz)

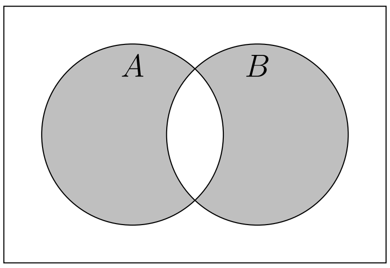
c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(Disbributivgesetz)

d) $A, B \subseteq X$, dann
$(A \cap B)^C_X = A^C_X \cup B^C_X$
$(A \cup B)^C_X = A^C_X \cap B^C_X$
(Regeln von DeMorgan)

e) $A \subseteq X$, dann $(A^C_X)^C_X = A$

f) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(= $\{x \mid x \in A \oplus x \in B\}$)



g) $A \cap B = A$ genau dann, wenn $A \subseteq B$
$(A \cap B) = A \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B)$

h) $A \cup B = A \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq A$

Beweis

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
$= \{x \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$

Kommutativgesetz 1.9 b)

$A \cap B$ analog

b), c) Übung, wie a)
benutze Assoziativgesetz (1.9 c)) bzw. Distributivgesetz (1.9 d)) für logische Äquivalenzen.

d) $(A \cap B)_X^C$
$= \{x \mid x \in X \setminus (A \cap B)\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge (x \notin (A \cap B))\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge \neg(x \in (A \cap B))\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$
$= \{x \mid x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\}$

De Morgan 1.9 e)

$= \{x \mid ((x \in X) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in X) \wedge (x \notin B))\}$
$= A_X^C \cup B_X^C$

2. Regel analog

e) ähnlich

f) g) h) später

3 Beweismethoden

Ein mathematischer Beweis ist die Herleitung der Wahrheit (oder Falschheit) einer Aussage aus einer Menge von Axiomen (nicht beweisbare Grundtatsachen) oder bereits bewiesenen Aussagen nmittels logischen Folgerungen.

Bewiesene Aussagen werden Sätze genannt.

Lemma - Hilfssatz, der nur als Grundlage für wichtigeren Satz formuliert und bewiesen wird.

Theorem - wichtiger Satz

Korollar - einfache Folgerung aus Satz, z.B. Spezialfall

Definition - Benennung/Bestimmung eines Begriffs/Symbols

$\square$ - Zeichen für Beweisende ($\blacksquare$, q.e.d., wzbw...)

Mathematische Sätze haben oft die Form:

Wenn V (Voraussetzung) gilt, dann gilt auch B (Behauptung)

(V, B: Aussagen), kurz: $V \Rightarrow B$

Zu zeigen ist also, dass $V \Rightarrow B$ eine wahre Aussage ist.

3.1 Direkter Beweis

Gehe davon aus, dass V wahr ist, folgere daraus, dass B wahr ist.

[Sei V wahr, $\Rightarrow$ ...
$\Rightarrow$ ...
$\Rightarrow$ ...
$\vdots$
$\Rightarrow$ B ist wahr]

Beispiel: $\underbrace{\text{Sei } n \in \mathbb{N}. \text{ Ist } n \text{ gerade,}}_{V}$ $\underbrace{\text{so ist auch } n^2 \text{ gerade}}_{B}$.

<u>Beweis:</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. // V ist wahr $\Rightarrow n = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$
($\exists k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2 \cdot k$)
$\Rightarrow n^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot (2k^2)$
$\Rightarrow n^2$ ist gerade. // B ist wahr

$\square$

3.2 Beweis durch Kontraposition

vgl. Satz 1.9 f) $\quad A \Rightarrow B \quad \equiv \quad \neg B \Rightarrow \neg A$

Statt $V \Rightarrow B$ zu zeigen, können wir also auch $\neg B \Rightarrow \neg V$ zeigen.

[Es gelte $\neg B \Rightarrow$ ...
$\Rightarrow$ ...
$\Rightarrow$ ...
$\vdots$
$\Rightarrow$ es gilt $\neg V$]

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$.

$\underbrace{\text{Ist } n^2 \text{ gerade}}_{V}$, $\underbrace{\text{so ist auch } n \text{ gerade}}_{B}$.

Beweis durch Kontraposition:

Sei n ungerade. // $\neg B$ gilt.

$\Rightarrow n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{\underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}}$

$\Rightarrow n^2$ ist ungerade. // $\neg V$ gilt.

$\square$

3.3 Beweis durch Widerspruch, indirekter Beweis

Zu zeigen ist Aussage A. Wir gehen davon aus, dass A nicht gelte ($\neg A$ ist wahr) und folgern durch logische Schlüsse eine zweite Aussage B, von der wir wissen, dass sie falsch ist. Wenn alle logischen Schlüsse korrekt waren, muss also $\neg A$ falsch gewesen sein, also A wahr.

($((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$ ist Tautologie)

Beispiel: [Euklid] $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Wir nehmen an, dass die Aussage falsch ist, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ gilt, das heißt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit p. q. $\in \mathbb{Z} (q \neq 0)$ teilerfremd (vollständig gekürzter Bruch)

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Rightarrow p^2 = 2q^2$, also ist p^2 gerade, damit aber auch p gerade (Beispiel in 3.2), also $p = 2 * r$ mit $r \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow p^2 = (2r)^2 = 2q^2$
$\Rightarrow 4r^2 = 2q^2$
$\Rightarrow \underline{2r^2 = q^2}$
$\Rightarrow q^2$ gerade
$\Rightarrow q$ gerade

Also: p gerade, q gerade, Widerspruch zu p, q teilerfremd.

Also war die Annahme falsch, es muss $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gelten. $\square$

3.4 Vollständige Induktion

Eine Methode, um Aussagen über natürliche Zahlen zu beweisen.

Beispiel: Gauß

$1 + 2 + ... + 100 =?$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & ... & 50 \\ +\ 100 & 99 & 98 & ... & 51 \\ \hline 101 & 101 & 101 & ... & 101 \end{array}$$

$50 * 101 = 5050$

$(= \frac{100}{2} * 101)$

Allgemein:
$1 + 2 + 3 + ... + n \underbrace{=}_{Vermutung} \frac{n(n+1)}{2}$

$(n \in \mathbb{N})$

3.4.1 Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben (oft $n_0 = 1$).
Für jedes $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$, sei $A(n)$ eine Aussage, die von n abhängt.

Es gelte:

1. $A(n_0)$ ist wahr (*Induktionsanfang*)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$: $\underbrace{\text{Ist} A(n) \text{wahr,}}_{Induktionsvorraussetzung} \underbrace{\text{so ist} A(n+1) \text{wahr}}_{Induktionsbehauptung}$. (*Induktionsschritt*)

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr. (*Dominoprinzip*)

(Bemerkung: gilt auch für $\mathbb{N}_0$ ($n_0 = 0$ auch möglich) und für $n_0 \in \mathbb{Z}$, Behauptung gilt dann für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$).

Beispiel:

a) *Kleiner Gauß*: $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis:

$A(n): 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Induktionsanfang $(n=1):(A(1): 1 = \frac{1*(1+1)}{2}$
- Induktionsschritt:

  Induktionsvorraussetzung: sei $n \geq 1$. Es gelte $A(n)$, d.h. $1+...+n = \frac{n(n+1}{2}$

  Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, d.h. $1+...+n+(n+1) = \frac{n+1)(n+1+1)}{2}$

  Beweis: $\underbrace{1+2+...+n} +(n+1) \underbrace{=}_{Ind.vor.} \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}} +(n+1)$

  $= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$

  $= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

  $A(n+1)$ $\square$

b)

$A(n): 2^n \geq n \forall n \in \mathbb{N}$

- Induktionsschritt: $(n=1) A(1)$ gilt: $2^1 \geq 1$
- Induktionsschritt:

  Induktionsvorraussetzung: Sei $n \geq 1$. Es gelte $A(n)$, d.h. $2^n \geq n$

  Induktionsbehauptung: (Zu zeigen!): Es gilt $A(n+1)$, d.h. $2^{2+1} \geq n+1$.

  Beweis: $2^{n+1} = 2 * 2^n \underbrace{\geq}_{Ind.vor.} 2*n$

  $= n+n$

  $\geq n+1,$

  also $2^{n+1} \geq n+1$ $\square$

3.4.2 Bemerkung

Für Formeln wie in Beispiel 3.4.1a) benutzen wir das *Summenzeichen* Σ (sigma, großes griechisches S)

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $1+2+3+...+n$ $k=1 k=2 k=3 k=n$

weitere Bsp:

$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2*1+2*2+...2*n$ $\sum_{k=4}^{n} 2k = 2*4+2*5+....2*n$

$\sum_{k=1}^{3} 7 = 7+7+7 = 21$

allg. $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_n$ $(a_m, a_{m+1}, ...a–n \in \mathbb{R})$

h heißt Summationszeichen

$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i$

Schreibweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k, \sum_{k=1,k\neq 2}^{4} a_k = a_1 + a_3 + a_4$$

Für $n < m$ setzt man

$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0(\textit{leere Summe})$, z.B. $\sum_{k=7}^{3} k = 0$

Produktzeichen Π

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m * a_{m+1}...a_n,$$

für $n < m$ setze $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$

Rechenregeln für Summen (zu beweisen z.B. durch vollständige Induktion)

a)

$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)*a$

$(\sum_{k=3}^{5} a = a+a+a = (5-3+1)*a)$

b)

$\sum_{k=m}^{n}(c*a_k) = c*\sum_{k=m}^{n} a_k$

c) Indexverschiebung

$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + ...a_n \qquad = a_{(m+e)-e)} + a_{m+1+e)-e)} + ... + a_{(n+e)-e}$
neuer Summationsindex $j := k+e$
(k durchläuft Werte: $m, m+1..., n,$
j durchläuft Werte: $m+e, m+1+e, ...n+e)$

also gilt $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+e}^{n+e} a_{j-e}$

(Beispiel: $\sum_{k=0}^{5} a_k * x^{k+2} = \sum_{j=2}^{7} a_{j-2} * x^j)$

d) Addition von Summen gleicher Länge

$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$

e) Aufspalten

$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{e} a_k + \sum_{k=l+1}^{n} a_k$ für $n > e > n$

f) Teleskopsumme

$\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k+1} = a_m - a_{n+1}$

$\sum_{k=m}^{n}(a_k - ak + 1 = (a_m - a_{m+1} + (a_{m+1} - a_{m+2} + (a_{m+2}...) + (a_n - an + 1))$

g) Doppelsummen

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{im} = a_{11} + a_{12} + ... + a_{1m}$

$+a_{21} + a_{22} + a_{2m}$

3.4.3 Verschärftes Induktionsprinzip

$A(n), n_0$ wie in 3.4.1

Es gelte:

(1) $A(n_0)$ ist wahr

(2) $\forall n \geq n_0$:
Sind $A(n_0)$, ... , $A(n)$ wahr, so ist $A(n+1)$ wahr.

(d.h. $A(n_0) \wedge A(n_0 + 1) \wedge ... \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$)

Dann ist A(n) wahr für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

Beispiel: $A(n)$: Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist Primzahl oder Produkt von Primzahlen.

Beweis:

Induktionsanfang: $(n_0 = 2)$. $n = 2$ ist Primzahl ✓

Induktionsschritt: Sei $n \geq n_0$ $\quad (n \geq 2)$

• Induktionsvoraussetzung:

Aussage gilt für $2, 3, 4, ..., n$

$(A(2), A(3), A(4), ..., A(n)$ wahr)

• <u>Induktionsbehauptung:</u>

$A(n+1)$ gilt, d.h. $n+1$ ist Primzahl oder Produkt von Primzahlen.

Beweis:

- falls $n+1$ Primzahl, so gilt $A(n+1)$
- falls $n+1$ keine Primzahl, dann ist $n+1 = k \cdot l$, für $k, l \in \mathbb{N}$, $1 < k < n+1, 1 < l < n+1$ ($k = l$ möglich).

  Nach Induktionsvoraussetzung:

  Aussage gilt für k und $l \Rightarrow n+1$ ist Produkt von Primzahlen.
  ($A(n+1)$ ist wahr) $\square$

3.5 Schubfachprinzip

3.5.1 Idee:

In einem Schrank befinden sich n verschiedene Paar Schuhe. Wie viele Schuhe muss man maximal herausziehen, bis man sicher ein zusammenpassendes Paar hat?

(Antwort: $n+1$)

3.5.2 Satz

(Schubfachprinzip, engl.: *pigeon hole principle*)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$.

Verteilt man n Objekte auf k Fächer, so gibt es ein Fach, das mindestens $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte enthält.

(Dabei bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl z mit $x \leq z$.)

<u>Beweis</u> (durch Kontraposition):

($\underbrace{n \text{ Objekte, } k \text{ Fächer}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\exists \text{ Fach mit mind. } \lceil \frac{n}{k} \rceil \text{ Objekten}}_{B}$

statt $A \Rightarrow B$ zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$)

($\neg B$) Jedes Fach enthalte höchstens $\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$ Objekte.

Dann ist die Gesamtzahl von Objekten höchstens

$$k \cdot \underbrace{(\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1)}_{< \frac{n}{k}} < k \cdot \frac{n}{k} = n$$

($\neg A$) es gibt also weniger als n Objekte $\square$