Bearbeitung des 11. Übungsblatts zur SMD — 20.01.18

A35: Likelihood-Quotienten-Test

Durchzuführen: Hypothesentest, ob Sample aus ~~bekannter~~ Gauß-vert. mit $\mu = \mu_0$ und unbek. Varianz σ_0^2 stammen kann.

Also:

$$\underbrace{H_0: \mu = \mu_0}_{\text{Nullhypothese}} \quad \text{vs.} \quad \underbrace{H_a: \mu \neq \mu_0}_{\text{Alternativhypothese}}$$

Parameter: $\theta = (\mu, \sigma^2)$ mit $\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$, $\Theta_a = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \neq \mu_0, \sigma^2 > 0\}$, sowie $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_a = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$, wobei σ^2 komplett unspezifisch bleiben wird.

a) Das Likelihood-Verhältnis ist

$$\Lambda = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathcal{L}(\theta | x)}{\sup_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(\theta | x)} \in]0, 1].$$

Da der ~~Zähler~~ Bruch groß wird, wenn die Nullhypothese wahrscheinlich wird, ist die Nullhypothese abzulehnen, falls

$$\Lambda < k, \quad k < 1$$

ist.

b) Da die Varianz σ^2 nicht bekannt ist, muss sie geschätzt werden (aus dem Sample).

Der MLE ~~Sch~~ für die Varianz ist:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2$$

Dies muss in den Zähler eingesetzt werden, da dort $\mu \equiv \mu_0$ wegen Beschränkung auf Θ_0. Also folgt mit

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}(\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$ für eine Gaußv.

sofort

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathcal{L}(\theta | x) =: \mathcal{L}(\hat{\Theta}_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}_0}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{2\hat{\sigma}_0^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}_0}\right)^n e^{-n/2}$$

für den Zähler.

Der Nenner sei $\mathcal{L}(\hat{\theta})$.

Die typischen MLE sind einzusetzen:

$\mu \to \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ (arithmetisches Mittel),

$\sigma^2 \to \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ (empirische Stichprobenvarianz).

Dann folgt

$$\mathcal{L}(\hat{\theta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}}\right)^n e^{-n/2} \quad //$$

c) Einsetzen in Λ:

$$\Lambda = \frac{\mathcal{L}(\hat{\theta}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\theta})} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_0}\right)^n e^{-n/2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}}\right)^n e^{-n/2}} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2}$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}\right]^{n/2} < k \quad \text{(für Abl.)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2} < k^{2/n} =: k'$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu_0)^2} < k'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}} < k' \quad \Big| \frac{1}{\dots} \quad \Big| -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} > \frac{1}{k'} - 1 =: k''$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} > (n-1)k'' \quad , \quad S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\Rightarrow \frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{S^2} > (n-1)k''$$

$$\Leftrightarrow T = \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}\right| > \sqrt{(n-1)k''} ,$$

mit $T \sim t(n-1)$ (folgt Student'scher t-Verteilung mit $(n-1)$ Freiheitsgr.).

d) gegeben: $\mu_0 = 200me$, $n = 25$, $\bar{x} = 205me$, $s = 10me$, $\alpha = 5\%$

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} = \sqrt{25}\,\frac{205me - 200me}{10me} = \sqrt{25}\,\frac{5}{10} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Nullhypothese: Füllmenge folgt Normalv. mit $\mu = \mu_0$.

Ablehnen, falls $|T| > t(1-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{zwei-}\\ \text{seitiger}\\ \text{test}}}{\frac{\alpha}{2}}, n-1)$.

$$t(\underbrace{1-\tfrac{\alpha}{2}}_{0{,}975}, \underbrace{n-1}_{=24}) \underset{\text{schlagen}}{\overset{\text{Nach-}}{=}} 2{,}064$$

=> Die Nullhypothese, dass die Füllmenge der Maschine einer Normalverteilung mit Mittelwert $\mu_0 = 200me$ folgt, wird durch den zweiseitigen Einstichproben-t-Test ~~mit~~ zum Signifikanzniveau $\alpha =$ 5% abgelehnt.