Aufgabe1

October 25, 2018

```
In [1]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
```

1 Aufgabe 1

1.1 a) & b)

```
In [2]: def f(x):
            return (x**3 + 1/3) - (x**3 - 1/3)
        def g(x):
            return ((3 + x**3/3) - (3 - x**3/3))/x**3

        n=300
        x = np.logspace(0,7, num=n)

        #Wertabfrage f(x)
        print("Ungefährer Wert, ab dem Abweichung von f(x) gröer als 1%:")
        i = 0
        while i<n:
            if 2/3*1/f(x[i]) <= 0.99 or 2/3*1/f(x[i]) >= 1.01:
                    print(x[i])
                    i=n
            else:
                i+=1

        print("Ungefährer Wert, ab dem f(x) gleich 0:")
        i = 0
        while i<n:
            if f(x[i]) == 0:
                print(x[i])
                i=n
            else:
                i+=1

        #Wertabfrage g(x)
        print("Ungefährer Wert, ab dem Abweichung von g(x) gröer als 1%:")
        i = 0
```

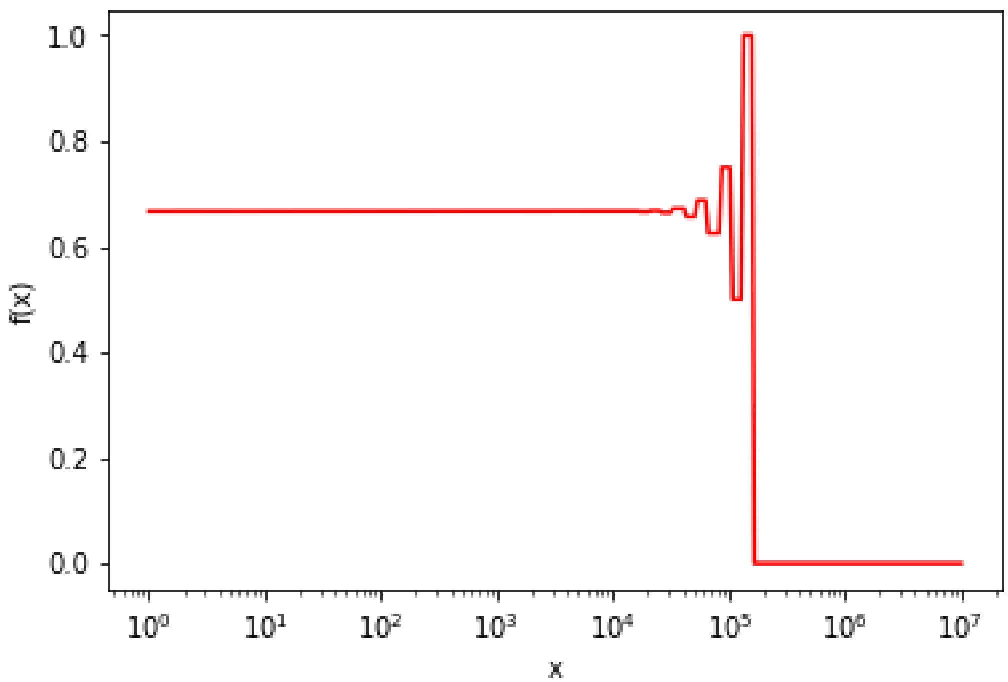
```
while i<n:
    if 2/3*1/g(x[i]) <= 0.99 or 2/3*1/g(x[i]) >= 1.01:
            print(x[i])
            i=n
    else:
        i+=1

print("Ungefährer Wert, ab dem g(x) gleich 0:")
i = 0
while i<n:
    if g(x[i]) == 0:
        print(x[i])
        i=n
    else:
        i+=1
```

```
Ungefährer Wert, ab dem Abweichung von f(x) gröer als 1%:
43196.7929733
Ungefährer Wert, ab dem f(x) gleich 0:
166240.097893
Ungefährer Wert, ab dem Abweichung von g(x) gröer als 1%:
Ungefährer Wert, ab dem g(x) gleich 0:
```

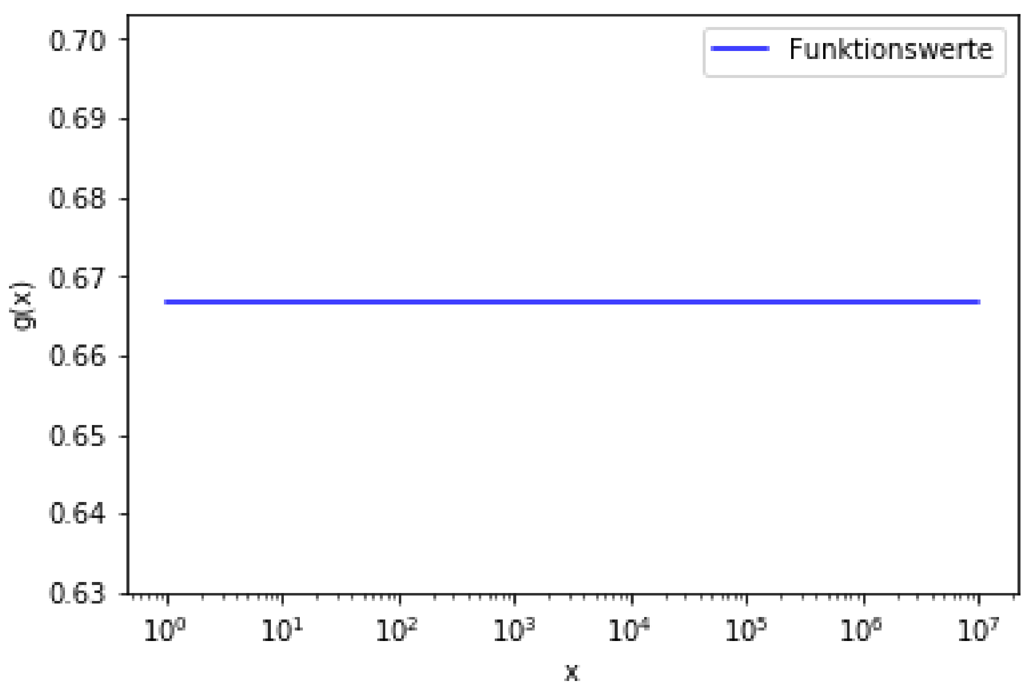
g(x) weicht nicht ab, deshalb werden keine Werte ausgegeben.

1.2 c)

In [3]:
```
#Plots
plt.plot(x, f(x),'r-', label='Funktionswerte', Markersize=2.5)
plt.xscale('log')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.legend
plt.show()
plt.clf()

plt.plot(x, g(x),'b-', label='Funktionswerte', Markersize=2.5)
plt.xscale('log')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('g(x)')
plt.legend()
plt.show()
```



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
f(x)
10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7
x



Funktionswerte
0.70
0.69
0.68
0.67
0.66
0.65
0.64
0.63
g(x)
10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7
x


```
In [ ]:
```

Aufgabe2

October 25, 2018

1 Aufgabe 2

1.1 a)

Nein, die Gleichung ist nicht numerisch stabil. Im Bereich um Vielfache von π ist der Ausdruck für eine Energie von 50 GeV problematisch, da es im Nenner aufgrund der Subtraktion zweier fast gleich groSSer Zahlen zu Auslöschungen kommt.

1.2 b)

Um das Problem zu beheben, wird der Nenner mithilfe der gegebenen Hinweise umgeschrieben und es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s}\left(\frac{2+\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)+\frac{1}{\gamma^2}\cos^2(\theta)}\right)$$

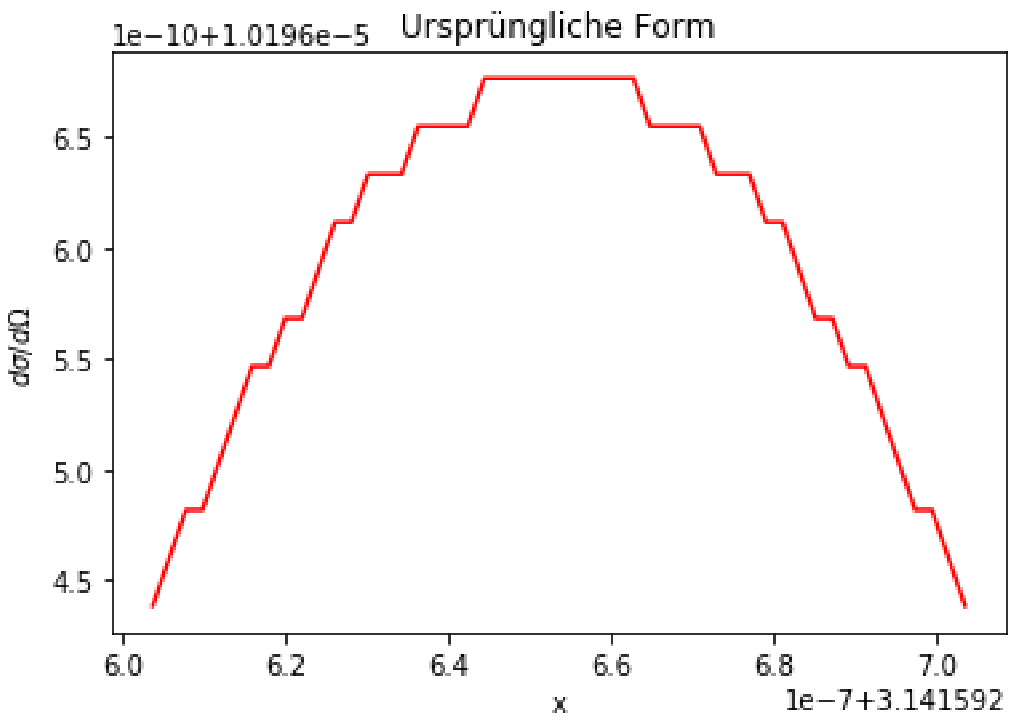
1.3 c)

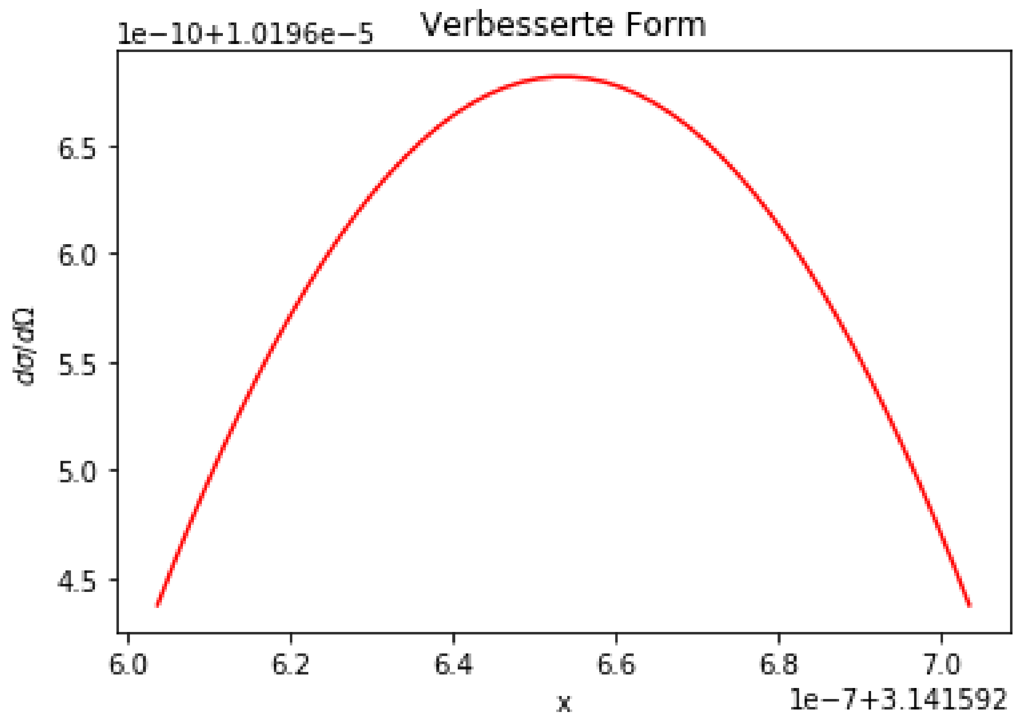
Es ergeben sich in einem Bereich um $\theta = 0$ die folgenden Graphen.

```
In [2]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [4]: alpha = 7.2973525664*10**(-3)
        E = 50*10**9
        m = 511*10**3
        s = 2*E
        gamma = E/m
        beta = np.sqrt(1-gamma**(-2))

        def f(x):
            return alpha**2/s*((2+np.sin(x)**2)/(1-beta**2*np.cos(x)**2))

        def g(x):
            return alpha**2/s*((2+np.sin(x)**2)/(np.sin(x)**2+1/gamma**2*np.cos(x)**2))

        x = np.linspace(np.pi-0.00000005,np.pi+0.00000005)
```

```
plt.plot(x, f(x),'r-', label='Funktionswerte')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'$d\sigma/d\Omega$')
plt.title('Ursprüngliche Form')
plt.legend
plt.show()
plt.clf()

plt.plot(x, g(x),'r-', label='Funktionswerte')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'$d\sigma/d\Omega$')
plt.title('Verbesserte Form')
plt.legend
plt.show()
```





1.4 d)

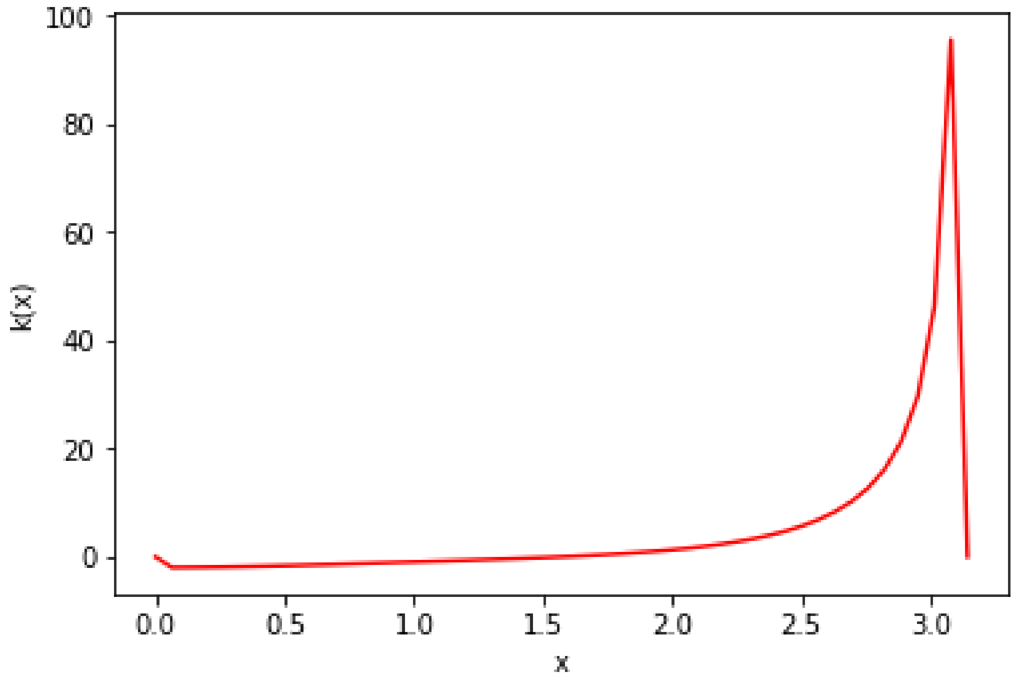
Als Konditionszahl ergibt sich

$$k(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \cdot \frac{\theta}{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = -\frac{2\theta\cos(\theta)\left(1-\beta^2\cos^2(\theta)\right)\sin(\theta)\left(\beta^2\sin^2(\theta)+\beta^2\cos^2(\theta)+2\beta^2-1\right)}{\left(\beta^2\cos^2(\theta)-1\right)^2\left(\sin^2(\theta)+2\right)}$$

1.5 e)

Trägt man diese Konditionszahl gegen θ in einem Bereich zwischen 0 und π auf, ergibt sich der folgende Graph

```
In [5]: def k(x):
            return (-1*(2*x*np.cos(x)*(1-beta**2*np.cos(x)**2)*np.sin(x)*(beta**2*np.sin(x)**2

        x = np.linspace(0, np.pi)

        plt.plot(x, k(x),'r-', label='Funktionswerte')
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('k(x)')
        plt.legend
        plt.show()
```



Gut konditioniert im Bereich um Null. Schlecht konditioniert im Bereich um π.

Aufgabe3

October 24, 2018

1 Aufgabe 3

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Maxwell-Boltzmann-Verteilung lautet

$$f(v) = N\,\exp(-\frac{mv^2}{2kT})\,4\pi v^2\,. \tag{1}$$

Berechnen der Normierungskonstante mit der Bedingung $\int_0^\infty \mathrm{d}v\, f(v) = 1$:

$$1 = 4\pi N \int_0^\infty \mathrm{d}v \exp(-\frac{mv^2}{2kT})\, v^2 \iff \tag{2}$$

$$\frac{1}{4\pi N} = -2kT \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m} \int_0^\infty \mathrm{d}v \exp(-\frac{mv^2}{2kT}) \iff \tag{3}$$

$$\frac{1}{4\pi N} = -2kT \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_0^\infty \mathrm{d}u \exp(-u^2) \iff \tag{4}$$

$$\frac{1}{4\pi N} = -2kT \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \iff \tag{5}$$

$$\frac{1}{N} = 4\pi 2kT \sqrt{2kT} \frac{1}{2} (1/m)^{3/2} \iff \tag{6}$$

$$N = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}. \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

1.1 Teilaufgabe a)

Zu berechnen ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m. Dort hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(v)$ ihr Maximum. Dort muss also die Ableitung null sein. Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 4\pi N v\,\exp(-\frac{mv^2}{2kT})\,(2 - \frac{mv^2}{kT}) \tag{9}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{mv^2}{kT} \Rightarrow v^2 = \frac{2kT}{m} \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\,. \tag{10}$$

Dann lässt sich $f(v)$ darstellen als

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} v^2\,\exp(-(v/v_m)^2) \tag{11}$$

1.2 Teilaufgabe b)

Gesucht ist der Mittelwert der Geschwindigkeit.

$$\begin{aligned}
\langle v \rangle &= \int_0^\infty \mathrm{d}v \, v f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \int_0^\infty \mathrm{d}v \, v^3 \, \exp(-(v/v_m)^2) && (12) \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \frac{v_m^4}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_m && (13)
\end{aligned}$$

Das Integral $\int_0^\infty \mathrm{d}v \, v^3 \, \exp(-\alpha v^2) = \frac{1}{2\alpha}$ wurde nachgeschlagen.

1.3 Teilaufgabe c)

Zu berechnen ist der Median $v_{0,5}$ der Geschwindigkeit. Dieser ist durch

$$\frac{1}{2} = \int_0^{v_{0,5}} \mathrm{d}v \, f(v) \tag{14}$$

definiert. Es wird $f(v)$ eingesetzt, um

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \int_0^{v_{0,5}} \mathrm{d}v \, v^2 \, \exp(-(v/v_m)^2) \iff && (15) \\
1 &= \frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{0,5}} \mathrm{d}u \, u^2 \, \exp(-u^2) && (16)
\end{aligned}$$

zu erhalten. Die numerische Lösung dieser Gleichung erfolgt nun.

In [1]:
```
import numpy as np
from scipy import optimize
from scipy import integrate

# Implementation of the Maxwell Boltzmann Distribution
def maxwell(v):
    return 4/np.sqrt(np.pi)*v**2*np.exp(-v**2)


# The definite integral of the MBD from 0 to v minus 1/2 - to find the median we need
def functionForc(v):
    return integrate.quad(maxwell, 0, v)[0] - 1/2


# This one is for later, we also need to find the full width at half maximum.
def functionFord(v):
    return v**2*np.exp(-v**2) - 1/(2*np.exp(1))
```

In [2]:
```
print(optimize.brentq(functionForc, 0, 3))
```

```
1.087652031758167
```

Die Funktion brentq aus scipy.optimize ist eine Methode, die die Nullstelle einer Funktion in einem gegebenen Intervall berechnet. Die Ausgabe der obigen Zelle ist der Median in Einheiten von v_m. Damit ist die Aufgabe gelöst.

1.4 Teilaufgabe d)

Zu berechnen ist die volle Breite auf halbem Maximum der Geschwindigkeit. Diese ist gegegeben durch $v_{\text{FWHM}} = v_2 - v_1$, wobei die Funktion f bei v_1 und v_2 einen Wert von $f_{\max}/2$ mit dem maximalen Wert $f_{\max} = f(v_m)$ annimmt. Dieser Wert beträgt

$$f(v = v_m) = \frac{4}{\sqrt{\pi} e v_m} \,. \tag{17}$$

Mit der gennanten Bedingung folgt

$$f(v = v_m)/2 = f(v) \iff = \frac{1}{2e} = u^2 \exp(-u^2) \,, \tag{18}$$

wobei u wieder in Einheiten von v_m gemessen wird. Eine numerische Lösung folgt nun.

```
In [3]: # Find the left value for which f(v)=f(v_m)/2
        v_left = optimize.brentq(functionFord, 0, 1)
        # Find the right value for which f(v)=f(v_m)/2
        v_right = optimize.brentq(functionFord, 1, 2)
        print(v_right - v_left)
```

```
1.1549423602510842
```

Die numerische Lösung erfolgt analog zu der in Teilaufgabe c). Es ist wichtig, korrekte Intervalle zu schätzen und vorzugeben, da das Brentq-Verfahren nur eine Nullstelle findet und einen Vorzeichenwechsel im Intervall voraussetzt. Mit der Angabe der FWHM ist die Aufgabe gelöst.

1.5 Teilaufgabe e)

Zuletzt ist noch die Standardabweichung der Geschwindigkeit σ_v zu bestimmen. Diese wird über den allseit bekannten Zusammenhang bestimmt, dass die Standardabweichung die Wurzel der Varianz σ_v^2 ist. Es wird die Formel $\sigma_v^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}v \, (v - \langle v \rangle)^2 f(v)$ verwendet, um die Varianz zu bestimmen. Es folgt dann

$$\frac{\sqrt{\pi}\sigma_v^2}{4} = \frac{1}{v_m^3} \int_0^\infty \mathrm{d}v \, (v - \langle v \rangle)^2 \, v^2 \exp(-(v/v_m)^2) \iff \tag{19}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\sigma_v^2}{4} v_m^3 = v_m^5 \int_0^\infty \mathrm{d}u \, u^4 \exp(-u^2) - 2\langle v \rangle v_m^4 \int_0^\infty \mathrm{d}u \, u^3 \exp(-u^2) + v_m^3 \langle v \rangle^2 \int_0^\infty \mathrm{d}u \, u^2 \exp(-u^2) \iff \tag{20}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\sigma_v^2}{4} v_m^3 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} - \frac{2}{\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{4}{\pi} \iff \tag{21}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{v_m}{\pi}(3\pi/2 - 4) \iff \sigma_v = \frac{v_m}{\sqrt{\pi}}\sqrt{3\pi/2 - 4} \,. \tag{22}$$

```
In [ ]:
```

Aufgabe4

October 24, 2018

1 Aufgabe 4

Es wird angenommen, dass die Augenzahlen des Würfels von 1 bis 6 reichen, die Würfe der beiden Würfel unabhängig voneinander sind und die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augenzahlen alle 1/6 betragen.

1.1 Teilaufgabe a)

Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 9 beträgt? Es gilt $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$ für unabhängige Ereignisse. Dies werden wir hier an:
$P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 9) = P(W_{\text{rot}} = 6 \wedge W_{\text{blau}} = 3)$
$+ P(W_{\text{rot}} = 5 \wedge W_{\text{blau}} = 4) + P(W_{\text{rot}} = 4 \wedge W_{\text{blau}} = 5) + P(W_{\text{rot}} = 3 \wedge W_{\text{blau}} = 6) \iff$
$P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 9) = P(W_{\text{rot}} = 6) \cdot P(W_{\text{blau}} = 3)$
$+ P(W_{\text{rot}} = 5) \cdot P(W_{\text{blau}} = 4) + P(W_{\text{rot}} = 4) \cdot P(W_{\text{blau}} = 5) + P(W_{\text{rot}} = 3) \cdot P(W_{\text{blau}} = 6) \iff$
$P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 9) = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$.

1.2 Teilaufgabe b)

Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 9 oder mehr beträgt? Analog zu oben, nicht so ausführlich: $P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} \geq 9) = P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 9) + P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 10) + P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 11) + P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 12) \iff$
$P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} \geq 9) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} \iff$
$P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} \geq 9) = \frac{5}{18} \approx 27{,}78\%$.

1.3 Teilaufgabe c)

Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Würfel 4, der andere 5 Punkte zeigt? Das ist mit $P(A \vee B) = P(A) + P(b) - P(A \wedge B) = P(A) + P(b)$, da sich A und B hier ausschlieSSen, gegeben durch

$$P((W_{\text{rot}} = 4 \wedge W_{\text{blau}} = 5) \vee (W_{\text{rot}} = 5 \wedge W_{\text{blau}} = 4)) = \tag{1}$$
$$P(W_{\text{rot}} = 4 \wedge W_{\text{blau}} = 5) + P(W_{\text{rot}} = 5 \wedge W_{\text{blau}} = 4) \tag{2}$$
$$P(W_{\text{rot}} = 4 \wedge W_{\text{blau}} = 5) = P(W_{\text{rot}} = 5 \wedge W_{\text{blau}} = 4) = \frac{1}{36} \Rightarrow \tag{3}$$
$$P((W_{\text{rot}} = 4 \wedge W_{\text{blau}} = 5) \vee (W_{\text{rot}} = 5 \wedge W_{\text{blau}} = 4)) = \frac{1}{18} \approx 5{,}56\%. \tag{4}$$

Sie werfen die Würfel so, dass der blaue Würfel hinter einen Gegenstand rollt, so dass Sie ihn zunächst nicht sehen können. Der rote Würfel zeigt eine 4. Nachdem Sie das gesehen haben, wie groSS ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ...

1.4 Teilaufgabe d)

... die Summe der Punkte 9 ergibt? Das Ergebnis des Wurfes des roten Würfels ist festgelegt. Das bedeutet quasi $P(W_{\text{rot}} = 4) = 1$. Um eine Gesamtaugenzahl von 9 zu erhalten, muss der blaue Würfel eine 5 zeigen. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\frac{1}{6}$ und damit ist dieser Wert auch die Antwort auf die Frage.

1.5 Teilaufgabe e)

... die Summe der Punkte 9 oder mehr ergibt? Das wäre dann $P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} \geq 9) = P(W_{\text{blau}} = 5 \vee W_{\text{blau}} = 6) = P(W_{\text{blau}} = 5) + P(W_{\text{blau}} = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Hier muss man beachten, dass der blaue Würfel 5 oder 6 zeigen muss, nur so kann mit einer “roten 4” noch 9 erhalten oder drüber kommen.

1.6 Teilaufgabe f)

... der rote Würfel 4, der blaue 5 Punkte zeigt? Das ist leicht. Die 4 des roten Würfels ist ein sicheres Ereignis, deswegen beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine “rote 4” und eine “blaue 5” einfach $\frac{1}{6}$.