SMD Blatt 8

Aufgabe 23:

a) Berechnung der Geradengleichung nach gewichteter Methode der kleinsten Quadrate:

$$x = f(z, b, a) = b + az$$

Lösungen sind:

$$\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = (A^T W A)^{-1} A^T W \vec{x}$$

$$V[\hat{\vec{a}}] = (A^T W A)^{-1} \quad \leftarrow \text{Kovarianzmatrix}$$

wobei:

$$W = (V[\vec{x}])^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{x_1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{x_2}^2} \end{pmatrix} \quad \text{Fehler ohne Korrelation}$$

und A Designmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T W A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{x_1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{x_2}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{x_1}^2} & \frac{1}{\sigma_{x_2}^2} \\ \frac{z_1}{\sigma_{x_1}^2} & \frac{z_2}{\sigma_{x_2}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{x_2}^2} & \frac{z_1}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{z_2}{\sigma_{x_2}^2} \\ \frac{z_1}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{z_2}{\sigma_{x_2}^2} & \left(\frac{z_1}{\sigma_{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{\sigma_{x_2}}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} S_1 & S_z \\ S_z & S_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T W \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{x_1}^2} & \frac{1}{\sigma_{x_2}^2} \\ \frac{z_1}{\sigma_{x_1}^2} & \frac{z_2}{\sigma_{x_2}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{x_2}{\sigma_{x_2}^2} \\ \frac{z_1 x_2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{z_2 x_1}{\sigma_{x_2}^2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S_x \\ S_{xz} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{a}} = \frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \begin{pmatrix} S_{zz} & -S_z \\ -S_z & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x \\ S_{xz} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b = \frac{S_{zz} S_x - S_z S_{xz}}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \quad , \quad a = \frac{-S_z S_x + S_1 S_{xz}}{S_1 S_{zz} - S_z^2}$$

Es ergibt sich die Geradengleichung:

$$x = \frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \left((-S_z S_x + S_1 S_{xz}) z + S_{zz} S_x - S_z S_{xz} \right)$$

Als Kovarianzmatrix ergibt sich:

$$V\left[\begin{smallmatrix} \hat{z} \\ \hat{a} \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \begin{pmatrix} S_{zz} & -S_z \\ -S_z & S_1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet der Korrelationskoeffizient:

$$\rho = \frac{-S_z}{\sqrt{S_{zz} S_1}}$$

b) Die Position x_3 erhält man durch ~~ein~~ Einsetzen in die Geradengleichung:

$$x_3 = \frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \left((-S_z S_x + S_1 S_{xz}) z_3 + S_{zz} S_x - S_z S_{xz} \right)$$

Der Fehler ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung der Fehler von a und b:

$$\sigma_{x_3} = \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|^2 \sigma_a^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|^2 \sigma_b^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial b} \operatorname{cov}(a,b)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \left(z_3^2 S_1 + S_{zz} - 2 z_3 S_z \right)}$$

c) Wird die Korrelation nicht berücksichtigt (also $S_z = 0$), ergibt sich:

$$\sigma_{x_3} = \sqrt{\frac{z_3^2 S_1 + S_{zz}}{S_1 S_{zz}}} = \sqrt{\frac{z_3^2}{S_{zz}} + \frac{1}{S_1}}$$