Bearbeitung des 9. Übungsblatts zur SMD 15.12.18

A26: Stichprobenkovarianz

a) Teste, ob $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ erwartungstreu für μ ist.

Bed.: $E(\bar{X}) = \mu$.

$E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$ ✓

$\bar{X}$ ist erwartungstreuer Schätzer für μ.

b) z.z.: $E((\bar{X}-\mu)^2) = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Erster Teil: $Var(X) = E((X-E(X))^2)$ für eine Zufallsvariable X nach Def. Fasst man $\bar{X}$ als Zufallsv. auf, so folgt sofort der erste Teil der Gleichung mit $E(\bar{X}) = \mu$ (a)).

Zweiter Teil:

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\, n\, Var(X) = \frac{\sigma^2}{n} \quad //$$

q.e.d.

c) Teste, ob $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ erwartungstreu für σ^2 ist.

$$E(S_0^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E((X_i-\mu)^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \sigma^2 \quad ✓$$

S_0^2 ist erwartungstreuer Schätzer für σ^2.

d) Teste ob $S_1'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ erwartungstreu für σ^2 ist.

$$E(S_1'^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu-(\bar{X}-\mu))^2\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2 - 2(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu) + (\bar{X}-\mu)^2\right]\right]$$

$$\overset{(*)}{=} E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \frac{2}{n}(\bar{X}-\mu)n(\bar{X}-\mu) + (\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E((X_i-\mu)^2) - 2E((\bar{X}-\mu)^2) + E((\bar{X}-\mu)^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - Var(\bar{X}) = (1-\frac{1}{n})\sigma^2 < \sigma^2 \quad //$$

(*) NR: $\bar{X}-\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$.

Damit ist gezeigt, dass $S_1'^2$ nicht erwartungstreu für σ^2 ist.

Die erwartungstreue Schätzfkt. ist $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.

Beweis: $E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\mu)^2 - 2(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu) + (\bar{x}-\mu)^2\right]\right]$

$= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{2n}{n-1}(\bar{x}-\mu)^2 + \frac{n}{n-1}(\bar{x}-\mu)^2\right]$

$= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{x}-\mu)^2\right]$

$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{Var(x_i)}_{=\sigma^2} - \frac{n}{n-1}\underbrace{Var(\bar{x})}_{=\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{1}{n-1}\sigma^2$

$= \frac{n-1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2$ // q.e.d.