aufgabe1

December 13, 2018

1 Aufgabe 22- Fehlerfortpflanzung

1.1 Teilaufgabe a) - Analytische Berechnung

Es sei $y = a_0 + a_1 x$ mit $a_0 = 1{,}0 \pm 0{,}2$ und $a_1 = 1{,}0 \pm 0{,}2$, der Korrelationskoeffizient sei $\rho = -0{,}8$. Die Kovarianz von a_0 und a_1 ergibt sich dann zu $\sigma_{a_0,a_1} = \sigma_{a_0}\sigma_{a_1}\rho = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot (-0{,}8) = -0{,}032$. Es ist nicht angegeben, welche "Form" der Unsicherheit zu berechnen ist. Wir entscheiden uns für die Varianz, um lästige Wurzeln zu sparen. Um die Standardabweichung zu erhalten, ist stets die positive Wurzel der Varianz zu nehmen. Mit Vernachlässigung von Korrelation gilt für die Varianz von y

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial a_0}\sigma_{a_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\sigma_{a_1}\right)^2 &(1)\\
&= \sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2 = 0{,}04 + 0{,}04 \cdot x^2\,. &(2)
\end{aligned}$$

Wird auch die Korrelation berücksichtigt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial a_0}\sigma_{a_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\sigma_{a_1}\right)^2 + 2\frac{\partial y}{\partial a_0}\frac{\partial y}{\partial a_1}\sigma_{a_0,a_1} &(3)\\
&= \sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2 + 2\sigma_{a_0,a_1} x = 0{,}04 + 0{,}04 \cdot x^2 - 0{,}064 \cdot x\,. &(4)
\end{aligned}$$

1.2 Teilaufgabe b) - Berechnung durch eine Monte-Carlo-Simulation

```
In [3]: import numpy as np
        import uncertainties as unc
        import uncertainties.unumpy as unp
        from uncertainties import correlated_values
        from uncertainties import ufloat
        from scipy import optimize
        import matplotlib.pyplot as plt

        def parabola(x, a, b, c):
            return a*x**2+b*x+c


        def varianceUncorrelated(x, sigma_a0, sigma_a1):
```

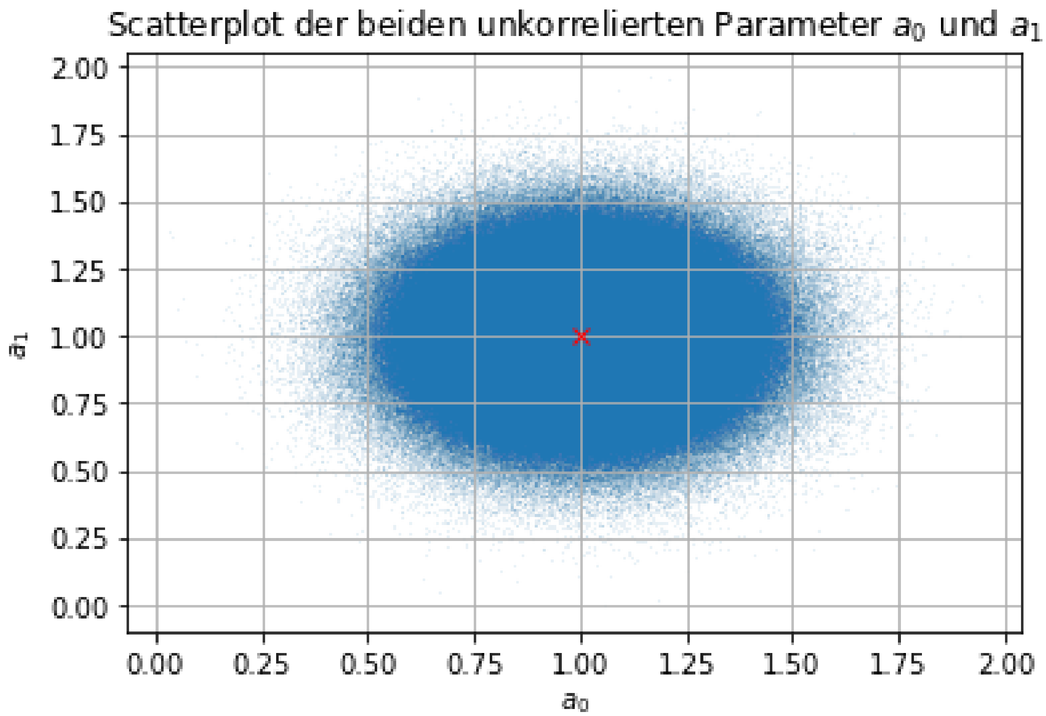
```
    return sigma_a0**2+sigma_a1**2*x**2


def varianceCorrelated(x, sigma_a0, sigma_a1, cov):
    return sigma_a0**2+sigma_a1**2*x**2 + 2*cov*x
```

In [4]:
```
a_0 = ufloat(1.0,0.2)
a_1 = ufloat(1.0,0.2)
rho = -0.8
cov = rho*a_0.s*a_1.s

covmatrix = np.array([[a_0.s**2, 0], [0, a_1.s**2]])
prng = np.random.RandomState(0)
sizeArr = int(1e6)
arrayWithoutCorrelation = prng.multivariate_normal(mean = [a_0.n, a_1.n], cov = covmat
a_0_arraywoc = arrayWithoutCorrelation[:,0]
a_1_arraywoc = arrayWithoutCorrelation[:,1]
sizeLin = 100
xlin = np.linspace(-10,10,sizeLin)

plt.scatter(a_0_arraywoc, a_1_arraywoc, s = 0.001)
plt.plot(1,1, 'rx')
plt.grid()
plt.xlabel(r'$a_0$')
plt.ylabel(r'$a_1$')
plt.title(r'Scatterplot der beiden unkorrelierten Parameter $a_0$ und $a_1$')
plt.show()
plt.clf()
```




```
In [231]: varArray = []
          for x in xlin:
              y = a_0_arraywoc+a_1_arraywoc*x
              var = np.var(y, ddof = 1)
              varArray.append(var)

          params, covariance_matrix = optimize.curve_fit(parabola, xlin, varArray)
          a, b, c = correlated_values(params, covariance_matrix)
          print('Die numerisch durch ein Monte-Carlo-Verfahren geschätzte Varianz von  y = a_0
          print('\sigma_y^2 = {:2.7f}*x^2'.format(a.n), '+ {:2.7f}*x'.format(b.n), '+ {:2.7f}'
          print('Es wurden', sizeArr, 'Zufallszahlen benutzt und', sizeLin, 'x-Werte verwendet
```

```
Die numerisch durch ein Monte-Carlo-Verfahren geschätzte Varianz von  y = a_0 + a_1 * x ist
\sigma_y^2 = 0.0400009*x^2 + 0.0001584*x + 0.0399038
Es wurden 1000000 Zufallszahlen benutzt und 100 x-Werte verwendet, um diese Formel zu generier
```

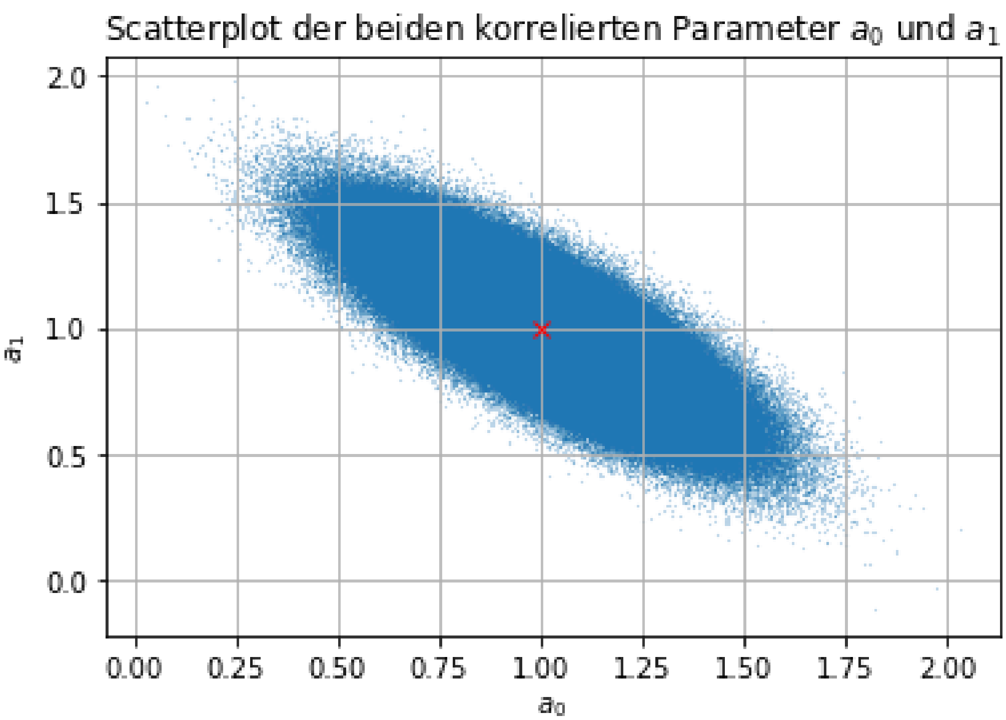
```
In [232]: covmatrix = np.array([[a_0.s**2, cov], [cov, a_1.s**2]])
          arrayWithCorrelation = np.random.multivariate_normal(mean = [a_0.n, a_1.n], cov = co
          a_0_arraywc = arrayWithCorrelation[:,0]
          a_1_arraywc = arrayWithCorrelation[:,1]

          plt.scatter(a_0_arraywc, a_1_arraywc, s = 0.01)
          plt.plot(1,1, 'rx')
```

```
plt.grid()
plt.xlabel(r'$a_0$')
plt.ylabel(r'$a_1$')
plt.title(r'Scatterplot der beiden korrelierten Parameter $a_0$ und $a_1$')
plt.show()
plt.clf()

varArray = []
for x in xlin:
    y = a_0_arraywc+a_1_arraywc*x
    var = np.var(y, ddof = 1)
    varArray.append(var)

params, covariance_matrix = optimize.curve_fit(parabola, xlin, varArray)
a, b, c = correlated_values(params, covariance_matrix)
print('Die numerisch durch ein Monte-Carlo-Verfahren geschätzte Varianz von  y = a_0
print('\sigma_y^2 = {:2.7f}*x^2'.format(a.n), '+ {:2.7f}*x'.format(b.n), '+ {:2.7f}'
print('Es wurden', sizeArr, 'Zufallszahlen benutzt und', sizeLin, 'x-Werte verwendet
```




```
Die numerisch durch ein Monte-Carlo-Verfahren geschätzte Varianz von  y = a_0 + a_1 * x ist
\sigma_y^2 = 0.0399741*x^2 + -0.0639423*x + 0.0399677
Es wurden 1000000 Zufallszahlen benutzt und 100 x-Werte verwendet, um diese Formel zu generiere
```

1.3 Teilaufgabe c) - Vergleich

In [233]:
```
print('Wir wollen zunächst unkorrelierte Variablen betrachten.')
xlin = np.linspace(-3,3,3)
for x in xlin:
    print('x =',x,':')
    meanAn = 1+1*x
    stdAn = np.sqrt(varianceUncorrelated(x, 0.2, 0.2))
    y = a_0_arraywoc+a_1_arraywoc*x
    meanMC = np.mean(y)
    stdMC = np.std(y, ddof = 1)
    print('Die analytische Berechnung ergibt: Mittelwert =', meanAn, ', Standardabwe
    print('Mit Monte-Carlo berechnete Werte: Mittelwert =', meanMC,', Standardabweic
    print('Die Abweichung im Mittelwert ist', (meanMC-meanAn)/meanAn*100, '%')
    print('Die Abweichung in der Standardabweichung beträgt', (stdMC-stdAn)/stdAn*10
```

```
Wir wollen zunächst unkorrelierte Variablen betrachten.
x = -3.0 :
Die analytische Berechnung ergibt: Mittelwert = -2.0 , Standardabweichung = 0.632455532034
Mit Monte-Carlo berechnete Werte: Mittelwert = -2.00088142319 , Standardabweichung = 0.6320100
Die Abweichung im Mittelwert ist 0.0440711596498 %
Die Abweichung in der Standardabweichung beträgt -0.0704417031612 %
x = 0.0 :
Die analytische Berechnung ergibt: Mittelwert = 1.0 , Standardabweichung = 0.2
Mit Monte-Carlo berechnete Werte: Mittelwert = 1.00005213364 , Standardabweichung = 0.1997593
Die Abweichung im Mittelwert ist 0.00521336366857 %
Die Abweichung in der Standardabweichung beträgt -0.120302963351 %
x = 3.0 :
Die analytische Berechnung ergibt: Mittelwert = 4.0 , Standardabweichung = 0.632455532034
Mit Monte-Carlo berechnete Werte: Mittelwert = 4.00098569047 , Standardabweichung = 0.6327616
Die Abweichung im Mittelwert ist 0.0246422616591 %
Die Abweichung in der Standardabweichung beträgt 0.0484018073425 %
```

In [234]:
```
print('Wir wollen nun korrelierte Variablen betrachten.')
xlin = np.linspace(-3,3,3)
for x in xlin:
    print('x =',x,':')
    meanAn = 1+1*x
    stdAn = np.sqrt(varianceCorrelated(x, 0.2, 0.2, -0.032))
    y = a_0_arraywc+a_1_arraywc*x
    meanMC = np.mean(y)
    stdMC = np.std(y, ddof = 1)
    print('Die analytische Berechnung ergibt: Mittelwert =', meanAn, ', Standardabwe
    print('Mit Monte-Carlo berechnete Werte: Mittelwert =', meanMC,', Standardabweic
    print('Die Abweichung im Mittelwert ist', (meanMC-meanAn)/meanAn*100, '%')
    print('Die Abweichung in der Standardabweichung beträgt', (stdMC-stdAn)/stdAn*10
```

```
Wir wollen nun korrelierte Variablen betrachten.
x = -3.0 :
```

```
Die analytische Berechnung ergibt: Mittelwert = -2.0 , Standardabweichung = 0.769415362467
Mit Monte-Carlo berechnete Werte: Mittelwert = -2.00127984539 , Standardabweichung = 0.7691305
Die Abweichung im Mittelwert ist 0.0639922692974 %
Die Abweichung in der Standardabweichung beträgt -0.0370120718141 %
x = 0.0 :
Die analytische Berechnung ergibt: Mittelwert = 1.0 , Standardabweichung = 0.2
Mit Monte-Carlo berechnete Werte: Mittelwert = 0.999668646156 , Standardabweichung = 0.1999192
Die Abweichung im Mittelwert ist -0.0331353844259 %
Die Abweichung in der Standardabweichung beträgt -0.0403558414655 %
x = 3.0 :
Die analytische Berechnung ergibt: Mittelwert = 4.0 , Standardabweichung = 0.45607017004
Mit Monte-Carlo berechnete Werte: Mittelwert = 4.0006171377 , Standardabweichung = 0.455969297
Die Abweichung im Mittelwert ist 0.0154284424357 %
Die Abweichung in der Standardabweichung beträgt -0.0221178349329 %
```

In [ ]: