Aufgabe 36

a) Die Zählraten der einzelnen Bins sind Poissonverteilt:

erstes Histogramm

PDF: $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\lambda = Np_i \ , \ k = n_i$

$$P_{Np_i}(n_i) = \frac{e^{-Np_i}(Np_i)^{n_i}}{n_i!}$$

zweites Histogram

$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\lambda = Mp_i \ , \ k = m_i$

$$P_{Mp_i}(m_i) = \frac{e^{-Mp_i}(Mp_i)^{m_i}}{m_i!}$$

b) Likelihoodfunktion

$$\mathcal{L}(p_i, m_i, n_i) = \frac{e^{-Np_i}(Np_i)^{n_i}}{n_i!} \cdot \frac{e^{-Mp_i}(Mp_i)^{m_i}}{m_i!}$$

Schätzer der die Likelihood maximiert

$$\hat{p}_i = \frac{n_i + m_i}{N + M}$$

c)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{(\sigma_i^{Modell})^2}$$

y_i = gemessene Daten

$f(x_i)$ = Verteilung des Modells

$$\Rightarrow \chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - N\hat{p}_i)^2}{N\hat{p}_i} + \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - M\hat{p}_i)^2}{M\hat{p}_i}$$

BRUNNEN

d) Die χ^2-Verteilung hat $(r-1)$ Freiheitsgrade, da ein p_i durch die Normierung schon festgelegt ist.

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

Die Test-Statistik folgt für kleine Binhalte keiner χ^2-Verteilung, da...

e) $$\chi^2 = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{r} \frac{(N m_i - M n_i)^2}{n_i + m_i}$$

$N = \sum_{i=1}^{r} n_i$, $M = \sum_{i=1}^{r} m_i$

n_1	n_2	n_3
111	188	333

m_1	m_2	m_3
15	36	30

$N = 632$ $\qquad$ $M = 81$

$$\chi^2 = \frac{1}{632 \cdot 81} \sum_{i=1}^{r} \frac{(632 m_i - 81 n_i)^2}{n_i + m_i}$$

$$= \frac{1}{632 \cdot 81} \left(\frac{26569}{14} + \frac{56610576}{224} + \frac{64208169}{363} \right.$$

$$\approx 8{,}429$$

χ^2-Werte aus Tabelle (Freiheitsgrad $f=2$)

α	0,1	0,05	0,01
χ^2	4,61	5,99	9,21

$\Rightarrow$ Ab einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ wird die Nullhypothese angenommen.

$$\chi^2_{\text{Verteilung}} > \chi^2_{\text{Stichprobe}}$$