Bearbeitung des 9. Übungsblatts zur SMD 15.12.18

A27: Maximum-Likelihood

Pdf: $f(x) = \begin{cases} 1/b & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ (Gleichverteilung)

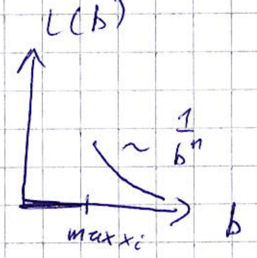
a) Likelihood-Fkt. $L(x_1, x_2, \dots, x_n; b) \equiv L(b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; b)$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{b^n} \mathbb{1}(x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, b])$$

$$= \frac{1}{b^n} \mathbb{1}(\max_i \{x_i\} \leq b) = L(b)$$

Der ML-Schätzer für b ist dann

$$\hat{b} = \arg\max_b L(b) = \max_i \{x_i\}$$ //



b) Teste, ob $\hat{b}$ erwartungstreu ist.

Die W.-keit, dass ein gezogenes x_i kleiner als ein festes, aber beliebiges x ist, ist:

$$P_b(x_i \leq x) = \int_0^x \frac{1}{b} dx = \frac{x}{b} \quad , \text{ falls } x \leq b.$$

Dann ist die W.-keit, dass das Maximum aller x_i kleiner als ein festes, aber beliebiges x ist (alle x_i getrennt kleiner als x):

$$P_b(\max_i \{x_i\} \leq x) = \left(\frac{x}{b}\right)^n . \quad \Rightarrow P_b(\max_i \{x_i\} \geq x) = 1 - \left(\frac{x}{b}\right)^n$$

Mit $E(X) = \int_{\mathbb{R}} P(X \geq x) dx$ und dem Auffassen von $\max_i \{x_i\}$ als Zufallsvariable gilt

$$E(\hat{b}) = \int_0^b dx \left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^n\right) = x\Big|_0^b - \frac{1}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{b^n}\Big|_0^b = \frac{n}{n+1} b.$$

Damit ist $\hat{b}$ nicht erwartungstreu.

Die Korrektur ergibt sich durch Multiplikation mit $\frac{n+1}{n}$, der unverzerrte Schätzer ist dann

$$\hat{b}' = \frac{n+1}{n} \max_i \{x_i\}$$ //