aufgabe2

November 8, 2018

1 Aufgabe 9

1.1 Aufgabenteil a)

Zu zeigen ist, dass der Metropolis-Hastings-Algorithmus (MHA) bei einer gauSSförmigen Schrittsvorschlags-PDF in den Metropolis-Algorithmus (MA) übergeht. Das Ziel des MHA ist es, Zufallszahlen zu generieren, die der Zielverteilung mit PDF f(x) folgen. Dabei wird eine Folge von Zufallszahlen x_i generiert. Der Übergang zur nächsten Zahl ist dabei nicht garantiert, er geschieht mit der Übergangswahrscheinlichhkeit

$$M_{i \to j} = \min\left(1, \frac{f\left(x_j\right)}{f\left(x_i\right)} \frac{g\left(x_j|x_i\right)}{g\left(x_i|x_j\right)}\right)$$

, wobei x_j eine vorgeschlagene Zufallszahl ist, die bei Annahme das neue Glied der Folge wird. Praktisch wird diese Übergangswahrscheinlichkeit damit realisiert, dass der zweite Wert im Minimum mit einer Zufallszahl zwischen 0 und 1 verglichen wird, falls dieser zweite Wert kleiner als eins ist. Das g in der Formel für die Übergangswahrscheinlichkeit ist die nicht notwendigerweise symmetrische Schrittvorschlags-PDF, die im einfachsten Fall eine Gleichverteilung ist. Sie kann allerdings auch komplizierter sein. Der Term $g\left(x_i|x_j\right) = g_{i \to j}$ ist so zu verstehen: Er beschreibt eine Übergangswahrscheinlichkeit aus dem Zustand x_j in den Zustand x_i. Bei einer GauSSverteilung ergibt sich dann

$$g\left(x_i|x_j\right) = N \exp(-(x_i - x_j)^2) \tag{1}$$

als allgemeiner Zusammenhang mit N als Normierungskonstante. Dabei ist x_j als Mittelwert der Verteilung zu verstehen, sie ist also um x_j zentriert. Es folgt auch

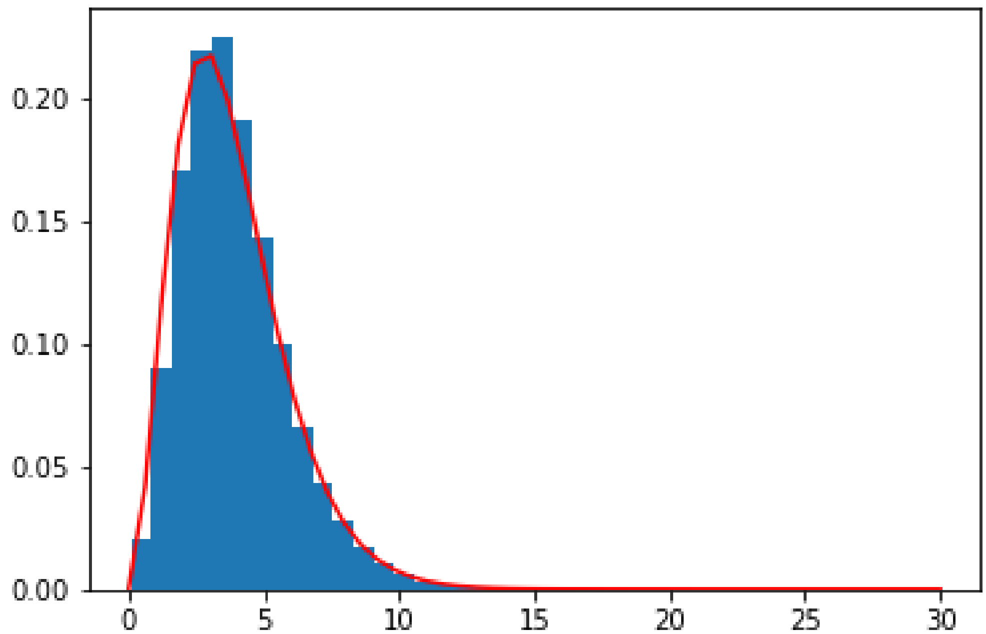
$$g\left(x_j|x_i\right) = N \exp(-(x_j - x_i)^2) \tag{2}$$

für die Übergangswahrscheinlichkeit in die andere Richtung, also von x_i nach x_j. Da die Reihenfolge der Summanden irrelevant ist, falls sie quadriert werden, folgt sofort $g\left(x_j|x_i\right) = g\left(x_i|x_j\right)$. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist dann

$$M_{i \to j} = \min\left(1, \frac{f\left(x_j\right)}{f\left(x_i\right)}\right)$$

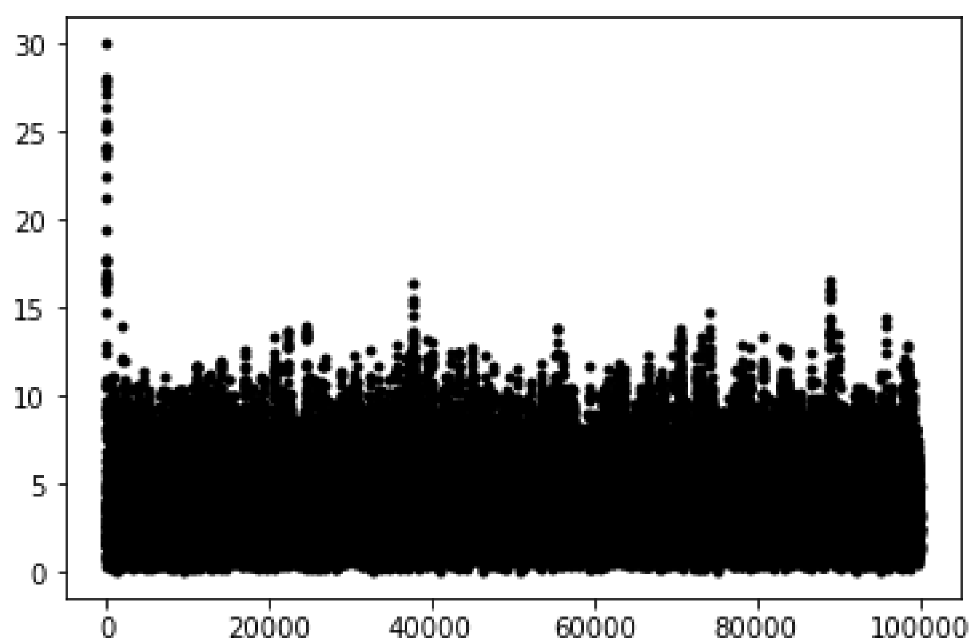
, da sich die beiden g-Terme herauskürzen, weil sie gleich sind. Das ist jedoch gerade die Übergangswahrscheinlichkeit des MA, wodurch die Behauptung gezeigt werden konnte. Das Ergebnis sollte auch anschaulich klar sein, da das $\frac{g(x_j|x_i)}{g(x_i|x_j)}$ ein Korrekturfaktor für eine nicht-symmetrische Schrittvorschlags-PDF darstellt. Dieser wird nicht mehr benötigt, weil die GauSSverteilung symmetrisch ist.

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import random


#Targetverteilung
def target(x):
    if x<=0:
        return 0
    else:
        return 15/np.pi**4 * x**3/(np.exp(x)-1)

x = []
x_0 = 30 #Startwert
step_size = 2 #Schrittweite
n = 10**5 #Menge an Zufallzahlen
x.append(x_0)

#Metropolis-Algorithmus
i=0
while i<n:
    currentx = x[i]
    proposedx = currentx + (random.random()*2-1)*step_size
    A = target(proposedx)/target(currentx)

    if(random.random()<A):
        x.append(proposedx)
        i+=1

z = np.linspace(0.001,30)
plt.plot(z, 15/np.pi**4 * z**3/(np.exp(z)-1), 'r-')
plt.hist(x, bins=40, normed=1)
plt.show()
plt.clf()
```



Die erzeugten Zufallszahlen entsprechen also der Targetverteilung.

```
In [2]: plt.plot(np.linspace(0,n,n+1), x, 'k.')

        plt.show()
```



Auch an diesem Traceplot ist zu erkennen, dass die erzeugten Zahlen der Verteilung entsprechen. Zu Beginn müssen sie sich jedoch noch vom Startwert aus der Targetverteilung annähern (zu erkennen an den fallenden anfänlichen Werten).