Практическая работа № 6

Андреев Артём, Евтушенко Иван, гр. М32001

вар. № 1: ОМП λ распределения Пуассона Π_λ:

$$P(X=m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}; \quad \lambda > 0; \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad F(m,\lambda) = P(x=m)$$

① $L(\lambda, X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda} =$

$$= \frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda}$$

$l(\lambda, X_1, \ldots, X_n) = \ln\left(L(\lambda, X_1, \ldots, X_n)\right) = \ln\left(\frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda}\right) =$

$$= n\bar{x} \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i! - n\lambda$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda, X_1, \ldots, X_n) = \frac{n\bar{x}}{\lambda} - 0 - n$$

$\frac{n\bar{x}}{\lambda} - n = 0 \qquad \hat{\lambda} = \frac{n\bar{x}}{n} = \bar{x}$ — ОМП для λ

стац. точка

Проверка:

$$\frac{\partial^2 l(\lambda, X_1, \ldots, X_n)}{\partial \lambda^2} = -\frac{n\bar{x}}{\lambda^2} < 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}$$ — точка max

② $E_x \bar{x} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} E x_i = \dfrac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda \Rightarrow$ оценка не смещена

$$R_2(\hat{\lambda}, \lambda) = D_x(\hat{\lambda}) = D_x\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) =$$

$$= \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} D_x x_i = \dfrac{1}{n^2} n\lambda = \dfrac{\lambda}{n}$$

③ $I(\lambda) = E_x \left([\ell'_\lambda(\lambda, x)]^2 \right)$

$\ell(\lambda, x) = x \ln \lambda - \ln x_i - \lambda$

$\ell'_\lambda(\lambda, x) = \dfrac{x}{\lambda} - 1$

$I_n(\lambda) = n I(\lambda) = n \cdot E_x \left(\dfrac{x}{\lambda} - 1 \right)^2 = n E_x \left(\dfrac{x - \lambda}{\lambda} \right)^2 =$

$= \dfrac{n}{\lambda^2} E_x \left(x - \lambda \right)^2 = \dfrac{n}{\lambda^2} \cdot \lambda = \dfrac{n}{\lambda}$

$\underset{\underset{D_x = \lambda}{\uparrow}}{\scriptstyle} \qquad \underset{E_x}{\scriptstyle}$

$$4) \quad R_2(\hat{\lambda}, \lambda) = \frac{\lambda}{I_n(\lambda)}$$

Поскольку неравенство Рао-Крамера обратилось в равенство → оценка явл. эффективной