

Андреев Артём Русланович

Группа: М32001

Практическая работа №3

Эмпирическая функция распределения Поведение в «целом»

Задание:

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (a, σ^2) , выполнить следующие действия:

1. Задать параметры распределения $X \sim N(a, \sigma^2)$.
2. Построить график $F_X(x)$, используя функцию `normcdf`.
3. При $n=100$ построить выборку из генеральной совокупности X .
4. По построенной выборке построить график эмпирической функции распределения $F_n(x)$, используя при построении встроенную функцию `[a,b]=stairs(x,y)` для построения кусочно-постоянной функции. Учесть при построении, что $F_n(x)$ изменяется на $1/n$ в каждой следующей точке выборки.
5. Построить доверительную полосу надежности $\gamma = 0.95$; $u(\gamma) = 1.36$.
6. На этом же графике построить $F_n(x)$ и $F_X(x)$. Убедится, что функция распределения попадает в доверительную полосу.
7. На основе критерия Колмогорова и на основе критерия Смирнова провести проверку гипотез согласия с фиксированной функцией распределения при $n=10^4$ и $n=10^6$.
8. Оценить ошибки I и II рода каждого из критериев.

1. Графики

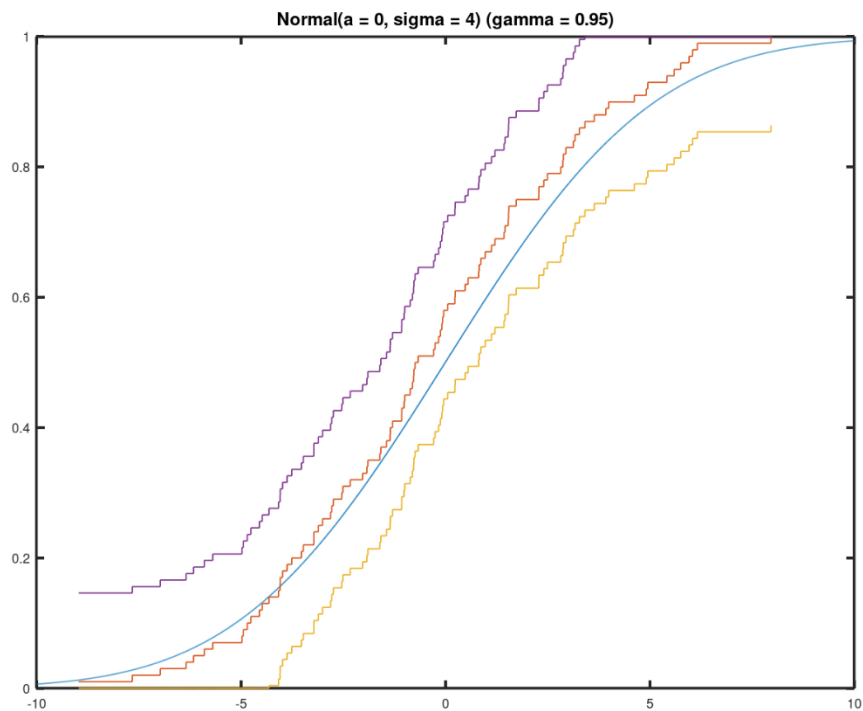
$$\gamma = 0.95$$

$$u(\gamma) = 1.36$$

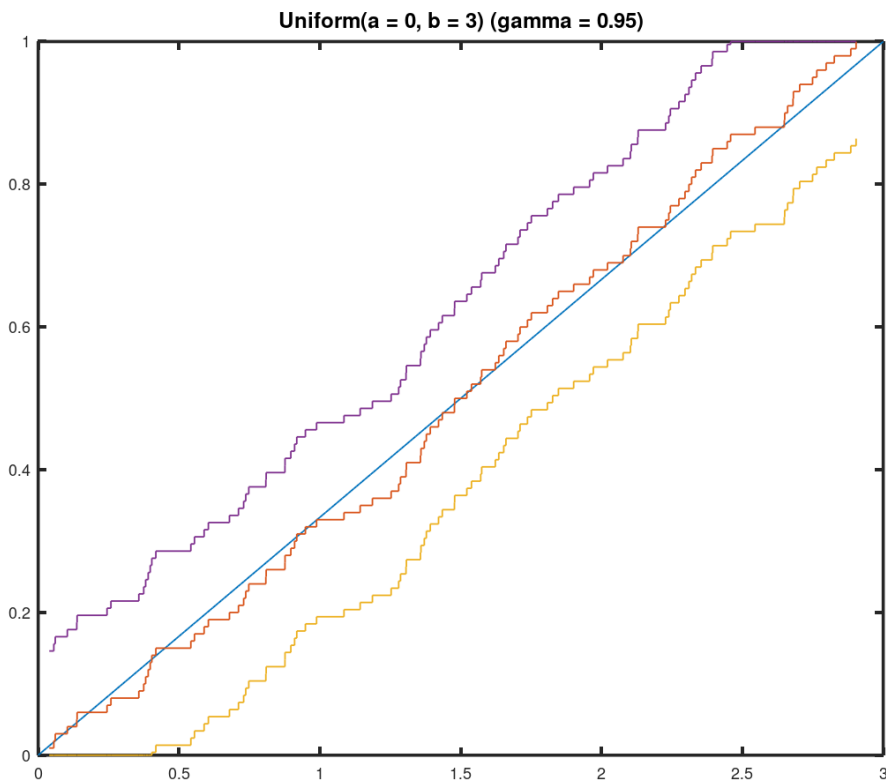
Параметры для нормального распределения: $a = 0$; $\sigma = 4$

Параметры для равномерного распределения: $a = 0$; $b = 3$

Функция нормального распределения (синяя), эмпирическая функция распределения (оранжевая), доверительная полоса (фиолетовая + жёлтая):



Функция равномерного распределения (синяя), эмпирическая функция распределения (оранжевая), доверительная полоса (фиолетовая + жёлтая):



Эмпирическая функция распределения попадает в доверительную полосу при обоих распределениях.

2. Проверка гипотез согласия с фиксированной функцией распределения

Объём выборки	Распределение	Критерий	$\gamma = 0.9$	$\gamma = 0.95$	Полученная статистика
$n=10^4$	Нормальное	Колмогорова (k_γ)	1.224	1.358	0.857642
		Смирнова (w_γ^2)	0.35	0.46	0.0317756
	Равномерное	Колмогорова (k_γ)	1.224	1.358	0.697995
		Смирнова (w_γ^2)	0.35	0.46	0.129436
$n=10^6$	Нормальное	Колмогорова (k_γ)	1.224	1.358	0.896413
		Смирнова (w_γ^2)	0.35	0.46	0.0838918
	Равномерное	Колмогорова (k_γ)	1.224	1.358	0.613383
		Смирнова (w_γ^2)	0.35	0.46	0.135267

Как видно для всех известных квантилей для $\gamma = 0.9$; $\gamma = 0.95$ при обоих распределениях и разных размеров выборки основные гипотезы принимаются.

3. Оценка вероятностей ошибки I и II рода каждого из критериев

Ошибка I рода:

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$

$Normal(F(a=0, \sigma=3))$: Kolmogorov error = 0.08 Smirnov error = 0.11

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$

$Normal(F(a=0, \sigma=3))$: Kolmogorov error = 0.04 Smirnov error = 0.07

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$

$Uniform(F(a=0, b=4))$: Kolmogorov error = 0.1 Smirnov error = 0.08

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$

$Uniform(F(a=0, b=4))$: Kolmogorov error = 0.04 Smirnov error = 0.04

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 100000$; $m = 100$
 $Normal(F(a=0, \sigma=3))$: Kolmogorov error = 0.1 Smirnov error = 0.08

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 100000$; $m = 100$
 $Normal(F(a=0, \sigma=3))$: Kolmogorov error = 0.06 Smirnov error = 0.02

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 100000$; $m = 100$
 $Uniform(F(a=0, b=4))$: Kolmogorov error = 0.07 Smirnov error = 0.1

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 100000$; $m = 100$
 $Uniform(F(a=0, b=4))$: Kolmogorov error = 0.05 Smirnov error = 0.04

Из результатов видно, что вероятность ошибки I рода $\sim 1 - \gamma = \alpha$

Ошибка II рода:

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Normal(Fn(a=0, \sigma=3); Fx(a=0.005, \sigma=3.005))$: Kolmogorov error = 0.88 Smirnov error = 0.93

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Normal(Fn(a=0, \sigma=3); Fx(a=0.005, \sigma=3.005))$: Kolmogorov error = 0.94 Smirnov error = 0.96

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Uniform(Fn(a=0, b=4); Fx(a=0.005, b=4.005))$: Kolmogorov error = 0.94 Smirnov error = 0.94

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Normal(Fn(a=0, b=4); Fx(a=0.005, b=4.005))$: Kolmogorov error = 0.97 Smirnov error = 0.96

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Normal(Fn(a=0, \sigma=3); Fx(a=0.01, \sigma=3.01))$: Kolmogorov error = 0.9 Smirnov error = 0.77

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Normal(Fn(a=0, \sigma=3); Fx(a=0.01, \sigma=3.01))$: Kolmogorov error = 0.94 Smirnov error = 0.89

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Uniform(Fn(a=0, b=4); Fx(a=0.01, b=4.01))$: Kolmogorov error = 0.8 Smirnov error = 0.81

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Normal(Fn(a=0, b=4); Fx(a=0.01, b=4.01))$: Kolmogorov error = 0.9 Smirnov error = 0.91

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Normal(Fn(a=0, \sigma=3); Fx(a=0.02, \sigma=3.02))$: Kolmogorov error = 0.83 Smirnov error = 0.74

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$
 $Normal(Fn(a=0, \sigma=3); Fx(a=0.02, \sigma=3.02))$: Kolmogorov error = 0.88 Smirnov error = 0.9

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$

Uniform($F_n(a=0, b=4)$; $F_x(a=0.02, b=4.02)$): Kolmogorov error = 0.69 Smirnov error = 0.58

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, b=4)$; $F_x(a=0.02, b=4.02)$): Kolmogorov error = 0.79 Smirnov error = 0.73

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, \sigma=3)$; $F_x(a=0.03, \sigma=3.03)$): Kolmogorov error = 0.72 Smirnov error = 0.69

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, \sigma=3)$; $F_x(a=0.03, \sigma=3.03)$): Kolmogorov error = 0.82 Smirnov error = 0.83

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$

Uniform($F_n(a=0, b=4)$; $F_x(a=0.03, b=4.03)$): Kolmogorov error = 0.34 Smirnov error = 0.2

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, b=4)$; $F_x(a=0.03, b=4.03)$): Kolmogorov error = 0.54 Smirnov error = 0.31

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, \sigma=3)$; $F_x(a=0.03, \sigma=3.03)$): Kolmogorov error = 0.71 Smirnov error = 0.69

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, \sigma=3)$; $F_x(a=0.03, \sigma=3.03)$): Kolmogorov error = 0.78 Smirnov error = 0.8

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$

Uniform($F_n(a=0, b=4)$; $F_x(a=0.03, b=4.03)$): Kolmogorov error = 0.29 Smirnov error = 0.17

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, b=4)$; $F_x(a=0.03, b=4.03)$): Kolmogorov error = 0.53 Smirnov error = 0.35

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, \sigma=3)$; $F_x(a=0.05, \sigma=3.05)$): Kolmogorov error = 0.42 Smirnov error = 0.45

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, \sigma=3)$; $F_x(a=0.05, \sigma=3.05)$): Kolmogorov error = 0.59 Smirnov error = 0.63

$\gamma = 0.9$ ($\alpha = 0.1$); $n = 10000$; $m = 100$

Uniform($F_n(a=0, b=4)$; $F_x(a=0.05, b=4.05)$): Kolmogorov error = 0 Smirnov error = 0.01

$\gamma = 0.95$ ($\alpha = 0.05$); $n = 10000$; $m = 100$

Normal($F_n(a=0, b=4)$; $F_x(a=0.05, b=4.05)$): Kolmogorov error = 0.02 Smirnov error = 0.01

Вероятность ошибки II рода стремится к нулю при увеличении сдвига параметров между функцией распределения и эмпирической функцией распределения.