

Código Barnes-Hut en la Simulación de un Disco Galáctico

Jackson J. Narváez C.¹ and Juan D. Ochoa A.¹

¹*Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia*

(Dated: May 17, 2022)

Resumen: Se describen los cambios hechos a la plantilla del código Barnes-Hut enfocándose en el refinamiento del flujo de trabajo y la implementación de funciones de densidad superficial personalizadas. También se resumen brevemente los resultados obtenidos para un modelo de galaxia con agujero negro central y velocidad kepleriana, y un modelo con distribución exponencial de masa, similar a la observada en discos de galaxias espirales. Adicionalmente se comentan los problemas surgidos y las soluciones propuestas en las partes donde se crea pertinente.

Palabras clave: Problema de los N-cuerpos, algoritmo Barnes-Hut, disco galáctico.

I. FLUJO DE TRABAJO

El código está separado en varios archivos *.py* de acuerdo a las funciones que cada uno cumple para poder ser ejecutados individualmente según se requiera. En primer lugar, los parámetros de la galaxia como su radio, el número de partículas, el modelo utilizado, etc., se leen de un archivo de texto plano. El código *Init_system.py* crea la configuración inicial y guarda los valores de posición, momento y masa en un archivo *Initial State.npy*. Luego, *main.py* lee este archivo y realiza la evolución en el tiempo, guardando cada cierto número de pasos un array con la información del sistema presente en *Evolution.npy*. Finalmente *Animation.py* lee la evolución y realiza una gráfica de posición en cada paso guardado y arma con ellos una película. Con este se pudo observar que la creación de imágenes es hasta un 3.7% del tiempo total de ejecución del código original¹.

Adicionalmente, *tangent_velocity.py*, también a partir de los datos de la evolución, crea una película que muestra la distribución de velocidades tangenciales con respecto al radio.

Para el almacenamiento de datos se usaron archivos binarios dado el ahorro que generan en cuanto a memoria computacional: aprox. 60% respecto a archivos de texto plano, además de que su tiempo de lectura mejora en aproximadamente 100 veces respecto a estos últimos.

II. CORRECCIÓN DE LA PARTICIÓN DEL ESPACIO

En la plantilla original, la partición del espacio no se realizaba sobre toda la distribución de partículas sino sobre un cuadrado de lado 1 centrado en (0.5,0.5). Esto llevaba a que todos los cuerpos ubicados fuera de esta área se guardaran en el árbol como un solo en el centro

de masa del cuadrante correspondiente, lo cual implicaba por un lado que se realizaban considerablemente menos cálculos pero también se creaban fuentes masivas que terminaban por romper la galaxia.

Para corregir esto y no perder la generalidad del código se optó por reescalar las distancias de modo que toda la galaxia entrara en la región unitaria centrada en (0.5, 0.5); esto se logra haciendo el radio $R = 0.4$ por defecto y cambiando la constante G por $G \cdot (R/R_0)^3$, R_0 el radio real, para dejar la fuerza en la escala respectiva.

Aunque idealmente la región debería ajustarse para incluir también las partículas que escapan, se encontró que en los modelos implementados, o esto no ocurría en el tiempo de integración, o la presencia de un objeto masivo en el centro permitía despreciar su efecto; sin embargo se escogió $R < 0.5$ como un seguro por si el radio de la galaxia aumentaba ligeramente en la evolución como efectivamente ocurrió.

III. MODELOS DE DISCOS GALÁCTICOS

El código fue modificado para evolucionar partículas en tres dimensiones. Para aprovechar esta actualización con las configuraciones dadas, es posible girar el disco galáctico dando valores de longitud de nodo ascendente α e inclinación β diferentes de 0 dentro de los parámetros. Por defecto, la cámara entrega una vista superior de la galaxia lo que hace indistinguibles los resultados de su versión 2D cuando ambos ángulos son nulos; las imágenes obtenidas más adelante se presentan justo de esta forma.

Diferente a la plantilla, ahora las partículas dentro del disco se ubican en coordenadas polares que luego se convierten en cartesianas; de esta forma no es necesaria la creación de $2N$ partículas de las cuales se descartará la mitad. Una partícula con radio asignado r y ángulo medido desde el nodo ascendente γ tiene la posición en el espacio definida por:

¹ Para 1000 partículas en distribución exponencial. Este porcentaje varía con el modelo y la cantidad de partículas.

$$\begin{aligned}
x &= r (\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha) \\
y &= r (\sin \gamma \cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma \sin \alpha) \\
z &= r (\sin \gamma \sin \beta)
\end{aligned}$$

La creación de ángulos aleatorios se hace usando la función *random*. Para el radio se optó por usar el método de la transformada inversa para la obtención de números aleatorios según una distribución deseada. En resumen, el método consiste en: dada una función de densidad $f(x)$ normalizada a 1, establecer una biyección con una distribución uniforme. En la práctica, esto significa obtener un número aleatorio r_0 de la librería *random* y resolver la siguiente ecuación integral para r :

$$\int_0^r f(x) dx - r_0 = 0$$

Fórmula cuya solución numérica se obtiene fácilmente con las funciones de *scipy*².

Ahora bien, dada una distribución de densidad superficial Σ con simetría radial, se tiene que la masa total M de la galaxia es:

$$\begin{aligned}
M &= \int_S \Sigma dS \\
M &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r \Sigma(r) dr d\theta \\
M &= 2\pi \int_0^R r \Sigma(r) dr
\end{aligned}$$

Por lo que la función de densidad $f(r)$ es en realidad $r\Sigma(r)$ y no la distribución superficial per se.

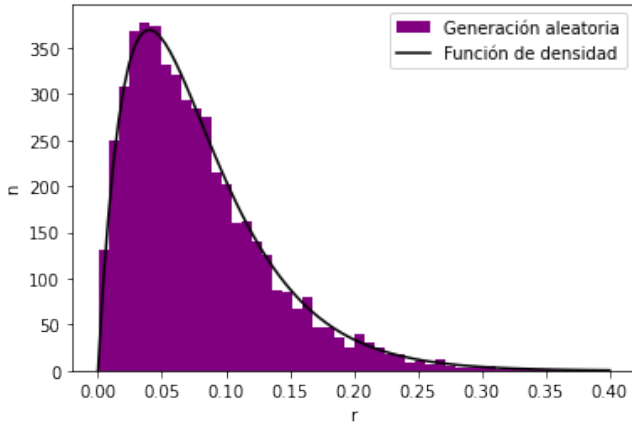


FIG. 1: Distribución de 5000 partículas del disco galáctico exponencial usando método de transformada inversa.

² El método para encontrar la raíz r requiere de un valor inicial, empíricamente se encontró que para las funciones de densidad usadas, 0.001 resultaba en convergencia

Se implementaron dos modelos de disco: un modelo de disco uniforme, $f(r) = r$, y un disco exponencial, $f(r) = re^{-r/R_d}$, con $R_d = 0.1R$. En la Fig. 1 aparece un histograma con la distribución de partículas obtenida por este método en el caso de la última clase de disco. En general las masas pueden variar entre un valor mínimo y máximo, pero como lo hacen de manera uniforme, se espera que la distribución de masas tenga el mismo perfil que la de partículas. Como se observa en la figura, las partículas generadas aleatoriamente no rellenan suavemente la función de densidad por lo que se recomienda contar con un número elevado para aproximar mejor a la función deseada; sin embargo, se tiene la ventaja de que siempre se generan las N partículas requeridas (Ver la función *Random_numbers_distribution*).

El disco uniforme utiliza la fórmula de velocidad kepleriana para ligar cada estrella al agujero negro central; su dirección debe ser tangencial a la posición de la partícula con respecto al centro de la galaxia por lo que se escribe en componentes como:

$$\begin{aligned}
v_x &= v_0 (-\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha) \\
v_y &= v_0 (\cos \gamma \cos \alpha \cos \beta + \sin \gamma \sin \alpha) \\
v_z &= v_0 (\cos \gamma \sin \beta)
\end{aligned}$$

con $v_0 = \sqrt{Gm/r}$. En la galaxia exponencial se realiza la misma proyección, a excepción de que v_0 viene dado por:

$$v_0^2 = 4\pi G \Sigma_0 R_d y^2 [I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)]$$

con $y = r/2R_d$ y:

$$\Sigma_0 = \frac{M}{2\pi \int_0^R r e^{-r/R_d} dr}$$

Finalmente, en la Fig. 2 se presenta la apariencia de las condiciones iniciales para las dos distribuciones utilizadas.

IV. RESULTADOS

La galaxia uniforme se mantiene acoplada gracias a la presencia del agujero negro supermasivo; sin embargo puede ocurrir en algunas simulaciones que partículas escapan presumiblemente debido a que pasan muy cerca unas de otras adquiriendo enormes velocidades. No obstante, en general, el perfil de rapidez no cambia considerablemente en el tiempo de integración.

Por otro lado, la galaxia exponencial se separa, esto debido a que la distribución de velocidades considerada se deduce asumiendo un disco sólido con la densidad de masa correspondiente; las partículas aleatorias discorretas suman menos masa de la necesaria para mantener

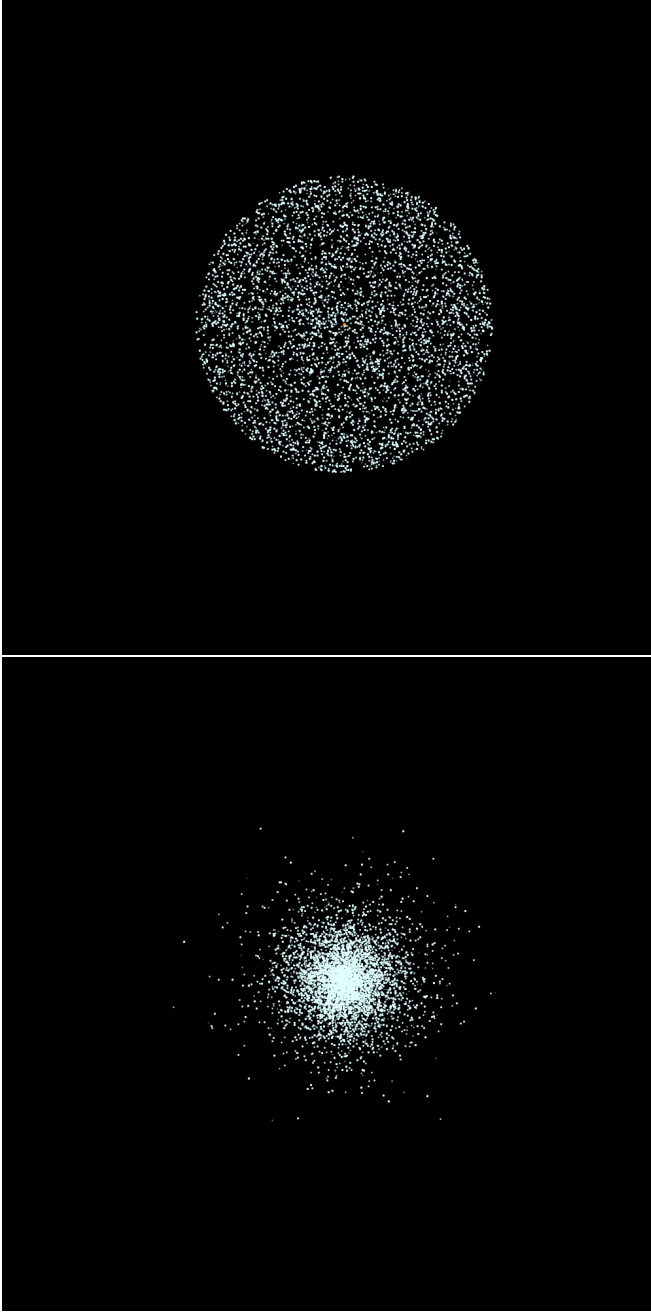


FIG. 2: Configuración inicial de la galaxia. (Arriba) Distribución superficial uniforme con 5000 partículas. (Abajo) Distribución superficial exponencial con 5000 partículas.

la forma. De la película de velocidad tangencial se observa como esta componente disminuye para un radio dado, significando esto que aumenta la velocidad radial, sobretodo en las partículas más cercanas al centro.

En las Fig. 3 y 4 aparece la comparación del perfil de

velocidad tangencial para ambos modelos.

Por último, también se observó la diferencia de tiempos en la evolución de ambos discos: el uniforme tarda

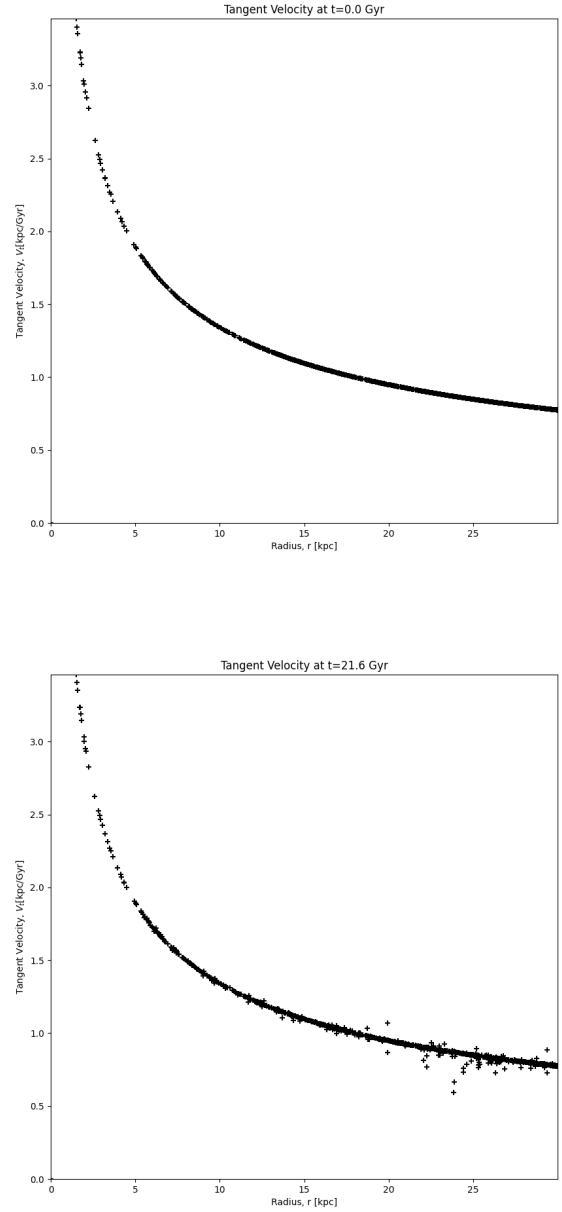


FIG. 3: Componente tangencial de la velocidad inicial y final para 1000 partículas en un disco uniforme.

aproximadamente un 25% menos de tiempo en su ejecución, esto debido a que las partículas se encuentran distribuidas de manera más homogénea dentro del dominio, de modo que es mayor la cantidad de aproximaciones que puede hacer el algoritmo Barnes-Hut.

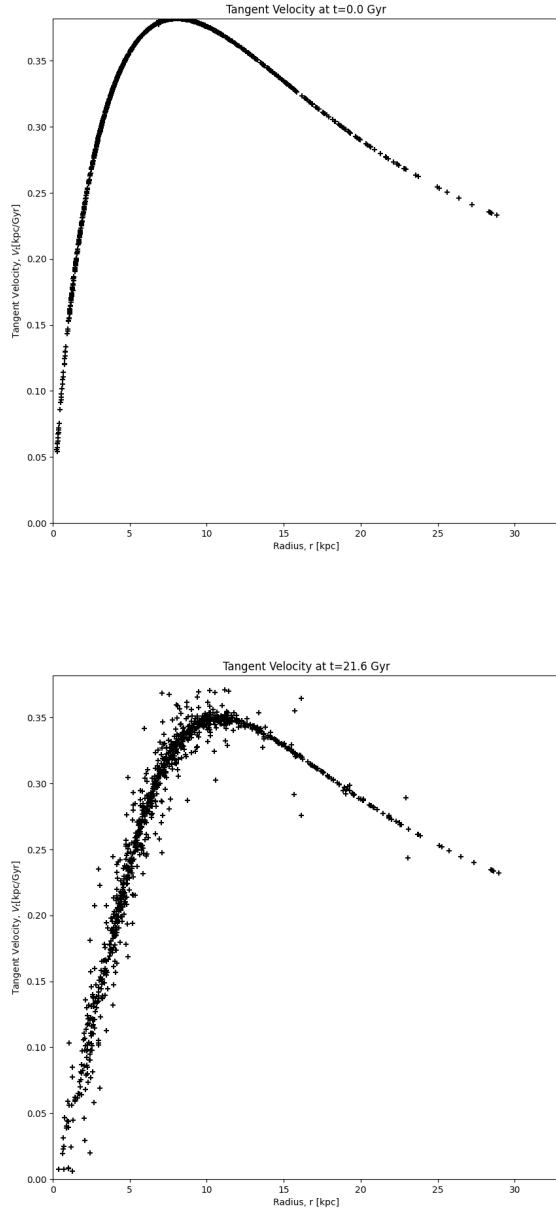


FIG. 4: Componente tangencial de la velocidad inicial y final para 1000 partículas en un disco exponencial.