7

CHAPTER

積　分

「我也不相信目前所給出的裁決，會被認定為皇家學會最後的判決。但牛頓先生卻已利用書籍出版的方式，並用學會的名義將它們傳送到德國、法國及義大利，因而損害我應有的貢獻聲譽。
對我而言，我對牛頓先生始終懷抱莫大地尊敬。我先前已提過，他獨立的發現類似我的方法，雖然現在有很大的想像空間去懷疑他是否從我得知這項發明前已經了解它，可是受到奉承者的蠱惑煽動，他肆意地用非常敏感的方式非難我。閣下，現在從引起紛爭的主要根源作判斷，以終止這場爭論吧。」

—— 萊布尼茨向皇家學會有關優先權的答覆
1714 年 4 月 28 日

7.1 反微分（微分的逆運算）

由前幾章的範例，可看出物理定律常以某事物的變化關係來描述，亦即微分方程式。

在第二章討論自由落體時，我們從位移函數（物體在時間內的下落距離），隨後將取微分以求速率（物體下落有多快），再藉由取速率的微分求得加速度（速率改變量）。

於第六章中，我們反向操作，從得知砲彈加速度來求得砲彈速度，並進一步求出拋體的軌跡。上述的範例是許多物理學的典型問題，從中我們理解到可以試圖從微分關係來求解。假設已知某函數的微分，求原來函數的過程稱為**反微分**或**反導數**（antidifferentiation），亦可稱為**積分**（integration）。積分也是一種用來表示面積的方法，不過相關的講解我們將會在 7.2 節來陳述。

雖然我們目前尚未使用積分這個名詞，但在第六章中我們已有些微的使用到反微分這個觀念。在此我們將精簡的重述一下，假設在地球上有一物體進行運動，那我們可以從簡單的討論以更了解反微分：

加速度　$a = -g$

速率　$v = v_0 - gt$

位置　$z = z_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$

為了獲得以上這些方程式，我們將從第一步 $a=-g$ 開始著手；在第二章中我們了解到關於落體的運動函數，隨後我們使用一些物理的待換

$$a=\frac{dv}{dt}$$

因而從 $\frac{dv}{dt}$ 求出 v，也就是說函數 v 的微分將等於 $-g$。

當我們擁有 $v=-gt$、$v=3-gt$、及 $v=-5-gt$；如果我們將常數用 C 來表示成 $v=C-gt$，則 $dv/dt=-g$，所以我們將會獲得許多類似形式的函數，對應 C 的每個值皆為一個函數。

這些典型的積分過程。微分並不是求得函數的唯一方法，因為有許多相同的微分函數，彼此之間的差異僅在於兩者之間的常數項。事實上，假設有兩個函數 $g(t)$ 和 $f(t)$ 具有相同的微分，$g'(t)=f'(t)$，且他們相減 $g(t)-f(t)$ 具有微分零，這意味著它們彼此相減並不有影響，因 $g(t)-f(t)=C$，其中 C 為常數。因此 $g(t)=f(t)=+C$。也就是說，如果 $f(t)$ 為 $f'(t)$ 的反微分，則所有的反微分為 $f(t)+C$，其中 C 為常數。

在求速度的範例中，常數 C 具有特定的物理意義；它表示當 $t=0$ 時的速度，也就是初始速度 v_0。因此在具有微分 $-g$ 的所有可能函數 $g(t)=C-gt$ 中，我們選擇 $C=v_0$ 來表示

$$v=v_0-gt$$

現在我們重複之前步驟，知道 $v=v_0-gt$ 並

$$v=\frac{dz}{dt}$$

我們想求出 z，及 v 的反微分。在此我們可將其採用反微分整理為 $z=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，由於它的微分為 v_0-gt，而我們還知道所有的反微分都需加上常數項，故

$$z=C+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

在此情況中，常數表示初始位移 z_0，因此我們得到位置函數，

$$z=z_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

在第三章的 59 頁上，有一些關於物理學上常運用到的函數微分表。將表反過來並加上常數項，將可獲得以下積分表 :

函數	反微分
nx^{n-1}	x^n+C
$\cos x$	$\sin x+C$
$-\sin x$	$\cos x+C$
e^x	e^x+C

善加利用表 7.1 內的各類型函數，其中 a 表示常數因子（即參數）。

表 7.1 在物理學中使用的反微分

函數	反微分	
ax^n	$a\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$(n\neq-1)$
$\cos ax$	$\dfrac{1}{a}\sin ax+C$	$(a\neq0)$
$-\sin ax$	$-\dfrac{1}{a}\cos ax+C$	$(a\neq0)$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}+C$	$(a\neq0)$

切記：有時導函數會不加上常數項，因而如果我們說 $P'(x)=f(x)$，則 $P(x)$ 是 $f(x)$ 的反微分。假使 $P(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反微分，則所有的反微分為 $P(x)+C$，其中 C 表任意常數。

例 1：請寫出 $f(x)=2x^3$ 的所有反微分。

解：此方程式的形式為 $f(x)=ax^n$，且 $a=2$ 和 $n=3$，所以從表中的第一項我們可得到

$$P(x)=2\times\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{2}+C$$

當然，這很容易透過求微分來檢驗：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{2}+C\right)=2x^3$$

例 2：確定函數 $f(x)=3x^2+\cos 2x$ 的所有反微分 $P(x)$。

解：由於兩個函數之和的微分是它們的微分之和，對反微分同樣是正確的。函數 x^3 是 $3x^2$ 的反微分；而函數 $\frac{1}{2}\sin 2x$ 是 $\cos 2x$ 的反微分，所以 $x^3+\frac{1}{2}\sin 2x$ 是 $f(x)$ 的一個反微分。因而所有的反微分是

$$P(x)=x^3+\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

此結果很容易透過求微分來檢驗：

$$\frac{d}{dx}\left(x^3+\frac{1}{2}\sin 2x+C\right)=3x^2+\cos 2x$$

問　題

1. 微分並核對表 7.1 中的各項反微分。

2. 確定下列各個函數 $f(x)$ 的所有反微分 $P(x)$：

   (a) $f(x)=3x^4$　　(b) $f(x)=6/x^2\ (x\neq 0)$

   (c) $f(x)=-3\cos x$　　(d) $f(x)=2\sin 4x$

   (e) $f(x)=x^{1/2}(x\geq 0)$　　(f) $f(x)=3e^{2x}$

3. 確定下列各個函數 $f(x)$ 的所有反微分 $P(x)$：

   (a) $f(x)=3x^2-x+5$　　(b) $f(x)=2x^3+\cos\dfrac{x}{2}$

   (c) $f(x)=3e^{2x}+2e^{3x}$　　(d) $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

4. 對於問題 3 中的各個例子，求出使 $P(0)=1$ 的特定反微分 $P(x)$。

7.2 反微分和求面積

曾向世界上最好的頭腦提出挑戰的問題是求面積之問題，這也是近 2000 年中來自古代的課題：給定一個具有彎曲邊界的區域，找到一個具有相同面積的正方形。在數學史中最重要的事件之一，是牛頓和萊布尼茨發現，在古代的求面積問題，能藉助於求反微分來解決。

求面積和微分之間的關聯並不明顯，求面積涉及面積，而微分涉及變化率；透過考察一些簡單的例子，我們能發現兩者之間的關係。

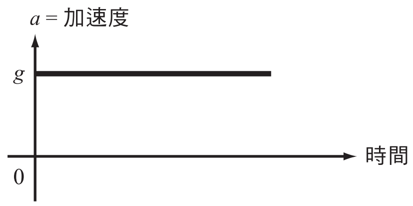

圖 7.1

表示落體恆定加速度之圖線：$a=g$。

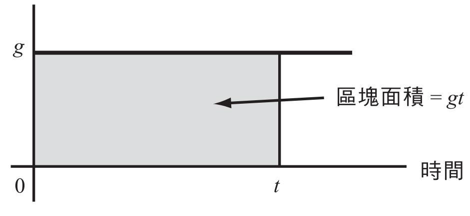

圖 7.2

圖線從 0 到 t 所圍成的區塊面積。

讓我們計算在這個曲線與時間軸之間區域的面積。當然，該面積取決於我們從哪裡開始及到哪裡停止。假設我們在時刻 0 開始而在時刻 t 停止，於是該區域就是圖 7.2 中帶陰影的矩形，而它的面積就是 gt，即底乘高的積。

如果我們想像 t 不作為固定的數值而作為變數，則面積 gt 是 t 的函數，我們可稱它為面積函數。這個函數具有微分 g，所以這是我們從零開始的常數函數 a 的一個反微分。但是加速度的一個反微分是速率，因而在這裡面積函數等於物體從靜止下落的速率：

$$v(t) = gt$$

現在讓我們畫出速率函數的圖線，在圖 7.3(a) 中所示斜率為 g 的直線，並計算在其圖線下從時刻 0 到任一時刻 t 的區域面積。在圖 7.3(b) 中帶陰影的這個區域是底為 t 高為 gt 的三角形，所以其面積（底和高的乘積之半）是 $\frac{1}{2}gt^2$，是 t 的一個新函數。我們再次看到曲線下的這個面積是我們從 0 開始之曲線的一個反微分；面積為 $\frac{1}{2}gt^2$，等於在時刻 t 所下落的距離。

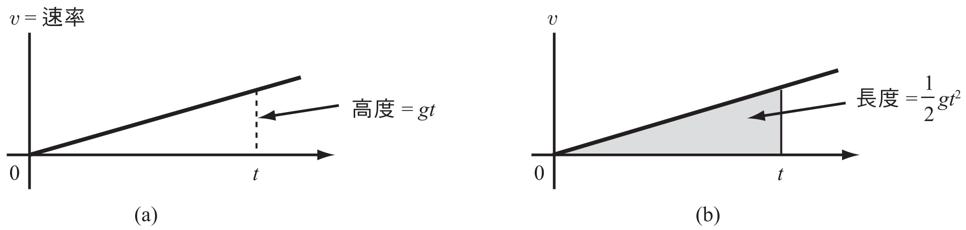

圖 7.3

落體的速率曲線：(a) 速率函數 $v(t) = gt$，(b) 圖下的面積。

在這兩個例子中顯示出，面積與反微分之間的關係不是偶然的，它是由牛頓和萊布尼茨所作出令人震驚發現之後的根本想法。

為了進一步探索這個想法，讓我們嘗試計算在圖 7.4 中所示拋物線段下的面積。該曲線（拋物線的一部分）是函數 $y=x^2$ 的圖線，而我們想要求出曲線與 x 軸，從 $x=0$ 到 $x=t$ 之間區域的面積；這個區域（在圖 7.4 中陰影部分）叫做底邊 t 而高度 t^2 的拋物線段下的面積。

從圖 7.4 很明顯看到拋物線段下的面積，小於具有相同底邊和相同高度的三角形面積。這個三角形具有面積 $\frac{1}{2}t(t^2)=\frac{1}{2}t^3$，所以拋物線段下的面積小於 $\frac{1}{2}t^3$，但它小多少呢？

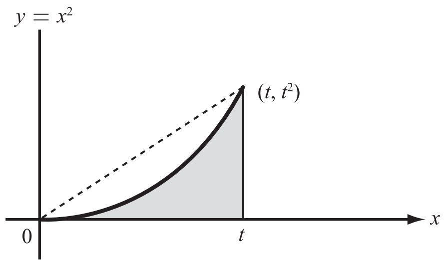

圖 7.4

底為 t，高為 t^2 的拋物線段。