E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1erApellido : 2doApellido : Nombre :	Curso 18/19 (25.01.19) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos **1a Parte**

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n}.$$

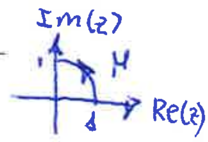
$\begin{vmatrix} -\lambda-1 & 6 \\ 2 & -\lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2+3\lambda-10=0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}}$

$\underline{V_2} \equiv \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\underline{V_{-5}} \equiv \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix}$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n} = A \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} 2^n + B \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix} (-5)^n}$$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral



$$I = \int_\Gamma \frac{|z+i|^2}{\bar{z}-i}\, dz = \int_\mu \frac{(z+i)\,\cancel{(\bar{z}-i)}}{\cancel{(\bar{z}-i)}}\, dz = \int_\mu (z+i)\, dz$$

donde Γ es el arco de circunferencia $|z| = 1$ comprendido en el primer cuadrante del plano complejo, orientado positivamente (origen en el punto 1 del eje real y final en el punto i del eje imaginario).

$f(z) = z+i$ entera

$F(z) = \frac{(z+i)^2}{2}$ $\begin{cases} F \text{ entera} \\ F'(z) = f(z)\ \forall z \in \mathbb{C} \end{cases}$

⇓ Independencia camino

$I = F(i) - F(1) = -2-i$

$$\boxed{-(2+i)}$$

C. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \dfrac{z\cos(iz)}{e^z - 1} = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ enteras

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow e^z = 1 = e^{2k\pi i}$

↓ Ptos singulares

$z_k = 2k\pi i \quad k = 0, \pm 1, \ldots$

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

$z_k = 2k\pi i \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\begin{cases} P(z_k) = z_k \neq 0 \\ Q(z_k) = 0 \ \text{ y } \ Q'(z_k) = e^{z_k} = 1 \end{cases}$

→ Polos simples de $f(z)$

$\text{Res}[f, z_k] = P(z_k)/Q'(z_k) = z_k = 2k\pi i$

• $z = 0$ Singularidad evitable • $z_k = 2k\pi i \quad k = \pm 1, \pm 2 \ldots$ Polos simples $\text{Res}[f, z_k] = 2k\pi i$

• $z_0 = 0$ $\begin{vmatrix} P(0) = 0 \\ Q(0) = 0 \end{vmatrix}$

$\lim_{z\to 0} |f(z)| = \lim_{z\to 0} \left| \frac{z}{z + \frac{z^2}{2!} + \ldots} \right|$

⇓

Singularidad evitable

Anotar en el siguiente recuadro, la parte principal del desarrollo en serie de Laurent (potencias negativas de z) en el entorno $0 < |z| < R$, especificando el valor de R

$R = d(z_1, 0) =$
$= |z_1| = 2\pi$

• Parte principal = 0 • $R = 2\pi$

• $z = 0$ sing. evitable ⇒ f Admite desarrollo de Taylor

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

convergente en $|z| < R$

⇓

Parte ppal de Laurent = 0 (no potencias negativas)

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

$$f(z) = \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{P(z)}{Q(z)} \Big\} \text{ enteras}$$

$Q(z) = \operatorname{sen} z = 0 \iff z_k = k\pi \quad k = 0, \pm 1, \dots$

$Q'(z_k) = \cos z_k = (-1)^k \neq 0 \quad \forall k$

$P(z_k) = \cos z_k \neq 0$

→ Ceros simples de $Q(z)$ → Polos simples de $f(z)$

$$\operatorname{Res}[f, z_k] = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = 1$$

D. **(3 puntos)** Sea $g(z)$ una función cuyo único punto singular es $z = i$ tal que

$$\oint_C g(z)\,dz = 4\pi(1 - i) = 2\pi i \operatorname{Res}[g, z = i]$$

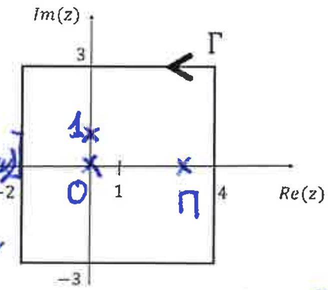
siendo C la circunferencia $|z - i| = 1$ orientada positivamente.

Anotar el valor de la integral

$$I = \oint_\Gamma (g(z) + \operatorname{cotg} z)\,dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(g, i) + \sum \operatorname{Res}(\operatorname{cotg} z, z_k)\right]$$

siendo Γ el cuadrado de centro en $z = 1$ y lado 3, orientado positivamente, de la figura.

Ptos singular de cotg z en Γ



$$\boxed{4\pi}$$

$I = 2\pi i \operatorname{Res}[g, i] + 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, \pi)\right]$

$= 4\pi(1 - i) + 2\pi i(1 + 1) =$

$= 4\pi$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

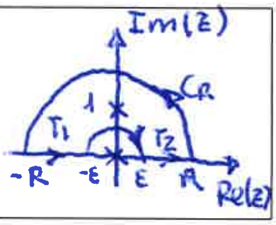
$$\int_0^\infty \overbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+1)^2}}^{\text{Par}}\,dx \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Bigg(\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{x(1+x^2)^2}}^{I_1}\Bigg)$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\overbrace{e^{iz}/(1+z^2)^2}^{g_1(z)}}{z}, z = 0\right] = g_1(0) = 1$$

$g_1(z)$ analítica en $z=0$, $g_1(0) \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow z = 0$ polo simple

$$\boxed{\frac{\pi}{4e}(2e - 3)}$$



$\mu : C_R \cup \Gamma_1 \cup C_\varepsilon \cup \Gamma_2$

Calculamos

$\int_\mu f(z)\,dz$, con

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)^2} = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

- Puntos singulares de f en $\mathring{\mu}$: $z = i$ ($z = 0$ es polo simple)

⊙ $$\int_\mu f(z)\,dz = \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{\substack{\downarrow R\to\infty \\ 0}} + \underbrace{\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz}_{\substack{\downarrow \varepsilon\to 0 \\ -\pi i \operatorname{Res}[f, 0]}} + \underbrace{\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz}_{\substack{\downarrow \varepsilon\to 0,\ R\to\infty \\ I_1}} = 2\pi i \operatorname{Res}[f, z = i]$$

Lema $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z(z^2+1)^2} = 0$

⊙ $$I_1 = 2\pi i \operatorname{Res}[f, i] + \pi i \overbrace{\operatorname{Res}[f, 0]}^{1} = -\frac{3}{2e}\pi i + \pi i = \frac{\pi i}{2e}(2e - 3)$$

$$f = \frac{\overbrace{e^{iz}/z(z+i)^2}}{(z-i)^2} = \frac{g_2(z)}{(z-i)^2}$$ con g_2 analítica en $z = i$, $g_2(i) \neq 0$

Polo doble de $f \Rightarrow$

$\operatorname{Res}[f, i] = \frac{g'(i)}{1!} = \frac{-3}{4e}$

Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso

Grupo

Auxiliar

Respuestas

Ampliación de Matemáticas (Versión 1), (25-01-2019)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+\ln(1+t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(1, e^2-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2e^2}} \exp(-\dfrac{1}{1+2e^2} - 1 + e^2)$.

(2) $u(2, e^3-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+12e^3}} \exp(-\dfrac{4}{1+12e^3} - 1 + e^3)$.

(3) $u(3, e^4-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4e^4}} \exp(-\dfrac{9}{1+4e^4} - 1 + e^4)$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 8w(t) = g(t) \quad \text{en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \pi - t$ si $t \in [0,\pi[$ y $g(t) = \sin(t)$ si $t \in [\pi,+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi + \dfrac{\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi - \dfrac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(19 + \dfrac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^5 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - z^4 w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 0.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w y los coeficientes c_k de su desarrollo cumplen que:

(9) Los coeficientes c_{3j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{12} = \dfrac{7}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(10) Los coeficientes c_{7j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{12} = \dfrac{7}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(11) Los coeficientes c_{6j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la función w está acotada en $\mathbb{C}$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \exp(z)w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_a, tal que $w_a(z) = 1 + \mathrm{Ln}(z) + o(z)$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_b, distinta de la función nula, tal que $w_b(z) = 3 + \sqrt[3]{z^2} + o(\sqrt[3]{z^2})$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_c, distinta de la función nula, tal que $w_c(z) = o(\sqrt[3]{z^2})$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{J_2(4x) - xJ_1(x) + x^2 J_0(x)}{1 - J_0(x)}.$$

El límite anterior existe y vale:

(17) -8.

(18) 8.

(19) 10.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} (\dfrac{x}{2})^{2k+\nu}$.

(A) Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación se obtiene

$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1+\ln(1+t))\,(i\omega)^2\,\hat{u}+\hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. La ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = (-\omega^2(1+\ln(1+t))+1)\,\hat{u}$ puede escribirse como $\frac{d}{dt}\left(\ln\hat{u} + \omega^2(t+1)\ln(1+t) - t\right) = 0$, de donde se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C\exp\left(t-\omega^2(t+1)\ln(1+t)\right)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}[\exp(-x^2)](\omega) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)$ e imponiendo la condición inicial se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp\left(t-\omega^2(t+1)\ln(1+t)-\frac{\omega^2}{4}\right) =$

$= \sqrt{\pi}\exp(t)\exp\left(-\omega^2\left((t+1)\ln(1+t)+\frac{1}{4}\right)\right)$. Tomando la transformada inversa se obtiene

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{1+4(t+1)\ln(1+t)}}\,\exp\left(t-\frac{x^2}{1+4(t+1)\ln(1+t)}\right).$$

(B) La función g puede escribirse de la forma $g(t) = (\pi - t)\,(H(t) - H(t-\pi))$
$+ H(t-\pi)\,\text{sen}\, t. = (\pi - t)\,H(t) + (t-\pi)\,H(t-\pi) - H(t-\pi)\,\text{sen}(t-\pi).$

Tomando la transformada de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se obtiene

$(z^2+2z+8)\,\mathcal{L}[w(t)](z) = 1 + \mathcal{L}[g(t)](z)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[t^\nu](z) = \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$, $\mathcal{L}[\text{sen}\, t](z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ y

$\mathcal{L}[H(t-a)\,f(t-a)](z) = \exp(-az)\,\mathcal{L}[f(t)](z)$ se obtiene

$$\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{1}{z^2+2z+8}\left[1 + \frac{\pi}{z} - \frac{1}{z^2} + \exp(-\pi z)\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1}\right)\right].$$

$$\mathcal{L}[w(t)](4) = \frac{1}{2^9}\left[15 + 4\pi + \frac{\exp(-4\pi)}{17}\right].$$

(C) La solución del problema de Cauchy dado en el enunciado es una función entera. Por tanto, $w(z) = 1 + \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación del enunciado se obtiene $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$, $c_6 = \frac{1}{6\cdot 5}$.

Además, $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - (z^4 + \sum_{k\geq 2}^{\infty} (1+k) c_k z^{k+4}) = 0$. Igualando a cero el coeficiente en z^l del primer término de la ecuación se obtiene $c_{l+6} = \frac{(1+l)}{(l+6)(l+5)} c_l$, $l \geq 2$. Por tanto, sólo son distintos de cero los coeficientes de la forma c_{6j} con $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Puesto que $3j+1$ no es divisible por 3 tampoco puede ser múltiplo de 6, la igualdad $7j+1 = 6l$, se verifica, al menos, para $j=5$ y $l=6$. y $c_{36} \neq 0$. Los coeficientes c_{6j} son estrictamente positivos para todo $j \in \mathbb{N}$. La función verifica $1 + \frac{x^6}{6\cdot 5} \leq w(x+0i)$, por tanto, w no está acotada en $\mathbb{C}$.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{3z}\frac{dw}{dz} + \frac{z\exp(z)}{z^2} w.$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación anterior. Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución está determinado por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda=0$ y $\lambda=2/3$. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $w(z) = C_1 \sqrt[3]{z^2}\, P_1(z) + C_2 P_2(z)$ donde P_1 y P_2 son dos funciones analíticas en un cierto entorno del origen con $P_1(0) = P_2(0) = 1$.

La función w está acotada en un entorno del origen para todo $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Además, $w(z) = C_1 \sqrt[3]{z^2} + C_2 + o(\sqrt[3]{z^2})$

En consecuencia, para $C_1 = 1$ y $C_2 = 3$, $w_b(z) = 3 + \sqrt[3]{z^2} + o(\sqrt[3]{z^2})$ y si $w_c(z) = o(\sqrt[3]{z^2})$ han de ser $C_1 = C_2 = 0$ y por tanto $w_c(z) \equiv 0$.

(E) $$\lim_{x\to 0} \frac{J_2(4x) - x J_1(x) + x^2 J_0(x)}{1 - J_0(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\Gamma(3)}\left(\frac{4x}{2}\right)^2 + o(x^2) - x\frac{1}{\Gamma(2)}\frac{x}{2} + o(x^2) + x^2 + o(x^2)}{1 - \left(1 - \frac{1}{\Gamma(2)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)} = 10.$$