A

Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación diferencial se obtiene

$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1+\alpha t(2+\cos t))(i\omega)^2 \hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Integrando la ecuación anterior se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C \exp(-\omega^2(t+\alpha(t^2+t\,\text{sen}\,t+\cos t-1)))$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}[\exp(-4x^2)](\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{\omega^2}{16}\right)$, imponiendo la condición inicial $u(x,0) = \exp(-4x^2)$ se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{16} + t+\alpha(t^2+t\,\text{sen}\,t+\cos t-1)\right)\right)$.

Tomando la transformada inversa se obtiene

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+16(t+\alpha(t^2+t\,\text{sen}\,t+\cos t-1))}} \exp\left(\frac{-4x^2}{1+16(t+\alpha(t^2+t\,\text{sen}\,t+\cos t-1))}\right).$$

(B) La función $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ puede escribirse como

$$g(t) = \left(H(t) - H\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) t + \frac{1}{2} H\left(t - \frac{1}{2}\right) = H(t) \cdot t - H\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación se obtiene

$(z^2 + 2z + 8) \mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{dw}{dt}(0) + \mathcal{L}[g(t)](z)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[t^{\nu}](z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$ y que $\mathcal{L}[H(t-a) f(t-a)](z) = \exp(-az) \mathcal{L}[f(t)](z)$ se obtiene que

$$\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{1}{(z+1)^2 + 7} \left(\frac{dw}{dt}(0) + \frac{1}{z^2} - \frac{\exp(-z/2)}{z^2}\right).$$

(c) La solución del problema de Cauchy del enunciado es una función analítica en su dominio, $B(0+i0,1)$ y $W(z)=\sum_{k\geq 0}^{\infty} c_k z^k$, con $c_0=0$, $c_1=\alpha$. Sustituyendo el desarrollo en la ecuación diferencial se obtiene

$$\sum_{k\geq 0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}z^k+\sum_{k\geq 2}^{\infty}k(k-1)c_k z^k-\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}z^k=0.$$

de donde $c_{k+2}=\dfrac{-k(k-1)c_k+c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para $k\geq 2$, $c_0=0$, $c_1=\alpha$

$c_2=0$, $c_3=0$. En consecuencia, $c_{2k}=0$ para todo $k\in\mathbb{N}$

$c_5=\frac{1}{20}\alpha$ y $c_7=-\frac{1}{42}\alpha$. Además, todos los coeficientes c_{2k+1}, para todo $k\in\mathbb{N}$, son reales. Por tanto, $\overline{W(-z)}=-W(\bar{z})$ para todo $z\in B(0+i0,1)$.

(D) La ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{z}\left(\frac{\operatorname{sh} 2z}{z(1+z)\,4}\right)\frac{dw}{dz} + \frac{\exp(z)}{z^2(1+z)}\, w \qquad (1)$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación (1). Cerca de $z=0$, el comportamiento de la solución está dado por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$. Puesto que $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\sqrt{17}}{2} \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$, la solución general de la ecuación (1) es de la forma $w(z) = C_1 z^{\frac{1+\sqrt{17}}{4}} p_1(z) + C_2 z^{\frac{1-\sqrt{17}}{4}} p_2(z)$

donde p_1 y p_2 son analíticas en un entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$. Por tanto, para $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$ $w(z) = O(z^1)$. Para $C_2 \neq 0$ $\lim_{z\to 0} w(z) = \infty$, sin embargo,

$\lim_{z\to 0} \sqrt{z}\, w_{53} = +\infty$.

(E) En virtud de la fórmula de Poisson $u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}f(t)\,dt=$

$$=\frac{y}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}\frac{1+t}{(t-x)^2+y^2}dt+\int_{0}^{1}\frac{1-t}{(t-x)^2+y^2}dt\right]=\frac{y}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}\frac{1+x+(t-x)}{(t-x)^2+y^2}dt+\int_{0}^{1}\frac{1-x-(t-x)}{(t-x)^2+y^2}dt\right]$$

$$=\frac{y}{\pi}\left(\frac{1+x}{y}\left(\operatorname{arctg}\frac{-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}\right)+\frac{1-x}{y}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}-\operatorname{arctg}\left(\frac{-x}{y}\right)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln\frac{(1-x)^2+y^2}{x^2+y^2}\right).$$

Por tanto,

$$u(-1,y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{2}\ln\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)+2\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{y}-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y}\right)\right)-\frac{y}{2}\ln\left(\frac{4+y^2}{1+y^2}\right)\right).$$

Nótese que $u(x,y)=u(-x,y)$.