E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1erApellido : 2doApellido : Nombre :	Curso 19/20 (03.07.20) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos # 1ª Parte

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución del problema de ecuaciones en diferencias:

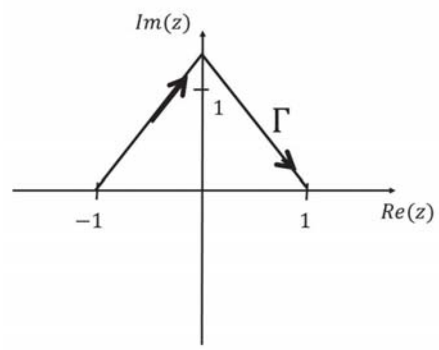
$$x^{n+2} + 3\,x^{n+1} - 4x^n = 10, \qquad x^0 = 3,\ x^1 = 0.$$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la **parte real** de la integral

$$\int_\Gamma \frac{(\overline{z+i})^2 \log(z+i)}{|z+i|^4}\,dz$$

siendo Γ el contorno orientado de la figura, con origen en el punto -1 y final en el punto 1, ambos del eje real. Considerar la determinación del logaritmo:

$$\log z = \ln|z| + i\arg z \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$



C. **(3 puntos)**Dada la función $\quad f(z) = \dfrac{e^{2z} - e^{-2z}}{z\,(e^{2z} + e^{-2z})}$

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

Anotar en el siguiente recuadro, la parte principal del desarrollo en serie de Laurent (potencias negativas de z) en el entorno $0 < |z| < R$, especificando el valor de R

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

D. **(3 puntos)** Sea la función real de dos variables reales definida como

$$u(x,y) = 2x^2 + by^2 + c \qquad \text{con } b, c \in \mathbb{R}$$

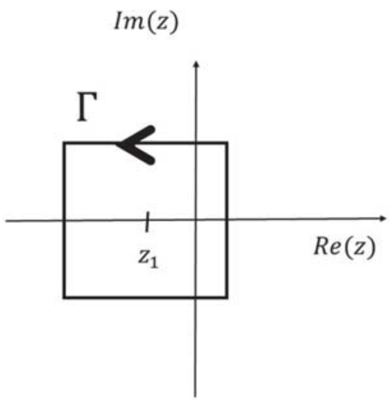
Anotar los valores de b y c para los que u es la parte real de una función, $f(z)$, analítica en algún dominio del plano complejo.

Anotar la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x, y)$.

Anotar la expresión analítica de $f(z)$, en función de $z = x + iy$, sabiendo que es una función que cumple $f(z_1) = 0$, así como el valor de la integral

$$\oint_\Gamma \frac{z - z_1}{z f(z)}\, dz$$

siendo Γ el cuadrado de centro z_1 y lado $l = \frac{3}{2}|z_1|$, orientado positivamente, de la figura.



$\boxed{\textbf{Considérese} \quad z_1 = -1}$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$\text{V.P.} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)(x^2 + \pi^2)}\, dx \right)$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

Versión 1 Problema A

$$x^{n+2}+3x^{n+1}-4x^{n}=5a\ ;\ x^0=b\ ,\ x^1=0$$

Homogénea:

$$r^2+3r-4=0 \begin{cases} r=1 \\ r=-4 \end{cases}$$

$$x_H^n = A + B(-4)^n$$

Solución particular (1 es valor característico de la Homogénea). Por tanto, $x_p^n = kn \Rightarrow$

$$\Rightarrow k(\cancel{n}+2+\cancel{3n}+3-\cancel{4n})=5a \Rightarrow k=a$$

Completa: $x^n = A + B(-4)^n + an$

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= A+B=b \\ x^1 &= A-4B+a=0 \end{aligned}\right\} \quad A=\frac{4b-a}{5} \quad B=\frac{a+b}{5}$$

Solución $\boxed{x^n = \frac{4b-a}{5}+\frac{a+b}{5}(-4)^n+an}$

(B) 1 $I = \int_{\mu} \frac{(\overline{z+i})^2 \log(z+i)}{|z+i|^4}\, dz = \int_{\mu} \underbrace{\frac{\log(z+i)}{(z+i)^2}}_{f(z)}\, dz$

Determinación: $\left| \begin{array}{l} \log z = \ln|z| + i \arg z \\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \end{array} \right.$

- $\log(z+i) = \log(x + i(1+y))$ no analítica en

$$\left| \begin{array}{l} Re(z+i) = x = 0 \\ Im(z+i) = 1+y \leq 0 \iff y \leq -1 \end{array} \right.$$

① $f(z)$ analítica en $D = \mathbb{C} - \{ z = iy \,/\, y \leq -1 \}$
$\Rightarrow$ hay independencia del camino en D
y admite primitiva, $F(z)$, en D

$$F(z) = -\frac{\log(z+i)}{z+i} - \frac{1}{z+i} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{- Analítica en D} \\ \text{- } F'(z) = f(z) \ \forall z \in D \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I = F(z_F) - F(z_I) \\ z_F + i = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \rightarrow F(z_F) = \frac{-1}{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} \left[1 + \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \right] \\ z_I + i = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4} \rightarrow F(z_I) = \frac{-1}{\sqrt{2}\, e^{-3\pi i/4}} \left[1 + \ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} \right] \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow I = \frac{-(1-i)}{2} \left[1 + \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \right] + \frac{(-1-i)}{2} \left[1 + \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi 3}{4} \right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Re(I) = \frac{\pi}{4} - (1 + \ln\sqrt{2}) \\ Im(I) = -\frac{\pi}{2} \end{array}}$$

Escaneado con CamScanner

C.1

$$f(z) = \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{z\,(e^{2z} + e^{-2z})}$$

Puntos singulares aislados

$$z = 0$$

$$e^{4z} = -1 = e^{i\pi(1+2k)} \rightarrow z_k = \frac{i\pi}{4}(1+2k) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

① $\boxed{z = 0}$

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{z} = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{2e^{2z} + 2e^{-2z}}{1} =$$

L'Hôpital (cociente de enteras)

$= 2 \Rightarrow$ Singularidad evitable

$\Downarrow$

Res $(f; 0) = 0$

Parte principal de la serie de Laurent $= 0$

convergente en $|z| < \frac{\pi}{4}$

② $\boxed{z_k = \frac{\pi}{4}(1 + 2k)}$ $\quad k = 0, \pm 1 \ldots$

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- P y Q enteras
- $P(z_k) \neq 0$
- $Q(z_k) = 0$
- $Q'(z_k) = \cancel{(e^{2z_k} + e^{-2z_k})} + 2z_k \underbrace{\overbrace{(e^{2z_k} - e^{-2z_k})}^{P(z_k)}}_{\neq 0}$

$\rightarrow$ Ceros simples de Q

Polos simples de $f(z)$ $\Leftarrow$

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{\cancel{P(z_k)}}{2 z_k \cancel{P(z_k)}} = \frac{1}{2 z_k} = \boxed{\frac{-2i}{\pi(1+2k)}}$$

$k = 0, \pm 1, \ldots$

D.1 $u(x,y) = 2x^2 + by^2 + c \qquad b,c \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{ll} u_x = 4x & u_{xx} = 4 \\ u_y = 2by & u_{yy} = 2b \end{array}\right\} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \iff b = -2$$

- $\exists\ u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ y son continuas en $\mathbb{R}^2$ $\forall b,c \in \mathbb{R}$
- Cumple la ec. de Laplace si $\boxed{b=-2}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Si $b=-2$, $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ con $f(z)$ entera $\forall c \in \mathbb{R}$

- v armónica conjugada de $u \Rightarrow$ cumplen C-R

$v_y = u_x = 4x \longrightarrow v = 4xy + g(x)$

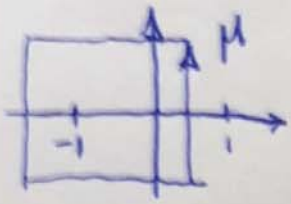
$v_x = -u_y = -2by = 4y = 4y + g'(x) \iff g(x) = d \in \mathbb{R}$

$$\boxed{v(x,y) = 4xy + d \quad \text{con } d \in \mathbb{R}}$$

- $f(z) = u(x,y) + i v(x,y) = 2\,[\underbrace{x^2 - y^2 + i2xy}_{z^2}] + \underbrace{c + id}_{z_0 \in \mathbb{C}\ (\text{cte})}$

$f(z_1) = 2z_1^2 + z_0 = 0 \iff z_0 = -2z_1^2$

$$\boxed{f(z) = 2(z^2 - z_1^2) \quad \text{entera}}$$



$$\oint_M \frac{z - z_1}{z\,2(z^2 - z_1^2)}\,dz = \oint_M \frac{dz}{z\,2(z+z_1)} \underset{(-z_1) \notin \mathring{M}}{=} 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{\frac{1}{2(z+z_1)}}{z}, 0\right]$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2z_1} = \frac{\pi i}{z_1} \underset{z_1 = -1}{=} \boxed{-\pi i}$$

$\underline{E.1}$ $I = V.P\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \quad dx}{\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x^2+\pi^2\right)}\right) = \mathrm{Re}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} \quad dx}{\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x^2+\pi^2\right)}}_{I}\right)$

$$\oint_{\mu} f(z)\, e^{iz}\, dz$$

- Ptos singulares de $f(z) = \frac{1}{\left(z^2-\frac{\pi^2}{4}\right)\left(z^2+\pi^2\right)}$

$z_1 = \frac{\pi}{2} \quad z_2 = -\pi/2$

$z_3 = \pi i \quad z_4 = -\pi i$

Ceros simples de $(1/f) \Rightarrow$ Polos simples de f

$$\oint_{\mu} f(z)\, dz = 2\pi i \;\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}/\left(z^2-\frac{\pi^2}{4}\right)(z+\pi i)}{z-\pi i}, \pi i\right] = 2\pi i \underbrace{\frac{e^{-\pi}}{2\pi i\left(\frac{-5\pi^2}{4}\right)}}$$

$$\parallel$$

$$\int_{C_R} + \underbrace{\int_{-R}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} + \int_{\pi/2+\varepsilon}^{R}} + \underbrace{\int_{C\varepsilon_1} + \int_{C\varepsilon_2}} = \frac{-4e^{-\pi}}{5\pi^2}$$

Res. Lim $f(z) = 0$, $z \to \infty$; $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$; $\varepsilon \to 0$

$$0 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix} dx - \pi i \left[\mathrm{Res}(f(z)e^{iz}, -\tfrac{\pi}{2}\right] - \pi i \left[\mathrm{Res}(f(z)e^{iz}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}/(z^2+\pi^2)(z-\pi/2)}{z+\pi/2}, -\frac{\pi}{2}\right] = \frac{e^{-\pi/2 i}\, 4}{(-\pi)\, 5\pi^2}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}/(z^2+\pi^2)(z+\pi/2)}{z-\pi/2}, \frac{\pi}{2}\right] = \frac{e^{\pi/2 i}\, 4}{\pi\, 5\pi^2}$$

$$\oplus = \frac{i\, 8 \,\mathrm{sen}(\pi/2)}{5\pi^3}$$

$$I = \frac{-4e^{-\pi}}{5\pi^2} + \pi i \cdot i \,\frac{8}{5\pi^3} = \boxed{\frac{-4}{5\pi^2}\left(2 + e^{-\pi}\right)}$$