Ampliación de Matemáticas
Variable Compleja (2)

Series de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

El **disco de convergencia** de la serie se define con un radio R (puede ser 0 o ∞) tal que:

- f converge en $\{|z - z_0| < R\}$
- f diverge en $\{|z - z_0| > R\}$

Teorema: La función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es analítica dentro del disco de convergencia.

Además, la integración y derivación se pueden hacer término a término con la serie.

Teorema: Si una fución $f(z)$ es analítica en un entorno de z_0, tiene un desarrollo de Taylor con radio de convergencia hasta la primera singularidad de f

- Algunos desarrollos importantes:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}(-1)^n}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} \text{ en } |z| < 1$$

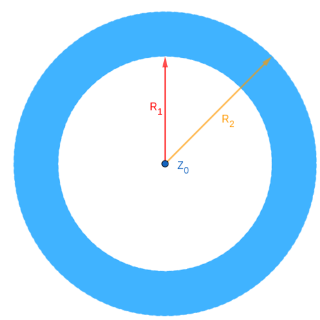
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ en } |z| < 1$$

Series de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- El **anillo de convergencia** de la serie se define con dos radios, el radio interior R_1 (puede ser 0) y el radio exterior R_2 (puede ser ∞) tal que:
  - f converge en $\{R_1 < |z - z_0| < R_2\}$
  - f diverge en $\{|z - z_0| < R_1\} \cup \{|z - z_0| > R_2\}$

Anillo de convergencia:



Se llama **parte principal** de la serie de Laurent a la parte correspondiente a los exponentes negativos. Es decir:

$$\text{Parte Principal f(z)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

- **Teorema**: La función

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es analítica dentro del anillo de convergencia.

- Además, la integración y derivación se pueden hacer término a término con la serie.
- **Teorema**: Si una fución $f(z)$ es analítica en un anillo (caso importante: cuando es analítica en $|z - z_0| < R$ salvo en z_0), entonces tiene un desarrollo de Laurent en dicho anillo