E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1er Apellido : 2do Apellido : Nombre :	Curso 20/21 (01.02.21) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1er Parcial **V01**

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general de la ecuación en diferencias

$$y^{n+1} - 2a\, y^n + a^2\, y^{n-1} = b\, a^n, \qquad n \geq 0$$

con $a,\, b \in \mathbb{R}$

B. **(3 puntos)** Sean las funciones complejas

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \log z \\ f_2(z) &= \log\left(z^2+2\right) \end{aligned} \qquad \text{siendo } \log z = \text{Ln}|z| + i\arg z, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$$

Anotar en el siguiente recuadro el dominio en el que ambas funciones son analíticas así como la expresión de la derivada de $f(z) = f_1(z) - \dfrac{1}{2} f_2(z)$ en dicho dominio.

Anotar en el recuadro el valor de la integral

$$\int_\Gamma \frac{\bar{z}}{|z|^2\,(z^2+2)}\, dz$$

siendo Γ el segmento recto con origen en el punto $z_I = -1 + i$ y final en el punto $z_F = -i$.

C. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{8}\right)}{x^4 - 1}\, dx$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

D. **(3 puntos)** Dada la función $\quad f(z) = \dfrac{e^{4z} - 1}{\operatorname{senh}(2z)\,\cosh(2zi)}$

Anotar en un recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

Anotar en el recuadro el valor de la integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{3z}\, dz$$

siendo Γ la circunferencia $|z| = \dfrac{\pi}{5}$

E. **(3 puntos)** Sea la función real de dos variables reales definida como

$$u(x,y) = ax^2 + by^n + y, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Anotar los valores de n y b para los que u es la parte real de una función, $f(z)$, analítica en algún dominio del plano complejo.

Anotar la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x,y)$.

Anotar la expresión analítica de $f(z)$, en función de $z = x + iy$, sabiendo que

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z} = 1$$

E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : ______ 1^er^ Apellido : ______ 2^do^ Apellido : ______ Nombre : ______	Curso 20/21 (01.02.21) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1er Parcial **V02**

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general de la ecuación en diferencias

$$y^{n+1} - 2b\, y^n + b^2\, y^{n-1} = a\, b^n, \qquad n \geq 0$$

con $a,\, b \in \mathbb{R}$

B. **(3 puntos)** Sean las funciones complejas

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \log z \\ f_2(z) &= \log\left(z^2 + 2\right) \end{aligned} \qquad \text{siendo } \log z = \mathrm{Ln}|z| + i\arg z, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$$

Anotar en el siguiente recuadro el dominio en el que ambas funciones son analíticas así como la expresión de la derivada de $f(z) = f_1(z) - \dfrac{1}{2} f_2(z)$ en dicho dominio.

Anotar en el recuadro el valor de la integral

$$\int_\Gamma \frac{\bar{z}}{|z|^2\,(z^2+2)}\, dz$$

siendo Γ el segmento recto con origen en el punto $z_I = -i$ y final en el punto $z_F = 1 + i$.

C. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}{x^4 - 1}\, dx$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

D. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \dfrac{e^{6z} - 1}{\operatorname{senh}(3z)\, \cosh(3zi)}$

Anotar en un recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

Anotar en el recuadro el valor de la integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{5z}\, dz$$

siendo Γ la circunferencia $|z| = \dfrac{\pi}{7}$

E. **(3 puntos)** Sea la función real de dos variables reales definida como

$$u(x, y) = ax^2 + by^n + y, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Anotar los valores de n y b para los que u es la parte real de una función, $f(z)$, analítica en algún dominio del plano complejo.

Anotar la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x, y)$.

Anotar la expresión analítica de $f(z)$, en función de $z = x + iy$, sabiendo que

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z} = 3$$

Examen final ordinario. Solución Parcial I (01-02-2021)

Ejercicio A

Solución general de la ecuación en diferencias

$$y^{n+1} - 2a\,y^n + a^2\,y^{n-1} = b\,a^n, \qquad n \geq 0$$

Ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes. Solución: $y^n = y_h^n + y_p^n$

- **Solución general de la ecuación homogénea asociada:** y_h^n

  Polinomio característico de la ecuación (se prueban soluciones en la forma $y^n = \lambda^n$):

  $$y^{n+1} - 2a\,y^n + a^2\,y^{n-1} = \lambda^{n+1} - 2a\,\lambda^n + a^2\,\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}\left(\lambda^2 - 2a\,\lambda + a^2\right) = 0$$

  resultando $P(\lambda) = (\lambda - a)^2 \Longrightarrow \lambda = a$ **(doble)**

  $$y_h^n = (C_1 + C_2 n)\,a^n$$

- **Solución particular de la ecuación completa:** y_p^n

  El término forzante, $g(n) = b\,a^n$, es solución de una ecuación homogénea de coeficientes constantes, con raíz del polinomio característico $r = a = \lambda$. Aplicamos el método del anulador.

  $$g(n) = P_1^*(n)a^n = b\,a^n \quad \text{con } P_1^*(n) = b \text{ (polinomio de grado } \beta = 0)$$

  Como r es raíz del polinomio característico de la ecuación, se prueban soluciones de la forma $y_p^n = Q_1(n)\,a^n$, con $Q_1(n)$ polinomio de grado $\beta + \alpha = 0 + 2 = 2$

  $$y_p^n = (A + Bn + Cn^2)\,a^n = \underbrace{(A + Bn)\,a^n}_{y_h^n} + \underbrace{Cn^2\,a^n}_{y_{p_1}^n}$$

  Introduciendo $y_{p_1}^n$ en la ecuación completa conduce a

  $$Ca^{n-1}\underbrace{\left[(n+1)^2a^2 - 2n^2a^2 + (n-1)^2a^2\right]}_{2a^2} = ba^n \Longleftrightarrow C = \frac{b}{2a} \Longrightarrow y_{p_1}^n = \frac{b}{2a}\,a^n$$

Solución general de la ecuación: $\boxed{y^n = \left(C_1 + C_2\,n + \dfrac{b}{2a}\,n^2\right)a^n}$

Ejercicio B

Dadas las funciones complejas $\begin{cases} f_1(z) = \log z \\ f_2(z) = \log\left(z^2+2\right) \end{cases}$ siendo $\log z = \mathrm{Ln}|z| + i\arg z, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$

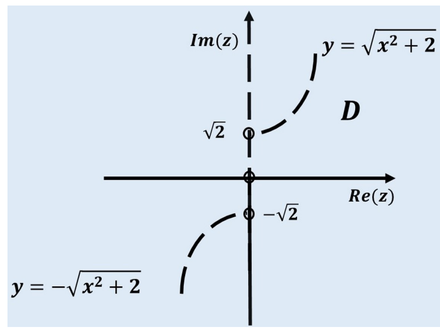
- En el dominio donde ambas son analíticas $f'(z) = f_1'(z) - \dfrac{1}{2} f_2'(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{z^2+2} = \boxed{\dfrac{2}{z\left(z^2+2\right)}}$

- Dominio de analiticidad (D): $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{2}}$ $\log w$ no analítica en $\begin{cases} \mathrm{Re}(w) = 0 \\ \mathrm{Im}(w) \geq 0 \end{cases}$

1. $f_1(z) = \log z$ no analítica en $z = iy, \quad y \geq 0$
2. $f_2(z) = \log\left(z^2+2\right) = \log\left(x^2 - y^2 + 2 + i\,2xy\right)$

no analítica en $\begin{cases} \mathrm{Re}(w) = 0 & \Longleftrightarrow & y^2 = x^2+2 \\ \mathrm{Im}(w) \geq 0 & \Longleftrightarrow & 2xy \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} y = \sqrt{x^2+2}, & x \geq 0 \\ y = -\sqrt{x^2+2}, & x \leq 0 \end{cases}$$



$$\boxed{D = \mathbb{C} - \left(\{z = iy \text{ con } y \geq 0\} \cup \left\{z = x + i\sqrt{x^2+2} \text{ con } x \geq 0\right\} \cup \left\{z = x - i\sqrt{x^2+2} \text{ con } x \leq 0\right\}\right)}$$

- $\Gamma \in D$, por lo que se puede aplicar el *Teorema de la Independencia del camino*

$$I = \int_\Gamma \frac{\bar{z}}{|z|^2\left(z^2+2\right)}\,dz = \int_\Gamma \frac{1}{z\left(z^2+2\right)}\,dz = $$
$$= \int_\Gamma \frac{f'(z)}{2}\,dz = \boxed{\frac{1}{2}\left(f(z_F) - f(z_I)\right)}$$

z_I	z_F	I
$-1+i$	$-i$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{Ln}\,2}{4} + i\dfrac{5\pi}{8}\right)$
$-i$	$1+i$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\mathrm{Ln}\,2}{4} + i\dfrac{5\pi}{8}\right)$

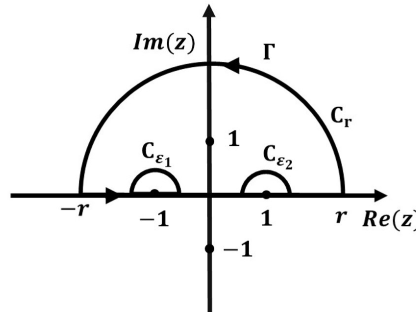
$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\,9\pi/4} \Longrightarrow z_1^2 + 2 = 2(1+i) = 2\sqrt{2}\,e^{i\,9\pi/4} \Longrightarrow \begin{cases} \log z_1 = \mathrm{Ln}(\sqrt{2}) + i\,9\pi/4 \\ \log(z_1^2+2) = \mathrm{Ln}(2\sqrt{2}) + i\,9\pi/4 \end{cases}$$

$$z_1 = -1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\,3\pi/4} \Longrightarrow z_1^2 + 2 = 2(1-i) = 2\sqrt{2}\,e^{i\,7\pi/4} \Longrightarrow \begin{cases} \log z_1 = \mathrm{Ln}(\sqrt{2}) + i\,3\pi/4 \\ \log(z_1^2+2) = \mathrm{Ln}(2\sqrt{2}) + i\,7\pi/4 \end{cases}$$

$$z_2 = -i = e^{i\,3\pi/2} \Longrightarrow z_2^2 + 2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\,2\pi} \Longrightarrow \begin{cases} \log z_2 = i\,3\pi/2 \\ \log(z_2^2+2) = \mathrm{Ln}(2\sqrt{2}) + i\,2\pi \end{cases}$$

Ejercicio C $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(a\pi x)}{x^4-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(a\pi x)}{x^4-1}\,dx=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\ \cos(2a\pi x)}{x^4-1}\,dx=\frac{1}{4}\,(I_1-I_2)$

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4-1}\,dx,\qquad I_2=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\,2a\pi x}}{x^4-1}\,dx\right)=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\,dx\right)=\mathrm{Re}\,(I_2^c)$$



Cálculo de: $\displaystyle\oint_\Gamma f_i(z)\,dz,\qquad i=1,2$

Puntos singulares de f_i (Ceros de $1/f_i$):

$$\left\{\begin{array}{ll} z_1=-1, & z_2=1\\ z_3=i, & z_4=-i\end{array}\right.$$

$$\oint_\Gamma f_i(z)\,dz=\int_{C_r}f_i(z)\,dz+\int_{T_1}f_i(z)\,dx+\int_{T_2}f_i(z)\,dx+\int_{C_{\varepsilon_1}}f_i(z)\,dz+\int_{C_{\varepsilon_2}}f_i(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f_i(z);i)$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\textit{Lema 1:}\ \lim\limits_{|z|\to\infty}\overbrace{\frac{z}{(z^4+1)}}^{zf_1(z)}=0\implies\lim\limits_{r\to\infty}\int_{C_r}f_1(z)\,dz=0\\
\lim\limits_{z\to-1}(z+1)\,f_1(z)\ =\ \lim\limits_{z\to-1}\dfrac{(z+1)}{(z^2+1)(z+1)(z-1)}=\dfrac{1}{(-2)(2)}\implies \text{z=-1 es polo simple de } f_1(z)\implies\\
\qquad\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{C_{\varepsilon_1}}f_1(z)\,dz=\pi i\,\mathrm{Res}(f_1(z);-1)=\pi i\,\dfrac{-1}{4}\\
\lim\limits_{z\to b}(z-1)\,f_1(z)\ =\ \lim\limits_{z\to1}\dfrac{(z-1)}{(z^2+1)(z+1)(z-1)}=\dfrac{1}{(2)(2)}\implies \text{z=1 es polo simple de } f_1(z)\implies\\
\qquad\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{C_{\varepsilon_2}}f_1(z)\,dz=\pi i\,\mathrm{Res}(f_1(z);1)=\pi i\,\dfrac{1}{4}\\
\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_{T_1}f_1(x)\,dx+\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_{T_2}f_1(x)\,dx=I_1
\end{array}\right.$$

$$I_1=2\pi i\,\mathrm{Res}(f_1(z);i)+\pi i\,\left[\mathrm{Res}(f_1(z);-1)+\mathrm{Res}({}_1f(z);1)\right]=2\pi i\ \overbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{1/((z+i)(z^2-1))}{(z-i)};i\right)}^{\frac{1}{(2i)(-2)}}+\pi i\times0=\frac{-\pi}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\textit{Lema 2:}\ \lim\limits_{|z|\to\infty}\overbrace{\frac{1}{(z^4+1)}}^{f_2(z)}=0\implies\lim\limits_{r\to\infty}\int_{C_r}f_2(z)e^{2\pi az\,i}\,dz=0\\
\lim\limits_{z\to-1}(z+1)\,f_2(z)\ =\ \lim\limits_{z\to-1}\dfrac{(z+1)e^{2\pi az\,i}}{(z^2+1)(z+1)(z-1)}=\dfrac{e^{-2\pi a\,i}}{(-2)(2)}\implies \text{z=-1 es polo simple de } f_2(z)\implies\\
\qquad\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{C_{\varepsilon_1}}f_2(z)\,dz=\pi i\,\mathrm{Res}(f_2(z);-1)=\pi i\,\dfrac{-e^{-2\pi a\,i}}{4}\\
\lim\limits_{z\to1}(z-1)\,f_2(z)\ =\ \lim\limits_{z\to1}\dfrac{(z-1)e^{2\pi az\,i}}{(z^2+1)(z+1)(z-1b)}=\dfrac{e^{2\pi a\,i}}{(2)(2)}\implies \text{z=1 es polo simple de } f_2(z)\implies\\
\qquad\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{C_{\varepsilon_2}}f_2(z)\,dz=\pi i\,\mathrm{Res}(f_2(z);1)=\pi i\,\dfrac{e^{2\pi a\,i}}{4}\\
\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_{T_1}f_2(x)\,dx+\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_{T_2}f_2(x)\,dx=I_2^c
\end{array}\right.$$

$$
\begin{aligned}
I_2^c &= 2\pi i\,\mathrm{Res}(f_2(z);i) + \pi i\,[\mathrm{Res}(f_2(z);-1) + \mathrm{Res}(f_2(z);1)] = \\
&= 2\pi i\ \underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{e^{2\pi a z\, i}/((z+i)(z^2-1))}{(z-i)};i\right)}_{\dfrac{e^{-2\pi a}}{(2i)(-2)}} + \pi i\ \underbrace{\frac{e^{2\pi a\, i} - e^{-2\pi a\, i}}{8}}_{\dfrac{i\,\mathrm{sen}(2a\pi)}{4}} = \frac{-\pi}{2}\ \left(e^{-2\pi a} + \mathrm{sen}(2a\pi)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{I = \frac{\pi}{8}\ \left(\mathrm{sen}(2a\,\pi) + e^{-2a\,\pi} - 1\right)}
$$

Ejercicio E $\qquad u(x,y) = ax^2 + by^n + y, \qquad a,b\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}$

1. Valores de $b\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$ para los que $u = \mathrm{Re}(f(z))$, con $f(z)$ analítica en algún dominio $D\subset\mathbb{C}$

$$
u(x,y) \text{ debe ser armónica en } D\subset\mathbb{R}^2 \iff \begin{cases} \text{(a) } u(x,y) \text{ tiene parciales de primer y segundo orden continuas en } D \\ \text{(b) } u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ en } D \end{cases}
$$

$$
\left.\begin{array}{ll} u_x = 2ax & u_y = nb\,y^{n-1} + 1 \\ u_{xx} = 2a & u_{yy} = n(n-1)b\,y^{n-2} \end{array}\right\} \overset{(b)}{\iff} 2a + n(n-1)b\,y^{n-2} = 0 \overset{\forall (x,y)\in D}{\iff} \boxed{\begin{array}{l} n=2 \\ b=-a \end{array}}
$$

En ese caso, $u(x,y) = a\ \left(x^2 - y^2\right) + y$ es armónica en todo $\mathbb{R}^2$

2. $v(x,y)$ armónica conjugada de $u(x,y) \iff \begin{cases} \text{(a) } v(v,y) \text{ tiene parciales de primer orden continuas en } \mathbb{R}^2 \\ \text{(b) Cumple las condiciones de Cauchy-Riemman en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$$
\left.\begin{array}{lll} v_y = u_x & = & 2ax \\ v_x = -u_y & = & 2ay - 1 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} v = 2axy + g(x) \Longrightarrow \\ v_x = 2ay + g'(x) = -u_y \iff \end{array} g'(x) = -1 \Longrightarrow g(x) = -x + C \text{ con } C\in\mathbb{R} \text{ constante}
$$

.

$$
\boxed{v(x,y) = 2axy - x + C, \quad C\in\mathbb{R}}
$$

3. $f = u(x,y) + iv(x,y)$, en función de z, tal que $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z} = K$

$$
f(z) = \underbrace{a\ \left(x^2 - y^2 + i\,2xy\right)}_{az^2} + \underbrace{y - ix}_{-iz} + i\,C = az^2 - iz + i\,C
$$

Fórmula Integral de Cauchy: $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z} = 2\pi i f(0) = 2\pi i\,(i\,C) = -2\pi C \Longrightarrow \boxed{f(z) = az^2 - iz - \frac{K}{2\pi}\,i}$

Ejercicio D $\quad f(z) = \dfrac{e^{2az}-1}{\operatorname{senh}(az)\,\cosh(azi)} \qquad$ con $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$

1. **Puntos singulares de f** (Ceros de $1/f$):

- $\operatorname{senh}(az) = 0 \iff e^{2az} = 1 = e^{2k\pi\, i} \iff \boxed{z_k = \dfrac{k\pi}{a}\, i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$ (aislados)

$$\lim_{z\to z_k} f(z) = \lim_{z\to z_k} \underbrace{\frac{1}{\cosh(azi)}}_{=1/\cosh(-k\pi)} \quad \underbrace{\frac{e^{2az}-1}{\operatorname{senh}(az)}}_{\frac{0}{0}\ \text{(L'Hopital)}} = \frac{1}{\cosh(k\pi)} \underbrace{\lim_{z\to z_k} \frac{2a\, e^{2az}}{a\, \cosh(az)}}_{\frac{2\, e^{2k\,\pi\, i}}{\cosh(k\pi\, i)}} = \frac{1}{\cosh(k\pi)}\,\frac{2}{\cos(k\pi\,)} = \frac{2\,(-1)^k}{\cosh(k\pi)}$$

Está acotado para todo $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow z_k$ es singularidad evitable $\Longrightarrow \operatorname{Res}(f; z_k) = 0$.

En particular, $z_0 = 0$ es singularidad evitable de $f(z)$ y $\displaystyle\lim_{z\to 0} f(z) = 2$

- $\cosh(azi) = 0 \iff e^{2azi} = -1 = e^{(1+2k)\pi\, i} \iff \boxed{z_k = \dfrac{\pi}{2a}(1+2k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$ (aislados)

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} P(z) = \dfrac{e^{2az}-1}{\operatorname{senh}(az)} \text{ analítica en } z_k \text{ y } P(z_k) = \dfrac{e^{(1+2k)\,\pi}-1}{\operatorname{senh}(\pi(1+2k)/2)} \neq 0 \\ \left. \begin{array}{l} Q(z) = \cosh(azi) \text{ analítica en } z_k \text{ y } Q(z_k) = 0 \\ Q'(z_k) = i\,a\,\operatorname{senh}(az_k i) = i\,a\,i\,\operatorname{sen}(az_k) = -\,a\,(-1)^k \neq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} z_k \text{ cero simple de } Q(z) \Longrightarrow \\ z_k \text{ cero simple de } 1/f(z) \Longrightarrow \end{array} \end{array} \right.$$

$\boxed{z_k = \dfrac{\pi}{2a}(1+2k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \textbf{ polos simples de } f(z)}$

$$\boxed{\operatorname{Res}(f; z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{(-1)^{k+1}\left(e^{\pi\,(1+2k)} - 1\right)}{a\,\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}(1+2k)\right)}}$$

2. $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{f(z)}{bz}\,dz$ siendo Γ la circunferencia $|z| = R < \dfrac{\pi}{2a}$

- $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de $f(z) \Longrightarrow f(z)$ admite un desarrollo de Taylor en torno a z_0 convergente en el disco $|z| < R$, siendo R la distancia de z_0 al punto singular más cercano ($z = \dfrac{\pi}{2a}$)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad |z| < \frac{\pi}{2a} \qquad \text{con } c_0 = f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = 2$$

- $f(z)$ es analítica en Γ y su interior. *Fórmula Integral de Cauchy*:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{bz}\,dz = 2\pi i\,\frac{f(0)}{b} = \boxed{= \frac{4\pi\, i}{b}}$$