Asignatura: ______________________ Curso: ________ Grupo: ________

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso

Grupo

Auxiliar

Respuestas

Ampliación de Matemáticas (Versión 1), (21-12-2021)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+2t(2+\cos(t)))\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0)=\exp(-4x^2) \quad x\in\mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ uniformemente acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to\mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(2,2\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+32\pi(1+4\pi)}}\exp\left(-\dfrac{16}{1+32\pi(1+4\pi)}\right)$.

(2) $u(3,3\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+48\pi(1+6\pi)}}\exp\left(-\dfrac{16}{1+48\pi(1+6\pi)}\right)$.

(3) $u(4,4\pi) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{16}{1+32+64\pi(1+8\pi)}\right)}{\sqrt{1+32+64\pi(1+8\pi)}}$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 8w(t) = g(t) \ \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0)=5,$$

donde $g : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es la función definida por $g(t)=t$ si $t\in[0,\frac{1}{2}[$ y $g(t)=\frac{1}{2}$ si $t\in[\frac{1}{2},+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{22\exp(1)-1}{64\exp(1)}$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{21\exp(-1)+1}{64\exp(-1)}$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{21\exp(1)-1}{64\exp(1)}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$(1+z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^2 w = 0 \text{ en } B(0+\mathrm{i}0,1),\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = -5.$$

La solución del problema de Cauchy anterior es una función analítica $w : B(0+\mathrm{i}0,1) \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor en el punto $0+\mathrm{i}0$ es $w(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w cumple que:

(9) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w(z)+5(z+\frac{z^5}{20})}{z^7} = \dfrac{5}{42}$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(-z_1)} \neq -w(\overline{z_1})$.

(10) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w(z)+5(z+\frac{z^5}{20})}{z^7} = \dfrac{5}{42}$ y $\overline{w(-z_1)} = -w(\overline{z_1})$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$.

(11) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w(z)+5(z+\frac{z^5}{20})}{z^7} = \infty$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$(z^2+z^3)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sinh(2z)}{4}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \exp(z)w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w_{s1}(z)}{\ln(z)} = 1.$

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $w_{s2}(z) = o(z)$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} w_{s3}(z) = \infty$ y $\lim\limits_{z\to 0} \sqrt{z}\, w_{s3}(z) = 0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = 1+x \quad \text{si } x \in [-1,0], \quad u(x,0) = 1-x \quad \text{si } x \in [0,1],$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1, \quad u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times[0,+\infty[.$$

La función u verifica que:

(17) $u(-1,3) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\ln(\frac{10}{9}\frac{10}{13}) + 2\left(\arctan(\frac{2}{3}) - \arctan(\frac{1}{3})\right)\right).$

(18) $u(-1,3) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln(\frac{10}{9}\frac{10}{13}) + 2\left(\arctan(\frac{2}{3}) - \arctan(\frac{1}{3})\right)\right).$

(19) $u(-1,3) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln(\frac{10}{9}\frac{10}{13}) - 2\left(\arctan(\frac{2}{3}) - \arctan(\frac{1}{3})\right)\right).$

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t.$

Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Respuestas

Ampliación de Matemáticas (Versión 2), (21-12-2021)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+3t(2+\cos(t)))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-4x^2) \quad x\in\mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ uniformemente acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(2,2\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+32\pi(1+6\pi)}}\exp\left(-\dfrac{16}{1+32\pi(1+6\pi)}\right)$.

(2) $u(3,3\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+48\pi(1+9\pi)}}\exp\left(-\dfrac{16}{1+48\pi(1+9\pi)}\right)$.

(3) $u(4,4\pi) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{16}{1+48+64\pi(1+12\pi)}\right)}{\sqrt{1+48+64\pi(1+12\pi)}}$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 4,$$

donde $g : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = t$ si $t\in[0,\frac{1}{2}[$ y $g(t) = \frac{1}{2}$ si $t\in[\frac{1}{2},+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{(18)\exp(1)-1}{64\exp(1)}$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{(17)\exp(-1)+1}{64\exp(-1)}$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{(17)\exp(1)-1}{64\exp(1)}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso

Grupo

Auxiliar

Ampliación de Matemáticas (Versión 2)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$(1+z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^2 w = 0 \text{ en } B(0+\mathrm{i}0,1),\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = -1.$$

La solución del problema de Cauchy anterior es una función analítica $w : B(0+\mathrm{i}0,1) \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor en el punto $0+\mathrm{i}0$ es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w cumple que:

(9) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w(z) + (z + \frac{z^5}{20})}{z^7} = \dfrac{1}{42}$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(-z_1)} \neq -w(\overline{z_1})$.

(10) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w(z) + (z + \frac{z^5}{20})}{z^7} = \dfrac{1}{42}$ y $\overline{w(-z_1)} = -w(\overline{z_1})$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$.

(11) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w(z) + (z + \frac{z^5}{20})}{z^7} = \infty$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$(z^2+z^3)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sinh(2z)}{4}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \exp(z) w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w_{s1}(z)}{\ln(z)} = 1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $w_{s2}(z) = o(z)$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} w_{s3}(z) = \infty$ y $\lim\limits_{z\to 0} \sqrt{z}\, w_{s3}(z) = 0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas (Versión 2)

E. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = 1+x \quad \text{si } x \in [-1,0], \quad u(x,0) = 1-x \quad \text{si } x \in [0,1],$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1, \quad u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times[0,+\infty[.$$

La función u verifica que:

(17) $u(-1,4) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{17}{16}\dfrac{17}{20}) + 2\left(\arctan(\dfrac{1}{2}) - \arctan(\dfrac{1}{4})\right)\right).$

(18) $u(-1,4) = \dfrac{1}{\pi}\left(2\ln(\dfrac{17}{16}\dfrac{17}{20}) + 2\left(\arctan(\dfrac{1}{2}) - \arctan(\dfrac{1}{4})\right)\right).$

(19) $u(-1,4) = \dfrac{1}{\pi}\left(2\ln(\dfrac{17}{16}\dfrac{17}{20}) - 2\left(\arctan(\dfrac{1}{2}) - \arctan(\dfrac{1}{4})\right)\right).$

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t.$

Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Respuestas 1–65

Ampliación de Matemáticas (Versión 3), (21-12-2021)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+4t(2+\cos(t)))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$$u(x,0) = \exp(-4x^2) \quad x\in\mathbb{R},$$

$$u(x,t) \text{ uniformemente acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(2,2\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+32\pi(1+8\pi)}}\exp\left(-\dfrac{16}{1+32\pi(1+8\pi)}\right)$.

(2) $u(3,3\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+48\pi(1+12\pi)}}\exp\left(-\dfrac{16}{1+48\pi(1+12\pi)}\right)$.

(3) $u(4,4\pi) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{16}{1+64+64\pi(1+16\pi)}\right)}{\sqrt{1+64+64\pi(1+16\pi)}}$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 8w(t) = g(t) \quad \text{en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0)=3,$$

donde $g : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es la función definida por $g(t)=t$ si $t\in[0,\frac{1}{2}[$ y $g(t)=\frac{1}{2}$ si $t\in[\frac{1}{2},+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{(14)\exp(1)-1}{64\exp(1)}$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{(13)\exp(-1)+1}{64\exp(-1)}$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{(13)\exp(1)-1}{64\exp(1)}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso: 1 2 3 4 5

Grupo: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 A B C D E F G H I J

Auxiliar: 1–10, a b c d e

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$(1+z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - z^2w = 0 \text{ en } B(0+\mathrm{i}0,1),\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0)=1.$$

La solución del problema de Cauchy anterior es una función analítica $w : B(0+\mathrm{i}0,1) \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor en el punto $0+\mathrm{i}0$ es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w cumple que:

(9) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w(z)-(z+\frac{z^5}{20})}{z^7} = -\dfrac{1}{42}$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(-z_1)} \neq -w(\overline{z_1})$.

(10) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w(z)-(z+\frac{z^5}{20})}{z^7} = -\dfrac{1}{42}$ y $\overline{w(-z_1)} = -w(\overline{z_1})$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$.

(11) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w(z)-(z+\frac{z^5}{20})}{z^7} = \infty$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$(z^2+z^3)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sinh(2z)}{4}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \exp(z)w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w_{s1}(z)}{\ln(z)} = 1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $w_{s2}(z) = o(z)$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} w_{s3}(z) = \infty$ y $\lim\limits_{z\to 0} \sqrt{z}\, w_{s3}(z) = 0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = 1 + x \quad \text{si } x \in [-1,0], \quad u(x,0) = 1 - x \quad \text{si } x \in [0,1],$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1, \quad u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R} \times [0,+\infty[.$$

La función u verifica que:

(17) $u(1,3) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\ln(\frac{10}{9}\frac{10}{13}) + 2\left(\arctan(\frac{2}{3}) - \arctan(\frac{1}{3})\right)\right)$.

(18) $u(1,3) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln(\frac{10}{9}\frac{10}{13}) + 2\left(\arctan(\frac{2}{3}) - \arctan(\frac{1}{3})\right)\right)$.

(19) $u(1,3) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln(\frac{10}{9}\frac{10}{13}) - 2\left(\arctan(\frac{2}{3}) - \arctan(\frac{1}{3})\right)\right)$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t.$

Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Nombre:

Fecha:

Firma:

Ampliación de Matemáticas (Versión 4), (21-12-2021)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+5t(2+\cos(t)))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t)\in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-4x^2) \quad x\in\mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ uniformemente acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(2,2\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+32\pi(1+10\pi)}}\exp\left(-\dfrac{16}{1+32\pi(1+10\pi)}\right)$.

(2) $u(3,3\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+48\pi(1+15\pi)}}\exp\left(-\dfrac{16}{1+48\pi(1+15\pi)}\right)$.

(3) $u(4,4\pi) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{16}{1+80+64\pi(1+20\pi)}\right)}{\sqrt{1+80+64\pi(1+20\pi)}}$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 2,$$

donde $g : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = t$ si $t\in[0,\frac{1}{2}[$ y $g(t) = \frac{1}{2}$ si $t\in[\frac{1}{2},+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{(10)\exp(1)-1}{64\exp(1)}$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{(9)\exp(-1)+1}{64\exp(-1)}$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{(9)\exp(1)-1}{64\exp(1)}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Respuestas: 1–65

Así no marque / Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión: 1–33

Curso: 1 2 3 4 5

Grupo: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 A B C D E F G H I J

Auxiliar: 1–10, a b c d e

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$(1+z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^2 w = 0 \text{ en } B(0+\mathrm{i}0,1),\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0)=5.$$

La solución del problema de Cauchy anterior es una función analítica $w : B(0+\mathrm{i}0,1) \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor en el punto $0+\mathrm{i}0$ es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w cumple que:

(9) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - 5(z+\frac{z^5}{20})}{z^7} = -\dfrac{5}{42}$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(-z_1)} \neq -w(\overline{z_1})$.

(10) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - 5(z+\frac{z^5}{20})}{z^7} = -\dfrac{5}{42}$ y $\overline{w(-z_1)} = -w(\overline{z_1})$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$.

(11) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - 5(z+\frac{z^5}{20})}{z^7} = \infty$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$(z^2+z^3)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sinh(2z)}{4}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \exp(z)w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim_{z\to 0} \dfrac{w_{s1}(z)}{\ln(z)} = 1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $w_{s2}(z) = o(z)$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, tal que $\lim_{z\to 0} w_{s3}(z) = \infty$ y $\lim_{z\to 0} \sqrt{z}\, w_{s3}(z) = 0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = 1+x \quad \text{si } x \in [-1,0], \quad u(x,0) = 1-x \quad \text{si } x \in [0,1],$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1, \quad u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times[0,+\infty[.$$

La función u verifica que:

(17) $u(1,4) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{17}{16}\dfrac{17}{20}) + 2\left(\arctan(\dfrac{1}{2}) - \arctan(\dfrac{1}{4})\right)\right)$.

(18) $u(1,4) = \dfrac{1}{\pi}\left(2\ln(\dfrac{17}{16}\dfrac{17}{20}) + 2\left(\arctan(\dfrac{1}{2}) - \arctan(\dfrac{1}{4})\right)\right)$.

(19) $u(1,4) = \dfrac{1}{\pi}\left(2\ln(\dfrac{17}{16}\dfrac{17}{20}) - 2\left(\arctan(\dfrac{1}{2}) - \arctan(\dfrac{1}{4})\right)\right)$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t.$