E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º CTA)	D.N.I. : SOLUCIONES 1er Apellido : 2do Apellido : Nombre : PARCIAL-1	Curso 14/15 (08.07.15) Tiempo 1 h. Valor 10 puntos P-1

En los siguientes recuadros, anotar de la forma más simplificada posible la respuesta pedida en cada uno de los apartados.

A. Hallar el valor de la integral

$$I = \int_\gamma \bar{z}^2 \, \mathrm{d}z,$$

donde γ es el arco de circunferencia de radio 2 y centro el origen comprendido en el primer cuadrante y recorrido desde $z = 2 + i0$ a $z = 0 + i2$.

$z = 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi/2]$

$\bar{z}^2 = 4e^{-2i\theta}$; $dz = 2i\, e^{i\theta} d\theta$

$$I = \int_0^{\pi/2} 8i\, e^{-2i\theta} e^{i\theta} d\theta = 8i \int_0^{\pi/2} e^{-i\theta} d\theta = -8\left[e^{-i\theta}\right]_0^{\pi/2} = -8\left[e^{-i\pi/2} - 1\right] = 8(1+i)$$

$$\boxed{I = 8(1+i)}$$

B. Empezando por las potencias negativas, hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Laurent de la función

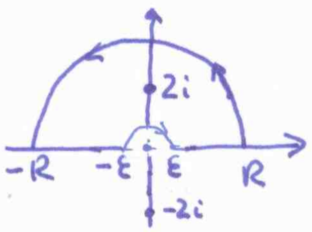
$$f(z) = \frac{\tanh z}{z^3}. = \frac{\sinh z}{z^3 \cosh z} = \frac{1}{z^2} \frac{1 + z^2/3! + z^4/5! + \cdots}{1 + z^2/2! + z^4/4! + \cdots} =$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots\right]\left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{5}{4!} z^4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[1 + \underbrace{\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right)}_{-2/3! = -1/3} z^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!2!} + \frac{5}{4!} + \cdots\right)}_{\frac{1-10+25}{5!} = \frac{16}{5!} = \frac{2}{15}} \cdots\right]$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15} z^2 + \cdots}$$

C. Hallar el valor de la integral real impropia



$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x\,(4 + x^2)} \mathrm{d}x. = \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(4+x^2)} dx\right] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(4+z^2)}, 2i\right) + \pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(4+z^2)}, 0\right)\right] =$$

$$\mathrm{Im}\left[2\pi i \frac{e^{-2}}{2i \cdot 4i} + \pi i \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi e^{-2}}{4}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi(1 - e^{-2})}{4}}$$

D. Hallar el residuo en $z = \pi$ de la función:

$$f(z) = \frac{z}{\sin z} = \frac{\pi + (z-\pi)}{-\sin(z-\pi)} = \frac{-\pi - (z-\pi)}{(z-\pi) - \frac{(z-\pi)^3}{3!} + \cdots} =$$

$$= -\frac{\pi}{(z-\pi)} - 1 + \cdots$$

$$\boxed{\mathrm{Res}(f(z), \pi) = -\pi}$$

8/7/2015

Ampliación de Matemáticas (Parte 2)

A. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) la expresión de la transformada de Laplace, $F = F(s)$, de la función:

$$f(t) = \mathrm{e}^{2\,t}\cos(2\,t), \quad t \in [0, \infty[.$$

$$\boxed{F(s) = \frac{s-2}{[s-2]^2 + 4}}$$

$$f(t) = \frac{e^{2t}[e^{i2t} + e^{-i2t}]}{2} = \frac{e^{2(1+i)t} + e^{2(1-i)t}}{2};$$

$$\mathcal{L}(e^{2at})(s) = \mathcal{L}(1)(s-2a) = \frac{1}{s-2a} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-2-2i} + \frac{1}{s-2+2i}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{s-2+\cancel{2i}+s-2-\cancel{2i}}{[s-2]^2+4}$$