Ampliación de Matemáticas
Variable Compleja (4)

Residuos

Dada una función analítica, y dada una singularidad z_0, definimos el **residuo** de f en z_0 como:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

Donde a_{-1} es el primer término de la parte principal de la serie de Laurent de f en z_0

Forma práctica de calcular los residuos:

- Si z_0 es un polo de orden 1, entonces

$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

- Si z_0 es un polo de orden m, entonces

$\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{g^{m-1}(z_0)}{(m-1)!}$ con $g(z) = f(z) \cdot (z - z_0)^m$

- Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, con $P(z_0) \neq 0$ y $Q(z_0) = 0$ de orden 1, entonces:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Teorema de los residuos: Sea f analítica en D salvo en un número finito de puntos. Sea γ curva cerrada simple orientada positivamente en D. Entonces:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, z_i)$$

Donde z_i son las singularidades (número finito) de f que están dentro de la curva γ.

Residuo en el infinito: Si f es analítica en $|z| > R$, $\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}\left(\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

Teorema de los residuos (versión del infinito): Sea γ curva cerrada simple orientada positivamente tal que f es analítica fuera de γ salvo en un número finito de puntos. Entonces:

$$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, z_i)$$

Donde z_i son las singularidades de f que están fuera de la curva γ, incluyendo el infinito. Nota: es esencial que el número de singularidades sea finito.

Aplicaciones de los residuos

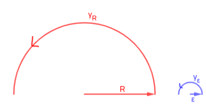
Lema 1:

$$\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ Im(z) > 0}} |zf(z)| = 0 \Rightarrow \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma R} f(z) = 0$$

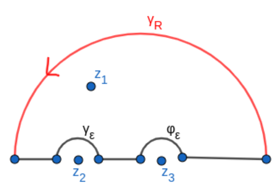
Lema 2:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) = -\pi i \mathrm{Res}(f, z_0)$$

donde γ_R es la semicircunferencia positiva de radio R y centro el origen y γ_ϵ es la semicircunferencia positiva de centro z_0 y radio ϵ:



El **Valor Principal** de una integral real se puede calcular aplicando el teorema de los residuos. Ejemplo: supongamos una función real con dos singularidades en el eje X, z_2 y z_3, y una singularidad en el semiplano superior complejo, z_1



$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_1) +$$
$$+\pi i \mathrm{Res}(f, z_2)) + \pi i \mathrm{Res}(f, z_3)$$

Algunos cambios útiles para resolver integrales:

- $\int_0^{2\pi} f(\sin(\theta), cos(\theta)d\theta$. Cambiamos a $\sin(\theta) = \frac{z-1/z}{2i}$, $\cos(\theta) = \frac{z+1/z}{2i}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ax)/p(x)dx$. Cambiamos a $e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax)$, y resolvemos dos integrales.
- $\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(ax)/p(x)dx$. Cambiamos a $\cos^2(z) = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2$