Asignatura: SOLUCIÓN Curso: ________ Grupo: ________

Respuestas

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65

Ampliación de Matemáticas (Laplace)

A. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) la expresión de la transformada de Laplace, $G = G(s)$, de la **derivada** de la función:

$$f(t) = \mathrm{e}^t \cos(3\,t), \quad t \in [0, \infty[.$$

$$\boxed{-1 + \frac{s(s-1)}{(s-1)^2+9} = \frac{s-10}{(s-1)^2+9} =} \; \frac{s-10}{s^2-2s+10}$$

$$\mathcal{L}(\cos 3t) = \frac{s}{s^2+3^2}$$

$$\mathcal{L}(e^t \cos 3t) = \frac{s-1}{(s-1)^2+9}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}(e^t \cos 3t)\right) = -e^0 \cos(3\cdot 0) + \frac{s(s-1)}{(s-1)^2+9} =$$

$$= -1 + \frac{(s-1)(s-1+1)}{(s-1)^2+9} = \frac{(s-1)-9}{(s-1)^2+9} =$$

$$= \frac{s-10}{s^2-2s+10}$$

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso

1 2 3 4 5

Grupo

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 A B C D E F G H I J

Auxiliar

1–10: a b c d e

Pregunta B

Tomando la transformada de Fourier en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (i\omega)^2(1+3t^2)\hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Integrando la ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = -\omega^2(1+3t^2)\hat{u}$ se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C e^{-\omega^2(t+t^3)}$.

Teniendo en cuenta la condición inicial de la ecuación diferencial se obtiene

$$\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\, \exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{4}+t+t^3\right)\right).$$

Teniendo en cuenta la nota del enunciado

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4(t+t^3)}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4(t+t^3)}\right).$$

Por tanto $u(0,t)+u(3,1) = \frac{1}{\sqrt{1+4(t+t^3)}} + \frac{1}{3e}$.

Pregunta C

Puesto que el coeficiente que multiplica a la derivada segunda es la unidad y, la función z^2+z^4 es entera la solución del problema de Cauchy dado en el enunciado es entera. Por tanto, $w(z) = 1+z+\sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k$.

Sustituyendo el desarrollo anterior en el enunciado se obtiene $c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = \frac{1}{4\cdot 3}$ $c_5 = \frac{1}{5\cdot 4}$. Además,

$$\sum_{k\geq 2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} = z^2\left(1+z+\sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k\right) + z^4\left(1+z+\sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k\right).$$

Igualando los términos en z^j para $j \geq 4$ se obtiene

$$c_{j+2} = \frac{c_{j-2}+c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}, \quad \text{con } c_0 = c_1 = 1,$$

$$c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{4\cdot 3}, \quad c_5 = \frac{1}{5\cdot 4}$$

Pregunta D

La función $W(z) = 1 + z + o(z^3)$ de donde

$$\lim_{z \to 0} \frac{\exp(z) - W(z)}{z^2} = \frac{1}{2}$$, Por tanto,

existe $\delta > 0$ tal que $\exp(x) \geq W(x)$ si

$x \in [0, \delta[$. Además, $c_k > 0$ si $k \geq 4$,

puesto que $\lim_{x \to +\infty} \frac{W(x)}{x^2} = +\infty$ para

x suficientemente grande no se puede

verificar $\frac{W(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} + 1$.

Pregunta E

La ecuación diferencial del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{\exp(z)}{z(1+z)}\frac{dw}{dz} + \frac{1}{9z^2(1+z)}w.$$

El punto $z=0$ es singular regular para la ecuación anterior. La solución general de la ecuación anterior es de la forma $w(z) = C_1 z^{\alpha_1} p_1(z) + C_2 z^{\alpha_2} p_2(z)$

donde α_1 y α_2 son los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}$, es decir, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ y $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$. Nótese que $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.

y que $p_1(z) = p_2(z) = 1$.

Para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z^{1/3}p_1(z)}{\sqrt[3]{z}} = 1$.

$\lim\limits_{z\to 0} \frac{w(z)}{z} = \infty$ si C_1 ó C_2 son distintos de 0.

Si $C_2 = 0$ $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w(z)}{\ln(z)} = 0$, si $C_2 \neq 0$ $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w(z)}{\ln z} = \infty$

Por tanto $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w(z)}{\ln(z)} \neq 1$, para todo $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

Pregunta F

Sustituyendo la función $u(r, \theta, t) = e^{-\alpha^2 t} J_0(\alpha r)$ en la ecuación diferencial y multiplicando la igualdad obtenida por r^2 se llega a

$$\exp(-\alpha^2 t)\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2}(J_0(\alpha r)) + r\frac{d}{dr} J_0(\alpha r) + \alpha^2 r^2 J_0(\alpha r)\right) = 0,$$

puesto que el segundo factor del primer miembro es nulo.

Puesto que la función $e^{-\alpha^2 t} J_0(\alpha r)$ verifica las condiciones iniciales y de contorno y que la solución del problema de Cauchy del enunciado es única $u(r, t) = e^{-\alpha^2 t} J_0(\alpha r)$.