E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3o. DE GRADO)	D.N.I. : SOLUCIÓN 1$^{\text{er}}$Apellido : 2$^{\text{do}}$Apellido : Nombre :	Curso 16/17 (29.06.17) Tiempo 1h. Valor 15 puntos 1a Parte

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general de la ecuación en diferencias

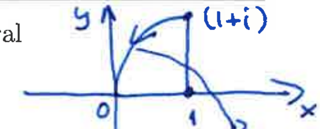
$$4\,x^{n+2} - 4\,x^{n+1} - 3\,x^n = 3.$$

$$\boxed{x^n = -1 + A\left(\tfrac{3}{2}\right)^n + B\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n}$$

Homogénea $4r^2 - 4r - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = \begin{cases} 3/2 \\ -1/2 \end{cases}$
$x^n_H = A\left(\frac{3}{2}\right)^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
Particular $x^n_p = C \Rightarrow$
$4C - 4C - 3C = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^n_p = -1$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I = \int_\Gamma z\,\bar{z}\,\mathrm{d}z,$$



$z(\theta) = 1 + e^{i\theta}$, $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

donde Γ es el cuarto de la circunferencia de radio 1 y centrada en $(1 + \mathrm{i}0)$ que va desde el afijo de $(1 + \mathrm{i})$ al origen.

$$\boxed{I = -1 + \left(\tfrac{\pi}{2} - 2\right) i}$$

$I = \int_{\pi/2}^{\pi} (1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})\, i e^{i\theta} d\theta =$
$= i\int_{\pi/2}^{\pi} (1+e^{i\theta})(e^{i\theta}+1)\, d\theta =$
$= i\int_{\pi/2}^{\pi} (1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta})\, d\theta =$
$= i\left[\theta + \frac{2e^{i\theta}}{i} + \frac{e^{2i\theta}}{2i}\right]_{\pi/2}^{\pi} =$
$= i\left[\frac{\pi}{2} + 2i - 2 + \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i}\right] = \frac{\pi}{2}i - 1 - 2i$

C. **(3 puntos)** Sea la función de dos variables definida como

$$u(x, y) = (x^2 - y^2)(1 + x) + a\,x\,y^2,$$

donde a es un número real. Se pide anotar en el siguiente recuadro el valor de a para el que la función u es la parte real de una función analítica, asi como la correspondiente funcion armonica conjugada, $v = v(x, y)$, que se anula en el origen.

$a = -2$
$v = (2xy + 3x^2y - y^3)$
$(f(z) = u + iv = z^2 + z^3)$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x(1+x) + (x^2-y^2) + ay^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + 6x$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y(1+x) + 2axy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 - 2(1-a)x$

$\Delta u = (4+2a)x = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow v = 2xy + 3x^2y - y^3 + h(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 6xy + h'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6xy \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = A = 0$

$f'(z) = u_x + i v_x = (2x + 3x^2 - 3y^2) + i(2y + 6xy) = 2z + 3z^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f(z) = z^2 + z^3}$

SOLUCIÓN

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el residuo en $z = \pi$ de la función

$$f(z) = \frac{z-\pi}{(\sin(2z))^2}.$$

$$\boxed{\operatorname{Res}(f(z),\pi) = \frac{1}{4}}$$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I = \int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{3}\left[e^{-2} - \frac{e^{-4}}{2}\right]}$$

Pregunta D

$$f(z) = \frac{z-\pi}{(\sin(2z))^2} = \frac{z-\pi}{(\sin(2(z-\pi)))^2} = \frac{(z-\pi)}{\left(2(z-\pi) - \frac{8(z-\pi)^3}{3!} + \cdots\right)^2} =$$

$$= \frac{(z-\pi)}{4(z-\pi)^2\left[1 - \frac{4(z-\pi)^2}{3!}\right]^2} \Rightarrow \lim_{z\to\pi} f(z)(z-\pi) = 1/4 = \operatorname{Res}(f(z),\pi)$$

Pregunta E

$$I = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i2z}}{(z^2+1)(z^2+4)}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i2z}}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i\right)\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{-2}}{2i\cdot 3} + \frac{e^{-4}}{(-3)\cdot 4i}\right] = \frac{\pi}{3}\left[e^{-2} - \frac{e^{-4}}{2}\right]$$

A

Tomando transformadas de Laplace en la ecuación diferencial y teniendo en cuenta las condiciones iniciales

$$(z^2+2z+3)\mathcal{L}(w)(z) = (z+2) + \mathcal{L}(g(t))(z).$$

Además, $\mathcal{L}(g(t))(z) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_0^1 (1-t)\, e^{-zt} = \frac{1}{z} + \frac{e^{-z}-1}{z^2}$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(w)(z) = \frac{1}{(z+1)^2+2}\left(2+z+\frac{1}{z}+\frac{e^{-z}-1}{z^2}\right),$$

de donde $\mathcal{L}(w)(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6e}$.

(3) De acuerdo con las condiciones del enunciado

$W(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - (z+z^4) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k+4} = 0$$

de donde $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{3\cdot 2}$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$ $c_6 = \left(1 + \frac{1}{3\cdot 2}\right)\frac{1}{5\cdot 4}$

$c_7 = 0$, $c_8 = 0$ y $c_{k+6} = \frac{1}{(k+6)(k+5)}(c_{k+3} + c_k)$. $k \geq 3$. Teniendo

en cuenta el valor de $c_0, \ldots c_8$,

$$c_{3l} = \frac{1}{(3l)(3l-1)}\left(c_{3(l-1)} + c_{3(l-2)}\right) \quad l \geq 3, \quad c_{3l} > 0, \; c_{3l+1} = 0,$$

y $c_{3l+2} = 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$. La función w

es entera y no es ni par ni impar.

(c) Al ser $c_k \geq 0$ $\frac{dw}{dz}(z) > 0$ si $z \in]1, +\infty[$. Por tanto w es monótona creciente en $]1, +\infty[$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$

$c_{3n} > 0$, $c_{3n} x^{3n} < w(x)$ para todo $x \in]0, +\infty[$. Por tanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c_{3n}\, 3n\, x^{3n-1}}{x^n} = +\infty < \lim_{x \to +\infty} \frac{w(x)}{x^n} = +\infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ⓓ La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z\exp(z)}\frac{dw}{dz} - \frac{(1+z)^2}{4z\ln(1+z)\exp(z)}w$$

$z=0$ es un punto singular regular. En un entorno del origen la solución está determinado por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda = \frac{1}{2}$ doble. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma

$$w(z) = C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\left(\sqrt{z}\ln z\, p_1(z) + \sqrt{z}\,p_2(z)\right)$$

donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un entorno del origen con $p_1(0)=1$. En consecuencia, para $C_1=0$, $C_2=1$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{z}\ln z\, p_1(z) + \sqrt{z}\,p_2(z)}{\sqrt{z}\ln z} = 1.$$

(E) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(J_1(x)) - J_1(x)}{J_3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{J_1(x) - \frac{J_1^3(x)}{3!} + o(x^3) - J_1(x)}{J_3(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3}{\frac{1}{\Gamma(4)}\left(\frac{x}{2}\right)^3} = -1.$$