Teoría de ecuaciones en diferencias

Definiciones

Una **ecuación en diferencias** de orden p es una ecuación que relaciona los p+1 términos consecutivos de una sucesión.

En forma implícita: $F(y^{n+1}, y^n, \dots, y^{n+1-p}, n) = 0$

La **solución** de una ecuación en diferencias es una **sucesión de números reales** y^n tal que satisfagan la ecuación (y las condiciones iniciales, si las hay).

Es a las sucesiones lo que las ecuaciones diferenciales para las funciones de una variable real. De hecho, a menudo aparecen en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Dadas las condiciones iniciales y la ecuación de recurrencia, si la ecuación siempre tiene solución (es decir, si siempre permite encontrar el término enésimo en función de los anteriores), la **solución teórica** siempre existe. No obstante, estaremos interesados en encontrar **soluciones explícitas** (el término general de la sucesión solución, en función de n). No siempre será posible; en lo que queda veremos casos en los que sí se puede encontrar, y las técnicas para ello.

Casos que tienen solución explícita

Ecuación lineal de primer orden

Es una ecuación con la siguiente forma:

$$y^{n+1} = \underbrace{Q(n)}_{\text{coeficiente}} \cdot y^n + \underbrace{G(n)}_{\text{forzante}}$$

El coeficiente, en general, no es constante.

La **ecuación homogénea** asociada es:

$$y^{n+1} = Q(n) \cdot y^n$$

La **solución general** puede escribirse como:

$$y^n = y_H^n + y_p^n \rightarrow \text{Sol. particular}$$

↳ Sol. general de la homogénea

Donde:

- $y_H^n = a \prod_{i=0}^{n-1} Q(i)$, con $a \in \mathbb{R}$ cualquiera.

- y_p^n se obtiene por el **método de variación de las constantes**. Este método consiste en escribir a como una sucesión a = a(n) e imponer que se satisfaga la ecuación:

$$y_p^n = a(n) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} Q(i) \Rightarrow a(n) = \sum_{j=0}^{n-1} G(j) \cdot \prod_{i=0}^{j} 1/Q(i)$$

Ecuación lineal de orden p con coeficientes constantes

Es una ecuación con la siguiente forma:

$$y^{n+1} + a_n y^n + \dots + a_{n-p} y^{n+1-p} = G(n)$$

La **solución general**, como antes, puede escribirse como:

$$y^n = y_H^n + y_p^n \rightarrow \text{Sol. particular}$$

$\hookrightarrow$ Sol. general de la homogénea

Donde:

- y_H^n tiene una expresión que depende de las raíces del **polinomio característico**.

  El **polinomio característico** es $\lambda^p + a_n \lambda^{p-1} + \dots + a_{n-p} = 0.$

  Lo fundamental es que cada raíz, de multiplicidad r, da lugar a r soluciones independientes, y la solución general de la homogénea será la combinación lineal (con coeficientes indeterminados) de todas las p diferentes soluciones.

  En función de las raíces, hay dos casos posibles:

  - Caso 1: raíz real de multiplicidad r. Las r soluciones que da son:

    $$\{\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \dots, n^{r-1}\lambda^n\}$$

  - Caso 2: raíz compleja conjugada de multiplicidad r. Las 2r soluciones que da son:

    $$\text{Si } \lambda = \rho e^{i\theta}, \{\rho^n \cos(n\theta), \dots, n^{r-1}\rho^n \cos(n\theta), \rho^n \operatorname{sen}(n\theta), \dots, n^{r-1}\rho^n \operatorname{sen}(n\theta)\}$$

  Por ser uno de los casos más sencillos, pongamos la solución general de la homogénea cuando hay p raíces reales distintas:

  $$\text{Si } \lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ son las } p \text{ raíces,}$$

  $$y_H^n = c_1\lambda_1^n + \dots + c_p\lambda_p^n, \text{ con } c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R} \text{ cualesquiera}$$

- Por su parte, la **solución particular** sólo puede calcularse en determinados casos:

  $$\text{Si } G(n) = P_1^*(n)\, r_1^n + \dots + P_w^*(n)\, r_w^n, \text{ con}$$

  $$P_k^*(n) = B_{1,k} + B_{2,k} \cdot n + \dots + B_{\beta_k+1,k} \cdot n^{\beta_k}, \text{ con } B_{i,k} \in \mathbb{R}$$

  Buscaremos soluciones de la forma:

  $$y_p^n = Q_1(n)\, r_1^n + \dots + Q_w(n)\, r_w^n$$

  Donde los $Q_k(n)$ son polinomios de grado β_k (salvo que r_k sea raíz del polinomio característico, en cuyo caso probaremos con polinomios $Q_k(n)$ de grado $\beta_k + \alpha_k$, donde α_k es la multiplicidad de la raíz).

  Un caso particular muy frecuente es cuando $G(n) = a \cdot r^n$ con r distinto de las raíces del polinomio característico. En ese caso probaremos con $y_p^n = C \cdot r^n$.

Sistema lineal de coeficientes constantes

En esta ocasión, la incógnita no es una sucesión de números reales sino una sucesión de vectores. La ecuación general es de esta forma:

$$\vec{y}^{\,n+1} = A\vec{y}^{\,n} + G(n), \text{ donde } \vec{y}^{\,n} \in \mathbb{R}^k, A \in \mathbb{R}^{k\times k}, G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

La **solución general**, como hasta ahora, es:

$$y^n = y_H^n + y_p^n \to \text{Sol. particular}$$

$\hookrightarrow$ Sol. general de la homogénea

Donde:

- $\vec{y}_H^n = A^n \cdot \vec{C}$, con $\vec{C} \in \mathbb{R}^K$ vector de constantes
- $\vec{y}_P^n = \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} \cdot G(i)$

Para poder dar una expresión más simplificada **diagonalizaremos la matriz** (en caso de que sea posible). Si la matriz A es diagonalizable, esto es, si existe un cambio de base P y una matriz diagonal D tal que

$$A = PDP^{-1}$$

Entonces, las potencias de A son sencillas de calcular: $A^n = PD^nP^{-1}$

En concreto, esto quiere decir que, si λ_j son los autovalores y $\vec{v}_j$ los autovectores, la solución general es de la forma siguiente:

$$\vec{y}_H^n = c_1 \lambda_1^n \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_K \cdot \lambda_K^n \cdot \vec{v}_K$$

Esto viene de escribir el vector de constantes en la base de autovectores.

Nota: Una ecuación lineal de orden p se puede convertir en un sistema lineal de coeficientes constantes haciendo el siguiente cambio:

$$\vec{U}^n = \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^{n+p-1} \end{pmatrix} \Rightarrow A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_{n-p} & & \cdots & & -a_1 \end{pmatrix}$$