Ampliación de Matemáticas
Transformadas de Laplace

Transformada de Laplace

Dada una función $f : [0, \infty] \to \mathbb{C}$ de orden exponencial (es decir, $\exists\, a, c > 0 : \forall t \in [0, \infty] |f(t)| \leq c \cdot e^{at}$), su **transformada de Laplace** es:

$$\mathfrak{L}(f(t))(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt$$

Se trata de un operador lineal.

$\mathfrak{L}(f) : D \to \mathbb{C}$, donde D es una región del plano complejo llamada **región de convergencia**. Esta región es siempre de la forma $D = \{Re(z) > a\}$, con a determinado por el crecimiento exponencial de f.

La **transformada inversa** se define como:

$$\mathfrak{L}^{-1}(F(z))(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \to \infty} \int_{b-ih}^{b+1h} e^{zt} F(z) dz$$

Donde b se elige de manera que la recta $Re(z) = b$ esté dentro de la región de convergencia (dicha región no puede contener ningún polo de F).

La manera operativa de calcular la transformada inversa es aplicando el Teorema de los Residuos: Si F tiene un número finito de singularidades aisladas (no esenciales), y si $lim_{|z| \to \infty} z \cdot F(z) = 0$, entonces podemos calcular la transformada inversa así:

$$\mathfrak{L}^{-1}(F(z))(t) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(F(z) e^{zt}, z_k)$$

Donde recorremos todos los polos de la función F.

La **función de Heaviside** se define como:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Veamos algunas transformadas importantes:

$$\mathfrak{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{z^{n+1}} \text{ , } \mathfrak{L}\left[t^p\right] = \frac{\Gamma(p+1)}{z^{p+1}} \text{ si p} \notin \mathbb{Z}$$

$$\mathfrak{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{z+a}$$

$$\mathfrak{L}\left[\sin(at)\right] = \frac{a}{z^2+a^2} \text{ , } \mathfrak{L}\left[\cos(at)\right] = \frac{z}{z^2+a^2}$$

$$\mathfrak{L}\left[\sinh(at)\right] = \frac{a}{z^2-a^2} \text{ , } \mathfrak{L}\left[\cosh(at)\right] = \frac{z}{z^2-a^2}$$

Propiedades ($\boldsymbol{F}$ denota $\boldsymbol{\mathfrak{L}(f)}$):

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(s) ds\right] = \frac{1}{z} F(z)$$

$$\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](z) = \int_t^{\infty} F(w) dw$$

$$\mathfrak{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$$

$$\mathfrak{L}\left[t^n f(t)\right](z) = (-1)^n F^(n)(z)$$

$$\mathfrak{L}\left[e^(at) f(t)\right](z) = F(z-a)$$

$$\mathfrak{L}\left[f(t-a) H(t-a)\right](z) = e^{-az} F(z)$$

$$\mathfrak{L}\left[f(at)\right](z) = \frac{1}{a} F\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\mathfrak{L}\left[f(t) \sin(wt)\right](z) = \frac{1}{2i}\left[F(z-iw) - F(z+iw)\right]$$

$$\mathfrak{L}\left[f(t) \cos(wt)\right](z) = \frac{1}{2}\left[F(z-iw) + F(z+iw)\right]$$

$$\mathfrak{L}\left[f * g\right](z) = F(z) \cdot G(z) \text{ , donde}$$

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-s) g(s) ds$$

Aplicaciones

$aw_{tt} + bw_t + cw = g$, con a, b y c constantes

La ecuación se resuelve aplicando Laplace a ambos lados, lo que da:

$$a[z^2 \hat{w} - zw(0) - w'(0)] +$$
$$+ b[z\hat{w} - w(0)] + c\hat{w} = \hat{g}$$

Y de ahí podemos despejar la solución para después aplicar la transformada inversa.

Otra aplicación relacionada es el problema de Laplace con condición de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Que se resuelve con la siguiente integral:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt$$