AmM-EXP2-1415-Segundo examen par...

Wiskas

Ampliación de Matemáticas

3º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Nombre:

Fecha:

Firma:

Ampliación de Matemáticas (Versión 1), (19-12-2014)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad \text{para } (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$$

$$u(x,0)=\exp(-x^2)\quad x\in\mathbb{R},\quad u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t\in]0.+\infty[.$$

Sea $\hat{u}:\mathbb{R}\times]0,+\infty[\to\mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u, es decir $\hat{u}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(\omega,t)=\sqrt{\pi}\exp(-\mathrm{i}\omega^3 t-\frac{\omega^2}{4})$.

(2) $\hat{u}(\omega,t)=\sqrt{\pi}\exp(\mathrm{i}\omega^3 t-\frac{\omega^2}{4})$.

(3) $\hat{u}(\omega,t)=\sqrt{\pi}\exp(-\omega^3 t-\frac{\omega^2}{4})$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-x^2))=\sqrt{\pi}\exp(-\frac{\omega^2}{4})$.

D. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-(1+z^2)w=0 \text{ en } \mathbb{C},$$

$$w(0)=1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0)=1.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kz^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(5) $c_0=1, c_1=1$, y $c_{j+2}=\dfrac{c_j-c_{j-2}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j\geq 2$.

(6) $c_0=1, c_1=1$, y $c_{j+2}=\dfrac{c_j-c_{j-2}}{(j+1)j}$ para todo $j\geq 2$.

(7) $c_2=\frac{1}{2}, c_3=\frac{1}{6}$, y $c_{j+2}=\dfrac{c_j+c_{j-2}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j\geq 2$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Sea $w:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D. Sobre la función w puede afirmarse que:

(9) Para todo $x\in\mathbb{R}$ con $x>0$ se verifica que $\exp(x)\leq w(x)$.

(10) Para todo $x\in\mathbb{R}$ con $x>0$ se verifica que $w(x)\leq\exp(x)+x$.

(11) Para todo $x\in\mathbb{R}$ con $x>0$ se verifica que $x\leq w(x)\leq 2+x^2$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

F. Considérese la ecuación diferencial

$$z(2+z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+2(1+z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\sqrt{2}w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, distinta de la función nula, analítica en $B((0+\mathrm{i}0),2)$ y tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z}=0$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_2(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\ln(z)}=1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_1(z)-z}{z}=0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

G. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\quad \text{para } (r,\theta,t)\in[0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(1,\theta,t)=0\quad(\theta,t)\in[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(r,\theta,0)=J_1(\alpha r)\sin(\theta),\quad (r,\theta)\in[0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0)=0,\quad (r,\theta)\in[0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde α es un número real mayor que cero tal que $J_1(\alpha)=0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t)=\sin(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty}w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r)$ donde (λ_{m1}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.

(18) $u(r,\theta,t)=\cos(\alpha^2t)J_1(\alpha r)\sin(\theta)$.

(19) $u(r,\theta,t)=\cos(\alpha t)J_1(\alpha r)\sin(\theta)$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E.T.S.I. Aeronáuticos Matemática Aplicada y Estadística AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1erApellido : 2doApellido : Nombre :	Curso 14/15 (19.12.14) Tiempo 30 m. Valor 6 puntos P-1

No se pueden utilizar ni libros ni apuntes

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{1}{1+s^3}.$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{3}\left[e^{-t} - e^{t/2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\, e^{t/2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]}$$

B. **(3 puntos) En lo que queda de página esquematizar** los pasos dados para llegar al resultado anterior:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s^3}\right)(t) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{st}}{1+s^3}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{st}}{1+s^3}, 1_{\pi/3}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{st}}{1+s^3}, 1_{-\pi/3}\right) =$$

Los nºs complejos -1, $1_{\pi/3}$, $1_{-\pi/3}$ son las raíces cúbicas de -1, que son los únicos polos de $\frac{1}{1+s^3}$. Además, son polos simples, por lo que los anteriores residuos pueden ser calculados con la fórmula

$$\operatorname{Res}\left(\frac{p(s)}{q(s)}, z_j\right) = \frac{p(z_j)}{q'(z_j)}, \text{ luego:}$$

$$f(t) = \left.\frac{e^{st}}{3s^2}\right|_{s=-1} + \left.\frac{e^{st}}{3s^2}\right|_{s=1_{\pi/3}} + \left.\frac{e^{st}}{3s^2}\right|_{s=1_{-\pi/3}}$$

Expresión que se puede simplificar porque $(1_{\pi/3})^* = 1_{-\pi/3}$ y por tanto $\left(\frac{e^{1_{\pi/3}t}}{3(1_{\pi/3})^2}\right)^* = \left(\frac{e^{1_{-\pi/3}t}}{3(1_{-\pi/3})^2}\right)$. y

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{3} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{e^{1_{\pi/3}t}}{3(1_{\pi/3})^2}\right] = \frac{e^{-t}}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{Re}\left[\left(\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{-t} - e^{t/2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\, e^{t/2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$$

Pregunta C

Tomando la transformada de Fourier en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + (i\omega)^3 \hat{u} = 0$, donde $\hat{u}(\omega, t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Integrando la ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = i\omega^3 \hat{u}$ se obtiene $\hat{u} = C e^{i\omega^3 t}$.

Teniendo en cuenta la condición inicial de la ecuación diferencial y la nota del enunciado $C = \mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)$.

Por tanto, $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi}\exp\left(i\omega^3 t - \frac{\omega^2}{4}\right)$.

Pregunta D

La ecuación del enunciado está escrita en forma canónica. Puesto que los coeficientes de la ecuación son enteros la solución del problema de Cauchy dado en el enunciado es entera. Por tanto, $w(z) = 1 + z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$, la ecuación proporciona el valor de $c_2 = \frac{1}{2}$. Sustituyendo el desarrollo anterior se obtiene que $c_3 = \frac{1}{6}$ y que para $j \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} = 1 + z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k + z^2 + z^3 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k+2}.$$

Igualando los coeficientes en z^j se obtiene

$$c_{j+2} = \frac{c_j + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)} \quad \text{si} \quad j \geq 2.$$

Pregunta E

En virtud de la recurrencia obtenida en la pregunta D $C_k > 0$ para todo $k \geq 0$. Además, $C_{k+2} > \frac{C_k}{(k+2)(k+1)}$, por consiguiente

$$1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{1}{4\cdot 3}z^4+\sum_{k=5}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \exp(z)+\frac{z^4}{12} < W(z)$$

para todo $z \in \mathbb{R}$ con $z > 0$. En consecuencia, la respuesta 9 es cierta y la 10 y la 11 son falsas para $z>0$ suficientemente grande.

Pregunta F

La ecuación diferencial del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{z}\frac{2(1+z)}{(2+z)} - \frac{1}{z}\frac{\sqrt{2}\,z}{2+z}.$$

El punto $z=0$ es singular regular para la ecuación anterior. El comportamiento de las soluciones en un entorno de $z=0$ está dado por los autovalores de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda=0$ doble. En virtud del teorema de existencia de solución para este tipo de soluciones la solución general de la ecuación es de la forma $w(z)=C_1\,p_1(z)+C_2\,(p_1(z)\ln z+p_2(z))$, donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en $D\supset B(0{+}i0,2)$ con $p_1(0)=1$ y $p_2(0)=0$. Por tanto,

$$\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{\ln z}=C_2,\quad \lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{C_1}{z}+\frac{C_2\ln z}{z}=$$

$$\begin{cases} 0 \text{ si } C_1=C_2=0, \text{ y por tanto, } w(z) \text{ es nula.} \\ \infty \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{y } \lim_{z\to 0}\frac{w(z)-z}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{C_1}{z}+C_2\frac{\ln z}{z}-1=\begin{cases} -1 \text{ si } C_1=C_2=0 \\ \infty \text{ en caso contrario,} \end{cases}$$

. Haciendo $C_2=1$ se obtiene existe una solución tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{\ln z}=1$.

Pregunta G

Sustituyendo la función $u(r,\theta,t) = \cos\alpha t\, J_1(\alpha r)\, \text{sen}\,\theta$ en la ecuación diferencial y multiplicando por r^2 la ecuación que se obtiene se llega a

$$\cos(\alpha t)\, \text{sen}(\theta) \left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} J_1(\alpha r) + r \frac{d}{dr} J_1(\alpha r) + (\alpha^2 r^2 - 1) J_1(\alpha r) \right) = 0.$$

La ecuación anterior se verifica para todo $(r,\theta,t) \in [0,1[\times]-\pi,\pi] \times]0,+\infty[$, puesto que $J_1(\alpha r)$ es solución de la ecuación diferencial.

La función $\cos\alpha t\, J_1(\alpha r)\, \text{sen}\,\theta$ verifica las condiciones iniciales y de contorno, en virtud de la unicidad de solución del problema de Cauchy su solución es

$$u(r,\theta,t) = \cos\alpha t\, J_1(\alpha r)\, \text{sen}\,\theta.$$