E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : ____ 1er Apellido : SOLUCIÓN 2do Apellido : ____ Nombre : ____	Curso 15/16 (29.10.15) Tiempo 1h. 45 m. Valor 20 puntos **1er Parcial**

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$4\,x^{n+2} + 4\,x^{n+1} + x^n = 2^{n+3},$$

que cumple $x^0 = x^1 = 0$.

Ec. característica $4r^2+4r+1=0 \Rightarrow r=-\frac{1}{2}$ doble

Sol particular probando con $C\,2^n \Rightarrow x_p^n = \frac{8}{25}2^n$

$x_H^n = A(-\tfrac{1}{2})^n + Bn(-\tfrac{1}{2})^n$

$x^n = \frac{8}{25}2^n + A(-\tfrac{1}{2})^n + Bn(-\tfrac{1}{2})^n$

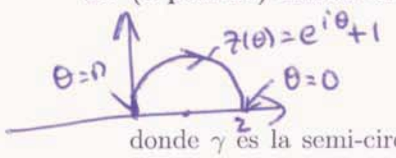
$x^0 = \frac{8}{25} + A = 0$

$x^1 = \frac{16}{25} - \frac{A+B}{2} = 0$

$A = -\frac{8}{25}\,;\ B = \frac{8}{5}$

$$\boxed{x^n = \frac{8}{25}\left[-(-\tfrac{1}{2})^n + 5n(-\tfrac{1}{2})^n + 2^n\right]}$$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral



$$I = \int_\gamma |z|^2\,\mathrm{d}z, = \int_\pi^0 z\bar z\,dz = \int_\pi^0 (1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})\,i e^{i\theta} d\theta =$$

donde γ es la semi-circunferencia de centro $1 + \mathrm{i}\,0$ y radio unidad que empieza en el origen y termina en $2 + \mathrm{i}\,0$ (NOTA.- Ojo con la orientación y, si es necesario, téngase en cuenta que $\int_0^\pi \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \pi/2$.)

$$= -i\int_0^\pi (e^{2i\theta} + 2e^{i\theta} + 1)\,d\theta = -i\left[\frac{e^{2i\theta}}{2i} + 2\frac{e^{i\theta}}{i} + \theta\right]_0^\pi = -\frac{e^{i2\pi}}{2} - 2e^{i\pi} - i\pi + \frac{1}{2} + 2 = 4 - i\pi$$

$$\boxed{I = 4 - i\pi}$$

C. **(5 puntos)** Sea la función real de dos variables definida en todo $\mathbb{R}^2$ como

$$u(x, y) = x^3 + b\,x - a\,x\,y^2 + c,$$

donde a, b y c son números reales. Se pide hallar los valores de a, b y c para los que se cumplen simultáneamente las condiciones:

i) la función $u = u(x, y)$ es la parte real de una función analítica $f = f(z)$, $\Delta u = 6x - 2ax = 0$ $\boxed{a=3}$

ii) $f(-1) = 0$, $\mathrm{Re}(f(-1)) = u(-1,0) = 0 \Rightarrow -1 - b + c \Rightarrow c = 1+b$

iii) el residuo en $z = 0$ de la función $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ es 1. $\Rightarrow f(0)=1\ ;\ \mathrm{Re}(f(0)) = u(0,0) = c = 1+b = 1 \Rightarrow$ $\boxed{b=0,\ c=1}$

Anotar en el siguiente recuadro tanto los valores de a, b y c como la expresión analítica de f en función de z.

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2$ $(u_y = -v_x)$

$\Rightarrow v = 3x^2y - y^3 + Cte$

pero $\mathrm{Im}(f(0)) = v(0,0) = 0$

$\Rightarrow Cte = 0.$

$$\boxed{\begin{array}{c} a=3, \quad b=0, \quad c=1 \\ f(z) = z^3 + 1 \end{array}}$$

$f(z) = 1 + x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \Rightarrow$

$f'(z) = 3(x^2 - y^2) + i\,6xy \Rightarrow$

$f''(z) = 6x + i6y = 6z \Rightarrow \boxed{f(z) = z^3 + 1}$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

Solución 29-10-2015 (Continua)

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia R y los tres términos de menor orden y no nulos del desarrollo en serie de McLaurin (en $z=0$) de la función

$$\frac{-e^z}{1-z^3} = -\left[1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots\right]\left[1+3z+6z^2+\dots\right] = f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3} = \frac{-e^z}{(1-z)^3}$$

$$= -\left[1+4z+\left(6+\tfrac{1}{2}+3\right)z^2+\dots\right] = -1-4z-\frac{19}{2}z^2+\dots$$

$$\boxed{f(z) = -1-4z-\frac{19}{2}z^2+\dots \qquad R=1}$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{1-z}\right] = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[1+z+z^2+\dots+z^n+\dots\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[1+2z+3z^2+4z^3+\dots+nz^{n-1}+\dots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2+2\cdot3z+3\cdot4z^2+\dots+(n-1)nz^{n-2}+\dots\right]$$

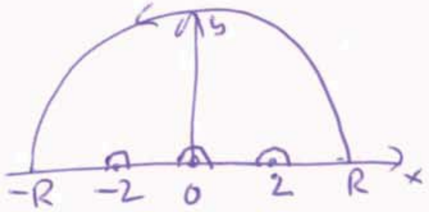
$$= \left[1+3z+6z^2+\dots+\frac{(n-1)n}{2}z^{n-2}+\dots\right]$$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia exterior R_e y los tres términos de la parte principal (términos potenciales de exponente negativo) del desarrollo en serie Laurent de la función del apartado ***D*** en $z=1$.

$$f(z) = e\,\frac{e^{(z-1)}}{(z-1)^3} = e\left[\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}+\dots\right]$$

$$\boxed{f(z) = \frac{e}{(z-1)^3}+\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{2(z-1)}+\dots \qquad R_e=\infty}$$

F. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real impropia



$$I = \text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2x}}{x(4-x^2)}dx. = \text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-e^{i2x}}{x(x-2)(x+2)} =$$

$$= i\pi\left[\text{Res}[f,-2]+\text{Res}[f,0]+\text{Res}[f,2]\right]$$

$$= i\pi\left[\frac{-e^{-4i}}{-2(-4)}+\frac{-1}{-4}+\frac{-e^{4i}}{2\cdot4}\right] =$$

$$= i\pi\left[\frac{1}{4}-\frac{e^{4i}+e^{-4i}}{8}\right] =$$

$$= i\frac{\pi}{4}\left[1-\cos 4\right]$$

$$\boxed{I = i\frac{\pi}{4}\left[1-\cos 4\right]}$$
