



Ampliación de Matemáticas Variable Compleja (3)

Integración

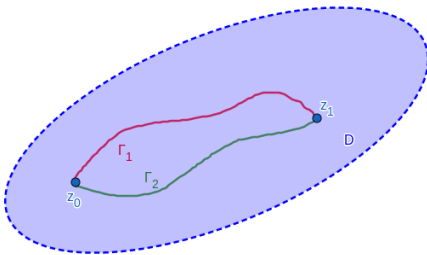
Dada una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ compleja (no necesariamente analítica) y una curva Γ , definimos su **integral de línea** como:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Donde $\gamma(t)$ es una parametrización cualquiera de la curva Γ . Veamos algunas propiedades importantes.

- El resultado **no depende** de la parametrización (está bien definida).
- Dado un dominio simplemente conexo D , dos puntos z_0 y z_1 de D , y dadas dos curvas Γ_1 y Γ_2 uniendo ambos puntos, ambas en D , si la función f es analítica en D , entonces la integral **no depende del camino**:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$



- Si D es un dominio simplemente conexo y f es una función analítica en D , entonces la integral sobre cualquier curva cerrada de D es 0:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0, \forall \gamma \subset D$$

Nota: esto permite definir una **primitiva** de f :

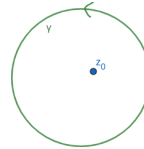
$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$$

Donde la integral se realiza tomando cualquier curva que una z_0 con z

Teorema de Cauchy

Si f es una función analítica en un dominio D , γ es una circunferencia en D orientada de manera antihoraria, y z_0 es un punto cualquiera del interior de la circunferencia, entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



Nota: este teorema es un caso particular del teorema de los residuos.

Ceros y singularidades

Una función analítica f tiene un **cero de orden m** en z_0 si:

$$f(z_0) = \dots = f^{m-1}(z_0) = 0, f^m(z_0) \neq 0$$

Una función analítica en todos los puntos de un entorno de z_0 salvo en z_0 se dice que tiene una **singularidad aislada** en z_0 . Las singularidades aisladas pueden ser:

- **Evitable:** Cuando

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ y es finito}$$

- **Polo de orden m:** Cuando $(z - z_0)^m f(z)$ es analítica en z_0 , pero $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ no. En ese caso, se cumple que

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

- **Esencial:** Cuando

$$\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$