AmM-SegundoParcial-17-w.pdf

Fibonacci_

Ampliación de Matemáticas

3º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

Ampliación de Matemáticas (Versión 1),

(22-12-2017)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+2t)u \quad \text{en}(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$$u(x,0) = x\exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(1,1) = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{\pi}}{4}\exp(\frac{3}{2})$. (2) $\hat{u}(2,2) = -\mathrm{i}\sqrt{\pi}\exp(-3)$.

(3) $\hat{u}(4,4) = -\mathrm{i}2\sqrt{\pi}\exp(-24)$. (4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = t(t-1)$ si $t \in [0,1[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [1,+\infty[$. Sobre la transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ se puede afirmar que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{2-\exp(-2)}{40}$. (6) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{20}$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{\exp(-2)}{40}$. (8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (\mathrm{i}z^2 + z^4)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = \mathrm{i}.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_j, verifican la igualdad $c_{j+2} = \frac{\mathrm{i}c_{j-2} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $j \geq 5$ y $\mathrm{Re}(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(10) Los coeficientes c_{2j}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $\mathrm{Re}(c_{2j+1}) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y $\mathrm{Re}(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(11) Los coeficientes c_j, verifican la igualdad $c_{j+2} = \frac{\mathrm{i}c_{j-2} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $j \geq 5$ y existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(w(x_0)) \neq 0$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Asignatura: ______________________ Curso: ________ Grupo: ________

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso

Grupo

Auxiliar

Respuestas

Ampliación de Matemáticas (Versión 1)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\frac{(1+z)^2}{2\sin(z)}w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\ln(z)}=1.$

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_1(z)-z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=0.$

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=0.$

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{1}{x^4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)+4w=0,\qquad \text{en }]0,+\infty[.$$

Sobre las soluciones reales de la ecuación anterior, $w:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, que además cumplen la condición $|\lim_{x\to 0^+} w(x)|<+\infty$ puede afirmarse que:

(17) Existen y son de la forma $w(x)=\frac{C}{x\sqrt{x}}J_{\frac{3}{2}}(2x)$ donde $C\in\mathbb{R}$.

(18) Existen y son de la forma $w(x)=\frac{C}{x^2\sqrt{x}}J_{\frac{3}{2}}(x)$ donde $C\in\mathbb{R}$.

(19) Existen y son de la forma $w(x)=C\sqrt{x}J_{-\frac{3}{2}}(2x)$ donde $C\in\mathbb{R}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Examen 22/12/2017

A. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+2t)\,u$$

$$u(x,0) = x\exp(-x^2)$$

$$\underbrace{\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right](\omega)}_{\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t)} = \underbrace{\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right](\omega)}_{-\omega^2\hat{u}(\omega,t)} + \underbrace{(1+2t)\cdot\mathcal{F}\left[u(x,t)\right](\omega)}_{(1+2t)\,\hat{u}(\omega,t)}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \hat{u}\,(-\omega^2+1+2t) \longrightarrow \int\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = \int(-\omega^2+1+2t)\,dt$$

$$\ln(\hat{u}) = -\omega^2 t + t + t^2 + G_1 \rightarrow \hat{u} = G_1\exp(-\omega^2 t + t + t^2)$$

$$\text{C.I.: } u(x,0) = x\exp(-x^2) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{F}\left[u(x,0)\right](\omega)}_{\hat{u}(\omega,0)} = \underbrace{\mathcal{F}\left[x\exp(-x^2)\right](\omega)}_{i\,\frac{d\hat{F}(\omega)}{d\omega}}$$

siendo $$\hat{F}(\omega) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right) \rightarrow \frac{d\hat{F}(\omega)}{d\omega} = -\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)$$

$$\hat{u}(\omega,0) = -i\,\frac{\omega\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right) = G_1$$

$$\hat{u}(\omega,t) = -i\,\frac{\omega\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{4}+t\right)+t+t^2\right)$$

$$\hat{u}(2,2) = -i\sqrt{\pi}\exp\left(-4\left(\frac{9}{4}\right)+6\right) \rightarrow \boxed{\hat{u}(2,2) = -i\sqrt{\pi}\exp(-3)}$$

B. $$\begin{cases} \dfrac{d^2 w}{dt^2}(t) + 4\dfrac{dw}{dt}(t) + 8w(t) = g(t) \\ w(0) = 0\,, \quad \dfrac{dw}{dt}(0) = 1 \end{cases}$$ $; \; g(t) = t(t-1) \quad t\in[0,1]$

$\longrightarrow$ Con estas C.I.: $\mathcal{L}[w(t)](s) = \frac{1}{z^2+4z+8}\left(1+\mathcal{L}[g(t)](s)\right)$

(Explicación en Ordinario 2019)

$$g(t) = t(t-1)\Big(H(t)-H(t-1)\Big) = (t^2-t)H(t) - \Big(\underbrace{(t-1+1)(t-1)}_{t^2-t-t+1+t-1 = (t-1)^2+(t-1)}\Big)H(t-1)$$

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{\overset{2}{\Gamma(3)}}{z^3} - \frac{\overset{1}{\Gamma(2)}}{z^2} - \exp(-z)\Big(\underbrace{\mathcal{L}[t^2](s)}_{\frac{\Gamma(3)}{z^3}} + \underbrace{\mathcal{L}[t](s)}_{\frac{\Gamma(2)}{z^2}}\Big)$$

$$\mathcal{L}[w(t)](s) = \frac{1}{z^2+4z+8}\left(1+\frac{1}{z^2}\left(\frac{2}{z}-1-\exp(-z)\left(\frac{2}{z}+1\right)\right)\right)$$

$$\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{20}\Big(\overbrace{1+\frac{1}{4}\big(-\exp(-2)(2)\big)}^{1-\frac{1}{2}\exp(-2)}\Big)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{2-\exp(-2)}{40}}$$

C. $$\begin{cases} \dfrac{d^2w}{dz^2} - (iz^2+z^4)\,w = 0 \\ w(0) = 0\,, \quad \dfrac{dw}{dz}(0) = i \end{cases} \qquad w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k z^k$$

$$w(z) = \cancel{C_0}^{\,0} + C_1 z + \sum_{k=2}^{+\infty} C_k z^k = iz + \sum_{k=2}^{+\infty} C_k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k z^k$$

Sustituimos en la ecuación: $\left(\dfrac{dw}{dz} = \sum_{k=1} k C_k z^{k-1}\,; \quad \dfrac{d^2w}{dz^2} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) C_k z^{k-2} \right)$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) C_k z^{k-2} - \underbrace{i \sum_{k=1}^{+\infty} C_k z^{k+2}}_{iz^2} - \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} C_k z^{k+4}}_{z^4} = 0$$

z^0: $2(1)C_2 = 0 \longrightarrow C_2 = 0$

z^1: $3(2)C_3 = 0 \longrightarrow C_3 = 0$

z^2: $4(3)C_4 = 0 \longrightarrow C_4 = 0$

z^3: $\overbrace{5(4)C_5 - i\underbrace{C_1}_{i}}^{-1} = 0 \longrightarrow C_5 = -\dfrac{1}{20}$

...

z^n: $(n+2)(n+1)C_{n+2} - iC_{n-2} - C_{n-4} = 0 \rightarrow \boxed{C_{n+2} = \dfrac{iC_{n-2} + C_{n-4}}{(n+2)(n+1)} \quad \text{para } n \geq 5}$

D. $$z\,\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{dw}{dz} - \frac{(1+z^2)}{2\,\mathrm{sen}\,z}\,w = 0 \rightarrow \frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{(1+z^2)}{2z\,\mathrm{sen}\,z}\,w$$

$$\left[\frac{d^2w}{dz^2}(z) = \frac{b(z)}{z}\frac{dw}{dz}(z) + \frac{a(z)}{z^2}\,w(z) \right] \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(0) & b(0)+1 \end{bmatrix}$$

$$a(z) = \frac{z(1+z^2)}{2\,\mathrm{sen}\,z} \longrightarrow a(0) = \lim_{z\to 0} \frac{z+z^3}{\frac{2\,\mathrm{sen}\,z}{z}} = \frac{1}{2} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b(z) = -1 \longrightarrow b(0) = -1$$

Autovalores: $\lambda^2 - 1/2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_1 = z^{\lambda_1} p_1(z)\,; & p_1(0) = 1 \\ u_2 = z^{\lambda_2} p_2(z)\,; & p_2(0) = 1 \end{cases}$

$$w = C_1 z^{\sqrt{2}/2} p_1(z) + C_2 z^{-\sqrt{2}/2} p_2(z)$$

$\rightarrow$ Para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0 \longrightarrow w_1 = z^{\sqrt{2}/2} p_1(z)$

$$\left[\lim_{z\to 0} \frac{z^{\sqrt{2}/2} \overset{1}{p_1(0)} - z^{\sqrt{2}/2}}{z^{\sqrt{2}/2}} = 0 \right]$$