Ampliación de Matemáticas
Transformadas de Fourier

Transformada de Fourier

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrable (es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty$), su **transformada de Fourier** es:

$$\mathfrak{F}(f(x))(w) = \hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$$

Se cumple que $\hat{f}$ es función acotada, y que $\mathfrak{F}$ es una transformación lineal

Teorema de inversión: Sea f absolutamente integrable tal que $\hat{f}$ también es absolutamente integrable. Entonces:

$$\forall x : \text{f continua en x, } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx}dw$$

A la integral anterior se denomina **transformada inversa**:

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f}(w))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx}dw$$

El **producto de convolución** de dos funciones absolutamente integrables f y g se define como:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Transformadas importantes

- $\mathfrak{F}[e^{a|x|}] = -\dfrac{2a}{w^2 + a^2}$
- $\mathfrak{F}[\dfrac{1}{x^2 + a^2}] = \dfrac{\pi}{a}e^{-a|w|}$
- $\mathfrak{F}[e^{-ax^2}] = \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$

Propiedades

$\mathfrak{F}[f^n(x)](w) = (iw)^n \hat{f}(w)$

$\mathfrak{F}[x^n f(x)] = i^n \dfrac{d^n}{dw^n} \hat{f}(w)$

$\mathfrak{F}[f(ax)](w) = \dfrac{1}{|a|} \hat{f}(\dfrac{w}{a})$

$\mathfrak{F}[f(x-a)](w) = e^{-iaw} \hat{f}(w)$

$\mathfrak{F}[f(x)e^{iax}](w) = \hat{f}(w-a)$

$\mathfrak{F}[(f * g)(x)](w) = \hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w)$

$\mathfrak{F}[(f \cdot g)(x)](w) = \dfrac{1}{2\pi} \hat{f}(w) * \hat{g}(w)$

$\mathfrak{F}[\hat{f}(w)](x) = e\pi f(-x)$

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw$

$\mathfrak{F}[f(x)\sin(ax)](w) = \dfrac{1}{2i}[\hat{f}(w-a) - [\hat{f}(w+a)]$

$\mathfrak{F}[f(x)\cos(ax)](w) = \dfrac{1}{2}[\hat{f}(w-a) + [\hat{f}(w+a)]$

Aplicaciones

Dada la siguiente EDP:

$$u_t = f(x) \cdot u_{xx} + g(x) \cdot u_x + u$$

Podemos resolverla aplicando transformada de Fourier respecto a x:

$$\hat{u}_t = \hat{f}(x) \cdot (iw)^2 \cdot \hat{u} + \hat{g} \cdot (iw) \cdot \hat{u} + \hat{u}$$