(A) Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x, en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)(-i\omega)^2 \hat{u} + \hat{u}$. Integrando la ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = \left(-\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)\omega^2 + 1\right)\hat{u}$ se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C\exp(-\omega^2(t+\text{arctg}\, t) + t)$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}[\hat{f}(x)](\omega) = 2\pi f(-\omega)$, la nota del enunciado e imponiendo la condición inicial, $\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](\omega) = \frac{2\pi}{2}\exp(-|\omega|)$ y $u(\omega,t) = \pi \exp(-\omega^2(t+\text{arctg}\, t) + t - |\omega|)$. Por tanto,

$$u\left(2,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi \exp\left(-\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} - 2\right).$$

(B) La función g puede escribirse de la forma $g(t) = (\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-1))(\exp(t) - e)t$

$= \mathcal{H}(t)(\exp(t) - e)t - \mathcal{H}(t-1)(\exp(t-1+1) - e)(t-1+1) = \mathcal{H}(t)(\exp(t) - e)t -$
$\mathcal{H}(t-1)\, e(\exp(t-1) - 1)(t-1) - \mathcal{H}(t-1)\, e(\exp(t-1) - 1).$

Tomando transformadas de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $(z^2 + 4z + 8)\mathcal{L}[w](z) = 1 + \mathcal{L}[g](z)$. De las propiedades de la transformada de Laplace, $\mathcal{L}[t^\nu](z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$ y de $\mathcal{L}[e^t f(t)](z) = \mathcal{L}[f](z-1)$.

$$\mathcal{L}[w](z) = \frac{1}{(z+2)^2 + 4}\left[1 + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{e}{z^2} - e^{-z}\left(\frac{e}{(z-1)^2} - \frac{e}{z^2}\right) - e^{-z}\left(\frac{e}{z-1} - \frac{e}{z}\right)\right].$$

Por tanto, $\mathcal{L}[w](2) = \frac{1}{20}\left(2 - \frac{e^2+5}{4e}\right).$

(c) La solución del problema de Cauchy dado en el enunciado es una función entera. Por tanto, $w(z) = z + \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo el desarrollo en la ecuación del enunciado se obtiene $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, $c_5 = \frac{1}{20}$, $c_6 = 0$, $c_7 = \frac{i}{7\cdot 6}$, $c_8 = 0$. Igualando los términos en z^j, para $j \geq 7$, se obtiene $c_{j+2} = \frac{c_{j-2} + i c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$.

De ser $\operatorname{Im}(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ también se verificaría que $\operatorname{Im}\left(\frac{d^k w}{dx}(x)\right) = 0$ lo que es imposible puesto que

$$\frac{w^{(7}}{7!}(0) = \frac{i}{7\cdot 6}.$$

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{1}{z^2}\,\frac{(1+z)\cdot z}{16 \operatorname{sen} z}.$$

El punto $z=0+0i$ es singular regular. En un entorno de $z=0$ la solución, en primera aproximación, está determinada por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$. Por tanto, la solución general de la ecuación es $w(z) = C_1 \sqrt[4]{z}\, p_1(z) + \frac{C_2}{\sqrt[4]{z}}\, p_2(z)$ donde $p_1(z)$ y $p_2(z)$ son dos funciones analíticas en un cierto entorno reducido del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$. La solución $w_1(z) = 4\sqrt[4]{z}\, p_1(z)$ es tal que $\lim_{z\to 0} \frac{w_1(z) - \sqrt[4]{z}}{\sqrt[4]{z}} = 3$. Para cualquier solución no nula de la ecuación $\lim_{z\to 0} \frac{w(z)}{\sqrt{z}} = \infty$.

(E) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{z}\left(-4+\frac{\gamma}{z^3}\right)\frac{dw}{dz}.$$

Por tanto, $z=0+0i$ no es un punto singular regular. La ecuación del enunciado también puede escribirse como

$\frac{d}{dz}\left(z^4\frac{dw}{dz}-\gamma w\right)=0$ Integrando una vez la ecuación anterior se obtiene la ecuación de primer orden $z^4\frac{dw}{dz}-\gamma w = C$,

cuya solución general es $w(z) = C_1 + C_2 \exp\left(\frac{-\gamma}{3z^3}\right) = C_1$ $+ C_2\left(1+\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-\gamma}{3}\right)^n\frac{1}{z^{3n}}\right)$. Por tanto, para $C_2 \neq 0$ w presenta una singularidad esencial.