Teoría de EDOs lineales de segundo orden

Generalidades

Definición: La **EDO lineal general de segundo orden** se puede escribir como:

$$\frac{d^2 w}{dz^2}(z) = p(z)\,\frac{dw}{dz}(z) + q(z)\,w(z) + r(z)$$

Definición: Diremos que la EDO anterior es homogénea si r(z) = 0 (no hay término independiente).

Teorema: Toda solución de la EDO general se puede escribir como:

$$w = w_p + w_h$$

Donde w_p es una solución particular de la ecuación completa y w_h es una solución de la ecuación homogénea. Además, las soluciones de la ecuación homogénea son un espacio vectorial de dimensión dos.

Soluciones en serie de potencias de la EDO lineal de segundo orden homogénea

Una técnica general muy potente para encontrar soluciones de la ecuación es suponer que la solución tienen un desarrollo en serie de potencias (es analítica en un entorno de z_0) y calcular los coeficientes del desarrollo de manera recursiva, usando los desarrollos de p(z) y q(z). Vamos a distinguir tres casos:

Caso 1: z_0 es un **punto ordinario**. Diremos que z_0 es un punto ordinario cuando p(z) y q(z) son analíticas en un entorno de z_0, con radio de convergencia R. En ese caso, la solución w(z) tendrá un desarrollo en serie de potencias válido en el radio R, y la solución general se puede obtener por recurrencia. Es decir, ponemos:

$$w(z) = \sum c_n z^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n z^{n-2} = \left(\sum a_n z^n\right)\cdot\left(\sum c_n \cdot n\, z^{n-1}\right) + \left(\sum b_n z^n\right)\cdot\left(\sum c_n z^n\right)$$

Donde a_n son los coeficientes de p y b_n los de q.

Caso 2: z_0 es un **punto singular**. Es el caso contrario al anterior. Cuando se trata de un punto singular, sólo podemos conseguir un desarrollo "casi" analítico (en lo que se denomina serie de Frobenius) cuando es singular regular:

> **Caso 2.1.**: z_0 es un **punto singular regular**. Decimos que es un punto singular regular cuando $z \cdot p(z)$ y $z^2 \cdot q(z)$ son funciones analíticas en un entorno de z_0.
>
> **Caso 2.2.**: z_0 es un **punto singular irregular**. Decimos que es un punto singular irregular cuando $z \cdot p(z)$ y $z^2 \cdot q(z)$ no son funciones analíticas en un entorno de z_0. En este caso, no hay ninguna técnica válida para obtener desarrollos en serie de la solución. Así que nos limitamos al análisis del caso 2.1.

Análisis del caso 2.1.:

Escribimos la EDO de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 w}{dz^2}(z) = \frac{b(z)}{z} \frac{dw}{dz}(z) + \frac{a(z)}{z^2} w(z) \quad , \text{ con } a, b \text{ analíticas en } z_0$$

La situación dependerá ahora de los autovalores de la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(0) & b(0)+1 \end{bmatrix}$$ Sean λ_1, λ_2 los autovalores con $\lambda_1 \geq \lambda_2$

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$

En este caso, la solución general es de la siguiente forma:

$$w(z) = c_1 z^{\lambda_1} p_1(z) + c_2 z^{\lambda_2} p_2(z)$$, donde:

- $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ cualesquiera.
- p_1, p_2 analíticas en z_0 (con coeficientes a determinar, si lo pidieran).
- $p_1(0) = p_2(0) = 1$

ii) $\lambda_1 = \lambda_2$

En este caso, la solución general es de la siguiente forma:

$$w(z) = c_1 z^{\lambda_1} p_1(z) + c_2 \cdot \left[z^{\lambda_1} p_1(z) \ln z + z^{\lambda_1} p_2(z) \right]$$, donde:

- $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ cualesquiera
- p_1, p_2 analíticas en z_0, con coeficientes a determinar (si los pidieran).
- $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 0$ (de hecho, p_2 puede ser nula).

iii) $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

En este caso, la solución general es de la siguiente forma:

$$w(z) = c_1 z^{\lambda_1} p_1(z) + c_2 \cdot \left[\alpha \cdot z^{\lambda_1} p_1(z) \ln(z) + z^{\lambda_2} p_2(z) \right]$$, donde:

- $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ cualesquiera. $\alpha \in \mathbb{C}$ constante a determinar (puede ser 0).
- p_1, p_2 analíticas en z_0, con coeficientes a determinar (si los pidieran).
- $p_1(0) = 1$. ($p_2(0)$ puede ser 0; de hecho p_2 puede ser nula).

En todos los casos anteriores, escribimos $w = c_1 w_1 + c_2 w_2$; w_1 y w_2 son la base del espacio vectorial de soluciones.

Ecuación de Bessel y soluciones

La ecuación de Bessel es la siguiente:

$$z^2 \frac{d^2 w}{d z^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2) w = 0$$

Es fácil comprobar que los autovalores de la matriz C son p y -p, por lo que el tipo de soluciones en el origen dependerá del valor de p.

Dado un p > 0, definimos la función de Bessel $J_p(x)$, de primera especie, de la siguiente manera:

$J_p(x)$ es la solución acotada en el origen de la ecuación de Bessel. Es decir, se trata de la primera de las soluciones de la ecuación, (w_1) en la notación anterior. Se cumple que:

Nota $\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}$

$$J_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n+p}}{n!\, \Gamma(n+p+1)}, \text{ donde } \Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t}\, dt$$

Observación: este desarrollo en serie también tiene sentido cuando p < 0, pero en ese caso la función no es acotada en el origen. No obstante, existen las funciones de Bessel $J_p(x)$ con p negativo, que se definen con la serie anterior.

Algunas propiedades de las funciones de Bessel:

- Si p no es entero, $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente independientes, luego $J_{-p}(x)$ es la segunda solución de la ecuación de Bessel.
- $J_0(0) = 1$; $J_p(0) = 0\ \forall p > 0, p \neq 1$; $\lim_{x \to 0^+} J_p(x) = -\infty\ \forall p < 0$.
- $(x^p J_p)' = x^p J_{p-1}(x) \Rightarrow J_p' = J_{p-1} - \frac{p}{x} J_p$ (es consecuencia directa)

  En particular, $J_0' = J_{-1}$
- $(x^{-p} J_p)' = -x^{-p} J_{p+1}(x) \Rightarrow J_0' = -J_1$

Cuando p es un entero, entonces la segunda solución de la ecuación de Bessel (o función de Bessel de segunda especie) se denomina $Y_p(x)$, que es una función no acotada en el origen. La manera de definir esta función es haciéndolo primero en los números no enteros y luego tomando límites. Es decir.

- Si p no entero, $Y_p(x) = \dfrac{\cos(p\pi) J_p(x) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}(p\pi)}$
- Si p entero, $Y_p(x) = \lim_{\alpha \to p} Y_\alpha(x)$

Ortogonalidad y series de Bessel

- Sea α_j la sucesión (infinita) de ceros de $J_p(x)$, $p \in \mathbb{R}$
- Entonces, $\{J_p(\alpha_1 \cdot x), J_p(\alpha_2 \cdot x) \dots\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes. Y dado $f(x)$, se puede escribir

$$f(x) = \sum c_j J_p(\alpha_j \cdot x)$$

→ De hecho, ortogonales