Ampliación de Matemáticas
Variable Compleja (3)

Integración

Dada una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ compleja (no necesariamente analítica) y una curva Γ, definimos su **integral de línea** como:

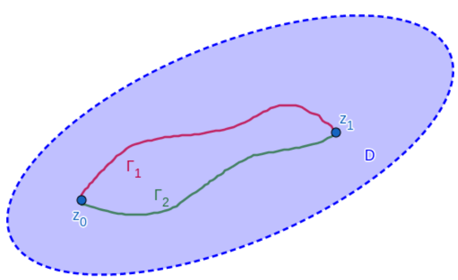
$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Donde $\gamma(t)$ es una parametrización cualquiera de la curva Γ. Veamos algunas propiedades importantes.

• El resultado **no depende** de la parametrización (está bien definida).

• Dado un dominio simplemente conexo D, dos puntos z_0 y z_1 de D, y dadas dos curvas Γ_1 y Γ_2 uniendo ambos puntos, ambas en D, si la función f es analítica en D, entonces la integral **no depende del camino**:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$



• Si D es un dominio simplemente conexo y f es una función analítica en D, entonces la integral sobre cualquier curva cerrada de D es 0:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \ , \forall \gamma \subset D$$

• Nota: esto permite definir una **primitiva** de f:

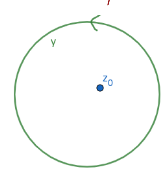
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

Donde la integral se realiza tomando cualquier curva que una z_0 con z

Teorema de Cauchy

Si f es una función analítica en un dominio D, γ es una circunferencia en D orientada de manera antihoraria, y z_0 es un punto cualquiera del interior de la circunferencia, entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



• Nota: este teorema es un caso particular del teorema de los residuos.

Ceros y singularidades

Una función analítica f tiene un **cero de orden m** en z_0 si:

$$f(z_0) = ... = f^{m-1}(z_0) = 0 \ , f^m(z_0) \neq 0$$

Una función analítica en todos los puntos de un entorno de z_0 salvo en z_0 se dice que tiene una **singularidad aislada** en z_0. Las singularidades aisladas pueden ser:

• **Evitable**: Cuando

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) \text{ y es finito}$$

• **Polo de orden m**: Cuando $(z - z_0)^m f(z)$ es analítica en z_0, pero $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ no. En ese caso, se cumple que

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

• **Esencial**: Cuando

$$\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$$