Ⓐ Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación diferencial se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1+t\,\mathrm{ch}\,t)(i\omega)^2 \hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Integrando la ecuación se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C\exp(-\omega^2(t+t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t+1))$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}[\exp(-\alpha x^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(\frac{-\omega^2}{4\alpha}\right)$, e imponiendo la condición inicial $u(x,0) = \exp(-\alpha x^2)$ se obtiene
$\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{4\alpha}+t+t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t+1\right)\right)$. Tomando la transformada inversa

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha(t+t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t+1)}}\exp\left(\frac{-\alpha x^2}{1+4\alpha(t+t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t+1)}\right)$$

(B)

La función g puede escribirse en la forma $g(t) = \left(H(t) - H(t-\frac{\pi}{2})\right) \cdot \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) + H(t-\frac{\pi}{2})$. Tomando la transformada de Laplace con la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $(z^2+2z+10)\, \mathcal{L}[w(t)](z) = w(0)(z+2) + \mathcal{L}[g(t)](z)$. Teniendo en cuenta que $H(t-\frac{\pi}{2})(1-\cos 2t) = H(t-\frac{\pi}{2})(1+\cos(2(t-\frac{\pi}{2})))$, $\mathcal{L}[1](z) = \frac{1}{z}$ y $\mathcal{L}[\cos 2t](z) = \frac{z}{z^2+4}$ y las propiedades de la transformada de Laplace se obtiene

$$\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{1}{z^2+2z+10}\left(w(0)(z+2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+4}\right)\left(1+\exp\left(-\frac{\pi}{2}z\right)\right)\right).$$

(C) La solución del problema de Cauchy del enunciado es una función analítica, al menos, en la $B(0+i0,1)$ y $w(z)=1+\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$c_2=c_3=0$, $c_4=\frac{-1}{12}$, $c_5=0$, $c_6=\frac{1}{30}$. Además,

$(1+z^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2}+z^2(1+\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k)=0$, de donde $c_{n+2}=\frac{-n(n-1)}{(n+2)(n+1)}c_n-\frac{1}{(n+2)(n+1)}c_{n-2}$ y $c_{2n+1}=0$. Sea $a=w(\frac{1}{2})$ y $b=\frac{dw}{dz}(\frac{1}{2})$.

El problema de Cauchy $(1+z^2)\frac{d^2w}{dz^2}+z^2w(z)=0$ $w(\frac{1}{2})=a$ $\frac{dw}{dz}(\frac{1}{2})=b$ tiene solución analítica en la $B(\frac{1}{2}+0i, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Nótese que la solución de este problema coincide con la solución del problema del enunciado y que la solución de ambos problemas es única.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{z}\,\frac{-1}{\beta \exp(z)}\,\frac{dw}{dz} + \frac{1}{z^2}\,\frac{(1+z^2)z}{\exp(z)} \qquad (1)$$

con $\beta > 1$. El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación (1). Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución está dado por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\beta}+1 \end{pmatrix}$, es decir, $d_1 = 1 - \frac{1}{\beta}$, $d_2 = 0$. La solución general de la ecuación anterior es de la forma $w(z) = C_1 \, z^{1-1/\beta} \, p_1(z) + C_2 \, p_2(z)$ dónde p_1 y p_2 son analíticas en un cierto entorno del origen con $p_1(1) = p_2(0) = 1$. Por tanto, si $0 < 1 - \frac{1}{\beta} < \gamma$ $\quad z^{\gamma} = o(z^{1-1/\beta})$

si $0 < \delta < 1 - \frac{1}{\beta}$ $\quad z^{1-1/\beta} = o(z^{\delta})$

(E) En virtud de la formula de Poisson $u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{1}{(x-t)^2+y^2}\,dt$

$$=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1} t(1-t^2)\,\frac{1}{(x-t)^2+y^2}\,dt = \left\{\begin{array}{l} x-t=u \\ dt=-du \end{array}\right\} = \frac{y}{\pi}\int_{x+1}^{x-1} \frac{(x-u)(1-(x-u)^2)}{u^2+y^2}(-1)\,du=$$

$$=\frac{y}{\pi}\int_{x-1}^{x+1}\left(\frac{x-u}{u^2+y^2}-\frac{(x-u)^3}{u^2+y^2}\right)du = \frac{y}{\pi}\int_{x-1}^{x+1}\left(\frac{x-u}{u^2+y^2}+\left(u-3x+\frac{(3x^2-y^2)u+(-x^3+3xy^2)}{u^2+y^2}\right)\right)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-4xy+y\,\frac{3x^2-y^2-1}{2}\ln\left(\frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}\right)+(-x^3+3xy^2+x)\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{y}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{y}\right)\right)\right).$$

$$u(1,y)=\frac{1}{\pi}\left(-4y+\frac{y}{2}(2-y^2)\ln\left(1+\frac{4}{y^2}\right)+3y^2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{y}\right)\right).$$