E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1er Apellido : SOLUCIÓN 2do Apellido : Nombre :	Curso 18/19 (29.10.18) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1er Parcial

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}^{n+1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}^{n}.$$

$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+3\lambda-10=0$

$\lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+10} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$

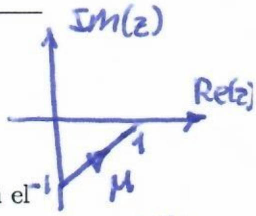
$V_2: \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$

$V_{-5}: \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{v}_{-5} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = A \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} 2^n + B \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} (-5)^n}$$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I = \int_\Gamma \frac{\bar{z}+i}{|z-i|^2}\,dz = \int_\mu \frac{\overline{(z-i)}}{(z-i)\overline{(z-i)}}\,dz = \int_\mu \frac{dz}{z-i}$$



donde Γ es el segmento recto orientado con origen en el punto $-i$ del eje imaginario y final en el punto 1 del eje real ($z(t) = t-(1-t)i$ para $t \in [0,1]$)

$F(z) = \mathrm{Log}(z-i)$ analítica en $D = \mathbb{C} - \{z = x+i / x \le 0\}$

$F'(z) = \frac{1}{z-i}$ $\forall z \in D$

Hay independencia del camino en D

$I = F(z_F) - F(z_I) =$

$= \mathrm{Log}(1-i) - \mathrm{Log}(-2i) =$

$= \mathrm{Ln}\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} - \left(\mathrm{Ln}2 - i\frac{\pi}{2}\right)$

$$\boxed{I = -\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2 + i\frac{\pi}{4}}$$

C. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \dfrac{z\cosh z}{\operatorname{senh} z} = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, P y Q enteras

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

Ptos singulares: $Q(z) = \mathrm{sh}z = 0$

$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 = e^{2k\pi i}$

$z_k = k\pi i \quad k = 0, \pm1, \pm2$

$\{z_k = k\pi i \neq 0\}$

$Q'(z_k) = \cosh(k\pi i) = \cos k\pi \neq 0$

Ceros simples de $1/f$

$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = z_k = k\pi i$

$\boxed{z_0 = 0}$ $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\mathrm{Ch}z}{\mathrm{Sh}z/z} = \frac{1}{1} = 1$

$\rightarrow$ Singularidad evitable de f $\rightarrow$ $\mathrm{Res}(f,0) = 0$

$z_k = k\pi i$ $\quad k = \pm1, \pm2..$ Polos simples $\mathrm{Res}(f, z_k) = k\pi i$ $z_0 = 0 \rightarrow$ singularidad evitable $\mathrm{Res}(f,0) = 0$

Anotar en el siguiente recuadro, la parte principal del desarrollo en serie de Laurent (potencias negativas de z) en el entorno $0 < |z| < R$, especificando el valor de R

Singularidad evitable $\rightarrow$

Parte principal : 0 $R = \pi$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO $R = \min\limits_{k=\pm1,\pm2..} |z_k - 0| = \pi$

a ⊙ $g(z)$ entera $\xrightarrow[\forall z_0\in\mathbb{C}]{\text{Taylor}}$ $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en $|z-z_0|<\infty$

Si $z_0=0$: $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $|z|<\infty$ ($n\ \forall z\in\mathbb{C}$)

b ⊙ Fórmula Integral de Cauchy : $g(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz}_{2\pi i} = 1 \quad \forall z_0\in\mathbb{C}$

D. **(3 puntos)** Sea $g(z)$ una función entera tal que

$$\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i \quad \text{para todo } z_0\in\mathbb{C}$$

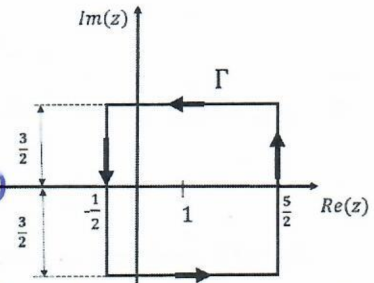
siendo C la circunferencia $|z-z_0|=1$ orientada positivamente.

Anotar el siguiente recuadro la expresión general de $g(z)$

$g(z_0) \overset{(b)}{=} 1 \overset{(a)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$

$\forall z_0\in\mathbb{C} \iff \begin{cases} a_0=1 \\ a_n=0 \quad \forall n\geq 1\end{cases}$

$$\boxed{g(z)=1}$$



Anotar el valor de la integral

$$I=\oint_\Gamma \overbrace{\frac{g(z)}{z^4-1}}^{f(z)}dz = \oint_M \frac{g(z)\,dz}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

siendo Γ el cuadrado de centro en $z=1$ y lado 3, orientado positivamente, de la figura.

Tª Residuos → $I = 2\pi i\,[\mathrm{Res}(f,1)+\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)] =$

Todos ceros simples de $1/f$ ⇒ Polos simples de f

⇓

$\mathrm{Res}(f,z_k)=\left.\frac{g(z)}{(z^4-1)'}\right|_{z=z_k} = \frac{g(z_k)}{4z_k^3} = 1/4z_k^3$

$$\boxed{I=\frac{\pi}{2}i}$$

$= 2\pi i\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4i}+\frac{1}{4i}\right] = \frac{\pi}{2}i$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

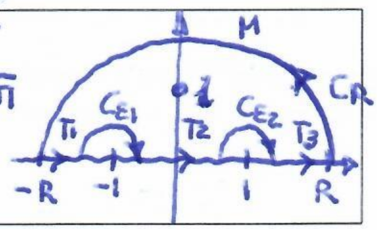
$$I=\int_0^\infty \frac{\cos(\pi x)}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi x)}{x^4-1}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}dx}{x^4-1}\right)$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}dx}{x^4-1} = \frac{-\pi}{2e^\pi}+\pi i\,\frac{e^{\pi i}-e^{-\pi i}}{4}$

$\frac{i}{2}\,\text{sen}\,\pi = 0$

$$\boxed{I=\frac{-\pi}{4e^\pi}}$$



$\int_M f(z)dz = \int_M \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1}dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i) = \int_{C_R} f dz + \sum_{k=1}^{3}\int_{T_k} f(x)dx + \sum_{j=1}^{2}\int_{C_{\varepsilon_j}} f(z)dz$

- Lema 2 : $\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{z^4-1}=0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$
- Lema 3 : $z=\pm 1$ Polos simples $\Rightarrow \begin{cases}\int_{C_{\varepsilon_1}} f dz \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\pi i\,\mathrm{Res}(f,-1) = -\pi i\,\frac{e^{-\pi i}}{(-4)} \\ \int_{C_{\varepsilon_2}} f dz \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\pi i\,\mathrm{Res}(f,1) = -\pi i\, e^{\pi i}/4\end{cases}$