E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : SOLUCIÓN 1er Apellido : 2do Apellido : Nombre :	Curso 18/19 (27.06.19) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1ª Parte

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución del problema de ecuaciones en diferencias:

$$2\,x^{n+2} - 9\,x^{n+1} + 4\,x^n = -6, \qquad x^0 = 0,\ x^1 = 1.$$

Ec. Característica

$2r^2 - 9r + 4 = 0$

$r = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - 2} = \begin{cases} 1/2 \\ 4 \end{cases}$

Sol Homogénea

$x^n_H = A\frac{1}{2^n} + B\,4^n$

Sol. Particular

$x^n_p = C \Rightarrow$

$(2-9+4)\,C = -6 \Rightarrow C = 2$

Sol. completa

$x^n = 2 + \frac{A}{2^n} + B\,4^n$

$x^0 = 2 + A + B = 0$, $x^1 = 2 + \frac{A}{2} + 4B = 1$ $\Rightarrow$ $A = -2$, $B = 0$

$$\boxed{x^n = -\frac{2}{2^n} + 0\cdot 4^n + 2 = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

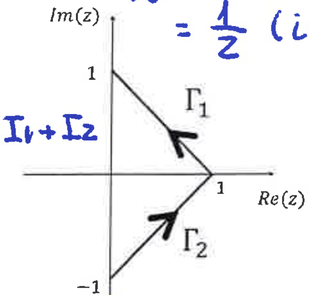
B. **(3 puntos)** Anotar en el recuadro el valor de la integral

$\mu_1 : z(t) = 1 + (i-1)t \quad t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} \bar z = (1-t) - it \\ dz = (i-1)dt \end{cases}$

$I_1 = (i-1)\int_0^1 [(1-t) - it]\,dt = \frac{1}{2}(i-1)(1-i) = i$

$$\int_\Gamma \bar z\, dz = \int_{\mu_1} \bar z\, dz + \int_{\mu_2} \bar z\, dz = I_1 + I_2$$

siendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ el contorno, orientado positivamente, de la figura.



$\mu_2 : z(t) = t + i(t-1),\ t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} \bar z = t - i(t-1) \\ dz = (1+i)\,dt \end{cases}$

$I_2 = (1+i)\int_0^1 [t - i(t-1)]\,dt = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i$

$$\boxed{I = i + i = 2i}$$

C. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = z\,e^{1/(z-1)} = (z-1+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n} =$$

en torno a $z_0 = 1$ válido en $|z-1| > 0$.

$= (z-1)\left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2} + \cdots\right] + \left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2} + \cdots\right]$

$= (z-1) + 2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2!} + 1\right)}_{\text{ll}}\frac{1}{z-1} + \cdots$

$\operatorname{Res}(f(z), 1) = \frac{3}{2}$

$$\boxed{f(z) = (z-1) + 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\right)\frac{1}{(z-1)^n}}, \quad 0 < |z-1| < \infty$$

Anotar en el siguiente recuadro el valor del residuo de $f(z)$ en $z_0 = 1$, especificando qué tipo de singularidad es.

$\operatorname{Res}(f(z), 1) = 3/2$ $z=1$ es singularidad esencial

La parte principal (potencias negativas) de la serie de Laurent en $|z-1|>0$ tiene infinitos términos

D. **(3 puntos)** Sea $f(z)$ una función entera tal que, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, se cumple

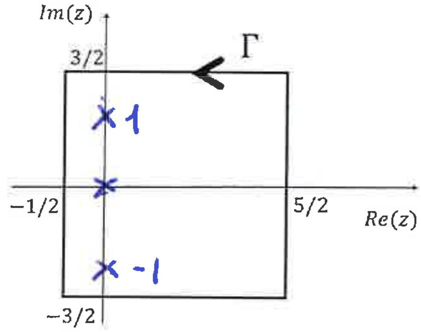
$$① \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 4\pi z_0\, i$$

siendo C la circunferencia $|z - z_0| = 1$ orientada positivamente.

Anotar el valor de la integral

$$② \; I = \oint_\Gamma \frac{f(z)\,\text{Log}(z+1)}{(e^{2\pi z} - 1)}\, dz = \oint_\Gamma g(z)\, dz$$

siendo Γ el cuadrado de centro en $z = 1$ y lado 3, orientado positivamente, de la figura.



$$\boxed{I = -\pi i}$$

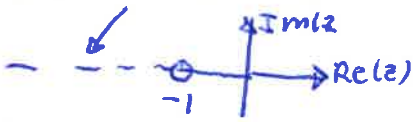
① $f(z)$ analítica en C y $\mathring{C}$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fórmula Integral} \\ \text{de Cauchy}}}{\Rightarrow}$ $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2z_0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$

② Puntos singulares de $g(z)$

- $z = 0$: Es evitable pues $\exists \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{2z\,\text{Log}(z+1)}{z + \frac{z^2}{2!} + \dots}$
  $= 2 \lim_{z \to 0} \text{Log}(z+1) = 0$
  $\Rightarrow \text{Res}(g, 0) = 0$

- Ptos singulares de $\text{Log}(z+1)$: $z = x \quad x < -1$



- Ceros de $(e^{2z\pi} - 1)$: $e^{2\pi z} = 1 = e^{2k\pi i} \Leftrightarrow$
  $z_k = ki \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

- $z_1 = i$ y $z_{-1} = -i$ son polos simples de $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$
  - $P(z)$ analítica en $z = \pm i$ y no nula
  - $Q'(z) = 2\pi e^{2\pi z} \underset{\substack{\uparrow \\ z = \pm i}}{=} 2\pi \neq 0$

$I = 2\pi i\,[\text{Res}(g, i) + \text{Res}(g, -i)]$

$= 2\pi i \frac{(-\pi)}{2\pi} = -\pi i$

$\text{Res}(g, i) = \frac{P(i)}{Q'(i)} = \frac{f(i)\,[\ln\sqrt{2} + i\,\pi/4]}{2\pi} = \frac{2i(\ln\sqrt{2} + i\,\pi/4)}{2\pi}$

$\text{Res}(g, -i) = \frac{P(-i)}{Q'(i)} = \frac{f(-i)\,[\ln\sqrt{2} - i\,\pi/4]}{2\pi} = \frac{(-2i)(\ln\sqrt{2} - i\,\pi/4)}{2\pi}$

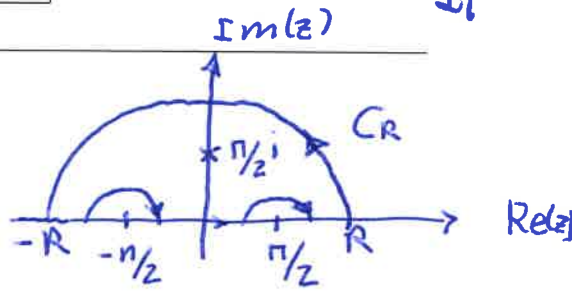
E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(16x^4-\pi^4)}\,dx \overset{\text{Integrando por}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{16x^4-\pi^4}\,dx =$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

$$= \frac{1}{32}\,\mathrm{Re}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^4-\frac{\pi^4}{16}}\,dx\right)}_{I_1}$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{8\pi^2}\left(1+e^{-\pi/2}\right)}$$



$$\oint_\mu f(z)\,dz \quad \text{con } f(z) = \frac{e^{iz}}{\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(z^2-\frac{\pi^2}{4}\right)} =$$

$$= e^{iz}\Big/\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_1 = \pi i\left[\mathrm{Res}(f,\pi/2) + \mathrm{Res}(f,-\pi/2)\right] + 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f,\frac{\pi}{2}i\right)$$

- $\mathrm{Res}(f,\pi/2) = \mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{iz}\Big/\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{z-\pi/2},\ \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{e^{i\pi/2}}{\pi^3/2}$
- $\mathrm{Res}(f,-\pi/2) = \mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{iz}\Big/\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{z+\pi/2},\ -\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-e^{-i\pi/2}}{\pi^3/2}$
- $\mathrm{Res}(f,\pi/2\,i) = \mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{iz}\Big/\left(z^2-\frac{\pi^2}{4}\right)\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)}{z-\pi/2\,i},\ \dfrac{\pi}{2}i\right) = \dfrac{i\,e^{-\pi/2}}{\pi^3/2}$

$$I_1 = \pi i\,\frac{1}{\pi^3/2}\underbrace{\left(e^{i\pi/2}-e^{-i\pi/2}\right)}_{2i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}} + 2\pi i\,\frac{i\,e^{-\pi/2}}{\pi^3/2} = -\frac{4}{\pi^2}\left(1+e^{-\pi/2}\right)$$

Ampliación de Matemáticas (Versión 1), (27-06-2019)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 + t\exp(-t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = x\exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(3,3) = -\dfrac{\mathrm{e}^3}{2\sqrt{(17-16\mathrm{e}^{-3})}}\exp(-\dfrac{9}{17-16\mathrm{e}^{-3}})$.

(2) $u(3,3) = \dfrac{\mathrm{e}^3}{\sqrt{(17-16\mathrm{e}^{-3})}}\exp(-\dfrac{9}{17-16\mathrm{e}^{-3}})$.

(3) $u(3,3) = \dfrac{3\mathrm{e}^3}{\sqrt{(17-16\mathrm{e}^{-3})^3}}\exp(-\dfrac{9}{17-16\mathrm{e}^{-3}})$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 4w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = (\pi - t)^2$ si $t \in [0,\pi[$ y $g(t) = \sin(2t)$ si $t \in [\pi,+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{7\cdot 2^7}\left(32 + 4\pi(2\pi-1) - \dfrac{11\exp(-4\pi)}{5}\right)$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{7\cdot 2^7}\left(33 + 4\pi(2\pi-1) - \dfrac{11\exp(-4\pi)}{5}\right)$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{7\cdot 2^7}\left(33 + 4\pi(2\pi-1) - \dfrac{16\exp(-4\pi)}{5}\right)$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas (Versión 1)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^5 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - 2z^2 w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w y los coeficientes c_k de su desarrollo cumplen que:

(9) Los coeficientes c_{3j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{11} = \dfrac{23}{11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(10) Los coeficientes c_{6j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la función w está acotada en $\mathbb{C}$.

(11) Los coeficientes c_{4j+2}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{11} = \dfrac{23}{11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z \exp(z) \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{4} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \exp(z) w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_b, distinta de la función nula, tal que $w_b(z) = 2 + 3\sqrt[4]{z^3} + o(\sqrt[4]{z^3})$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_a, tal que $w_a(z) = 1 + \mathrm{Ln}(z) + o(z)$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_c, distinta de la función nula, tal que $w_c(z) = o(\sqrt[8]{z^7})$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{J_2(4x) - x \dfrac{\mathrm{d}J_2}{\mathrm{d}x}(x) + x^2}{1 - J_0(x)}.$$

El límite anterior existe y vale:

(17) -11.

(18) 11.

(19) $\dfrac{9}{2}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} (\dfrac{x}{2})^{2k+\nu}$.

(A) Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación se obtiene

$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1+t\exp(-t))(i\omega)^2 \hat{u} + \hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. La ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = (-\omega^2(1+t\exp(-t))+1)\hat{u}$ puede escribirse como $\frac{d}{dt}\left(\ln\hat{u} + \omega^2(t-e^{-t}(t+1)) - t\right) = 0$. Por tanto $\hat{u}(\omega,t) = C\exp\left(t - \omega^2(t-(t+1)\exp(-t))\right)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}[x\exp(-x^2)](\omega) = \mathcal{F}\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\exp(-x^2))\right](\omega) = -\frac{i\omega}{2}\mathcal{F}[\exp(-x^2)](\omega) = -\frac{i\omega}{2}\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)$ e imponiendo la condición inicial $\hat{u}(\omega,t) = -\frac{i\omega}{2}\sqrt{\pi}\exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{4}+1\right) - \omega^2(t-(t+1)\exp(-t)) + t\right)$.

Tomando la transformada inversa de Fourier y teniendo en cuenta que $\frac{df}{dx}(x) = \mathcal{F}^{-1}(i\omega\mathcal{F}[f(x)](\omega))$ se obtiene

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{2}\exp(t)\frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4}+1+t-(t+1)\exp(-t)\right)}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\left(\frac{1}{4}+1+t-(t+1)\exp(-t)\right)}\right)\right)$$

$$u(x,t) = \frac{x\exp\left(t - \frac{x^2}{5+4(t-(t+1)\exp(-t))}\right)}{\sqrt{\left(5+4(t-(t+1)\exp(-t))\right)^3}}$$

(B) La función g puede escribirse de la forma

$$g(t) = (\pi - t)^2 \left(\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-\pi) \right) + \mathcal{H}(t-\pi)\, \mathrm{sen}(2(t-\pi)+2\pi)$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se obtiene

$(z^2+2z+4)\, \mathcal{L}[w(t)](z) = 1 + \mathcal{L}[g(t)](z)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[t^\nu](z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$, $\mathcal{L}[\mathrm{sen}\, 2t] = \frac{2}{z^2+4}$ y $\mathcal{L}[\mathcal{H}(t-a) f(t-a)](z) = \exp(-az)\, \mathcal{L}[f(t)](z)$ se obtiene

$$\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{1}{z^2+2z+4}\left[1 + \frac{\pi^2}{z} - \frac{2\pi}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \exp(-\pi z)\left(\frac{-2}{z^3} + \frac{2}{z^2+4} \right) \right]$$

$$\mathcal{L}[w(t)](4) = \frac{1}{7 \cdot 2^7}\left[33 + 8\pi^2 - 4\pi + \frac{11}{5}\exp(-4\pi) \right]$$

(c) La solución del problema de Cauchy dado en el enunciado es una función entera. Por tanto, $w(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación del enunciado se obtiene $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_5 = \frac{1}{10}$, $c_6 = 0$, $c_7 = \frac{1}{7 \cdot 6}$, $c_8 = 0$, $c_9 = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 5}$, $c_{10} = 0$, $c_{11} = \frac{23}{10 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 6}$. Además,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - \left(z^5 + z^5 \sum_{k=2}^{\infty} k c_k z^{k-1}\right) + 2z^2\left(z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k\right) = 0.$$

Igualando a cero el coeficiente en z^l del primer término de la ecuación se obtiene $c_{l+2} = \dfrac{(l-4)c_{l-4} + 2c_{l-2}}{(l+2)\cdot(l+1)}$ $l \geq 6$.

Por tanto, todos los coeficientes de la forma c_{2k} con $k \geq 1$ son nulos, de donde $c_{2(2j+1)} = 0$. Puesto que, $c_{2k+3} > 0$ para todo $k \geq 1$ la función w verifica que $x < w(x+0i)$ si $x \in]0, +\infty[$, por tanto, al no estar acotada w en $]0, +\infty[$ w no está acotada en $\mathbb{C}$.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{-1}{4z\exp(z)}\frac{dw}{dz} - \frac{w}{z}.$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación anterior. Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución está determinado por los autovalores de la matriz

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda = \frac{3}{4}$, $\lambda = 0$. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma

$w(z) = c_1 \sqrt[4]{z^3}\, p_1(z) + c_2\, p_2(z)$, donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un cierto entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$. La función w es tal que

$w(z) = c_1 \sqrt[4]{z^3} + c_2 + o(\sqrt[4]{z^3})$. En consecuencia, para $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ $w(z) = 2 + 3\sqrt[4]{z^3} + o(\sqrt[4]{z^3})$.

Si $w_c(z) = o(\sqrt[8]{z^7}) = o(\sqrt[4]{z^3})$ han de ser $c_1 = c_2 = 0$ y por tanto $w_c(z) = 0$.

(E) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{J_2(4x) - x \frac{dJ_2}{dx}(x) + x^2}{1 - J_0(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{(2x)^2}{\Gamma(3)} - x\left(\frac{1}{\Gamma(3)}\left(\frac{x}{2}\right) + o(x)\right) + x^2}{1 - \left(1 - \frac{1}{\Gamma(2)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - \frac{x^2}{4} + x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)} = 11.$