Ampliación de Matemáticas
Solución primer parcial 2021-2022

Ejerdcicio 1Calcular la solución general de la ecuación en diferencias siguiente:

$$y^{n+1} - y^n - y^{n-1} - y^{n-2} = a$$

Donde a es un número real positivo.

- **Cambio de coordenadas cartesianas a polares:**

$$a + bi \to \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan(b/a) \end{cases}$$

- **Cambio inverso:**

$$\rho \cdot e^{i\theta} \to \begin{cases} a = \rho \cos(\theta) \\ b = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

- **Argumentos de un complejo**

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

donde θ está definido como antes

- **Argumento principal**

$$\operatorname{Arg}(z) = \arg(z) \cap (-\pi, \pi)$$

donde θ está definido como antes

- **Logaritmos de un complejo**

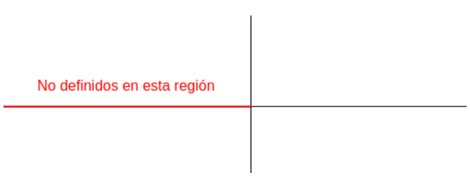
$$\log(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$$

donde $\arg(z)$ denota todos los argumentos posibles

- **Logaritmo principal**

$$\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$$

Nota: ni el argumento principal ni el logaritmo principal están definidos en la siguiente región:



Funciones de variable compleja

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

- **Condiciones de Cauchy-Riemann:**

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$$

- **f es derivable en z_0 si:**
- Satisface Cauchy-Riemann en z_0
- u_x, u_y, v_x, v_y son continuas en z_0
- **f es analítica en z_0 si existe un entorno alrededor de z_0 en el que f es derivable en todos los puntos.**
- **Una función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica si:**

$$\nabla h^2 = 0$$

- **Teorema: Si f es analítica en z_0, entonces u y v son armónicas en z_0.**
- **Teorema: Si A es simplemente conexo, y u es una función armónica, existe v (armónica conjugada) tal que $f = u + iv$ es analítica en A**
- **Cálculo práctico de la armónica conjugada:**
- **Resolvemos $v_y = u_x$ integrando respecto a y, de donde v queda definida salvo una función de x.**
- **Resolvemos $v_x = -u_y$ integrando respecto a x, y aplicamos condiciones iniciales si nos dan.**