Asignatura: ____________ Curso: ________ Grupo: ________

Nombre:

Fecha:

Firma:

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (01-07-2021)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 17w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{dw}{dt}(0) = -1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \frac{1}{2} + \cos^2(t)$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ y $g(t) = \frac{1-\pi}{2} + t$ si $t \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{200}(-3 + \exp(-\pi))$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{200}(6 - \exp(-\pi))$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{200}(4 + \exp(-\pi))$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$(1+t^2)\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{t^2}{1+t^2}w = 0 \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{dw}{dt}(0) = 1.$$

Sean $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema anterior y $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $v(t) = w(t)$ si $t \in [0,+\infty[$ y $v(t) = -w(-t)$ si $t \in]-\infty, 0[$. El desarrollo en serie de Taylor de la función v en 0 es $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Las función w y los coeficientes c_k son tales que:

(9) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2} = -\frac{2k(k-1)c_k + (1 + (k-2)(k-3))c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k \geqslant 4$ y $c_5 = -\frac{1}{20}$.

(10) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2} = -\frac{2(k(k-1)+1)c_k + (k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k \geqslant 4$ y $c_5 = -\frac{1}{20}$.

(11) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2} = -\frac{(2k(k-1)-1)c_k + (k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k \geqslant 4$ y $c_5 = -\frac{1}{20}$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas.
Final Extraordinario Parte 2 (Versión 1). (01-07-2021)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2+2t+t^2}}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u \text{ acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|\mathrm{d}x \text{ acotada en }]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$.
La función u verifica que:

(1) $$u(x,t) = \frac{\exp\left(-\dfrac{x^2}{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\operatorname{ArgCh}(t+1)-\sqrt{2}+\operatorname{ArgCh}(1)\right)}\right)}{\sqrt{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\operatorname{ArgCh}(t+1)-\sqrt{2}+\operatorname{ArgCh}(1)\right)}}.$$

(2) $$u(x,t) = \frac{\exp\left(-\dfrac{x^2}{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\operatorname{ArgSh}(t+1)-\sqrt{2}+\operatorname{ArgSh}(1)\right)}\right)}{\sqrt{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\operatorname{ArgSh}(t+1)-\sqrt{2}+\operatorname{ArgSh}(1)\right)}}.$$

(3) $$u(x,t) = \frac{\exp\left(-\dfrac{x^2}{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\sqrt{2}\right)}\right)}{\sqrt{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\sqrt{2}\right)}}.$$

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (01-07-2021)

D. Sea $\sqrt{z}\ :\ \mathbb{C}\ \to\ \mathbb{C}$ la función definida como $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2})\right)$, donde $\mathrm{Arg}(z)$ es el argumento principal de z. Considérese la ecuación diferencial

$$z(\cosh(\sqrt{z})-1)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sin(2z)}{8}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \sin(z)w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) El punto $z = 0+\mathrm{i}0$ no es un punto singular regular para la ecuación del enunciado.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $w_{s2}(z) = o(z^{\frac{1}{4}})$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, distinta de la función nula, tal que $w_{s3}(z) = o(z^{\frac{1}{2}})$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = x(1-x) \quad \text{si } x \in [0,1], \quad u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin [0,1],$$

$$u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times[0,+\infty[, \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u(s,y)|\mathrm{d}s \text{ acotada en } [0,+\infty[$$

La función u verifica que:

(17) $u(1,\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(-\alpha + \frac{\alpha}{2}\ln(1+\frac{1}{2\alpha^2}) + \alpha^2\arctan(\frac{1}{\alpha})\right).$

(18) $u(1,\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(-\alpha + \frac{\alpha}{2}\ln(1+\frac{1}{\alpha^2}) + \alpha^2\arctan(\frac{1}{\alpha})\right).$

(19) $u(1,\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(-\alpha + \frac{\alpha}{2}\ln(1+\frac{1}{2\alpha^2}) + \alpha^2(\arctan(\frac{3}{2\alpha}) - \arctan(\frac{1}{2\alpha}))\right).$

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota: $u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t.$
