E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1er Apellido : SOLUCIÓN 2do Apellido : Nombre :	Curso 17/18 (28.06.18) Tiempo 1h. 20 m. Valor 15 puntos 1a Parte

***A*. (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución del siguiente problema de condiciones iniciales en ecuaciones en diferencias

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n}, \qquad \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{0} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2-4 = \lambda^2+2\lambda-3$

$\Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

$\lambda=1;\ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$\lambda=-3;\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$

Sol General

$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = A\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + B\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}(-3)^n$

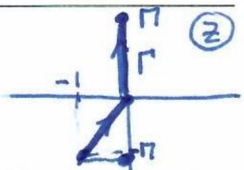
$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^0 = \begin{Bmatrix} A+B \\ 2(A-B) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{3}{4},\ B = 1/4$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = \frac{3}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}(-3)^n}$$

***B*. (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I_1 = \int_\Gamma \left(\bar{z} + |z|^2\right)\, \mathrm{d}z,$$



donde Γ es la poligonal compuesta por los segmentos $z(t) = t + \mathrm{i}\,\pi\, t$ para $t \in [-1, 0]$ y $z(t) = \mathrm{i}\, t$ para $t \in [0, \pi]$, orientada de modo que comienza en el punto $-(1 + \pi\, \mathrm{i})$ y termina en el punto $\pi\, \mathrm{i}$.

Abajo

$$\boxed{I_1 = \frac{2\pi^2-1}{6} + i\,\frac{\pi}{3}(2\pi^2+1)}$$

***C*. (3 puntos)** Para la misma curva Γ del apartado anterior, anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I_2 = \int_\Gamma z\, \mathrm{e}^z\, \mathrm{d}z,$$

.

$F(z) = ze^z - e^z$

$F'(z) = \cancel{e^z} + ze^z - \cancel{e^z}$

$$\boxed{I_2 = \left(1-\frac{2}{e}\right) - i\pi\left(1+\frac{1}{e}\right)}$$

$I_2 = \left[ze^z - e^z\right]_{-(1+\pi i)}^{\pi i} =$

$= i\pi e^{i\pi} - e^{i\pi} + (1+i\pi+1)e^{-(1+\pi i)}$

$= -i\pi + 1 + \frac{2+i\pi}{e}(-1) =$

$= \left(1-\frac{2}{e}\right) - i\pi\left(1+\frac{1}{e}\right)$

NOTA.- Algunas integrales y primitivas que aparecen al resolver los apartados anteriores se obtienen fácilmente integrando por partes.

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

Punto B

$I_1 = \int_{-1}^{0} \left[t - i\pi t + (1+\pi^2)t^2\right](1+\pi i)\,dt + \int_0^{\pi} (-it + t^2)\, i\, dt =$

$= \left[(1+\pi^2)\frac{t^2}{2} + (1+\pi^2)(1+\pi i)\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2} + i\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} =$

$= (1+\pi^2)\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + i\frac{\pi}{3}\right] + \frac{\pi^2}{2} + i\frac{\pi^3}{3} = -(1+\pi^2)\frac{1}{6} + \frac{\pi^2}{2} + i\frac{\pi}{3} + i\frac{\pi^3}{3} + i\frac{\pi^3}{3} =$

$= \frac{2\pi^2-1}{6} + i\frac{\pi}{3}(2\pi^2+1)$

$$(*) = \frac{-\left(1-\frac{z^2}{12}+\cdots\right)}{z^3\left(1-\frac{z^2}{6}+\cdots\right)} = -\frac{1}{z^3}\left(1+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)z^2+\cdots\right) =$$

$$= -\frac{1}{z^3}-\frac{1}{12z}+\cdots$$

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el residuo en el origen de la función:

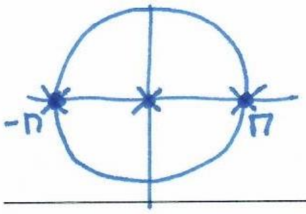
$$f(z) = \frac{2\,(\cos z - 1)}{z^4 \sin z}, = \frac{2\left(-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)}{z^5-\frac{z^7}{3!}+\cdots} = (*)$$

así como el radio exterior, R_e, de la región de convergencia del correspondiente desarrollo de Laurent.

$$z=\pm\pi \Rightarrow \lim_{z\to\pm\pi} f(z) =$$

$$= \lim_{z\to\pm\pi} \frac{-4}{\pi^4 \sin(z)} = \infty$$

$$R_e = \pi$$



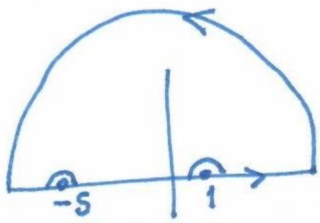
$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Res}(f,0) = \frac{-1}{12} \\ R_e = \pi \end{array}}$$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$x^2+4x-5=0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4+5} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2+4x-5} \mathrm{d}x.$$



$$I = \left(\operatorname{Res}(f,1)+\operatorname{Res}(f,-5)\right)\pi i =$$

$$= \pi i \left[\frac{e^{i\pi/2}}{6} + \frac{e^{-i\frac{5\pi}{2}}}{-6}\right] =$$

$$\boxed{I = -\frac{\pi}{3}}$$

$$= \pi i \left[\frac{i}{6}+\frac{i}{6}\right] = -\frac{\pi}{3}$$