SolucTestExamAMPart2_23_01_e14.pdf

Wiskas

Ampliación de Matemáticas

3º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

23-01-2014

Soluciones

$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ix}$

Ampliación de Matemáticas (Parte 2)

A. Considérese la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2+1}\,dx. = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}dx}{x^2+1} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} =$$

El valor de la integral anterior es:

$$= \frac{2\pi i}{4}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{1+z^2}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2iz}}{1+z^2}, -i\right) + 2\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right)\right] = \frac{\pi i}{2}\left[\frac{e^{-2}}{2i} - \frac{e^{-2}}{-2i} + \frac{2}{2i}\right] = \frac{\pi}{4}2\left[1+e^{-2}\right]$$

(1) $\frac{\pi}{2}(1+\cos(2))$ | (2) $\frac{\pi}{2}(1+\exp(-2))$

(3) $\frac{\pi}{2}$. | (4) Ninguno de los otros tres valores.

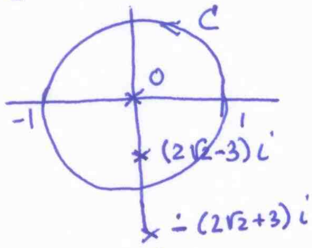
B. Considérese la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{3+\sin(\theta)}\,d\theta. = \int_C \frac{\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{2i}\,dz}{iz\left[3+\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{2i}\right]} = \int_C \frac{z^2-1}{z\,(z^2+6iz-1)}\,\frac{dz}{i}$$

El valor de la integral anterior es:

(5) $2\pi(1-\frac{3}{\sqrt{2}})$. | (6) $\pi(2-\frac{3}{2\sqrt{2}})$.

(7) $\pi(2-\frac{3\sqrt{2}}{2})$. | (8) Ninguno de los otros tres valores.



De donde

$$I = \frac{2\pi i}{i}\left[\operatorname{Res}(f(z),0) + \operatorname{Res}(f(z),(2\sqrt{2}-3)i)\right]$$

con $f(z) = \frac{z^2-1}{z(z^2+6iz-1)}$

$\operatorname{Res}(f(z),0) = 1$

$\operatorname{Res}(f(z),(2\sqrt{2}-3)i) = \frac{-(2\sqrt{2}-3)^2-1}{(2\sqrt{2}-3)i\,(2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}+3)i} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$I = 2\pi\left(1-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \pi\left(2-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Considérese el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n} + 2^n \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

del que se sabe que admite una solución particular del tipo $2^n\,\mathbf{V}$, con $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ vector constante. Entonces:

C. El valor de dicho vector es:

(9) $\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ | (10) $\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

(11) $\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ | (12) Ninguno de los anteriores

D. La segunda componente de la solución correspondiente a la condición inicial $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ es:

(13) $y^n = \frac{2}{3}4^n - 2^n + \frac{1}{3}$ | (14) $y^n = \frac{2}{3}(4^n - 1)$

(15) $y^n = 2^n - 1$ | (16) $y^n = \frac{1}{3}(4^n - 2^n)$

probando con $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = 2^n\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ la ecuación se cumple idénticamente

$$2^n\begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} = 2^n\left[\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}\right] = 2^n\begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Autovalores de $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ son $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

Solución general $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = A\,4^n \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\text{autovector } \lambda_1=4} + B\,1^n \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}}_{\text{autovector } \lambda_2=1} + \underbrace{2^n\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{sol. particular}}$

para $n=0$, $\begin{Bmatrix} A+B-1 \\ A-2B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = 2/3 \\ B = 1/3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3} - 2^n \\ \frac{2}{3}4^n - \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$

SOLUCIONES 23-01-2014
PARTE 2

E. Considérese el problema de Cauchy definido por

Transformando por Laplace

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{para } t \in]0, +\infty[,$$

$$u_1(0) = u_2(0) = 1.$$

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + p\begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{1+s^2} \\ \frac{s}{1+s^2} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

Sean $D \subset \mathbb{C}$ un dominio, $\tilde{u}_1 : D \to \mathbb{C}$ y $\tilde{u}_2 : D \to \mathbb{C}$ las transformadas de Laplace de las funciones u_1 y u_2. Sobre las funciones $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ se puede afirmar que:

(17) $\tilde{u}_1(t) = \dfrac{s^3 - 3s^2 - 4}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$, $\tilde{u}_2(t) = \dfrac{s^3 + 5s^2 + 5}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$.

(18) $\tilde{u}_1(t) = \dfrac{s^3 - 3s^2 - 4}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$, $\tilde{u}_2(t) = \dfrac{s^3 + 3s^2 + 5}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$.

(19) $\tilde{u}_1(t) = \dfrac{s^3 - s^2 - 4}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$, $\tilde{u}_2(t) = \dfrac{s^3 + 3s^2 + 5}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-s & -2 \\ 3 & 1-s \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(s^2+2)}{s^2+1} \\ -\frac{s^2+s+1}{s^2+1} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{[(s-1)^2+6]}\begin{pmatrix} 1-s & 2 \\ -3 & 1-s \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} -\frac{(s^2+2)}{s^2+1} \\ -\frac{s^2+s+1}{s^2+1} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s^2+1)[(s-1)^2+6]}\begin{Bmatrix} s^3-3s^2-4 \\ s^3+3s^2+5 \end{Bmatrix}$$

F. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$$u(x,0) = \exp(-x^2) \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0, \quad \text{para todo } t \in]0,+\infty[.$$

Transformando por Fourier

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} &= (i\omega - \omega^2)\hat{u} \\ \hat{u}(\omega,0) &= \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(21) $\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\dfrac{\cos(2)+\sin(2)}{\exp(5)}$.

(22) $\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\dfrac{\cos(2)+\mathrm{i}\sin(2)}{\exp(5)}$.

(23) $\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\dfrac{\cos(2)+\mathrm{i}\sin(2)}{\exp(9/4)}$.

(24) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota $\mathcal{F}(\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}}\exp(-\dfrac{x^2}{4a})) = \exp(-\omega^2 a), a > 0.$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\, e^{-1} e^{-4} e^{2i} = \sqrt{\pi}\,\frac{\cos 2 + i\sin 2}{e^5}$$

G. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(1,\theta,t) = 0 \quad (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(r,\theta,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(J_0(ar))\cos(\theta), \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde a es un número real mayor que cero tal que $J_1(a) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar mediante el desarrollo $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r)$ donde (λ_{m1}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(r)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(25) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.

(26) $u(r,\theta,t) = -a\exp(-a^2t)J_1(ar)\cos(\theta)$.

(27) $u(r,\theta,t) = -\dfrac{1}{a}\exp(-a^2t)J_1(ar)\cos(\theta)$.

(28) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Obsérvese que al ser $\dfrac{d}{d\xi}(J_0(\xi)) = -J_1(\xi) \Rightarrow \dfrac{d}{dr}(J_0(ar)) = -a\,J_1(ar)$

Por tanto es la ÚNICA solución de la forma $\cos(\theta)\sum_{k=1}^{\infty} W_{k1}(t)\,J_1(\lambda_{k1}t)$ que cumple tanto la ecuación como las condiciones iniciales y de contorno