(A) Tomando la transformada de Fourier, con respecto a x, en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (2+\operatorname{sen} t)(i\omega)^2 \hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Integrando la ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = -\omega^2(2+\operatorname{sen} t)\hat{u}$ se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C\exp(-\omega^2(2t-\cos t))$.

Teniendo en cuenta $\mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)$, e imponiendo la condición inicial se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\omega^2(2t-\cos t) - \frac{\omega^2}{4} - \omega^2\right)$.

Tomando la transformada inversa se obtiene

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{5+8t-4\cos t}}\exp\left(-\frac{x^2}{5+8t-4\cos t}\right).$$

(B) La función g puede escribirse en la forma $g(t) = (1-t^2)(H(t) - H(t-1))$

$= (1-t^2)H(t) - H(t-1)(1-t)(2+t-1) = H(t)(1-t^2) + H(t-1)(t-1)(2+t-1)$.

Tomando transformadas de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $(z^2+2z+8)\mathcal{L}[w](z) =$ $1 + \mathcal{L}[g](z)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[t^\nu](z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$

y $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = \exp(-az)\mathcal{L}[f](z)$ se obtiene

$$\mathcal{L}[w](z) = \frac{1}{z^2+2z+8}\left[1 + \frac{1}{z} - \frac{2}{z^3} + \exp(-z)\left(\frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right)\right].$$

Por tanto, $\mathcal{L}[w](2) = \frac{1}{64}\left[5 + 3\exp(-2)\right]$.

(c) La solución del problema de Cauchy dado en el enunciado es una función entera. Por tanto, $w(z) = iz + \sum_{k \geq 2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación del enunciado se obtiene $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$, $c_7 = \frac{1}{7 \cdot 6}$.

Además, $\sum_{k \geq 2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - z^4 (z + \sum_{k \geq 2}^{\infty} c_k z^k) = 0$. Igualando a cero el coeficiente de z^j del primer término de la ecuación se obtiene, para $j \geq 8$, $c_j = \frac{c_{j-6}}{j(j-1)}$. Por tanto, sólo son distintos de cero los coeficientes de la forma c_1, c_{6k+1} para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la función w es impar, la restricción de w al intervalo $[0, +\infty[$ es monótona creciente y no acotada puesto que $\frac{x^7}{7 \cdot 6} \leq w(x + 0i)$ para $x \in [0, +\infty[$. La función w es impar, por consiguiente, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(-x) = - \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{z}\,\frac{\cosh z}{2}\,\frac{dw}{dz} + \frac{1}{z}\,\frac{(1+z)}{\exp(z)}\,w.$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación anterior. Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución está determinada por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, es decir $\lambda = \frac{1}{2}$ y $\lambda = 0$. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $w(z) = C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\,p_2(z)$ donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un cierto entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$.

Para $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$ $\lim_{z\to 0} C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\,p_2(z) = 0$.

Para todo C_1, C_2 $\lim_{z\to 0} \dfrac{C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\,p_2(z)}{\ln z} = 0$.

El $\lim_{z\to 0} \dfrac{C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\,p_2(z)}{\sqrt{z}} = 0$ si y solo si $C_1 = C_2 = 0$.

E

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_2(4x)}{1-J_0(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\Gamma(3)}\left(\frac{4x}{2}\right)^2 + o(x^2)}{1-\left(1-\frac{1}{\Gamma(2)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)} = 8.$$