Asignatura: ____________ Curso: ______ Grupo: ______

Nombre:

Fecha:

Firma:

Ampliación de Matemáticas (Versión 1), (19-12-2016)

A. La transformada de Fourier, $F = F(\omega)$, de la función $f(t) = \dfrac{\pi}{t^2 + \pi^2}$ es (NOTA.- Téngase en cuenta que la transformada de $\mathrm{e}^{-a|t|}$, con $a > 0$, es $f(t) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$):

(1) $\pi\, \mathrm{e}^{\pi|\omega|}$. (2) $\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-(|\omega|/\pi)}$.

(3) $\pi\, \mathrm{e}^{-\pi|\omega|}$. (4) $\pi\, \mathrm{e}^{-(|\omega|/\pi)}$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 5w(t) = g(t) \text{ en }]0, +\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1,$$

donde $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \sin(t)$ si $t \in [0, \pi[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [\pi, +\infty[$. Sobre la función w se puede afirmar que:

(5) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(3) = \dfrac{11 - \exp(-3\pi)}{200}$.

(6) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(3) = \dfrac{11 + \exp(-3\pi)}{200}$.

(7) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(3) = \dfrac{1 - \exp(-3\pi)}{200}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - (z^2 + z^6)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 0.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_{4j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que no es par ni impar.

(10) Los coeficientes c_{4j+3}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son no nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es impar .

(11) Los coeficientes c_{4j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es par.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio C. Sobre la función w puede afirmarse que:

(13) La restricción de w al eje real es una función que toma valores reales y tiene un mínimo relativo.

(14) La restricción de w al eje real es una función que toma valores reales y tiene un máximo relativo.

(15) La restricción de w al eje real es una función que toma valores reales y tiene un punto de inflexión.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese la ecuación diferencial

$$z\exp(z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \frac{(2+z)^2}{9\sin(z)}w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(17) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w_1(z) - 2\sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[3]{z^2}} = 0$.

(18) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w_1(z)}{\sqrt[6]{z^5}} = 0$.

(19) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w_2(z)}{\ln(z)} = 1$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

F. El valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_3(x)}{\int_0^x J_2(t)\mathrm{d}t}.$$

es:

(21) $\dfrac{1}{2}$. **(22)** $\dfrac{1}{4}$.

(23) $\dfrac{1}{8}$. **(24)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\dfrac{x}{2})^{2k+\nu}$.

A

Por reciprocidad:

Si $\mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \mathcal{F}(F)(\omega) = 2\pi f(-\omega)$

Luego, si $f(t) = e^{-a|t|}$ y $F(\omega) = \dfrac{2a}{\omega^2+a^2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \mathcal{F}\left(\dfrac{2a}{t^2+a^2}\right)(\omega) = 2\pi\, e^{-a|-\omega|} = 2\pi\, e^{-a|\omega|}$

$\Longrightarrow \mathcal{F}\left(\dfrac{a}{t^2+a^2}\right)(\omega) = \pi\, e^{-a|\omega|} \underset{a=\pi}{\Longrightarrow} \pi\, e^{-\pi|\omega|}$

(B) La función g puede escribirse de la forma
$g(t) = (\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-\pi))\,\text{sen}\,t = \mathcal{H}(t)\,\text{sen}\,t - \mathcal{H}(t-\pi)\,\text{sen}\,(t-\pi+\pi)$
$= \mathcal{H}(t)\,\text{sen}\,t + \mathcal{H}(t-\pi)\,\text{sen}(t-\pi)$. Tomando transformadas de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales

$(z^2+2z+5)\,\mathcal{L}(w) = 1 + \mathcal{L}(g)$. De las propiedades de la transformada de Laplace y teniendo en cuenta que
$\mathcal{L}(\text{sen}(t))(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$

$$\mathcal{L}(w) = \frac{1}{(z+1)^2+4}\left(1 + \frac{1+\exp(-\pi z)}{z^2+1}\right).$$

$$\mathcal{L}(w)(3) = \frac{1}{20}\left(\frac{11+\exp(-3\pi)}{10}\right)$$

(c) En virtud de la afirmación del enunciado y de las condiciones del problema de Cauchy $w(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$.

Sustituyendo en la ecuación

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - (z^2+z^6) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k+2} - \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k+6} = 0$$

de donde se obtiene $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = \frac{1}{4\cdot 3}$, $c_5 = c_6 = c_7 = 0$

$c_8 = \frac{1}{8\cdot 7}$ y $c_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)}(c_{k-2} + c_{k-6})$. Teniendo

en cuenta los valores $c_0 \cdots c_8$ la recurrencia anterior se puede escribir como

$$c_{4l} = \frac{1}{4l\,(4l-1)}\left(c_{4(l-1)} + c_{4(l-2)}\right).$$

Por tanto, los únicos términos no nulos del desarrollo son los de la forma c_{4l} con $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y la función es par $w(-z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{4l}(-z)^{4l} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{4l} z^{4l}$.

(D) $\frac{dw}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} 4l\, C_{4l}\, z^{4l-1}$. Puesto que $C_{4l} > 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$ w es monótona creciente en $[0, +\infty[$ y par entonces tiene un único mínimo en $x = 0$.

(E) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{-1}{z\exp(z)}\frac{dw}{dz} + \frac{(2+z)^2}{9z\,\mathrm{sen}\,z\,\exp(z)}w.$$

$z=0$ es un punto singular regular. En un entorno de $z=0$, la solución está determinada por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{9} & 0 \end{pmatrix}$ es decir, $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$.

Por tanto la solución general de la ecuación es de la forma

$$w(z) = C_1 z^{2/3} p_1(z) + C_2 z^{-2/3} p_2(z)$$

donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas con $p_1(0)=p_2(0)=1$.

En consecuencia, para $C_1=2$ y $C_2=0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{2z^{2/3}p_1(z) - 2z^{2/3}}{z^{2/3}} = 0$$

F $\lim_{x\to 0} \frac{J_3(x)}{\int_0^x J_2(t)\,dt} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{dJ_3}{dx}(x)}{J_2(x)} = \frac{1}{2}$.

puesto que J_2 y J_3 son funciones analíticas y

$J_3(x) = \frac{x^3}{\Gamma(4)\,8} + o(x^4) = \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 8} + o(x^4)$, $\frac{dJ_3}{dx}(x) = \frac{x^2}{2\cdot 8} + o(x^3)$

$J_2(x) = \frac{x^2}{2\cdot 4} + o(x^3)$.