Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 + t\exp(-t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = x\exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

1. $u(3,3) = -\dfrac{\mathrm{e}^3}{2\sqrt{(17-16\mathrm{e}^{-3})}}\exp(-\dfrac{9}{17-16\mathrm{e}^{-3}})$
2. $u(3,3) = \dfrac{\mathrm{e}^3}{\sqrt{(17-16\mathrm{e}^{-3})}}\exp(-\dfrac{9}{17-16\mathrm{e}^{-3}})$.
3. $u(3,3) = \dfrac{3\mathrm{e}^3}{\sqrt{(17-16\mathrm{e}^{-3})^3}}\exp(-\dfrac{9}{17-16\mathrm{e}^{-3}})$.
4. No es cierta ninguna de las tres respuestas anteriores.

Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 4w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = (\pi - t)^2$ si $t \in [0,\pi[$ y $g(t) = \sin(2t)$ si $t \in [\pi,+\infty[$.

La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ es tal que:

1. $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{7 \cdot 2^7}\left(32 + 4\pi(2\pi - 1) - \dfrac{11\exp(-4\pi)}{5}\right)$.
2. $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{7 \cdot 2^7}\left(33 + 4\pi(2\pi - 1) + \dfrac{11\exp(-4\pi)}{5}\right)$.
3. $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{7 \cdot 2^7}\left(33 + 4\pi(2\pi - 1) - \dfrac{16\exp(-4\pi)}{5}\right)$.
4. No es cierta ninguna de las tres respuestas anteriores.

Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^5 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - 2z^2 w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w y los coeficientes c_k de su desarrollo cumplen que:

1. Los coeficientes c_{3j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{11} = \dfrac{23}{11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$
2. Los coeficientes c_{6j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la función w está acotada en $\mathbb{C}$.
3. Los coeficientes c_{4j+2}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{11} = \dfrac{23}{11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.
4. No es cierta ninguna de las tres respuestas anteriores.

Considérese la ecuación diferencial

$$z\exp(z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\exp(z)w=0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, verifican que:

1. Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_b, distinta de la función nula, tal que $w_b(z)=2+3\sqrt[4]{z^3}+o(\sqrt[4]{z^3})$.
2. Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_a, tal que $w_a(z)=1+\mathrm{Ln}(z)+o(z)$.
3. Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_c, distinta de la función nula, tal que $w_c(z)=o(\sqrt[8]{z^7})$.
4. No es cierta ninguna de las tres respuestas anteriores.

Considérese el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_2(4x) - x\dfrac{\mathrm{d}J_2}{\mathrm{d}x}(x) + x^2}{1 - J_0(x)}.$$

El límite anterior existe y vale:

1. -11.
2. 11.
3. $\dfrac{9}{2}$.
4. No es cierta ninguna de las tres respuestas anteriores.

Las respuestas marcadas en amarillo son las correctas.

(A) Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación se obtiene

$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \left(1+t\exp(-t)\right)(i\omega)^2\hat{u} + \hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. La ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = \left(-\omega^2(1+t\exp(-t)) + 1\right)\hat{u}$ puede escribirse como $\frac{d}{dt}\left(\ln\hat{u} + \omega^2\left(t - e^{-t}(t+1)\right) - t\right) = 0$. Por tanto $\hat{u}(\omega,t) = C\exp\left(t - \omega^2\left(t-(t+1)\exp(-t)\right)\right)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}[x\exp(-x^2)](\omega) = \mathcal{F}\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\exp(-x^2))\right](\omega) = -\frac{i\omega}{2}\mathcal{F}[\exp(-x^2)](\omega) = -\frac{i\omega}{2}\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)$ e imponiendo la condición inicial $\hat{u}(\omega,t) = -\frac{i\omega}{2}\sqrt{\pi}\exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{4}+1\right) - \omega^2\left(t-(t+1)\exp(-t)\right) + t\right)$.

Tomando la transformada inversa de Fourier y teniendo en cuenta que $\frac{df}{dx}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(i\omega\mathcal{F}[f(x)](\omega)\right)$ se obtiene

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{2}\exp(t)\frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4}+1+t-(t+1)\exp(-t)\right)}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\left(\frac{1}{4}+1+t-(t+1)\exp(-t)\right)}\right)\right)$$

$$u(x,t) = \frac{x\exp\left(t - \frac{x^2}{5+4(t-(t+1)\exp(-t))}\right)}{\sqrt{\left(5+4(t-(t+1)\exp(-t))\right)^3}}$$

B La función g puede escribirse de la forma

$$g(t) = (\pi - t)^2 \left(\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-\pi) \right) + \mathcal{H}(t-\pi)\, \mathrm{sen}(2(t-\pi)+2\pi)$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se obtiene

$(z^2 + 2z + 4)\, \mathcal{L}[w(t)](z) = 1 + \mathcal{L}[g(t)](z)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[t^\nu](z) = \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$, $\mathcal{L}[\mathrm{sen}\, 2t] = \dfrac{2}{z^2+4}$ y

$\mathcal{L}[\mathcal{H}(t-a) f(t-a)](z) = \exp(-az)\, \mathcal{L}[f(t)](z)$ se obtiene

$$\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{1}{z^2+2z+4}\left[1 + \frac{\pi^2}{z} - \frac{2\pi}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \exp(-\pi z)\left(\frac{-2}{z^3} + \frac{2}{z^2+4}\right)\right]$$

$$\mathcal{L}[w(t)](4) = \frac{1}{7\cdot 2^7}\left[33 + 8\pi^2 - 4\pi + \frac{11}{5}\exp(-4\pi)\right]$$

(c) La solución del problema de Cauchy dado en el enunciado es una función entera. Por tanto, $w(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación del enunciado se obtiene $c_2=0, c_3=0, c_4=0, c_5=\frac{1}{10}, c_6=0, c_7=\frac{1}{7\cdot 6}$, $c_8=0, c_9=\frac{1}{9\cdot 8\cdot 5}, c_{10}=0, c_{11}=\frac{23}{10\cdot 11\cdot 7\cdot 6}$. Además,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} - \left(z^5 + z^5 \sum_{k=2}^{\infty} k c_k z^{k-1}\right) + 2z^2\left(z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k\right) = 0.$$

Igualando a cero el coeficiente en z^l del primer término de la ecuación se obtiene $c_{l+2} = \dfrac{(l-4)c_{l-4} + 2c_{l-2}}{(l+2)\cdot(l+1)}$ $l \geq 6$.

Por tanto, todos los coeficientes de la forma c_{2k} con $k \geq 1$ son nulos, de donde $c_{2(2j+1)} = 0$. Puesto que, $c_{2k+3} > 0$ para todo $k \geq 1$ la función w verifica que $x < w(x+0i)$ si $x \in]0,+\infty[$, por tanto, al no estar acotada w en $]0,+\infty[$ w no está acotada en $\mathbb{C}$.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{-1}{4z\exp(z)}\frac{dw}{dz} - \frac{w}{z}.$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación anterior. Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución está determinado por los autovalores de la matriz

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda = \frac{3}{4}$, $\lambda = 0$. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma

$w(z) = C_1 \sqrt[4]{z^3}\, p_1(z) + C_2\, p_2(z)$, donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un cierto entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$. La función w es tal que

$w(z) = C_1\sqrt[4]{z^3} + C_2 + o\left(\sqrt[4]{z^3}\right)$. En consecuencia, para $C_1 = 3$, $C_2 = 2$ $w(z) = 2 + 3\sqrt[4]{z^3} + o\left(\sqrt[4]{z^3}\right)$.

Si $w_c(z) = o\left(\sqrt[8]{z^7}\right) = o\left(\sqrt[4]{z^3}\right)$ han de ser $C_1 = C_2 = 0$ y por tanto $w_c(z) = 0$.

(E) $$\lim_{x\to 0} \frac{J_2(4x) - x\frac{dJ_2}{dx}(x) + x^2}{1 - J_0(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(2x)^2}{\Gamma(3)} - x\left(\frac{1}{\Gamma(3)}\left(\frac{x}{2}\right) + o(x)\right) + x^2}{1 - \left(1 - \frac{1}{\Gamma(2)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - \frac{x^2}{4} + x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)} = 11.$$