

2 Parcial 2018.pdf



Adrigoka



Ampliación de Matemáticas



3º Grado en Ingeniería Aeroespacial



**Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del
Espacio**
Universidad Politécnica de Madrid

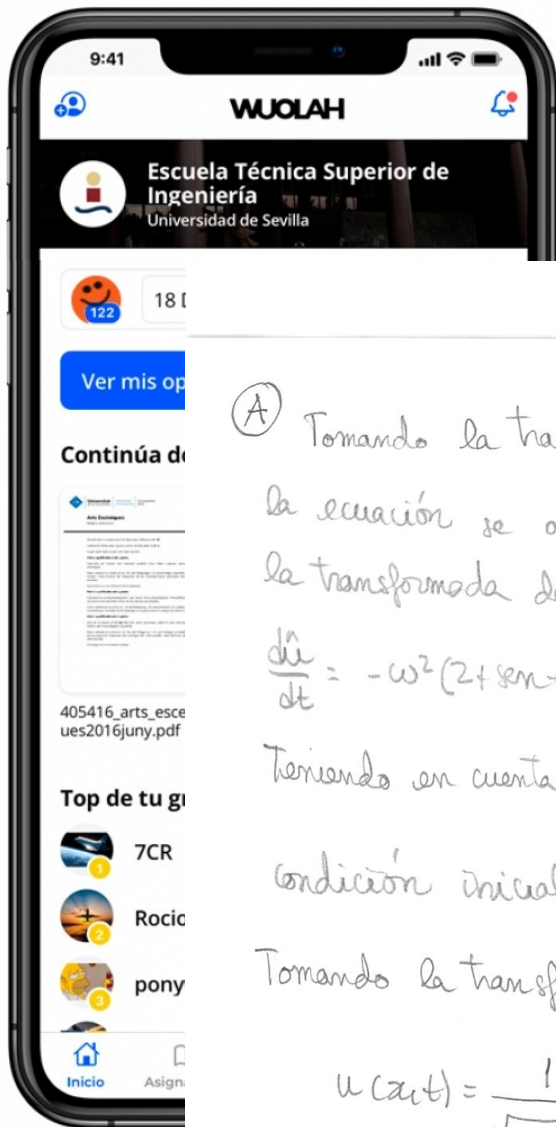


Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.





**KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO**



Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.



(A) Tomando la transformada de Fourier, con respecto a x , en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (2+8xt)(i\omega)^2 \hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega, t)$ es la transformada de Fourier de $u(x, t)$. Integrando la ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = -\omega^2(2+8xt)\hat{u}$ se obtiene $\hat{u}(\omega, t) = C \exp(-\omega^2(2t - 4xt))$.
 Teniendo en cuenta $\mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \sqrt{\pi} \exp(-\frac{\omega^2}{4})$, e imponiendo la condición inicial se obtiene $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi} \exp(-\omega^2(2t - 4xt) - \frac{\omega^2}{4})$.
 Tomando la transformada inversa se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{5+8t-4\omega t}} \exp\left(-\frac{x^2}{5+8t-4\omega t}\right).$$

⑤ La función g puede escribirse en la forma $g(t) = (1-t^2)(H(t) - H(t-1))$

$$= (1-t^2)H(t) - H(t-1)(1-t)(2+t-1) = H(t)(1-t^2) + H(t-1)(t-1)(2+t-1).$$

Tomando transformadas de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $(z^2 + 2z + 8)L[w](z) =$

$$1 + L[g](z). \text{ Teniendo en cuenta que } L[t^n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

y $L[H(t-a)f(t-a)] = \exp(-az)L[f](z)$ se obtiene

$$L[w](z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 8} \left[1 + \frac{1}{z} - \frac{2}{z^3} + \exp(-z) \left(\frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^3} \right) \right].$$

$$\text{Por tanto, } L[w](z) = \frac{1}{64} [5 + 3 \exp(-z)].$$

© La solución del problema de Cauchy dado en el enunciado es una función entera. Por tanto, $w(z) = iz + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$.

Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación del enunciado se obtiene $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$, $c_7 = \frac{1}{7 \cdot 6}$.

Además, $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} - z^4(z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k) = 0$. Igualando a

cero el coeficiente de z^j del primer término de la ecuación se obtiene, para $j \geq 8$, $c_j = \frac{c_{j-6}}{j(j-1)}$. Por tanto,

sólo son distintos de cero los coeficientes de la forma c_1, c_{6k+1} para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la función

w es impar, la restricción de w al intervalo $[0, +\infty[$ es monótona creciente y no acotada puesto que $\frac{z^7}{7 \cdot 6} \leq w(z+0i)$

para $z \in [0, +\infty[$. La función w es impar, por

consiguiente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(-x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.



Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.



① La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z} \frac{\cosh z}{2} \frac{dw}{dz} + \frac{1}{z} \frac{(1+z)}{\exp(z)} w.$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación anterior. Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución está determinada por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, es decir $\lambda = \frac{1}{2}$ y $\lambda = 0$. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $w(z) = C_1 \sqrt{z} p_1(z) + C_2 p_2(z)$ donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un cierto entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$.

Para $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$ $\lim_{z \rightarrow 0} C_1 \sqrt{z} p_1(z) + C_2 p_2(z) = 0.$

Para todo C_1, C_2 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{C_1 \sqrt{z} p_1(z) + C_2 p_2(z)}{\ln z} = 0.$

El $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{C_1 \sqrt{z} p_1(z) + C_2 p_2(z)}{\sqrt{z}} = 0$ si y solo si $C_1 = C_2 = 0.$

⑦

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_2(x)}{1 - J_0(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\Gamma(3)} \left(\frac{4x}{2}\right)^2 + o(x^2)}{1 - \left(1 - \frac{1}{\Gamma(2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)} = 8.$$