E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : __________ 1erapellido : __________ 2doapellido : __________ Nombre : __________	Curso 21/22 (31.01.22) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1er Parcial**(V01)**

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general de la ecuación en diferencias

$$y^{n+1} - 3y^n + 4y^{n-2} = -1$$

B. **(3 puntos)** Anotar y dibujar en el siguiente recuadro el dominio de analiticidad de la función

$$f(z) = \operatorname{Log}\left(1 + e^{az}\right) \text{ con } a > 0$$

Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$\oint_\Gamma \frac{e^{az}}{1 + e^{az}}\, dz$$

siendo Γ el arco de circunferencia de centro el origen y radio $R = \dfrac{\pi}{2a}$ con origen en el punto $z_I = -\dfrac{\pi}{2a}\, i$ y final en el punto $z_F = \dfrac{\pi}{2a}$

C. **(3 puntos)** Anotar el siguiente recuadro la **parte imaginaria** del valor principal de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}\cos(2x)}{x\,\left(x^2+1\right)}\, dx, \qquad x \in \mathbb{R}$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro los valores de n y a para los que existe una función, $f(z)$, analítica en algún dominio de $\mathbb{C}$ tal que

$$\mathrm{Im}\,(f(z)) = xy\,(x^n + ay^n), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Anotar en el siguiente recuadro la expresión general de la función analítica, $f(z)$, en función de $z = x + iy$

Si además $f(z)$ cumple

$$\oint_{|z|=2} f(z)\left(\frac{3}{z^5} + \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} + 2z^2\right) dz = \frac{\pi}{2}\,i$$

anotar la expresión de $f(z)$, en función de $z = x + iy$

E. **(3 puntos)** Dada la función $\quad f(z) = \dfrac{(z-2-i)\left(e^{\pi/(z-2)} - 1\right)}{e^{\pi/(z-2)} + 1}$

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

Anotar en el siguiente recuadro la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en torno a $z_* = 2 - i$ válido en la corona $0 < |z - z_*| < R$, especificando el valor de R.

E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1^{er}apellido : 2^{do}apellido : Nombre :	Curso 21/22 (31.01.22) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1^{er} Parcial**(V02)**

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general de la ecuación en diferencias

$$y^{n+1} - 3y^n + 4y^{n-2} = 2$$

B. **(3 puntos)** Anotar y dibujar en el siguiente recuadro el dominio de analiticidad de la función

$$f(z) = \operatorname{Log}\left(1 + e^{az}\right) \text{ con } a > 0$$

Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$\oint_\Gamma \frac{e^{az}}{1+e^{az}}\, dz$$

siendo Γ el arco de circunferencia de centro el origen y radio $R = \dfrac{\pi}{2a}$ con origen en el punto $z_I = -\dfrac{\pi}{2a}$ y final en el punto $z_F = -\dfrac{\pi}{2a}\, i$

C. **(3 puntos)** Anotar el siguiente recuadro la **parte imaginaria** del valor principal de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}\cos(3x)}{x\ (x^2+1)}\, dx, \qquad x \in \mathbb{R}$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro los valores de n y a para los que existe una función, $f(z)$, analítica en algún dominio de $\mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Im}(f(z)) = xy\,(x^n + ay^n), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Anotar en el siguiente recuadro la expresión general de la función analítica, $f(z)$, en función de $z = x + iy$

Si además $f(z)$ cumple

$$\oint_{|z|=2} f(z)\left(\frac{2}{z^5} + \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} + 2z^2\right) dz = \frac{\pi}{2}\, i$$

anotar la expresión de $f(z)$, en función de $z = x + iy$

E. **(3 puntos)** Dada la función $\quad f(z) = \dfrac{(z - 3 - i)\left(e^{\pi/(z-3)} - 1\right)}{e^{\pi/(z-3)} + 1}$

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

Anotar en el siguiente recuadro la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en torno a $z_* = 3 - i$ válido en la corona $0 < |z - z_*| < R$, especificando el valor de R.

Solución Parcial I del examen Ordinario (31-01-2022)

Ejercicio A

Solución general de la ecuación en diferencias

$$y^{n+1} - 3y^n + 4y^{n-2} = A, \qquad n \geq 0, \qquad A \in \mathbb{R}$$

Ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes. Solución: $y^n = y_h^n + y_p^n$

- **Solución general de la ecuación homogénea asociada:** y_h^n

Polinomio característico de la ecuación (se prueban soluciones en la forma $y^n = \lambda^n$):

$$y^{n+1} - 3y^n + 4y^{n-2} = \lambda^{n+1} - 3\lambda^n + 4\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\right) = 0$$

resultando $P(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 1) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 & \alpha_1 = 2 \textbf{ (doble)} \\ \lambda_2 = -1 & \alpha_2 = 1 \textbf{ (simple)} \end{cases}$

$$y_h^n = (C_0 + C_1 n)\, 2^n + C_2(-1)^n$$

- **Solución particular de la ecuación completa:** y_p^n

El término forzante, $g(n) = A$, es solución de una ecuación homogénea de coeficientes constantes, con raíz del polinomio característico $r = 1$. Aplicamos el método del anulador.

$$g(n) = P_1^*(n)(1)^n \quad \text{con } P_1^*(n) = A \text{ (polinomio de grado } \beta = 0)$$

Como $r = 1$ no es raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea, se prueban soluciones de la forma $y_p^n = Q_1(n)\,(1)^n = Q_1(n)$, con $Q_1(n)$ polinomio de grado $\beta = 0$

$$y_p^n = K$$

Introduciendo y_p^n en la ecuación completa conduce a

$$K(1 - 3 + 4) = A \Longleftrightarrow K = \frac{A}{2}$$

Solución general de la ecuación: $\boxed{y^n = (C_0 + C_1 n)\, 2^n + C_2(-1)^n + \frac{A}{2}}$

Ejercicio B

1. Dominio de analiticidad de la función

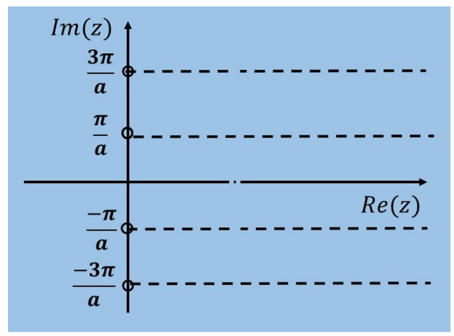
$$f(z) = f(z) = \text{Log}\left(1 + e^{az}\right) \text{ con } a > 0$$

Dominio de analiticidad (D) de la determinación principal del logaritmo: Log$w$ no analítica en $\begin{cases} \text{Re}(w) \leq 0 \\ \text{Im}(w) = 0 \end{cases}$

$$w = 1 + e^{az} = 1 + e^{a(x+iy)} = 1 + e^{ax}\left(\cos(ay) + i\text{sen}(ay)\right)$$

$$\begin{cases} \text{Im}(w) = e^{ax}\text{sen}(ay) = 0 & \Longleftrightarrow \quad y = \dfrac{k\pi}{a}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ & \qquad \downarrow \\ \text{Re}(w) = 1 + e^{ax}\cos(ay) \leq 0 & \Longleftrightarrow \quad 1 + e^{ax}(-1)^k \leq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} k = 2k_1 & 1 + e^{ax} \leq 0 \qquad\qquad (\textbf{Imposible}) \\ k = 2k_1 + 1 & 1 - e^{ax} \leq 0 \Longleftrightarrow e^{ax} \geq 1 \overset{a>0}{\Longleftrightarrow} x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{D = \mathbb{C} - \left\{ z = x + i\,\frac{(2k+1)\pi}{a} \text{ con } x \geq 0, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}}$$



2. Cálculo de

$$\oint_\Gamma \frac{e^{az}}{1 + e^{az}}\,dz$$

siendo Γ el arco de circunferencia de centro el origen y radio $R = \dfrac{\pi}{2a}$ con origen en el punto z_I y final en el punto z_F

- El integrando cumple: $\dfrac{e^{az}}{1 + e^{az}} = a\,f'(z)$ en el dominio D de analiticidad de $f(z)$. Luego

$$F(z) = \frac{f(z)}{a} \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

es la primitiva del integrando en D y hay independencia del camino en D. Como $\Gamma \in D$

$$I = F(z_F) - F(z_I) = \frac{1}{a}\left(f(z_F) - f(z_I)\right)$$

(V01)
$$\left.\begin{array}{l} f(z_I) = f\left(-\dfrac{\pi}{2a}\,i\right) = \text{Log}\left(1 + e^{-i\,\pi/2}\right) = \text{Log}\left(1 - i\right) = \text{Ln}\sqrt{2} - i\,\dfrac{\pi}{4} \\ f(z_F) = f\left(\dfrac{\pi}{2a}\right) = \text{Log}\left(1 + e^{\pi/2}\right) = \text{Ln}\left(1 + e^{\pi/2}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{I = \frac{1}{a}\left(\text{Ln}\left(\frac{1 + e^{\pi/2}}{\sqrt{2}}\right) + i\,\frac{\pi}{4}\right)}$$

(V02)
$$\left.\begin{array}{l} f(z_I) = f\left(-\dfrac{\pi}{2a}\right) = \text{Log}\left(1 + e^{-\,\pi/2}\right) = \text{Ln}\left(1 + e^{-\,\pi/2}\right) \\ f(z_F) = f\left(-\dfrac{\pi}{2a}\,i\right) = \text{Log}\left(1 + e^{-i\,\pi/2}\right) = \text{Log}\left(1 - i\right) = \text{Ln}\sqrt{2} - i\,\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{I = \frac{-1}{a}\left(\text{Ln}\left(\frac{1 + e^{-\,\pi/2}}{\sqrt{2}}\right) + i\,\frac{\pi}{4}\right)}$$

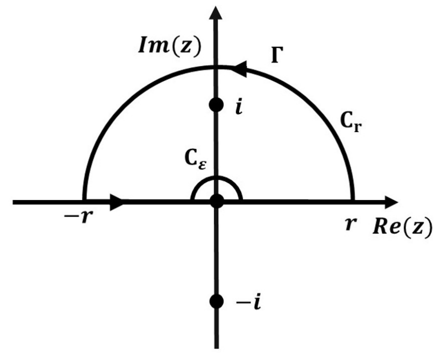
Ejercicio C

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{V.P.}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}\cos(ax)}{x\,(x^2+1)}\,dx\right)\right)=\mathrm{V.P.}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overbrace{\mathrm{sen}(ax)\cos(ax)}^{\mathrm{sen}(2ax)/2}}{x\,(x^2+1)}\,dx\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\,2ax}}{x\,(x^2+1)}\,dx}_{I_c}\right),\qquad a>0$$

Cálculo de: $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz=\oint_\Gamma\frac{e^{i\,2az}}{z\,(z^2+1)}\,dz$

Puntos singulares de $f(z)$ (Ceros de $1/f(z)$):

$$z_1=0,\quad z_2=i,\quad z_3=-i$$



$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=\int_{C_r}f_1(z)e^{2az\,i}\,dz+\int_{T_1}f(x)\,dx+\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz+\int_{T_2}f(x)\,dx=2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);i)$$

$$\begin{cases}\textit{Lema 2:}\ \lim\limits_{|z|\to\infty}\overbrace{\dfrac{1}{z\,(z^2+1)}}^{f_1(z)}=0\implies\lim\limits_{r\to\infty}\displaystyle\int_{C_r}f_1(z)e^{2az\,i}\,dz=0\\[2ex]\textit{Lema 3:}\ \lim\limits_{z\to0}z\,f(z)=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{e^{2az\,i}}{(z^2+1)}=1\implies z=0\text{ es polo simple de }f(z)\implies\lim\limits_{\varepsilon\to0}\displaystyle\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz=-\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);0)=\\ \qquad\qquad=-\pi i\,\lim\limits_{z\to0}z\,f(z)=-\pi i\\[2ex]\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\displaystyle\int_{T_1}f(x)\,dx+\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_{T_2}f(x)\,dx=I_c\end{cases}$$

$$I_c=2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);i)+\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);0)=2\pi i\,\underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{e^{2az\,i}/(z\,(z+i))}{(z-i)};bi\right)}_{\dfrac{e^{-2a}}{i\,(2i)}}+\pi i=\pi i\left(1-e^{-2a}\right)$$

$$\boxed{I=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-2a}\right)}$$

a	I
3	$\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-6}\right)$
2	$\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-4}\right)$

Ejercicio D

1. n y a para los que existe una función, $f(z)$, en algún dominio de $\mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Im}(f(z)) = xy\,(x^n + ay^n), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$f(z)$ analítica en D dominio $\Longrightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = v(x,y)$ debe ser armónica en $D \in \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{(a) } v(x,y) \text{ tiene parciales de primer y segundo orden continuas en } D \\ \text{(b) } v_{xx} + v_{yy} = 0 \text{ en } D \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} v_x = (n+1)x^n y + ay^{n+1} & v_y = a(n+1)y^n x + x^{n+1} \\ v_{xx} = (n+1)n\,x^{n-1}y & v_{yy} = a(n+1)n\,y^{n-1}x \end{array}\right\} \overset{(b)}{\Longleftrightarrow} (n+1)n\,xy\,\left(x^{n-2} + ay^{n-2}\right) = 0 \overset{\forall (x,y) D}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} n = -1 & \forall a \in \mathbb{R} \\ n = 0 & \forall a \in \mathbb{R} \\ n = 2 & a = -1 \end{cases}$$

Como: $n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \boxed{n = 2, \quad a = -1}$ cumpliéndose (b) en todo $\mathbb{R}^2$ ($f(z)$ es entera), con $v(x,y) = xy(x^2 - y^2)$

2. Expresión general de la función analítica, $f(z)$, en función de $z = x + iy$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $v(x,y)$ armónica conjugada de $u(x,y) \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{(a) } u(v,y) \text{ tiene parciales de primer orden continuas en } \mathbb{R}^2 \\ \text{(b) Cumple las condiciones de Cauchy-Riemman en } \mathbb{R}^2 \begin{cases} u_x = v_y = x^3 - 3xy^2 & \text{(b.1)} \\ u_y = -v_x = y^3 - 3yx^2 & \text{(b.2)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\overset{\text{(b.1)}}{\Longrightarrow} u = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + g(y) \Longrightarrow u_y = -3yx^2 + g'(y) \overset{\text{(b.2)}}{\Longleftrightarrow} g'(y) = y^3 \Longrightarrow g(y) = \frac{y^4}{4} + C \text{ con } C \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + C \quad C \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(z) = u + iv = \frac{1}{4}\underbrace{\left(x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + i(4x^3y - 4xy^3)\right)}_{x^4 + 4x^3y\,i - 6x^2y^2 - 4xy^3\,i + y^4 = (x+iy)^4} + C = \boxed{\frac{z^4}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

3. Como $z = 0$ es el único punto singular de $h(z) = f(z)\left(\dfrac{k}{z^5} + \dfrac{3}{z^3} + \dfrac{1}{z} + 2z^2\right)$ interior a $|z| = 2$,

$$\int_{|z|=2} h(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(h(z);0) = \frac{\pi}{2}\,i \Longrightarrow \operatorname{Res}(h(z);0) = \frac{1}{4}$$

El coeficiente de $1/z$ en

$$h(z) = \left(\frac{1}{4}z^4 + C\right)\left(\frac{k}{z^5} + \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} + 2z^2\right)$$

es $\operatorname{Res}(h(z);0) = \dfrac{k}{4} + C = \dfrac{1}{4} \Longleftrightarrow C = \dfrac{1-k}{4}$

k	$f(z)$
3	$\frac{1}{4}\left(z^4 - 2\right)$
5	$\frac{1}{4}\left(z^4 - 4\right)$

Ejercicio E $\quad f(z)=\dfrac{(z-a-i)\,\left(e^{\pi/(z-a)}-1\right)}{e^{\pi/(z-a)}+1}, \qquad a\in\mathbb{R}$

1. **Puntos singulares de** $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}\begin{cases} P(z)=(z-a-i)\,\left(e^{\pi/(z-a)}-1\right) \\ Q(z)=e^{\pi/(z-a)}+1\end{cases}$ Analíticas en $\mathbb{C}-\{a\}$

$$\begin{cases} z=a \\ \text{Ceros de } Q(z) \text{ (ceros de } 1/f\text{): } e^{\pi/(z-a)}+1=0 \Longleftrightarrow e^{\pi/(z-a)}=-1=e^{i\,\pi(1+2k)} \Longleftrightarrow \boxed{z_k=a+\dfrac{i}{(1+2k)}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\dots}\end{cases}$$

Sucesión de puntos que tiende a $z=a$ cuando $k\to\infty$, por lo que $z=a$ no está aislado.

Los puntos $z_k=a+\dfrac{i}{(1+2k)}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\dots$ están aislados.

- $z_0=a+i$ cumple $P(z_0)=0$ y el límite

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\overbrace{\left(e^{\pi/(z_0-a)}-1\right)}^{-2}\overbrace{\lim_{z\to z_0}\frac{z-a-i}{e^{\pi/(z-a)}+1}}^{\frac{0}{0}(L'Hopital)}=(-2)\frac{1}{\dfrac{-\pi}{(z_0-a)^2}\underbrace{e^{\pi/(z_0-a)}}_{-1}}=\frac{-2(z_0-a)^2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

está acotado, por lo que $\boxed{z_0=a+i \text{ es una } \textbf{singularidad evitable} \text{ de } f(z)}$

- El resto de puntos singulares aislados, $z_k=a+\dfrac{i}{(1+2k)}, \quad k=\pm1,\pm2,\dots$ cumplen

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\begin{cases} P(z)=(z-a-i)\,\left(e^{\pi/(z-a)}-1\right) \text{ analítica en } z_k \text{ y } P(z_k)=\left(\dfrac{i}{1+2k}-i\right)(-2)=\dfrac{4ki}{1+2k}\neq 0 \\ \left.\begin{array}{l} Q(z)=e^{\pi/(z-a)}+1 \text{ analítica en } z_k \text{ y } Q(z_k)=0 \\ Q'(z_k)=\dfrac{-\pi}{(z_k-a)^2}\underbrace{e^{\pi/(z_k-a)}}_{-1}=\dfrac{\pi(1+2k)^2}{i^2}=-\pi(1+2k)^2\neq 0\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{l} z_k \text{ cero simple de } Q(z)\Longrightarrow \\ z_k \text{ cero simple de } 1/f(z)\end{array}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_k=a+\frac{i}{(1+2k)}, \quad k=\pm1,\pm2,\dots \textbf{ polos simples de } f(z)} \qquad \boxed{\mathrm{Res}(f;z_k)=\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}=\frac{-4ki}{\pi(1+2k)^3}}$$

En particular, para $k=-1$, $z_{-1}=a-i$ y $\mathrm{Res}(f;z_{-1})=\dfrac{4i}{\pi(-1)^3}=\dfrac{-4i}{\pi}$

2. Por ser $z_*=a-i=z_{-1}$ polo simple de $f(z)$ la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de la función en torno a él (parte de potencias negativas) es

$$\boxed{\text{Parte principal: } \frac{c_{-1}}{z-z_{-1}}=\frac{\mathrm{Res}(f;z_{-1})}{z-(a-i)}=\frac{-4i/\pi}{z-(a-i)}}$$

y es válido en la corona $0<|z-z_{-1}|<R$, siendo R la distancia de z_{-1} al punto singular de $f(z)$ más cercano

$$R=|z_{-1}-z_{-2}|=\left|a-i-\left(a-\frac{i}{3}\right)\right|=\boxed{\frac{2}{3}}$$