Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Ampliación de Matemáticas (Versión 1)

Respuestas: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\frac{(1+z)^2}{2\sin(z)}w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\ln(z)}=1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)-z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=0$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{1}{x^4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x})+4w=0,\quad \text{en }]0,+\infty[.$$

Sobre las soluciones reales de la ecuación anterior, $w:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, que además cumplen la condición $|\lim\limits_{x\to 0^+}w(x)|<+\infty$ puede afirmarse que:

(17) Existen y son de la forma $w(x)=\frac{C}{x\sqrt{x}}J_{\frac{3}{2}}(2x)$ donde $C\in\mathbb{R}$.

(18) Existen y son de la forma $w(x)=\frac{C}{x^2\sqrt{x}}J_{\frac{3}{2}}(x)$ donde $C\in\mathbb{R}$.

(19) Existen y son de la forma $w(x)=C\sqrt{x}J_{-\frac{3}{2}}(2x)$ donde $C\in\mathbb{R}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

EXPEDIENTE

0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9

Versión: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33

Curso: 1 2 3 4 5

Grupo

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
A	B	C	D	E
F	G	H	I	J

Auxiliar

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e

Ampliación de Matemáticas (Versión 1),

(22-12-2017)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+2t)u \quad \text{en}(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = x\exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(1,1) = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{\pi}}{4}\exp(\frac{3}{2})$. **(2)** $\hat{u}(2,2) = -\mathrm{i}\sqrt{\pi}\exp(-3)$.

(3) $\hat{u}(4,4) = -\mathrm{i}2\sqrt{\pi}\exp(-24)$. **(4)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = t(t-1)$ si $t \in [0,1[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [1,+\infty[$. Sobre la transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ se puede afirmar que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{2-\exp(-2)}{40}$. **(6)** $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{20}$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{\exp(-2)}{40}$. **(8)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (\mathrm{i}z^2 + z^4)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = \mathrm{i}.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_j, verifican la igualdad $c_{j+2} = \frac{\mathrm{i}c_{j-2} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $j \geq 5$ y $\mathrm{Re}(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(10) Los coeficientes c_{2j}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $\mathrm{Re}(c_{2j+1}) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y $\mathrm{Re}(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(11) Los coeficientes c_j, verifican la igualdad $c_{j+2} = \frac{\mathrm{i}c_{j-2} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $j \geq 5$ y existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(w(x_0)) \neq 0$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.
