Parcial 16-10-2014

Ampliación de Matemáticas (Versión 1)

A. Considérese la ecuación $\cosh(z) = \mathrm{i}$, donde $z \in \mathbb{C}$. De los afijos de las soluciones de la ecuación anterior se puede afirmar que:

(1) Ninguno de ellos tiene parte real negativa

(2) Estón contenidos en dos rectas paralelas al eje imaginario.

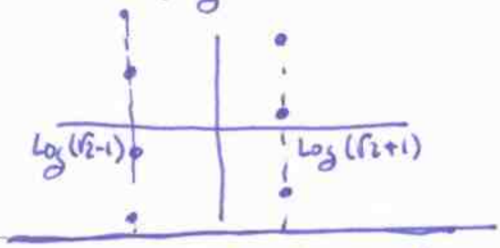
(3) Estón contenidos en dos rectas paralelas al eje real.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=i \Rightarrow e^{2z}-2ie^z+1=0$

$e^z = i\pm\sqrt{-2} = \begin{cases}(\sqrt{2}+1)i=(1+\sqrt{2})e^{i\pi/2}\\(1-\sqrt{2})i=(\sqrt{2}-1)e^{-i\pi/2}\end{cases}$

$\Rightarrow z=\begin{cases}\mathrm{Log}(\sqrt{2}+1)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\\ \mathrm{Log}(\sqrt{2}-1)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\end{cases}$



B. Sea f la función definida como

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2\,(z-\pi)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0, \pi\}.$$

Su residuo en $z = \pi$ vale

(5) $\frac{1}{\pi^2}$. (6) $-\frac{1}{\pi^2}$.

(7) $-\frac{1}{2\pi}$. (8) $\frac{1}{2\pi}$.

$\sin\pi=0$ y $\sin z=-\sin(z-\pi)$

$\Rightarrow f(z)=\dfrac{-\frac{1}{z^2}\frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)}}{z-\pi}=\dfrac{\phi(z)}{z-\pi}$

con $\phi(z)=-\frac{1}{z^2}\frac{\sin(z-\pi)}{z-\pi}=-\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{(z-\pi)^2}{3!}\cdots\right)$

analítica en $z=\pi$ y $\phi(\pi)=-\frac{1}{\pi^2}$

C. Sea $u :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función definida como $u(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(9) Admite como armónica conjugada a la función $v(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

(10) No es una función armónica.

(11) Es la parte real de una función analítica en su dominio de definición.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

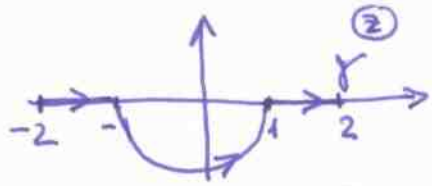
Luego $\Delta u=0$, siendo u armónica y parte real de una función analítica (para $x>0$)

HAY MóS PREGUNTAS AL DORSO

(9) es falsa porque $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\neq\frac{\partial u}{\partial x}$

② [16-10-2014]

D.



$$\int_\gamma |z|\,dz = \int_0^1 |\theta-2|\,d\theta + \int_1^{1+\pi} \left|e^{i(\theta-1-\pi)}\right| i e^{i(\theta-1-\pi)}\,d\theta + \int_{1+\pi}^{2+\pi} |\theta-\pi|\,d\theta = \int_0^1 (2-\theta)\,d\theta + \int_1^{1+\pi} d\left(e^{i(\theta-1-\pi)}\right) + \int_{1+\pi}^{2+\pi} (\theta-\pi)\,d\theta =$$

$$= -\frac{(2-\theta)^2}{2}\Big]_0^1 + e^{i(\theta-1-\pi)}\Big]_1^{1+\pi} + \frac{(\theta-\pi)^2}{2}\Big]_{1+\pi}^{2+\pi} =$$

$$= \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 5$$

D. Sea la expresión integral

$$I = \int_\gamma |z|\,\mathrm{d}z,$$

donde γ es el contorno orientado simple formado por los segmentos $[-2,-1]$ y $[1,2]$ del eje real y la semicircunferencia $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $-\pi \le \theta \le 0$, siendo los puntos inicial y final del contorno $z=-2$ y $z=2$ respectivamente. Se pide anotar en el siguiente recuadro el valor de I.

$$\boxed{I = 5}$$

Nota. Nótese que el contorno γ está dado por la representación paramétrica $\gamma : [0, 2+\pi] \to \mathbb{C}$ dedinida por $\gamma(\theta) = -2+\theta+0\mathrm{i}$ si $\theta \in [0,1]$, $\gamma(\theta) = \exp(\mathrm{i}(\theta-1-\pi))$ si $\theta \in]1, 1+\pi]$, $\gamma(\theta) = \theta-\pi+0\mathrm{i}$ si $\theta \in]1+\pi, 2+\pi]$

E. Anotar en el siguiente recuadro la forma general del desarrollo en serie de Laurent alrededor del origen de la función

$$f(z) = \cosh\left(\frac{1}{z}\right) - z\,\sinh\left(\frac{1}{z}\right).$$

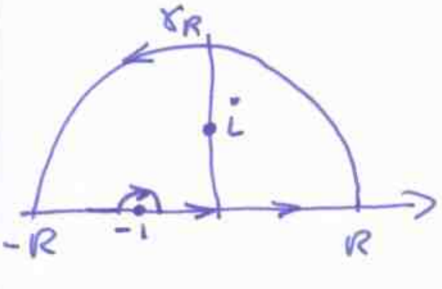
(Es suficiente con dar la expresión de los tres términos de menor orden y no nulos de dicho desarrollo)

$$\left.\begin{aligned} \cosh\frac{1}{z} &= 1 + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots + \frac{1}{(2k)!\,z^{2k}} + \cdots \\ z\sinh\frac{1}{z} &= 1 + \frac{1}{3!\,z^2} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!\,z^{2k}} + \cdots \end{aligned}\right\}$$

$$f(z) = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z^2} + \cdots + \left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!}\right)\frac{1}{z^{2k}} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{z^2} + \frac{4}{5!}\frac{1}{z^4} + \frac{6}{7!}\frac{1}{z^6} + \cdots + \frac{2k}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k}} + \cdots$$

F. Anotar en el siguiente recuadro el valor principal de la integral real impropia



$$I = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-2x}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

$$\boxed{I = -\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1-2z}{(1+z)(1+z^2)}, -1\right) + 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1-2z}{(1+z)(1+z^2)}, i\right) =$$

$$= \pi i\,\frac{1-2(-1)}{1+(-1)^2} + 2\pi i\,\frac{1-2i}{(1+i)(i+i)} = \frac{3}{2}\pi i + \pi\,\frac{(1-2i)(1-i)}{2} =$$

$$= \frac{3\pi i}{2} + \frac{\pi}{2}(1-2-3i) = -\frac{\pi}{2}$$