(A) Tomando la transformada de Fourier, con respecto a la variable x, en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1+\cos t)\,(i\omega)^2\,\hat{u} + 2t\,\hat{u}$.

Integrando la ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = (-(1+\cos t)\,\omega^2 + 2t)\,\hat{u}$ se obtiene

$\hat{u}(\omega,t) = C\,\exp(-(t+\operatorname{sen} t)\omega^2 + t^2)$. Teniendo en cuenta que

de la nota del enunciado se sigue que $\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](\omega) = \pi\exp(-|\omega|)$

Imponiendo la condición inicial $\hat{u}(\omega,t) = \pi\,\exp(-(t+\operatorname{sen} t)\omega^2 - |\omega| + t^2)$.

Por tanto $\hat{u}(2,\frac{\pi}{2}) = \pi\,\exp\left(\frac{-24-8\pi+\pi^2}{4}\right)$

(B)

La función g puede escribirse de la forma $g(t) = (\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-1))(1-t) + \mathcal{H}(t-1)(t-1) = (1-t)\,\mathcal{H}(t) + 2(t-1)\,\mathcal{H}(t-1)$.

Tomando transformadas de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $(z^2+4z+8)\,\mathcal{L}[w](z) = 1 + \mathcal{L}[g](z)$.

De las propiedades de la transformada de Laplace, de $\mathcal{L}[t^\nu](z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$ y de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(t-a)\,f(t-a)](z) = \exp(-az)\,\mathcal{L}[f(t)](z)$ se obtiene

$$\mathcal{L}[w](z) = \frac{1}{(z+2)^2+4}\left[1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + 2\,\frac{\exp(-z)}{z^2}\right].$$

Por tanto, $\mathcal{L}[w](3) = \frac{1}{29}\left(\frac{11 + 2\exp(-3)}{9}\right)$.

(c) La función w es entera, por tanto, $w(z) = 1+z+\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$.

Sustituyendo el desarrollo de w en la ecuación se obtiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k z^{k-2} - i\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)\left(1+z+\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k\right) = 0$$

Igualando los coeficientes de las potencias z^0, z y z^2 se obtiene $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{i}{3\cdot 2}$, $c_4 = \frac{i}{4\cdot 3}$

Por tanto, $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 2 + \frac{i}{4}$

D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{-1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{1}{z^2}\,\frac{(1+z)z}{16\tanh(z)}$$

El punto $z = 0 + i0$ es singular regular. En un entorno del origen la solución, en primera aproximación, está determinada por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, $\lambda_2 = \frac{-1}{4}$. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $w(z) = C_1 \sqrt[4]{z}\, p_1(z) + \frac{C_2}{\sqrt[4]{z}}\, p_2(z)$ donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un cierto entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$. La solución $w_1(z) = 4\sqrt[4]{z}\, p_1(z)$ es tal que $\lim_{z\to 0} \frac{w_1(z) - \sqrt[4]{z}}{\sqrt[4]{z}} = 3$.

(E) La función $zJ_0(z)$ es tal que

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}(zJ_0(z))+z\frac{d}{dz}(zJ_0(z))+z^2\,zJ_0(z)=z\left(z^2\frac{d^2J_0(z)}{dz^2}+z\frac{dJ_0}{dz}(z)+z^2J_0(z)\right)+$$

$$2z^2\frac{dJ_0}{dz}(z)+zJ_0(z)=2z^2\frac{dJ_0}{dz}(z)+zJ_0(z)=-2z^2J_1(z)+zJ_0(z).$$ Por tanto, $zJ_0(z)$ es una solución particular de la ecuación. Puesto que el primer miembro de (1) es la ecuación de Bessel de orden cero la solución general de (1) es de la forma

$$w(z)=C_1J_0(z)+C_2Y_0(z)+zJ_0(z).$$