Problemas de Variable Compleja (parte 1)

Plano complejo

2.1.1 (primer parcial 14/15)

A. Considérese la ecuación $\cosh(z) = i$, donde $z \in \mathbb{C}$. De los afijos de las soluciones de la ecuación anterior se puede afirmar que:

1 Ninguno de ellos tiene parte real negativa

2 Estón contenidos en dos rectas paralelas al eje imaginario.

3 Estón contenidos en dos rectas paralelas al eje real.

4 No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = i \Rightarrow \underbrace{e^z}_{w} + e^{-z} = 2i \Rightarrow w + \frac{1}{w} = 2i \Rightarrow w = i \pm \sqrt{2}\, i$

Dos familias de soluciones:

$w_1 = i(1+\sqrt{2}) \Rightarrow e^z = w_1 \Rightarrow z = \log(1+\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$w_2 = i(1-\sqrt{2}) \Rightarrow \cdots \Rightarrow z = \log(\sqrt{2}-1) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$\Rightarrow$ opción 2

* Esto viene de que $e^z = w$, con $w = re^{i\theta}$, tiene como soluciones:

$\{\log(r) + i(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\} = \log(w)$

Singularidades y residuos

2.2.1 (primer parcial 14/15)

B. Sea f la función definida como

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 (z-\pi)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0, \pi\}.$$

Su residuo en $z = \pi$ vale

(5) $\frac{1}{\pi^2}$. (6) $-\frac{1}{\pi^2}$.

(7) $-\frac{1}{2\pi}$. (8) $\frac{1}{2\pi}$.

Como $\text{sen}(\pi) = 0$, es un polo simple.

Lo más sencillo es $\text{Res}(f, \pi) = \lim_{z \to \pi} (z-\pi) \cdot f(z) = \lim_{z \to \pi} \frac{\text{sen}\, z}{z^2 (z-\pi)} =$

$= \lim_{z \to 0} \frac{\text{sen}(z+\pi)}{(z+\pi)^2 \cdot z} = \lim_{z \to 0} \frac{-\text{sen}\, z}{(z+\pi)^2 \cdot z} = \frac{-1}{\pi^2}$. Opción 6.

2.2.2 (primer parcial 16/17)

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el residuo en $z = 1$ de la función

$$f(z) = \frac{(z+1)\,e^z}{(z-1)^3}.$$

Es un polo de orden 3. $\operatorname{Res}(f,1) = \left.\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+1)e^z\right]\Big/2!\right|_{z=1} =$

$$\left.\frac{(z+3)e^z}{2!}\right|_{z=1} = 2e$$

2.2.3 (primer parcial 18/19)

C. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \dfrac{z\cosh z}{\operatorname{senh} z}$

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

Ceros de $\operatorname{senh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$: $\{z : e^z = e^{-z}\} = \{e^{2z} = 1\} =$

$= \{e^z = 1\} \cup \{e^z = -1\} = \{(2\pi + 2k\pi)i\} \cup \{(\pi + 2k\pi)i\} = \{k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$

- $k = 0 \longrightarrow$ Singularidad evitable. Residuo 0.
- $k \neq 0 \longrightarrow$ Polo simple $\Rightarrow \operatorname{Res}(f, k\pi i) = P(k\pi i)/Q'(k\pi i) = \dfrac{k\pi i \cosh(k\pi i)}{\cosh(k\pi i)} = k\pi i$

2.2.4 (primer parcial 19/20)

C. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \dfrac{(e^{i2z} - 1)^2}{z^2\,(e^{i2z} + 1)}$

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

Ceros del denominador: $\begin{cases} z = 0 \\ \{z : e^{2iz} = -1\} = \{(e^{iz})^2 = -1\} = \{e^{iz} = i\} \cup \{e^{iz} = -i\} = \end{cases}$

$= \dfrac{\log(i)}{i} \cup \dfrac{\log(-i)}{i} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\} \cup \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

- $z = 0$ es evitable. Residuo 0.
- $z = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow$ Es un polo simple, porque $(e^{2iz} + 1)' = 2i\,e^{2iz} \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_k) = P(z_k)/Q'(z_k)$ // $P(z) = (e^{iz} - 1)^2/z^2$ (más sencillo)

$Q'(z) = 2i\,e^{2iz}$

En z_k, $e^{2iz_k} = -1 \Rightarrow P(z_k) = 4/z_k^2$, $Q'(z_k) = -2i \Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}(f, z_k) = \dfrac{2i}{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2}}$

2.2.5 (final extraordinario 14/15)

D. Hallar el residuo en $z = \pi$ de la función:

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}$$

$\text{Res}(f,\pi) = P(\pi)/Q'(\pi) = \pi/\cos(\pi) = -\pi$ (es polo simple, $P(\pi) \neq 0$, $Q'(\pi) \neq 0$ ...)

2.2.6 (final ordinario 14/15)

D. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) el residuo en $z = \frac{\pi}{2}$ de la función:

$$f(z) = z\tan(z).$$

Es un polo simple. Escribimos $P(z) = z\,\text{sen}(z)$, $Q(z) = \cos(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Res}(f, \frac{\pi}{2}) = P(\pi/2)/Q'(\pi/2) = \frac{\pi/2\,\text{sen}(\pi/2)}{-\text{sen}(\pi/2)} = -\pi/2$

2.2.7 (final extraordinario 16/17)

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el residuo en $z = \pi$ de la función

$$f(z) = \frac{z-\pi}{(\sin(2z))^2}.$$

Polo simple. Ponemos $P(z) = (z-\pi)/\text{sen}(2z)$, $Q(z) = \text{sen}(2z)$

· $\frac{z-\pi}{\text{sen}(2z)} \xrightarrow{z \to z+\pi} \frac{z}{\text{sen}(2(z+\pi))} = \frac{z}{\text{sen}(2z+2\pi)} = \frac{z}{\text{sen}(2z)} \Rightarrow$ en $z=0$ vale $1/2$

· $Q'(z) = 2\cos(2z) \Rightarrow \text{Res} = P(\pi)/Q'(\pi) = \frac{1/2}{2\cdot\cos(2\pi)} = 1/4$

También se podría haber resuelto con los desarrollos de Taylor

2.2.8 (final ordinario 16/17)

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el residuo en $z = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{1-e^z}{(\sin z)^2}.$$

Polo simple. $P(z) = \frac{1-e^z}{\text{sen}\,z}$, $P(0) = -1$; $Q'(z) = \cos z \Rightarrow Q'(0) = 1 \Rightarrow \text{Res} = -1$

Funciones analíticas y armónicas

2.3.1 (primer parcial 14/15)

C. Sea $u :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función definida como $u(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

- Admite como armónica conjugada a la función $v(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.
- No es una función armónica.
- Es la parte real de una función analítica en su dominio de definición.
- No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota: Laplaciano: $\nabla^2 u$ ó Δu (es lo mismo)

Veamos $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} =$

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ u_y = \frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\left(1/x\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} \\ u_{yy} = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow \Delta u = 0$$

Luego es armónica conjugada de alguna v. Encontrémosla:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -u_y \\ v_y &= u_x \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{cases} v_y = -y/x^2+y^2 \\ v_x = -\frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \quad v = -\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

De hecho, $u = \text{atan}(y/x) = \theta$. Como $\log(z) = \log(r) + i\theta$ es analítica

$$-i\log(z) = \underbrace{+\theta}_{u} \underbrace{- i\log(r)}_{v}$$

2.3.2 (primer parcial 15/16)

C. **(5 puntos)** Sea la función real de dos variables definida en todo $\mathbb{R}^2$ como

$$u(x,y) = x^3 + bx - axy^2 + c,$$

donde a, b y c son números reales. Se pide hallar los valores de a, b y c para los que se cumplen simultáneamente las condiciones:

i) la función $u = u(x,y)$ es la parte real de una función analítica $f = f(z)$.

ii) $f(-1) = 0$,

iii) el residuo en $z = 0$ de la función $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ es 1

Anotar en el siguiente recuadro tanto los valores de a, b y c como la expresión analítica de f en función de z.

i) $u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow 6x - 2ax = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

ii) $f(-1) = 0 \Rightarrow u(-1,0) \Rightarrow -1 - b + c = 0 \Rightarrow c = 1+b$

ii) $\text{Res}\left(\frac{f(z)}{z}, 0\right) = 1 \Rightarrow f(0) = 1$ (ese residuo es $f(0)$)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c=1} \Rightarrow \boxed{b=0}$$

Ahora hallamos v con C-R

$u_y = -v_x \Rightarrow v_x = 6xy \Rightarrow v(x,y) = 3x^2y + C(y)$

$u_x = v_y \Rightarrow 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 + C'(y) \Rightarrow C'(y) = -3y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(y) = -y^3 + K \Rightarrow v(x,y) = 3x^2y - y^3 + K$

Como $f(\underset{x=-1,\, y=0}{-1}) = 0$, $K = 0$.

Luego $f(x,y) = 1 + x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Para ver quién es f, podemos derivar:

$f''(z) = u_{xx} + i v_{xx} = 6x + i6y = 6z \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) = z^3 + \lambda z + \beta \Rightarrow \dots \Rightarrow f(z) = z^3 + 1$

2.3.3 (primer parcial 16/17)

C. **(3 puntos)** Sea la función compleja de variable compleja, $z = x + i\,y$, definida como

$$f(z) = (e^x + a\,e^{-x})\cos y + i\,(b e^x + c\,e^{-x})\sin y,$$

donde a, b y c son números reales. Se pide hallar los valores de a, b y c para los que la función f cumple i) $f(0) = 2$ y ii) es analítica en todo $\mathbb{C}$. Anotar en el siguiente recuadro tanto los valores de a, b y c como la expresión analítica de f en función de z.

i) $f(0) = 1 + a \Rightarrow a = 1$

ii) $\begin{cases} u_x = (e^x - e^{-x})\cos y \\ u_y = (-e^x - e^{-x})\,\text{sen}\,y \\ v_x = (b\,e^x - c\,e^{-x})\,\text{sen}\,y \\ v_y = (b\,e^x + c\,e^{-x})\cos y \end{cases}$

$u_x = v_y \rightarrow e^x - e^{-x} = b e^x + c e^{-x} \Rightarrow (1-b)e^{2x} = c + 1 \Rightarrow b = 1, c = -1$

$f(z) = e^x \cos y + e^{-x}\cos y + i(e^x\,\text{sen}\,y - e^{-x}\,\text{sen}\,y) = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y) +$

$+ e^{-x}(\cos y - i\,\text{sen}\,y) = e^z + e^{-z} = 2\cosh(z)$

2.3.4 (primer parcial 19/20)

D. **(3 puntos)** Sea la función real de dos variables reales definida como

$$u(x,y) = \cos x\left(e^{y} + e^{ky}\right), \qquad k \in \mathbb{R}$$

Anotar los valores de k para los que u es la parte real de una función, $f(z)$, analítica en algún dominio del plano complejo.

Anotar la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x,y)$.

Anotar la expresión analítica de $f(z)$, en función de $z = x+iy$, sabiendo $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $f(\pi) = -2$.

Imponemos que $\Delta u = 0$: $\begin{cases} u_x = -\operatorname{sen} x(e^y + e^{ky}) \\ u_y = \cos x(e^y + k e^{ky}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = -\cos x(e^y + e^{ky}) \\ u_{yy} = \cos x(e^y + k^2 e^{ky}) \end{cases} \Rightarrow \Delta u = 0 \Leftrightarrow \cos x\, e^{ky}[k^2-1] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \pm 1$

$v_y = u_x = -\operatorname{sen} x(e^y + e^{ky}) \Rightarrow v(x,y) = -\operatorname{sen} x\left[e^y + \frac{1}{k}e^{ky}\right] - C(x)$

Para hallar $C(x)$ usamos la otra ecuación:

$v_x = -u_y \Rightarrow -v_x = \cos x(e^y + k e^{ky})$

$\cos x\left[e^y + \frac{1}{k}e^y\right] + c'(x) \Rightarrow c'(x) = \cos x\, e^{ky}\left(k - \frac{1}{k}\right)$

Sea cual sea el k, $c' = 0 \Rightarrow C(x) = \text{cte.} \Rightarrow$

$\Rightarrow v(x,y) = -\operatorname{sen} x\left[e^y + \frac{1}{k}e^{ky}\right] - C$

Calculemos ahora la función f.

$f(z) = \cos x(e^y + e^{ky}) - i\operatorname{sen} x\left(e^y + \frac{1}{k}e^{ky}\right) - Ci$

• $f(\pi) = -2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(z) = \cos x(e^y + e^{ky}) - i\operatorname{sen} x\left(e^y + \frac{1}{k}e^{ky}\right)$

• Si $k=-1$, tomando x: $\cos x = 0$, e y tq $e^y = e^{-y}$, f se anularía. Luego como no puede ser, $k = 1 \Rightarrow f(z) = 2\cos x(e^y) - 2i\operatorname{sen} x\, e^y =$

$= 2e^{-iz}$

$\hookrightarrow \cos x - i\operatorname{sen} x = e^{-ix} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^y e^{-ix} = e^{-iz}$

2.3.5 (final extraordinario 15/16)

C. **(3 puntos)** Sea $u(x,y) = y^2 - g(x)$ función armónica en $\mathbb{R}^2$. Anotar en el siguiente recuadro la expresión de la función real $g(x)$ y de la función armónica conjugada $v(x,y)$, sabiendo que la función analítica $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ cumple las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

$u(x,y) = y^2 - g(x)$. $\Delta u = -g''(x) + 2 \Rightarrow g(x) = x^2 + ax + b$

Ahora, $f(0)=0 \Rightarrow b=0$; $f'(0) = u_x + i v_x = 1 \Rightarrow -a = 1$

Luego $u(x,y) = y^2 - x^2 + x$

Para v aplicamos C-R.

$u_x = v_y \Rightarrow v_y = -2x+1 \Rightarrow v(x,y) = y(-2x+1) + c(x)$

$u_y = -v_x \Rightarrow -2y + c'(x) = -2y \Rightarrow c' = 0 \Rightarrow c = \text{cte}.$

$v(x,y) = y(-2x+1) + c$, usando $f(0)=0$, $c=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v = -2yx + y$

2.3.6 (final extraordinario 16/17)

C. **(3 puntos)** Sea la función de dos variables definida como

$$u(x,y) = (x^2 - y^2)(1+x) + a\,x\,y^2,$$

$u = x^2 + x^3 - y^2 - y^2 x + axy^2 = x^2 + x^3 - y^2 + (a-1)xy^2$

donde a es un número real. Se pide anotar en el siguiente recuadro el valor de a para el que la función u es la parte real de una función analítica, asi como la correspondiente funcion armonica conjugada, $v = v(x,y)$, que se anula en el origen.

- $\Delta u = 0 \Leftrightarrow (2 + 6x) + (-2 + 2(a-1)x) \equiv 0 \Rightarrow 2(a-1) = -6 \Rightarrow \boxed{a=-2}$

$\boxed{u(x,y) = x^2 + x^3 - y^2 - 3xy^2}$

- $u_x = v_y \Rightarrow 2x + 3x^2 - 3y^2 = v_y \Rightarrow v(x,y) = 2xy + 3x^2y - y^3 + c(x)$
- $u_y = -v_x \Rightarrow -2y - 6xy = -(2y + 6xy + c'(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = \text{cte}$. Como se anula en el origen, $c=0$

$\boxed{v(x,y) = 2xy + 3x^2y - y^3}$

Si pidieran la función, derivando dos veces sale $f = z^2 + z^3$

2.3.7 (final ordinario 16/17)

$$\begin{cases} u_x = -a e^{-ax} \cos((a-2)y) \\ u_y = -(a-2) e^{-ax} \operatorname{sen}((a-2)y) \end{cases}$$

C. **(3 puntos)** Sea la función de dos variables definida como

$$u(x,y) = \mathrm{e}^{-a\,x} \cos(a-2)y,$$

donde a es un número real. Se pide anotar en el siguiente recuadro el valor de a para el que la función u es la parte real de una función analítica, así como la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x,y)$ que se anula en el origen, y la expresión analítica de $f = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ en función de $z = x + \mathrm{i}\,y$.

$$\Delta u = a^2 e^{-ax} \cos\big((a-2)y\big) - (a-2)^2 e^{-ax} \cos\big((a-2)y\big) =$$

$$= e^{-ax} \cos((a-2)y) \cdot [\underbrace{a^2 - (a-2)^2}_{a^2 - a^2 + 4a - 4}] \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$u(x,y) = e^{-x} \cos(-y)$$

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + i \ldots$$

$$e^{-x-iy} = e^{-x} \cos(-y) + i \ldots$$

$$f(z) = e^{-z}$$

↳ vale, porque v se anula en el origen.

* Si se encuentra una función analítica $f(z)$ tal que $u = \mathrm{Re}(f)$, v tiene que ser, seguro $\mathrm{Im}(f) + K$, para alguna constante:

— Si $\tilde{f}$ es otra función con misma parte real, $f - \tilde{f}$ sería una función analítica con parte real idénticamente $0 \Rightarrow v_x = 0, v_y = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$.

c.q.d.

2.3.8 (primer parcial 21/22)

Ejercicio B

1. Dominio de analiticidad de la función

$$f(z) = \log\left(\frac{z - a(1+i)}{z - a(1-i)}\right) \text{ siendo } a > 0 \text{ y } \log z = \mathrm{Ln}|z| + i\arg z, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$$

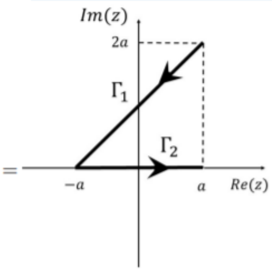
- En el dominio donde sea analítica

$$f'(z) =$$

2. Calcular la integral

$$\int_{\Gamma} f'(z) f(z)\, dz$$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ el contorno orientado con origen en $z_I = a(1+2i)$ y final en $z_F = a$.



Solución

- En el dominio donde sea analítica

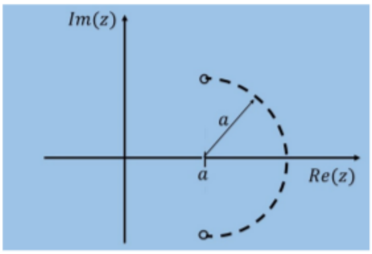
$$f'(z) = \frac{2a\, i}{(z - a(1-i))\,(z - a(1+i))} = \boxed{\frac{2a\, i}{(z-a)^2 + a^2}}$$

- Dominio de analiticidad (D): $\log w$ no analítica en $\begin{cases} \operatorname{Re}(w) = 0 \\ \operatorname{Im}(w) \leq 0 \end{cases}$

$$w = \frac{z - a(1+i)}{z - a(1-i)} = \frac{(x-a) + i(y-a)}{(x-a) + i(y+a)} = \frac{(x-a)^2 + y^2 - a^2}{(x-a)^2 + (y+a)^2} + i\, \frac{-2a(x-a)}{(x-a)^2 + (y+a)^2}$$

ıo analítica en $\begin{cases} \operatorname{Re}(w) = 0 \iff (x-a)^2 + y^2 = a^2 \\ \operatorname{Im}(w) \leq 0 \iff -2a(x-a) \leq 0 \overset{a>0}{\iff} x \geq a \end{cases}$

$$\boxed{D = \mathbb{C} - \left\{ z = a + a\, e^{i\theta} \text{ con } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}}$$



- La función $F(z) = \dfrac{f(z)^2}{2}$ en el dominio D de analiticidad de $f(z)$ y cumple

$$F'(z) = f'(z) f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

Luego $F(z)$ es la primitiva del integrando en D y hay independencia del camino en D. Como $\Gamma \in D$

$$I = \int_{\Gamma} f'(z) f(z)\, dz = F(z_F) - F(z_I) = \frac{1}{2}\, \left(f(z_F)^2 - f(z_I)^2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(z_I) = f(a(1+2i)) = \log\left(\dfrac{ai}{3ai}\right) = \log\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\operatorname{Ln} 3 + i\, 0 \\ f(z_F) = f(a) = \log\left(\dfrac{-ai}{ai}\right) = \log(-1) = -\operatorname{Ln} 1 + i\, \pi = i\, \pi \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{I = \frac{-1}{2}\, (\pi^2 + (\operatorname{Ln} 3)^2)}$$

2.3.9 (primer parcial 21/22)

1. Valores de n para los que existe una función entera, $f(z)$, cuya derivada cumple

$$\operatorname{Re}\left(f'(z)\right) = a(y + x^n), \qquad n \in \mathbb{N},\, a > 0$$

2. Expresión general de la función analítica, $f(z)$, en función de $z = x + iy$

3. Si cumple $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z}\, dz = 0 \quad (R > 0)$ Además cumple $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz = 2\pi a\, i$

Solución

$f(z)$ entera $\Longrightarrow$ $f'(z)$ entera, por lo que $\operatorname{Re}(f'(z)) = U(x,y)$ debe ser armónica en todo $\mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{(a) } U(x,y) \text{ tiene parciales de primer y segundo orden continuas en } \mathbb{R}^2 \\ \text{(b) } U_{xx} + U_{yy} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} U_x = nax^{n-1} & U_y = a \\ U_{xx} = n(n-1)ax^{n-2} & U_{yy} = 0 \end{array}\right\} \overset{(b)}{\Longleftrightarrow} a\,n(n-1)x^{n-2} = 0 \overset{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2}{\Longleftrightarrow} n = 0 \text{ o bien } n = 1 \overset{n\in\mathbb{N}}{\Longleftrightarrow} \boxed{n = 1}$$

siendo $U(x,y) = a(y+x)$

2. Expresión general de la función analítica, $f(z)$, en función de $z = x + iy$

- $f'(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ con $V(x,y)$ armónica conjugada de $U(x,y) \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{(a) } V(v,y) \text{ tiene parciales de primer orden continuas en } \mathbb{R}^2 \\ \text{(b) Cumple las condiciones de Cauchy-Riemman en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} V_x = -U_y & = & -a \\ V_y = U_x & = & nax^{n-1} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} V = -ax + g(y) \Longrightarrow V_y = g'(y) \\ \qquad V_y = nax^{n-1} \Longleftrightarrow g(y) = nax^{n-1}\,y + C \text{ con } C \in \mathbb{R} \text{ constante} \end{array}$$

. Como $n = 1$: $V(x,y) = -ax + ay + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$$f'(z) = U + iV = \underbrace{\underbrace{ay - aix}_{-iaz} + \underbrace{ax + aiy}_{az}}_{a(1-i)z} + iC_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

- Tomando la primitiva de $f'(z)$: $\boxed{f(z) = a(1-i)\,\frac{z^2}{2} + iC_1 z + C_2, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad C_2 \in \mathbb{C}}$

---

3. Si cumple $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z}\,dz = 0 \quad (R > 0)$ *F. Integral de Cauchy:* $\displaystyle\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z} = 2\pi i f(0) = 2\pi i\, C_2 \Longrightarrow C_2 = 0$

Versiones V01-V03 Además cumple $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi a\, i$ *F. Integral de Cauchy generalizada:*

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-i)^2} = 2\pi i f'(1) = 2\pi a\, i \Longrightarrow f'(1) = a = a(1-i) + iC_1 = a + i(C_1 - a) \Longleftrightarrow C_1 = a \Longrightarrow \boxed{f(z) = a(1-i)\,\frac{z^2}{2} + iaz}$$