(A) Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación diferencial se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \left(1+\frac{1}{e^t+e^{2t}}\right)(i\omega)^2\hat{u}$,

donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Integrando la ecuación anterior se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C\exp\left(-\omega^2\int_0^t\left(1+\frac{1}{e^\tau+e^{2\tau}}\right)d\tau\right)$.

Haciendo el cambio de variable $u=e^\tau$ en la integral $\int_0^t\left(1+\frac{1}{e^\tau+e^{2\tau}}\right)d\tau = 1-e^{-t}+\ln(1+e^t)-\ln 2$. Tomando en cuenta que $\mathcal{F}[\exp(-\frac{x^2}{2})](\omega) = \sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right)$, imponiendo la condición inicial $u(x,0)=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{2\pi}\exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{2}+(1-e^{-t}+\ln(1+e^t)-\ln 2)\right)\right)$.

Tomando la transformada inversa de Fourier se obtiene

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2(1-e^{-t}+\ln(1+e^t)-\ln 2)}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\left(1+2(1-e^{-t}+\ln(1+e^t)-\ln 2)\right)}\right)$$

(B) La función $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ puede escribirse como

$$g(t)=\left(\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-\tfrac{\pi}{2})\right)\operatorname{sen}t+\mathcal{U}(t-\tfrac{\pi}{2}) = \mathcal{U}(t)\operatorname{sen}t-\mathcal{U}(t-\tfrac{\pi}{2})\operatorname{sen}(t-\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2})+$$
$$\mathcal{U}(t-\tfrac{\pi}{2}) = \mathcal{U}(t)\operatorname{sen}t-\mathcal{U}(t-\tfrac{\pi}{2})\cos(t-\tfrac{\pi}{2})+\mathcal{U}(t-\tfrac{\pi}{2}).$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación se obtiene $(z^2+2z+8)\,\mathcal{L}[w(t)](z)=\frac{dw}{dt}(0)+\mathcal{L}[g(t)](z)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[t^\nu](z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$, $\mathcal{L}[\operatorname{sen}t](z)=\frac{1}{z^2+1}$, $\mathcal{L}[\cos t](z)=\frac{z}{z^2+1}$, y $\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)f(t-a)](z)=\exp(-az)\,\mathcal{L}[f(t)](z)$ con $a>0$, se obtiene

$$\mathcal{L}[w(t)](z)=\frac{1}{(z+1)^2+7}\left[1+\frac{1}{z^2+1}-\frac{\exp(-\frac{\pi}{2}z)\,z}{z^2+1}+\frac{\exp(-\frac{\pi}{2}z)}{z}\right].$$

(C)

La solución del problema de Cauchy del enunciado es analítica en $B(0+0i, 1)$. Por tanto, $w(z) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} c_k z^k$ con $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Sustituyendo el desarrollo en la ecuación diferencial se obtiene

$$\sum_{k\geq 0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^k - \sum_{k=4}^{\infty} c_{k-4} z^k = 0,$$ de donde

$$c_{k+2} = \frac{-k(k-1)c_k + c_{k-4}}{(k+2)(k+1)}$$ para $k \geq 4$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$

$c_4 = 0$, $c_5 = 0$, $c_6 = \frac{1}{6\cdot 5}$, $c_8 = \frac{-1}{8\cdot 7}$. En consecuencia, $c_{2k+1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $c_{2k} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por tanto w es par, $w(z) = w(-z)$ para todo $z \in B(0+i0, 1)$ y $w(\bar{z}) = \overline{w(z)}$ para todo $z \in B(0+i0, 1)$.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2}(z) = -\frac{1}{z}\,\frac{Sh(2z)}{4z}\,\frac{dw}{dz}(z) + \frac{z}{z^2}\,w(z).$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación anterior. Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución se puede obtener en función de los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$

Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $w(z) = C_1 \sqrt{z}\, P_1(z) + C_2\, P_2(z)$ donde P_1 y P_2 son funciones analíticas en un cierto entorno del origen con $P_1(0) = P_2(0) = 1$.

Para todo $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ w está acotada en un entorno del origen, por tanto, $\lim_{z\to 0} \frac{w(z)}{\ln z} = 0$.

Si $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$ entonces $\lim_{z\to 0} \frac{w(z)}{\sqrt[4]{z}} = 0$.

Si $C_2 \neq 0$ entonces $\lim_{z\to 0} \frac{w(z)}{\sqrt[4]{z}} = \infty$. Finalmente si $C_1 = 1$, y $C_2 = 0$ entonces $\lim_{z\to 0} \frac{w(z)}{\sqrt{z}} = P_1(0) = 1$.

E

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 J_{\frac{1}{3}}(x) - x J_{\frac{4}{3}}(x)}{\frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} - J_{1/3}(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/3}\frac{1}{2^{1/3}\Gamma(\frac{4}{3})} - x^{7/3}\frac{1}{2^{4/3}\Gamma(\frac{7}{3})} + o(x^{7/3})}{x^{7/3}\frac{1}{2^{7/3}\Gamma(7/3)} + o(x^{7/3})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{1/3}\Gamma(\frac{4}{3})} - \frac{1}{2^{1/3}\cdot 2\,\frac{4}{3}\Gamma(\frac{4}{3})}}{\frac{1}{2^{1/3}\cdot 2^2\,\frac{4}{3}\Gamma(\frac{4}{3})}} = -2 + \frac{2^2\cdot 4}{3} = \frac{10}{3}.$$