E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : EXP. : 1er Apellido : 2do Apellido : SOLUCIÓN Nombre :	Curso 15/16 (26.01.16) Tiempo 1h. 20 m. Valor 18 puntos **Parte 1**

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$x^{n+2} + 4\,x^{n+1} + 3\,x^n = 3^{n+1},$$

que cumple $x^0 = x^1 = 0$.

$$\boxed{x^n = -\frac{3}{8}(-1)^n + \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{8}3^n}$$

Sol. Homogénea $\lambda^2+4\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases}-1\\-3\end{cases}$

$x_H^n = A(-1)^n + B(-3)^n$

Sol. Particular $x_p^n = C\,3^n \Rightarrow C[3^{n+2} + 4\,3^{n+1} + 3\,3^n] = 3^{n+1} \Rightarrow C = 1/8 \Rightarrow$

$x^n = A(-1)^n + B(-3)^n + \frac{1}{8}3^n$

$x^0 = A + B + 1/8 = x^1 = -A - 3B + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow \boxed{A = -3/8;\ B = 1/4}$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I = \int_\gamma (a\,y + \mathrm{i}b\,(x+1))\,\mathrm{d}z, \quad = \int_0^{2\pi} [a\sin\theta + i\,b(\cos\theta+1)]\cdot i[\cos\theta + i\sin\theta]\,d\theta =$$

$$= ia\int_0^{2\pi}[\sin\theta\cos\theta + i\sin^2\theta]\,d\theta - b\int_0^{2\pi}[\cos^2\theta + \cos\theta + i\cos\theta\sin\theta + i\sin\theta]\,d\theta$$

donde $z = x + \mathrm{i}y$, γ es la circunferencia de centro el origen y radio unidad y a y b son números complejos dados (NOTA.- Téngase en cuenta que $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \pi$.)

$$\boxed{I = -\pi(a+b)}$$

Nótese que $\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta = 0$ y $\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$. Luego

$I = -a\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta - b\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = -\pi(a+b)$

C. **(3 puntos)** Sea $f(z) = a\,y + \mathrm{i}b\,(x+1)$ el integrando de la expresión anterior. Sabiendo que $f(0) = 2$, anotar en el siguiente recuadro los valores de a y b que hacen que f sea analítica y la correspondiente expresión de f en función de z.

$f(z) = 2iy + 2(x+1) = 2(1+x+iy) = 2(1+z)$

$$\boxed{a = 2i\,, \quad b = -2i \quad f(z) = 2(1+z)}$$

Si f es analítica en el interior del círculo unidad, $I = 0 \Rightarrow a = -b$

$f(0) = ib = 2 \Rightarrow b = -2i$

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x. = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{(z^2+4)^2}, 2i\right) =$$

$$= 2\pi i\,\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2+1}{(z+2i)^2}\right)_{z=2i} = 2\pi i\left[\frac{2z}{(z+2i)^2} - 2\frac{z^2+1}{(z+2i)^3}\right]_{z=2i} =$$

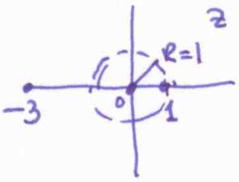
$$= 2\pi i\left[\frac{4i}{(4i)^2} - 2\frac{(2i)^2+1}{(4i)^3}\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{6\pi}{2(4i)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{16} = \frac{5\pi}{16}$$

$$\boxed{I = \frac{5\pi}{16}}$$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

SOLUCIÓN (Parte 1)

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia R y el término general del desarrollo en serie de McLaurin (en $z = 0$) de la función



$$f(z) = \frac{4}{z^2 + 2z - 3}. = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3} = \frac{-1}{1-z} + \frac{-1}{3(1+z/3)} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} z^k - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[-1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right] z^k$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = 1 \\ f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} - 1\right] z^k \end{array}}$$

F. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la parte principal (términos potenciales de exponente negativo) y los dos primeros términos de exponente positivo del desarrollo en serie Laurent en $0 < |z-1| < 4$ de la función del apartado ***E***.

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4 + (z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{1 + \frac{z-1}{4}} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k (z-1)^k$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1} (z-1)^k =}$$

$$= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}(z-1) - \frac{1}{64}(z-1)^2 + \cdots$$

Ampliación de Matemáticas (Versión 1),

(26-01-2016)

A. Sea la función $u = u(x)$ que cumple la relación integral:

$$u(x) + \int_0^x e^{(x-s)} u(s) ds = 1, \quad \text{para todo } x \in [0, \infty[. \longrightarrow$$

Tomando Transformadas

$$U + \frac{1}{S-1} U = \frac{1}{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S-1} U = \frac{1}{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{S-1}{S^2}$$

Su transformada de Laplace, $U(s) = \int_0^\infty u(x)\, e^{-s\,x}\, dx$, es:

(1) $U(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2}$. **(2)** $U(s) = \dfrac{s+1}{s^2}$.

(3) $U(s) = \dfrac{s}{(s-1)}$. **(4)** $U(s) = \dfrac{s-1}{s^2}$.

(NOTA.- Tomar directamente transformadas de Laplace en la ecuación dada)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + 3t^2)u \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[,$$

$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0, +\infty[.$$

Sea $u : \mathbb{R}\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy que se acaba de definir . Sobre la función u se puede afirmar que:

(5) $\lim_{x\to+\infty} (u(x,1) + u(x,2)) \exp(\frac{x^2}{13} - 30) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

(6) $\lim_{x\to+\infty} (u(x,2) + u(x,3)) \exp(\frac{x^2}{13} - 30) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

(7) $\lim_{x\to+\infty} (u(x,3) + u(x,4)) \exp(\frac{x^2}{13} - 30) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-bx^2)) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - (1 + \exp(z))w = 0 \text{ en } \mathbb{C},$$

$$w(0) = 1, \; \frac{dw}{dz}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior, $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es una función entera cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{30} = \frac{1}{(30)(29)}(c_{27} + c_{28} + \sum_{i=0}^{26} \frac{c_i}{(28-i)!})$.

(10) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{30} = \frac{1}{(30)(29)}(c_{27} + c_{28} + \sum_{i=0}^{27} \frac{c_i}{(28-i)!})$.

(11) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{30} = \frac{1}{(30)(29)}(2c_{28} + \sum_{i=0}^{27} \frac{c_i}{(28-i)!})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$(z^4+z^5)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+z^2\sin(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-4(1-\cos(z))w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^2}=0$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\ln(z)}=1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z}=0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Sea $w:D\to\mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D de la forma $w(z)=z^{\lambda_1}(1+p_1(z))$, donde λ_1 es un número real positivo y $p_1:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es una función analítica tal que $p_1(0)=0$. Sobre la función p_1 puede afirmarse que:

(17) $|\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)|\leq\frac{1}{7}$.

(18) $\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)>\frac{1}{7}$.

(19) $\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)<-\frac{1}{7}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

F. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\quad&\text{para }(r,\theta,t)\in[0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,\\ u(1,\theta,t)=0\quad&\text{para }(\theta,t)\in[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,\\ u(r,\theta,0)=J_1(\alpha r)\cos(\theta),\quad&\text{para }(r,\theta)\in[0,1[\times[-\pi,\pi[,\end{aligned}$$

donde α es un número real mayor que cero tal que $J_1(\alpha)=0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t)=\cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty}w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r)$ donde (λ_{m1}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(21) $u(r,\theta,t)=\cos(\theta)\exp(-\alpha^2t)J_1(\alpha r)$.

(22) $u(r,\theta,t)=\cos(\theta)\exp(-\alpha t)J_1(\alpha r)$.

(23) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.

(24) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_1(1)\neq 0$.

Pregunta B

Sea $\hat{u}: \mathbb{R} \times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u. Tomando la transformada de Fourier de la ecuación se obtiene

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (i\omega)^2 \hat{u} + (1+3t^2)\,\hat{u}.$$

Integrando la ecuación anterior obtiene

$$\hat{u}(\omega,t) = C\, e^{-\omega^2 t + t + t^3}$$

Imponiendo la condición inicial se obtiene

$$\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\, \exp\left(-\omega^2\left(\tfrac{1}{4}+t\right) + t + t^3\right)$$

Teniendo en cuenta la nota del enunciado

$$u(x,t) = \frac{\exp(t+t^3)}{\sqrt{1+4t}}\, \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right).$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2}{13}-30}\big(u(x,2)+u(x,3)\big) = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Se comprueba sin excesiva dificultad que

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{x^2}{13}-30\right)\big(u(x,1)+u(x,2)\big) = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{x^2}{13}-30\right)\big(u(x,3)+u(x,4)\big) = +\infty.$$

Pregunta C

Puesto que el factor que multiplica a la derivada segunda es la unidad y la función $1+e^z$ es entera, la solución del problema de Cauchy es entera. Por tanto, $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ con $c_0 = c_1 = 1$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación diferencial se obtiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} = \left(1 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Igualando los términos en z^j para $j \geq 2$. se obtiene

$$c_{j+2} = \frac{1}{(j+2)(j+1)} \left[2c_j + \sum_{l=0}^{j-1} \frac{c_l}{(j-l)!} \right]. \quad j \geq 1.$$

Además, $c_0 = c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_4 = 7/24$.

Pregunta D

La ecuación diferencial del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{z^2 \operatorname{sen} z}{z^3(1+z)}\frac{dw}{dz} + \frac{4}{z^2}\frac{1-\cos z}{z^2(1+z)}.$$

El punto $z=0$ es singular regular puesto que

$\frac{\operatorname{sen} z}{z(1+z)}$ y $\frac{1-\cos z}{z^2(1+z)}$ son analíticas en $B(0+i0,1)-\{0+i0\}$ y $\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z(1+z)} = 1$ y $\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2(1+z)} = \frac{1}{2}$. La solución general de la ecuación anterior es de la forma $w(z) = C_1 z^{\lambda_1} p_1(z) + C_2 z^{\lambda_2} p_2(z)$ donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, es decir $\lambda_1 = \sqrt{2}$ y $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Nótese que $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ y que $p_1(z) = p_2(z) = 1$.

Para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ se tiene que

$$\lim_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z} = 0.$$

Además,
$$\lim_{z\to 0} C_1\frac{z^{\sqrt{2}}p_1(z)}{\ln z} + C_2\frac{p_2(z)}{z^{\sqrt{2}}\ln z} = \begin{cases} 0 & \text{si } C_2 = 0 \\ \infty & \text{si } C_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{z\to 0} C_1\frac{z^{\sqrt{2}}p_1(z)}{z^2} + C_2\frac{p_2(z)}{z^2 z^{\sqrt{2}}} = \infty \text{ si } C_1 \neq 0 \text{ ó } C_2 \neq 0$$

Pregunta. E

La ecuación diferencial admite una solución de la forma

$$W(z) = z^{\sqrt{2}}\left(1+\sum_{k\geq 1}^{\infty} c_k z^k\right) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} c_k z^{k+\sqrt{2}} \quad \text{con } c_0 = 1$$

Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación diferencial y teniendo en cuenta

que $\dfrac{z^2 \operatorname{sen} z}{z^3(1+z)} = 1 - z + o(z)$; $\dfrac{4(1-\cos z)}{z^2(1+z)} = 2 - 2z + o(z)$

$$\frac{dW}{dz}(z) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} (k+\sqrt{2})\, c_k z^{k-1+\sqrt{2}} \quad y \quad \frac{d^2W}{dz^2} = \sum_{k\geq 0}^{\infty} (k+\sqrt{2})(k-1+\sqrt{2})\, c_k z^{k-2+\sqrt{2}}$$

se obtiene. $c_1 = \dfrac{\sqrt{2}-2}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{6-5\sqrt{2}}{7}$. Puesto que

$-\sqrt{2} < -\dfrac{7}{5} = -1.4$ $\qquad c_1 = \dfrac{6-5\sqrt{2}}{7} < \dfrac{6-5\cdot 7/5}{7} = -\dfrac{1}{7}$.

La ecuación puede escribirse como

$$z^2(1+z)\frac{d^2w}{dz^2}+\operatorname{sen} z\,\frac{dw}{dz}-\frac{4}{z^2}(1-\cos z)\,w=0$$

$$w(z)=z^{\sqrt{2}}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\,z^{k+\sqrt{2}}$$

$$z^2(1+z)\frac{d^2w}{dz^2}=z^2(1+z)\left(\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\,z^{\sqrt{2}-2}+(1+\sqrt{2})\sqrt{2}\,C_1 z^{\sqrt{2}-1}+\cdots\right)$$

$$\operatorname{sen} z\,\frac{dw}{dz}=\left(z+o(z^2)\right)\left(\sqrt{2}\,z^{\sqrt{2}-1}+(1+\sqrt{2})C_1 z^{\sqrt{2}}+\cdots\right)$$

$$-\frac{4}{z^2}(1-\cos z)\,w=\left(-2+o(z)\right)\left(z^{\sqrt{2}}+C_1 z^{\sqrt{2}+1}+\cdots\right)$$

Los términos en $z^{\sqrt{2}+1}$ son

$$\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\,z^{\sqrt{2}+1}+(1+\sqrt{2})\sqrt{2}\,C_1 z^{\sqrt{2}+1}+(1+\sqrt{2})C_1 z^{\sqrt{2}+1}-2C_1 z^{\sqrt{2}+1}=0$$

$$2-\sqrt{2}+C_1(\cancel{2}+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-\cancel{2})=0 \qquad C_1=\frac{\sqrt{2}-2}{1+2\sqrt{2}}=\frac{6-5\sqrt{2}}{7}$$

Pregunta F

Sustituyendo la función $u(r,\theta,t) = \cos\theta\, e^{-\alpha^2 t} J_1(\alpha r)$ en la ecuación diferencial del enunciado y multiplicando por r^2 se comprueba que se verifica la igualdad

$$e^{-\alpha^2 t} \cos\theta \left(r^2 \frac{d}{dr^2}(J_1(\alpha r)) + r \frac{d}{dr}(J_1(\alpha r)) + (\alpha^2 r^2 - 2)\, J_1(\alpha r) \right) = 0.$$

puesto que el tercer factor del primer miembro es idénticamente nulo.

Puesto que $u(r,\theta,0) = \cos\theta\, J_1(\alpha r)$ verifica las condiciones iniciales, de la unicidad de solución del problema de Cauchy definido en el enunciado

$$u(r,\theta,t) = \cos\theta\, e^{-\alpha^2 t} J_1(\alpha r).$$