E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : SOLUCIÓN 1erApellido : 2doApellido : Nombre :	Curso 17/18 (30.10.17) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1er Parcial

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\left\{\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right\}^{n+1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right\}^{n}.$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+7\lambda+10=0$$

$$\lambda = -\frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} -2 \\ -5 \end{cases}$$

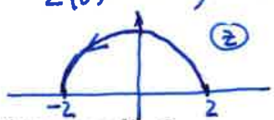
$$\lambda=-5: \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{v}_1 = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right\}$$

$$\lambda=-2: \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{v}_2 = \left\{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right\}^{n} = A(-5)^n \left\{\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right\} + B(-2)^n \left\{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right\}}$$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$z(\theta) = 2e^{i\theta}, \quad \theta \in [0,\pi]$$



$$I_1 = \int_\Gamma \operatorname{Log} \bar{z}\, \mathrm{d}z,$$

donde Log es el logaritmo principal y Γ es la semi-circunferencia de centro el origen y radio 2 contenida en el semiplano de las partes imaginarias positivas recorrida desde 2 a -2

$$z'(\theta) = 2i\, e^{i\theta}$$

$$\boxed{I_1 = -4(\operatorname{Log}2+1)+2\pi i}$$

$$I_1 = \int_0^\pi \operatorname{Log}(2e^{-i\theta})\, 2i\, e^{i\theta} d\theta = 2\operatorname{Log}2 \int_0^\pi i\, e^{i\theta} + 2\int_0^\pi \theta\, e^{i\theta} = 2\operatorname{Log}2\, e^{i\theta}\Big]_0^\pi + 2\theta \frac{e^{i\theta}}{i}\Big]_0^\pi - \frac{2}{i}\int_0^\pi e^{i\theta} d\theta =$$

$$= -4\operatorname{Log}2 + 2\pi i + 2e^{i\theta}\Big]_0^\pi = -4(\operatorname{Log}2+1)+2\pi i$$

C. **(3 puntos)** Para la misma curva Γ del apartado anterior, anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$\int z e^{2z} dz = \frac{z}{2}e^{2z} - \int \frac{e^{2z}}{2} dz = \left(\frac{z}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2z}$$

$$I_2 = \int_\Gamma z\, e^{2z}\, \mathrm{d}z,$$

$$\boxed{-2\cosh 4 + \frac{\sinh 4}{2}}$$

$$I_2 = \int_2^{-2} z e^{2z} dz = \left[\left(\frac{z}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2z}\right]_2^{-2} = \left(-1-\tfrac{1}{4}\right)e^{-4} - \left(1-\tfrac{1}{4}\right)e^{4} = -(e^4+e^{-4}) + \frac{1}{4}(e^4-e^{-4}) = -2\cosh 4 + \frac{1}{2}\sinh 4$$

NOTA.- Algunas integrales y primitivas que aparecen al resolver los apartados anteriores se obtienen fácilmente integrando por partes.

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia R y los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de McLaurin de la función:

$$f(z) = \frac{z\,\sin z + 2\,(\cos z - 1)}{z^4}.$$

$$\boxed{f(z) = -\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\frac{z^2}{5!} - \frac{3}{4}\frac{z^4}{7!} + \cdots}$$

$$z^4 f(z) = \cancel{z^2} - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^8}{7!} + 2\left(-\cancel{\frac{z^2}{2!}} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!}\right) =$$

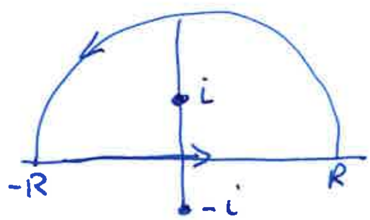
$$= -\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2\cdot 3!}\right)z^4 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3\cdot 5!}\right)z^6 - \left(\frac{1}{7!} - \frac{1}{4\cdot 7!}\right)z^8 =$$

$$= \frac{-1}{12}z^4 + \frac{2z^6}{3\cdot 5!} - \frac{3z^8}{4\cdot 7!}$$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{(x^4 + 2\,x^2 + 1)}\mathrm{d}x.$$

$$\boxed{I = \pi}$$



E $\quad z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2+1)^2$, polos $z = \pm i$ dobles

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2 - z + 1}{(z+i)^2(z-i)^2}, i\right) =$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2 - z + 1}{(z+i)^2}\right]_{z=i} = \left[2\pi i \frac{(2z-1)(z+i)^2 - 2(z+i)(z^2 - z + 1)}{(z+i)^4}\right]_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \frac{(2i-1)(2i) - 2(\cancel{i^2} - i + \cancel{1})}{(2i)^3} = 2\pi i \frac{(2i\cancel{-1})(2i) + \cancel{2i}}{(2i)^3} = 2\pi i \frac{(2i)^2}{(2i)^3} = \pi$$