Ampliación de Matemáticas
Variable Compleja (1)

Plano Complejo

- Cambio de coordenadas cartesianas a polares:

$$a + bi \rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan(b/a) \end{cases}$$

- Cambio inverso:

$$\rho \cdot e^{i\theta} \rightarrow \begin{cases} a = \rho \cos(\theta) \\ b = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

- Argumentos de un complejo

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

donde θ está definido como antes

- Argumento principal

$$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) \cap (-\pi, \pi)$$

donde θ está definido como antes

- Logaritmos de un complejo

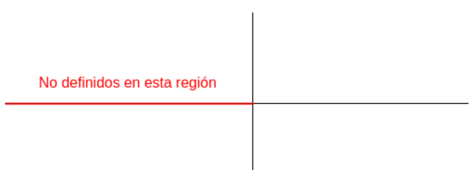
$$\log(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$$

donde $\arg(z)$ denota todos los argumentos posibles

- Logaritmo principal

$$\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$$

Nota: ni el argumento principal ni el logaritmo principal están definidos en la siguiente región:



Funciones de variable compleja

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

- Condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y) \end{cases}$$

- f es **derivable** en z_0 si:
  - Satisface Cauchy-Riemann en z_0
  - u_x, u_y, v_x, v_y son continuas en z_0
- f es **analítica** en z_0 si existe un entorno alrededor de z_0 en el que f es derivable en todos los puntos.
- Una función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es **armónica** si:

$$\nabla h^2 = 0$$

- **Teorema**: Si f es analítica en z_0, entonces u y v son armónicas en z_0.
- **Teorema**: Si A es simplemente conexo, y u es una función armónica, existe v (**armónica conjugada**) tal que $f = u + iv$ es analítica en A
- Cálculo práctico de la armónica conjugada:
  - Resolvemos $v_y = u_x$ integrando respecto a y, de donde v queda definida salvo una función de x.
  - Resolvemos $v_x = -u_y$ integrando respecto a x, y aplicamos condiciones iniciales si nos dan.