Examen de Entrenamiento

1.7.

Ecuación lineal de orden 2, con coeficientes constantes.

i) Polinomio característico: $\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2 \Rightarrow \lambda=-1$ es raíz doble.

ii) Solución general de la homogénea:

$$y_H^n = C_1\cdot(-1)^n + C_2\cdot n\cdot(-1)^n$$

iii) Solución particular: $6(n)=4\cdot 1^n$, donde 1 no es raíz del polinomio característico. Luego podemos encontrar una solución particular de la forma $y_p^n = a\cdot 1^n = a$. Obviamente, $a=1$

↳ polinomio de grado 0

iv) Solución general completa: $y^n = C_1\cdot(-1)^n + C_2\cdot n(-1)^n+1$.

Usando ~~a~~ $y^0=y^1=0$, llegamos a $\boxed{y^n=-(-1)^n+2n(-1)^n+1}$

2.2.3

$\dfrac{z\cosh(z)}{\operatorname{senh}(z)}$ tiene singularidades en los ceros de $\operatorname{senh}(z)$. Calculemos dónde están: $\operatorname{senh}(z)=0 \Leftrightarrow$ ~~[illegible]~~ $\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^z=e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z}=1 \Leftrightarrow 2z\in \operatorname{Log}(1)=\{\underbrace{0}_{\ln(1)}+(\underbrace{0}_{\operatorname{Arg}(1)}+2k\pi)i,\ k\in\mathbb{Z}\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2z=2k\pi i \Leftrightarrow z=k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.

Veamos qué ocurre en $z_k=k\cdot\pi\cdot i$:

- Si $k=0$, $z_0=0$, es una singularidad evitable, porque el numerador tiene un 0 de orden 1 y el denominador también. De hecho, $\lim_{z\to 0} f(z)=1$.

- Si $k\neq 0$, es un polo de orden 1, porque el numerador no se anula y el denominador tiene un cero de orden 1.

$$\operatorname{Res}(f,z_k)=\underbrace{z_k\cosh(z_k)/\cosh(z_k)}=z_k$$

Aplicando que $\operatorname{Res}(P/Q,z_0)=P(z_0)/Q'(z_0)$ cuando z_0 es cero de orden 1 de Q

$\boxed{2.3.3.}$ i) $f(0)=2 \Rightarrow a=1$

ii) f analítica en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ se tiene que cumplir Cauchy-Riemann en $\mathbb{C}$.

Es decir $\begin{cases} u_x = (e^x - e^{-x})\cos y = v_y = (be^x + ce^{-x}) y \\ u_y = (-e^{-x} - e^x)\operatorname{sen} y = -v_x = (be^x - ce^{-x})\operatorname{sen} y \end{cases}$

De la primera deducimos que $(1-b)e^x = (1+c)e^{-x}$, y la única forma de que se cumpla la igualdad $\forall x \in \mathbb{R}$ es que $\begin{cases} b=1 \\ c=-1 \end{cases}$

Luego $\boxed{f(z) = e^x \cos(y) + e^{-x}\cos y + i(e^x \operatorname{sen} y - e^{-x}\operatorname{sen} y) =}$

$= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + e^{-x}(\cos y - i\operatorname{sen} y) =$

$= e^z + e^{-z} = \boxed{2\cosh(z)}$

$\boxed{2.4.4.}$ Como $\operatorname{Log}(\bar{z})$ no es analítica, calculamos directamente la integral.

i) $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$ es una parametrización de la curva.

ii) $I = \int_0^\pi \operatorname{Log}(2e^{-i\theta}) \cdot \underbrace{2ie^{i\theta}}_{\gamma'(\theta)} \cdot d\theta =$ $\left[\begin{array}{l} \operatorname{Log}(re^{-i\theta}) = \\ = \ln(r) - i\theta \text{ siempre que} \\ \theta \in (-\pi,\pi) \text{, como es el caso} \end{array}\right.$

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

$= \int_0^\pi (\log(2) - i\theta)\, 2ie^{i\theta}\, d\theta = 2i\log 2 \int_0^\pi e^{i\theta}\, d\theta + 2\int_0^\pi \theta e^{i\theta}\, d\theta =$

$= 2\log(2)\, e^{i\theta}\Big|_0^\pi + \frac{2\theta e^{i\theta}}{i}\Big|_0^\pi - 2e^{i\theta}\Big|_0^\pi = \boxed{-4(\log(2)+1) + 2\pi i}$

$\boxed{2.5.10.}$

$\tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + o(z^6)}{1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^5)} = \underbrace{a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + o(z^6)}$

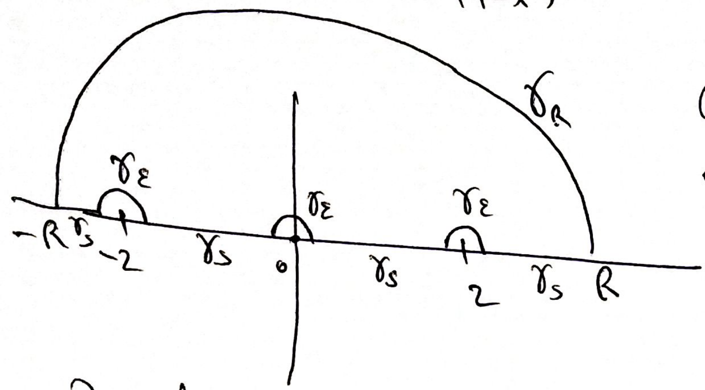
los términos pares son 0, porque $\tanh(z)$ es impar

Igualdad: $z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + o(z^6) = a_1 z + \left(a_3 + \frac{a_1}{2!}\right)z^3 + \left(a_5 + \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!}\right)z^5 + o(z^6) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Igualando coeficientes $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -1/3 \end{cases}$ $a_5 = \frac{2}{15}$ $\Rightarrow \boxed{\frac{\tanh(z)}{z} = 1 - \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + o(z^5)}$

2.6.2.

V.P. $\int \frac{e^{2ix}}{x(4-x^2)}$



Consideramos $f(z) = \frac{e^{2iz}}{z(4-z^2)}$, integrando en la curva $\gamma = \gamma_R \cup \gamma_\varepsilon \cup \gamma_s$

Por el teorema de los residuos:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \text{(no hay singularidades dentro)}.$$

$$\parallel$$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_s} f(z)\,dz.$$ Tomando límites $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$:

- $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = -\pi i \left(\operatorname{Res}(f,-2) + \operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(F,2) \right)$
- $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$, porque $|z \cdot f(z)| = \frac{|e^{2iz}|}{|4-z^2|} = \frac{e^{-2\operatorname{Im}(z)}}{|4-z^2|} \xrightarrow[\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im}(z)>0}]{} 0$
- $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\gamma_s} f(z) = \text{V.P.} \int \frac{e^{2ix}}{x(4-x^2)} = I$

Luego $\boxed{I = \pi i \left(\underbrace{\operatorname{Res}(f,-2)}_{-e^{4i}/8} + \underbrace{\operatorname{Res}(f,0)}_{1/4} + \underbrace{\operatorname{Res}(f,2)}_{e^{-4i}/8} \right) = \frac{\pi i}{4} \cdot (1 - \cos 4)}$