E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : EXP. : 1er Apellido : SOLUCIÓN 2do Apellido : Nombre :	Curso 15/16 (07.07.16) Tiempo 1h. 20 m. Valor 18 puntos Parte 1

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$x^{n+2} + 2\,x^{n+1} + x^n = 4,$$

que cumple $x^0 = x^1 = 0$.

$$\boxed{x^n = 1 - (-1)^n + 2n\,(-1)^n}$$

Probando con $x^n = (r)^n$

$r^2 + 2r + 1 = 0$

$\Rightarrow r_{1,2} = -1$ doble

$x_h^n = A(-1)^n + Bn(-1)^n$

$4 = 4\cdot(1)^n \Rightarrow$ de prueba $x_p^n = C$

$\Rightarrow C + 2C + C = 4 \Rightarrow C = 1$

$x^n = 1 + A(-1)^n + Bn(-1)^n$

$x^0 = x^1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + A = 0 \\ 1 - A - B = 0 \end{cases}$ $A = -1$, $B = 2$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I = \int_\Gamma \sin|z|\,\mathrm{d}z,$$

donde $z = x + \mathrm{i}y$ y Γ es el segmento orientado de la bisectriz del primer cuadrante que va desde el origen, $(0 + \mathrm{i}0)$, al punto $(1 + \mathrm{i})$.

$\Gamma \equiv z(t) = t + it \quad t \in [0,1]$

$$\boxed{I = (1+i)\,\frac{1 - \cos\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

$I = \int_0^1 \sin\sqrt{t^2+t^2}\,(1+i)\,dt =$

$= \int_0^1 \sin(\sqrt{2}t)(1+i)\,dt =$

$= -(1+i)\frac{\cos(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}\Big]_0^1 = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}(1 - \cos\sqrt{2})$

C. **(3 puntos)** Sea $u(x,y) = y^2 - g(x)$ función armónica en $\mathbb{R}^2$. Anotar en el siguiente recuadro la expresión de la función real $g(x)$ y de la función armónica conjugada $v(x,y)$, sabiendo que la función analítica $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ cumple las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

$u_{xx} + u_{yy} = 2 - g''(x) = 0$

$\Rightarrow g = x^2 + ax + b$

$u(x,y) = y^2 - x^2 - ax - b$

$f(0) = u(0,0) + i v(0,0) = 0 + i0$

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = x^2 - x \\ v(x,y) = -2xy + y \end{array}}$$

$\Rightarrow u(0,0) = -b = 0$

$u_x(x,y)\big|_0 = \mathrm{Re}(f'(z))\big|_0 = -2x - a\big|_0 = -a = 1 \Rightarrow a = -1$

$u(x,y) = -x^2 + x + y^2$

$u_x = -2x + 1 = v_y \Rightarrow v = -2xy + y + h(x)$

$-v_x = 2y + h'(x) = u_y = 2y \quad h'(x) = 0$

$\mathrm{Im}(f(0)) = 0 \Rightarrow h = 0$

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x\,(x^2+4)}\mathrm{d}x. = \pi i\, \mathrm{Res}\left(\frac{z+1}{z(z^2+4)}, 0\right) + 2\pi i\, \mathrm{Res}\left(\frac{z+1}{z(z^2+4)}, 2i\right)$$

$= \pi i\,\frac{1}{4} + 2\pi i\,\frac{2i+1}{2i\,4i} =$

$= \frac{\pi i}{4} - \frac{\pi i}{4}(1+2i) = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}}$$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el término general del desarrollo en serie de McLaurin (en $z = 0$) de la función (recuerde que el desarrollo de la función derivada es el desarrollo derivado)

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots) = 1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}+\cdots$$

$$f(z) = \frac{z+1}{(1-z)^2}.$$

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z+2z^2+3z^3+\cdots+nz^n$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1+2z+3z^2+4z^3+\cdots+(n+1)z^n+\cdots$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{z}{(1-z)^2} = (1+3z+5z^2+\cdots+(1+2n)z^n+\cdots) = \sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)z^n}$$

F. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el desarrollo en serie Laurent en $|z-1| > 0$ de la función del apartado ***E***.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{(z-1)+1}{(z-1)^2} = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)}$$

$$\boxed{f(z) = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)} \quad ; \ |z-1| > 0}$$

Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Respuestas

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso

Grupo

Auxiliar

Ampliación de Matemáticas (Versión 1), (07-07-2016)

A. La solución $u = u(x)$ de la ecuación integral:

$$u(x) + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-s)} u(s) \mathrm{d}s = 1, \quad \forall x \in [0, \infty[.$$

es

(1) $u(x) = (1 - x)$. (2) $u(x) = (1 + x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

(3) $u(x) = (1 + x)$. (4) $u(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

(Nota.- Para resolver el problema, se sugiere tomar transformadas de Laplace en la ecuación dada)

B. Considérese el problema de contorno definido por

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x^2), \; \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = (4x^2 - 2)\exp(-x^2) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

$$u(x, t) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times]0, +\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la transformada de Fourier en la variable x de la solución del problema de contorno que se acaba de definir . Sobre la función $\hat{u}(\omega, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) \exp(-\mathrm{i}\omega x) \mathrm{d}x$ se puede afirmar que:

(5) $\hat{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1) = 0$. (6) $\hat{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1) = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{\pi}{16})$.

(7) $\hat{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1) = -\sqrt{2\pi}\exp(-\frac{\pi}{16})$. (8) No es cierta ninguna de las tres

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-bx^2)) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

(A)

$$\mathcal{L}\left(u(x) + \int_0^x e^{(x-s)} u(s) - 1 \right) =$$

$$= U(p) + \mathcal{L}(e^x)\, U(p) - \frac{1}{p} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) U(p) - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{p}{p-1} U(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \Rightarrow u(x) = 1 - x$$

<u>NOTA</u> $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$; $\mathcal{L}(x f(x)) = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}(x)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2}$$

$$\mathcal{L}(e^x f(x)) = \mathcal{L}(f(x))\,(p-1) \Rightarrow \mathcal{L}(e^x) = \frac{1}{p-1}$$

(B) Tomando transformadas de Fourier en la ecuación $(i\omega)^4 \hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0$, cuya solución general es $\hat{u} = A \cos \omega^2 y + B \operatorname{sen} \omega^2 y$. De las condiciones de contorno y teniendo en cuenta que $(4x^2 - 2)\exp(-x^2) = \frac{d^2}{dx^2}(\exp(-x^2))$

$$\hat{u}(\omega, y) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)(\cos \omega^2 y - \operatorname{sen} \omega^2 y).$$

Por tanto, $\hat{u}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1\right) = 0$.

C. Considérese la ecuación diferencial

$$z^4 \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - \frac{z}{2}\sin(7z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + (\sinh(5z^2) + z^3)w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(9) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z \to 0} \frac{w_1(z)}{z^3} = 0$.

(10) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim_{z \to 0} \frac{w_2(z)}{z^{\sqrt{5}} \ln(z)} = 1$.

(11) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z \to 0} \frac{w_1(z)}{z^2} = 0$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $w : D \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D de la forma $w(z) = z^{\lambda_1}(1 + p_1(z))$, donde $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \notin \mathbb{N}$ y $p_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función analítica tal que $p_1(0) = 0$. Sobre la función p_1 puede afirmarse que:

(13) $|\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)| \leq \frac{4}{5}$.

(14) $\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)) > \frac{4}{5}$.

(15) $\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)) < -\frac{4}{5}$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r, \theta, t) \in [0, 1[\times[-\pi, \pi[\times]0, +\infty[,$$

$$u(1, \theta, t) = 0 \quad \text{para } (\theta, t) \in [-\pi, \pi[\times]0, +\infty[,$$

$$u(r, \theta, 0) = J_1(\alpha r)\cos(\theta) + J_2(\beta r)\sin(2\theta), \quad \text{para } (r, \theta) \in [0, 1[\times[-\pi, \pi[,$$

donde α, β son dos números reales mayores que cero tales que $\alpha \neq \beta$ $J_1(\alpha) = J_2(\beta) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r, \theta, t) = \cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r) + \sin(2\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k2}(t)J_2(\lambda_{k2}r)$ donde (λ_{m1}) (respectivamente (λ_{m2})) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$ (respectivamente $J_2(z)$). Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) $u(r, \theta, t) = \cos(\theta)\exp(-\alpha^2 t)J_1(\alpha r) + \sin(2\theta)\exp(-\beta^2 t)J_2(\beta r)$.

(18) $u(r, \theta, t) = \exp(-\alpha^2 t)(\cos(\theta)J_1(\alpha r) + \sin(2\theta)J_2(\beta r))$.

(19) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

(C) El punto $z=0$ es singular regular puesto que $\dfrac{\operatorname{sen}(7z^2)}{2z^2}$ y $\dfrac{\operatorname{senh}(5z^2)+z^3}{z^2}$ son funciones analíticas en $\mathbb{C}-\{0+0i\}$ y

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(7z^2)}{2z^2}=\dfrac{7}{2}$ y $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{senh}(5z^2)+z^3}{z^2}=5$. La solución general de la ecuación del enunciado es de la forma $w(z)=C_1 z^{\lambda_1}p_1(z)+C_2 z^{\lambda_2}p_2(z)$ donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & \frac{9}{2}\end{pmatrix}$ es decir $\lambda_1=\frac{5}{2}$ $\lambda_2=2$ $\lambda_1-\lambda_2\notin\mathbb{N}$, y p_1 y p_2 son dos funciones analíticas tales que $p_1(0)=p_2(0)=1$. En consecuencia

$$\lim_{z\to 0}\frac{C_1 z^{5/2}p_1(z)+C_2 z^2 p_2(z)}{z^3}\neq 0 \quad \text{si } C_1\neq 0 \text{ ó } C_2\neq 0$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{C_1 z^{5/2}p_1(z)+C_2 z^2 p_2(z)}{z^{\sqrt{5}}\ln z}\neq 1 \quad \text{para todo } C_1, C_2\in\mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{C_1 z^{5/2}p_1(z)+C_2 z^2 p_2(z)}{z^2}= 0 \quad \text{para todo } C_1\in\mathbb{C} \text{ y } C_2=0.$$

(D)

La ecuación diferencial admite una solución de la forma $w(z) = z^{5/2}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k\right) = z^{5/2}(1+c_1 z + O(z^2))$ donde $O(z)$ es una función analítica. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación diferencial $z^2 \frac{d^2w}{dz^2} - z\frac{\sin(7z^2)}{2z^2}\frac{dw}{dz} + \frac{\sinh(5z^2)+z^3}{z^2} w = 0$

y teniendo en cuenta que $\frac{\sin(7z^2)}{2z^2} = \frac{7}{2} + O(z^3)$

$\frac{\sinh(5z^2)+z^3}{z^2} = 5 + z + O(z^3)$ se obtiene

$$c_1 = -\frac{2}{3}.$$

(E) Sustituyendo la función $u(r,\theta,t) = \cos\theta\, e^{-\alpha^2 t} J_1(\alpha r) + \operatorname{sen} 2\theta\, e^{-\beta^2 t} J_2(\beta r)$ en la ecuación diferencial del enunciado y multiplicando por r^2 se comprueba que se verifica la igualdad

$$e^{-\alpha^2 t}\cos\theta\left(r^2\frac{d^2}{dr^2}J_1(\alpha r) + r\frac{d}{dr}(J_1(\alpha r)) + (\alpha^2 r^2 - 1)J_1(\alpha r)\right) +$$
$$e^{-\beta^2 t}\operatorname{sen}2\theta\left(r^2\frac{d^2}{dr^2}(J_2(\beta r)) + r\frac{d}{dr}(J_2(\beta r)) + (\beta^2 r^2 - 4)J_2(\beta r)\right) = 0$$

puesto que el tercer factor de cada uno de los sumandos del primer miembro es idénticamente nulo.

Además, $u(r,\theta,t)$ verifica las condiciones iniciales y de contorno. Por tanto, en virtud de la unicidad de solución del problema de Cauchy definido en el enunciado es

$$u(r,\theta,t) = \cos\theta\, e^{-\alpha^2 t} J_1(\alpha r) + \operatorname{sen}2\theta\, e^{-\beta^2 t} J_2(\beta r).$$