Ampliación de Matemáticas
Ecuaciones en Diferencias

Ecuación lineal de primer orden

$$y^{n+1} = Q(n) \cdot y^n + G(n)$$

• Solución general de la homogénea

$$y_H^n = a \cdot \prod_{i=0}^{n-1} Q(i), \forall a \in \mathbb{R}$$

• Solución particular de la completa

$$y_P^n = a(n) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} Q(i)$$

(Método de variación de las constantes)

• Solución general de la completa

$$y^n = y_H^n + y_P^n$$

Ecuación vectorial de coeficientes constantes

$$\vec{y}^{n+1} = A \cdot \vec{y}^n + G(n)$$

• Solución general de la homogénea

$$\vec{y_H}^n = A \cdot \vec{c}$$

• Solución particular de la completa

$$\vec{y_P}^n = \sum A^{n-1-i} \cdot G(i)$$

• Solución general de la completa

$$y^n = y_H^n + y_P^n$$

• Forma práctica de calcular la solución: si A es diagonalizable, y $\vec{v_j}$ son los autovectores de A, entonces:

$$\vec{y_H}^n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \lambda_i^n \cdot \vec{v_i}$$

Ecuación lineal de orden p de coeficientes constantes

$$a_{n+1} \cdot y^{n+1} + ... + a_{n-p} \cdot y^{n-p+1} = G(n)$$

Donde:

$$G(n) = p_1^*(n) \cdot r_1^n + ... + p_w^*(n) \cdot r_w^n$$

Y:

$$p_k^*(n) = \beta_{1,k} + ... + \beta_{\beta_k+1,k} \cdot n^{\beta_k}$$

• Solución general de la homogénea

• Calculamos las raíces de la ecuación característica:

$$a_{n+1} \cdot \lambda^p + ... + a_{n-p} = 0$$

• Cada raíz da lugar a tantas soluciones independientes como su multiplicidad

• Si la raíz es real de multiplicidad r, las soluciones que genera son:

$$\{\lambda^n, ..., n^{r-1} \cdot \lambda^n\}$$

• Si la raíz es compleja de multiplicidad r, las soluciones que genera son:

$$\{\rho^n \cos(n\theta), ..., n^{r-1} \cdot \rho^n \cos(n\theta),$$
$$\rho^n \sin(n\theta), ..., n^{r-1} \cdot \rho^n \sin(n\theta)\}$$

• Con esto, las soluciones de la ecuación homogénea son:

$$\sum_{i=0}^{p} c_i \cdot s_i, \forall c_i \in \mathbb{R}$$

Donde s_i son las soluciones anteriores generadas por las raíces

• Solución particular de la completa

$$y_p^n = Q_1(n) \cdot r_1^n + ... + Q_w(n) \cdot r_w^n$$

Donde el grado de $Q_k(n)$ es β_k (caso general, cuando r_k no raíz del polinomio característico) o bien $\beta_k + r_k$ cuando r_k es raíz del polinomio característico de multiplicidad k

• Solución general de la completa

$$y^n = y_H^n + y_P^n$$