# Ampliación de Matemáticas
## Variable Compleja (3)

### Integración

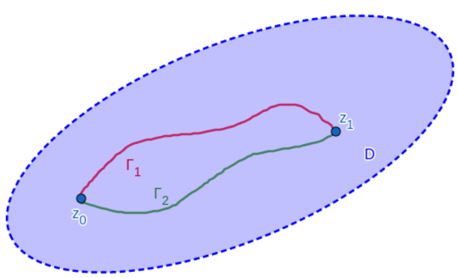
Dada una función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ compleja (no necesariamente analítica) y una curva $\Gamma$, definimos su **integral de línea** como:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Donde $\gamma(t)$ es una parametrización cualquiera de la curva $\Gamma$. Veamos algunas propiedades importantes.

- El resultado **no depende** de la parametrización (está bien definida).
- Dado un dominio simplemente conexo $D$, dos puntos $z_0$ y $z_1$ de $D$, y dadas dos curvas $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ uniendo ambos puntos, ambas en $D$, si la función $f$ es analítica en $D$, entonces la integral **no depende del camino**:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$




- Si $D$ es un dominio simplemente conexo y $f$ es una función analítica en $D$, entonces la integral sobre cualquier curva cerrada de $D$ es 0:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \ , \forall \gamma \subset D$$

Nota: esto permite definir una **primitiva** de $f$:

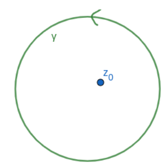
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

Donde la integral se realiza tomando cualquier curva que una $z_0$ con $z$

### Teorema de Cauchy

Si $f$ es una función analítica en un dominio $D$, $\gamma$ es una circunferencia en $D$ orientada de manera antihoraria, y $z_0$ es un punto cualquiera del interior de la circunferencia, entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$




Nota: este teorema es un caso particular del teorema de los residuos.

### Ceros y singularidades

Una función analítica $f$ tiene un **cero de orden m** en $z_0$ si:

$$f(z_0) = \ldots = f^{m-1}(z_0) = 0 \ , \ f^m(z_0) \neq 0$$

Una función analítica en todos los puntos de un entorno de $z_0$ salvo en $z_0$ se dice que tiene una **singularidad aislada** en $z_0$. Las singularidades aisladas pueden ser:

- **Evitable**: Cuando

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) \text{ y es finito}$$

- **Polo de orden m**: Cuando $(z-z_0)^m f(z)$ es analítica en $z_0$, pero $(z-z_0)^{m-1} f(z)$ no. En ese caso, se cumple que

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

- **Esencial**: Cuando

$$\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$$