Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Respuestas: 1–65

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso

Grupo

Auxiliar

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (31-01-2022)

A. Sea $u:\mathbb{R}\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(1+\frac{1}{\exp(t)+\exp(2t)}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad \text{en } (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0)=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\quad x\in\mathbb{R},$$
$$u(x,t)\ \text{uniformemente acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u}:\mathbb{R}\times]0,+\infty[\to\mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(2,\ln(4))=\dfrac{\exp\left(-\dfrac{2}{\frac{5}{2}+2\ln(5)}\right)}{\sqrt{\frac{5}{2}+2\ln(5)}}$.

(2) $u(2,\ln(4))=\dfrac{\exp\left(-\dfrac{2}{\frac{1}{2}+2\ln(5)}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}+2\ln(5)}}$.

(3) $u(2,\ln(4))=\dfrac{\exp\left(-\dfrac{2}{\frac{5}{2}+2\ln(\frac{5}{2})}\right)}{\sqrt{\frac{5}{2}+2\ln(\frac{5}{2})}}$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}(t)+2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t)+8w(t)=g(t)\ \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0)=1,$$

donde $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es la función definida por $g(t)=\sin(t)$ si $t\in[0,\frac{\pi}{2}[$ y $g(t)=1$ si $t\in[\frac{\pi}{2},+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2)=\dfrac{1}{160}(12+\exp(-\pi))$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](2)=\dfrac{1}{160}(12+5\exp(-\pi))$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2)=\dfrac{1}{160}(14+\exp(-\pi))$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (24-01-2020)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$(1+z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - z^4w = 0 \text{ en } B(0+\mathrm{i}0,1),\ w(0)=1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0)=0.$$

La solución del problema anterior es una función $w : B(0+\mathrm{i}0,1) \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w cumple que:

(9) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - (1+\frac{z^6}{30})}{z^8} = -\dfrac{1}{42}$ y existe algún $z_1 \in B(0+\mathrm{i}0,1)$ tal que que $\overline{w(-z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(10) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - (1+\frac{z^6}{30})}{z^8} = -\dfrac{1}{56}$ y para todo $z_1 \in B(0+\mathrm{i}0,1)$ se verifica que $\overline{w(-z_1)} = w(\overline{z_1})$.

(11) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - (1+\frac{z^4}{12}+\frac{z^6}{30})}{z^8} = -\dfrac{1}{42}$ y para todo $z_1 \in B(0+\mathrm{i}0,1)$ se verifica que $\overline{w(-z_1)} = w(\overline{z_1})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sinh(2z)}{4}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - zw = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0}\dfrac{w_{s3}(z)}{\sqrt{z}} = 1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\dfrac{w_{s1}(z)}{\ln(z)} = 1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0}\dfrac{w_{s2}(z)}{\sqrt[4]{z}} = 1$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (24-01-2020)

E. Considérese el límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 J_{\frac{1}{3}}(x) - x J_{\frac{4}{3}}(x)}{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\Gamma(\frac{4}{3})\sqrt[3]{2}} - J_{\frac{1}{3}}(x)}.$$

El límite anterior existe y vale:

(17) $\dfrac{10}{3}\Gamma(\dfrac{4}{3})$.

(18) $\dfrac{8}{3\Gamma(\frac{7}{3})}$.

(19) $\dfrac{10}{3}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\dfrac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$