Ampliación de Matemáticas. Parcial I (27-10-2020)

A.- (3 puntos) Anotar en un recuadro la solución del siguiente problema de condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\}^{n+1} = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_2 & 0 & m \\ m & \lambda_1 & -m \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\}^{n}$$

$$\left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\}^{0} = \left\{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right\}$$

B.V1.- (3 puntos) Anotar y dibujar en un recuadro el dominio de analiticidad de la función

$$f(z) = \log\left(\frac{z+ai}{z-ai}\right) \text{ siendo } \log z = \mathrm{Ln}|z| + i\arg z, \quad \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$$

así como la expresión de $f'(z)$ en dicho dominio.

B.2. Anotar en un recuadro el valor de la integral

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2+a^2}\, dz$$

siendo Γ el segmento recto con origen en el punto z_I y final en el punto z_F

Versión.V1.1.- $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $z_I = nai$ $(n > 1)$, y $z_F = -a$ **Versión.V1.2.-** $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, $z_I = a$, y $z_F = nai$ $(n > 1)$

B.V2.- (3 puntos) Anotar y dibujar en un recuadro el dominio de analiticidad de la función

$$f(z) = \log\left(\frac{z+a}{z-a}\right) \text{ siendo } \log z = \mathrm{Ln}|z| + i\arg z, \quad \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$$

así como la expresión de $f'(z)$ en dicho dominio.

B.2. Anotar en un recuadro el valor de la integral

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2-a^2}\, dz$$

siendo Γ el segmento recto con origen en el punto z_I y final en el punto z_F

Versión.V2.1.- $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $z_I = na$ $(n > 1)$, y $z_F = ai$ **Versión.V2.2.-** $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, $z_I = -na$ $(n > 1)$, y $z_F = -ai$

C.- (3 puntos) Dada la función $\quad f(z) = \dfrac{1}{z^2 \operatorname{senh}\left(\dfrac{a}{b\,z}\right)}$

C.1.- Anotar en un recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

C.2.- Anotar en un recuadro el valor de la integral

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz$$

siendo Γ la circunferencia $|z| = 6$ orientada positivamente.

D.- (3 puntos) Sea la función real de dos variables reales definida como

$$u(x,y) = e^{s_n n x} \cos\,(ay) \,+\, e^{s_m m y} \cos\,(bx), \qquad n, m \in \mathbb{R}^+$$

D.1.- Anotar en un recuadro los valores de n y m para los que u es la parte real de una función, $f(z)$, analítica en algún dominio del plano complejo.

D.2.- Anotar la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x,y)$.

D.3.- Anotar la expresión analítica de $f(z)$, en función de $z = x + iy$, sabiendo $f(0) = 2 + di$.

E.V1.- (3 puntos) Anotar en un recuadro el valor de la integral real

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\, \cos\,(a\pi x)}{(bx^2 + c)\,(dx + 1)}\, dx$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

E.V2.- (3 puntos) Anotar en un recuadro el valor de la integral real

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\, \operatorname{sen}\,(a\pi x)}{(bx^2 + c)\,(dx + 1)}\, dx$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

Solución Parcial I (27-10-2020)

Ejercicio A.

Solución general del sistema lineal: $\boldsymbol{y}^{n+1} = A\,\boldsymbol{y}^n \longrightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & m \\ m & \lambda_1 & -m \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n}, \quad n \geq 0$

$$\boxed{m = \lambda_1 - \lambda_2}$$

- Autovalores de A

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda & 0 & m \\ m & \lambda_1 - \lambda & -m \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)^2\,(\lambda - \lambda_2) \longrightarrow \begin{cases} \text{Multiplicidad algebraica de } \lambda_1 \longrightarrow \alpha_1 = 2 \\ \text{Multiplicidad algebraica de } \lambda_2 \longrightarrow \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Multiplicidad geométrica de } \lambda_1 \longrightarrow d_1 = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_1\, I) = 3 - rg(A - \lambda_1\, I) = 3 - 1 = 2 = \alpha_1 \\ \text{Multiplicidad geométrica de } \lambda_2 \longrightarrow d_2 = 1 = \alpha_2 \end{cases} \Longrightarrow A \text{ es diagonalizable}$$

- Autovectores asociados

1. Autovectores asociados a λ_1

$$(A - \lambda_1 I)\,\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -m & 0 & m \\ m & 0 & -m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} v_1 - v_3 = 0 \\ \forall v_2 \in \mathbb{R} \end{array} \longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Autovector asociado a λ_2

$$(A - \lambda_2 I)\,\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m \\ m & m & -m \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{array} \longrightarrow \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución general: $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n} = C_1 \lambda_1^n \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + C_2 \lambda_1^n \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + C_3 \lambda_2^n \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Solución particular del problema de valores iniciales: $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{0} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} C_1 = c \\ C_2 = a + b - c \\ C_3 = a - c \end{array}$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n} = c\,\lambda_1^n \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + (a + b - c)\,\lambda_1^n \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + (a - c)\,\lambda_2^n \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Ejercicio B.V1

$$f(z) = \log \underbrace{\left(\frac{z+ai}{z-ai}\right)}_{w} \quad \text{siendo } \log z = \mathrm{Ln}|z| + i\arg z, \quad \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi, \qquad \boxed{a>0}$$

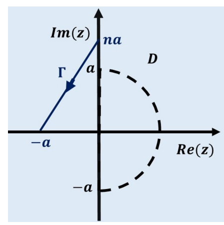
- En el dominio donde sea analítica $\boxed{f'(z) = \dfrac{w'}{w} = \dfrac{-2ai}{z^2+a^2}}$

- Dominio de analiticidad (D): $w = \dfrac{x+i(y+a)}{x+i(y-a)} = \dfrac{(x+i(y+a))(x-i(y-a))}{x^2+(y-a)^2} = \dfrac{x^2+y^2-a^2}{x^2+(y-a)^2} + i\dfrac{2ax}{x^2+(y-a)^2}$

$\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{2}}$ $f(z)$ no analítica en $\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{Re}(w) = 0 & \Longleftrightarrow & x^2+y^2=a^2 \\ \mathrm{Im}(w) \geq 0 & \Longleftrightarrow & x \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{D = \mathbb{C} - \left\{z = x+iy \,/\, x^2+y^2 = a^2 \text{ con } x \geq 0\right\}}$

- Valor de la integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2+a^2}\,dz$ $\boxed{\boldsymbol{n>1}}$

  con Γ desde $z_I = nai$ a $z_F = -a$ $(\Gamma \in D)$



Primitiva del integrando en D: $\dfrac{f(z)}{z^2+a^2} = \dfrac{-1}{2ai} f'(z)\, f(z) = \dfrac{i}{2a} f'(z)\, f(z) = F'(z) \longrightarrow F(z) = \dfrac{i}{4a} f^2(z)$

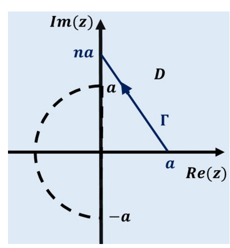
Independencia del camino en D: $\Gamma \in D \Longrightarrow I = \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2+a^2}\,dz = \frac{i}{4a}\left(f^2(z_F) - f^2(z_I)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(z_F) = f(-a) = \log\left(\dfrac{-1+i}{-1-i}\right) = \log(-i) = \dfrac{3\pi}{2}\, i \\ f(z_I) = f(nai) = \log\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) + i2\pi \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{rl} I & = \dfrac{i}{4a}\left[\dfrac{-9\pi^2}{4} - \left(\mathrm{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) + i2\pi\right)^2\right] = \\ & = \boxed{\dfrac{-i}{4a}\left[\mathrm{Ln}^2\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) - \dfrac{7\pi^2}{4} + i4\pi\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)\right]} \end{array}$$

$\boxed{\alpha = \dfrac{3\pi}{2}}$ $f(z)$ no analítica en $\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{Re}(w) = 0 & \Longleftrightarrow & x^2+y^2=a^2 \\ \mathrm{Im}(w) \leq 0 & \Longleftrightarrow & x \leq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{D = \mathbb{C} - \left\{z = x+iy \,/\, x^2+y^2 = a^2 \text{ con } x \leq 0\right\}}$

- Valor de la integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2+a^2}\,dz$ $\boxed{\boldsymbol{n>1}}$

  con Γ desde $z_I = a$ a $z_F = nai$ $(\Gamma \in D)$



Primitiva del integrando en D: $\dfrac{f(z)}{z^2+a^2} = \dfrac{-1}{2ai} f'(z)\, f(z) = \dfrac{i}{2a} f'(z)\, f(z) = F'(z) \longrightarrow F(z) = \dfrac{i}{4a} f^2(z)$

Independencia del camino en D: $\Gamma \in D \Longrightarrow I = \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2+a^2}\,dz = \frac{i}{4a}\left(f^2(z_F) - f^2(z_I)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(z_F) = f(nai) = \log\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) + i2\pi \\ f(z_I) = f(a) = \log\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) = \log(i) = \dfrac{5\pi}{2}\, i \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{rl} I & = \dfrac{i}{4a}\left[\left(\mathrm{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) + i2\pi\right)^2 + \dfrac{25\pi^2}{4}\right] = \\ & = \boxed{\dfrac{i}{4a}\left[\mathrm{Ln}^2\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) + \dfrac{9\pi^2}{4} + i4\pi\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)\right]} \end{array}$$

Ejercicio B.V2

$$f(z) = \log \underbrace{\left(\frac{z+a}{z-a}\right)}_{w} \text{ siendo } \log z = \mathrm{Ln}|z| + i\arg z, \quad \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi, \qquad \boxed{a>0}$$

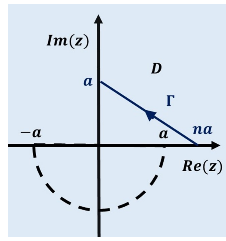
- En el dominio donde sea analítica $\boxed{f'(z) = \dfrac{w'}{w} = \dfrac{-2a}{z^2-a^2}}$

- Dominio de analiticidad (D): $w = \dfrac{x+a+iy}{x-a+iy} = \dfrac{(x+a+iy)(x-a-iy)}{(x-a)^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-a^2}{(x-a)^2+y^2} + i\dfrac{(-2ay)}{(x-a)^2+y^2}$

$\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{2}}$ $f(z)$ no analítica en $\begin{cases} \mathrm{Re}(w) = 0 \iff x^2+y^2 = a^2 \\ \mathrm{Im}(w) \geq 0 \iff y \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{D = \mathbb{C} - \{z = x+iy \,/\, x^2+y^2 = a^2 \text{ e } y \leq 0\}}$

- Valor de la integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2-a^2}\,dz$ $\boxed{\boldsymbol{n>1}}$

  con Γ desde $z_I = na$ a $z_F = ai$ $(\Gamma \in D)$



Primitiva del integrando en D: $\dfrac{f(z)}{z^2-a^2} = \dfrac{-1}{2a} f'(z)\, f(z) = F'(z) \longrightarrow F(z) = \dfrac{-1}{4a} f^2(z)$

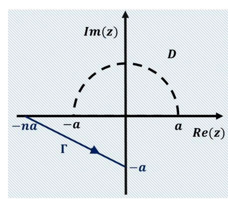
Independencia del camino en D: $\Gamma \in D \Longrightarrow I = \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2-a^2}\,dz = \frac{-1}{4a}\left(f^2(z_F) - f^2(z_I)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(z_F) = f(ai) = \log\left(\dfrac{1+i}{-1+i}\right) = \log(-i) = \dfrac{3\pi}{2}\, i \\ f(z_I) = f(na) = \log\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) + i2\pi \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{rl} I &= \dfrac{1}{4a}\left[\dfrac{9\pi^2}{4} + \left(\mathrm{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) + i2\pi\right)^2\right] = \\ &= \boxed{\dfrac{1}{4a}\left[\mathrm{Ln}^2\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) - \dfrac{7\pi^2}{4} + i4\pi\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)\right]} \end{array}$$

$\boxed{\alpha = \dfrac{3\pi}{2}}$ $f(z)$ no analítica en $\begin{cases} \mathrm{Re}(w) = 0 \iff x^2+y^2 = a^2 \\ \mathrm{Im}(w) \leq 0 \iff y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{D = \mathbb{C} - \{z = x+iy \,/\, x^2+y^2 = a^2 \text{ e } y \geq 0\}}$

- Valor de la integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2-a^2}\,dz$ $\boxed{\boldsymbol{n>1}}$

  con Γ desde $z_I = -na$ a $z_F = -ai$ $(\Gamma \in D)$



Primitiva del integrando en D: $\dfrac{f(z)}{z^2-a^2} = \dfrac{-1}{2a} f'(z)\, f(z) = F'(z) \longrightarrow F(z) = \dfrac{-1}{4a} f^2(z)$

Independencia del camino en D: $\Gamma \in D \Longrightarrow I = \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2-a^2}\,dz = \frac{-1}{4a}\left(f^2(z_F) - f^2(z_I)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(z_F) = f(-ai) = \log\left(\dfrac{1-i}{-1-i}\right) = \log(i) = \dfrac{5\pi}{2}\, i \\ f(z_I) = f(-na) = \log\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right) + i2\pi \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{rl} I &= \dfrac{1}{4a}\left[\dfrac{25\pi^2}{4} + \left(\mathrm{Ln}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right) + i2\pi\right)^2\right] = \\ &= \boxed{\dfrac{1}{4a}\left[\mathrm{Ln}^2\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right) + \dfrac{9\pi^2}{4} + i4\pi\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)\right]} \end{array}$$

Ejercicio C. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \operatorname{senh}\left(\dfrac{a}{b\,z}\right)}$ **Valores de a y b tales que** $\boxed{\left|\dfrac{a}{\pi b}\right| < 6}$

1. **Puntos singulares de f** (Ceros de $1/f$): $\begin{cases} z = 0 \\ e^{2a/bz} = 1 = e^{2k\pi\, i} \Longleftrightarrow z_k = \dfrac{ai}{k\pi b}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$

   $z = 0$ **no está aislado**

   $z_k = \dfrac{ai}{k\pi b}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} P(z) = 1/z^2 \text{ analítica en } z_k \text{ y } P(z_k) \neq 0 \\ \left. \begin{array}{l} Q(z) = \operatorname{senh}\left(\dfrac{a}{b\,z}\right) \text{ analítica en } z_k \text{ y } Q(z_k) = 0 \\ Q'(z_k) = \dfrac{-a}{bz_k^2} \underbrace{\cosh\left(\dfrac{a}{b\,z_k}\right)}_{(-1)^k} \neq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} z_k \text{ cero simple de } Q(z) \Longrightarrow \\ z_k \text{ cero simple de } 1/f(z) \Longrightarrow \end{array} \end{array} \right.$$

$$\boxed{z_k = \frac{ai}{k\pi b}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \textbf{ polos simples de } f(z)} \qquad \boxed{\operatorname{Res}(f; z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{(-1)^{k+1} b}{a}}$$

2. $\displaystyle\oint_{|z|=6} f(z)\, dz$

   $|z_k| = \left|\dfrac{ai}{k\pi b}\right| \leq \left|\dfrac{a}{\pi b}\right| < 6$, $f(z)$ tiene infinitos puntos singulares interiores al contorno $\longrightarrow$

$$\textit{Extensión del } T^a \textit{ de los residuos} \longrightarrow \oint_{|z|=6} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); z = 0\right)$$

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \frac{z^2}{\operatorname{senh}\left(\dfrac{az}{b}\right)} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{z\to 0} |f(z)| = \infty \\ \lim\limits_{z\to 0} z\, f(z) = \underbrace{\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\operatorname{senh}\left(\dfrac{az}{b}\right)}}_{\text{L'Hopital}} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{a}{b} \cosh\left(\dfrac{az}{b}\right)} = \dfrac{1}{(a/b)} \end{array} \right. \Longrightarrow$$

   $z = 0$ es polo simple y $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right); z = 0\right) = \dfrac{b}{a}$

$$\boxed{\oint_{|z|=6} f(z)\, dz = \frac{2\pi b\, i}{a}}$$

Valores de $a, b \in \mathbb{R}^+$ dados

$$\boxed{s_n^2 = s_m^2 = 1}$$

Ejercicio D. $u(x,y) = e^{s_n nx}\cos\,(ay) + e^{s_m my}\cos\,(bx), \qquad n, m \in \mathbb{R}^+$

1. Valores de $n,\, m \in \mathbb{R}^+$ para los que $u = \mathrm{Re}(f(z))$ con, $f(z)$, analítica en algún dominio $D \subset \mathbb{C}$

$$u(x,y) \text{ debe ser armónica en } D \subset \mathbb{R}^{\not\in} \iff \begin{cases} \text{(a) } u(x,y) \text{ tiene parciales de primer y segundo orden continuas en } D \\ \text{(b) } u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ en } D \end{cases}$$

$$u_x = s_n n\, e^{s_n nx}\cos\,(ay) - b\, e^{s_m my}\mathrm{sen}\,(bx)$$

$$u_y = -a\, e^{s_n nx}\mathrm{sen}\,(ay) + s_m m\, e^{s_m my}\cos\,(bx)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{xx} = s_n^2 n^2\, e^{s_n nx}\cos\,(ay) - b^2\, e^{s_m my}\cos\,(bx) \\ u_{yy} = -a^2\, e^{s_n nx}\cos\,(ay) + s_m^2 m^2\, e^{s_m my}\cos\,(bx) \end{array}\right\} \overset{(b)}{\iff} \left.\begin{array}{l} s_n^2 n^2 = a^2 \\ s_m^2 m^2 = b^2 \end{array}\right\} \overset{s_n^2 = s_m^2 = 1}{\iff} \left.\begin{array}{l} n^2 = a^2 \\ m^2 = b^2 \end{array}\right\} \overset{n,m \in \mathbb{R}^+}{\iff} \boxed{\begin{array}{l} n = a \\ m = b \end{array}}$$

En ese caso, $u(x,y) = e^{s_n ax}\cos\,(ay) + e^{s_m by}\cos\,(bx)$ es armónica en todo $\mathbb{R}^2$

2. $v(x,y)$ armónica conjugada de $u(x,y) \iff \begin{cases} \text{(a) } v(v,y) \text{ tiene parciales de primer orden continuas en } \mathbb{R}^2 \\ \text{(b) Cumple las condiciones de Cauchy-Riemman en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{lcl} v_y = u_x & = & s_n a\, e^{s_n ax}\cos\,(ay) - b\, e^{s_m by}\mathrm{sen}\,(bx) \\ v_x = -u_y & = & a\, e^{s_n ax}\mathrm{sen}\,(ay) - s_m b\, e^{s_m by}\cos\,(bx) \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} v = s_n\, e^{s_n ax}\mathrm{sen}\,(ay) - \underbrace{\dfrac{1}{s_m}}_{s_m} e^{s_m by}\mathrm{sen}\,(bx) + g(x) \Longrightarrow \\ v_x = \underbrace{s_n^2}_{1}\, a\, e^{s_n ax}\mathrm{sen}\,(ay) - s_m b\, e^{s_m by}\cos\,(bx) + g'(x) = -u_y \Longleftarrow \end{array}$$

$g'(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = C$ con $C \in \mathbb{R}$ constante.

$$\boxed{v = s_n\, e^{s_n ax}\mathrm{sen}\,(ay) - s_m\, e^{s_m by}\mathrm{sen}\,(bx) + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}}$$

3. $f = u(x,y) + iv(x,y)$, en función de z, tal que $f(0) = 2 + di$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{s_n ax}\underbrace{(\cos\,(ay) + i\, s_n \mathrm{sen}\,(ay))}_{e^{i\, s_n ay}} + e^{s_m by}\underbrace{(\cos\,(bx) - i\, s_m \mathrm{sen}\,(bx))}_{e^{-i\, s_m bx}} + iC = \\ &= e^{s_n a(x+iy)} + e^{s_m b(-ix+y)} + iC = e^{s_n az} + e^{-i\, s_m bz} + iC \end{aligned}$$

$$f(0) = 2 + iC = 2 + di \iff C = d \Longrightarrow \boxed{f(z) = e^{s_n az} + e^{-i\, s_m bz} + id}$$

Ejercicio E.V1. $\underbrace{\text{V.P.} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\, \cos\,(a\pi x)}{(C_1x^2+C_2)\,(C_3x+1)}\,dx}_{\text{Re}(I)}$ **E.V2.** $\underbrace{\text{V.P.} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\, \text{sen}\,(a\pi x)}{(C_1x^2+C_2)\,(C_3x+1)}\,dx}_{\text{Im}(I)}$

$$I = \text{V.P.}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k e^{i\,a\pi x}}{(C_1x^2+C_2)\,(C_3x+1)}\,dx\right) = \frac{k}{C_1C_3}\,\text{V.P.}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,a\pi x}}{\left(x^2+\dfrac{C_2}{C_1}\right)\left(x+\dfrac{1}{C_3}\right)}\,dx\right)$$

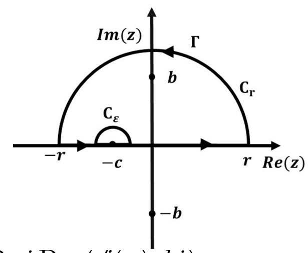
$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{k}{C_1C_3}=1 \\ \dfrac{C_2}{C_1}>0 \\ \dfrac{1}{C_3}>0 \end{array}}$$

Con la notación: $b=\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}},\ c=\dfrac{1}{C_3}$ $\qquad I = \text{V.P.}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,a\pi x}}{(x^2+b^2)\,(x+c)}\,dx\right)$

Cálculo de: $\displaystyle\oint_\Gamma \overbrace{\frac{e^{i\,a\pi z}}{(z^2+b^2)\,(z+c)}}^{f(z)}\,dz$

Puntos singulares de f (Ceros de $1/f$):

$$\begin{cases} z_1=-c \\ z_2=bi, \quad z_3=-bi \end{cases}$$



$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_{C_r} f(z)\,dz + \int_{T_1} f(x)\,dx + \int_{T_2} f(x)\,dx + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(f(z);bi)$$

$$\begin{cases} \textit{Lema 2:}\ \lim\limits_{|z|\to\infty} \overbrace{\dfrac{1}{(z^2+b^2)\,(z+c)}}^{f_1(z)} = 0 \implies \lim\limits_{r\to\infty} \displaystyle\int_{C_r} f_1(z)e^{i\pi az}\,dz = 0 \\ \lim\limits_{z\to -c}(z+c)\,f(z) = \dfrac{e^{-i\,a\pi c}}{b^2+c^2} \implies \text{z=-c es polo simple de } f(z) \implies \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i\,\text{Res}(f(z);-c) \\ \lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \displaystyle\int_{T_1} f(x)\,dx + \lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \displaystyle\int_{T_2} f(x)\,dx = I \end{cases} \implies$$

$$I \;=\; 2\pi i\,\text{Res}(f(z);bi) + \pi i\,\text{Res}(f(z);-c) = 2\pi i\,\underbrace{\text{Res}\left(\frac{e^{i\,a\pi z}/((z+bi)(z+c))}{(z-bi)};bi\right)}_{\dfrac{e^{-a\pi b}}{(2bi)(c+bi)}} + \pi i\,\frac{e^{-i\,a\pi c}}{b^2+c^2} =$$

$$= \frac{\pi}{b(b^2+c^2)}\left(e^{-ab\pi}(c-bi) \;+\; i\,b \underbrace{e^{-i\,ac\pi}}_{\cos(ac\pi)-i\text{sen}(ac\pi)}\right)$$

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\,(a\pi x)}{(x^2+b^2)\,(x+c)}\,dx = \frac{\pi}{b(b^2+c^2)}\left(e^{-ab\pi}\;+\;b\,\mathrm{sen}(ac\pi)\right) =$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}\left(\dfrac{C_2}{C_1}+\left(\dfrac{1}{C_3}\right)^2\right)}\left(e^{-a\pi\sqrt{C_2/C_1}}\;+\;\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{a\pi}{C_3}\right)\right)} \longrightarrow$$

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(a\pi x)}{(x^2+b^2)\,(x+c)}\,dx = \frac{\pi}{(b^2+c^2)}\left(-e^{-ab\pi}\;+\;\cos(ac\pi)\right) =$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{\dfrac{C_2}{C_1}+\left(\dfrac{1}{C_3}\right)^2}\left(-e^{-a\pi\sqrt{C_2/C_1}}\;+\;\cos\left(\dfrac{a\pi}{C_3}\right)\right)}$$