Problemas de Variable Compleja (parte 2)

Integrales de línea en el plano

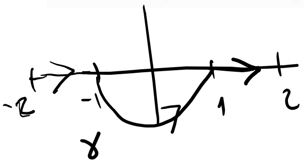
2.4.1 (primer parcial 14/15)

D. Sea la expresión integral

$$I = \int_\gamma |z|\,dz,$$

donde γ es el contorno orientado simple formado por los segmentos $\overline{[-2,-1]}$ y $\overline{[1,2]}$ del eje real y la semicircunferencia $z = e^{i\theta}$ con $-\pi \le \theta \le 0$, siendo los puntos inicial y final del contorno $z=-2$ y $z=2$ respectivamente. Se pide anotar en el siguiente recuadro el valor de I.

Nota. Nótese que el contorno γ está dado por la representación paramétrica $\gamma : [0, 2+\pi]$ dedinida por $\gamma(\theta) = -2+\theta+0i$ si $\theta \in [0,1]$, $\gamma(\theta) = \exp(i\pi(\theta-1-\pi))$ si $\theta \in]1, 1+\pi]$, $\gamma(\theta) = \theta-\pi+0i$ si $\theta \in]1+\pi, 2+\pi]$



$\gamma \to \begin{cases} a) \text{ segmento } [-2,-1]; \ \gamma(t) = -2+t, \ t\in[0,1] \\ b) \ z = e^{i\theta}, \ \theta \in [-\pi, 0]; \\ c) \text{ segmento } [1,2]; \ \gamma(t) = 1+t, \ t\in[0,1] \end{cases}$

a) $\int_0^1 (2-t)\cdot 1\cdot dt = 2t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$

b) $\int_{-\pi}^{0} 1\cdot i e^{it}\,dt = e^{it}\Big|_{-\pi}^{0} = 1+1 = 2$

c) $\int_0^1 (1+t)\cdot 1\,dt = \dots = \frac{3}{2}$

Por simetría deberían coincidir

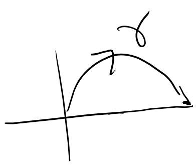
$\boxed{I = 5}$

2.4.2 (primer parcial 15/16)

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I = \int_\gamma |z|^2\,dz,$$

donde γ es la semi-circunferencia de centro $1+i0$ y radio unidad que empieza en el origen y termina en $2+i0$ (NOTA.- Ojo con la orientación y, si es necesario, téngase en cuenta que $\int_0^\pi \cos^2\theta d\theta = \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \pi/2$.)



$\gamma(\theta) = 1+e^{i\theta}$, $\theta \in [\pi, 0]$

$$\int_\gamma |z|^2\,dz = \int_\pi^0 (1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})\cdot i\,e^{i\theta}\,d\theta =$$

$$= -i\int_0^\pi (2e^{i\theta}+e^{2i\theta}+1)\,d\theta \overset{(*)}{=} i\cdot\left(\frac{2}{i}e^{i\theta}+\frac{1}{2i}e^{2i\theta}+\theta\right)\Big|_\pi^0$$

$$= 4-\pi i$$

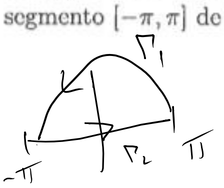
(*) Es riguroso, porque estamos usando que $\frac{e^{iz}}{i}$ es primitiva de e^{iz}, y usamos el T.F.C. Complejo

2.4.3 (primer parcial 16/17)

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I = \int_\Gamma \cos|z|\,dz,$$

donde Γ es el recinto cerrado, recorrido en sentido positivo, formado por la semi-circunferencia de centro el origen y radio π contenida en el semiplano de las partes imaginarias positivas y el segmento $[-\pi,\pi]$ de la recta real



- $\int_{\Gamma_1}\cos|z|\,dz = \int_0^\pi \cos(\pi)\cdot \pi i e^{i\theta}\,d\theta = \pi\cos\pi\, e^{i\theta}\Big|_0^\pi = -2\pi\cos\pi = 2\pi$
- $\int_{\Gamma_2}\cos|z|\,dz = \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx = 0$ $\rightarrow \boxed{I = 2\pi}$

Γ_1: En Γ_1, $|z| = \pi$, cte. Estamos integrando $\cos\pi$. En general,

$\int_\gamma c\,dz = c\cdot(\gamma(b)-\gamma(a))$, porque $c\cdot z$ es una primitiva. $\rightarrow$ No depende del camino.

Luego podríamos haber visto que $\int_{\Gamma_1} = 2\pi$

2.4.4 (primer parcial 17/18)

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I_1 = \int_\Gamma \mathrm{Log}\,\bar{z}\,dz,$$

donde Log es el logaritmo principal y Γ es la semi-circunferencia de centro el origen y radio 2 contenida en el semiplano de las partes imaginarias positivas recorrida desde 2 a -2

Γ: $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$ $\rightarrow$ $\mathrm{Log}(re^{-i\theta}) = \log(r) + i\,\mathrm{Arg}(e^{-i\theta})$ $(-\pi,\pi]$

$= \log(r) - i\theta$

$$I = \int_0^\pi \mathrm{Log}(2e^{-i\theta})\cdot 2ie^{i\theta}\,d\theta$$

$\|$

$$\int_0^\pi (\log 2 - i\theta)2ie^{i\theta}\,d\theta = \int_0^\pi 2i\lg 2\, e^{i\theta}\,d\theta + \int_0^\pi 2\theta e^{i\theta}\,d\theta =$$

Partes: $u = \theta$, $dv = e^{i\theta}d\theta$

$$2\log 2\, e^{i\theta}\Big|_0^\pi + 2\theta\frac{e^{i\theta}}{i}\Big|_0^\pi - 2e^{i\theta}\Big|_0^\pi = -4(\log 2 + 1) + 2\pi i$$

=

2.4.5 (primer parcial 17/18)

C. **(3 puntos)** Para la misma curva Γ del apartado anterior, anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I_2 = \int_\Gamma z\, e^{2z}\, dz,$$

En este caso, ze^{2z} es una función analítica. Por tanto, la integral se puede calcular usando una primitiva. $F(z) = \frac{1}{4} e^{2z}(2z-1)$ es una primitiva (sale por partes).

Luego $I_2 = F(-2) - F(2) = -2\cosh(4) + \frac{\operatorname{senh}(4)}{2}$

[En el problema anterior, como no es analítica, no se puede].

2.4.6 (primer parcial 18/19)

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I = \int_\Gamma \frac{\bar{z}+i}{|z-i|^2}\, dz \;:$$

donde Γ es el segmento recto orientado con origen en el punto $-i$ del eje imaginario y final en el punto 1 del eje real ($z(t) = t - (1-t)i$ para $t \in [0,1]$)

Podemos parametrizar el segmento, $\gamma(t) = (1-t)\cdot(-i) + t\cdot 1$,

$$I = \int_0^1 \frac{t + (1-t)i + i}{(t + (t-1)i - i)(t + (1-t)i + i)} \cdot (1+i)\, dt \; \ldots$$ Se puede

Pero en este caso es más sencillo: $\frac{\bar{z}+i}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{1}{z-i}$, que es analítica. $\mathrm{Log}(z-i)$ es una primitiva $\Rightarrow I = \mathrm{Log}(1-i) - \mathrm{Log}(-2i) = \ldots$

$= -\frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{\pi}{4}$

2.4.7 (primer parcial 18/19)

D. **(3 puntos)** Sea $g(z)$ una función entera tal que

$$\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i \qquad \text{para todo } z_0 \in \mathbb{C}$$

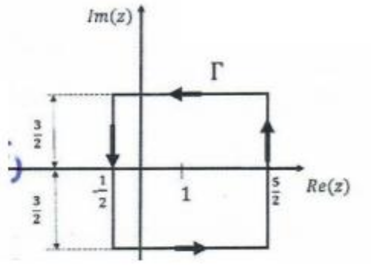
siendo C la circunferencia $|z-z_0| = 1$ orientada positivamente.

Anotar el siguiente recuadro la expresión general de $g(z)$

Anotar el valor de la integral

$$\oint_\Gamma \frac{g(z)}{z^4-1}\,dz$$

siendo Γ el cuadrado de centro en $z=1$ y lado 3, orientado positivamente, de la figura.



i) Por hipótesis, $g(z)$ es entera, luego podemos aplicar Fórmula de Cauchy: $g(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}\,dz = 1 \quad \forall z_0 \Rightarrow g(z) \equiv 1$.

ii) $\oint_\Gamma \frac{1}{z^4-1}\,dz$. Son todo polos simples. $I = 2\pi i\left(\text{Res}(1) + \text{Res}(i) + \text{Res}(-i)\right)$

$$\text{Res}(f, z_k) = P(z_k)/Q'(z_k) = 1/4z_k^3 \Rightarrow$$

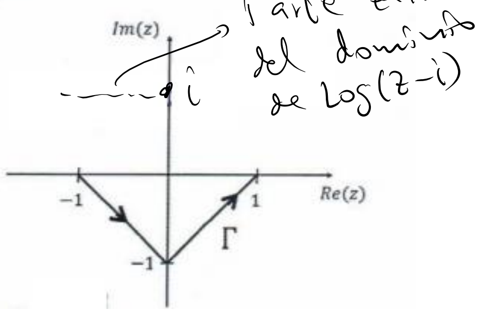
$$\Rightarrow I = 2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4} - \frac{i}{4}\right) = \frac{\pi i}{2}$$

2.4.8 (primer parcial 19/20)

***B*. (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$\int_\Gamma (z-i)\mathrm{Log}(z-i)\,dz$$

siendo Γ el contorno orientado de la figura, con origen en el punto -1 y final en el punto 1, ambos del eje real.



Es una función analítica, luego hay independencia del camino. Integrando por partes, $F(z) = \frac{1}{4}(z-i)^2\left(2\,\mathrm{Log}(z-i)-1\right)$ es una primitiva. $\Rightarrow I = -\pi + i(1-\ln(2))$

2.4.9 (final ordinario 13/14)

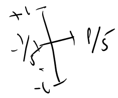
***A*.** Sea $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ el arco definido por $\gamma(\theta) = \frac{1}{5}\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$. El valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Ln}(3+z)}{z\cos(z)}\mathrm{d}z$$

es:

(1) $2\pi\mathrm{Ln}(3)\mathrm{i}$. **(2)** $\pi\mathrm{Ln}(3)\mathrm{i}$.

(3) $\mathrm{Ln}(3)$. **(4)** Ninguna de las otras tres respuestas.

Es una elipse, de semiejes 
- $\mathrm{Ln}(3+z)$ es analítica ahí
- sólo hay un polo en $z=0$

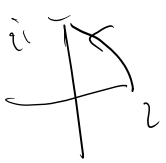
$I = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f,0) = 2\pi i \cdot [\ln(3)]$, luego es (1)

2.4.10 (final extraordinario 14/15)

***A*.** Hallar el valor de la integral

$$I = \int_\gamma \bar{z}^2\,\mathrm{d}z,$$

donde γ es el arco de circunferencia de radio 2 y centro el origen comprendido en el primer cuadrante y recorrido desde $z = 2 + i0$ a $z = 0 + i2$.



$\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}, \ \theta \in [0, \pi/2]$

$I = \int_0^{\pi/2} \left(2e^{-i\theta}\right)^2 2i e^{i\theta}\,d\theta = 8i\int_0^{\pi/2} e^{-i\theta}\,d\theta =$

$= 8(1+i)$

2.4.11 (final ordinario 14/15)

A. El valor de la integral

$$I = \int_\gamma \bar{z}|z|\,\mathrm{d}z, \quad = \int_\gamma \bar{z}\,dz$$

donde γ es la circunferencia de radio 1 y centro el origen recorrida en sentido positivo ($z = e^{i\theta}$) una sola vez, es:

(1) 2π (2) $2\pi i$

(3) $-2\pi i$ (4) 0

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} \underbrace{\sqrt{e^{i\theta} e^{-i\theta}}}_{|z|} \cdot \underbrace{ie^{i\theta}}_{\gamma'(\theta)} d\theta = 2\pi i$$

2.4.12 (final extraordinario 15/16)

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I = \int_\Gamma \sin|z|\,\mathrm{d}z,$$

donde $z = x + iy$ y Γ es el segmento orientado de la bisectriz del primer cuadrante que va desde el origen, $(0 + i0)$, al punto $(1 + i)$.

$\gamma(t) = t(1+i),\ t \in [0,1]$. $\quad I = \int_0^1 \operatorname{sen}(t\sqrt{2}) \cdot (1+i)\,dt =$

$$= -(1+i) \left.\frac{\cos(t\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right|_0^1 = \dots = \frac{1-\cos(\sqrt{2})}{2}$$

2.4.13 (final ordinario 15/16)

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I = \int_\gamma (a\,y + ib\,(x+1))\,\mathrm{d}z,$$

donde $z = x + iy$, γ es la circunferencia de centro el origen y radio unidad y a y b son números complejos dados (NOTA.- Téngase en cuenta que $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$.)

C. **(3 puntos)** Sea $f(z) = a\,y + ib(x+1)$ el integrando de la expresión anterior. Sabiendo que $f(0) = 2$, anotar en el siguiente recuadro los valores de a y b que hacen que f sea analítica y la correspondiente expresión de f en función de z.

B. $\int_\gamma (ay + ibx)\,dz + \cancel{\int_\gamma ib\,dz}^{\,0}$ (es una constante, que tiene primitiva.

Basta calcular $\int_\gamma x\,dz$, $\int_\gamma y\,dz$. De hecho, basta una de las dos, porque:

$\cdot$ Si $I = \int_\gamma x\,dz$, $J = \int_\gamma y\,dz$, $I + iJ = \int_\gamma (x+iy)\,dz = 0$,

luego $\boxed{I = -iJ}$

$\cdot \int_\gamma x\,dz = \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot i e^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi} \cancel{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta}$; la última integral $= 0$; la primera $= \pi i$ (enunciado)

Es decir: $\int_\gamma x\,dz = \pi i$; $\int_\gamma y\,dz = -\pi$

$\Rightarrow$ Enunciado: $\int_\gamma ay + ibx\,dz = a\cdot(-\pi) + ib\cdot(\pi i) = -\pi(a+b)$

[Se puede hacer la cuenta entera...)

C. Analítica $\Rightarrow$ $a = -b$, pues $\oint_\gamma = 0$

$f(0) = 2 \Rightarrow ib = 2 \Rightarrow b = -2i \Rightarrow a = 2i$ / $f(z) = 2(1+z)$

2.4.14 (final ordinario 16/17)

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I = \int_\Gamma \exp(\bar{z})\,dz,$$

donde Γ es el segmento orientado que va desde el origen al afijo de ($\pi + i\pi$) sobre la bisectriz del primer cuadrante.

$\gamma(t) = t(\pi + i\pi)$, $t \in [0,1]$ $I = \int_0^1 e^{t(\pi - i\pi)} \cdot (\pi + i\pi)\cdot dt =$

$= (\pi + i\pi) \cdot \int_0^1 e^{t(\pi - i\pi)}\,dt = \frac{\pi + i\pi}{\pi - i\pi} \cdot e^{t(\pi - i\pi)}\Big|_0^1 = \dots = -i\left[e^\pi + 1\right]$

Desarrollos de Taylor y Laurent

2.5.1 (primer parcial 14/15)

E. Anotar en el siguiente recuadro la forma general del desarrollo en serie de Laurent alrededor del origen de la función

$$f(z) = \cosh\left(\frac{1}{z}\right) - z\sinh\left(\frac{1}{z}\right).$$

(Es suficiente con dar la expresión de los tres términos de menor orden y no nulos de dicho desarrollo)

$$\cosh\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{1/z} + e^{-1/z}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{4! z^4} \cdots + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{4! z^4} \cdots}{2}$$

$$\operatorname{senh}(1/z) = \frac{e^{1/z} - e^{-1/z}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{z^4 4!} + \cdots - \left[1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{4! z^4} \cdots\right]}{2}$$

$$\cosh\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{4! z^4} + \cdots$$

$$z\operatorname{senh}(z) = z \cdot \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} \cdots\right]$$

Restamos: El término general está claro.

$$f(z) = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)\cdot\frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)\cdot\frac{1}{z^4} + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right)\cdot\frac{1}{z^6} \cdots$$

* De $\operatorname{senh}(z) = -i\operatorname{sh}(iz)$, $\cosh(z) = \cos(iz)$ tb sale...

2.5.2 (primer parcial 15/16)

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia R y los tres términos de menor orden y no nulos del desarrollo en serie de McLaurin (en $z = 0$) de la función

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3}.$$

· El desarrollo de e^z lo sabemos. Veamos el de $\frac{1}{(z-1)^3}$

Podemos sacarlo de $\frac{1}{1-z} = \sum z^n$, si $|z| < 1$.

$$\hookrightarrow h''(z) = \frac{2}{(1-z)^3} = \sum n(n-1) z^{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z-1)^3} = -\frac{1}{2}\sum n(n-1) z^{n-2}$$

Ahora multiplicamos:

$$\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum \frac{-n(n-1)}{2} z^{n-2}\right) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} \cdots\right)\left(-1 - 3z - 6z^2 \cdots\right) =$$

$$= -1 - 4z - \frac{19}{2} z^2 \cdots \quad . \quad R = 1$$

2.5.3 (primer parcial 15/16)

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia exterior R_e y los tres términos de la parte principal (términos potenciales de exponente negativo) del desarrollo en serie Laurent de la función del apartado *D* en $z = 1$.

Laurent en $z=1$: (el radio exterior es ∞). $\frac{1}{(z-1)^3}$ ya está desarrollado

$e^z = e^{z-1} \cdot e = e \quad \Sigma \frac{(z-1)^n}{n!} \Rightarrow f(z) = e \cdot \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(n+3)!}$

2.5.4 (primer parcial 16/17)

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia exterior R_e y los tres términos de la parte principal (términos potenciales de exponente negativo) del desarrollo en serie de Laurent en $z = -\pi/2$ de la función:

$$f(z) = \frac{(z - \pi/2)\sin z}{(z + \pi/2)^3}.$$

Es un polo de orden 3, luego habrá 3 términos. Como tenemos el $\frac{1}{(z+\pi/2)^3}$, la parte principal sale de los 3 primeros términos de $(z-\frac{\pi}{2})$ sen z.

$(z-\frac{\pi}{2})$ sen z. Hacemos el cambio $w = z + \frac{\pi}{2}$ y desarrollamos en $w=0$:

$(w-\pi)\,\text{sen}(w-\frac{\pi}{2}) = (w-\pi)\cdot(-\cos(w)) = \dots = -w\cos w + \pi\cos w =$ sen(a+b) = ...

$= -w(1-\frac{w^2}{2}\dots) + \pi(1-\frac{w^2}{2}\dots) = \pi - w - \frac{\pi}{2}w^2 + \frac{w^3}{2}$

Luego Ppal: $\frac{\pi}{(z+\pi/2)^3} - \frac{1}{(z+\pi/2)^2} - \frac{\pi/2}{z+\pi/2} + 1/2$

2.5.5 (primer parcial 17/18)

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia R y los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de McLaurin de la función:

$$f(z) = \frac{z\sin z + 2(\cos z - 1)}{z^4}.$$ $\rightarrow$ 0 es sing evitable

$\left[z\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!}\dots\right) + 2\cdot\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!}\dots\right)\right] / z^4 =$

$= \left[z^4\cdot\left(\frac{2}{4!} - \frac{1}{3!}\right) + z^6\left(\frac{1}{5!} - \frac{2}{6!}\right) + z^8\left(\frac{2}{8!} - \frac{1}{7!}\right)\right] / z^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\frac{z^2}{5!} - \frac{3}{4}\frac{z^4}{7!} \dots \quad R = \infty$

2.5.6 (primer parcial 18/19)

C. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \frac{z \cosh z}{\operatorname{senh} z}$

Anotar en el siguiente recuadro, la parte principal del desarrollo en serie de Laurent (potencias negativas de z) en el entorno $0 < |z| < R$, especificando el valor de R

$\operatorname{Senh}(z) = i\operatorname{sen}(iz)$. Como $z \to iz$ es giro $90°$, los ceros están en el eje Y.

No hay parte principal (0 es sing. evitable). $R = \pi$ ← 1ª singularidad en πi

2.5.7 (primer parcial 19/20)

C. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \dfrac{(e^{i2z}-1)^2}{z^2\,(e^{i2z}+1)}$

Anotar en el siguiente recuadro, la parte principal del desarrollo en serie de Laurent (potencias negativas de z) en el entorno $0 < |z| < R$, especificando el valor de R

No tiene parte principal, es sing. evitable. $R = \pi/2$

2.5.8 (final ordinario 13/14)

Considérese para la función $f(z)$ el desarrollo de Laurent indicado:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{(z-1)} + a_0 + a_1(z-1) + \ldots + a_n(z-1)^n + .$$

Entonces:

B. Su dominio de convergencia es:

(5) $0 < \|z-1\| < 1$	(6) $0 < \|z-1\| < 2$
(6) $2 < \|z-1\| < \infty$	(8) $0 < \|z-1\| < \infty$

C. El valor de los dos primeros coeficientes es:

(9) $b_2 = \frac{-1}{2}$ y $b_1 = \frac{1}{2}$	(10) $b_2 = 1$ y $b_1 = -2$
(11) $b_2 = \frac{1}{2}$ y $b_1 = \frac{-1}{4}$	(12) $b_2 = 1$ y $b_1 = \frac{1}{2}$

D. Indicar en el siguiente recuadro la forma general de los coeficientes a_n para $n \geq 0$.

B → (6), porque, desde $z=1$, la primer singularidad está en $z=-1$. $R_{ext} = 2$.

C, D, $\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{(z-1)+2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left[\dfrac{1}{1-\left(-\frac{(z-1)}{2}\right)}\right] = \dfrac{1}{2} \sum \dfrac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n$

Luego $f(z) = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^{n-2} \Rightarrow$ $b_{-2} = \frac{1}{2}$, $b_{-1} = -\frac{1}{4}$

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+3}}}$$

2.5.9 (final extraordinario 14/15)

B. Empezando por las potencias negativas, hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{\tanh z}{z^3}.$$

$$\frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z \cdot z^3} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{(z + z^3/3! + z^5/5! + \dots)}{(1 + z^2/2! + z^4/4! + \dots)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{(1 + z^2/3! + z^4/5! \dots)}{(1 + z^2/2! + z^4/4! + \dots)}$$

Necesitamos los primeros términos de ese cociente.

$$(a + bz + cz^2)(1 + z^2/2! + z^4/4!) = (1 + z^2/3! + z^4/5! + z^6/7! \dots)$$

$z^0 \to \boxed{a = 1}$

$z^1 \to \boxed{b = 0}$

(*) ES FUNCIÓN PAR. Solo habrá términos pares. $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4$

$z^2 \to \frac{1}{2} + c = \frac{1}{3!} \Rightarrow c = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{3}$

Añadir un término de (*) INÚTIL

$z^3 \to$

Añado e $\to z^4 \to \frac{1}{4!} - \frac{1}{6} + e = \frac{1}{5!} \Rightarrow e = \frac{1}{5!} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4!} = \frac{2}{15}$

Solución: $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15}z^2 \dots$

2.5.10 (final ordinario 14/15)

B. Los tres primeros términos del desarrollo en serie de Mac-Laurin de la función

$$f(z) = \frac{\tanh z}{z},$$

Son

(5) $1 - \frac{z^2}{3} - \frac{2z^4}{5!}$	(6) $1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{15}$
(7) $1 - \frac{z^2}{3} + \frac{2z^4}{15}$	(8) $1 + \frac{z^2}{3} + \frac{2z^4}{5!}$

Igual que el anterior, pero $\cdot z^2$.

Ya que sale de nuevo, ¿cómo se invierte un desarrollo?

$$[1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots]^{-1} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + a_1 z + \dots)(1 + b_1 z + \dots) = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad z^1 \to a_1 + b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -b_1$

$z^2 \to b_2 + a_2 + a_1 b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = -a_2 + a_1^2$

$z^3 \to b_3 + a_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 \ \ldots$

No es un cálculo sencillo en los ejemplos, truncamos.

2.5.11 (final extraordinario 15/16)

***E*. (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el término general del desarrollo en serie de McLaurin (en $z = 0$) de la función (recuerde que el desarrollo de la función derivada es el desarrollo derivado)

$$f(z) = \frac{z+1}{(1-z)^2}.$$

F*. (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el desarrollo en serie Laurent en $|z-1| > 0$ de la función del apartado ***E.

E. $\frac{1}{1-z} = \sum z^n \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum n z^{n-1}$ // $(z+1) \cdot \sum n z^{n-1} =$

$$= \sum n z^n + \sum n z^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot (2n+1)$$

F. En $z = 1$: $\frac{z+1}{(z-1)^2} = \frac{(z-1)+2}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}$

2.5.12 (final ordinario 15/16)

***E*. (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia R y el término general del desarrollo en serie de McLaurin (en $z = 0$) de la función

$$f(z) = \frac{4}{z^2 + 2z - 3}.$$

F*. (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la parte principal (términos potenciales de exponente negativo) y los dos primeros términos de exponente positivo del desarrollo en serie Laurent en $0 < |z-1| < 4$ de la función del apartado ***E.

E. Fracciones simples: $\frac{1}{z^2+2z-3} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3} = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{3\left(1-\left(-\frac{z}{3}\right)\right)} =$

$$= -\sum z^n - \frac{1}{3} \sum \left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \left(-1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

F. $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1-\left(-\frac{z-1}{4}\right)\right)} =$

$$= \frac{1}{z-1} + \sum \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}(z-1)^n = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}(z-1) - \frac{1}{64}(z-1)^2$$

2.5.13 (final ordinario 16/17)

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro los términos no nulos de la parte principal (términos potenciales de exponente negativo) del desarrollo en serie de Laurent en $z = \pi$ de la función:

$$f(z) = \frac{\sin(2z)}{(z-\pi)^6}$$

$$\mathrm{sen}(2z) = \mathrm{sen}(2(z-\pi)+2\pi) = \mathrm{sen}(2(z-\pi)) = 2(z-\pi) - \frac{2^3(z-\pi)^3}{3!} + \frac{2^5(z-\pi)^5}{5!} + \dots$$

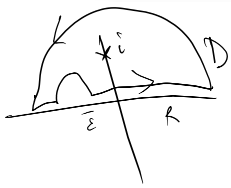
parte principal: $\frac{2}{(z-\pi)^5} - \frac{2^3}{3!\,(z-\pi)^3} + \frac{2^5}{5!\,(z-\pi)}$

Integrales reales usando complejos

2.6.1 (primer parcial 14/15)

F. Anotar en el siguiente recuadro el valor principal de la integral real impropia

$$I = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-2x}{(1+x)(1+x^2)}\,dx.$$



$D_{R,\varepsilon} = \gamma_R \cup \gamma_\varepsilon \cup L_{R,\varepsilon}$. Sólo hay un polo, en $D_{R,\varepsilon}$, $z = i$.

- $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, porque $z f(z) \to 0$ ahí

- $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz \to -\pi i \,\mathrm{Res}(f,-1)$

- $\int_{\partial D_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i)$

$\frac{1-2i}{(i+1)(i+i)}$ $\quad \frac{3}{2}$

Juntando todo y tomando límites:

$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i) + \pi i\,\mathrm{Res}(f,-1) =$

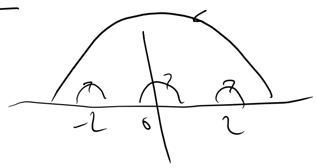
$= \dots = -\pi/2$

2.6.2 (primer parcial 15/16)

F. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real impropia

$$I = \mathrm{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x(4-x^2)}\,dx.$$

$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z(4-z^2)}$



- 3 polos simples en el eje real.
- $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \to 0$, porque $\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im} z > 0}} z f(z) =$

$$= \lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z>0}} \frac{e^{i2z}}{(4-z^2)} = \lim_{\substack{r\to\infty \\ \theta\in[0,\pi]}} \frac{e^{2ire^{i\theta}}}{4-z^2} \; ; \quad \left|e^{2ir\cos\theta - 2r\sin\theta}\right| = \left|e^{-2r\sin\theta}\right| \le 1 \quad \sin\theta \ge 0$$

Podemos aplicar lo de siempre: $I = \pi i \left(\operatorname{Res}(-2) + \operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}(2)\right) =$

$$= \pi i \left(-\frac{e^{-4i}}{8} + \frac{1}{4} + \frac{e^{-4i}}{8} \right) = \frac{i\pi}{4}(1-\cos 4)$$

2.6.3 (primer parcial 16/17)

F. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$: \qquad I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{(2-\sin\theta)} \mathrm{d}\theta.$$

Podemos verla como una integral de línea sobre la circunferencia unidad.

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$ (válido en la circunferencia unidad!!)
- Si $z = e^{i\theta}$ (parametrización), $\gamma'(\theta) = i e^{i\theta} d\theta$, luego hay que dividir

$$I = \oint_C \frac{(z-1/z)/2i}{(2-(z-1/z)/2i)} \cdot \frac{1}{iz} dz = \dots = \oint_C \frac{1}{i} \cdot \frac{z^2-1}{z(4iz-z^2+1)} dz$$

- $4iz - z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = (2\pm\sqrt{3})i$; sólo $(2-\sqrt{3})i$ está dentro $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, (2-\sqrt{3})i) + \operatorname{Res}(f, 0)\right] = 2\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$$

2.6.4 (primer parcial 17/18)

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{(x^4 + 2x^2 + 1)} \mathrm{d}x. \qquad \begin{array}{c} zf(z) \to 0 \\ |z| \to \infty \end{array}$$

No hay polos en el eje real.

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 \to \pm i.$$

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) \; ; \; \operatorname{Res}(f,i) = \frac{d}{dz} \frac{z^2-z+1}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} = \dots = \frac{1}{2i} \Rightarrow \boxed{I = \pi}$$

2.6.5 (primer parcial 18/19)

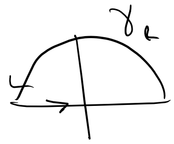
E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^4-1}\,dx$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

i) Por ser función par, $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^4-1}\,dx$. Llamemos J a esta integral.

ii) ¿Podemos calcular J usando $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^4-1}$?



En este contorno no, porque $\cos(it) = \cosh(t) = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} \to \infty$. Ese infinito es mucho mayor que el denominador, luego no tenemos convergencia. Por debajo, con $-\gamma_R$, tampoco.

Solución: integrar una $\tilde{f}(z)$ que converja y permita calcular J.

Sea $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1} = \frac{\cos(\pi z) + i\,\mathrm{sen}(\pi z)}{z^4-1}$ // En el eje real, $\mathrm{Re}(f(t)) = \frac{\cos \pi x}{x^4-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1} = J$. Ahora, $e^{i\pi z}$ sí está acotada cuando $\mathrm{Im}\, z > 0$ (visto).

Sea $H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1}\,dz = 2\pi i\,(\underbrace{\mathrm{Res}(f,i)}_{e^{-\pi}/4i^3}) + \pi i\,(\underbrace{\mathrm{Res}(f,-1)}_{e^{-\pi i}/-4} + \underbrace{\mathrm{Res}(f,1)}_{e^{\pi i}/4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow H = -\frac{e^{-\pi}\cdot \pi}{2} \Rightarrow \boxed{I = -\frac{\pi}{4e^{\pi}}}$

2.6.6 (primer parcial 19/20)

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2+9)}\,dx$$

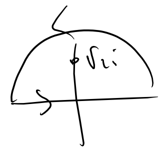
junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

Similar al anterior. $I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2iz}}{z(z^2+9)}\,dz}_{H}\Big)$

$H = 2\pi i\,(\underbrace{\mathrm{Res}(f,3i)}_{e^{-6}/-18}) + \pi i\,(\underbrace{\mathrm{Res}(f,0)}_{1/9}) \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{18}(1-e^{-6})}$

2.6.7 (final ordinario 13/14)

F. Indicar en el siguiente recuadro el valor de la integral real impropia
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+4x^2+4)}:$$



$$(z^4+4z^2+4) = (z^2+2)^2 = (z-\sqrt{2}i)^2(z+\sqrt{2}i)^2$$

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, \sqrt{2}i) = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+\sqrt{2}i)^2}\Big|_{\sqrt{2}i} = 4/\pi\sqrt{2}$$

2.6.8 (final ordinario 13/14)

A. Considérese la integral
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$
El valor de la integral anterior es:

(1) $\frac{\pi}{2}(1+\cos(2))$ **(2)** $\frac{\pi}{2}(1+\exp(-2))$

(3) $\frac{\pi}{2}$. **(4)** Ninguno de los otros tres valores.

B. Considérese la integral
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{3+\sin(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$
El valor de la integral anterior es:

(5) $2\pi(1-\frac{3}{\sqrt{2}})$. **(6)** $\pi(2-\frac{3}{2\sqrt{2}})$.

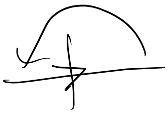
(7) $\pi(2-\frac{3\sqrt{2}}{2})$. **(8)** Ninguno de los otros tres valores.

A. No vale $f(z) = \frac{\cos^2 z}{z^2+1}$, porque se va a ∞. Usamos:

$$\cos^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2iz} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2iz}$$

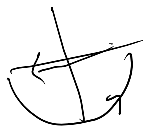
$$I = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{e^{2iz}}{z^2+1}dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{e^{-2iz}}{z^2+1}dz}_{I_2} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1}dz}_{I_3}$$

· I_1



$$I_1 = \frac{2\pi i}{4}\mathrm{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+1}, i\right) = \frac{\pi i}{2}\cdot\frac{e^{-2}}{2i} = \frac{\pi}{4e^2}$$

· I_2



Si no, no converge!!

$$I_2 = \frac{-2\pi i}{4}\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-2iz}}{z^2+1}, -i\right) = -\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{e^{-2}}{-2i} = \frac{\pi}{4e^2}$$

· I_3

$$I_3 = \frac{2\pi i}{2}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right) = \frac{\pi}{2}$$

Luego $I = \frac{\pi}{2}(1+e^{-2})$

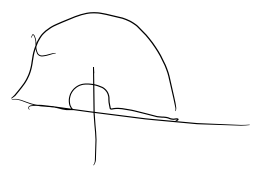
B. Similar a otros

$$I = \oint_C \frac{(z-1/z)/2i}{3+(z-1/z)/2i} \cdot \frac{1}{iz}\, dz =$$

$$= \oint_C \frac{1}{i} \cdot \frac{z^2-1}{z\cdot(z^2+6iz-1)} = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i \cdot \left[\overbrace{Res(f,0)}^{1} + \overbrace{Res(f,(2\sqrt{2}-3)i)}^{-3/2\sqrt{2}}\right] =$$

$$= \pi \cdot \left[2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$$

2.6.9 (final extraordinario 14/15)



C. Hallar el valor de la integral real impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x\,(4+x^2)}\mathrm{d}x.$$

$$I = Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z(4+z^2)}dz = Im\left[2\pi i\left(Res(f,2i) + \frac{Res(f,0)}{2}\right)\right] = \cdots$$

$$= Im\left(2\pi i\left(\frac{e^{-2}}{2i\cdot 4i}\right) + \pi i\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}\cdot(1-e^{-2})$$

2.6.10 (final ordinario 14/15)

C. El valor de la integral real impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\,x)}{4+x^2}\mathrm{d}x$$

es

(9) $\frac{\pi}{4}e^{-2}$ (10) $\frac{\pi}{2}e^{-4}$

(11) $\frac{\pi}{2}e^{2}$ (12) $\frac{\pi}{4}e^{4}$

Similar. $I = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2iz}}{4+z^2}dz\right) = Re\left(2\pi i\, Res(f,2i)\right) = \frac{\pi}{2}e^{-4}$

2.6.11 (final extraordinario 15/16)

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x\,(x^2+4)}\mathrm{d}x.$$

$$I = 2\pi i\left(\underbrace{Res(f,2i)}_{\frac{2i+1}{2i\cdot 4i}}\right) + \pi i\,\underbrace{Res(f,0)}_{1/4} = \frac{\pi}{2}$$

2.6.12 (final ordinario 15/16)

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i) = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz} \left.\frac{z^2+1}{(z+2i)^2}\right|_{z=2i} = \cdots = \frac{5\pi}{16}$$

2.6.13 (final extraordinario 16/17)

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I = \int_{\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i2x}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$$

$$I = 2\pi i \Big(\underbrace{\operatorname{Res}(f, i)}_{=\frac{e^{-2}}{2i\cdot 3}} + \underbrace{\operatorname{Res}(f, 2i)}_{=\frac{e^{-4}}{4i\cdot(-3)}} \Big) = \frac{\pi}{3}\left(e^{-2} - \frac{e^{-4}}{2} \right)$$

2.6.14 (final ordinario 16/17)

F. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x,$$

$$I = 2\pi i \Big(\underbrace{\operatorname{Res}(f, i)}_{=\frac{2i^2}{2i(i^2+4)}} + \underbrace{\operatorname{Res}(f, 2i)}_{=\frac{2(2i)^2}{((2i)^2+1)4i}} \Big) = \frac{2\pi}{3}$$

2.6.15 (primer parcial 21/22)

1. **Puntos singulares de** $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{z} i\right)}{\cosh\left(\frac{a}{z}\right)}$, $\quad a > 0$

2. $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz$ siendo Γ el cuadrado de centro el origen y lado $l > 2\dfrac{2a}{\pi}$ orientado positivamente.

Solución:

Ejercicio E $\quad \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{z}i\right)}{\cosh\left(\frac{a}{z}\right)}, \qquad a>0$

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\begin{cases} P(z)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{z}i\right) \\ Q(z)=\cosh\left(\dfrac{a}{z}\right)\end{cases} \quad \text{Analíticas en } \mathbb{C}-\{0\}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ \text{Los ceros de } Q(z). \text{ (Ceros de } 1/f\text{): } \cosh\left(\dfrac{a}{z}\right) \Longleftrightarrow e^{2a/z}=-1=e^{i\,\pi(1+2k)} \Longleftrightarrow \boxed{z_k=\dfrac{2a}{\pi(1+2k)}i, \quad k=0,\pm1,\pm2,\dots}\end{cases}$$

Sucesión de puntos que tiende a $z=0$ cuando $k\to\infty$, por lo que $z=0$ no está aislado.

Los puntos $z_k=\dfrac{2a}{\pi(1+2k)}i, \quad k=0,\pm1,\pm2,\dots$ están aislados.

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\begin{cases} P(z)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{z}i\right) \text{ analítica en } z_k \text{ y } P(z_k)=\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}(1+2k)\right)=(-1)^{k+1}\neq 0 \\ \left.\begin{array}{l} Q(z)=\cosh\left(\dfrac{a}{z}\right) \text{ analítica en } z_k \text{ y } Q(z_k)=0 \\ Q'(z_k)=\dfrac{-a}{z_k^2}\operatorname{senh}\left(\dfrac{a}{zk}\right)=\dfrac{-a}{z_k^2}\underbrace{\operatorname{senh}\left(i\dfrac{\pi}{2}(1+2k)\right)}_{i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(1+2k)\right)}=\dfrac{a}{z_k^2}i\,(-1)^{k+1}\neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} z_k \text{ cero simple de } Q(z) \Longrightarrow \\ z_k \text{ cero simple de } 1/f(z)\end{array}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_k=\frac{2a}{\pi(1+2k)}i, \quad k=0,\pm1,\pm2,\dots \ \textbf{polos simples de } f(z)} \qquad \boxed{\operatorname{Res}(f;z_k)=\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}=\frac{z_k^2}{ai}=i\,\frac{4a}{\pi^2(1+2k)^2}}$$

2. $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz$ siendo Γ el cuadrado de centro el origen y lado $l > 2\dfrac{2a}{\pi}$ orientado positivamente.

$f(z)$ tiene infinitos puntos singulares interiores a Γ, siendo analítica sobre Γ y su exterior.

Extensión del Tª de los residuos: $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\underbrace{\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)}_{h(z)}; z=0\right)$

$$h(z)=\frac{1}{z^2}\,\frac{\operatorname{sen}(azi)}{\cosh(az)}\begin{cases} \lim\limits_{z\to 0}|h(z)|=\infty \\ \lim\limits_{z\to0} z\,h(z)=\overbrace{\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sen}(azi)}{z\,\cosh(az)}}^{\frac{0}{0}}=\overbrace{\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sen}(azi)}{z}}^{\text{L'Hopital}}= \\ \qquad \lim\limits_{z\to0}\dfrac{ai\cos(azi)}{1}=a\,i\end{cases}$$

$\Longrightarrow z=0$ es polo simple y $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z^2}f\left(\dfrac{1}{z}\right); z=0\right)=a\,i \longrightarrow$

a	z_k	$\operatorname{Res}(f;z_k)$	I
$\frac{1}{2}$	$\frac{i}{\pi(1+2k)}$	$\frac{2i}{\pi^2(1+2k)^2}$	$-\pi$
2	$\frac{4i}{\pi(1+2k)}$	$\frac{8i}{\pi^2(1+2k)^2}$	-4π
$\frac{3}{2}$	$\frac{3i}{\pi(1+2k)}$	$\frac{6i}{\pi^2(1+2k)^2}$	-3π
3	$\frac{6i}{\pi(1+2k)}$	$\frac{12i}{\pi^2(1+2k)^2}$	-6π

$$\boxed{\oint f(z)\,dz=2\pi\,i\,ai=-2\pi a}$$