SOLUCIÓN

E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : ____________ 1er Apellido : ____________ 2do Apellido : ____________ Nombre : ____________	Curso 16/17 (04.11.16) Tiempo 1h. 45 m. Valor 18 puntos 1er Parcial

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$x^{n+2} - x^n = 2^{n+1},$$

que cumple $x^0 = x^1 = 1$.

Homogénea $x_H^{n+2} - x_H^n = 0$

$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \Rightarrow$

$x_H^n = A\,1^n + B(-1)^n = A + B(-1)^n$

Sol. Particular

$x_p = C\,2^n \Rightarrow$

$C[2^{n+2} - 2^n] = 3C\,2^n = 2^{n+1} \Rightarrow C = 2/3$

Solución general

$x^n = A + B(-1)^n + \dfrac{2^{n+1}}{3}$

$$\boxed{x^n = \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^{n+1}}{3}}$$

Cond. Iniciales

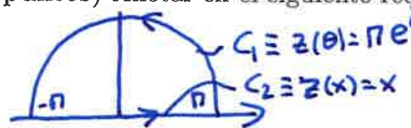
$x^0 = A + B + 2/3 = 1$

$x^1 = A - B + 4/3 = 1$

$2A + 2 = 2$, $\boxed{A = 0}$, $\boxed{B = 1/3}$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$\Gamma = C_1 + C_2$



$$I = \int_\Gamma \cos|z|\,\mathrm{d}z,$$

Integral en C_1

$I_1 = \int_0^\pi \cos\pi\, dz = -\pi\, e^{i\theta}\Big]_0^\pi = 2\pi$

donde Γ es el recinto cerrado, recorrido en sentido positivo, formado por la semi-circunferencia de centro el origen y radio π contenida en el semiplano de las partes imaginarias positivas y el segmento $[-\pi, \pi]$ de la recta real

Integral en C_2

$\cos|x| = \cos x$

$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = \sin x\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$I = I_1 + I_2$

$$\boxed{I = 2\pi}$$

C. **(3 puntos)** Sea la función compleja de variable compleja, $z = x + \mathrm{i}\,y$, definida como

$$f(z) = \underbrace{(\mathrm{e}^x + a\,\mathrm{e}^{-x})\cos y}_{u(x,y)} + \mathrm{i}\,\underbrace{(b\,\mathrm{e}^x + c\,\mathrm{e}^{-x})}_{v(x,y)}\sin y, \quad \Rightarrow f(0) = 1 + a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

donde a, b y c son números reales. Se pide hallar los valores de a, b y c para los que la función f cumple i) $f(0) = 2$ y ii) es analítica en todo $\mathbb{C}$. Anotar en el siguiente recuadro tanto los valores de a, b y c como la expresión analítica de f en función de z.

$u(x,y) = (e^x + e^{-x})\cos y$

$u_x(x,y) = (e^x - e^{-x})\cos y$

$v_y(x,y) = (be^x + ce^{-x})\sin y$

$a = b = 1 \quad c = -1$ $f(z) = 2\cosh z$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

$u_x = v_y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow b = 1, \; c = -1$

$f(z) = e^x\cos y + e^{-x}\cos y + i\,e^x\sin y - i\,e^{-x}\sin y =$

$= e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y) =$

$= e^z + e^{-z} = 2\cosh z$

SOLUCIÓN

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el residuo en $z = 1$ de la función

$$f(z) = \frac{(z+1)\,e^z}{(z-1)^3}.$$

$$\boxed{\operatorname{Res}(f,1) = 2e}$$

$$\operatorname{Res}(f,1) = \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2\left[(z+1)e^z\right]}{dz^2}\right|_{z=1}$$

$$\frac{d}{dz}\left[(z+1)e^z\right] = (z+2)e^z$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+1)e^z\right] = (z+3)e^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(z+1)e^z\right]''_{z=1} = 4e \Rightarrow \operatorname{Res} = 2e$$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el radio de convergencia exterior R_e y los tres términos de la parte principal (términos potenciales de exponente negativo) del desarrollo en serie de Laurent en $z = -\pi/2$ de la función:

$$f(z) = \frac{(z-\pi/2)\sin z}{(z+\pi/2)^3}.$$

$$\boxed{f(z) = \frac{\pi}{(z+\pi/2)^3} - \frac{1}{(z+\pi/2)^2} - \frac{\pi/2}{(z+\pi/2)} + \cdots}$$

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z+\pi/2)^3} \quad \text{con } \phi(z) = (z-\tfrac{\pi}{2})\sin z$$

$$y\ \phi(-\tfrac{\pi}{2}) = \pi \sin\tfrac{\pi}{2} = \pi \neq 0$$

Se necesitan los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de $\phi(z)$ en $z = -\frac{\pi}{2}$

$$\phi(z) = (z+\tfrac{\pi}{2}-\pi)\sin(z+\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{2}) =$$

$$= -(z+\tfrac{\pi}{2}-\pi)\cos(z+\tfrac{\pi}{2}) =$$

$$= \left[\pi-(z+\tfrac{\pi}{2})\right]\left[1-\tfrac{1}{2!}(z+\tfrac{\pi}{2})^2+\cdots\right] =$$

$$= \pi - (z+\tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{\pi}{2}(z+\tfrac{\pi}{2})^2 + \cdots$$

F. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

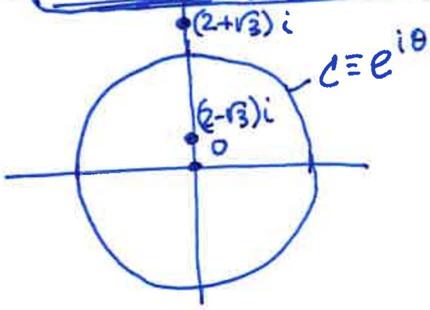
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{(2-\sin\theta)}\,d\theta.$$

Sobre la circunferencia $\mathcal{C}$:

$$\sin\theta = \left(z - \tfrac{1}{z}\right)\tfrac{1}{2i}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\boxed{I = 2\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)}$$



$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{(z-\frac{1}{z})\frac{1}{2i}}{2-(z-\frac{1}{z})\frac{1}{2i}}\,\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2-1}{4iz-z^2+1}\,\frac{dz}{z} \Rightarrow$$

$$4iz - z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 2i \pm \sqrt{-4+1} = (2\pm\sqrt{3})i$$

$$\Rightarrow I = 2\pi\left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{(4iz-z^2+1)z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{(4iz-z^2+1)z}, (2-\sqrt{3})i\right)\right] = 2\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z(4iz-z^2+1)}, 0\right) = -1 \ ; \quad \frac{z^2-1}{z(4iz-z^2+1)} = \frac{1-z^2}{z\left(z-(2+\sqrt{3})i\right)\left(z-(2-\sqrt{3})i\right)}$$

Luego

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z(4iz-z^2+1)}, (2-\sqrt{3})i\right) = \frac{1+(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})i\,(\cancel{2}-\sqrt{3}-\cancel{2}-\sqrt{3})i} = \frac{1+7-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$