Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso

Grupo

Auxiliar

Respuestas

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (01-02-2021)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+t^2\ln^2(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0)=\exp(-2x^2) \quad x\in\mathbb{R},$$
$$u \text{ acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ \int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,t)|\mathrm{d}x \text{ acotada en }]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(3/\sqrt{2},\exp(1)) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{9}{1+8\left(\exp(1)+\dfrac{17\exp(3)}{27}\right)}\right)}{\sqrt{1+8\left(\exp(1)+\dfrac{17\exp(3)}{27}\right)}}$.

(2) $u(3/\sqrt{2},\exp(1)) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{9}{1+8\left(\exp(1)+\dfrac{11\exp(3)}{27}\right)}\right)}{\sqrt{1+8\left(\exp(1)+\dfrac{11\exp(3)}{27}\right)}}$.

(3) $u(3/\sqrt{2},\exp(1)) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{9}{1+8\left(\exp(1)+\dfrac{5\exp(3)}{27}\right)}\right)}{\sqrt{1+8\left(\exp(1)+\dfrac{5\exp(3)}{27}\right)}}$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$.

Ampliación de Matemáticas.

Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (01-02-2021)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}(t)+2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t)+17w(t)=g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0)=1$$

donde $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es la función definida por $g(t)=\dfrac{1}{2}+\cos^2(t)$ si $t\in[0,\dfrac{\pi}{2}[$ y $g(t)=\dfrac{1}{2}$ si $t\in[\dfrac{\pi}{2},+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2)=\dfrac{1}{200}(13-\exp(-\pi))$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](2)=\dfrac{1}{200}(6-\exp(-\pi))$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2)=\dfrac{1}{200}(5+\exp(-\pi))$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$(1+t^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{1+t^2}w=0 \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0)=1.$$

Sean $w:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la solución del problema anterior y $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $v(t)=w(t)$ si $t\in[0,+\infty[$ y $v(t)=-w(-t)$ si $t\in]-\infty,0[$. El desarrollo en serie de Taylor de la función v en 0 es $\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$. Las función w y los coeficientes c_k son tales que:

(9) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2}=-\dfrac{(2k(k-1)+1)c_k+(k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k\geqslant 4$ y $c_5=\dfrac{13}{120}$.

(10) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2}=-\dfrac{(k(k-1)+1)c_k+(k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k\geqslant 4$ y $c_5=\dfrac{13}{120}$.

(11) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2}=-\dfrac{(k(k-1)+1)c_k+(k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k\geqslant 4$ y $c_5=\dfrac{11}{120}$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (01-02-2021)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z\sinh(z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\sin(2z)}{4}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\sinh(z)w=0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_{s1}(z)}{\ln(z)}=1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_{s2}(z)}{z^{\frac{1}{4}}}=1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_{s3}(z)}{z^{\frac{1}{2}}}=1$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese el problema de autovalores

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=\lambda u\quad\text{para } (r,\theta)\in]0,1[\times]-\pi,\pi[,\qquad(1)$$

$$u(1,\theta)=0\quad\text{para } \theta\in[-\pi,\pi],\ u\ \text{ acotada en }]0,1[\times]-\pi,\pi[,\qquad(2)$$

$$u(r,\pi)=u(r,-\pi),\quad \frac{\partial u}{\partial\theta}(r,\pi)=\frac{\partial u}{\partial\theta}(r,-\pi)\quad\text{para } r\in[0,1],\qquad(3)$$

donde $u\in C^\infty([0,1]\times[-\pi,\pi])$. El probrema de autovalores (1)-(3) verifica que:

(17) La función $w(r,\theta)=J_3(\alpha r)\sin(4\theta+\varphi)$ es una autofunción del problema (1)-(3) asociada al autovalor $\lambda=-\alpha^2$, donde $\alpha>0$, $J_3(\alpha)=0$ y $\varphi\in\mathbb{R}$.

(18) La función $w(r,\theta)=J_3(\alpha r)\sin(3\theta+\varphi)$ es una autofunción del problema (1)-(3) asociada al autovalor $\lambda=-\alpha^2$, donde $\alpha>0$, $J_3(\alpha)=0$ y $\varphi\in\mathbb{R}$.

(19) La función $w(r,\theta)=J_3(\alpha r)\sin(3\theta+\varphi)$ es una autofunción del problema (1)-(3) asociada al autovalor $\lambda=-\alpha^2$, solamente si $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ con $k\in\mathbb{Z}$, donde $J_3(\alpha)=0$ con $\alpha>0$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 2). (01-02-2021)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+t^2\ln^2(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-3x^2) \quad x\in\mathbb{R},$$
$$u \text{ acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|\mathrm{d}x \text{ acotada en }]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(2/\sqrt{3},\exp(1)) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{4}{1+12\left(\exp(1)+\dfrac{5\exp(3)}{27}\right)}\right)}{\sqrt{1+12\left(\exp(1)+\dfrac{5\exp(3)}{27}\right)}}.$

(2) $u(2/\sqrt{3},\exp(1)) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{4}{1+12\left(\exp(1)+\dfrac{17\exp(3)}{27}\right)}\right)}{\sqrt{1+12\left(\exp(1)+\dfrac{17\exp(3)}{27}\right)}}.$

(3) $u(2/\sqrt{3},\exp(1)) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{4}{1+12\left(\exp(1)+\dfrac{11\exp(3)}{27}\right)}\right)}{\sqrt{1+12\left(\exp(1)+\dfrac{11\exp(3)}{27}\right)}}.$

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$.

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 2). (01-02-2021)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 17w(t) = g(t) \text{ en }]0, +\infty[, \; w(0) = 0, \; \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 2$$

donde $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \frac{1}{2} + \cos^2(t)$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ y $g(t) = \frac{1}{2}$ si $t \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{200}(6 - \exp(-\pi))$.
(6) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{200}(5 + \exp(-\pi))$.
(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{200}(21 - \exp(-\pi))$.
(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$(1+t^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{1+t^2}w = 0 \text{ en }]0, +\infty[, \; w(0) = 0, \; \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1.$$

Sean $w : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema anterior y $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $v(t) = w(t)$ si $t \in [0, +\infty[$ y $v(t) = -w(-t)$ si $t \in]-\infty, 0[$. El desarrollo en serie de Taylor de la función v en 0 es $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Las función w y los coeficientes c_k son tales que:

(9) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2} = -\frac{(2k(k-1)+1)c_k + (k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k \geqslant 4$ y $c_5 = \frac{13}{120}$.
(10) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2} = -\frac{(k(k-1)+1)c_k + (k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k \geqslant 4$ y $c_5 = \frac{13}{120}$.
(11) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2} = -\frac{(k(k-1)+1)c_k + (k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k \geqslant 4$ y $c_5 = \frac{11}{120}$.
(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 2). (01-02-2021)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z \sinh(z) \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sin(2z)}{8} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \sinh(z) w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z \to 0} \frac{w_{s3}(z)}{z^{\frac{3}{4}}} = 1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim_{z \to 0} \frac{w_{s1}(z)}{\ln(z)} = 1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z \to 0} \frac{w_{s2}(z)}{z^{\frac{3}{8}}} = 1$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese el problema de autovalores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \lambda u \quad \text{para } (r,\theta) \in]0,1[\times]-\pi,\pi[, \qquad (1)$$

$$u(1,\theta) = 0 \quad \text{para } \theta \in [-\pi,\pi], \ u \quad \text{acotada en }]0,1[\times]-\pi,\pi[, \qquad (2)$$

$$u(r,\pi) = u(r,-\pi), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,-\pi) \quad \text{para } r \in [0,1], \qquad (3)$$

donde $u \in C^\infty([0,1] \times [-\pi,\pi])$. El probrema de autovalores (1)-(3) verifica que:

(17) La función $w(r,\theta) = J_4(\alpha r)\sin(4\theta + \varphi)$ es una autofunción del problema (1)-(3) asociada al autovalor $\lambda = -\alpha^2$, donde $\alpha > 0$, $J_4(\alpha) = 0$ y $\varphi \in \mathbb{R}$.

(18) La función $w(r,\theta) = J_4(\alpha r)\sin(3\theta + \varphi)$ es una autofunción del problema (1)-(3) asociada al autovalor $\lambda = -\alpha^2$, donde $\alpha > 0$, $J_4(\alpha) = 0$ y $\varphi \in \mathbb{R}$.

(19) La función $w(r,\theta) = J_4(\alpha r)\sin(4\theta + \varphi)$ es una autofunción del problema (1)-(3) asociada al autovalor $\lambda = -\alpha^2$, solamente si $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, donde $J_4(\alpha) = 0$ con $\alpha > 0$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ⓐ Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1+t^2 \ln^2 t)(i\omega)^2 \hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega, t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Teniendo en cuenta que $\int_0^t (1+\tau^2 \ln^2 \tau)\, d\tau = t + \frac{t^3}{3}\left(\ln^2 t - \frac{2}{3}\ln t + \frac{2}{9}\right)$, este resultado se obtiene integrando por partes, e integrando la ecuación de primer orden que verifica $\hat{u}$ se obtiene

$\hat{u}(\omega, t) = C \exp\left(-\omega^2\left(t + \frac{t^3}{3}\left(\ln^2 t - \frac{2}{3}\ln t + \frac{2}{9}\right)\right)\right)$. Imponiendo la condición inicial se obtiene $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{4\alpha} + t + \frac{t^3}{3}\left(\ln^2 t - \frac{2}{3}\ln t + \frac{2}{9}\right)\right)\right)$. Tomando la transformada inversa se obtiene

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha\left(t + \frac{t^3}{3}\left(\ln^2 t - \frac{2}{3}\ln t + \frac{2}{9}\right)\right)}} \exp\left(\frac{-\alpha x^2}{1 + 4\alpha\left(t + \frac{t^3}{3}\left(\ln^2 t - \frac{2}{3}\ln t + \frac{2}{9}\right)\right)}\right).$$

(B) La función g puede escribirse en la forma $g(t) = \left(H(t) - H(t-\frac{\pi}{2})\right)\left(\frac{1}{2}+\cos^2 t\right)$ $+ H(t-\frac{\pi}{2})\frac{1}{2} = H(t)\left(1+\frac{\cos 2t}{2}\right) - H(t-\frac{\pi}{2})\left(\frac{1+\cos 2(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}{2}\right) = H(t)\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)$ $- H(t-\frac{\pi}{2})\frac{1}{2} + H(t-\frac{\pi}{2})\frac{\cos 2(t-\frac{\pi}{2})}{2}$. Tomando la transformada de Laplace de la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $(z^2+2z+17)\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{dw}{dt}(0) + \mathcal{L}[g(t)](z)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[\cos 2t](z) = \frac{z}{z^2+4}$, $\mathcal{L}[1](z) = \frac{1}{z}$ y que $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](z) = \exp(-az)\mathcal{L}[f(t)](z)$ para $a>0$, se obtiene que $\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{1}{(z+1)^2+4^2}\left(\frac{dw}{dt}(0) + \frac{1}{z} + \frac{z}{2(z^2+4)}(1+\exp(-\frac{\pi}{2}z)) - \frac{\exp(-\frac{\pi}{2}z)}{2z}\right)$. Por tanto, $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{200}\left(8\frac{dw}{dt}(0) + 5 - \exp(-\pi)\right)$.

ⓒ La solución del problema de Cauchy del enunciado es una función de clase $C^\infty(]-\delta,\delta[)$ para un $\delta>0$. Por tanto $w(t)=t+\sum_{k=2}^{\infty} c_k t^k$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación $(1+t^2)^2\frac{d^2w}{dt^2}+w=0$ se obtiene $c_2=0$, $c_3=\frac{-1}{6}$, $c_4=0$ $c_5=\frac{13}{120}$ y $c_{k+2}=-\frac{(2k(k-1)+1)c_k+(k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$. Multiplicando la ecuación por $\frac{dw}{dt}$, la expresión resultante se puede reescribir como $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+\frac{1}{(1+t^2)^2}\frac{w^2}{2}\right)=\frac{-2t}{(1+t^2)^3}w^2\leq 0$ para todo $t\in[0,+\infty[$.

Por tanto, $\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dt}(t)\right)^2+\frac{1}{(1+t^2)^2}\frac{(w(t))^2}{2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dt}(0)\right)^2+\frac{w(0)^2}{2}=\frac{1}{2}$, de donde $\left|\frac{dw}{dt}(t)\right|\leq 1$ para todo $t\in[0,+\infty[$.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{z} \quad \frac{-\operatorname{sen} 2z}{4\gamma \operatorname{Sh} z} \frac{dw}{dz} + \frac{1}{z^2} \quad z.$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación anterior. Nótese que $\lim_{z \to 0} \frac{-\operatorname{sen} 2z}{\operatorname{Sh} z} = -2$, por lo que la función $\frac{\operatorname{sen} 2z}{\operatorname{Sh} z}$ es analítica en $z=0$ cuando se la define de forma continua en $z=0$. El comportamiento de la solución está determinado por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2\gamma}+1 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda_1 = 1-\frac{1}{2\gamma}$, $\lambda_2 = 0$ con $\gamma > \frac{1}{2}$.

Por tanto, para $\gamma > \frac{1}{2}$, la solución general de la ecuación es de la forma $w(z) = C_1 \, z^{1-\frac{1}{2\gamma}} p_1(z) + C_2 \, p_2(z)$ donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$.

Para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ $\lim_{z \to 0} \frac{w(z)}{z^{1-1/2\gamma}} = 1$ y $\lim_{z \to 0} \frac{w(z)}{z^{1/2 - \frac{1}{4\gamma}}}$ o no existe o es distinto de 1.

(E) La función $f(r)\,\mathrm{sen}(n\theta+\varphi)$ con $n\in\mathbb{N}$ satisface las condiciones (3) del enunciado. Para $\lambda=-\alpha^2$, sustituyendo $f(r)\,\mathrm{sen}(n\theta+\varphi)$ en (2) se obtiene la ecuación

$$r^2\frac{d^2f}{dr^2}+r\frac{df}{dr}+(\alpha^2r^2-n^2)f(r)=0.$$

La solución general de la ecuación anterior es $f(r)=C_1J_n(\alpha r)+C_2Y_n(\alpha r)$. Las soluciones acotadas en $]0,1]$ de la ecuación anterior son de la forma $f(r)=C_1J_n(\alpha r)$. Si α es tal que $J_n(\alpha)=0$ entonces $w(r)=J_n(\alpha r)\,\mathrm{sen}(n\theta+\varphi)$ es una autofunción del problema (1)-(3) para todo $\varphi\in\mathbb{R}$.