Transformadas de Fourier y Laplace

Transformadas de Laplace

3.2.1 (segundo parcial 14/15)

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{1}{1+s^3}.$$

La función tiene un nº finito de polos, y $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$. Podemos aplicar

$$\mathcal{L}^{-1}F(t) = \sum \text{Res}(F(z)e^{zt}, z_k) = \text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{1+z^3}, -1\right) + \text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{1+z^3}, e^{\pi i/3}\right) + \text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{1+z^3}, e^{-\pi i/3}\right) = \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{\pi i t/3}}{3e^{2\pi i/3}} + \frac{e^{-\pi i t/3}}{3e^{-2\pi i/3}} =$$

$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{-t} + e^{\pi i/3[t-2]} + e^{\pi i/3[2-t]}\right] = \frac{1}{3}\left[e^{-t} + 2\cos\left(\frac{(t-2)\pi}{3}\right)\right]$$

MAL. Ojo: error típico. $e^{zt}\big|_{z=e^{2\pi i/3}} = e^{e^{2\pi i/3}\cdot t}$, no $e^{2\pi i t/3}$

$$\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{-2\pi i/3}}{3}\cdot e^{e^{\frac{\pi i}{3}}\cdot t} + \frac{e^{2\pi i/3}}{3}\cdot e^{e^{-\frac{\pi i}{3}}\cdot t} =$$

$\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$

↳ si f toma valores reales en $\mathbb{R}$, $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$

$$= \frac{e^{-t}}{3} + \frac{1}{3}\cdot 2\text{Re}\left(e^{-2\pi i/3}\cdot e^{e^{\frac{\pi i}{3}}\cdot t}\right) =$$

$$= \frac{e^{-t}}{3} + \frac{2}{3}\text{Re}\left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right] =$$

$$* \; e^{e^{\frac{\pi i}{3}}t} = e^{\left[\frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ti\right]} = e^{t/2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{-t} - e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\,e^{t/2}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$$

3.2.2 (segundo parcial 15/16)

A. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) la expresión de la transformada de Laplace, $G = G(s)$, de la **derivada** de la función:

$$f(t) = e^t\cos(3t), \quad t \in [0, \infty[.$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) = sF(s) - 1$$

$$F(s) = \mathcal{L}[e^t \cos(3t)]$$

· $\mathcal{L}[\cos at] = \dfrac{s}{s^2+a^2}$; $\mathcal{L}[\cos 3t] = \dfrac{s}{s^2+9}$

· $\mathcal{L}[e^t f(t)] = F(s-1) \Rightarrow \mathcal{L}[e^t \cos 3t](s) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+9}$

$$\Rightarrow G(s) = s\cdot\frac{s-1}{(s-1)^2+9} - 1 = \dots = \frac{s-10}{s^2-2\cdot s+10}$$

3.2.3 (segundo parcial 16/17)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 5w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{dw}{dt}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \sin(t)$ si $t \in [0,\pi[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [\pi,+\infty[$. Sobre la función w se puede afirmar que:

(5) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(3) = \dfrac{11-\exp(-3\pi)}{200}$.

(6) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(3) = \dfrac{11+\exp(-3\pi)}{200}$.

(7) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(3) = \dfrac{1-\exp(-3\pi)}{200}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota! Mejor 2 ques.

· Aplicamos $\mathcal{L}$:
$$\hat{w}(s)\cdot s^2 - \cancel{w(0)}^{0}\cdot s - \cancel{w'(0)}^{1} + 2[s\hat{w}(s) - \cancel{w(0)}^{0}] + 5\hat{w}(s) = \hat{g}(s)$$

· Calculemos $\mathcal{L}[g(t)]$: $g(t) = \text{sen}\,t\cdot[H(t)-H(t-\pi)] = \text{sen}\,t\, H(t) - \text{sen}\,t\, H(t-\pi) =$
$$= \text{sen}\,t\, H(t) + \text{sen}(t-\pi)H(t-\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[g] = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{w}(s)\cdot s^2 - 1 + 2s\hat{w}(s) + 5\hat{w}(s) = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1} \Rightarrow$$

opción (6)

$$\Rightarrow \hat{w}(s) = \frac{1}{s^2+2\cdot s+5}\cdot\left(1+\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\right) \Rightarrow \hat{w}(3) = \frac{1}{20}\cdot\left(1+\frac{1+e^{-3\pi}}{10}\right)$$

3.2.4 (segundo parcial 17/18)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 4\frac{dw}{dt}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{dw}{dt}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = t(t-1)$ si $t \in [0,1[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [1,+\infty[$. Sobre la transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ se puede afirmar que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{2-\exp(-2)}{40}$. **(6)** $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{20}$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{\exp(-2)}{40}$. **(8)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$\cdot\ z^2\hat{w}(z) - z\cancel{w(0)}^{0} - w'(0)^{1} + 4[z\hat{w}(z) - \cancel{w(0)}^{0}] + 8\hat{w}(z) = \hat{g}(z)$

$\cdot$ ¿$\hat{g}$? $g(t) = t(t-1)\cdot[\underbrace{H(t-1) - H(t)}_{\text{AL REVÉS } (-1)}] = \underbrace{-t(t-1)H(t-1)}\ + (t-1)tH(t)$

¡OJO! No $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$, que sería $\mathcal{L}[1-t]$

$\cdot\ \mathcal{L}[t] = \frac{1}{z^2}$; $F(z) = \mathcal{L}[(t-1)H(t-1)] = e^{-z}\cdot\left(\frac{1}{z^2}\right)$

$\cdot\ \mathcal{L}[t\cdot(t-1)H(t-1)] = (-1)\cdot F'(z) = -\left[-e^{-z}\cdot\left(\frac{1}{z^2}\right) + e^{-z}\cdot\left(-\frac{2}{z^3}\right)\right] = e^{-z}\cdot\left(\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^2}\right)$

$\cdot\ \mathcal{L}[(t-1)tH(t)] = \mathcal{L}[t^2 - t] = \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^2}$

$\Rightarrow \hat{g}(z) = -e^{-z}\cdot\left(\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^2}$

$z^2\hat{w} - 1 + 4z\hat{w} + 8\hat{w} = \hat{g} \Rightarrow \hat{w} = \frac{1}{z^2+4z+8}\cdot\left[1 + \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^2} + e^{-z}\left(\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^2}\right)\right]$

$\hat{w}(2) = \frac{2 - e^{-2}}{40}$, opción (5)

3.2.5 (segundo parcial 19/20)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{dw}{dt}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \cos(t)$ si $t \in [0,\frac{\pi}{2}[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [\frac{\pi}{2},+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{80}(6+\exp(-\pi))$. **(6)** $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{80}(7+\exp(-\pi))$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{80}(7-\exp(-\pi))$. **(8)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$z^2\hat{w} - z\cancel{w(0)}^{0} - w'(0)^{1} + 2[z\hat{w} - \cancel{w(0)}^{0}] + 8\hat{w} = \hat{g}$

$g(t) = \cos(t)\cdot[H(t-\frac{\pi}{2}) - H(t)] = \cos(t)\cdot H(t-\frac{\pi}{2}) - \cos t\, H(t) =$

$\rightarrow$ AL REVÉS!!!

$\nearrow \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

$$= \cos\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \cos t\, H(t) =$$

$$= -\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \cos t\, H(t) \Rightarrow \mathcal{L}[g] = -e^{-\frac{\pi}{2}z}\cdot\frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{z^2+1} =$$

$$= + \frac{z+e^{-\frac{\pi}{2}z}}{1+z^2}$$ (+, porque $g(t) = \cos t\left[H(t) - H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]$)

$$\hat{w} = \frac{1}{z^2+2z+8}\cdot\left(1+\frac{z+e^{-\frac{\pi}{2}z}}{1+z^2}\right) \Rightarrow \hat{w}(2) = \frac{1}{80}\left(7+e^{-\pi}\right)$$

3.2.6 (final ordinario 13/14)

E. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix} \quad \text{para } t\in]0,+\infty[,$$

$$u_1(0)=u_2(0)=1.$$

Sean $D\subset\mathbb{C}$ un dominio, $\tilde{u}_1: D\to\mathbb{C}$ y $\tilde{u}_2: D\to\mathbb{C}$ las transformadas de Laplace de las funciones u_1 y u_2. Sobre las funciones $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ se puede afirmar que:

(17) $\tilde{u}_1(t) = \dfrac{s^3-3s^2-4}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$, $\tilde{u}_2(t) = \dfrac{s^3+5s^2+5}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$.

(18) $\tilde{u}_1(t) = \dfrac{s^3-3s^2-4}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$, $\tilde{u}_2(t) = \dfrac{s^3+3s^2+5}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$.

(19) $\tilde{u}_1(t) = \dfrac{s^3-s^2-4}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$, $\tilde{u}_2(t) = \dfrac{s^3+3s^2+5}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Sea $U = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$. $\quad U_t = AU + g \xrightarrow{\mathcal{L}} z\hat{U} - U(0) = A\hat{U} + \hat{g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (zI - A)\cdot\hat{U} = U(0)+\hat{g} = \begin{pmatrix}1+\frac{1}{1+z^2}\\1+\frac{z}{1+z^2}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{U} = (zI-A)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2+z^2}{1+z^2}\\\frac{z+1+z^2}{1+z^2}\end{pmatrix}$$

Hay que invertir: $\begin{pmatrix}z-1&2\\-3&z-1\end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{z^2-2z+7}\cdot\begin{pmatrix}z-1&-2\\3&z-1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\hat{U}_1\\\hat{U}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{(z^2-2z+7)(z^2+1)}\cdot\begin{pmatrix}z-1&-2\\3&z-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+z^2\\z+1+z^2\end{pmatrix}$$

- Denominador: Todo ok
- Numerador: $U_1 = (z-1)(2+z^2) - 2(z+1+z^2) = z^3-3z^2-4 \to$ (17) ó (18)

  $U_2 = 6+3z^2+\cancel{z^2}+\cancel{z}+z^3-\cancel{z}-1-\cancel{z^2} = z^3+3z^2+5 \to$ (18)

3.2.7 (final extraordinario 14/15)

A. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) la expresión de la transformada de Laplace, $F = F(s)$, de la función:

$$f(t) = e^{2t}\cos(2t), \quad t \in [0, \infty[.$$

Similar al problema 2. $\mathcal{L}[\cos(2t)] = \frac{z}{z^2+4}$; $\mathcal{L}[e^{2t}\cos 2t] = F(z-2) =$

$= \frac{z-2}{(z-2)^2+4}$ Y TS sale poniendo $f = e^{2t}\cdot\left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)\ldots$

3.2.8 (final ordinario 14/15)

A. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) la expresión de la función $f = f(t)$, para $t \in [0, \infty[$, cuya transformada de Laplace es:

$$F(s) = \frac{3s}{s^2 - s - 2}.$$

— $\mathcal{L}^{-1}(F)$: Como $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$, podemos aplicar la fórmula de los residuos.

$\mathcal{L}^{-1}F(t) = \sum \mathrm{Res}(F(z)\cdot e^{zt}, z_k)$

— $z^2 - z - 2 \Rightarrow z = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow z^2 - z - 2 = (z-2)(z+1)$

$\mathcal{L}^{-1}F(t) = \frac{3\cdot 2\cdot e^{2t}}{3} - \frac{3\cdot 1\cdot e^{-t}}{-3} = 2e^{2t} + e^{-t}$

3.2.9 (final extraordinario 15/16)

A. La solución $u = u(x)$ de la ecuación integral:

$$u(x) + \int_0^x e^{(x-s)}u(s)\mathrm{d}s = 1, \quad \forall x \in [0, \infty[.$$

es

(1) $u(x) = (1 - x)$. **(2)** $u(x) = (1 + x)e^{-x}$.

(3) $u(x) = (1 + x)$. **(4)** $u(x) = (1 - x)e^{-x}$.

(Nota.- Para resolver el problema, se sugiere tomar transformadas de Laplace en la ecuación dada)

— $\int_0^x e^{x-s} u(s)\,ds = (\exp * u)(x)$.

Aplicamos $\mathcal{L}$: $\hat{u} + \hat{\exp} \cdot \hat{u} = \hat{1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{u} + \frac{1}{z-1} \cdot \hat{u} = \frac{1}{z} \Rightarrow \hat{u}(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{z-1}{z^2}$$

$\Rightarrow u = \mathcal{L}^{-1}[\hat{u}]$. Lo hacemos por residuos: $u(t) = \text{Res}\left(e^{z \cdot t} \cdot \frac{z-1}{z^2}, 0\right)$

Ahora: $\frac{e^{zt} \cdot (z-1)}{z^2} = \frac{e^{zt}}{z} - \frac{e^{zt}}{z^2} = \frac{-1}{z^2} + \left(\frac{1}{z} - \frac{t}{z}\right) + \dots \Rightarrow \text{Res} = 1-t$

Luego $u(t) = 1-t$

3.2.10 (final ordinario 15/16)

A. Sea la función $u = u(x)$ que cumple la relación integral:

$$u(x) + \int_0^x e^{(x-s)} u(s) ds = 1, \quad \text{para todo } x \in [0, \infty[. \longrightarrow$$

Su transformada de Laplace, $U(s) = \int_0^\infty u(x) e^{-sx} dx$, es:

(1) $U(s) = \frac{s}{(s-1)^2}$. **(2)** $U(s) = \frac{s+1}{s^2}$.

(3) $U(s) = \frac{s}{(s-1)}$. **(4)** $U(s) = \frac{s-1}{s^2}$.

(NOTA.- Tomar directamente transformadas de Laplace en la ecuación dada)

$$\hat{u} + \frac{1}{z-1} \hat{u} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \hat{u} = \frac{z-1}{z^2}$$

3.2.11 (final ordinario 16/17)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 2w(t) = g(t) \text{ en }]0, +\infty[, \; w(0) = 0, \; \frac{dw}{dt}(0) = 1,$$

donde $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = t^2 - t$ si $t \in [0, 1[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [1, +\infty[$. Sobre la función w se puede afirmar que:

(5) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(2) = \frac{3 - \exp(-2)}{20}$.

(6) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(2) = \frac{3 + \exp(-2)}{20}$.

(7) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(2) = \frac{2 - \exp(-2)}{20}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Tomamos transformadas. $g = (t^2 - t) \cdot (H(t) - H(t-1)) =$

$= (t^2 - t) H(t) - \underbrace{(t^2 - t) H(t-1)}_{=\, t \underbrace{(t-1)H(t-1)}_{f(t)}}$

$\cdot \mathcal{L}((t^2 - t) H(t)) = \mathcal{L}(t^2 - t) = \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^2}$

$\mathcal{L}[t f(t)] = -\mathcal{L}'(z)$

$\cdot\ \mathcal{L}[p(t)] = \mathcal{L}[(t-1)H(t-1)] = e^{-z}\cdot \mathcal{L}[t](z) = e^{-z}\cdot \frac{1}{z^2}$

$\cdot\ \mathcal{L}[t\,p(t)] = -\mathcal{L}'(z) = -\left[-e^{-z}\cdot\frac{1}{z^2} + e^{-z}\cdot\left(-\frac{1}{z^3}\cdot 2\right)\right] = e^{-z}\cdot\left(\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}\right)$

$$\mathcal{L}[g](z) = \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^2} - e^{-z}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}\right)$$

Aplicamos $\mathcal{L}$:

$z^2\hat{u} - z\cdot \cancel{u(0)} - \cancel{u'(0)} + 2(z\hat{u} - \cancel{u(0)}) + 2\hat{u} = \hat{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{u}\,[z^2+2z+2] - 1 = \hat{g} \Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{z^2+2z+2}\cdot(\hat{g}+1)$ ↗ (7)

$$\hat{u}(2) = \frac{1}{10}\cdot\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} - e^{-2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{10}\cdot\left(1-\frac{e^{-2}}{2}\right)$$

3.2.12 (final ordinario 18/19)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{dw}{dt}(0)=1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \pi - t$ si $t \in [0,\pi[$ y $g(t) = \sin(t)$ si $t \in [\pi,+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \frac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi + \frac{\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \frac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi - \frac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \frac{1}{2^9}\left(19 + \frac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$\hat{u}\cdot z^2 - \cancel{u(0)}\cdot z - \cancel{u'(0)} + 2(z\hat{u} - \cancel{u(0)}) + 8\hat{u} = \hat{g}$

$g(t) = (\pi - t)\cdot[H(t) - H(t-\pi)] + \operatorname{sen} t\cdot[H(t-\pi)] =$

$= (\pi - t)H(t) + (t-\pi)\cdot H(t-\pi) - \operatorname{sen}(t-\pi)\cdot H(t-\pi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{g} = \frac{\pi}{z} - \frac{1}{z^2} + e^{-\pi z}\cdot\frac{1}{z^2} - e^{-\pi z}\cdot\frac{1}{1+z^2}$$

$\hat{u} = (1+\hat{g})\cdot\frac{1}{z^2+2z+8} \Rightarrow \hat{u}(4) = \frac{1}{32}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{16} + e^{-\pi\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{17}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2^9}\cdot\left(15 + 4\pi + e^{-4\pi}\cdot\frac{1}{17}\right) \to (5)$

3.2.13 (procedencia desconocida)

Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{en } (x,y)\in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0)=x(1-x^2) \quad \text{si } x\in[-1,1], \quad u(x,0)=0 \quad \text{si} \quad |x|>1,$$

$$u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times[0,+\infty[, \quad \text{y} \int_{-\infty}^{+\infty}|u(s,y)|ds \text{ acotada en } [0,+\infty[$$

La función u verifica que:

1. $u(1,4)=\frac{1}{\pi}\left(-16-24\ln(1+\frac{1}{4})+48\arctan(\frac{1}{2})\right)$.
2. $u(1,4)=\frac{1}{\pi}\left(-16-28\ln(1+\frac{1}{4})+48\arctan(\frac{1}{2})\right)$.
3. $u(1,4)=\frac{1}{\pi}\left(-16-28\ln(1+\frac{1}{4})+50\arctan(\frac{1}{2})\right)$.
4. No es cierta ninguna de las tres respuestas anteriores.

Solución:

Por la fórmula de Poisson:

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt$$

Los límites de integración se ajustan por la definición de f:

$$U(1,4)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} t(1-t^2)\cdot\frac{4}{(1-t)^2+4^2}\,dt$$

Esta integral se hace descomponiendo en fracciones simples y usando la arcotangente y el logaritmo.

$$\frac{1}{\pi}\int t\left(1-t^2\right)\frac{4}{(1-t)^2+16}\,dt =$$

$$\frac{28\log\left(t^2-2\,t+17\right)-2\,t\,(t+4)+48\tan^{-1}\left(\frac{t-1}{4}\right)}{\pi}.$$

$$\boxed{U(1,4)=\frac{1}{\pi}\left(-16-28\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+48\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$