AmM-Ordinario-18-w.pdf

Fibonacci_

Ampliación de Matemáticas

3º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO

Asignatura: ____________ Curso: ______ Grupo: ______

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso

Grupo

Auxiliar

Respuestas

Ampliación de Matemáticas (Versión 1), (25-01-2019)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+\ln(1+t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(1,\mathrm{e}^2-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^2}} \exp(-\dfrac{1}{1+2\mathrm{e}^2} - 1 + \mathrm{e}^2)$.

(2) $u(2,\mathrm{e}^3-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+12\mathrm{e}^3}} \exp(-\dfrac{4}{1+12\mathrm{e}^3} - 1 + \mathrm{e}^3)$.

(3) $u(3,\mathrm{e}^4-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4\mathrm{e}^4}} \exp(-\dfrac{9}{1+4\mathrm{e}^4} - 1 + \mathrm{e}^4)$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \pi - t$ si $t \in [0,\pi[$ y $g(t) = \sin(t)$ si $t \in [\pi,+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi + \dfrac{\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi - \dfrac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(19 + \dfrac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - z^5\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - z^4w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 0.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w y los coeficientes c_k de su desarrollo cumplen que:

(9) Los coeficientes c_{3j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{12} = \dfrac{7}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(10) Los coeficientes c_{7j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{12} = \dfrac{7}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(11) Los coeficientes c_{6j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la función w está acotada en $\mathbb{C}$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \exp(z)w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_a, tal que $w_a(z) = 1 + \mathrm{Ln}(z) + o(z)$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_b, distinta de la función nula, tal que $w_b(z) = 3 + \sqrt[3]{z^2} + o(\sqrt[3]{z^2})$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_c, distinta de la función nula, tal que $w_c(z) = o(\sqrt[3]{z^2})$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_2(4x) - xJ_1(x) + x^2J_0(x)}{1 - J_0(x)}.$$

El límite anterior existe y vale:

(17) -8.

(18) 8.

(19) 10.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$.

Examen 25/01/2019

A. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (1 + \ln(1+t)) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{en } (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = \exp(-x^2) \end{cases}$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial \underset{\text{temporal}}{t}}(x,t)\right](w) = \mathcal{F}\left[(1+\ln(1+t))\frac{\partial^2 u}{\partial \underset{\text{espacial}}{x}^2}(x,t)\right](w) + \mathcal{F}[u(x,t)](w)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(w,t) = (1+\ln(1+t))\left(-w^2\hat{u}(w,t)\right) + \hat{u}(w,t)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \left[1 - w^2(1+\ln(1+t))\right]\hat{u}$$

$$\frac{1+t}{1+t} + \frac{-1}{1+t}$$

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = (1 - w^2 - w^2\ln(1+t))\,dt \qquad \int \ln(1+t)\,dt = t\ln() - \int t\cdot\frac{1}{1+t}\,dt =$$

$u = \ln() \rightarrow du = \frac{1}{1+t}dt$

$dv = dt \rightarrow v = t$

$$\ln\hat{u} = t - w^2 t - w^2\underbrace{\left(t\ln(1+t) - \cancel{t} + \ln(1+t)\right)}_{\ln(1+t)(t+1)} + C_1 \qquad = t\ln() - t + \ln(1+t)$$

$$\ln\hat{u} = t - w^2(t+1)\ln(1+t) + C_1$$

$$\hat{u}(w,t) = C_1\exp(t - w^2(t+1)\ln(1+t))$$

$$\mathcal{F}(u(x,0))(w) = \hat{u}(w,0) = \mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{w^2}{4}\right) \overset{\hat{u}(w,0)}{=} C_1$$

Viene abajo del ejercicio

$$\cancel{\mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\exp(-iwx)\,dx = \int_0^{\infty}\exp(-x^2-iwx)\,dx = \left[\frac{1}{-2x-iw}\exp(-x^2-iwx)\right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-iw}\exp}$$

$$\hat{u}(w,t) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{w^2}{4}\right)\exp(t - w^2(t+1)\ln(1+t))$$

Lo dan en el enunciado

$$\boxed{\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](w) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp\left(-\frac{w^2}{4b}\right)}$$

~~(Transformada de Fourier de la transformada)~~

$$\mathcal{F}(\exp(\underset{\text{temporal}}{t})) = \exp(t)$$

$$\hat{u}(w,t) = \sqrt{\pi}\,\exp(t)\exp\Big[-w^2\big(\overbrace{(t+1)\ln(1+t) + \tfrac{1}{4}}^{b}\big)\Big]$$

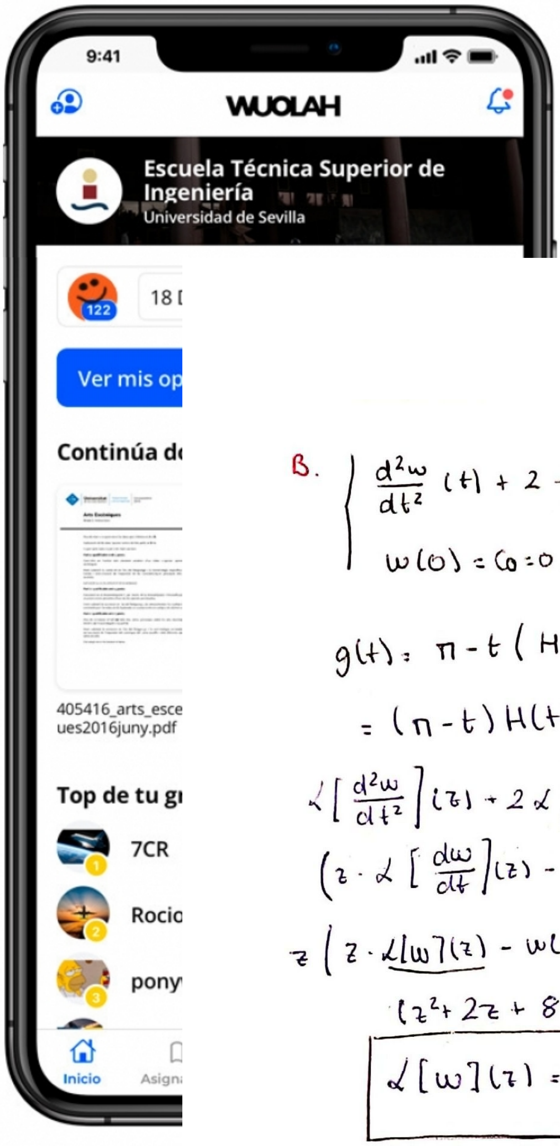
$\mathcal{F}(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$

$$\mathcal{F}[\ ] = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp\left(-\frac{x^2}{4b}\right)$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{1}{(t+1)\ln(1+t)+\frac{1}{4}}}\exp\left(t - \frac{x^2}{1+4(t+1)\ln(1+t)}\right)}$$

$\frac{4(\ )+1}{4}$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\hat{u}(w)](x)$$



B. $\begin{cases} \dfrac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\dfrac{dw}{dt}(t) + 8w(t) = g(t) \\ w(0) = C_0 = 0, \quad \dfrac{dw}{dt}(0) = C_1 = 1 \end{cases}$

$$g(t) = \pi - t\,(H(t) - H(t-\pi)) + \sin t\,(H(t-\pi)) =$$

$$= (\pi - t)H(t) + (t-\pi)H(t-\pi) + \underbrace{\sin(t-\pi+\pi)}_{-\sin(t-\pi)}H(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2w}{dt^2}\right](z) + 2\mathcal{L}\left[\frac{dw}{dt}\right](z) + 8\mathcal{L}[w](z) = \mathcal{L}[g(t)](z)$$

$$\left(z\cdot\mathcal{L}\left[\frac{dw}{dt}\right](z) - \frac{dw}{dt}(0)\right) + 2\left(z\cdot\mathcal{L}[w](z) - w(0)\right) + 8\mathcal{L}[w](z) = \mathcal{L}[g(t)](z)$$

$$z\left(z\cdot\mathcal{L}[w](z) - w(0)\right) - \frac{dw}{dt}(0) + 2\left(z\,\mathcal{L}[w](z) - w(0)\right) + 8\mathcal{L}[w](z) = \mathcal{L}[g(t)](z)$$

$$(z^2+2z+8)\,\mathcal{L}[w](z) = z\cdot w(0) + 2\cdot w(0) + \frac{dw}{dt}(0) + \mathcal{L}[g(t)](z)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[w](z) = \underbrace{\frac{(z+2)\overset{0}{w(0)} + \overset{1}{\frac{dw}{dt}(0)}}{z^2+2z+8}}_{\text{Homogénea}} + \underbrace{\frac{\mathcal{L}[g(t)](z)}{z^2+2z+8}}_{\text{Particular}}}$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[\pi] - \mathcal{L}[t] + e^{-\pi z}\mathcal{L}[t] - e^{-\pi z}\mathcal{L}(\sin(t))$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[H(t-a)F(t-a)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[F(t)](z) \\ \mathcal{L}[H(t)] = 1 \ ; \ \mathcal{L}[A \equiv cte] = A/z \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{\pi}{z} - \frac{1}{z^2} + \exp(-\pi z)\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{1+z^2}\right)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[t^v](z) = \dfrac{\Gamma(v+1)}{z^{v+1}} \to \Gamma(n) = (n-1)!,\ n\in\mathbb{N} \\ \mathcal{L}[\sin t](z) = \dfrac{1}{1+z^2} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(w(t))(z) = \frac{1}{z^2+2z+8}\left(1 + \frac{\pi}{z} - \frac{1}{z^2} + \exp(-\pi z)\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1}\right)\right)$$

$$\mathcal{L}(w(t))(4) = \frac{1}{\underset{2^5}{32}}\left(\overbrace{1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{16}}^{\frac{15}{16}+\frac{\pi}{4}} + \exp(-4\pi)\underbrace{\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{17}\right)}_{\frac{17}{172} - \frac{16}{172} = \frac{1}{2^4\cdot 17}}\right) \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \cdot\, 17 \\ \hline 112 \\ 16 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(w(t))(4) = \frac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi + \exp(-4\pi)\cdot\frac{1}{17}\right)}$$

C. $\begin{cases} \dfrac{d^2w}{dz^2} - z^5 \dfrac{dw}{dz} - z^4 w = 0 \quad \text{en } \mathbb{C} \\ w(0) = 1 \; ; \quad \dfrac{dw}{dz}(0) = 0 \end{cases}$

Función entera: $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k z^k = \overset{1}{C_0} + \overset{0}{\cancel{C_1}} \cdot z + \sum_{k=2}^{+\infty} C_k z^k$

→ Sustituimos el desarrollo anterior en la ecuación:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) C_k z^{k-2} - z^5 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k C_k z^{k-1} - \left(z^4 + z^4 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} C_k z^k \right) = 0$$

$$z^4 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k C_k z^k$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) C_k z^{k-2} - \left(z^4 + \underbrace{z^4 \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) C_k z^k}_{\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) C_k z^{k+4}} \right) = 0$$

$k=1 \longrightarrow C_1 = 0 \longrightarrow \sum_{k=2}^{+\infty}$

z^0: $2(1) C_2 = 0 \longrightarrow C_2 = 0$

z^1: $3(2) C_3 = 0 \longrightarrow C_3 = 0$

z^2: $4(3) C_4 = 0 \longrightarrow C_4 = 0$

z^3: $5(4) C_5 = 0 \longrightarrow C_5 = 0$

z^4: $6(5) C_6 - 1 = 0 \longrightarrow C_6 = \dfrac{1}{6(5)}$

...

z^n: $(n+2)(n+1) C_{n+2} - (n-3) C_{n-4} \longrightarrow C_{n+2} = \dfrac{(n-3) C_{n-4}}{(n+2)(n+1)}$; $n \geq 5$

$C_{l+6} = \dfrac{(l+1) C_l}{(l+6)(l+5)}$; $\boxed{l \geq 1}$

$C_1 = 0 \rightarrow l \geq 2$

$C_{6j} \neq 0$; $C_{(1-5)j} = 0$

$C_{3j+1} \neq C_{6j} \longrightarrow \boxed{C_{3j+1} = 0}$

$C_{12} \rightarrow n = 10 \longrightarrow \dfrac{(10-3) C_6}{12(11)} = \boxed{\dfrac{7}{12(11)(6)(5)} = C_{12}}$

$\rightarrow l = 6 \longrightarrow \dfrac{(7) C_6}{12(11)} = \ldots$

D. $z \cdot \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{3}\frac{dw}{dz} - \exp(z)\,w = 0$

$$\left[\frac{d^2w}{dz^2}(z) = \frac{b(z)}{z}\frac{dw}{dz}(z) + \frac{a(z)}{z^2}\,w(z)\right]$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\underbrace{\frac{1}{3z}}_{b(z)}\frac{dw}{dz} - \frac{\overbrace{z\cdot\exp(z)}^{a(z)}}{z}\,w$$

→ El punto $z=0$ es un pto singular regular. Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución está determinado por autovalores de la matriz: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(0) & b(0)+1 \end{bmatrix}$

$-\lambda(2/3-\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 2/3$

$\longrightarrow$ Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\lambda_1 - \lambda_2 \neq \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_1 = z^{\lambda_1} p_1(z) \longrightarrow u_1 = p_1(z) \\ u_2 = z^{\lambda_2} p_2(z) \longrightarrow u_2 = \sqrt[3]{z^2}\,p_2(z) \end{cases}$$

$w(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z) \longrightarrow w(z) = C_1 \cdot p_1(z) + C_2 \sqrt[3]{z^2}\,p_2(z)$

y además: $p_1(0) = p_2(0) = 1 \longrightarrow w(z) = C_1 + C_2 \cdot \sqrt[3]{z^2} + o(\sqrt[3]{z^2})$

• Función acotada para $\forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

Para $C_1 = 3$ y $C_2 = 1$: $\boxed{w(z) = 3 + \sqrt[3]{z^2} + o(\sqrt[3]{z^2})}$

Para $C_1 = C_2 = 0$: $w(z) = o(\sqrt[3]{z^2}) = 0$ (Función nula)

E. $\lim_{x\to 0} \frac{J_2(4x) - x J_1(x) + x^2 J_0(x)}{1 - J_0(x)}$ $\qquad \Gamma(n) = (n-1)!,\ n \in \mathbb{N}$

NOTA: $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ k\to 0\,(0(k+1))}} \frac{\frac{1}{\underset{2}{\Gamma(3)}}\left(\frac{4x}{2}\right)^2 + o(x^2) - x\frac{1}{\underset{1}{\Gamma(2)}}\left(\frac{x}{2}\right) + o(x^2) + x^2\cdot\frac{1}{\underset{1}{\Gamma(1)}}}{\cancel{1} - \left(\cancel{\frac{1}{\Gamma(1)}}_{1} - \frac{1}{\Gamma(2)}_{1}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - x^2/2 + x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4(5\cancel{x^2})}{2\cancel{x^2}} = 10$$