EDOs lineales de segundo orden

EDO lineal de segundo orden (punto singular)

4.1.1 (segundo parcial 14/15)

F. Considérese la ecuación diferencial

$$z(2+z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+2(1+z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\sqrt{2}w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, distinta de la función nula, analítica en $B((0+\mathrm{i}0),2)$ y tal que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w_1(z)}{z}=0$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w_2(z)}{\ln(z)}=1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w_1(z)-z}{z}=0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

· Estamos en un punto singular. ($z=0$). Escribimos:

$$w''=\frac{b(z)}{z}\cdot w'+\frac{a(z)}{z^2}\cdot w \Rightarrow \begin{array}{l} a(z)=-\sqrt{2}\cdot z/(2+z) \\ b(z)=-2(1+z)/(2+z)\end{array}$$

· Matriz: $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a(0) & b(0)+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0$ doble

Estamos en el caso en que: $\lambda_1=\lambda_2$. Las soluciones son de la forma:

$w_1=c_1\,p_1(z)\cdot z^0$, con p_1 analítica, $p_1(0)=1$

$w_2=c_2(w_1\ln(z)+p_2(z)\cdot z^0)$, p_2 analítica, $p_2(0)=0$

p_2, p_1 analíticas en $D(0,2)$, porque en $z=-2$ hay polo de a, b.

· Sol. general: $w(z)=c_1p_1(z)+c_2(p_1(z)\ln(z)+p_2(z))$

· $\dfrac{w(z)}{z}\underset{z\to 0}{\longrightarrow}\infty$, salvo $c_1=c_2=0$ (va como $\dfrac{c_1}{z}+\dfrac{c_2\ln z}{z}+c_2\cdot \hat{K}$) cte, $p_2'(0)$

· $\dfrac{w(z)}{\ln z}\to c_2$, luego es la opción correcta tomando $c_2=1$

· $\dfrac{w(z)-z}{z}$ va como: $\dfrac{c_1}{z}+\dfrac{c_2\ln z}{z}+c_2\cdot K-1$. Se va a $\begin{cases}\infty & \text{si } c_1=c_2\neq 0\\ -1 & \text{si } c_1=c_2=0\end{cases}$

4.1.2 (segundo parcial 16/17)

E. Considérese la ecuación diferencial

$$z\exp(z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\frac{(2+z)^2}{9\sin(z)}w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(17) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{w_1(z)-2\sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[3]{z^2}}=0.$

(18) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{w_1(z)}{\sqrt[6]{z^5}}=0.$

(19) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{w_2(z)}{\ln(z)}=1.$

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$$w''=-\frac{1}{ze^z}w'+\frac{(z+2)^2}{9\,\mathrm{sen}\,z\cdot ze^z}w \Rightarrow b(z)=-1/e^z$$

$$a(z)=z\cdot(2+z)^2/9\,\mathrm{sen}\,z\,e^z$$

$b(0)=-1$
$a(0)=4/9$ $\quad C=\begin{pmatrix}0&1\\4/9&0\end{pmatrix}$; $\lambda=\pm\frac{2}{3}$; $\lambda_1-\lambda_2=\frac{4}{3}\notin\mathbb{N}$

Sol: $w=c_1x^{2/3}P_1(z)+c_2x^{-2/3}P_2(z)$, P_1,P_2 analíticos, $P_1(0)=P_2(0)=1$

Tomando $c_1=2$, $c_2=0$, $\displaystyle\frac{2\sqrt[3]{z^2}P_1(z)-2\sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[3]{z^2}}=2\cdot(P_1(z)-1)\xrightarrow[z\to0]{}0$

4.1.3 (segundo parcial 17/18)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\frac{(1+z)^2}{2\sin(z)}w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{w_2(z)}{\ln(z)}=1.$

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{w_1(z)-z^{\frac{\sqrt2}{2}}}{z^{\frac{\sqrt2}{2}}}=0.$

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{w_1(z)}{z^{\frac{\sqrt2}{2}}}=0.$

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$a(z) = z(1+z)^2 / 2\,\text{sen}(z) \Rightarrow a(0) = 1/2$

$b(z) = -1$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow w = C_1 z^{\sqrt{2}/2} P_1(z) + C_2 z^{-\sqrt{2}/2} P_2(z),\ P_1(0) = P_2(0) = 1$

Veamos si b) o c) son ciertas.

$$- \frac{w - z^{\sqrt{2}/2}}{z^{\sqrt{2}/2}} = C_1 P_1(z) + C_2 z^{-\sqrt{2}} P_2(z) - 1 \longrightarrow \begin{cases} \infty \text{ si } C_2 \neq 0 \\ C_1 - 1 \text{ si } C_2 = 0 \end{cases}$$

Tomando $C_2 = 0,\ C_1 = 1$ es cierta

4.1.4 (segundo parcial 19/20)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z^2 \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sinh(2z)}{4} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \sin(z) w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim_{z \to 0} \frac{w_{s1}(z)}{\ln(z)} = 1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z \to 0} w_{s2}(z) = 0$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z \to 0} \frac{w_{s3}(z)}{\sqrt{z}} = 0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$b(z) = -\text{senh}(2z)/4z \rightarrow b(0) = -1/2$ $\quad \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix};\ \lambda = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \end{cases}$

$a(z) = \text{sen}(z) \rightarrow a(0) = 0$

Estamos con dos soluciones "sencillas":

$w(z) = C_1 P_1(z) + C_2 \sqrt{z} P_2(z),\quad P_1(0) = P_2(0) = 1$

(14) es cierta, porque $w(z)$ con $C_1 = 0, C_2 = 1$ lo cumple.

4.1.5 (final ordinario 14/15)

E. Considérese la ecuación diferencial

$$z(2+z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - 4(1+z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \frac{4}{z}w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w_1(z)}{z^2} = 1.$

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w_2(z)}{\ln(z)} = 1.$

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} w_1(z) = 1.$

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$a(z) = -\frac{4}{2+z}$ $\Rightarrow$ $a(0) = -2$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $\lambda = 1, 2$

$b(z) = 4 \cdot \frac{1+z}{2+z}$ $\quad b(0) = 2$

Caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$ pero $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$. Solución:

$$w(z) = c_1 z^2 p_1(z) + c_2 \cdot \left(\alpha z^2 p_1(z) \ln(z) + z p_2(z)\right)$$

Donde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ cualesquiera y α es una constante compleja a determinar.

(13) es cierto, porque con $c_2 = 0$, $c_1 = 1$ se tiene $\lim\limits_{z\to 0} p_1(z) = 1$.

4.1.6 (final extraordinario 15/16)

C. Considérese la ecuación diferencial

$$z^4\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - \frac{z}{2}\sin(7z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + (\sinh(5z^2) + z^3)w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(9) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^3} = 0$.

(10) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{z^{\sqrt{5}}\ln(z)} = 1$.

(11) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^2} = 0$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $w : D \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D de la forma $w(z) = z^{\lambda_1}(1 + p_1(z))$, donde $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \notin \mathbb{N}$ y $p_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función analítica tal que $p_1(0) = 0$. Sobre la función p_1 puede afirmarse que:

(13) $\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)| \leq \frac{4}{5}$.

(14) $\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)) > \frac{4}{5}$.

(15) $\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)) < -\frac{4}{5}$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. $b(z) = z^2 \mathrm{sen}(7z^2)/2z^4 = \mathrm{sen}(7z^2)/2z^2 \Rightarrow b(0) = 7/2$

$a(z) = -\left[\mathrm{senh}(5z^2) + z^3\right]\cdot z^2 / z^4 = -\frac{\mathrm{senh}(5z^2)+z^3}{z^2} \Rightarrow a(0) = -5$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & \frac{7}{2}+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}, 2.$ $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$

$w(z) = C_1 z^{5/2}\cdot P_1(z) + C_2 \cdot z^2 \cdot P_2(z)$

· $\frac{w(z)}{z^3} \to$ la parte de C_2 se va a ∞. $\frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$; la parte de C_1 tb. (9) Falsa

· $\frac{w(z)}{z^2}$: Con $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, queda $\sqrt{z}\,P_1(z) \to 0$ (11) cierta

D. $w(z) = z^{5/2}(1 + P_1(z))$. ¿Qué podemos decir de $\frac{dP_1}{dz}$?

Para ello calculamos los primeros términos del desarrollo

$w(z) = z^{5/2}\cdot(1 + c_1 z + o(z)) = z^{5/2} + c_1 z^{7/2} + o(z^{7/2})$

$w_1'(z) = \frac{5}{2}z^{3/2} + c_1\frac{7}{2}z^{5/2} + o(z^{5/2})$ → Ver NOTA sig. problema

$w_1''(z) = \frac{15}{4}\cdot z^{1/2} + c_1\cdot\frac{35}{4}z^{3/2} + o(z^{3/2})$

$$z^4\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{z}{2}\sin(7z^2)\frac{dw}{dz} + (\sinh(5z^2) + z^3)w = 0.$$

$z^4 \cdot \left[\frac{15}{4} z^{1/2} + c_1 \cdot \frac{35}{4} z^{3/2} + o(z^{3/2}) \right] - \frac{z}{2} \cdot \left(7z^2 + o(z^3)\right) \cdot \left(\frac{5}{2} z^{3/2} + c_1 \frac{7}{2} z^{5/2} + o(z^{5/2}) \right) +$

$+ \left(5z^2 + z^3 + o(z^3)\right) \cdot \left[z^{5/2} + c_1 z^{7/2} + o(z^{7/2}) \right] = 0$

Podemos dividir por $z^{5/2} = z^2 \cdot z^{1/2}$ (esto en lógica).

$z^2 \cdot \left(\frac{15}{4} + c_1 \cdot \frac{35}{4} z \right) - \frac{7}{2} z \cdot \left(\frac{5}{2} z + c_1 \cdot \frac{7}{2} \cdot z^2 \right) + (5 + z)(z^2 + c_1 \cdot z^3)$

- z^2 : $\frac{15}{4} - \frac{35}{4} + 5 = 0$ ✓
- z^3 : $\frac{35}{4} c_1 - \frac{49}{4} c_1 + 5c_1 + 1 = 0 \Rightarrow -\frac{14}{4} c_1 + 5c_1 = -1 \Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{2}{3}}$

Luego (13) es la correcta

4.1.7 (final ordinario 15/16)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$(z^4 + z^5)\frac{d^2w}{dz^2} + z^2\sin(z)\frac{dw}{dz} - 4(1 - \cos(z))w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0} \frac{w_1(z)}{z^2} = 0$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_2(z)$, tal que $\lim_{z\to 0} \frac{w_2(z)}{\ln(z)} = 1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0} \frac{w_1(z)}{z} = 0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Sea $w : D \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D de la forma $w(z) = z^{\lambda_1}(1 + p_1(z))$, donde λ_1 es un número real positivo y $p_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función analítica tal que $p_1(0) = 0$. Sobre la función p_1 puede afirmarse que:

(17) $|\frac{dp_1}{dz}(0)| \leq \frac{1}{7}$.

(18) $\frac{dp_1}{dz}(0) > \frac{1}{7}$.

(19) $\frac{dp_1}{dz}(0) < -\frac{1}{7}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$b(z) = -z^3 \operatorname{sen}(z)/(z^4+z^5) \to b(0) = -1$

$a(z) = 4z^2(1-\cos z)/(z^4+z^5) \to a(0) = 2 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \lambda = \pm\sqrt{2}$

$w(z) = c_1 z^{\sqrt{2}} p_1(z) + c_2 z^{-\sqrt{2}} p_2(z)$

$\frac{w(z)}{z} = c_1 z^{\sqrt{2}-1} p_1(z) + c_2 z^{-\sqrt{2}-1} p_2(z)$. Si $c_2 = 0$, $c_1 = 1$, $z^{\sqrt{2}-1} \to 0$, luego $\frac{w(z)}{z} \to 0$ con $w \neq 0$, (15)

$\to$ Ver NOTA

$\boxed{E}$ $w(z) = z^{\sqrt{2}}(1 + p_1(z))$ ¿ $p_1'(0)$?

$w(z) = z^{\sqrt{2}} \cdot (1 + c_1 z + o(z)) \Rightarrow \begin{cases} w' = \sqrt{2}\, z^{\sqrt{2}-1} + c_1 \cdot (\sqrt{2}+1)\, z^{\sqrt{2}} + o(z^{\sqrt{2}}) \\ w'' = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\, z^{\sqrt{2}-2} + c_1\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\, z^{\sqrt{2}-1} + o(z^{\sqrt{2}-1}) \end{cases}$

$$(z^4+z^5)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + z^2\sin(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - 4(1-\cos(z))w = 0.$$

$(z^4+z^5) \cdot \left(\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\, z^{\sqrt{2}-2} + c_1\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\, z^{\sqrt{2}-1}\right) + z^2\left(z - \frac{z^3}{6}\right)\left(\sqrt{2}\, z^{\sqrt{2}-1} + c_1(\sqrt{2}+1)\, z^{\sqrt{2}}\right) -$

$- 4\left(\frac{z^2}{2}\right) \cdot \left(z^{\sqrt{2}} + c_1 z^{\sqrt{2}+1}\right) = 0 \quad \cdot \frac{1}{z^2 \cdot z^{\sqrt{2}}}$:

$(1+z) \cdot \left(\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + c_1\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\, z\right) + \left(1 - \frac{z^2}{6}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + c_1(\sqrt{2}+1)\, z\right) - 2(1 + c_1 z)$

- z^0: $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2} - 2 = 0$ ✓
- z^1: $\underbrace{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}_{2-\sqrt{2}} + \underbrace{c_1\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}_{2c_1+\sqrt{2}c_1} + \underbrace{c_1(\sqrt{2}+1)}_{\sqrt{2}c_1+c_1} \underbrace{-2c_1}_{\cancel{-2c_1}} = 0 \Rightarrow c_1 \cdot (2\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}+1}}$

$\boxed{\text{NOTA}}$ (Para este y el anterior)

Mejor ya con la división.

$b(z) = -\left(z - \frac{z^3}{6}\right) \cdot \frac{1}{z} \cdot (1 - z + z^2 \ldots)$ $a(z) = \frac{4}{z^2} \cdot (1 - z + z^2 \ldots) \cdot \left(\frac{z^2}{2}\right) = 2 - 2z \ldots$

$w'' = -\frac{\operatorname{sen} z}{z^2+z^3} w' + \frac{4(1-\cos z)}{z^4+z^5} w = -\frac{\operatorname{sen} z}{z+z^2} \cdot \frac{w'}{z} + \frac{4(1-\cos z)}{z^2+z^3} \cdot \frac{w}{z^2}$

$\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\, z^{\sqrt{2}-2} + c_1\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\, z^{\sqrt{2}-1} = (-1+z) \cdot (\sqrt{2}\, z^{\sqrt{2}-2} + \ldots) \ldots$

Más sencilla la cuenta.

4.1.8 (final ordinario 16/17)

E. Considérese la ecuación diferencial

$$z\exp(z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - \ln(1+z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \frac{(1+z)^2}{4\sin(z)}w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(17) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{z} = 1$.

(18) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\sqrt{z}} = 0$.

(19) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\sqrt{z}\ln(z)} = 1$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$b(z) = \frac{\ln(1+z)}{z e^z} \cdot z$; $a(z) = -\frac{(1+z^2)}{4\operatorname{sen} z \cdot z e^z} \cdot z^2$; $a(0) = -\frac{1}{4}$

$\to b(0) = 0$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1/4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-\lambda(1-\lambda) + \frac{1}{4} = 0 \to \lambda = \frac{1}{2}$ doble.

Sol. general: $w(z) = C_1 \sqrt{z}\, P_1(z) + C_2 \cdot \left(\sqrt{z}\, P_1(z) \ln(z) + \sqrt{z}\, P_2(z)\right)$

$P_1(0) = 1$, $P_2(0) = 0$

$\frac{w(z)}{z}$ siempre va a ∞. / $\frac{w(z)}{\sqrt{z}} = C_1 P_1 + C_2 P_1 \ln(z) + C_2 P_2$ $\begin{cases} C_2 \neq 0 \Rightarrow \text{va a } \infty \\ C_2 = 0 \Rightarrow \text{va a } C_1 \end{cases}$

$\rightarrow$ el límite no puede ser 0 si $w \neq 0$

$\frac{w(z)}{\sqrt{z}\ln(z)}$; con $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ esto va a:

$$P_1(z) + \frac{P_2(z)}{\ln(z)} \rightarrow 1$$

4.1.9 (final ordinario 18/19)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \exp(z)w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_a, tal que $w_a(z) = 1 + \mathrm{Ln}(z) + o(z)$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_b, distinta de la función nula, tal que $w_b(z) = 3 + \sqrt[3]{z^2} + o(\sqrt[3]{z^2})$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_c, distinta de la función nula, tal que $w_c(z) = o(\sqrt[3]{z^2})$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$b(z) = -1/3 \rightarrow b(0) = \frac{-1}{3}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 0, \frac{2}{3}$

$a(z) = e^z \cdot z \rightarrow a(0) = 0$

el término z de P_1 está aquí

$w(z) = C_1 P_1(z) + C_2 z^{2/3} P_2(z)$

Con $C_1 = 3$, $C_2 = 1$, $w(z) = 3 + \sqrt[3]{z^2} + o\left(\sqrt[3]{z^2}\right)$