(A) Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (2+\tanh t)(i\omega)^2 \hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Integrando la ecuación se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C \exp(-\omega^2(t+\ln \operatorname{ch} t))$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}[\exp(-\alpha x^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{-\omega^2}{4\alpha}\right)$,

e imponiendo la condición inicial $(u(x,0) = \exp(-\alpha x^2))$ se obtiene

$\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{4\alpha}+t+\ln \operatorname{ch} t\right)\right)$. Tomando la transformada inversa se obtiene $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha(t+\ln(\operatorname{ch} t))}} \exp\left(\frac{-\alpha x^2}{1+4\alpha(t+\ln(\operatorname{ch} t))}\right)$.

(B) La función g puede escribirse en la forma $g(t) = \cos t\,\left(\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-\frac{\pi}{2})\right)$
$= \mathcal{H}(t)\cos t - \mathcal{H}(t-\frac{\pi}{2})\cos(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = \mathcal{H}(t)\cos t + \mathcal{H}(t-\frac{\pi}{2})\,\text{sen}\,(t-\frac{\pi}{2})$.

Tomando la transformada de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $(z^2+2z+8)\mathcal{L}[w(t)](z) = 1 + \mathcal{L}[g(t)](z)$.
Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[\text{sen}\,t](\omega) = \frac{1}{z^2+1}$, $\mathcal{L}[\cos t](\omega) = \frac{z}{z^2+1}$
y las propiedades de la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{1}{z^2+2z+8}\left[1 + \frac{z}{z^2+1} + \frac{\exp(-\frac{\pi}{2}z)}{z^2+1}\right]$$

Por tanto $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{80}\left[7 + \exp(-\pi)\right]$

(c) La solución del problema de Cauchy del enunciado es una función entera. Por tanto, $w(z) = iz + \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación se obtiene $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$ $c_6 = \frac{i}{6\cdot 5}$. Además, $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - z^3\left(iz + \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k\right) = 0$. De donde $c_n = \frac{c_{n-5}}{n(n-1)}$, para $n \geq 7$. La función w es tal que $w(z) = iz + \frac{i}{6\cdot 5} z^6 + i\frac{z^{11}}{6\cdot 5\cdot 11\cdot 10} + o(z^{11})$. Si para todo $z_1 \in \mathbb{C}$ se verificara que $\overline{w(z_1)} = w(\bar{z}_1)$ entonces $w(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y en consecuencia $\frac{dw}{dz}(0) \in \mathbb{R}$ en contra de que $\frac{dw}{dz}(0) = i$, recuerde que w es entera.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{z}\,\frac{\cosh(z) + \operatorname{senh} z}{2z}\,\frac{dw}{dz} + \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\,w.$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación anterior. Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución está determinado por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $w(z) = C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\,p_2(z)$ donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un cierto entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$.

Para todo $C_1 \neq 0$ $\lim_{z\to 0} C_1\sqrt{z}\,p_1(z) = 0$. Para todo C_1, C_2

$$\lim_{z\to 0} \frac{C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\,p_2(z)}{\ln(z)} = 0.$$ El límite

$$\lim_{z\to 0} \frac{C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\,p_2(z)}{\sqrt{z}} = 0$$ si y sólo si $C_1 = C_2 = 0$.

(E) En virtud de la nota $u(3,1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{(3-t)^2+1} dt$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1-t^2}{(3-t)^2+1} dt = \int_{-1}^{1} \left(-1 + \frac{-6t+11}{(t-3)^2+1}\right) dt = \int_{-1}^{1} -1 + \frac{-6(t-3)-7}{(t-3)^2+1} dt$$

$$= -t - 3\ln\left((t-3)^2+1\right) - 7\,\mathrm{arctg}\,(t-3) \Big|_{-1}^{1} = -2 + 3\ln\left(\frac{17}{5}\right) - 7\left(\mathrm{arctg}\, 4 - \mathrm{arctg}\, 2\right).$$

Por tanto, $u(3,1) = \frac{1}{\pi}\left(-2 + 3\ln\left(\frac{17}{5}\right) - 7\left(\mathrm{arctg}\, 4 - \mathrm{arctg}\, 2\right)\right)$.