SolucionPrimerParcial29102019.pdf

Aerofloki

Ampliación de Matemáticas

3º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.

Available on the App Store
GET IT ON Google Play

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

9:41
WUOLAH
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
122
18 [
Ver mis op
Continúa d
405416_arts_esce ues2016juny.pdf
Top de tu g
7CR
Rocío
pony
Inicio
Asign

Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.
Available on the App Store
GET IT ON Google Play

E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : ____ 1er Apellido : ____ 2do Apellido : ____ Nombre : ____	Curso 19/20 (29.10.19) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1er Parcial

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \quad \begin{cases} \lambda=1 \text{ doble} \\ \lambda=2 \text{ simple} \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow b=0$$

$$V_{\lambda=1} = V\left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\right),$$

$$\lambda=2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=b \\ c=-b \end{matrix} \Rightarrow V_{\lambda=2} = V\left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}\right)$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n} = A\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}1^n + B\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}1^n + C\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}2^n} = \begin{Bmatrix} A + C\,2^n \\ C\,2^n \\ B - C\,2^n \end{Bmatrix}$$

B. **(3 puntos)**

C. **(3 puntos)**

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

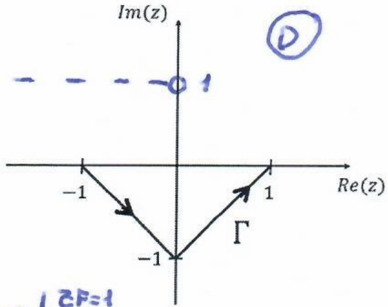
Sean $\begin{cases} g(z) = (z-i)^2/2 & \text{entera} \\ f(z) = \operatorname{Log}(z-i) & \text{analítica en } \mathbb{C} \text{ salvo en } z = x+iy \, / \, \begin{matrix} \operatorname{Re}(z-i) = x \le 0 \\ \operatorname{Im}(z-i) = y-1 = 0 \end{matrix} \end{cases}$

La función $\frac{d}{dz}(gf)$ tiene primitiva en D y hay independencia del camino en D. Integrando por partes: $\int_\mu g' f \, dz = g(z) f(z) \Big|_{z_I=-1}^{z_F=1} - \int_{z_I}^{z_F} g(z) f'(z) \, dz$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I = \int_\Gamma (z-i)\operatorname{Log}(z-i)\,dz$$

siendo Γ el contorno orientado de la figura, con origen en el punto -1 y final en el punto 1, ambos del eje real.



$$\boxed{-\pi + i(1 - \ln 2)}$$

$$I = \frac{1}{2}(z-i)^2 \operatorname{Log}(z-i) \Big|_{z_I=-1}^{z_F=1} - \frac{1}{4}(z-i)^2 \Big|_{z_I=-1}^{z_F=1} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(1-i)^2}_{-2i}\left[\ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] - \frac{1}{2}\underbrace{(1+i)^2}_{2i}\left[\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right] - \frac{1}{4}\left[\underbrace{(1-i)^2 - (1+i)^2}_{-4i}\right] =$$

$$= (-i)\left[\underbrace{2\ln\sqrt{2}}_{\ln 2} - \pi i\right] + i = -\pi + i(1 - \ln 2)$$

C. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \dfrac{(e^{i2z}-1)^2}{z^2(e^{i2z}+1)}$ no analítica en $z=0$, $e^{i2z} = -1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$, $z_k = \frac{\pi}{2}(1+2k)$, $k = 0, \pm 1 \ldots$

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

$z=0$ es singularidad evitable
$\operatorname{Res}(f, 0) = 0$
$z_k = \frac{\pi}{2}(1+2k)$ polos simples ($k \in \mathbb{Z}$)
$\operatorname{Res}[f, z_k] = 8i/\pi^2(1+2k)^2$

Anotar en el siguiente recuadro, la parte principal del desarrollo en serie de Laurent (potencias negativas de z) en el entorno $0 < |z| < R$, especificando el valor de R

Parte principal: 0
$\lvert z \rvert < \pi/2$

$\boxed{z=0}$ $\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{(e^{i2z}-1)^2}{z^2} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{4ie^{i2z}(e^{i2z}-1)}{2z} \underset{\text{L'Hopital}}{=} i\lim_{z\to 0}\frac{4ie^{i4z}-2ie^{i2z}}{1} =$

$= -2 \Rightarrow$ Singularidad evitable $\Rightarrow$ Admite desarrollo en serie de Taylor en $|z| < \min|z_k - 0| = \frac{\pi}{2}$ (Parte en potencias negativas es nula)

$\boxed{z_k = \frac{\pi}{2}(1+2k) \quad k \in \mathbb{Z}}$ $k = 0, \pm 1 \ldots$ $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $\begin{cases} P(z) = (e^{i2z}-1)^2/z^2 & \text{analítica en } z_k \\ P(z_k) = (-2)^2/z_k^2 \neq 0 \\ Q(z_k) = 0 \\ Q'(z_k) = 2i\,e^{i2z_k} = -2i \neq 0 \end{cases}$ Ceros simples de $Q(z)$

Polos simples de $f(z)$

$\operatorname{Res}[f, z_k] = \dfrac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \dfrac{2i}{z_k^2} = \dfrac{8i}{\pi^2(1+2k)^2}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

***D*. (3 puntos)** Sea la función real de dos variables reales definida como

$$u(x,y) = \cos x\left(e^{y} + e^{ky}\right), \qquad k \in \mathbb{R}$$

Anotar los valores de k para los que u es la parte real de una función, $f(z)$, analítica en algún dominio del plano complejo. $u(x,y)$ debe ser armónica | ① $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\forall k \in \mathbb{R}$ ② $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = -\operatorname{sen} x\,(e^y + e^{ky})$
$u_y = \cos x\,(e^y + k e^{ky})$

$u_{xx} = -\cos x\,(e^y + e^{ky})$
$u_{yy} = \cos x\,(e^y + k^2 e^{ky})$

$$\boxed{K = \pm 1}$$

② $K^2 = 1 \iff K = \pm 1$

Anotar la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x,y)$. debe ser $C^2(\mathbb{R}^2)$ y cumplir condiciones de Cauchy-Riemann

$v_y = u_x = -\operatorname{sen} x\,(e^y + e^{ky})$
$v_x = -u_y = -\cos x\,(e^y + K e^{ky})$

$v_x = -u_y \Rightarrow v = -\operatorname{sen} x\,(e^y + K e^{ky}) + g(y)$

$v_y = -\operatorname{sen} x\,(e^y + \underbrace{K^2}_{1} e^{ky}) + g'(y)$
$\| u_x \iff g'(y) = 0 \to g(y) = \boxed{C \in \mathbb{R}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &K = 1 \to v(x,y) = -\operatorname{sen} x\, 2e^{y} + iC \\ &K = -1 \to v(x,y) = -\operatorname{sen} x\,(e^{y} - e^{-y}) + iC \end{aligned}}$$

Anotar la expresión analítica de $f(z)$, en función de $z = x + iy$, sabiendo $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $f(\pi) = -2$.

$\boxed{K=1}$ $f(z) = 2e^{y}\underbrace{(\cos x - i\operatorname{sen} x)}_{e^{-ix}} + iC$
$= 2e^{-i(x+iy)} + iC = 2e^{-iz} + iC$
$f(\pi) = -2 + iC = -2 \iff C = 0$
$f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{f(z) = 2e^{-iz}}$$

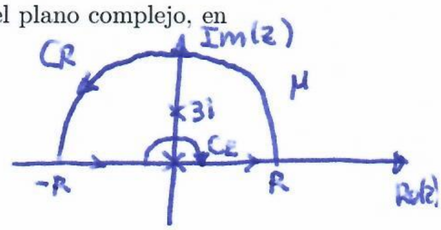
$\boxed{K=-1}$
$f(z) = e^{y}\overbrace{(\cos x - i\operatorname{sen} x)}^{e^{-ix}} + e^{-y}\overbrace{(\cos x + i\operatorname{sen} x)}^{e^{ix}}$
$+ iC = e^{-iz} + e^{iz} + iC =$
$= 2\cos z + iC$
$f(\pi) = -2 + iC = -2 \iff C = 0$
$f(z) = 0 \iff z = \pi/2 + K\pi \ (K \in \mathbb{Z})$

***E*. (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2+9)}\,dx = \frac{1}{2}\,\overbrace{\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x(x^2+9)}\,dx}^{I_1}$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

$$\boxed{\frac{\pi}{18}\left(1 - \frac{1}{e^{6}}\right)}$$



$f(z) = \dfrac{e^{i2z}}{z(z^2+9)} = \dfrac{e^{i2z}}{z(z+3i)(z-3i)}$ Puntos singulares: | $z = 0$, $z = \pm 3i$ Polos simples

$$\int_{\mu} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{\text{Lema 1}} + \underbrace{\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz}_{} = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{2iz}/z(z+3i)}{z-3i},\ z=3i\right]$$

$R \to \infty$: $\lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{1}{z(z^2+9)} = 0$ $\to 0$

$R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$: $\to I_1$

$\varepsilon \to 0$: $\to -\pi i \operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{i2z}/z^2+9}{z}, z=0\right]$

$= 2\pi i\ \dfrac{e^{-6}}{(-18)}$

$$I_1 = \pi i \cdot \frac{1}{9} - \pi i\,\frac{e^{-6}}{9} = i\,\frac{\pi}{9}\left(1 - \frac{1}{e^{6}}\right)$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita