E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1er Apellido : 2do Apellido : Nombre :	Curso 19/20 (24.01.20) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1ª Parte

A. **(3 puntos)** Anotar en el recuadro la solución del siguiente problema de condición inicial:

$$x^{n+1} = x^n + y^n,$$
$$y^{n+1} = 4\,x^n - 2\,y^n,$$
$$x^0 = 3,\ y^0 = -2.$$

$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n}$

Autovalores

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda-6=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \lambda_2 = -3 \Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \end{Bmatrix} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^n = 2^{n+1} + (-3)^n \\ y^n = 2^{n+1} - 4\,(-3)^n \end{array}}$$

Solución general

$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = A\, 2^n \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + B(-3)^n \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \end{Bmatrix}$

Condiciones iniciales:

$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^0 = \begin{Bmatrix} A+B \\ A-4B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A=2,\ B=1 \Rightarrow$

$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = 2^{n+1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + (-3)^n \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \end{Bmatrix}$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I = \int_\Gamma \frac{\bar{z}\,\mathrm{Log}(2z\,i)}{|z|^2}\,dz = \int_\Gamma \underbrace{\frac{\mathrm{Log}(2zi)}{z}}_{f(z)}dz$$

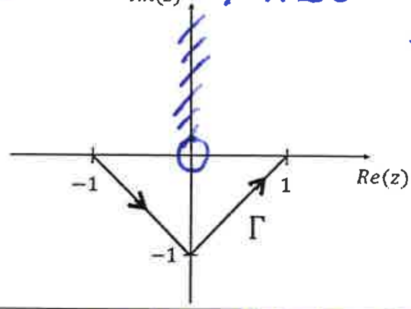
siendo Γ el contorno orientado de la figura, con origen en el punto -1 y final en el punto 1, ambos del eje real.

$F(z) = \dfrac{\mathrm{Log}^2(2zi)}{2}$ analítica en D

$F'(z) = f(z)\ \ \forall z \in D$

$\Rightarrow F(z)$ es primitiva de f y hay independencia del camino

f analítica en $\mathbb{C} - \{z = x+iy \ /\ x=0\ \ y \geq 0\} = D$



$$\boxed{I = F(1) - F(-1) = \pi \ln 2\, i}$$

C. **(3 puntos)** Dada la función $\quad f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2\,(e^{iz}+1)}$

Puntos singulares aislados: $z=0$

$e^{iz} = -1 = e^{i\pi(1+2k)}$ $\quad z_k = \pi(1+2k)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

$z=0$

$\lim\limits_{z\to 0} \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2(e^{iz}+1)}}_{z f(z)} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z} = 1/2 \Rightarrow$ $z=0$ Polo simple

$\operatorname{Res}[f,0] = \lim\limits_{z\to 0} z f(z) = 1/2$

- $z=0 \rightarrow$ Polo simple
  $\operatorname{Res}[f(z),0] = 1/2$
- $z_k = \pi(1+2k)$ $\quad k=0,\pm1,\dots$
  Sing. evitable $\rightarrow \operatorname{Res}[f(z),z_k]=0$

$\lim\limits_{z\to z_k} f(z) = \dfrac{1}{z_k^2} \lim \dfrac{\operatorname{sen} z}{e^{iz}+1} =$ (L'Hopital)

$= \dfrac{1}{z_k^2} \lim\limits_{z\to z_k} \dfrac{\cos z}{i e^{iz}} = \dfrac{1}{z_k^2}$ (acotado) $\Rightarrow$

Sing. evitable $\operatorname{Res}[f,z_k]=0$

Considerando el desarrollo en serie de Laurent en el entorno $0<|z|<R$, $\ f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$,

anotar en el siguiente recuadro la parte principal del desarrollo (potencias negativas de z), el valor del coeficiente c_0 así como el valor de R.

$f(z) = \dfrac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots}{z^2\left[2 + iz + \frac{i^2}{2!}z^2 + \dots\right]} =$

- Parte principal: $1/2z$
- $c_0 = -\,i/4$
- $R = \pi$

$R = \min\limits_{k\in\mathbb{Z}} |z_k - 0| = \pi$

$z=0$ Polo simple $\Rightarrow$

Parte principal $= \dfrac{c_{-1}}{z}$

Siendo $c_{-1} = \operatorname{Res}[f,0] = \dfrac{1}{2}$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

$= \dfrac{1}{2z}\left[1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} + \dots\right]\left[1 - \dfrac{iz}{2} + O(z^2)\right] = \dfrac{1}{2z} \overbrace{- \dfrac{i}{4}}^{c_0} + az + \dots$

$u(x,y) = x^n - y^n \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\quad u_x = n x^{n-1}$ $\quad u_{xx} = n(n-1)x^{n-2}$

$u_y = -n y^{n-1}$ $\quad u_{yy} = -n(n-1)y^{n-2}$

Ec de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$\Downarrow$

$n(n-1)(x^{n-2} - y^{n-2}) = 0 \iff$ $n=0$, $\left.\begin{matrix} n=1 \\ n=2 \end{matrix}\right\}$ enteros positivos

Con $n=1$ o $n=2$ $u(x,y)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$

D. **(3 puntos)** Sea la función real de dos variables reales definida como

$$u(x,y) = x^n - y^n, \qquad \text{con } n \text{ entero positivo}$$

Anotar los valores de n para los que u es la parte real de una función, $f(z)$, analítica en algún dominio del plano complejo.

$n=1$ $n=2$

Anotar la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x,y)$.

Se cumple Cauchy-Riemann

$v_y = u_x = n x^{n-1}$ (1)

$v_x = -u_y = n y^{n-1}$ (2)

(1) $v = n x^{n-1} y + g(x)$

$v_x = n(n-1)x^{n-2}y + g'(x)$

(2) $\Rightarrow \begin{cases} n=1: g'(x)=1 & g(x) = x + C \\ n=2: g'(x)=0 & g(x) = C \end{cases}$

$C \in \mathbb{R}$ (constante)

$n=1 \quad v(x,y) = x+y+C$ $n=2 \quad v(x,y) = 2xy + C$ $C \in \mathbb{R}$

Anotar la expresión analítica de $f(z)$, en función de $z = x+iy$, sabiendo que es una función no constante que cumple $f(1-i) = 0$.

$n=1 \to f(z) = x - y + i(x+y$

$= z(1+i) + iC$

$f(1-i) = 2 + iC \neq 0 \;\forall C \in \mathbb{R}$

$n=2 \quad f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C) =$

$= z^2 + iC$

$f(1-i) = -2i + iC = 0$

$\iff C = 2$

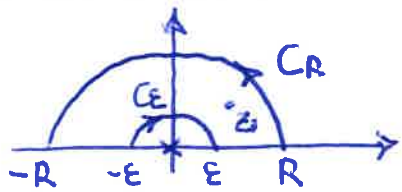
$f(z) = z^2 + 2i$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x(x^2 - 2x + 2)}\,dx = \mathrm{Re}\left[\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}\,dx}{x[(x-1)^2+1]}}^{I_1}\right]$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

$I = -\frac{\pi}{2} e^{-\pi}$



$f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z[(z-1)^2+1]} \to$ Puntos singulares

$z_0 = 0$ – Polo simple $\lim_{z\to 0} z f(z) = \frac{1}{2} = \mathrm{Res}[f,0]$

$\left.\begin{matrix} z_1 = 1+i \\ z_2 = 1-i \end{matrix}\right\}$ Polos simples

$$\underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0 \\ 0}} + \underbrace{\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx}_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} + \underbrace{\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz}_{\varepsilon\to 0} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}/z(z-z_2)}{z-z_1}, z_1\right]$$

$$I_1 + \pi i\,\underbrace{\mathrm{Res}[f,0]}_{1/2} = 2\pi i \frac{e^{iz_1}}{z_1(z_1-z_2)}$$

Por Lema:

$\lim_{|z|\to\infty} \dfrac{1}{z[(z-1)^2+1]} = 0$

$I_1 = -\frac{\pi}{2} e^{-\pi} + i\frac{\pi}{2}(1+e^{-\pi})$

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (24-01-2020)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 + t\cosh(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-2x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ uniformemente acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(2,2) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{8}{9+4(\exp(2)-3\exp(-2))}\right)}{\sqrt{9+4\,(\exp(2)-3\exp(-2))}}$.

(2) $u(2,2) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{8}{25+4(\exp(2)-3\exp(-2))}\right)}{\sqrt{25+4\,(\exp(2)-3\exp(-2))}}$.

(3) $u(2,2) = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{4}{13+2(\exp(2)-3\exp(-2))}\right)}{\sqrt{13+2\,(\exp(2)-3\exp(-2))}}$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) + 8w(t) = g(t) \ \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = 0$ si $t \in [0,\pi[$ $g(t) = \sin(t)$ si $t \in [\pi, 2\pi[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [2\pi,+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{1}{80}(5+\exp(-2\pi))$. **(6)** $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{1}{80}(5-\exp(-4\pi))$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \dfrac{1}{16}\left(1-\dfrac{\exp(-2\pi)}{5}(1+\exp(-2\pi)\right)$. **(8)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (24-01-2020)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^2 w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = \mathrm{i}.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w cumple que:

(9) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - \mathrm{i}(z + \frac{z^5}{20})}{z^9} = \dfrac{\mathrm{i}}{1440}$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} = w(\overline{z_1})$.

(10) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - \mathrm{i}(z + \frac{z^5}{20})}{z^9} = \dfrac{\mathrm{i}}{1800}$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(11) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - \mathrm{i}(z + \frac{z^5}{20})}{z^9} = \infty$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z^2 \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sinh(2z)}{4}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \sin(z) w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim_{z\to 0} \dfrac{w_{s1}(z)}{\ln(z)} = 1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0} \dfrac{w_{s2}(z)}{\sqrt[4]{z}} = 1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0} \dfrac{w_{s3}(z)}{\sqrt{z}} = 1$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Ampliación de Matemáticas.
Final Ordinario Parte 2 (Versión 1). (24-01-2020)

E. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = 1 - x^2 \quad \text{si } x \in [-1,1], \quad u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1,$$
$$u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times[0,+\infty[.$$

La función u verifica que:

(17) $\lim\limits_{y\to+\infty} y\,u(0,y) = \dfrac{4}{3\pi}$.
(18) $\lim\limits_{y\to+\infty} y\,u(0,y) = \dfrac{2}{\pi}$.
(19) $\lim\limits_{y\to+\infty} y\,u(0,y) = \dfrac{8}{3\pi}$.
(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t.$

Ⓐ Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1+t\cosh t)(i\omega)^2\,\hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$.

Integrando la ecuación de primer orden se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C\exp(-\omega^2(t+t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t))$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}[\exp(-\alpha x^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right)$, e imponiendo la condición inicial se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{4\alpha}+t+t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t+1\right)\right)$

Tomando la transformada inversa se obtiene

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha(t+t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t+1)}}\exp\left(\frac{-\alpha x^2}{1+4\alpha(t+t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t+1)}\right)$$

(B) La funcion g puede escribirse en la forma

$$g(t) = \big(H(t-\pi) - H(t-2\pi)\big)\,\mathrm{sen}\,t = H(t-\pi)\,\mathrm{sen}(t-\pi+\pi) - H(t-2\pi)\,\mathrm{sen}(t-2\pi+2\pi) = -H(t-\pi)\,\mathrm{sen}(t-\pi) - H(t-2\pi)\,\mathrm{sen}(t-2\pi).$$

Tomando la transformada de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $(z^2+2z+8)\,\mathcal{L}[w(t)](z) = 1 + \mathcal{L}[g(t)](z)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[\mathrm{sen}\,t](z) = \frac{1}{z^2+1}$ y $\mathcal{L}[H(t-a)\,f(t-a)](z) = \exp(-az)\,\mathcal{L}[f(t)](z)$ para $a>0$, se obtiene $\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{1}{z^2+2z+8}\left[1 - \frac{\exp(-\pi z)}{z^2+1}\big(1+\exp(-\pi z)\big)\right]$.

Por tanto, $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{80}\Big(5 - \exp(-2\pi)\big(1+\exp(-2\pi)\big)\Big)$.

(C) La solución del problema de Cauchy del enunciado es una función entera. Por tanto, $w(z) = iz + \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación se obtiene $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, $c_5 = \frac{i}{20}$, $c_7 = c_8 = 0$, $c_9 = \frac{c_5}{9\cdot 8}$, y $c_{\ell+2} = \frac{c_{\ell-2}}{(\ell+2)(\ell+1)}$ si $\ell \geq 7$.

Por tanto, $\lim_{z\to 0} \frac{w(z) - i\left(z + \frac{z^5}{20}\right)}{z^9} = \frac{i}{1440}$.

y $\overline{w(0)} = w(\bar{0}) = w(0) = 0$.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{z}\,\frac{\operatorname{sh}(2z)}{4z}\,\frac{dw}{dz} + \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}$$

El punto $z=0$ es un punto singular regular para la ecuación anterior. Cerca de $z=0$ el comportamiento de la solución está determinado por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$.

Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $w(z) = C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\,p_2(z)$ donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un cierto entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$.

Para todo $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ con $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$

el $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w(z)}{\sqrt[4]{z}} = 0$ si $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$ $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w(z)}{\sqrt[4]{z}} = \infty$ si $C_2 \neq 0$.

si $C_2 = 0$ y $C_1 = 1$ $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w(z)}{\sqrt{z}} = p_1(0) = 1$.

(E) La solución del problema del enunciado puede escribirse como

$$u(0,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{y}{t^2+y^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)y}{t^2+y^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2+y^2-y^2)y}{t^2+y^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(-y+\frac{(1+y^2)y}{t^2+y^2}\right)dt=\frac{1}{\pi}\left(-2y+(1+y^2)\,2\arctg\frac{1}{y}\right).$$

Por tanto, $\lim\limits_{y\to+\infty} y\,u(0,y)=\lim\limits_{y\to+\infty} y\,\frac{2}{\pi}\left(-y+(1+y^2)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{3}\frac{1}{y^3}+o\left(\frac{1}{y^3}\right)\right)\right)=\frac{4}{3\pi}$