Transformadas de Fourier y Laplace

Transformadas de Fourier

3.1.1 (segundo parcial 14/15)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$$

$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0.+\infty[$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp(-\mathrm{i}\omega^3 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(2) $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp(\mathrm{i}\omega^3 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(3) $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp(-\omega^3 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \sqrt{\pi}\exp(-\frac{\omega^2}{4})$.

$\mathcal{F}$ respecto a x

$u(x,t) \longrightarrow \hat{u}(\omega,t)$

Aplicamos $\mathcal{F}$ a la ecuación:

$$\hat{u}_t + (i\omega)^3\hat{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\ln(\hat{u}))}{\partial t} = i\omega^3 \Rightarrow$$

Integramos respecto a t

$$\Rightarrow \ln(\hat{u})\Big|_0^t = it\omega^3 \Rightarrow \ln(\hat{u}(\omega,t)) - \ln(\hat{u}(\omega,0)) = it\omega^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = e^{it\omega^3}\cdot \underbrace{\hat{u}(\omega,0)}_{\text{Enunciado } \mathcal{F}(u(x,0)) = \hat{u}(\omega,0)} = \sqrt{\pi}\, e^{it\omega^3 - \omega^2/4}$$

Es la (2)

3.1.2 (segundo parcial 16/17)

A. La transformada de Fourier, $F = F(\omega)$, de la función $f(t) = \frac{\pi}{t^2+\pi^2}$ es (NOTA.- Téngase en cuenta que la transformada de $\mathrm{e}^{-a|t|}$, con $a > 0$, es $f(t) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$):

(1) $\pi\,\mathrm{e}^{\pi|\omega|}$.

(2) $\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-(|\omega|/\pi)}$.

(3) $\pi\,\mathrm{e}^{-\pi|\omega|}$.

(4) $\pi\,\mathrm{e}^{-(|\omega|/\pi)}$.

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{\omega^2+a^2} \quad ; \quad \mathcal{F}[e^{-\pi|t|}] = 2\cdot\frac{\pi}{\omega^2+\pi^2}$$

Aplicamos $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[e^{-\pi|t|}]] = 2\cdot\mathcal{F}\underbrace{\left[\frac{\pi}{\omega^2+\pi^2}\right]}_{\text{Esto es lo que queremos, } F}$$

$$\Rightarrow F(t) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot e^{-\pi|-t|} = \pi e^{-\pi|t|} \quad \text{+ opción (3)}$$

↳ Reciprocidad

3.1.3 (segundo parcial 17/18)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+2t)u \quad \text{en}(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$u(x,0) = x\exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t)$ acotada en $\mathbb{R}$ para cada $t \in]0,+\infty[$.

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-i\omega x)dx$.
Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(1,1) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{4}\exp(\frac{3}{2})$. **(2)** $\hat{u}(2,2) = -i\sqrt{\pi}\exp(-3)$.

(3) $\hat{u}(4,4) = -i2\sqrt{\pi}\exp(-24)$. **(4)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

$\mathcal{F}$: $\hat{u}_t = -\omega^2 \hat{u} + (1+2t)\cdot \hat{u}$ (t es de para $\tilde{x}$).

$$\frac{\partial \ln(\hat{u})}{\partial t} = -\omega^2+1+2t \overset{\int_0^t dt}{\Rightarrow} \ln(\hat{u}(\omega,t)) - \ln(\hat{u}(\omega,0)) = -\omega^2 t + t + t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \hat{u}(\omega,0)\cdot e^{t^2+t-\omega^2 t}$$

Ahora, $\hat{u}(\omega,0) = \mathcal{F}(u(x,0)) = ?$

Sabemos $\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$; Luego $\mathcal{F}[xe^{-x^2}] = i\frac{d}{d\omega}\hat{u}[e^{-x^2}] =$

$$= i\cdot\left(-\frac{2\omega}{4}\right)\cdot\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4} =$$

$$= -i\frac{\omega}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4}$$

$$\hat{u}(\omega,t) = -\frac{i\omega}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4 - \omega^2 t + t^2 + t}$$

$\hat{u}(2,2)$ es la correcta. $-\frac{\omega^2}{4} - \omega^2 t + t^2 + t\Big|_{(2,2)} = -3$

3.1.4 (segundo parcial 19/20)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+\tanh(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-2x^2) \quad x\in\mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ uniformemente acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-i\omega x)dx$. La función u verifica que:

(1) $u(2,2) = \frac{1}{\sqrt{33+16\ln(\cosh(2))}}\exp(-\frac{16}{33+16\ln(\cosh(2))})$.

(2) $u(3,3) = \frac{1}{\sqrt{37+12\ln(\cosh(3))}}\exp(-\frac{27}{37+12\ln(\cosh(3))})$.

(3) $u(4,4) = \frac{1}{\sqrt{33+8\ln(\cosh(4))}}\exp(-\frac{32}{33+8\ln(\cosh(4))})$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$.

$$\hat{u}_t = (1+\tanh(t))\cdot(-1)\,\omega^2\,\hat{u} \Rightarrow \qquad \int dt$$

$$\Rightarrow \ln(\hat{u})_t = -(1+\tanh t)\,\omega^2 = -\omega^2 - \omega^2\tanh(t) \Rightarrow$$

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}(\omega,0)\cdot e^{\left[-\omega^2\int_0^t (1+\tanh t)\,dt\right]}$$

Ahora, $\int \tanh(t)\,dt$ se hace así: $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ ← Aquí, sí, se hace sustitución.

Es inmediata; $\ln(\cosh t)' = \frac{\sinh t}{\cosh t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\omega^2}{8}}\cdot e^{-\omega^2 t}\cdot e^{-\omega^2\ln(\cosh t)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\omega^2\cdot\overbrace{\left(\frac{1}{8}+t+\ln\cosh t\right)}^{b}}$$

Nos piden u. Aplicamos $\mathcal{F}^{-1}$:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-b\omega^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathcal{F}\left[e^{-b\omega^2}\right](-\omega)\cdot\frac{1}{2\pi} =$$

$$* \ \mathcal{F}^{-1}_\omega[f(\omega)](x) = \mathcal{F}_\omega[f(\omega)](-x)\cdot\frac{1}{2\pi} \qquad = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{b}}\cdot e^{-\frac{(-\omega)^2}{4b}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}+t+\ln\cosh(t)}}\cdot e^{\frac{-x^2}{4\cdot\left(\frac{1}{8}+t+\ln\cosh t\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+8t+8\ln\cosh t}}\cdot e^{\frac{-x^2}{1/2+4t+4\ln\cosh t}} \quad \Big\{ \text{compatible con (3)}$$

sólo compatible con (3)

3.1.5 (segundo parcial 19/20)

E. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = 1 - x^2 \quad \text{si } x \in [-1,1], \quad u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1,$$
$$u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times[0,+\infty[.$$

La función u verifica que:

(17) $u(3,1) = \frac{1}{\pi}\left(-2 + 3\ln(\frac{17}{5}) - 7(\arctan(4) - \arctan(2))\right)$.

(18) $u(3,1) = \frac{1}{\pi}\left(3\ln(\frac{17}{5}) - 7(\arctan(4) - \arctan(2))\right)$.

(19) $u(3,1) = \frac{1}{\pi}\left(-2 + 3\ln(\frac{17}{5}) - 16(\arctan(4) - \arctan(2))\right)$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt.$

Función y limite nulo.

$\boxed{E}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ con $u(x,0) = 1 - x^2$ para $-1 \le x \le 1$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{y}{(x-t)+y^2}\,dt \qquad ¿u(3,1)?$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1-t^2}{(3-t)+1}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1-t^2-6t+6t+10-10}{1+9+t^2-6t}\,dt$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(-1 + \frac{-6t+11}{1+(t-3)^2}\right)dt \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} -1 + \frac{-6(t-3)+7}{1+(t-3)^2}\,dt$$

Necesito la derivada

$$\frac{1}{\pi}\left(-t - 3\ln((t-3)^2+1) + 7\operatorname{arctg}(t-3)\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-2 - 3\ln(5) + 3\ln(17) + 7\operatorname{arctg}(-2) - 7\operatorname{arctg}(-4)\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\left(-2 + 3\ln\frac{17}{5} - (\operatorname{arctg}(4) - \operatorname{arctg} 2)\right)}$$

$$f(x) = (1-x^2)\cdot\left[H(x-1) - H(x+1)\right]$$

$$\tilde{\mathcal{F}}[f] = \frac{2e^{-i\omega}\left(\omega + e^{2i\omega}(\omega+i) - i\right)}{\omega^3}$$

* válido para Fourier, no para Laplace $\qquad = \pi e^{-y|\omega|}$

$$u = \frac{1}{\pi} f * \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{\pi}\tilde{\mathcal{F}}_x[f]\cdot\tilde{\mathcal{F}}_x\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = \frac{1}{\cancel{\pi}}\,\frac{2e^{-i\omega}\left(\omega+e^{2i\omega}(\omega+i)-i\right)}{\omega^3}\cdot\cancel{\pi}\, e^{-y|\omega|}$$

$$\hat{u}(\omega,y) = \frac{2\left(\omega+e^{2i\omega}(\omega+i)-i\right)}{e^{i\omega+y|\omega|}\cdot\omega^3}$$

Se podría, pero el cálculo en complejo.

3.1.6 (final ordinario 13/14)

F. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{para } (x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-x^2)\in\mathbb{R},$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0, \quad \text{para todo } t\in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u}\ :\ \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to\ \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(21) $\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\dfrac{\cos(2)+\sin(2)}{\exp(5)}$.

(22) $\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\dfrac{\cos(2)+\mathrm{i}\sin(2)}{\exp(5)}$.

(23) $\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\dfrac{\cos(2)+\mathrm{i}\sin(2)}{\exp(9/4)}$.

(24) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a}\right)\right) = \exp(-\omega^2 a),\ a>0.$

$a = 1/4$

$$\tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi/4}}e^{-x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\mathcal{F}}(e^{-x^2}) = e^{-\omega^2/4} \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}$$

$\overline{\hat{u}(\omega,t)}$: $\quad \hat{u}_t = -\omega^2\hat{u} + i\omega\hat{u} \Rightarrow \ln(\hat{u})_t = -\omega^2 + i\omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \hat{u}(\omega,0)\cdot e^{(-\omega^2+i\omega)t}$$

$$\overline{\hat{u}(\omega,0)} = \mathcal{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4} \Rightarrow \boxed{\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\omega^2}{4}-t\omega^2+ti\omega}}$$

$$\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\,e^{-1-4}\cdot e^{2i} \Rightarrow \text{es la } (22)$$

3.1.7 (final ordinario 14/15)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$$

$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},\ u(x,t)$ acotada en $\mathbb{R}$ para cada $t \in]0.+\infty[$.

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-i\omega x)dx$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp(\omega^2 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(2) $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp(-(\omega^2+1)t - \frac{\omega^2}{4})$.

(3) $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp(-\omega^2 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \sqrt{\pi}\exp(-\frac{\omega^2}{4})$.

$\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4}$

$\hat{u}_t = -\omega^2\hat{u} - \hat{u} \Rightarrow \dots \Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \hat{u}(\omega,0)\, e^{-(\omega^2+1)t} \Rightarrow \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4} - \omega^2 t - t}$

$\Rightarrow$ Opción (2)

3.1.8 (final extraordinario 15/16)

B. Considérese el problema de contorno definido por

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$$u(x,0) = \exp(-x^2),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = (4x^2-2)\exp(-x^2) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la transformada de Fourier en la variable x de la solución del problema de contorno que se acaba de definir . Sobre la función $\hat{u}(\omega,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\exp(-i\omega x)dx$ se puede afirmar que:

(5) $\hat{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2},1) = 0$.

(6) $\hat{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2},1) = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{\pi}{16})$.

(7) $\hat{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2},1) = -\sqrt{2\pi}\exp(-\frac{\pi}{16})$.

(8) No es cierta ninguna de las tres

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-bx^2)) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

$\hat{u}: \quad \omega^4\hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0 \Rightarrow \hat{u}_{yy} = -\omega^4\hat{u}$

- Las ecuaciones de la forma $\ddot{y} = ay$ tienen $\cos\sqrt{a}x$, $\operatorname{sen}\sqrt{a}x$ como soluciones.
- $\hat{u}_{yy} = -\omega^4\hat{u}$ tiene como sol. general:

$$\hat{u}(\omega,y) = A(\omega)\cdot\cos(\omega^2 y) + B(\omega)\operatorname{sen}(\omega^2 y).$$

Ahora determinemos $A(w)$, $B(w)$ por las cond. iniciales.

- $\hat{u}(w,0) = \tilde{\mathcal{F}}(u(x,0)) = \tilde{\mathcal{F}}(e^{-x^2}) = \sqrt{\pi}\, e^{-w^2/4}$

$\Downarrow$ $A(w) = \sqrt{\pi}\, e^{-w^2/4}$

- $u_y(x,0) = (4x^2-2)e^{-x^2} \Rightarrow \hat{u}_y(w,0) = \tilde{\mathcal{F}}\left[(4x^2-2)e^{-x^2}\right]$

$$\hat{u}_y(w,0) = w^2 B(w), \qquad \tilde{\mathcal{F}}\left[(4x^2-2)e^{-x^2}\right] \overset{?}{=} -w^2 e^{-w^2/4}\cdot\sqrt{\pi}$$

$?$ $(e^{-x^2})' = -2x e^{-x^2}$; $(e^{-x^2})'' = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = (4x^2-2)e^{-x^2}$.

Luego es $\tilde{\mathcal{F}}\left[\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2}\right] = -w^2 \cdot \tilde{\mathcal{F}}\left[e^{-x^2}\right] = -w^2 e^{-w^2/4}\cdot\sqrt{\pi}$

Luego $B(w) = -e^{-w^2/4}\cdot\sqrt{\pi}$

Sol: $\hat{u}(w,y) = \sqrt{\pi}\, e^{-w^2/4}\cdot\left[\cos(w^2 y) - \operatorname{sen}(w^2 y)\right]$

$\Rightarrow \hat{u}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1\right) = 0$

3.1.9 (final ordinario 15/16)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+3t^2)u \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t)$ acotada en $\mathbb{R}$ para cada $t \in]0,+\infty[$.

Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy que se acaba de definir . Sobre la función u se puede afirmar que:

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} (u(x,1)+u(x,2))\exp(\frac{x^2}{13} - 30) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (u(x,2)+u(x,3))\exp(\frac{x^2}{13} - 30) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} (u(x,3)+u(x,4))\exp(\frac{x^2}{13} - 30) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-bx^2)) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

Aplicamos $\tilde{\mathcal{F}}_x$, para que el $(1+3t^2)$ no cause problemas:

$\hat{u}_t = -w^2\hat{u} + (1+3t^2)\hat{u} \Rightarrow \hat{u}_t/\hat{u} = -w^2 + 1 + 3t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{u}(w,t) = \hat{u}(w,0)\cdot e^{-w^2 t + t + t^3}$; $\hat{u}(w,0) = \sqrt{\pi}\, e^{-w^2/4} \Rightarrow$

$$\boxed{\hat{v}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4 - \omega^2 t + t + t^3}} = \sqrt{\pi}\, e^{t+t^3} \cdot e^{-\omega^2 \cdot \left(t+\frac{1}{4}\right)} \quad (*)$$

Calculemos u aplicando $\mathcal{F}^{-1}$: $t + \frac{1}{4} = \frac{1}{4b} \Rightarrow \frac{4t+1}{4} = \frac{1}{4b} \Rightarrow b = \frac{1}{4t+1}$

Es decir, $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2/4b}\right) = e^{-bx^2} \cdot \sqrt{\frac{b}{\pi}}$, luego tomando $\mathcal{F}^{-1}$ en $(*)$:

$$u(x,t) = \sqrt{\pi}\, e^{t+t^3} \cdot e^{-x^2/4t+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{(4t+1)\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \cdot e^{t+t^3-\frac{x^2}{4t+1}}$$

Al tomar límite $x \to \infty$, para que dé algo $\neq 0$ la parte de la x^2 en exp. se tiene que anular

Para que $e^{\frac{x^2}{13}}$ se anule con $t=3$; es $u(x,3)$ la que va a contar. Por otro lado, $u(x,2) = \cdots e^{-x^2/9} \Rightarrow u(x,2) \cdot e^{x^2/13}$ se va a 0.

$u(x,4) = \cdots = e^{-x^2/17} \Rightarrow u(x,4) \cdot e^{x^2/13}$ se va a ∞

Con $u(x,2)$ y $u(x,3)$ logramos un límite finito, que lo da $u(x,3)$

$u(x,3) \cdot e^{x^2/13} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot e^{30}$. Es decir es la (6).

3.1.10 (final ordinario 16/17)

A. Sea $F = F(\omega)$ la transformada de Fourier del producto de convolución $(f * f)$, donde $f = f(x)$ es la funcion característica del intervalo $[-1,1]$:

$$f(x) = 1, \text{ en } -1 \leq x \leq 1; \quad f(x) = 0, \text{ en } x < -1 \text{ y } x > 1.$$

La funcion F cumple:

(1) $F(\omega) = \dfrac{(\sin\omega)^2}{2\omega^2}$. **(2)** $F(\omega) = \dfrac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

(3) $F(0) = 4$. **(4)** $F(\pi/2) = 0$.

· Calculemos $\mathcal{F}[f]$ primero, y luego multiplicamos

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\, dt = \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i} = \frac{2\,\text{sen}(\omega)}{\omega}$$

$\mathcal{F}[f*f](\omega) = 4\,\dfrac{\text{sen}^2(\omega)}{\omega^2}$ $\quad F(0) = 4$ (tomando el límite)

3.1.11 (final ordinario 18/19)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+\ln(1+t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-i\omega x)dx$. La función u verifica que:

(1) $u(1,e^2-1) = \frac{1}{\sqrt{1+2e^2}}\exp(-\frac{1}{1+2e^2}-1+e^2)$.

(2) $u(2,e^3-1) = \frac{1}{\sqrt{1+12e^3}}\exp(-\frac{4}{1+12e^3}-1+e^3)$.

(3) $u(3,e^4-1) = \frac{1}{\sqrt{1+4e^4}}\exp(-\frac{9}{1+4e^4}-1+e^4)$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

$\hat{u}$: $\quad \hat{u}_t = (1+\ln(1+t))\cdot(-\omega^2)\,\hat{u} + \hat{u} \Rightarrow$ $\qquad \hat{u}(\omega,0) = \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4}$

$\Rightarrow \ln(\hat{u})_t = 1 - \omega^2(1+\ln(1+t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(\hat{u}(\omega,t)) - \ln(\hat{u}(\omega,0)) = t - \omega^2 t - \omega^2\int_0^t \ln(1+s)\,ds$

$= t - \omega^2 t - \omega^2\cdot[(t+1)\ln(t+1) - t] =$

$= t - \omega^2(t+1)\ln(t+1)$

$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4 + t - \omega^2(t+1)\ln(t+1)} =$

Calculemos transformada inversa

$= \sqrt{\pi}\cdot e^t\cdot e^{-\omega^2\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{4}+(t+1)\ln(t+1)\right]}_{1/4b}}$

$/\ \mathcal{F}^{-1}[e^{-\omega^2/4b}] = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\cdot e^{-bx^2}$

$s = (t+1)\ln(t+1)$

$\frac{1}{4b} = \frac{1}{4} + s = \frac{1+4s}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{1+4s}}$

$u(x,t) = \sqrt{\pi}\, e^t\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-bx^2} = e^t\cdot\sqrt{\frac{1}{1+4(1+t)\ln(1+t)}}\cdot e^{-\frac{1}{1+4(1+t)\ln(1+t)}x^2}$

(2) es correcta: $u(2,e^3-1) = e^{e^3-1-\frac{4}{1+4\cdot 3e^3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+12e^3}} = \sqrt{\frac{1}{1+12e^3}}\cdot e^{e^3-1-\frac{4}{1+12e^3}}$

$\hookrightarrow (1+t)\ln(1+t) = \ln\left((1+t)^{1+t}\right) = \ln\left((e^3)^{e^3}\right) =$
$= e^3\cdot 3$