Transformadas de Fourier y Laplace

Transformadas de Fourier

3.1.1 (segundo parcial 14/15)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t)$ acotada en $\mathbb{R}$ para cada $t \in]0. +\infty[$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u, es decir $\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) \exp(-\mathrm{i}\omega x) \mathrm{d}x$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi} \exp(-\mathrm{i}\omega^3 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(2) $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi} \exp(\mathrm{i}\omega^3 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(3) $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi} \exp(-\omega^3 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \sqrt{\pi} \exp(-\frac{\omega^2}{4})$.

3.1.2 (segundo parcial 16/17)

A. La transformada de Fourier, $F = F(\omega)$, de la función $f(t) = \dfrac{\pi}{t^2 + \pi^2}$ es (NOTA.- Téngase en cuenta que la transformada de $\mathrm{e}^{-a|t|}$, con $a > 0$, es $f(t) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$):

(1) $\pi \, \mathrm{e}^{\pi|\omega|}$.

(2) $\frac{1}{\pi} \mathrm{e}^{-(|\omega|/\pi)}$.

(3) $\pi \, \mathrm{e}^{-\pi|\omega|}$.

(4) $\pi \, \mathrm{e}^{-(|\omega|/\pi)}$.

3.1.3 (segundo parcial 17/18)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+2t)u \quad \text{en}(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$$u(x,0) = x\exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$.
Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(1,1) = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{\pi}}{4}\exp(\frac{3}{2})$. **(2)** $\hat{u}(2,2) = -\mathrm{i}\sqrt{\pi}\exp(-3)$.

(3) $\hat{u}(4,4) = -\mathrm{i}2\sqrt{\pi}\exp(-24)$. **(4)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

3.1.4 (segundo parcial 19/20)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+\tanh(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$$u(x,0) = \exp(-2x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,t) \text{ uniformemente acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$.
La función u verifica que:

(1) $u(2,2) = \frac{1}{\sqrt{33+16\ln(\cosh(2))}}\exp(-\frac{16}{33+16\ln(\cosh(2))})$.

(2) $u(3,3) = \frac{1}{\sqrt{37+12\ln(\cosh(3))}}\exp(-\frac{27}{37+12\ln(\cosh(3))})$.

(3) $u(4,4) = \frac{1}{\sqrt{33+8\ln(\cosh(4))}}\exp(-\frac{32}{33+8\ln(\cosh(4))})$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

3.1.5 (segundo parcial 19/20)

E. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = 1 - x^2 \quad \text{si } x \in [-1,1], \quad u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1,$$
$$u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R} \times [0,+\infty[.$$

La función u verifica que:

(17) $u(3,1) = \frac{1}{\pi}\left(-2 + 3\ln(\frac{17}{5}) - 7(\arctan(4) - \arctan(2))\right)$.

(18) $u(3,1) = \frac{1}{\pi}\left(3\ln(\frac{17}{5}) - 7\,(\arctan(4) - \arctan(2))\right)$.

(19) $u(3,1) = \frac{1}{\pi}\left(-2 + 3\ln(\frac{17}{5}) - 16(\arctan(4) - \arctan(2))\right)$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t.$

3.1.6 (final ordinario 13/14)

F. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-x^2) \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0, \quad \text{para todo } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(21) $\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\frac{\cos(2)+\sin(2)}{\exp(5)}$.

(22) $\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\frac{\cos(2)+\mathrm{i}\sin(2)}{\exp(5)}$.

(23) $\hat{u}(2,1) = \sqrt{\pi}\frac{\cos(2)+\mathrm{i}\sin(2)}{\exp(9/4)}$.

(24) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota $\mathcal{F}(\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\exp(-\frac{x^2}{4a})) = \exp(-\omega^2 a), a > 0.$

3.1.7 (final ordinario 14/15)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$$

$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},\ u(x,t)$ acotada en $\mathbb{R}$ para cada $t \in]0.+\infty[$.

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u, es decir $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-i\omega x)dx$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp(\omega^2 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(2) $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp(-(\omega^2+1)t - \frac{\omega^2}{4})$.

(3) $\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\exp(-\omega^2 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \sqrt{\pi}\exp(-\frac{\omega^2}{4})$.

3.1.8 (final extraordinario 15/16)

B. Considérese el problema de contorno definido por

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$$u(x,0) = \exp(-x^2),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = (4x^2-2)\exp(-x^2) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la transformada de Fourier en la variable x de la solución del problema de contorno que se acaba de definir . Sobre la función $\hat{u}(\omega,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\exp(-i\omega x)dx$ se puede afirmar que:

(5) $\hat{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2},1) = 0$.

(6) $\hat{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2},1) = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{\pi}{16})$.

(7) $\hat{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2},1) = -\sqrt{2\pi}\exp(-\frac{\pi}{16})$.

(8) No es cierta ninguna de las tres

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-bx^2)) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

3.1.9 (final ordinario 15/16)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+3t^2)u \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución problema de Cauchy que se acaba de definir . Sobre la función u se puede afirmar que:

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} (u(x,1) + u(x,2)) \exp(\frac{x^2}{13} - 30) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (u(x,2) + u(x,3)) \exp(\frac{x^2}{13} - 30) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} (u(x,3) + u(x,4)) \exp(\frac{x^2}{13} - 30) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-bx^2)) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

3.1.10 (final ordinario 16/17)

A. Sea $F = F(\omega)$ la transformada de Fourier del producto de convolución $(f * f)$, donde $f = f(x)$ es la funcion característica del intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = 1, \text{ en } -1 \le x \le 1; \quad f(x) = 0, \text{ en } x < -1 \text{ y } x > 1.$$

La funcion F cumple:

(1) $F(\omega) = \frac{(\sin\omega)^2}{2\omega^2}$.

(2) $F(\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

(3) $F(0) = 4$.

(4) $F(\pi/2) = 0$.

3.1.11 (final ordinario 18/19)

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+\ln(1+t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \quad \text{en } (x,t)\in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x\in\mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t\in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $u(1,\mathrm{e}^2-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^2}} \exp(-\dfrac{1}{1+2\mathrm{e}^2} - 1 + \mathrm{e}^2)$.

(2) $u(2,\mathrm{e}^3-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+12\mathrm{e}^3}} \exp(-\dfrac{4}{1+12\mathrm{e}^3} - 1 + \mathrm{e}^3)$.

(3) $u(3,\mathrm{e}^4-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4\mathrm{e}^4}} \exp(-\dfrac{9}{1+4\mathrm{e}^4} - 1 + \mathrm{e}^4)$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$.

Transformadas de Laplace

3.2.1 (segundo parcial 14/15)

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{1}{1+s^3}.$$

3.2.2 (segundo parcial 15/16)

A. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) la expresión de la transformada de Laplace, $G = G(s)$, de la **derivada** de la función:

$$f(t) = \mathrm{e}^t\cos(3t), \quad t\in[0,\infty[.$$

3.2.3 (segundo parcial 16/17)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 5w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{dw}{dt}(0)=1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \sin(t)$ si $t \in [0,\pi[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [\pi,+\infty[$. Sobre la función w se puede afirmar que:

(5) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(3) = \frac{11-\exp(-3\pi)}{200}$.

(6) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(3) = \frac{11+\exp(-3\pi)}{200}$.

(7) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(3) = \frac{1-\exp(-3\pi)}{200}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

3.2.4 (segundo parcial 17/18)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 4\frac{dw}{dt}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{dw}{dt}(0)=1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = t(t-1)$ si $t \in [0,1[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [1,+\infty[$. Sobre la transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ se puede afirmar que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{2-\exp(-2)}{40}$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{20}$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{\exp(-2)}{40}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

3.2.5 (segundo parcial 19/20)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0)=0,\ \frac{dw}{dt}(0)=1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \cos(t)$ si $t \in [0,\frac{\pi}{2}[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [\frac{\pi}{2},+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{80}(6+\exp(-\pi))$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{80}(7+\exp(-\pi))$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{80}(7-\exp(-\pi))$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

3.2.6 (final ordinario 13/14)

E. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{para } t \in]0, +\infty[,$$

$$u_1(0) = u_2(0) = 1.$$

Sean $D \subset \mathbb{C}$ un dominio, $\tilde{u}_1 : D \to \mathbb{C}$ y $\tilde{u}_2 : D \to \mathbb{C}$ las transformadas de Laplace de las funciones u_1 y u_2. Sobre las funciones $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ se puede afirmar que:

(17) $\tilde{u}_1(t) = \dfrac{s^3 - 3s^2 - 4}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$, $\tilde{u}_2(t) = \dfrac{s^3 + 5s^2 + 5}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$.

(18) $\tilde{u}_1(t) = \dfrac{s^3 - 3s^2 - 4}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$, $\tilde{u}_2(t) = \dfrac{s^3 + 3s^2 + 5}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$.

(19) $\tilde{u}_1(t) = \dfrac{s^3 - s^2 - 4}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$, $\tilde{u}_2(t) = \dfrac{s^3 + 3s^2 + 5}{(s^2+1)((s-1)^2+6)}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

3.2.7 (final extraordinario 14/15)

A. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) la expresión de la transformada de Laplace, $F = F(s)$, de la función:

$$f(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos(2t), \quad t \in [0, \infty[.$$

3.2.8 (final ordinario 14/15)

A. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) la expresión de la función $f = f(t)$, para $t \in [0, \infty[$, cuya transformada de Laplace es:

$$F(s) = \frac{3s}{s^2 - s - 2}.$$

3.2.9 (final extraordinario 15/16)

A. La solución $u = u(x)$ de la ecuación integral:

$$u(x) + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-s)} u(s)\mathrm{d}s = 1, \quad \forall x \in [0, \infty[.$$

es

(1) $u(x) = (1 - x)$. **(2)** $u(x) = (1 + x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

(3) $u(x) = (1 + x)$. **(4)** $u(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

(Nota.- Para resolver el problema, se sugiere tomar transformadas de Laplace en la ecuación dada)

3.2.10 (final ordinario 15/16)

A. Sea la función $u = u(x)$ que cumple la relación integral:

$$u(x) + \int_0^x e^{(x-s)} u(s) ds = 1, \quad \text{para todo } x \in [0, \infty[.$$

Su transformada de Laplace, $U(s) = \int_0^\infty u(x) e^{-sx} dx$, es:

(1) $U(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2}$. (2) $U(s) = \dfrac{s+1}{s^2}$.

(3) $U(s) = \dfrac{s}{(s-1)}$. (4) $U(s) = \dfrac{s-1}{s^2}$.

(NOTA.- Tomar directamente transformadas de Laplace en la ecuación dada)

3.2.11 (final ordinario 16/17)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2 w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 2w(t) = g(t) \text{ en }]0, +\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{dw}{dt}(0) = 1,$$

donde $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = t^2 - t$ si $t \in [0, 1[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [1, +\infty[$. Sobre la función w se puede afirmar que:

(5) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(2) = \dfrac{3 - \exp(-2)}{20}$.

(6) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(2) = \dfrac{3 + \exp(-2)}{20}$.

(7) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(2) = \dfrac{2 - \exp(-2)}{20}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

3.2.12 (final ordinario 18/19)

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2 w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0, +\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{dw}{dt}(0) = 1,$$

donde $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \pi - t$ si $t \in [0, \pi[$ y $g(t) = \sin(t)$ si $t \in [\pi, +\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi + \dfrac{\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi - \dfrac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(19 + \dfrac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

3.2.13 (procedencia desconocida)

Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = x(1-x^2) \quad \text{si } x \in [-1,1], \quad u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1,$$

$$u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times[0,+\infty[, \quad \text{y} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(s,y)|ds \text{ acotada en } [0,+\infty[$$

La función u verifica que:

1. $u(1,4) = \frac{1}{\pi}\left(-16 - 24\ln(1+\frac{1}{4}) + 48\arctan(\frac{1}{2})\right)$.
2. $u(1,4) = \frac{1}{\pi}\left(-16 - 28\ln(1+\frac{1}{4}) + 48\arctan(\frac{1}{2})\right)$.
3. $u(1,4) = \frac{1}{\pi}\left(-16 - 28\ln(1+\frac{1}{4}) + 50\arctan(\frac{1}{2})\right)$.
4. No es cierta ninguna de las tres respuestas anteriores.