Solución Parcial I (26-10-2021)

Ejercicio A

Solución general de la ecuación en diferencias

$$y^{n+1} - y^n - y^{n-1} + y^{n-2} = a, \qquad n \geq 0, \qquad a > 0$$

Ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes. Solución: $y^n = y_h^n + y_p^n$

- **Solución general de la ecuación homogénea asociada:** y_h^n

Polinomio característico de la ecuación (se prueban soluciones en la forma $y^n = \lambda^n$):

$$y^{n+1} - y^n - y^{n-1} + y^{n-2} = \lambda^{n+1} - \lambda^n - \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}\left(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1\right) = 0$$

resultando $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & \alpha_1 = 2 \ \textbf{(doble)} \\ \lambda_2 = -1 & \alpha_2 = 1 \ \textbf{(simple)} \end{cases}$

$$y_h^n = (C_0 + C_1 n)\, 1^n + C_2(-1)^n = (C_0 + C_1 n) + C_2(-1)^n$$

- **Solución particular de la ecuación completa:** y_p^n

El término forzante, $g(n) = a$, es solución de una ecuación homogénea de coeficientes constantes, con raíz del polinomio característico $r = 1 = \lambda_1$. Aplicamos el método del anulador.

$$g(n) = P_1^*(n) 1^n = a\, 1^n \quad \text{con } P_1^*(n) = a \text{ (polinomio de grado } \beta = 0)$$

Como r es raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea, se prueban soluciones de la forma $y_p^n = Q_1(n)\, 1^n$, con $Q_1(n)$ polinomio de grado $\beta + \alpha_1 = 0 + 2 = 2$

$$y_p^n = (A + Bn + Cn^2)\, 1^n = \underbrace{(A + Bn)}_{y_h^n} + \underbrace{Cn^2}_{y_{p_1}^n}$$

Introduciendo $y_{p_1}^n$ en la ecuación completa conduce a

$$C \underbrace{\left[(n+1)^2 - n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2\right]}_{4} = a \Longleftrightarrow C = \frac{a}{4} \Longrightarrow y_{p_1}^n = \frac{a}{4} n^2$$

Solución general de la ecuación: $\boxed{y^n = \left(C_0 + C_1 n + \frac{a}{4} n^2\right) + C_2(-1)^n}$

Ejercicio B

1. Dominio de analiticidad de la función

$$f(z) = \log\left(\frac{z - a(1+i)}{z - a(1-i)}\right) \quad \text{siendo } a > 0 \text{ y } \log z = \text{Ln}|z| + i\arg z, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$$

- En el dominio donde sea analítica

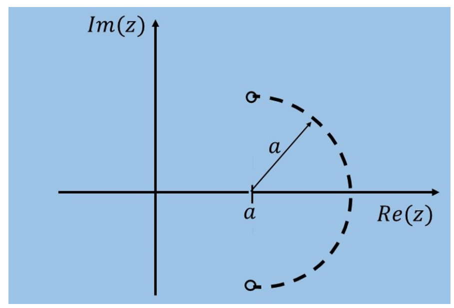
$$f'(z) = \frac{2a\,i}{(z - a(1-i))\,\left(z - a(1+i)\right)} = \boxed{\frac{2a\,i}{(z-a)^2 + a^2}}$$

- Dominio de analiticidad (D): $\log w$ no analítica en $\begin{cases} \text{Re}(w) = 0 \\ \text{Im}(w) \leq 0 \end{cases}$

$$w = \frac{z - a(1+i)}{z - a(1-i)} = \frac{(x-a) + i(y-a)}{(x-a) + i(y+a)} = \frac{(x-a)^2 + y^2 - a^2}{(x-a)^2 + (y+a)^2} + i\,\frac{-2a(x-a)}{(x-a)^2 + (y+a)^2}$$

no analítica en $\begin{cases} \text{Re}(w) = 0 & \iff \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2 \\ \text{Im}(w) \leq 0 & \iff \quad -2a(x-a) \leq 0 \overset{a>0}{\iff} x \geq a \end{cases}$

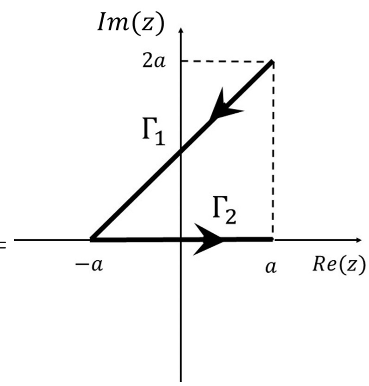
$$\boxed{D = \mathbb{C} - \left\{ z = a + a\,e^{i\theta} \ \text{ con } \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}}$$



2. Calcular la integral

$$\int_\Gamma f'(z) f(z)\, dz$$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ el contorno orientado con origen en $z_I = a(1+2i)$ y final en $z_F = a$.



- La función $F(z) = \dfrac{f(z)^2}{2}$ en el dominio D de analiticidad de $f(z)$ y cumple

$$F'(z) = f'(z) f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

Luego $F(z)$ es la primitiva del integrando en D y hay independencia del camino en D. Como $\Gamma \in D$

$$I = \int_\Gamma f'(z) f(z)\, dz = F(z_F) - F(z_I) = \frac{1}{2}\left(f(z_F)^2 - f(z_I)^2\right)$$

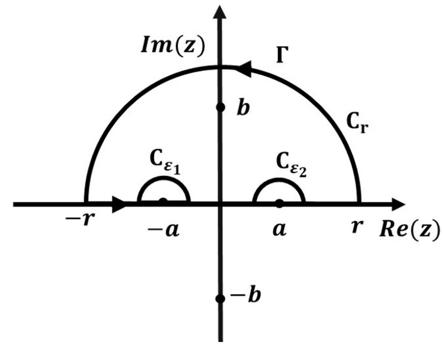
$$\left.\begin{array}{l} f(z_I) = f(a(1+2i)) = \log\left(\dfrac{ai}{3ai}\right) = \log\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\text{Ln}\,3 + \ i\,0 \\[2ex] f(z_F) = f(a) = \log\left(\dfrac{-ai}{ai}\right) = \log(-1) = -\text{Ln}\,1 + \ i\,\pi = i\,\pi \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{I = \frac{-1}{2}\left(\pi^2 + (\text{Ln}\,3)^2\right)}$$

Ejercicio C $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{(x^2+b^2)\,(x^2-a^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{(x^2+b^2)\,(x^2-a^2)}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,4x}}{(x^2+b^2)\,(x^2-a^2)}\,dx}_{I_c}\right)$

Cálculo de: $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma \frac{e^{i\,4z}}{(z^2+b^2)\,(z^2-a^2)}\,dz$

Puntos singulares de $f(z)$ (Ceros de $1/f(z)$):

$$\begin{cases} z_1 = -a, \qquad z_2 = a \\ z_3 = bi, \qquad z_4 = -bi \end{cases}$$



$$\begin{cases}
\textit{Lema 2: } \displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \overbrace{\frac{1}{(z^2+b^2)\,(z^2-a^2)}}^{f_1(z)} = 0 \implies \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} f_1(z)e^{4z\,i}\,dz = 0 \\
\displaystyle\lim_{z\to -a}(z+a)\,f(z) = \lim_{z\to -a}\frac{(z+a)e^{4z\,i}}{(z^2+b^2)(z+a)(z-a)} = \frac{e^{-4a\,i}}{(-2a)(b^2+a^2)} \implies \text{z=-a es polo simple de } f(z) \implies \\
\qquad \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\varepsilon_1}} f(z)\,dz = -\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);-a) = -\pi i\,\frac{(-e^{-4a\,i})}{2a(b^2+a^2)} \\
\displaystyle\lim_{z\to a}(z-a)\,f(z) = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)e^{4a\,i}}{(z^2+b^2)(z+a)(z-a)} = \frac{e^{4a\,i}}{(2a)(b^2+a^2)} \implies \text{z=a es polo simple de } f(z) \implies \\
\qquad \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\varepsilon_2}} f(z)\,dz = -\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);a) = -\pi i\,\frac{e^{4a\,i}}{2a(b^2+a^2)} \\
\displaystyle\lim_{\substack{r\,\to\,\infty\\ \varepsilon\,\to\,0}}\int_{T_1} f(x)\,dx + \lim_{\substack{r\,\to\,\infty\\ \varepsilon\,\to\,0}}\int_{T_2} f(x)\,dx = I_c
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_c &= 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);bi) + \pi i\,\left[\mathrm{Res}(f(z);-a) + \mathrm{Res}(f(z);a)\right] = \\
&= 2\pi i\,\underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{e^{4z\,i}/((z+bi)(z^2-a^2))}{(z-bi)};bi\right)}_{\dfrac{e^{-4b}}{(2bi)(-b^2-a^2)}} + \pi i\,\underbrace{\frac{e^{4a\,i}-e^{-4a\,i}}{2a(b^2+a^2)}}_{\dfrac{i\,\mathrm{sen}(4a)}{a(b^2+a^2)}} = \frac{-\pi}{(b^2+a^2)}\left(\frac{e^{-4b}}{b} + \frac{\mathrm{sen}(4a)}{a}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{-\pi}{2(b^2+a^2)}\left(\frac{e^{-4b}}{b} + \frac{\mathrm{sen}(4a)}{a}\right)}$$

a	b	I
1	2	$\frac{-\pi}{20}\left(e^{-8} + 2\,\mathrm{sen}(4)\right)$
2	1	$\frac{-\pi}{20}\left(2\,e^{-4} + \mathrm{sen}(8)\right)$

Ejercicio D

1. Valores de n para los que existe una función entera, $f(z)$, cuya derivada cumple

$$\operatorname{Re}\left(f'(z)\right) = a(y\,+\,x^n), \qquad n \in \mathbb{N},\, a > 0$$

$f(z)$ entera $\Longrightarrow$ $f'(z)$ entera, por lo que $\operatorname{Re}(f'(z)) = U(x,y)$ debe ser armónica en todo $\mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{(a) } U(x,y) \text{ tiene parciales de primer y segundo orden continuas en } \mathbb{R}^2 \\ \text{(b) } U_{xx} + U_{yy} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} U_x = nax^{n-1} & U_y = a \\ U_{xx} = n(n-1)ax^{n-2} & U_{yy} = 0 \end{array}\right\} \overset{(b)}{\Longleftrightarrow} a\,n(n-1)x^{n-2} = 0 \overset{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2}{\Longleftrightarrow} n = 0 \text{ o bien } n = 1 \overset{n\in\mathbb{N}}{\Longleftrightarrow} \boxed{n = 1}$$

siendo $U(x,y) = a(y+x)$

2. Expresión general de la función analítica, $f(z)$, en función de $z = x + iy$

- $f'(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ con $V(x,y)$ armónica conjugada de $U(x,y) \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{(a) } V(v,y) \text{ tiene parciales de primer orden continuas en } \mathbb{R}^2 \\ \text{(b) Cumple las condiciones de Cauchy-Riemman en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} V_x = -U_y & = & -a \\ V_y = U_x & = & nax^{n-1} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} V = -ax\,+\,g(y) \;\Longrightarrow\; V_y = g'(y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad V_y = nax^{n-1} \Longleftrightarrow g(y) = nax^{n-1}\,y + C \text{ con } C \in \mathbb{R} \text{ constante} \end{array}$$

. Como $n = 1$: $V(x,y) = -\,ax\,+\,ay\,+\,C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$$f'(z) = U + iV = \underbrace{\underbrace{ay -\, aix}_{-iaz} + \underbrace{ax + aiy}_{az}}_{a(1-i)z} + iC_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

- Tomando la primitiva de $f'(z)$: $\boxed{f(z) = a(1-i)\,\dfrac{z^2}{2}\,+\,iC_1 z\,+\,C_2, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad C_2 \in \mathbb{C}}$

3. Si cumple $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z}\,dz = 0 \quad (R > 0)$ *F. Integral de Cauchy:* $\displaystyle\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z} = 2\pi i f(0) = 2\pi i\, C_2 \Longrightarrow C_2 = 0$

Versiones V01-V03 Además cumple $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz =\, 2\pi a\,i$ *F. Integral de Cauchy generalizada:*

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-i)^2} = 2\pi i f'(1) = 2\pi a\,i \Longrightarrow f'(1) = a = a(1-i) + iC_1 = a + i(C_1 - a) \Longleftrightarrow C_1 = a \Longrightarrow \boxed{f(z) = a(1-i)\,\frac{z^2}{2}\,+\,iaz}$$

Versiones V02-V04 Además cumple $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-i)^2}\,dz =\, 2\pi a\,i$ *F. Integral de Cauchy generalizada:*

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-i)^2} = 2\pi i f'(i) = 2\pi a\,i \Longrightarrow f'(i) = a = a(1-i)i + iC_1 = a + i(C_1 + a) \Longleftrightarrow C_1 = -a \Longrightarrow \boxed{f(z) = a(1-i)\,\frac{z^2}{2}\,-\,iaz}$$

Ejercicio E $\quad \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{z}\,i\right)}{\cosh\left(\frac{a}{z}\right)}, \qquad a > 0$

1. **Puntos singulares de**

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \begin{cases} P(z) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{z}\,i\right) \\ Q(z) = \cosh\left(\dfrac{a}{z}\right) \end{cases} \quad \text{Analíticas en } \mathbb{C} - \{0\}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ \text{Los ceros de } Q(z). \text{ (Ceros de } 1/f\text{): } \cosh\left(\dfrac{a}{z}\right) \Longleftrightarrow e^{2a/z} = -1 = e^{i\,\pi(1+2k)} \Longleftrightarrow \boxed{z_k = \dfrac{2a}{\pi(1+2k)}\,i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots} \end{cases}$$

Sucesión de puntos que tiende a $z = 0$ cuando $k \to \infty$, por lo que $z = 0$ no está aislado.

Los puntos $z_k = \dfrac{2a}{\pi(1+2k)}\,i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ están aislados.

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \left\{ \begin{array}{l} P(z) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{z}\,i\right) \text{ analítica en } z_k \text{ y } P(z_k) = \operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}(1+2k)\right) = (-1)^{k+1} \neq 0 \\ Q(z) = \cosh\left(\dfrac{a}{z}\right) \text{ analítica en } z_k \text{ y } Q(z_k) = 0 \\ Q'(z_k) = \dfrac{-a}{z_k^2} \operatorname{senh}\left(\dfrac{a}{zk}\right) = \dfrac{-a}{z_k^2} \underbrace{\operatorname{senh}\left(i\,\dfrac{\pi}{2}(1+2k)\right)}_{i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(1+2k)\right)} = \dfrac{a}{z_k^2}\, i\,(-1)^{k+1} \neq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} z_k \text{ cero simple de } Q(z) \Longrightarrow \\ z_k \text{ cero simple de } 1/f(z) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_k = \frac{2a}{\pi(1+2k)}\,i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \textbf{ polos simples de } f(z)} \qquad \boxed{\operatorname{Res}(f; z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{z_k^2}{ai} = i\,\frac{4a}{\pi^2(1+2k)^2}}$$

2. $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz$ siendo Γ el cuadrado de centro el origen y lado $l > 2\dfrac{2a}{\pi}$ orientado positivamente.

$f(z)$ tiene infinitos puntos singulares interiores a Γ, siendo analítica sobre Γ y su exterior.

Extensión del T^a de los residuos: $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\underbrace{\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)}_{h(z)}; z = 0\right)$

$$h(z) = \frac{1}{z^2}\,\frac{\operatorname{sen}(azi)}{\cosh(az)} \begin{cases} \lim\limits_{z\to 0} |h(z)| = \infty \\ \lim\limits_{z\to 0} z\,h(z) = \overbrace{\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(azi)}{z\,\cosh(az)}}^{\frac{0}{0}} = \overbrace{\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(azi)}{z}}^{\text{L'Hopital}} = \\ \qquad \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{ai\cos(azi)}{1} = a\,i \end{cases}$$

a	z_k	$\operatorname{Res}(f; z_k)$	I
$\frac{1}{2}$	$\dfrac{i}{\pi(1+2k)}$	$\dfrac{2i}{\pi^2(1+2k)^2}$	$-\pi$
2	$\dfrac{4i}{\pi(1+2k)}$	$\dfrac{8i}{\pi^2(1+2k)^2}$	-4π
$\frac{3}{2}$	$\dfrac{3i}{\pi(1+2k)}$	$\dfrac{6i}{\pi^2(1+2k)^2}$	-3π
3	$\dfrac{6i}{\pi(1+2k)}$	$\dfrac{12i}{\pi^2(1+2k)^2}$	-6π

$$\Longrightarrow z = 0 \text{ es polo simple y } \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); z = 0\right) = a\,i \longrightarrow$$

$$\boxed{\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi\,i\,ai = -2\pi a}$$