PREGUNTA A (PARTE 2)

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{1}{2}\left(e^{2(1+i)t} + e^{2(1-i)t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(2(1+i)-s)t} + e^{(2(1-i)-s)t}\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2(1+i)-s} + \frac{-1}{2(1-i)-s}\right]$$

$$= \frac{s-2}{s^2-4s+8}$$

PREGUNTA B (PARTE 2)

Tomando transformada de Fourier en la ecuación se obtiene

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (i\omega)^2 \hat{u} - t^2 \hat{u}.$$

Integrando la ecuación anterior, teniendo en cuenta la condición inicial y la nota del enunciado se obtiene

$$\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right) \exp\left(-\left(\omega^2 + \frac{t^2}{3}\right)t\right).$$

PREGUNTA C (PARTE 2)

De las condiciones del enunciado se obtiene que $w(z) = 1+z+\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$.

Sustituyendo el desarrollo de $w(z)$ en la ecuación diferencial se obtiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} = (1+z^2)\left(1+z+\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

De igualar los términos en z^0 se obtiene $2c_2 = 2$, es decir, $c_2 = 1$ y de igualar los coeficientes en z $6c_3 z = 2z$, es decir, $c_3 = \frac{1}{3}$.

PREGUNTA D (PARTE 2)

Para obtener c_4 se procede a igualar los coeficientes en z^2 $\quad 12c_4 z^2 = \left(2+\frac{1}{2}\right)z^2$

es decir $\quad c_4 = \dfrac{5}{24} = \dfrac{5}{4!}$.

Igualando los coeficientes de z^j en

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} = (1+z^2)\left(1+z+\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

se obtiene

$$(j+2)(j+1)c_{j+2} = c_j + c_{j-2} + \frac{1}{j!}$$

de donde $\quad c_{j+2} = \dfrac{c_j + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)} + \dfrac{1}{(j+2)!}$

para $j \geq 2$.

PREGUNTA E (PARTE 2)

La ecuación diferencial del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{3+2z}{2z}\frac{dw}{dz} + \frac{1+z}{2z^2}w \qquad (1)$$

El punto $z=0$ es singular regular para (1). El comportamiento de las soluciones en un entorno de $z=0$ está dado por los autovalores de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, es decir $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = -1$.

La solución general de (1) puede escribirse como $w(z) = C_1 \sqrt{z}\, p_1(z) + C_2 \frac{p_2(z)}{z}$

donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas tales que $p_1(0) = p_2(0) = 1$. Por tanto, para cualquier $C_1 \in \mathbb{C}$ y $C_2 = 1$ $\lim_{z\to 0} z\, w(z) = 1$

PREGUNTA 7 (PARTE 2)

La función $u(r,\theta,t) = (\cos(\alpha t) + \operatorname{sen}(\alpha t)) J_1(\alpha r) \cos\theta$ verifica las condiciones iniciales y de contorno. Sustituyendo la función u en la ecuación y multiplicando por r^2 se obtiene

$$\left(\cos(\alpha t) + \operatorname{sen}(\alpha t)\right)\left(r^2 \frac{d^2 J_1(\alpha r)}{dr^2} + r \frac{d}{dr} J_1(\alpha r) + \left(-1 + \alpha^2 r^2\right) J_1(\alpha r)\right) \cos\theta = 0$$

Puesto que el segundo factor del primer miembro de la igualdad anterior es nulo la función u es solución del problema de Cauchy.

En virtud del teorema de unicidad de solución u es la única solución.