Problemas de ecuaciones en diferencias

1.1 (primer parcial 15/16)

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$4\,x^{n+2} + 4\,x^{n+1} + x^n = 2^{n+3},$$

que cumple $x^0 = x^1 = 0$.

Se trata de una ecuación en diferencias lineal de orden 2, no homogénea, con coeficientes constantes.

i) Solución general de la homogénea:

- Polinomio característico: $4\lambda^2+4\lambda+1$. Raíz: $\lambda=-\frac{1}{2}$, doble
- Como tiene una raíz doble, la solución general es:

$$x^n = c_1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + c_2\cdot n\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n$$

ii) Solución particular de la completa:

- El término independiente (o forzante) g(n) es $g(n)=2^{n+3}=8\cdot 2^n$
- Como el coeficiente 8 es un polinomio de grado 0, y como la base de la potencia, 2, es distinta de las raíces del polinomio característico, probamos con soluciones de la forma $x^n=Q(n)\cdot 2^n$, con $\text{grado}(Q(n))=0$. Es decir, $x^n=C\cdot 2^n$

$$4\cdot C\cdot 2^{n+2}+4\cdot C\cdot 2^{n+1}+C\cdot 2^n=2^{n+3} \Rightarrow C=8/25$$

- Por tanto, $x^n=\frac{8}{25}2^n$ es solución particular de la completa.

iii) Toda solución de la ecuación es de la forma:

$$x^n = C_1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + C_2\cdot n\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{8}{25}\cdot 2^n$$

$$x^0=0 \Rightarrow C_1=-\tfrac{8}{25}$$

$$x^1=0 \Rightarrow C_2=8/5$$

iv) Solución total: $\boxed{x^n = -\frac{8}{25}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{5}\,n\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{25}2^n}$

1.2 (primer parcial 16/17)

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$x^{n+2} - x^n = 2^{n+1}.$$

que cumple $x^0 = x^1 = 1$.

Se trata de una ecuación en diferencias lineal de orden 2, no homogénea, con coeficientes constantes.

i) Solución general de la homogénea:

- Polinomio característico: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

- La solución general es: $x^n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2$

ii) Solución particular:

- El término independiente (o forzante) g(n) es $g(n) = 2 \cdot 2^n$
- Como el coeficiente 2 es un polinomio de grado 0, y como la base de la potencia, 2, es distinta de las raíces del polinomio característico, probamos con soluciones de la forma $x^n = Q(n) \cdot 2^n$, con $\text{grado}(Q(n)) = 0$. Es decir,

$$x^n = c \cdot 2^n \Rightarrow \dots \Rightarrow c = 2/3$$

iii) Toda solución es de la forma $x^n = A + B \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n$.

iv) Aplicando las condiciones iniciales:

$A = 0,\ B = 1/3 \Rightarrow$

Solución: $\boxed{x^n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+1}\right)}$

1.3 (primer parcial 17/18)

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n.$$

Es una ecuación lineal sin forzante. La solución general es $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = A^n \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^0$

Para simplificar la expresión, diagonalizamos:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = -5;\quad v_{-2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix},\ v_{-5} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Solución general:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = A \cdot (-5)^n \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + B \cdot (-2)^n \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

1.4 (primer parcial 18/19)

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n.$$

Similar al anterior. Autovalores: $\lambda = 2, \lambda = -5$ $\quad v_2 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$, $v_{-5} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

Sol. general: $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^n = A \cdot \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \cdot 2^n + B \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot (-5)^n$

1.5 (primer parcial 19/20)

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n}.$$

Solución general: $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n} = A^n \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{0}$. $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$ $\begin{cases} \lambda=1 \text{ (doble)} \\ \lambda=2 \text{ (simple)} \end{cases}$

- Para $\lambda=1$ tenemos $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ como autovectores.
- Para $\lambda=2$ tenemos $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ como autovector.

Luego la solución es: $\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n} = A\cdot\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + B\cdot\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + C\cdot\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}\cdot 2^n}$

1.6 (final ordinario 13/14)

Considérese el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^{n} + 2^n \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

del que se sabe que admite una solución particular del tipo $2^n\mathbf{V}$, con $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ vector constante. Entonces:

C. El valor de dicho vector es:

(9) $\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ **(10)** $\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

(11) $\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ **(12)** Ninguno de los anteriores

D. La segunda componente de la solución correspondiente a la condición inicial $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ es:

(13) $y^n = \frac{2}{3}4^n - 2^n + \frac{1}{3}$ **(14)** $y^n = \frac{2}{3}(4^n - 1)$

(15) $y^n = 2^n - 1$ **(16)** $y^n = \frac{1}{3}(4^n - 2^n)$

Podemos hacer la comprobación directa;

$$2^{n+1}\cdot V = A\cdot 2^n V + 2^n u \quad , \text{con } u = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

$$\Downarrow$$

$$2V = AV + u \Rightarrow (2I - A)\cdot V = u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = (2I-A)^{-1}\cdot u$$

$$2I-A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow (2I-A)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(2I-A)^{-1}\,u=\begin{Bmatrix}-1\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \text{opción (11).}$$

También se podría con cuenta de la vieja...

Para la segunda parte, calculemos la sol. general de la homogénea:

- Autovalores de $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$: $\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=4,\ \lambda=1$

- Autovectores: $v_1=\begin{Bmatrix}1\\ -2\end{Bmatrix}$, $v_4=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_H^n=A\cdot 4^n\cdot\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}+B\cdot\begin{Bmatrix}1\\ -2\end{Bmatrix} \Rightarrow y^n=A\cdot 4^n\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}+B\cdot\begin{Bmatrix}1\\ -2\end{Bmatrix}+2^n\cdot V$

Igualando las condiciones iniciales llegamos a $A=2/3$, $B=1/3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La solución es la (14).

1.7 (final extraordinario 15/16)

***A*. (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n=4,$$

que cumple $x^0=x^1=0$.

$=$

x_h^n

4.

Es una ecuación lineal de orden 2, con término (no homogénea).

i) Pol. característico: $r^2+2r+1=(r+1)^2 \Rightarrow r=-1$ doble es la raíz.

ii) $G(n)=4\cdot 1^n$, donde 1 no es raíz del polinomio. Luego podemos encontrar una solución particular de la forma $y_p^n=a\cdot 1^n=a$. Obviamente, $a=1$.

iii) Sol. general: $y^n=A\cdot(-1)^n+B\cdot n\cdot(-1)^n+1$

Al igualar las condiciones: $\begin{Bmatrix}A=-1\\ B=2\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{y^n=-(-1)^n+2n(-1)^n+1}$

1.8 (final ordinario 15/16)

***A.* (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$x^{n+2} + 4\,x^{n+1} + 3\,x^n = 3^{n+1},$$

que cumple $x^0 = x^1 = 0$.

Similar al anterior.

- Sol. homogénea: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = -3 \Rightarrow$

$$y_H^n = A\cdot(-1)^n + B\cdot(-3)^n$$

- Sol. particular: $y_p^n = a\cdot 3^n \quad (G(n) = 3\cdot 3^n \ldots)$

$\Downarrow$

$a = 1/8$ para que satisfaga ec.

- Sol. general: $y^n = y_H^n + y_p^n$, al usar cond. iniciales $\left\langle \begin{array}{l} A = -3/8 \\ B = 1/4 \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$$\boxed{y^n = -\frac{3}{8}(-1)^n + \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{8}\,3^n}$$

1.9 (final extraordinario 16/17)

***A.* (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general de la ecuación en diferencias

$$4\,x^{n+2} - 4\,x^{n+1} - 3\,x^n = 3.$$

Similar al 7. • $p(\lambda) = 4\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \left\langle \begin{array}{l} 3/2 \\ -1/2 \end{array}\right. \Rightarrow y_H^n = A\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n + B\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

• $y_p^n = a$, luego $a = -1$

• $\boxed{y^n = -1 + A\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

1.10 (final ordinario 16/17)

***A.* (3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$x^{n+2} + 4\,x^{n+1} + 4\,x^n = (-1)^n,$$

que cumple $x^0 = 0$, $x^1 = 1$.

Similar. $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 \Rightarrow \lambda = -2$ doble.

$$y_H^n = A\cdot(-2)^n + B\cdot n\cdot(-2)^n$$

Particular: $y_p^n = C \cdot (-1)^n$, porque -1 no es raíz.

$\hookrightarrow C = 1$

Sol. general: $y^n = y_H^n + y_p^n$. Al igualar $\begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases}$

$$\boxed{y^n = (-1)^n - (-2)^n}$$

1.11 (problema extra)

Encontrar la solución de:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y^{n+1} - (n+1)y^n = 2^n(n+1)!} \\ \boldsymbol{y^0 = y_0} \end{cases}$$

Ecuación lineal con coeficientes no constantes.

- $Q(n) = n+1$
- $G(n) = 2^n \cdot (n+1)!$

Sol. general: $y^n = y_H^n + y_p^n$

- $y_H^n = a \cdot \prod_{i=0}^{n-1} Q(i) = a \cdot n!$
- $y_p^n \rightarrow$ Por variación de constantes. Probamos con $y_p^n = a(n) \cdot n!$:

$a(n+1) \cdot (n+1)! = (n+1) \cdot a(n) \cdot n! + 2^n \cdot (n+1)! \Rightarrow$

$\Rightarrow a(n+1) = a(n) + 2^n \Rightarrow a(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$ es solución $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_p^n = (2^n - 1) \cdot n!$

Sol. general: $\boxed{y^n = y_0 \cdot n! + (2^n - 1) \cdot n!}$

1.12 (problema extra)

Encontrar la solución de:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y^{n+1} + 2y^n + 2y^{n-1} = 0} \\ \boldsymbol{y^0 = y_0} \\ \boldsymbol{y^1 = y_1} \end{cases}$$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{3\pi i/4}$

Sol. general:

$$\boxed{y^n = c_1 (\sqrt{2})^n \cos\left(n \tfrac{3\pi}{4}\right) + c_2 (\sqrt{2})^n \operatorname{sen}\left(n \tfrac{3\pi}{4}\right)}$$

1.13 (primer parcial 21/22)

Ejercicio A

Solución general de la ecuación en diferencias

$$y^{n+1} - y^n - y^{n-1} + y^{n-2} = a, \qquad n \geq 0, \qquad a > 0$$

Ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes. Solución: $y^n = y_h^n + y_p^n$

Solución:

- **Solución general de la ecuación homogénea asociada: y_h^n**

  Polinomio característico de la ecuación (se prueban soluciones en la forma $y^n = \lambda^n$):

$$y^{n+1} - y^n - y^{n-1} + y^{n-2} = \lambda^{n+1} - \lambda^n - \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}\left(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1\right) = 0$$

  resultando $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & \alpha_1 = 2 \text{ (doble)} \\ \lambda_2 = -1 & \alpha_2 = 1 \text{ (simple)} \end{cases}$

$$y_h^n = (C_0 + C_1 n)\, 1^n + C_2(-1)^n = (C_0 + C_1 n) + C_2(-1)^n$$

- **Solución particular de la ecuación completa: y_p^n**

  El término forzante, $g(n) = a$, es solución de una ecuación homogénea de coeficientes constantes, con raíz del polinomio característico $r = 1 = \lambda_1$. Aplicamos el método del anulador.

$$g(n) = P_1^*(n)1^n = a\,1^n \quad \text{con } P_1^*(n) = a \text{ (polinomio de grado } \beta = 0)$$

  Como r es raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea, se prueban soluciones de la forma $y_p^n = Q_1(n)\,1^n$, con $Q_1(n)$ polinomio de grado $\beta + \alpha_1 = 0 + 2 = 2$

$$y_p^n = (A + Bn + Cn^2)\,1^n = \underbrace{(A + Bn)}_{y_h^n} + \underbrace{Cn^2}_{y_{p_1}^n}$$

  Introduciendo $y_{p_1}^n$ en la ecuación completa conduce a

$$C\underbrace{\left[(n+1)^2 - n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2\right]}_{4} = a \Longleftrightarrow C = \frac{a}{4} \Longrightarrow y_{p_1}^n = \frac{a}{4}n^2$$

  Solución general de la ecuación: $\boxed{y^n = \left(C_0 + C_1 n + \frac{a}{4}n^2\right) + C_2(-1)^n}$