(A) Tomando la transformada de Fourier con respecto a la variable x en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1+(t+1)^2}}\right)(i\omega)^2 \hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega, t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Integrando la ecuación de primer orden que verifica $\hat{u}$ se obtiene

$$\hat{u}(\omega, t) = C \exp\left(-\omega^2\left(t + \sqrt{1+(t+1)^2} - \operatorname{Arg}\operatorname{Sh}(t+1) - \sqrt{2} + \operatorname{Arg}\operatorname{Sh}(1)\right)\right).$$

Imponiendo la condición inicial se obtiene

$$\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{4\alpha} + t + \sqrt{1+(t+1)^2} - \operatorname{Arg}\operatorname{Sh}(t+1) - \sqrt{2} + \operatorname{Arg}\operatorname{Sh}(1)\right)\right).$$

Tomando la transformada inversa se obtiene

$$u(x,t) = \frac{\exp\left(-\alpha x^2 \Big/ \left(1 + 4\alpha\left(t + \sqrt{1+(t+1)^2} - \operatorname{Arg}\operatorname{Sh}(t+1) - \sqrt{2} + \operatorname{Arg}\operatorname{Sh}(1)\right)\right)\right)}{\sqrt{1 + 4\alpha\left(t + \sqrt{1+(t+1)^2} - \operatorname{Arg}\operatorname{Sh}(t+1) - \sqrt{2} + \operatorname{Arg}\operatorname{Sh}(1)\right)}}.$$

(B) La función g puede escribirse en la forma $g(t)=\left(H(t)-H(t-\frac{\pi}{2})\right)\left(\frac{1}{2}+\cos^2 t\right)+$ $H(t-\frac{\pi}{2})\left(\frac{1}{2}+(t-\frac{\pi}{2})\right)= H(t)\left(1+\frac{\cos 2t}{2}\right)-H(t-\frac{\pi}{2})\left(1+\frac{\cos(2(t-\frac{\pi}{2})+\pi)}{2}\right)+H(t-\frac{\pi}{2})$ $\left(\frac{1}{2}+(t-\frac{\pi}{2})\right) = H(t)+H(t)\frac{\cos 2t}{2} - H(t-\frac{\pi}{2}) + H(t-\frac{\pi}{2})\frac{\cos(2(t-\frac{\pi}{2}))}{2} + H(t-\frac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{2}$, $+H(t-\frac{\pi}{2})(t-\frac{\pi}{2})$. Tomando la transformada de Laplace de la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se obtiene

$(z^2+2z+17)\,\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{dw}{dt}(0)+\mathcal{L}[g(t)](z)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[\cos 2t](z)=\frac{z}{z^2+4}$, $\mathcal{L}[t^{\nu}](z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}}$ y que $\mathcal{L}[H(t-a)\,f(t-a)](z)=$ $\exp(-az)\,\mathcal{L}[f(t)](z)$ para $a>0$, se obtiene

$$\mathcal{L}[w(t)](z)=\frac{1}{(z+1)^2+4^2}\left(\frac{dw}{dt}(0)+\frac{1}{z}\left(1-\frac{\exp(-\frac{\pi}{2}z)}{2}\right)+\frac{\exp(-\frac{\pi}{2}z)}{z^2}+\frac{z}{2(z^2+4)}\left(1+\exp(-\frac{\pi}{2}z)\right)\right).$$

Por tanto, $\mathcal{L}[w(t)](2)=\frac{1}{200}\left[8\gamma+5+\exp(-\pi)\right]$.

(C)

La solución del problema de Cauchy del enunciado es una función de clase $C^\infty(B(0+i0,\delta))$ para un cierto $\delta>0$. Por tanto, $w(t) = t + \sum_{k=2}^{\infty} c_k t^k$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación $(1+t^2)^2 \frac{d^2w}{dt^2} + t^2 w = 0$, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}t^k + \sum_{k=2}^{\infty} 2k(k-1)c_k t^k + \sum_{k=4}^{\infty}(k-2)(k-3)c_{k-2}t^k + \sum_{k=4}^{\infty} c_{k-2}t^k + t^3 = 0$$

De donde $c_2 = c_3 = 0$. Teniendo en cuenta que $c_0=0$, $c_1=1$ y $(k-2)(k-3)$ se anula para $k=2$ y $k=3$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}t^k + \sum_{k=2}^{\infty} 2k(k-1)c_k t^k + \sum_{k=2}^{\infty}(k-2)(k-3)c_{k-2}t^k + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}t^k = 0$$

De donde

$$c_{k+2} = -\frac{2k(k-1)c_k + (1+(k-2)(k-3))c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$$

para $k \geq 2$, y $c_5 = \frac{-1}{20}$.

(D.) La función $z \mapsto \cosh\sqrt{z}$ verifica la igualdad

$$\cosh\sqrt{z} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^n$$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, la función $z \mapsto \cosh\sqrt{z}$ es analítica en $\mathbb{C}$. La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2}(z) = -\frac{\operatorname{sen} 2z}{4\gamma z(\cosh\sqrt{z}-1)}\frac{dw}{dz}(z) + \frac{\operatorname{sen} z}{z(\cosh\sqrt{z}-1)} w(z).$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{\cosh\sqrt{z}-1} = 2$, las funciones $\frac{\operatorname{sen} z}{\cosh\sqrt{z}-1}$ y $\frac{2\cos z \operatorname{sen} z}{\cosh\sqrt{z}-1}$ son analíticas en un entorno de $z=0$ cuando se las completa de forma continua. El comportamiento de la solución está determinado por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma}+1 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda_1 = 1-\frac{1}{\gamma} > 0$ y $\lambda_2 = 0$ con $\gamma > 1$.

Por tanto, para $\gamma > 1$, la solución general es de la forma

$w(z) = C_1 z^{1-\frac{1}{\gamma}} p_1(z) + C_2 p_2(z)$ donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un entorno del origen con $p_1(0) = p_2(0) = 1$.

Puesto que $0 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma} < 1 - \frac{1}{\gamma} < 1$ con $\gamma > 1$, para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$

$$w(z) = O\left(z^{1/2-\frac{1}{2\gamma}}\right).$$

(E) En virtud de la fórmula de Poisson $u(x,y)= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt.$

En este ejercicio, $u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt = \left\{\begin{array}{l} x-t=u \\ dt=-du \end{array}\right\} =$

$$\frac{y}{\pi}\int_x^{x-1} \frac{(x-u)-(x-u)^2}{u^2+y^2}(-1)\,du = \frac{y}{\pi}\int_{x-1}^{x} \frac{x+y^2-x^2+(2x-1)u-u^2-y^2}{u^2+y^2}\,du$$

$$= \frac{y}{\pi}\int_{x-1}^{x}\left(\frac{x+y^2-x^2}{u^2+y^2}+\frac{(2x-1)u}{u^2+y^2}-1\right)du = \frac{1}{\pi}\left((x-x^2+y^2)\left(\operatorname{artg}\left(\frac{x}{y}\right)-\operatorname{artg}\left(\frac{x-1}{y}\right)\right)+\right.$$

$$\left.\frac{(2x-1)}{2}\,y\ln\left(\frac{x^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}\right)-y\right).$$