EDOs lineales de segundo orden

EDO lineal de segundo orden (punto no singular)

4.2.1 (segundo parcial 14/15)

D. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (1+z^2)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},$$
$$w(0) = 1, \ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(5) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{j+2} = \dfrac{c_j - c_{j-2}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \geq 2$.

(6) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{j+2} = \dfrac{c_j - c_{j-2}}{(j+1)j}$ para todo $j \geq 2$.

(7) $c_2 = \dfrac{1}{2}, c_3 = \dfrac{1}{6}$, y $c_{j+2} = \dfrac{c_j + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \geq 2$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$$W(z) = 1 + z + c_2 z^2 + \dots$$

$$\sum n(n-1) c_n z^{n-2} = (1+z^2) \sum c_n z^n$$

$$z^k : \ (k+2)(k+1) c_{k+2} = c_k + c_{k-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ c_{k+2} = \frac{c_k + c_{k-2}}{(k+2)(k+1)} \rightarrow \text{sólo (7) podría ser.}$$

z^0: $2c_2 = 1 \rightarrow c_2 = 1/2$

z^1: $6c_3 = c_1 \rightarrow c_3 = 1/6$

OJO: No vale la fórmula, sólo que tengamos en cuenta que $c_{-1} = c_{-2} = 0$.

$$c_2 = \frac{c_0 + 0}{2}$$

$$c_3 = \frac{c_1 + 0}{3 \cdot 2}$$

4.2.2 (segundo parcial 14/15)

E. Sea $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D. Sobre la función w puede afirmarse que:

(9) Para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ se verifica que $\exp(x) \leq w(x)$.

(10) Para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ se verifica que $w(x) \leq \exp(x) + x$.

(11) Para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ se verifica que $x \leq w(x) \leq 2 + x^2$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

esta es

$w'' = (1+x^2)w$.

$w(0) = w'(0) = 1$

$w'' = w$ en la ecuación de $\exp(x)$.

Luego esta crece más rápido. $w(x) \geq \exp(x)$.

Tb por los coef: $c_{k+1} = \dfrac{c_k}{k+1}$ en el caso de $\exp(x)$.

Aquí, $c_{k+1} = \dfrac{c_{k-1} + c_{k-3}}{(k+1) \cdot k}$

Si para algún k_0, $c_{k_0} \geq \frac{1}{k_0!}$, entonces para el resto tb:

$$c_{k_0+2} = \frac{c_{k_0}+c_{k_0-2}}{(k_0+2)(k_0+1)} > \frac{c_{k_0}}{(k_0+1)(k_0+2)} \geq \frac{1}{(k_0+2)!}$$

En cuanto haya dos coeficientes mayores que $1/k!$ (o iguales) se demuestra para todos.

4.2.3 (segundo parcial 16/17)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (z^2 + z^6)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 0.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_{4j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que no es par ni impar.

(10) Los coeficientes c_{4j+3}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son no nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es impar .

(11) Los coeficientes c_{4j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es par.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$W(z) = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} c_j z^j$ / $c_j \cdot j \cdot (j-1) = c_{j-4} + c_{j-8}$ (término z^{j-2})

$\Rightarrow c_j = \dfrac{c_{j-4}+c_{j-8}}{j(j-1)}$, con $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$] porque c_{-2} y c_{-6} son 0, $c_4 = 1/12$, $c_5 = 0$, $c_6 = 0$, $c_7 = 0$

Los únicos términos no nulos son: $c_0, c_4, c_8, \dots$ Los demás son 0.

La función es par. Luego (11) es la correcta.

4.2.4 (segundo parcial 16/17)

D. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio C. Sobre la función w puede afirmarse que:

(13) La restricción de w al eje real es una función que toma valores reales y tiene un mínimo relativo.

(14) La restricción de w al eje real es una función que toma valores reales y tiene un máximo relativo.

(15) La restricción de w al eje real es una función que toma valores reales y tiene un punto de inflexión.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Los coeficientes son reales. Luego tiene valores reales.
Y tiene un mínimo (es creciente, porque son todos positivos).
en 0.

4.2.5 (segundo parcial 17/18)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (\mathrm{i}z^2 + z^4)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = \mathrm{i}.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_j, verifican la igualdad $c_{j+2} = \dfrac{\mathrm{i}c_{j-2} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $j \geq 5$ y $\mathrm{Re}(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(10) Los coeficientes c_{2j}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $\mathrm{Re}(c_{2j+1}) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y $\mathrm{Re}(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(11) Los coeficientes c_j, verifican la igualdad $c_{j+2} = \dfrac{\mathrm{i}c_{j-2} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $j \geq 5$ y existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(w(x_0)) \neq 0$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

c_{6j+}

$c_0 \quad c_6 \quad c_{12}$
$c_1 \quad c_7 \quad c_{13}$
$c_2 \quad c_8 \quad c_{14}$
$c_3 \quad c_9 \quad c_{15}$
$c_4 \quad c_{10} \quad c_{16} \quad \dots$
$c_5 \quad c_{11} \quad c_{17}$

$$\sum j(j-1) c_j z^{j-2} = \sum i\, c_{j-4} z^{j-2} + \sum c_{j-6} z^{j-2}$$

$$c_j = \frac{i \cdot c_{j-4} + c_{j-6}}{j(j-1)},$$

$c_0 = 0$, $c_1 = i$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$, $c_5 = -1/20$, $c_6 = 0$, $c_7 = 0$, ⋮ → (10) es Falso

$\mathrm{Re}(w(x)) = ?$

los coeficiente alternan entre reales puros e imaginarios puros.
Podemos poner: $w(z) = i \cdot \underbrace{w_1(z)}_{\text{coefic. im}} + \underbrace{w_2(z)}_{\text{coefic. reales}}$ → como esto no es nulo, para algún x, $\mathrm{Re}\,w \neq 0$ → (11)

[Si fuera $\mathrm{Re}(w) = 0\ \forall x$, $\mathrm{Re}(w^k) = 0\ \forall x$, pero $\mathrm{Re}(w^{(5)}(0)) \neq 0$]

4.2.6 (segundo parcial 19/20)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - z^3w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = \mathrm{i}.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w cumple que:

(9) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{w(z) - \mathrm{i}(z + \frac{z^6}{30})}{z^{11}} = \frac{\mathrm{i}}{3300}$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(10) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{w(z) - \mathrm{i}(z + \frac{z^6}{30})}{z^{11}} = \frac{\mathrm{i}}{3300}$ y $\overline{w(z_1)} = w(\overline{z_1})$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$.

(11) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{w(z) - \mathrm{i}(z + \frac{z^6}{30})}{z^{11}} = \infty$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

z^{j-2}: $\quad j(j-1)c_j = c_{j-5} \Rightarrow c_j = \dfrac{c_{j-5}}{j(j-1)}$ / $c_0 = 0$, $c_1 = i$

Calculemos los 12 primeros términos:

$c_0 = 0$, $c_1 = i$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$

$c_5 = 0$, $c_6 = i/30$, $c_7 = 0$, $c_8 = 0$, $c_9 = 0$

$c_{10} = 0$, $c_{11} = i/11\cdot 10\cdot 30$

$$w(z) - i\left(z + \frac{z^6}{30}\right) \approx z^{11}\cdot i/3300 \Rightarrow \lim = \frac{i}{3300}$$

$\overline{ab} = \bar a\,\bar b$; $\overline{a+b} = \bar a + \bar b$

Por otro lado, todos son imaginarios puros. $\overline{w(z)} = -w(\bar z)$

Luego $\overline{w(z)} = w(\bar z) \Leftrightarrow$ ambos son 0.

basta con que no sean 0 para que no coincidan.

→ (9) es verdadera.

4.2.7 (final ordinario 14/15)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (1+z)^2 w = \exp(z) \text{ en } \mathbb{C},$$
$$w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(5) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1$.

(6) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = \frac{2}{3}$.

(7) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = \frac{4}{3}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo puede afirmarse que:

(9) $c_4 = \frac{3}{4}$ y $c_{j+2} = \frac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \geq 3$.

(10) $c_4 = \frac{5}{6}$ y $c_{j+2} = \frac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)} + \frac{1}{(j+2)!}$ para todo $j \geq 4$.

(11) $c_4 = \frac{3}{8}$ y $c_{j+2} = \frac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)} + \frac{1}{(j+2)!}$ para todo $j \geq 4$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$z^{j-2} \to j(j-1)c_j = c_{j-2} + 2c_{j-3} + c_{j-4} + \frac{1}{(j-2)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_j = \frac{c_{j-2} + 2c_{j-3} + c_{j-4}}{j(j-1)} + \frac{1}{j!}$

(11)

$c_0 = 1$

$c_1 = 1$

$c_2 = 1/2 + 1/2 = 1$

$c_3 = \frac{1+2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

(6)

$c_4 = \frac{1+2+1}{12} + \frac{1}{4!} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

4.2.8 (final ordinario 15/16)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (1 + \exp(z))w = 0 \text{ en } \mathbb{C},$$
$$w(0) = 1, \; \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior, $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es una función entera cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{30} = \frac{1}{(30)(29)}(c_{27} + c_{28} + \sum_{i=0}^{26} \frac{c_i}{(28-i)!})$.

(10) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{30} = \frac{1}{(30)(29)}(c_{27} + c_{28} + \sum_{i=0}^{27} \frac{c_i}{(28-i)!})$.

(11) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{30} = \frac{1}{(30)(29)}(2c_{28} + \sum_{i=0}^{27} \frac{c_i}{(28-i)!})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$c_0 = 1$, $c_1 = 1$ (no hay duda)

$$\sum c_j \, j(j-1) z^{j-2} = \left(1 + \sum \frac{z^j}{j!}\right) \cdot \left(\sum c_j z^j\right)$$

Coeficiente de z^{28}:

$i=0 \to 1/28!$ ✓

$i=1 \to 1/27!$

$$c_{30} \cdot 30 \cdot 29 = 2c_{28} + \sum_{i=0}^{27} \frac{c_i}{(28-i)!}$$

$\to$ (11) en la breve.

4.2.9 (final ordinario 16/17)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (z + z^4)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_{3j+1}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son no nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es impar .

(10) Los coeficientes c_{3j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que no es par ni impar.

(11) Los coeficientes c_{3j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es impar.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio C. Sobre la función w puede afirmarse que:

(13) La restricción de w al intervalo real $]1, +\infty[$ es una función que toma valores reales y tiene extremos relativos.

(14) La restricción de w al intervalo real $]1, +\infty[$ es una función que toma valores reales, carece de extremos relativos y presenta un punto de inflexión.

(15) La restricción de w al intervalo real $]1, +\infty[$ es una función que toma valores reales y su gráfica carece de puntos de inflexión.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$$\sum j(j-1) c_j z^{j-2} = \sum c_j z^{j+1} + \sum c_j z^{j+4}$$

z^{j-2}: $\quad c_j j(j-2) = c_{j-3} + c_{j-6} \Rightarrow c_j = \dfrac{c_{j-3} + c_{j-6}}{j(j-1)}$

$c_0 = 0 \quad c_3 = 0$

$c_1 = 1 \quad c_4 = 1/12 \ \ldots$

$c_2 = 0 \quad c_5 = 0$

Ya se ve que c_{3j+1} son los únicos no nulos.

La función no es ni par ni impar (hay términos pares e impares). Luego (10) es correcta.

Respecto a los otros, son términos positivos, la función es estrictamente creciente. De hecho, $w'' > 0$ siempre, luego w' nunca se anula, porque $w'(0) = 1$, y es creciente.

La correcta es la (15), porque además $w(t) \geq e^{z}$, así que no tiene extremos relativos.

4.2.10 (final ordinario 18/19)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^5 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - z^4 w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 0.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w y los coeficientes c_k de su desarrollo cumplen que:

→ Una función entera no puede ser acotada (Tª Liouville)

(9) Los coeficientes c_{3j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{12} = \dfrac{7}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(10) Los coeficientes c_{7j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{12} = \dfrac{7}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(11) Los coeficientes c_{6j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la función w está acotada en $\mathbb{C}$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Proof [edit]

The theorem follows from the fact that holomorphic functions are analytic. If f is an entire function, it can be represented by its Taylor series about 0:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

where (by Cauchy's integral formula)

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta$$

and C_r is the circle about 0 of radius $r > 0$. Suppose f is bounded: i.e. there exists a constant M such that $|f(z)| \le M$ for all z. We can estimate directly

$$|a_k| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{k+1}}\,|d\zeta| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r} \frac{M}{r^{k+1}}\,|d\zeta| = \frac{M}{2\pi r^{k+1}}\oint_{C_r} |d\zeta| = \frac{M}{2\pi r^{k+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^k},$$

where in the second inequality we have used the fact that $|z| = r$ on the circle C_r. But the choice of r in the above is an arbitrary positive number. Therefore, letting r tend to infinity (we let r tend to infinity since f is analytic on the entire plane) gives $a_k = 0$ for all $k \ge 1$. Thus $f(z) = a_0$ and this proves the theorem.

$$\sum c_j j (j-1) z^{j-2} = \sum j c_j z^{j+4} + \sum c_j z^{j+4}$$

$c_j = \alpha_j \cdot c_{j-6}$

$$c_{j+2} = \frac{(j-4)\cdot c_{j-4} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)} = \frac{(j-3)}{(j+2)(j+1)} \cdot c_{j-4}$$

$$\to c_j = \frac{j-5}{j(j-1)} c_{j-6}$$

$c_0 = 1$ $\quad c_6 = \alpha_6 \cdot c_0$

$c_1 = 0$ $\quad \vdots$

$c_2 = 0$

$c_3 = 0$

$c_4 = 0$

$c_5 = 0$

Es decir, sólo c_{6j} a todo

- $c_{3j+1} = 0 \ \forall j$ (correcto)
- $c_{12} = \dfrac{7}{12 \cdot 11} \cdot \dfrac{1}{6 \cdot 5}$ ✓
- La función no es acotada (Liouville)

$$w'' = z^5 w' + z^4 w$$