EDOs lineales de segundo orden

EDO lineal de segundo orden (punto singular)

4.1.1 (segundo parcial 14/15)

F. Considérese la ecuación diferencial

$$z(2+z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + 2(1+z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \sqrt{2}w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, distinta de la función nula, analítica en $B((0+\mathrm{i}0), 2)$ y tal que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w_1(z)}{z} = 0$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w_2(z)}{\ln(z)} = 1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w_1(z) - z}{z} = 0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.1.2 (segundo parcial 16/17)

E. Considérese la ecuación diferencial

$$z\exp(z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \frac{(2+z)^2}{9\sin(z)}w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(17) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w_1(z) - 2\sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[3]{z^2}} = 0$.

(18) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w_1(z)}{\sqrt[6]{z^5}} = 0$.

(19) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w_2(z)}{\ln(z)} = 1$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.1.3 (segundo parcial 17/18)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\frac{(1+z)^2}{2\sin(z)}w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\ln(z)}=1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)-z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=0$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.1.4 (segundo parcial 19/20)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\sinh(2z)}{4}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\sin(z)w=0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s1}(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_{s1}(z)}{\ln(z)}=1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}w_{s2}(z)=0$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_{s3}(z)}{\sqrt{z}}=0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.1.5 (final ordinario 14/15)

E. Considérese la ecuación diferencial

$$z(2+z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-4(1+z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\frac{4}{z}w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^2}=1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\ln(z)}=1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}w_1(z)=1$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.1.6 (final extraordinario 15/16)

C. Considérese la ecuación diferencial

$$z^4\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-\frac{z}{2}\sin(7z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+(\sinh(5z^2)+z^3)w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(9) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^3}=0$.

(10) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{z^{\sqrt{5}}\ln(z)}=1$.

(11) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^2}=0$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $w:D\to\mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D de la forma $w(z)=z^{\lambda_1}(1+p_1(z))$, donde $\lambda_1\in\mathbb{R}^+$, $\lambda\notin\mathbb{N}$ y $p_1:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es una función analítica tal que $p_1(0)=0$. Sobre la función p_1 puede afirmarse que:

(13) $\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)|\leq\frac{4}{5}$.

(14) $\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0))>\frac{4}{5}$.

(15) $\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0))<-\frac{4}{5}$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.1.7 (final ordinario 15/16)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$(z^4+z^5)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+z^2\sin(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-4(1-\cos(z))w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z^2}=0$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_2(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\ln(z)}=1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enuncialdo, $w_1(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_1(z)}{z}=0$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Sea $w:D\to\mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D de la forma $w(z)=z^{\lambda_1}(1+p_1(z))$, donde λ_1 es un número real positivo y $p_1:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es una función analítica tal que $p_1(0)=0$. Sobre la función p_1 puede afirmarse que:

(17) $|\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)|\leq\frac{1}{7}$.

(18) $\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)>\frac{1}{7}$.

(19) $\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}z}(0)<-\frac{1}{7}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.1.8 (final ordinario 16/17)

E. Considérese la ecuación diferencial

$$z\exp(z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-\ln(1+z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\frac{(1+z)^2}{4\sin(z)}w=0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(17) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{z}=1$.

(18) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\sqrt{z}}=0$.

(19) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim_{z\to 0}\frac{w_2(z)}{\sqrt{z}\ln(z)}=1$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.1.9 (final ordinario 18/19)

D. Considérese la ecuación diferencial

$$z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\exp(z)w=0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D\subset\mathbb{C}$, verifican que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_a, tal que $w_a(z)=1+\mathrm{Ln}(z)+o(z)$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_b, distinta de la función nula, tal que $w_b(z)=3+\sqrt[3]{z^2}+o(\sqrt[3]{z^2})$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, w_c, distinta de la función nula, tal que $w_c(z)=o(\sqrt[3]{z^2})$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

EDO lineal de segundo orden (punto no singular)

4.2.1 (segundo parcial 14/15)

D. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}-(1+z^2)w=0 \text{ en } \mathbb{C},$$
$$w(0)=1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0)=1.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(5) $c_0=1, c_1=1$, y $c_{j+2}=\dfrac{c_j-c_{j-2}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j\geq 2$.

(6) $c_0=1, c_1=1$, y $c_{j+2}=\dfrac{c_j-c_{j-2}}{(j+1)j}$ para todo $j\geq 2$.

(7) $c_2=\dfrac{1}{2}, c_3=\dfrac{1}{6}$, y $c_{j+2}=\dfrac{c_j+c_{j-2}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j\geq 2$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.2.2 (segundo parcial 14/15)

E. Sea $w:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D. Sobre la función w puede afirmarse que:

(9) Para todo $x\in\mathbb{R}$ con $x>0$ se verifica que $\exp(x)\leq w(x)$.

(10) Para todo $x\in\mathbb{R}$ con $x>0$ se verifica que $w(x)\leq\exp(x)+x$.

(11) Para todo $x\in\mathbb{R}$ con $x>0$ se verifica que $x\leq w(x)\leq 2+x^2$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.2.3 (segundo parcial 16/17)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - (z^2 + z^6)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 0.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_{4j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que no es par ni impar.

(10) Los coeficientes c_{4j+3}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son no nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es impar .

(11) Los coeficientes c_{4j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es par.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.2.4 (segundo parcial 16/17)

D. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio C. Sobre la función w puede afirmarse que:

(13) La restricción de w al eje real es una función que toma valores reales y tiene un mínimo relativo.

(14) La restricción de w al eje real es una función que toma valores reales y tiene un máximo relativo.

(15) La restricción de w al eje real es una función que toma valores reales y tiene un punto de inflexión.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.2.5 (segundo parcial 17/18)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - (\mathrm{i}z^2 + z^4)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = \mathrm{i}.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_j, verifican la igualdad $c_{j+2} = \dfrac{\mathrm{i}c_{j-2} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $j \geq 5$ y $\mathrm{Re}(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(10) Los coeficientes c_{2j}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $\mathrm{Re}(c_{2j+1}) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y $\mathrm{Re}(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(11) Los coeficientes c_j, verifican la igualdad $c_{j+2} = \dfrac{\mathrm{i}c_{j-2} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $j \geq 5$ y existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(w(x_0)) \neq 0$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.2.6 (segundo parcial 19/20)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^3 w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = \mathrm{i}.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w cumple que:

(9) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - \mathrm{i}(z + \frac{z^6}{30})}{z^{11}} = \dfrac{\mathrm{i}}{3300}$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(10) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - \mathrm{i}(z + \frac{z^6}{30})}{z^{11}} = \dfrac{\mathrm{i}}{3300}$ y $\overline{w(z_1)} = w(\overline{z_1})$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$.

(11) $\lim_{z\to 0} \dfrac{w(z) - \mathrm{i}(z + \frac{z^6}{30})}{z^{11}} = \infty$ y existe algún $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{w(z_1)} \neq w(\overline{z_1})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.2.7 (final ordinario 14/15)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (1+z)^2 w = \exp(z) \text{ en } \mathbb{C},$$
$$w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(5) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1$.

(6) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = \frac{2}{3}$.

(7) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = \frac{4}{3}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo puede afirmarse que:

(9) $c_4 = \frac{3}{4}$ y $c_{j+2} = \dfrac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \geq 3$.

(10) $c_4 = \frac{5}{6}$ y $c_{j+2} = \dfrac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)} + \dfrac{1}{(j+2)!}$ para todo $j \geq 4$.

(11) $c_4 = \frac{3}{8}$ y $c_{j+2} = \dfrac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)} + \dfrac{1}{(j+2)!}$ para todo $j \geq 4$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.2.8 (final ordinario 15/16)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (1+\exp(z))w = 0 \text{ en } \mathbb{C},$$
$$w(0) = 1, \ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior, $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es una función entera cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{30} = \frac{1}{(30)(29)}(c_{27} + c_{28} + \sum_{i=0}^{26} \frac{c_i}{(28-i)!})$.

(10) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{30} = \frac{1}{(30)(29)}(c_{27} + c_{28} + \sum_{i=0}^{27} \frac{c_i}{(28-i)!})$.

(11) $c_0 = 1, c_1 = 1$, y $c_{30} = \frac{1}{(30)(29)}(2c_{28} + \sum_{i=0}^{27} \frac{c_i}{(28-i)!})$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.2.9 (final ordinario 16/17)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (z + z^4)w = 0 \text{ en } \mathbb{C}, \ w(0) = 0, \ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_{3j+1}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son no nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es impar .

(10) Los coeficientes c_{3j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que no es par ni impar.

(11) Los coeficientes c_{3j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es impar.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio C. Sobre la función w puede afirmarse que:

(13) La restricción de w al intervalo real $]1, +\infty[$ es una función que toma valores reales y tiene extremos relativos.

(14) La restricción de w al intervalo real $]1, +\infty[$ es una función que toma valores reales, carece de extremos relativos y presenta un punto de inflexión.

(15) La restricción de w al intervalo real $]1, +\infty[$ es una función que toma valores reales y su gráfica carece de puntos de inflexión.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.2.10 (final ordinario 18/19)

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - z^5 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - z^4 w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 0.$$

La solución del problema anterior es una función entera $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. La función w y los coeficientes c_k de su desarrollo cumplen que:

(9) Los coeficientes c_{3j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{12} = \dfrac{7}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(10) Los coeficientes c_{7j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y $c_{12} = \dfrac{7}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5}$. La función w **no** está acotada en $\mathbb{C}$.

(11) Los coeficientes c_{6j+1}, para **todo** $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la función w está acotada en $\mathbb{C}$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Funciones de Bessel

4.3.1 (segundo parcial 14/15)

G. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(1,\theta,t) = 0 \quad (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(r,\theta,0) = J_1(\alpha r)\sin(\theta), \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0, \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde α es un número real mayor que cero tal que $J_1(\alpha) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \sin(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r)$ donde (λ_{m1}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.
(18) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha^2 t)J_1(\alpha r)\sin(\theta)$.
(19) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha t)J_1(\alpha r)\sin(\theta)$.
(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.3.2 (segundo parcial 16/17)

F. El valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_3(x)}{\int_0^x J_2(t)\mathrm{d}t}.$$

es:

(21) $\frac{1}{2}$. **(22)** $\frac{1}{4}$.

(23) $\frac{1}{8}$. **(24)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$.

4.3.3 (segundo parcial 17/18)

E. Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{1}{x^4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}) + 4w = 0, \quad \text{en }]0,+\infty[.$$

Sobre las soluciones reales de la ecuación anterior, $w :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, que además cumplen la condición $|\lim_{x\to 0^+} w(x)| < +\infty$ puede afirmarse que:

(17) Existen y son de la forma $w(x) = \frac{C}{x\sqrt{x}}J_{\frac{3}{2}}(2x)$ donde $C \in \mathbb{R}$.
(18) Existen y son de la forma $w(x) = \frac{C}{x^2\sqrt{x}}J_{\frac{3}{2}}(x)$ donde $C \in \mathbb{R}$.
(19) Existen y son de la forma $w(x) = C\sqrt{x}J_{-\frac{3}{2}}(2x)$ donde $C \in \mathbb{R}$.
(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.3.4 (final ordinario 13/14)

G. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(1,\theta,t) = 0 \quad (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(r,\theta,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(J_0(ar))\cos(\theta), \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde a es un número real mayor que cero tal que $J_1(a) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar mediante el desarrollo $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r)$ donde (λ_{m1}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(r)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(25) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.
(26) $u(r,\theta,t) = -a\exp(-a^2t)J_1(ar)\cos(\theta)$.
(27) $u(r,\theta,t) = -\frac{1}{a}\exp(-a^2t)J_1(ar)\cos(\theta)$.
(28) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.3.5 (final ordinario 14/15)

F. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(1,\theta,t) = 0 \quad (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(r,\theta,0) = J_0(\alpha r), \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0, \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde α es un número real mayor que cero tal que $J_0(\alpha) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k0}(t)J_0(\lambda_{k0}r)$ donde (λ_{m0}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_0(z)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.
(18) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha^2 t)J_0(\alpha r)$.
(19) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha t)J_0(\alpha r)$.
(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.3.6 (final extraordinario 15/16)

E. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(1,\theta,t) = 0 \quad \text{para } (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(r,\theta,0) = J_1(\alpha r)\cos(\theta) + J_2(\beta r)\sin(2\theta), \quad \text{para } (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde α, β son dos números reales mayores que cero tales que $\alpha \neq \beta$ $J_1(\alpha) = J_2(\beta) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r) + \sin(2\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k2}(t)J_2(\lambda_{k2}r)$ donde (λ_{m1}) (respectivamente (λ_{m2})) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$ (respectivamente $J_2(z)$). Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\exp(-\alpha^2 t)J_1(\alpha r) + \sin(2\theta)\exp(-\beta^2 t)J_2(\beta r)$.
(18) $u(r,\theta,t) = \exp(-\alpha^2 t)(\cos(\theta)J_1(\alpha r) + \sin(2\theta)J_2(\beta r))$.
(19) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.
(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

4.3.7 (final ordinario 15/16)

F. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(1,\theta,t) = 0 \quad \text{para } (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(r,\theta,0) = J_1(\alpha r)\cos(\theta), \quad \text{para } (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde α es un número real mayor que cero tal que $J_1(\alpha) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r)$ donde (λ_{m1}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(21) $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\exp(-\alpha^2 t)J_1(\alpha r)$.
(22) $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\exp(-\alpha t)J_1(\alpha r)$.
(23) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.
(24) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_1(1) \neq 0$.

4.3.8 (final ordinario 16/17)

F. El valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_3(x)+4J_2(x)-xJ_1(x)}{\int_0^x J_2(t)\mathrm{d}t}.$$

es:

(21) $\frac{1}{2}$. **(22)** $\frac{1}{4}$.

(23) $\frac{1}{8}$. **(24)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$.

4.3.9 (final ordinario 18/19)

E. Considérese el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_2(4x)-xJ_1(x)+x^2J_0(x)}{1-J_0(x)}.$$

El límite anterior existe y vale:

(17) -8. **(18)** 8.

(19) 10. **(20)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$.