AmM-Ordinario-16-w.pdf

Fibonacci_

Ampliación de Matemáticas

3º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

Asignatura: ______ Curso: ______ Grupo: ______

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque — Marque así

D.N.I. — EXPEDIENTE — Versión — Curso — Grupo — Auxiliar — Respuestas

Ampliación de Matemáticas (Versión 1), (25-01-2017)

A. Sea $F = F(\omega)$ la transformada de Fourier del producto de convolución $(f * f)$, donde $f = f(x)$ es la funcion característica del intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = 1, \text{ en } -1 \le x \le 1; \quad f(x) = 0, \text{ en } x < -1 \text{ y } x > 1.$$

La funcion F cumple:

(1) $F(\omega) = \dfrac{(\sin\omega)^2}{2\omega^2}$. (2) $F(\omega) = \dfrac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

(3) $F(0) = 4$. (4) $F(\pi/2) = 0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 2w(t) = g(t) \text{ en }]0, +\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{dw}{dt}(0) = 1,$$

donde $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = t^2 - t$ si $t \in [0, 1[$ y $g(t) = 0$ si $t \in [1, +\infty[$. Sobre la función w se puede afirmar que:

(5) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(2) = \dfrac{3 - \exp(-2)}{20}$.

(6) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(2) = \dfrac{3 + \exp(-2)}{20}$.

(7) Su transformada de Laplace es tal que $\mathcal{L}(w(t))(2) = \dfrac{2 - \exp(-2)}{20}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dz^2} - (z + z^4)w = 0 \text{ en } \mathbb{C},\ w(0) = 0,\ \frac{dw}{dz}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(9) Los coeficientes c_{3j+1}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son no nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es impar .

(10) Los coeficientes c_{3j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que no es par ni impar.

(11) Los coeficientes c_{3j+2}, para todo $j \in \mathbb{N}$, son nulos y la restricción de w al eje real es una función que toma valores reales que es impar.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio C. Sobre la función w puede afirmarse que:

(13) La restricción de w al intervalo real $]1, +\infty[$ es una función que toma valores reales y tiene extremos relativos.

(14) La restricción de w al intervalo real $]1, +\infty[$ es una función que toma valores reales, carece de extremos relativos y presenta un punto de inflexión.

(15) La restricción de w al intervalo real $]1, +\infty[$ es una función que toma valores reales y su gráfica carece de puntos de inflexión.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese la ecuación diferencial

$$z\exp(z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} - \ln(1+z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \frac{(1+z)^2}{4\sin(z)}w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(17) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w_2(z)}{z} = 1$.

(18) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, distinta de la función nula, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w_2(z)}{\sqrt{z}} = 0$.

(19) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w_2(z)}{\sqrt{z}\ln(z)} = 1$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

F. El valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_3(x) + 4J_2(x) - xJ_1(x)}{\int_0^x J_2(t)\mathrm{d}t}.$$

es:

(21) $\frac{1}{2}$.

(22) $\frac{1}{4}$.

(23) $\frac{1}{8}$.

(24) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$.

Examen 25/01/2017

A. $f(x)=1$ en $-1\leq x\leq 1$; $f(x)=0$ en $x<-1$ y $x>1$

$$\mathcal{F}[f*f](\omega) = \hat{f}(\omega)\cdot\hat{f}(\omega) = [\hat{f}(\omega)]^2$$

$2i\,\text{sen}(\omega)$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-i\omega x}\,dx = -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big]_{-1}^{1} = +\frac{1}{i\omega}\left(-e^{-i\omega}+e^{i\omega}\right)$$

$$\mathcal{F}[f*f](\omega) = \frac{4(\text{sen}(\omega))^2}{\omega^2} \longrightarrow \left[F(0)=\lim_{\omega\to 0}\frac{4(\overset{\to\omega}{\text{sen}\,\omega})^2}{\omega^2} = 4\right]$$

B. $\begin{cases} \frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 2w(t) = g(t) \\ w(0)=0, \quad \frac{dw}{dt}(0)=1 \end{cases} \longrightarrow (z^2+2z+2)\,\mathcal{L}[w(t)](z) = 1+\mathcal{L}[g(t)](z)$

$$g(t) = t(t-1)\left(H(t)-H(t-1)\right) = \underbrace{H(t)(t^2-t)}_{H(t)t^2-H(t)t} - H(t-\overset{a}{1})\overbrace{((t+1)-1)(t-1)}^{(t-1)^2+(t-1)}$$

$$\mathcal{L}[t^{\nu}] = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}} \qquad \mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = \exp(-az)\,\mathcal{L}[f(t)](z)$$

Recordar: $\mathcal{L}[H(t)](z)=1$

$$\mathcal{L}[g(t)](z) = \frac{\overset{2}{\Gamma(3)}}{z^3} - \frac{\Gamma(2)}{z^2} - \exp(-z)\left(\underbrace{\mathcal{L}[(t+1)t]}_{\frac{\Gamma(3)}{z^3}+\frac{\Gamma(2)}{z^2}}\right)$$

$$\mathcal{L}[g(t)](z) = \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \exp(-z)\left(\frac{2}{z^3}+\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\mathcal{L}[w(t)](z) = \frac{1}{z^2+2z+2}\left(1+\frac{1}{z^2}\left(\frac{2}{z} - 1 - \exp(-z)\left(\frac{2}{z}+1\right)\right)\right)$$

$$\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{4}\left(\cancel{1}-\cancel{1}-\exp(-2)(1+1)\right)\right)$$

$$\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{2}\exp(-2)\right)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[w(t)](2) = \frac{1}{20}\left(2-\exp(-2)\right)}$$

c. $\begin{cases} \frac{d^2w}{dz^2} - (z+z^4)w = 0 \\ w(0) = 0 \;;\; \frac{dw}{dz}(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k z^k$

$$w(z) = 1\cdot w(0)^{0} + z\cdot \frac{dw}{dz}(0)^{1} + \sum_{k=2}^{+\infty} C_k z^k = z + \sum_{k=2}^{+\infty} C_k z^k$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)C_k z^{k-2} - (z+z^4)\left(z + \sum_{k=2}^{+\infty} C_k z^k\right) = 0$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)C_k z^{k-2} - \boxed{(z^2+z^5)} - \sum_{k=2}^{+\infty} C_k z^{k+1} - \sum_{k=2}^{+\infty} C_k z^{k+4} = 0$$

→ Buscamos casos de K para unir con el $\boxed{\text{término señalado}}$:

z^0: $2(1)C_2 = 0 \to C_2 = 0$

z^1: $3(2)C_3 = 0 \to C_3 = 0$

z^2: $4(3)C_4 - 1 = 0 \to C_4 = \frac{1}{4(3)}$

z^3: $5(4)C_5 - \cancel{C_2}^{0} = 0 \to C_5 = 0$

z^4: $\ldots \to C_6 = 0$

z^5: $7(6)C_7 - 1 - \cancel{C_4}^{0} - \cancel{C_1}^{0} = 0 \to C_7 = \frac{1}{7(6)}$

...

z^n: $(n+2)(n+1)C_{n+2} - C_{n-1} - C_{n-4} = 0 \to C_{n+2} = \frac{C_{n-1}+C_{n-4}}{(n+2)(n+1)}$

$$C_{k+6} = \frac{C_{k+3}+C_k}{(k+6)(k+5)}$$

$$C_{3j+1} \neq 0 \;;\; C_{3j} = 0 \;;\; C_{3j+2} = 0$$

Al ser $C_1 \neq 0$ y $C_4 \neq 0$ la función w, que es entera, no puede ser par ni impar.

D. Al ser todos $C_k \geq 0$ → w es estrictamente creciente y no puede presentar extremos relativos. Además, $w(z) > 0$ para todo $z > 0$ de donde $\frac{d^2w}{dz^2}(z) > 0$ para todo z y en consecuencia la gráfica de w no presenta puntos de inflexión.

E. $z\exp(z)\dfrac{d^2w}{dz^2} - \ln(1+z)\dfrac{dw}{dz} + \dfrac{(1+z)^2}{4\operatorname{sen}(z)}w = 0$

$$\left(\frac{d^2w}{dz^2}(z) = \frac{b(z)}{z}\frac{dw}{dz}(z) + \frac{a(z)}{z^2}w(z)\right) \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(0) & b(0)+1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \exp(-z)\left[\frac{\ln(1+z)}{z}\frac{dw}{dz} - \frac{(1+z)^2}{4z\operatorname{sen} z}\cdot\frac{z}{z}\cdot w\right]$$

$$b(z) = \exp(-z)\cdot\ln(1+z) \longrightarrow b(0) = 0$$

$$a(z) = -\exp(-z)\cdot\frac{z(1+z)^2}{4\operatorname{sen} z} \longrightarrow a(0) = \lim_{z\to 0} -\frac{\cancel{z}(1+z)^2}{4\underbrace{\operatorname{sen} z}_{\simeq \cancel{z}}\exp(z)} = -\frac{1}{4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Autovalores}: -\lambda(1-\lambda) + \frac{1}{4} = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \longrightarrow \lambda = 1/2 \text{ doble}$$

$\rightarrow$ Como $\lambda_1 = \lambda_2$: $\quad u_1 = z^{\lambda_1}p_1(z)$; $\quad p_1(0) = 1$

$u_2 = u_1\ln(z) + z^{\lambda_2}p_2(z)$ $\quad$ p_2 puede ser la función nula

$$w(z) = C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\left(\sqrt{z}\,p_1(z)\ln(z) + \sqrt{z}\,p_2(z)\right)$$

Para $C_1 = 0$; $C_2 = 1 \longrightarrow w_2(z) = \sqrt{z}\,p_1(z)\ln(z) + \sqrt{z}\,p_2(z)$

$$\left[\lim_{z\to 0}\frac{w_2}{\sqrt{z}\ln z} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\cancel{\sqrt{z}}\overbrace{p_1(z)}^{1}\cancel{\ln(z)}}{\cancel{\sqrt{z}}\cancel{\ln(z)}} + \frac{\cancel{\sqrt{z}}\overbrace{p_2(z)}^{0}}{\cancel{\sqrt{z}}\ln(z)}\right) = 1\right]$$

$$\frac{0}{1/z} = 0\cdot z = 0 \quad (z\to 0)$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{w_2}{\sqrt{z}} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\cancel{\sqrt{z}}\overbrace{p_1(z)}^{1}\overbrace{\ln(z)}^{-\infty}}{\cancel{\sqrt{z}}} + \frac{\cancel{\sqrt{z}}\overbrace{p_2(z)}^{0}}{\cancel{\sqrt{z}}}\right)$$

F. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{J_3(x) + 4J_2(x) - xJ_1(x)}{\int_0^x J_2(t)\,dt}$

$$\left\{\begin{array}{l} J_1 = \dfrac{1}{\Gamma(2)}\left(\dfrac{x}{2}\right) + O(x^2) \\ J_2 = \dfrac{1}{\Gamma(3)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + O(x^3) \\ J_3 = \dfrac{1}{\Gamma(4)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + O(x^4) \end{array}\right.$$

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x}{2}}{\int_0^x\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2dx \quad \frac{1}{24}x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{48}\cancel{x^3}}{\frac{1}{24}\cancel{x^3}} = \frac{1}{2}\right]$$