Solución Parcial I (01-07-2021)

Ejercicio A.

Solución general del sistema lineal: $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n}$

- Autovalores de A

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\,(\lambda-2)^2 \longrightarrow \begin{cases} \text{Multiplicidad algebraica de } \lambda_1 = 2 \longrightarrow \alpha_1 = 2 \\ \text{Multiplicidad algebraica de } \lambda_2 = 0 \longrightarrow \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Multiplicidad geométrica de } \lambda_1 = 2 \longrightarrow d_1 = \dim \mathcal{N}(A-\lambda_1 I) = 3 - rg(A-\lambda_1 I) = 3-1 = 2 = \alpha_1 \\ \text{Multiplicidad geométrica de } \lambda_2 = 0 \longrightarrow d_2 = 1 = \alpha_2 \end{cases} \Longrightarrow A \text{ es diagonaliza}$$

- Autovectores asociados

1. Autovector asociado a $\lambda_2 = 0$

$$(A-\lambda_2 I)\,\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{matrix} \longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Autovectores asociados a $\lambda_1 = 2$

$$(A-2I)\,\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow v_1 - v_2 + v_3 = 0 \longrightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución general: $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n} = C_1\lambda_2^n \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + C_2\lambda_1^n \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + C_3\lambda_1^n \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

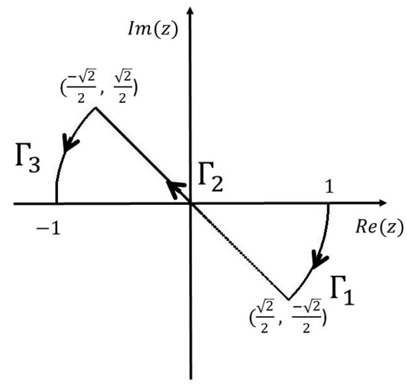
Sol. particular del problema de valores iniciales: $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{0} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_2 + C_3 = 2 \\ C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 - C_3 = 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_1 = -1 \\ C_2 = 3 \\ C_3 = -1 \end{matrix}$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + 2^n \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad n \geq 0} \text{ o bien } \boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n} = 2^n \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad n > 0}$$

Ejercicio B

$$\int_\Gamma \frac{|z|^2}{z^2}\,dz$$

siendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ el contorno orientado de la figura, con origen en el punto $z_I = 1$ y final en el punto $z_F = -1$. Γ_1 y Γ_3 son arcos de la circunferencia centrada en el origen y radio unidad.



$$\int_\Gamma \frac{|z|^2}{z^2}\,dz = \int_\Gamma \frac{\bar{z}}{z}\,dz = \int_\Gamma f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

siendo $z(t)$ la parametrización del contorno Γ que, en este caso, es la unión de tres arcos simples regulares por lo que

$$\int_\Gamma \frac{\bar{z}}{z}\,dz = \int_{\Gamma_1} \frac{\bar{z}}{z}\,dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\bar{z}}{z}\,dz + \int_{\Gamma_3} \frac{\bar{z}}{z}\,dz$$

- $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{\bar{z}}{z}\,dz$ **Parametrización de** $(-\Gamma_1) : z(t) = e^{it} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$

$$\left.\begin{array}{l} z'(t) = i\,e^{it} \\ f(z(t)) = \dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{e^{-it}}{e^{it}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_{\Gamma_1} \frac{\bar{z}}{z}\,dz = -\int_{(-\Gamma_1)} \frac{\bar{z}}{z}\,dz = (-i)\int_{-\pi/4}^{0} e^{-it}\,dt = e^{-it}\Big|_{-\pi/4}^{0} = 1 - e^{i\pi/4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

- $\displaystyle\int_{\Gamma_2} \frac{\bar{z}}{z}\,dz$ **Parametrización de** $(-\Gamma_2) : z(t) = x(t) + iy(t) = (1-i)t \quad t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$$\left.\begin{array}{l} z'(t) = (1-i) \\ f(z(t)) = \dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{(1+i)}{(1-i)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_{\Gamma_2} \frac{\bar{z}}{z}\,dz = -\int_{-(\Gamma_2)} \frac{\bar{z}}{z}\,dz = -(1+i)\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dt = -2(1+i)\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}(1+i)$$

- $\displaystyle\int_{\Gamma_3} \frac{\bar{z}}{z}\,dz$ **Parametrización de** $\Gamma_3 : z(t) = e^{it} \quad t \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

$$\left.\begin{array}{l} z'(t) = i\,e^{it} \\ f(z(t)) = \dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{e^{-it}}{e^{it}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_{\Gamma_3} \frac{\bar{z}}{z}\,dz = i\int_{3\pi/4}^{\pi} e^{-it}\,dt = -e^{-it}\Big|_{3\pi/4}^{\pi} = 1 + e^{-3\pi/4\,i} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

Con todo: $\boxed{\displaystyle\int_\Gamma \frac{|z|^2}{z^2}\,dz = 2 - 2\sqrt{2}(1+i)}$

Ejercicio C. $\quad f(z) = (z-1)\left[e^{1/(z+1)} - 1\right]$

- $f(z)$ es el producto de dos funciones: $f_1(z) = z-1$, que es entera, y $f_2(z) = e^{1/(z+1)} - 1$, que es analítica en todo $\mathbb{C}$ salvo en el punto singular de $\dfrac{1}{z+1}$. Luego el único punto singular de $f(z)$ es $z_0 = -1$, por lo que su desarrollo de Laurent en torno a $z_0 = -1$ convergerá en todo $\mathbb{C} - \{-1\}$

  Partiendo del desarrollo de la exponencial, el desarrollo de Laurent de $f_2(z)$ es

$$f_2(z) = e^w - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, w^n \; - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{(z+1)^n} \; - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{(z+1)^n} \qquad 0 < |z+1| < \infty$$

  En $0 < |z+1| < \infty$,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1)f_2(z) = (z+1-2)f_2(z) = (z+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{(z+1)^n} \; - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{(z+1)^n} = \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{(z+1)^{n-1}}}_{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{(z+1)^n}} \quad -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{(z+1)^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{2}{n!}\right)}_{-\frac{2n+1}{(n+1)!}} \frac{1}{(z+1)^n} \end{aligned}$$

  De donde se deduce que:

  1. $z_0 = -1$ es una singularidad esencial de $f(z)$ (parte principal del desarrollo en serie de Laurent tiene infinitos términos)
  2. El coeficiente de $\dfrac{1}{z+1}$ en el desarrollo anterior es
  $$\operatorname{Res}(f(z);-1) = -\left.\frac{2n+1}{(n+1)!}\right|_{n=1} = -\frac{3}{2}$$
  3. La serie converge a $f(z)$ en todo $0 < |z+1| < \infty$

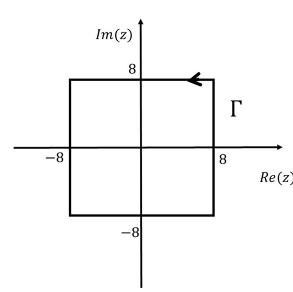
Ejercicio D.

- Como $f(z)$ es una función entera, por la *Fórmula de Cauchy generalizada*

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = 2\pi i\,\frac{f'(z_0)}{1!} = 8\pi z_0 \Longrightarrow f'(z_0) = -4i\,z_0 \Longrightarrow f(z_0) = -2i\,z_0^2 + k$$

  para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Como $f(0) = 0 \Longrightarrow k = 0 \Longrightarrow \boxed{f(z) = -2i\,z^2}$

$$I = \oint_\Gamma \frac{f(z)\cosh(z/2)}{\operatorname{senh}(z/2)}\,dz = \oint_\Gamma \underbrace{\frac{(-2i)z^2\cosh(z/2)}{\operatorname{senh}(z/2)}}_{g(z)}\,dz$$



Teorema de los residuos: $I = 2\pi i \displaystyle\sum_{z_k \in \mathring{\Gamma}} \operatorname{Res}(g(z); z_k)$

Puntos singulares de $g(z)$ (cociente de dos funciones enteras $\Longrightarrow$ son los ceros de $1/g$)

$$\operatorname{senh}(z/2)=\frac{e^{z/2}-e^{-z/2}}{2}=0 \Longleftrightarrow e^{z}=1=e^{2k\pi\, i} \Longleftrightarrow z_k=2k\pi\, i, \quad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

- $z_0=0$

$$\lim_{z\to 0} g(z)=\lim_{z\to 0}\underbrace{(-2i)\cosh(z/2)}_{=-2i}\ \underbrace{\frac{z^2}{\operatorname{senh}(z/2)}}_{\frac{0}{0}\ \text{(L'Hopital)}}=(-2i)\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\frac{1}{2}\cosh(z/2)}=0$$

por lo que es una singularidad evitable de $g(z)\Longrightarrow \operatorname{Res}(g(z);0)=0$

- $z_k=2k\pi\, i, \quad k=\pm1,\pm2,\dots$

$$g(z)=\frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } \begin{cases} P(z)=(-2i)z^2\cosh(z/2) \text{ analítica en } z_k \text{ y } P(z_k)=(-2i)z_k^2\cosh(k\pi\, i)\neq 0 \\ Q(z)=\operatorname{senh}(z/2) \text{ analítica en } z_k \text{ y } Q(z_k)=0 \\ Q'(z_k)=\frac{1}{2}\cosh(z_k/2)=\frac{1}{2}\cosh(k\pi\, i)\neq 0 \end{cases}$$

z_k es cero simple de $Q(z)\Longrightarrow$ cero simple de $1/g(z)\Longrightarrow$ polo simple de $g(z)$ y

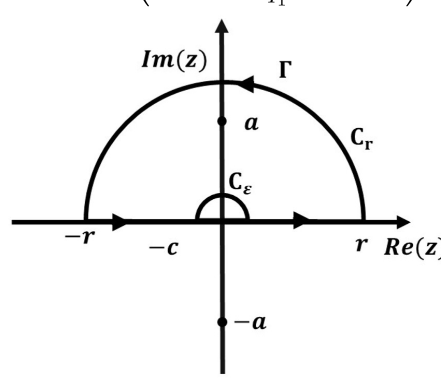
$$\operatorname{Res}(g(z);z_k)=\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}=(-4i)z_k^2=16k^2\pi^2\, i, \qquad k=\pm1,\pm2,\dots$$

$$\oint_\Gamma g(z)\,dz=2\pi\, i\left(\operatorname{Res}(g(z);-2\pi i)\ +\ \operatorname{Res}(g(z);0)\ +\ \operatorname{Res}(g(z);2\pi i)\right)=8\pi(-4\pi^2-4\pi^2)=\boxed{-64\pi^3}$$

Ejercicio E. $I=$ V.P. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x\ \cos x}{x\,(x^2+a^2)}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x\,(x^2+a^2)}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2x}}{x\,(x^2+a^2)}\,dx}_{I_1}\right)$, $a\in\mathbb{R}^+$

Cálculo de : $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz=\oint_\Gamma\frac{e^{i2z}}{z\,(z^2+a^2)}\,dz$

Puntos singulares $f(z)$ $\begin{cases} z_1=0 \\ z_2=ai, \quad z_3=-ai \end{cases}$



$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=\int_{C_r}f(z)\,dz+\int_{T_1}f(x)\,dx+\int_{T_2}f(x)\,dx+\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f(z);ai)$$

□ *Lema 2 (lema de Jordan):* $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty}\overbrace{\frac{1}{z\ (z^2+a^2)}}^{f_1(z)}=0 \Longrightarrow \lim_{r\to\infty}\int_{C_r}f_1(z)e^{i2z}\,dz=0$

□ *Lema 3.* Tipo de singularidad de $f(z)$ en z_1.

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\,f(z)=\lim_{z\to 0} z\,f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{i2z}}{(z^2+a^2)}=\frac{1}{a^2}$$

está acotado $\Longrightarrow z_1=0$ es polo simple de $f(z)$ y $\mathrm{Res}(f(z);0)=\dfrac{1}{a^2}$

Por ser polo simple se puede aplicar el lema, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz=-\,\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);0)=-\,\frac{\pi\,i}{a^2}$

$$I_1=\lim_{\substack{r\,\to\,\infty\\ \varepsilon\,\to\,0}}\int_{T_1} f(x)\,dx+\lim_{\substack{r\,\to\,\infty\\ \varepsilon\,\to\,0}}\int_{T_2} f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);ai)+\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);0)=2\pi i\,\underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{e^{i\,2z}/(z(z+ai))}{(z-ai)};ai\right)}_{\dfrac{e^{-2a}}{(ai)(2ai)}}+\frac{\pi\,i}{a^2}=\\
&= \frac{-\pi\,i}{a^2}\,e^{-2a}\;+\;\frac{\pi\,i}{a^2}=\frac{\pi\,i}{a^2}\left(1-e^{-2a}\right)\Longrightarrow \boxed{I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(I_1)=\frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-2a}\right)}
\end{aligned}$$