Ecuaciones en Diferencias

- Ecuación lineal de primer orden:

$$y^{n+1} = Q(n)\cdot y^n + G(n)$$

i) Solución general de la homogénea: $y_H^n = a\cdot \prod_{i=0}^{n-1} Q(i)$, $a \in \mathbb{R}$ cualquiera.

ii) Solución particular de la completa: Buscamos una de la manera siguiente: $y_p^n = a(n)\cdot \prod_{i=0}^{n-1} Q(i)$.

iii) Solución ~~compl~~ general completa: $y^n = y_H^n + y_p^n$

- Ecuación lineal orden p coeficientes constantes:

$$a_{n+1}\, y^{n+1} + a_n\, y^n + \dots + a_{n-p}\, y^{n-p+1} = G(n)$$

i) Solución general de la homogénea:
   - Raíces de $a_{n+1}\lambda^p + \dots + a_{n-p} = 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$
   - Cada raíz da tantas soluciones independientes como su multiplicidad:
     - Raíz real de multiplicidad $r \to \{\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{r-1}\lambda^n\}$
     - Raíz compleja de multiplicidad r $(\lambda = \rho e^{i\theta})$ $\to \{\rho^n \cos(n\theta), \dots, n^{r-1}\rho^n \cos(n\theta), \rho^n \operatorname{sen}(n\theta), \dots, n^{r-1}\rho^n \operatorname{sen}(n\theta)\}$
   - La sol. general de la homogénea es $\sum C_i \cdot S_i$, donde las C_i son constantes y las S_i las soluciones particulares independientes.

ii) Solución particular de la completa:
   - Si $G(n) = P_1^*(n)\, r_1^n + \dots + P_w^*(n)\, r_w^n$, con $P_k^*(n) = \beta_{1,k} + \dots + \beta_{\beta_{k+1},k}\cdot n^{\beta_k}$ ($G(n)$ es una suma de polinomios por exponencial).
   - Buscamos soluciones de la forma

$$y_p^n = Q_1(n)\, r_1^n + \dots + Q_w(n)\, r_w^n, \quad \text{donde}$$

   - Grado $Q_k(n) = \begin{cases} \beta_k, & \text{en general (grado de } P_k^*(n)) \\ \beta_k + \alpha_k & \text{si } r_k \text{ es raíz del polinomio característico de multiplicidad } k. \end{cases}$

iii) Solución general completa: $y^n = y_H^n + y_p^n$

- Ecuación vectorial de coeficientes constantes (sistema lineal):

$$\vec{y}^{\,n+1} = A\,\vec{y}_n + G(n)$$

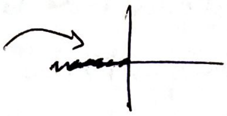
i) Solución general de la homogénea: $\vec{y}_H^{\,n} = A^n \cdot \vec{c}$ → vector de constantes

ii) Solución particular: $\vec{y}_p^{\,n} = \sum A^{n-i-1}\cdot G(i)$

iii) Cálculo práctico: Si λ_j son los autovalores de A y $\vec{v}_j$ los autovectores, y A ~~autovalores~~ es diagonalizable, entonces:

$$\vec{y}_H^{\,n} = c_1\lambda_1^n \vec{v}_1 + \dots + c_k\lambda_k^n \cdot \vec{v}_k$$

Variable Compleja

- Plano complejo:
  - $a+bi \rightarrow \rho e^{i\theta}$ $\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta = \operatorname{atan}(b/a) \end{array} \right.$
  - $\rho e^{i\theta} \rightarrow \rho\cos\theta + i\rho\operatorname{sen}\theta$
    - $\arg(z) = \{\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
    - $\operatorname{Arg}(z) = \arg(z) \cap (-\pi, \pi]$ → No definido 
    - $\log(z) = \{\ln(|z|) + i\arg(z)\}$ → conjunto de todos los logaritmos posibles
    - $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$

- Funciones: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se puede ver como $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(z = x+iy) = f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$

Defi: f es analítica en z_0 si existe un entorno alrededor de z_0 en la que f es derivable en todos sus puntos. Una función es derivable en un $z_0 = x_0 + iy_0$ si $\left\langle \begin{array}{l} u_x, u_y, v_x, v_y \text{ continuas en } z_0 \\ u_x, u_y, v_x, v_y \text{ satisfacen Cauchy-Riemann en } z_0: \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot\ u_x = v_y \\ \cdot\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

OBS: Los ceros de las funciones analíticas son aislados.

Defi: $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice armónica si $\nabla^2 h \equiv 0$.

Teorema: $f = u + iv$ analítica $\Rightarrow$ u, v armónicas. Recíproco: si u es armónica en un dominio simplemente conexo, $\exists\, v$ armónica conjugada de u tal que $u + iv$ es analítica. Cálculo práctico:

i) Resolvemos $v_y = u_x \Rightarrow v = \int u_x\, dy + c(x)$

ii) Resolvemos $-v_x = u_y \Rightarrow$ sale una condición para $c'(x)$, y luego la v suele salir de alguna condición extra.

- Desarrollos en serie:
  - Series de Taylor: son de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.
    - Hay un radio de convergencia, R, tal que la serie converge en $|z-z_0| < R$, y diverge en $|z-z_0| > R$.
    - La función $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ es analítica en $|z-z_0| < R$. Se puede integrar y derivar término a término.
  - Si f es una función analítica en D, se puede desarrollar en serie de Taylor, y R será igual a la distancia hasta la singularidad de f más cercana a z_0.

• **Series de Laurent**: Son de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. [A la parte negativa se llama principal]

• Hay dos radios de convergencia, r y R, de manera que la serie converge en $r<|z-z_0|<R$ y diverge fuera.

• $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ es analítica en $r<|z-z_0|<R$.

• Si f es una función analítica en un anillo (caso importante: f analítica en $0<|z-z_0|<r$), entonces f tiene un desarrollo de Laurent
↳ z_0 singularidad aislada!
válido.

Cálculo práctico de desarrollos:

i) Aplicar desarrollos conocidos:

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) = \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sen}(z) = \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(z) = \sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{senh}(z) = \sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

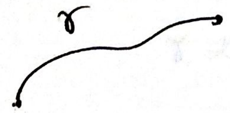
$$\ln(1+z) = \sum (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad \frac{1}{1-z} = \sum z^n$$

ii) Reducir a i) cuando sea posible. Ejemplos:

- Composición: $\operatorname{sen}(z^2) = \sum (-1)^n \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}$
- Derivación: $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum n z^{n-1}$
- Descomposición: $\frac{1}{(1+z)(1-z)} = \frac{A}{1+z} + \frac{B}{1-z} \dots$
- Producto: Para desarrollar $f(z) \cdot g(z)$ podemos desarrollar f, g y luego ir calculando los productos para hallar los primeros términos.
- Cociente: Para desarrollar $f(z)/g(z)$ ponemos $f/g = \sum a_n z^n$, con a_n desconocidos y multiplicamos por el desarrollo de g para sacarlos. ↳ si g tuviera polo de orden k, n empezaría en $-k$, no en 0.

- **Integración**:

γ



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

Teorema: Si f es analítica en un entorno de la curva, la integral no depende del camino.
↳ Intuitivamente; "es función de z"

Teorema: Si f es analítica en D (abierto dominio simplemente conexo), y γ curva cerrada en D,

$$\oint_\gamma f = 0$$

- Ceros y singularidades

Def: z_0 es un cero de orden m de f si

· $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=0$, ..., $f^{(m-1)}(z_0)=0$, pero $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

Equivale a que el desarrollo de f en z_0 empiece con la potencia $(z-z_0)^m$.

Def: Una singularidad aislada de f se clasifica en:

- Evitable: $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) < \infty$. Podemos extender f a z_0 de manera analítica. Ejemplo: $\text{sen}(z)/z$ en $z=0$
- Polo de orden m: $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. El desarrollo de Laurent de f en z_0 arranca desde $\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots$

  Equivale a que $(z-z_0)^m \cdot f(z)$ es analítica en z_0 (m sería la menor potencia que consigue eliminar la singularidad).

  Ejemplo típico: $f(z)/g(z)$ con $g(z_0)=0$. El orden de ese polo es: orden cero de $g(z_0)$ − orden cero $f(z_0)$
- Esencial: $\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$. La parte principal de Laurent tiene infinitos términos.

- Residuos:

$\text{Res}(f, z_0) = c_{-1}$, término −1 de serie de Laurent en z_0.

Cálculo práctico:
- Polo orden 1: $\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$
- Polo orden m: $g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$, con $g(z) = f(z)\cdot(z-z_0)^m$
- $P(z)/Q(z)$ con · $P(z_0)\neq 0$ · $Q(z_0)=0$ de orden 1: $P(z_0)/Q'(z_0)$

- Teorema de los residuos:

f analítica en D (salvo un nº finito de puntos). γ cerrada simple orientada positivamente en D:

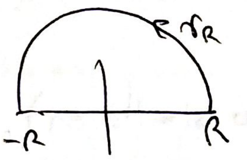
$$\oint_\gamma f = 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_i)$$

z_i singularidades de f dentro de γ.

Aplicación al cálculo de integrales

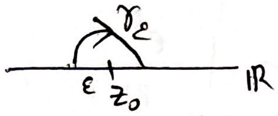
- **Lema 1:** si $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)>0}} |zf(z)| = 0$, entonces $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \to 0$,

con γ_R la semicircunferencia



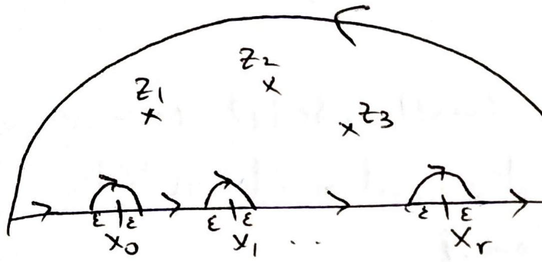
(si estuviera abajo, calcularíamos el límite cuando $\mathrm{Im}(z)<0$)

- **Lema 2:**



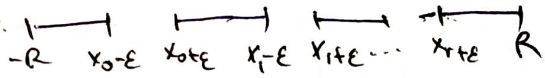
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = -\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_0)$$

- Cálculo de V.P. de integrales reales: $\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, con f que tenga singularidades en $x_0, \dots, x_r$.



$$\mathrm{V.P.}\int f = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\gamma_S} f(x)\,dx$$

La curva formada por los trozos del eje real.



Llamamos γ_S a la curva, γ_ε a las curvas que rodean $x_0, \dots, x_r$, y γ_R a la grande.

$$\int_{\gamma_S} f + \int_{\gamma_\varepsilon} f + \int_{\gamma_R} f = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, z_j)$$

z_1, z_2, z_3 en el dibujo.

Tomando límite $\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$: $\int_{\gamma_S} f \to \mathrm{V.P.}(I)$, $\int_{\gamma_\varepsilon} f \to -\pi i \sum \mathrm{Res}(f, x_k)$

$$\int_{\gamma_R} f \to 0 \quad \left(\text{si } \lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}\, z>0}} z f(z) \to 0\right).$$

Luego $\boxed{\mathrm{V.P.}(I) = \pi i \sum \mathrm{Res}(f, x_k) + 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, z_k)}$

- Cálculo de $I = \int_0^{2\pi} f(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,d\theta$: Ponemos $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{z - 1/z}{2i} \\ \cos\theta = \dfrac{z+1/z}{2} \end{cases}$

Y calculamos $I = \int_{|z|=1} f\left(\frac{z-1/z}{2i}, \frac{z+1/z}{2}\right) \cdot \frac{1}{iz}\,dz$

- Cálculo de $\int_0^\infty f(x)\,dx$, con f par:

lo reducimos a $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

- Cálculo de $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{p(x)}\,dx$ (o similares). Para resolverlo,

consideramos $e^{iax} = \cos(ax) + i\operatorname{sen}(ax)$, integramos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{p(x)}$,

e $I = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{p(x)}\right)$

- Cálculo de $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(x)}{p(x)}$: ponemos $\cos^2(z) = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \ldots$

El problema de los dos últimos es que $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$ crecen exponencialmente para $\operatorname{Im}(z) > 0$, así que no se puede aplicar el recinto estándar. Pero al cambiar a e^{ix} eliminamos el problema.