E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1erApellido : 2doApellido : Nombre :	Curso 19/20 (29.10.19) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1er Parcial

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)=0 \quad \begin{cases} \lambda=1 \text{ doble} \\ \lambda=2 \text{ simple} \end{cases}$$

$$\lambda=1 \text{ doble} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow b=0$$

$$V_{\lambda=1} = V\left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\right),$$

$$\lambda=2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=b \\ c=-b \end{matrix} \Rightarrow V_{\lambda=2} = V\left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}\right)$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{n} = A\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}1^n + B\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}1^n + C\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}2^n} = \begin{Bmatrix} A+C2^n \\ C2^n \\ B-C2^n \end{Bmatrix}$$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

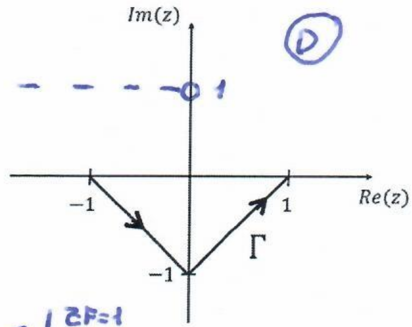
Sean $\begin{cases} g(z) = (z-i)^2/2 \text{ entera} \\ f(z) = \text{Log}(z-i) \text{ analítica en } \mathbb{C} \text{ salvo en } z = x+iy \,/\, \begin{matrix} \text{Re}(z-i) = x \le 0 \\ \text{Im}(z-i) = y-1 = 0 \end{matrix} \end{cases}$

La función $\frac{d}{dz}(gf)$ tiene primitiva en D y hay independencia del camino en D. Integrando por partes: $\int_\Gamma g' f \, dz = g(z) f(z) \Big|_{z_I=-1}^{z_F=1} - \int_{z_I}^{z_F} g(z) f'(z) dz$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I = \int_\Gamma (z-i)\text{Log}(z-i)\, dz$$

siendo Γ el contorno orientado de la figura, con origen en el punto -1 y final en el punto 1, ambos del eje real.



$$\boxed{-\pi + i(1 - \text{Ln}\,2)}$$

$$I = \frac{1}{2}(z-i)^2 \text{Log}(z-i) \Big|_{z_I=-1}^{z_F=1} - \frac{1}{4}(z-i)^2 \Big|_{z_I=-1}^{z_F=1} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(1-i)^2}_{-2i}\left[\text{Ln}\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] - \frac{1}{2}\underbrace{(1+i)^2}_{2i}\left[\text{Ln}\sqrt{2} + i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right] - \frac{1}{4}\Big[\underbrace{(1-i)^2 - (1+i)^2}_{-4i}\Big] =$$

$$= (-i)\big[\underbrace{2\,\text{Ln}\sqrt{2}}_{\text{Ln}\,2} - \pi i\big] + i = -\pi + i(1 - \text{Ln}\,2)$$

C. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \dfrac{(e^{i2z}-1)^2}{z^2(e^{i2z}+1)}$ no analítica en $z=0$, $e^{i2z} = -1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$, $z_k = \frac{\pi}{2}(1+2k)$, $k = 0, \pm 1 \ldots$

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

$z=0$ es singularidad evitable
$\text{Res}(f, 0) = 0$
$z_k = \frac{\pi}{2}(1+2k)$ polos simples ($k \in \mathbb{Z}$)
$\text{Res}[f, z_k] = 8i/\pi^2(1+2k)^2$

Anotar en el siguiente recuadro, la parte principal del desarrollo en serie de Laurent (potencias negativas de z) en el entorno $0 < |z| < R$, especificando el valor de R

Parte principal : 0
$\lvert z \rvert < \pi/2$

$\boxed{z=0}$ $\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{(e^{i2z}-1)^2}{z^2} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{4ie^{i2z}(e^{i2z}-1)}{2z} \underset{\text{L'Hopital}}{=} i\lim_{z\to 0}\frac{4ie^{i4z} - 2ie^{i2z}}{1} =$

$= -2 \Rightarrow$ Singularidad evitable $\Rightarrow$ Admite desarrollo en serie de Taylor en $|z| < \min |z_k - 0| = \frac{\pi}{2}$ (Parte en potencias negativas es nula)

$k = 0, \pm 1 \ldots$

$\boxed{z_k = \frac{\pi}{2}(1+2k) \quad k \in \mathbb{Z}}$ $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $\begin{cases} P(z) = (e^{i2z}-1)^2/z^2 \text{ analítica en } z_k \\ P(z_k) = (-2)^2/z_k^2 \neq 0 \\ Q(z_k) = 0 \\ Q'(z_k) = 2i\,e^{i2z_k} = -2i \neq 0 \end{cases}$ Ceros simples de $Q(z)$

Polos simples de $f(z)$

$\text{Res}[f, z_k] = \dfrac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \dfrac{2i}{z_k^2} = \dfrac{8i}{\pi^2(1+2k)^2}$

D. **(3 puntos)** Sea la función real de dos variables reales definida como

$$u(x,y) = \cos x \left(e^{y} + e^{ky}\right), \qquad k \in \mathbb{R}$$

Anotar los valores de k para los que u es la parte real de una función, $f(z)$, analítica en algún dominio del plano complejo. $u(x,y)$ debe ser armónica

① $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\forall k \in \mathbb{R}$

② $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = -\operatorname{sen} x\,(e^y + e^{ky})$

$u_y = \cos x\,(e^y + k e^{ky})$

$u_{xx} = -\cos x\,(e^y + e^{ky})$

$u_{yy} = \cos x\,(e^y + k^2 e^{ky})$

$$\boxed{K = \pm 1}$$

② $\Rightarrow$ $k^2 = 1 \iff k = \pm 1$

Anotar la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x,y)$. debe ser $C^2(\mathbb{R}^2)$ y cumplir Condiciones de Cauchy-Riemann:

$v_y = u_x = -\operatorname{sen} x\,(e^y + e^{ky})$

$v_x = -u_y = -\cos x\,(e^y + k e^{ky})$

$v_x = -u_y \Rightarrow v = -\operatorname{sen} x\,(e^y + k e^{ky}) + g(y)$

$v_y = -\operatorname{sen} x\,(e^y + \underbrace{k^2}_{1} e^{ky}) + g'(y) = u_x \iff g'(y) = 0 \to g(y) = \boxed{c \in \mathbb{R}}$

$$K = 1 \to v(x,y) = -\operatorname{sen} x\, 2e^{y} + ic$$

$$K = -1 \to v(x,y) = -\operatorname{sen} x\,(e^{y} - e^{-y}) + ic$$

Anotar la expresión analítica de $f(z)$, en función de $z = x + iy$, sabiendo $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $f(\pi) = -2$.

$\boxed{K=1}$ $f(z) = 2e^{y}\underbrace{(\cos x - i \operatorname{sen} x)}_{e^{-ix}} + ic$

$= 2e^{-i(x+iy)} + ic = 2e^{-iz} + ic$

$f(\pi) = -2 + ic = -2 \iff c = 0$

$f(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = 2e^{-iz}$$

$\boxed{K=-1}$ $f(z) = e^{y}\overbrace{(\cos x - i\operatorname{sen} x)}^{e^{-ix}} + e^{-y}\overbrace{(\cos x + i \operatorname{sen} x)}^{e^{ix}}$

$+ ic = e^{-iz} + e^{iz} + ic =$

$= 2\cos z + ic$

$f(\pi) = -2 + ic = -2 \iff c = 0$

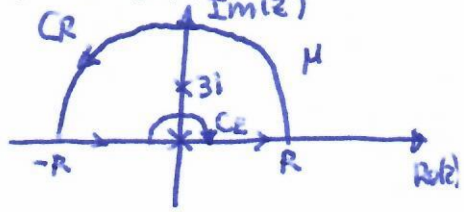
$f(z) = 0 \iff z = \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x\,(x^2+9)}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x(x^2+9)}\,dx}^{I_1}$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

$$\boxed{\frac{\pi}{18}\left(1 - \frac{1}{e^6}\right)}$$



$$f(z) = \frac{e^{i2z}}{z(z^2+9)} = \frac{e^{i2z}}{z(z+3i)(z-3i)}$$

Puntos singulares: $z = 0$, $z = \pm 3i$ Polos simples

$$\int_{\mu} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{\text{Lema 1}} + \underbrace{\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz}_{} = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{2iz}/z(z+3i)}{z-3i}, z = 3i\right]$$

$R \to \infty$: $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z(z^2+9)} = 0$ $\to 0$

$R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$: $\to I_1$

$\varepsilon \to 0$: $-\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{i2z}/z^2+9}{z}, z=0\right]$

$= 2\pi i \;\frac{e^{-6}}{(-18)}$

$$I_1 = \pi i \cdot \frac{1}{9} - \pi i\,\frac{e^{-6}}{9} = i\,\frac{\pi}{9}\left(1 - \frac{1}{e^6}\right)$$