Teoría de Transformadas

Transformada de Fourier

Definición: Decimos que una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es **absolutamente integrable** cuando se cumple que: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$. Se dice que $f \in L^1(\mathbb{R})$

Proposición: f absolutamente integrable => $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$.

Definición: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función absolutamente integrable. La **transformada de Fourier** de f se define como:

$$\mathfrak{F}(f(x))(w) = \hat{f}(w) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx$$

La transformada de Fourier es otra función de variable real, definida en todo R (aunque se puede extender a los números complejos). $\hat{f}(w)$ es el coeficiente que acompaña a la frecuencia w en la descomposición de f como suma de senos y cosenos. Conocer la transformada permite recuperar la función original (salvo discontinuidades) cuando la transformada también es absolutamente integrable:

Teorema (**de inversión de Fourier**): Sea una función f absolutamente integrable, tal que $\hat{f} = \mathfrak{F}(f)$ también es absolutamente integrable. Entonces:

$$\forall x \in \{x : f \text{ es continua en } x\},\quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, e^{iwx}\, dx$$

Además, si x es un punto donde f es discontinua pero existen los límites laterales:

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición: la **transformada inversa de Fourier** se define como:

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, e^{iwx}\, dw$$

Observación: esto permite extender la transformada inversa en casos en que $\hat{f}$ no es absolutamente integrable:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, e^{-\varepsilon^2 w^2/2}\, e^{iwx}\, dx$$

Definición: El producto de **convolución** de dos funciones f y g absolutamente integrables se define como:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$*$ Si g es una delta de Dirac, δ_{x_0}, $f * \delta_{x_0} = f(x_0)$

Propiedades importantes:

- $\hat{f}$ es función acotada: $\forall w \in \mathbb{R}, |\hat{f}(w)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$
- $\mathfrak{F}$ es transformación lineal.
- Si $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathfrak{F}[f'(x)](w) = iw\hat{f}(w)$; $\mathfrak{F}[f^{(n)}(x)] = (iw)^n \hat{f}(w)$
- $\frac{d}{dw}\hat{f}(w) = -i\mathfrak{F}[xf(x)](w)$; $\mathfrak{F}[x^n f(x)] = i^n \frac{d^n}{dw^n}\hat{f}(w)$
- $\mathfrak{F}[f(-x)](w) = \hat{f}(-w)$
- $\mathfrak{F}[f(x-a)](w) = e^{-iaw}\hat{f}(w)$
- $\mathfrak{F}[f(ax)](w) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(w/a)$
- $\mathfrak{F}[f(x)e^{iax}](w) = \hat{f}(w-a)$
- $\mathfrak{F}[f * g(x)] = \hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w)$
- $\mathfrak{F}[f \cdot g(x)] = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}(w)$
- $\mathfrak{F}[\hat{f}(w)](x) = 2\pi f(-x)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2\,dw$ (Plancherel)
- $\mathfrak{F}[f(x)\,\mathrm{sen}\,ax] = \frac{1}{2i}\left[\hat{f}(w-a) - \hat{f}(w+a)\right]$
- $\mathfrak{F}[f(x)\cos ax] = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(w-a) + \hat{f}(w+a)\right]$

Algunas transformadas importantes:

- $\mathfrak{F}[e^{a|x|}] = \frac{-2a}{w^2+a^2}$
- $\mathfrak{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right] = \frac{\pi}{a}e^{-a|w|}$
- $\mathfrak{F}[e^{-ax^2}] = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-w^2/4a}$

Transformada de Laplace

Definición: Decimos que una función $f: [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es de **orden exponencial**, o tiene crecimiento exponencial si $\exists a, c > 0$ tq $\forall t \in [0,\infty)$, $|f(t)| \leq ce^{at}$.

Definición: Sea f una función continua a trozos con crecimiento exponencial, definimos su transformada de Laplace como:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt$$

Observación: $\mathcal{L}[f(t)]$ es una función definida en $D \subset \mathbb{C}$ y toma valores complejos.

Con la notación del crecimiento exponencial, $D = \{ Re(z) > a \}$

Al dominio D se le denomina **Región de Convergencia**.

Definición: La **función de Heaviside**, H(x) se define como:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Definición (Transformada inversa): Sea f una función continua a trozos con crecimiento exponencial de orden a. La transformada de Laplace inversa se define como:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h\to\infty} \int_{b-ih}^{b+ih} e^{zt} F(z)dz$$

Donde b se debe elegir de manera que la recta R(z) = b esté dentro de la Región de Convergencia. Es decir, b > a.

Proposición: Sea f una función y F su transformada de Laplace.

- $\mathcal{L}^{-1}[F(z)](t) = \dfrac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$ ($= f(t)$ si f continua en t)
- Si F tiene un nº finito de singularidades aisladas no esenciales (polos) y $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$, entonces:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)] = \sum_{i=1}^{k} Res\left(F(z)\, e^{zt}, z_k\right)$$

Propiedades más importantes: $(F = \mathcal{L}[f])$

- $\mathcal{L}$ es lineal.
- $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\, ds\right] = \frac{1}{z} F(z)$
- $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](z) = \int_z^{\infty} F(w)\, dw$
- $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
- $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

- $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$
- $\mathcal{L}[f(t-a)\cdot H(t-a)] = e^{-as}\ F(s)$
- $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
- $\mathcal{L}[f(t)\ \text{sen}\ wt] = \frac{1}{2i}[F(s-iw) - F(s+iw)]$
- $\mathcal{L}[f(t)\cos wt] = \frac{1}{2}[F(s-iw) + F(s+iw)]$
- $\mathcal{L}[f*g] = F(s)\cdot G(s) \longrightarrow$ OJO! Aquí la convolución es la siguiente función:

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-s)g(s)\,ds$$

Diferente de la de Fourier.

Algunas transformadas notables:

- $\mathcal{L}[1] = 1/s$
- $\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$
- $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$; $\mathcal{L}[t^p] = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$ si $p \notin \mathbb{Z}$
- $\mathcal{L}[\text{sen}\ at] = \frac{a}{s^2+a^2}$
- $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$
- $\mathcal{L}[\text{senh}\ at] = \frac{a}{s^2-a^2}$
- $\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2-a^2}$

Aplicaciones

- $a\cdot w_{tt} + b\cdot w_t + c\cdot w = g$, a,b,c constantes

↳ Laplace

$$a\cdot[z^2\hat{w} - zw(0) - w'(0)] + b[z\hat{w} - w(0)] +$$
$$+ c\hat{w} = \hat{g} .$$

↳ Despejamos $\hat{w}$, resolvemos y aplicamos $\mathcal{L}^{-1}$

- $\boxed{u_t = f(x)\cdot u_{xx} + g(x)\cdot u_x + u}$ Aplicamos Fourier

$\hookrightarrow \mathcal{F}$ (Fourier respecto a x)

$$\hat{u}_t = \hat{f}\cdot(i\omega)^2\cdot\hat{u} + \hat{g}\cdot(i\omega)\cdot\hat{u} + \hat{u}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} / \hat{u} = (\quad) \to \frac{\partial(\ln(\hat{u}))}{\partial t} = (\quad)$$

...

- Problema de Laplace con condición de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt$$