AmM-EXO-1415-Examen ordinario 20...

Wiskas

Ampliación de Matemáticas

3º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

KEEP CALM AND ESTUDIA UN POQUITO

FINAL ORDINARIO

26-ENERO-2015

CURSO 2014-2015

Ampliación de Matemáticas (Parte 1)

A. El valor de la integral

$$I=\int_\gamma \bar{z}|z|\,\mathrm{d}z, = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}|e^{i\theta}|\,i\,e^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

donde γ es la circunferencia de radio 1 y centro el origen recorrida en sentido positivo ($z=\mathrm{e}^{i\theta}$) una sola vez, es:

(1) 2π (2) $2\pi\,\mathrm{i}$

(3) $-2\pi\,\mathrm{i}$ (4) 0

B. Los tres primeros términos del desarrollo en serie de Mac-Laurin de la función

$$f(z)=\frac{\tanh z}{z}, = \frac{\sinh z}{z\cosh z} = \frac{z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots}{z\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)} = \frac{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots}{1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots} =$$

$$= \left(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)\left(1-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{z^4}{(2!)^2}\right) =$$

$$= 1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^4}{(2!)^2}-\frac{z^4}{(2!)(3!)}+\cdots =$$

$$= 1+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}\right)z^2+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{(2!)^2}-\frac{1}{2!(3!)}\right)z^4+\cdots =$$

$$= 1-\frac{z^2}{3}+\frac{2z^4}{15}+\cdots$$

Son

(5) $1-\frac{z^2}{3}-\frac{2\,z^4}{5!}$ (6) $1+\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{15}$

(7) $1-\frac{z^2}{3}+\frac{2\,z^4}{15}$ (8) $1+\frac{z^2}{3}+\frac{2\,z^4}{5!}$

C. El valor de la integral real impropia

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\,x)}{4+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2x}}{4+x^2}dx\right) = \mathrm{Re}\left[2\pi i\ \mathrm{Res}\left(\frac{e^{i2z}}{4+z^2}, 2i\right)\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[2\pi i\ \frac{e^{i2(2i)}}{2i+2i}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{\pi}{2}e^{-4}\right]$$

es

(9) $\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2}$ (10) $\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-4}$

(11) $\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2}$ (12) $\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{4}$

D. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) el residuo en $z=\frac{\pi}{2}$ de la función:

$$f(z)=z\,\tan(z). = z\,\frac{\sin z}{\cos z} = z\,\frac{\sin z}{\cos\left(z-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{z\sin z}{-\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\phi(z)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$$

con $\phi(\pi/2)\neq 0$

polo simple. Luego

$$\boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathrm{Res}\left(z\tan z, \frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{z\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\pi/2} = \left.\frac{z\sin z}{-\sin z}\right|_{z=\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

Ampliación de Matemáticas (Versión 1),
Examen final, parte 2 (26-01-2015)

A. Anotar en el siguiente recuadro (de la forma más simplificada posible) la expresión de la función $f = f(t)$, para $t \in [0, \infty[$, cuya transformada de Laplace es:

$$F(s) = \frac{3\,s}{s^2 - s - 2}.$$

$$\boxed{F(t) = 2e^{2t} + e^{-t}}$$

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$$

$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R}$, $u(x,t)$ acotada en $\mathbb{R}$ para cada $t \in]0. + \infty[$.

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u, es decir $\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. Sobre la función $\hat{u}$ se puede afirmar que:

(1) $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi}\exp(\omega^2 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(2) $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi}\exp(-(\omega^2 + 1)t - \frac{\omega^2}{4})$.

(3) $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi}\exp(-\omega^2 t - \frac{\omega^2}{4})$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}(\exp(-x^2)) = \sqrt{\pi}\exp(-\frac{\omega^2}{4})$.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - (1+z)^2 w = \exp(z) \text{ en } \mathbb{C},$$
$$w(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 1.$$

La solución del problema anterior es una función entera, cuyo desarrollo en serie de Taylor es $w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo se puede afirmar que:

(5) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1$.

(6) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = \frac{2}{3}$.

(7) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = \frac{4}{3}$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Asignatura: Ampliación de Matemáticas (Versión 1) Curso: ________ Grupo: ________

D. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema de Cauchy definido en el ejercicio D. Sobre la función w y los coeficientes c_k de su desarrollo puede afirmarse que:

(9) $c_4 = \dfrac{3}{4}$ y $c_{j+2} = \dfrac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)}$ para todo $j \geq 3$.

(10) $c_4 = \dfrac{5}{6}$ y $c_{j+2} = \dfrac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)} + \dfrac{1}{(j+2)!}$ para todo $j \geq 4$.

(11) $c_4 = \dfrac{3}{8}$ y $c_{j+2} = \dfrac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)} + \dfrac{1}{(j+2)!}$ para todo $j \geq 4$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

E. Considérese la ecuación diferencial

$$z(2+z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - 4(1+z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \frac{4}{z}w = 0.$$

Sobre las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, puede afirmarse que:

(13) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w_1(z)}{z^2} = 1$.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_2(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{w_2(z)}{\ln(z)} = 1$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_1(z)$, tal que $\lim\limits_{z\to 0} w_1(z) = 1$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

F. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(1,\theta,t) = 0 \quad (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(r,\theta,0) = J_0(\alpha r), \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0, \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde α es un número real mayor que cero tal que $J_0(\alpha) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k0}(t) J_0(\lambda_{k0} r)$ donde (λ_{m0}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_0(z)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.

(18) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha^2 t) J_0(\alpha r)$.

(19) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha t) J_0(\alpha r)$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Respuestas: 1–65

Nombre:

Fecha:

Firma:

Así no marque

Marque así

D.N.I.

EXPEDIENTE

Versión

Curso: 1 2 3 4 5

Grupo: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 A B C D E F G H I J

Auxiliar

PARTE 2 PREGUNTA B

Tomando transformada de Fourier en la ecuación se obtiene

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (i\omega)^2 \hat{u} - \hat{u}.$$

Integrando la ecuación anterior, teniendo en cuenta la condición inicial y la nota del enunciado se obtiene

$$\hat{u}(\omega,t) = \sqrt{\pi}\, exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right) exp\left(-(\omega^2+1)t\right).$$

PREGUNTA C (PARTE 2)

De las condiciones del problema de Cauchy se obtiene que $w(z) = 1+z+\sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k$.

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación diferencial se obtiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} = (1+z)^3 + (1+z)^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k + 1 + \sum_{k\geq 1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (1)$$

De igualar los coeficientes de z^0 se obtiene $c_2 = 1$ y de igualar los coeficientes en z se obtiene $c_3 = \frac{2}{3}$.

PREGUNTA D (PARTE 2)

Igualando los coeficientes de z^2 en ambos miembros de la ecuación obtenida en la pregunta C se obtiene $12c_4 = \frac{9}{2}$, de donde

$c_4 = \frac{3}{8}$.

De la igualdad (1) de la pregunta C, se obtiene que el coeficiente de z^j con $j>3$ verifica.

$$(j+2)(j+1)c_{j+2} = c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2} + \frac{1}{j!}$$

es decir,

$$c_{j+2} = \frac{c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}}{(j+2)(j+1)} + \frac{1}{(j+2)!}$$

para $j \geq 4$.

PREGUNTA I (PARTE 2)

La ecuación diferencial del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{4(1+z)}{z(2+z)}\frac{dw}{dz} - \frac{4}{z^2(2+z)}w$$

El punto $z=0$ es singular regular para la ecuación anterior. El comportamiento de las soluciones en un entorno de $z=0$ está dado por los autovalores de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, es decir $\lambda=2$ y $\lambda=1$. En virtud del teorema de existencia de solución en un entorno de un punto singular regular, existe una constante D tal que la solución general de la ecuación del enunciado es

$$w(z) = C_1 z^2 p_1(z) + C_2(D z^2 p_1(z)\ln z + z\, p_2(z))$$

donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en $B^*(0,\delta)$ con $\delta<2$ y $p_1(0)=1$.

Para $C_1=1$ y $C_2=0$ $\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{z^2} = 1$.

$\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{\ln z} = 0$, y $\lim_{z\to 0} w(z) = 0$ para todo $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

PREGUNTA 7   PARTE 2

La función $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha t)\, J_0(\alpha r)$ verifica las condiciones iniciales y de contorno. Sustituyendo la función u en la ecuación y multiplicando por r^2 se obtiene.

$$\cos(\alpha t)\left(r^2 \frac{d^2 J_0(\alpha r)}{dr} + r \frac{d}{dr} J_0(\alpha r) + \alpha^2 r^2 J_0(\alpha r)\right) = 0.$$

Puesto que el segundo factor del primer miembro de la igualdad anterior es nulo la función u es solución del problema de Cauchy. Además, en virtud de la unicidad de solución la función u es la única solución del problema de Cauchy.