Ⓐ Tomando la transformada de Fourier, con respecto a la variable x, en la ecuación se obtiene $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (i\omega)^2 \hat{u} + (1+2t)\,\hat{u}$, donde $\hat{u}(\omega,t)$ es la transformada de Fourier de $u(x,t)$. Integrando la ecuación $\frac{d\hat{u}}{dt} = (-\omega^2 + 1 + 2t)\,\hat{u}$ se obtiene $\hat{u}(\omega,t) = C \exp(-\omega^2 t + t + t^2)$. Teniendo en cuenta que $\hat{\mathcal{F}}(x \exp(-x^2)) = i \frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)\right)$, e imponiendo la condición inicial $\hat{u}(\omega,t) = -i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\omega \exp\left(-\frac{\omega^2}{4} - \omega^2 t + t + t^2\right)$. Por tanto,

$\hat{u}(2,2) = -\,i\sqrt{\pi}\, \exp(-3)$.

(B) La función g puede escribirse de la forma $g(t) = (\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-1))\, t(t-1)$

$= \mathcal{H}(t)\, t(t-1) - \mathcal{H}(t-1)(t-1+1)(t-1) = \mathcal{H}(t)\, t(t-1) - \mathcal{H}(t-1)\left((t-1)^2 + (t-1)\right).$

Tomando transformadas de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $(z^2+4z+8)\,\mathcal{L}[w](z) = 1 + \mathcal{L}[g](z)$. De las propiedades de la transformada de Laplace y que $\mathcal{L}[t^{\nu}](z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$

$$\mathcal{L}[w](z) = \frac{1}{(z+2)^2+4}\left(1 + \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \exp(-z)\left(\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^2}\right)\right).$$

Por tanto, $\mathcal{L}[w](2) = \frac{1}{40}(2 - \exp(-2)).$

(c)

La solución del problema de Cauchy dado en el enunciado es una función entera. Por tanto, $w(z) = iz + \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k$. Sustituyendo el desarrollo anterior en el enunciado se obtiene $c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_5 = \frac{-1}{20}$, $c_6 = 0$. Además

$\sum_{k\geq 2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - (iz^2 + z^4)\left(iz + \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k\right) = 0$. Igualando los términos en z^j, para $j \geq 5$, se obtiene $c_{j+2} = \frac{i c_{j-2} + c_{j-4}}{(j+2)(j+1)}$.

De ser $Re(w(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ todas las derivadas de w en cualquier punto x de $\mathbb{R}$ serían tales que $Re(w^{(k}(x)) = 0$ lo que no es cierto puesto que $\frac{w^{(5}(0)}{5!} = -\frac{1}{20}$.

(D) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{(1+z)^2}{2z\,\mathrm{sen}\,z}\,w .$$

El punto $z=0$ es singular regular. En un entorno de $z=0$, la solución está determinada por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $w(z) = C_1\, z^{\sqrt{2}/2} p_1(z) + C_2\, z^{-\sqrt{2}/2} p_2(z)$ donde p_1 y p_2 son dos funciones analíticas en un cierto entorno de $z=0$ con $p_1(0) = p_2(0) = 1$. La solución $w_1(z) = z^{\sqrt{2}/2} p_1(z)$ es tal que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w_1(z) - z^{\sqrt{2}/2}}{z^{\sqrt{2}/2}} = 0$. Para cualquier solución no nula de la ecuación $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w(z)}{z^{\sqrt{2}/2}}$ o es una constante no nula o es ∞.

(E) La función de Bessel $J_{\frac{3}{2}}(z)$ verifica la ecuación

$$z^2 J''_{\frac{3}{2}}(z) + z J'_{\frac{3}{2}}(z) + \left(z^2 - \frac{9}{4}\right) J_{\frac{3}{2}}(z) = 0. \qquad (1)$$

Considérese $J_{\frac{3}{2}}(2x) = (J_{\frac{3}{2}} \circ g)(x)$, con $g(x) = 2x$. Además, $\frac{1}{x^4}\left(x^4 \frac{d}{dx}\left(x^{-3/2} J_{\frac{3}{2}}(2x)\right)\right) =$

$= \frac{1}{x^3\sqrt{x}}\left(4x^2 J''_{\frac{3}{2}}(2x) + 2x J'_{\frac{3}{2}}(2x) - \frac{9}{4} J_{\frac{3}{2}}(2x)\right)$. Por tanto, $\frac{1}{x^4}\left(x^4 \frac{d}{dx}\left(x^{-3/2} J_{\frac{3}{2}}(2x)\right)\right) + 4$

$x^{-3/2} J_{\frac{3}{2}}(2x) = \frac{1}{x^3\sqrt{x}}\left(4x^2 J''_{\frac{3}{2}}(2x) + 2x J'_{\frac{3}{2}}(2x) + \left(-\frac{9}{4} + 4x^2\right) J_{\frac{3}{2}}(2x)\right)$: llamando

$2x = z$, y teniendo en cuenta (1) $\frac{1}{x^4}\left(x^4 \frac{d}{dx}\left(x^{-3/2} J_{\frac{3}{2}}(2x)\right)\right) + 4x^{-3/2} J_{\frac{3}{2}}(2x) = 0.$

Se comprueba sin dificultad que la solución de la ecuación del enunciado linealmente independiente de $x^{-3/2} J_{\frac{3}{2}}(2x)$ es $x^{-3/2} J_{-\frac{3}{2}}(2x)$, y $\left|\lim_{x \to 0^+} x^{-3/2} J_{-\frac{3}{2}}(2x)\right| = +\infty$. En consecuencia, las soluciones de la ecuación del enunciado que cumplen $\left|\lim_{x \to 0^+} w(x)\right| < \infty$ son de la forma $w(x) = \frac{C}{x\sqrt{x}} J_{\frac{3}{2}}(2x)$.