2018_Parcial_1.pdf

Adrigoka

Ampliación de Matemáticas

3º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS (3º DE GRADO)	D.N.I. : 1er Apellido : SOLUCIÓN 2do Apellido : Nombre :	Curso 18/19 (29.10.18) Tiempo 1h. 30 m. Valor 15 puntos 1er Parcial

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}^{n+1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}^{n}.$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+3\lambda-10=0$$

$$\lambda = -3/2 \pm\sqrt{\frac{9}{4}+10} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

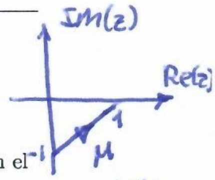
$$V_2: \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{v}_2 = \left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right\}$$

$$V_{-5}: \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{v}_{-5} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}^{n} = A\left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right\} 2^n + B\left\{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right\}(-5)^n}$$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral

$$I = \int_\Gamma \frac{\bar{z}+i}{|z-i|^2}\,dz = \int_\mu \frac{\overline{(z-i)}}{(z-i)\overline{(z-i)}}\,dz = \int_\mu \frac{dz}{z-i}$$



donde Γ es el segmento recto orientado con origen en el punto $-i$ del eje imaginario y final en el punto 1 del eje real ($z(t) = t-(1-t)i$ para $t \in [0,1]$)

$F(z) = \mathrm{Log}(z-i)$ analítica en $D = \mathbb{C} - \{z = x+i / x \leq 0\}$

$F'(z) = \frac{1}{z-i}$ $\forall z \in D$

Hay independencia del camino en D

$I = F(z_F) - F(z_I) =$
$= \mathrm{Log}(1-i) - \mathrm{Log}(-2i) =$
$= \mathrm{Ln}\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} - (\mathrm{Ln}2 - i\frac{\pi}{2})$

$$\boxed{I = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,2 + i\frac{\pi}{4}}$$

C. **(3 puntos)** Dada la función $f(z) = \dfrac{z\cosh z}{\operatorname{senh} z} = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$. P y Q enteras

Anotar en el siguiente recuadro sus puntos singulares aislados, especificando en cada caso el tipo de singularidad, así como el valor del residuo de $f(z)$ en dichos puntos.

Ptos singulares: $Q(z) = \mathrm{sh} z = 0$

$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 = e^{2k\pi i}$

$z_k = k\pi i$ $k = 0, \pm1, \pm2$

$\boxed{z_k = k\pi i \neq 0}$

$Q'(z_k) = \cosh(k\pi i) = \cos k\pi \neq 0$

Ceros simples de $1/f$

$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} =$
$= z_k = k\pi i$

$\boxed{z_0 = 0}$ $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Ch} z}{\mathrm{sh} z / z} = \frac{1}{1} = 1$

→ Singularidad evitable de f → $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_k = k\pi i \quad k = \pm1, \pm2 \ldots \text{ Polos simples} \\ \mathrm{Res}(f, z_k) = k\pi i \\ z_0 = 0 \to \text{singularidad evitable} \\ \mathrm{Res}(f, 0) = 0 \end{array}}$$

Anotar en el siguiente recuadro, la parte principal del desarrollo en serie de Laurent (potencias negativas de z) en el entorno $0 < |z| < R$, especificando el valor de R

Singularidad evitable →

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Parte principal: } 0 \\ R = \pi \end{array}}$$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO $R = \min_{k=\pm1,\pm2\ldots} |z_k - 0| = \pi$

a) $g(z)$ entera $\xrightarrow[\forall z_0 \in \mathbb{C}]{\text{Taylor}}$ $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ en $|z-z_0| < \infty$

Si $z_0 = 0$: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $|z| < \infty$ ($n\ \forall z \in \mathbb{C}$)

b) Fórmula Integral de Cauchy : $g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0} dz}_{2\pi i} = 1 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$

D. **(3 puntos)** Sea $g(z)$ una función entera tal que

$$\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i \quad \text{para todo } z_0 \in \mathbb{C}$$

siendo C la circunferencia $|z - z_0| = 1$ orientada positivamente.

Anotar el siguiente recuadro la expresión general de $g(z)$

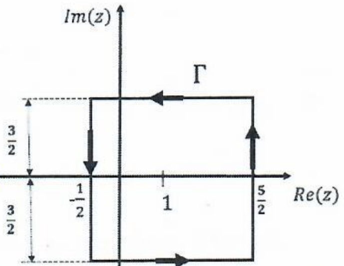
$g(z_0) \overset{(b)}{=} 1 \overset{(a)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \iff \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 0 & \forall n \geq 1 \end{cases}$

$$\boxed{g(z) = 1}$$

Anotar el valor de la integral

$$I = \oint_\Gamma \frac{g(z)}{z^4 - 1} dz = \oint_M \frac{g(z)\, dz}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

$f(z)$



siendo Γ el cuadrado de centro en $z = 1$ y lado 3, orientado positivamente, de la figura.

Tª Residuos $\rightarrow$ $I = 2\pi i\, [\,Res(f, 1) + Res(f, i) + Res(f, -i)\,] =$

Todos ceros simples de $1/f$ $\Rightarrow$ Polos simples de f

$\Downarrow$

$Res(f, z_K) = \left.\frac{g(z)}{(z^4-1)'}\right|_{z=z_K} = \frac{g(z_K)}{4z_K^3} = 1/4z_K^3$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2} i}$$

$= 2\pi i \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4i} + \frac{1}{4i}\right] = \frac{\pi}{2} i$

E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real

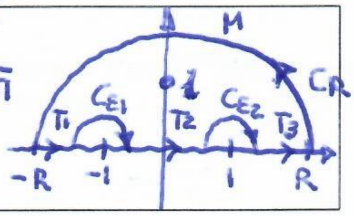
$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(\pi x)}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{2} Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^4-1} dx\right)$$

junto con el dibujo del contorno empleado para realizar la integración en el plano complejo, en el caso de que ésta sea necesaria.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^4-1} dx = \frac{-\pi}{2e^\pi} + \pi i \frac{e^{\pi i} - e^{-\pi i}}{4}$

$\frac{i}{2} \operatorname{sen} \pi = 0$

$$\boxed{I = \frac{-\pi}{4e^\pi}}$$



$\int_M f(z) dz = \int_M \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1} dz = 2\pi i\, Res(f, i) = \int_{C_R} f dz + \sum_{K=1}^{3} \int_{T_K} f(x) dx + \sum_{j=1}^{2} \int_{C_{\varepsilon_j}} f(z) dz$

- Lema 2 : $\lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{z^4-1} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$
- Lema 3 : $z = \pm 1$ Polos simples $\Rightarrow \begin{cases} \int_{C_{\varepsilon_1}} f dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0} -\pi i\, Res(f, -1) = -\pi i \frac{e^{-\pi i}}{(-4)} \\ \int_{C_{\varepsilon_2}} f dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0} -\pi i\, Res(f, 1) = -\pi i\, e^{\pi i}/4 \end{cases}$