A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+\ln(1+t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,t) \text{ acotada en } \mathbb{R} \text{ para cada } t \in]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-i\omega x)dx$. La función u verifica que:

(1) $u(1, e^2-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2e^2}} \exp(-\dfrac{1}{1+2e^2} - 1 + e^2)$.

(2) $u(2, e^3-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+12e^3}} \exp(-\dfrac{4}{1+12e^3} - 1 + e^3)$.

(3) $u(3, e^4-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4e^4}} \exp(-\dfrac{9}{1+4e^4} - 1 + e^4)$.

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\exp(-\dfrac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

B. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t) + 8w(t) = g(t) \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{dw}{dt}(0) = 1,$$

donde $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(t) = \pi - t$ si $t \in [0,\pi[$ y $g(t) = \sin(t)$ si $t \in [\pi,+\infty[$. La transformada de Laplace de la función $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que:

(5) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi + \dfrac{\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(6) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(15 + 4\pi - \dfrac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(7) $\mathcal{L}[w(t)](4) = \dfrac{1}{2^9}\left(19 + \dfrac{33\exp(-4\pi)}{17}\right)$.

(8) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

D. Sea $\sqrt{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida como $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2})\right)$, donde $\mathrm{Arg}(z)$ es el argumento principal de z. Considérese la ecuación diferencial

$$z(\cosh(\sqrt{z}) - 1)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\sin(2z)}{8}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \sin(z)w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior, en $D \subset \mathbb{C}$, verifican que:

(13) El punto $z = 0+\mathrm{i}0$ no es un punto singular regular para la ecuación del enunciado.

(14) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s2}(z)$, distinta de la función nula, tal que $w_{s2}(z) = o(z^{\frac{1}{4}})$.

(15) Existe una solución de la ecuación del enunciado, $w_{s3}(z)$, distinta de la función nula, tal que $w_{s3}(z) = o(z^{\frac{1}{2}})$.

(16) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

C. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$(1+t^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}w = 0 \text{ en }]0,+\infty[,\ w(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = 1.$$

Sean $w : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema anterior y $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $v(t) = w(t)$ si $t \in [0,+\infty[$ y $v(t) = -w(-t)$ si $t \in]-\infty, 0[$. El desarrollo en serie de Taylor de la función v en 0 es $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Las función w y los coeficientes c_k son tales que:

(9) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2} = -\frac{2k(k-1)c_k + (1+(k-2)(k-3))c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k \geqslant 4$ y $c_5 = -\frac{1}{20}$.

(10) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2} = -\frac{2(k(k-1)+1)c_k + (k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k \geqslant 4$ y $c_5 = -\frac{1}{20}$.

(11) Los coeficientes c_k verifican la relación $c_{k+2} = -\frac{(2k(k-1)-1)c_k + (k-2)(k-3)c_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$ para todo $k \geqslant 4$ y $c_5 = -\frac{1}{20}$.

(12) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

A. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución del problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2+2t+t^2}}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$
$$u(x,0) = \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u \text{ acotada en } \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|\mathrm{d}x \text{ acotada en }]0,+\infty[.$$

Sea $\hat{u} : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la función u con respecto a la variable x, es decir, $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\mathrm{d}x$. La función u verifica que:

(1) $$u(x,t) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\mathrm{ArgCh}(t+1)-\sqrt{2}+\mathrm{ArgCh}(1)\right)}\right)}{\sqrt{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\mathrm{ArgCh}(t+1)-\sqrt{2}+\mathrm{ArgCh}(1)\right)}}.$$

(2) $$u(x,t) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\mathrm{ArgSh}(t+1)-\sqrt{2}+\mathrm{ArgSh}(1)\right)}\right)}{\sqrt{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\mathrm{ArgSh}(t+1)-\sqrt{2}+\mathrm{ArgSh}(1)\right)}}.$$

(3) $$u(x,t) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\sqrt{2}\right)}\right)}{\sqrt{1+4\left(t+\sqrt{1+(t+1)^2}-\sqrt{2}\right)}}.$$

(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $\mathcal{F}[\exp(-bx^2)](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-\frac{\omega^2}{4b})$, donde $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

E. Sea $u : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

con la condición de Dirichlet

$$u(x,0) = x(1-x) \quad \text{si } x \in [0,1], \quad u(x,0) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin [0,1],$$

$$u(x,y) \text{ acotada en } \mathbb{R}\times[0,+\infty[, \quad \text{y } \int_{-\infty}^{+\infty} |u(s,y)|\mathrm{d}s \text{ acotada en } [0,+\infty[$$

La función u verifica que:

(17) $u(1,\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(-\alpha + \frac{\alpha}{2}\ln(1+\frac{1}{2\alpha^2}) + \alpha^2 \arctan(\frac{1}{\alpha})\right)$.

(18) $u(1,\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(-\alpha + \frac{\alpha}{2}\ln(1+\frac{1}{\alpha^2}) + \alpha^2 \arctan(\frac{1}{\alpha})\right)$.

(19) $u(1,\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(-\alpha + \frac{\alpha}{2}\ln(1+\frac{1}{2\alpha^2}) + \alpha^2(\arctan(\frac{3}{2\alpha}) - \arctan(\frac{1}{2\alpha}))\right)$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota: $u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t$.

E. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(1,\theta,t) = 0 \quad \text{para } (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(r,\theta,0) = J_1(\alpha r)\cos(\theta) + J_2(\beta r)\sin(2\theta), \quad \text{para } (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde α, β son dos números reales mayores que cero tales que $\alpha \neq \beta$ $J_1(\alpha) = J_2(\beta) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r) + \sin(2\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k2}(t)J_2(\lambda_{k2}r)$ donde (λ_{m1}) (respectivamente (λ_{m2})) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$ (respectivamente $J_2(z)$). Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\exp(-\alpha^2 t)J_1(\alpha r) + \sin(2\theta)\exp(-\beta^2 t)J_2(\beta r)$.

(18) $u(r,\theta,t) = \exp(-\alpha^2 t)(\cos(\theta)J_1(\alpha r) + \sin(2\theta)J_2(\beta r))$.

(19) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.