E.T.S.I.A.E. Matemática Aplicada a la Ing. Aeroespacial AMP. DE MATEMÁTICAS 3º DE GRADO (CTA)	D.N.I. : 1er Apellido : SOLUCIÓN 2do Apellido : Nombre :	Curso 16/17 (25.01.17) Tiempo 1h. 30 m. Valor 18 puntos 1a Parte

A. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro la solución de la ecuación en diferencias

$$x^{n+2} + 4\,x^{n+1} + 4\,x^n = (-1)^n,$$

que cumple $x^0 = 0$, $x^1 = 1$.

$$\boxed{x^n = (-1)^n - (-2)^n}$$

$x_H^n = r^n$ con $r^2 + 4r + 4 = 0 = (r+2)^2 \Rightarrow r = -2$ doble

$x_H^n = A(-2)^n + B\,n(-2)^n$

$x_p^n = C(-1)^n \Rightarrow C[1 - \cancel{4} + \cancel{4}] = 1$

$\Rightarrow \boxed{x^n = (-1)^n + A(-2)^n + Bn(-2)^n}$

$\left.\begin{array}{l} x^0 = 1 + A = 0 \\ x^1 = -1 - 2A - 2B = 1 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 0 \end{array}}$

B. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la expresión integral

$$I = \int_\Gamma \exp(\bar{z})\,\mathrm{d}z,$$

donde Γ es el segmento orientado que va desde el origen al afijo de ($\pi + \mathrm{i}\pi$) sobre la bisectriz del primer cuadrante.

$$\boxed{I = -i\,[e^\pi + 1]}$$

$\Gamma \equiv z = t + it$, $t \in [0, \pi]$

$z' = 1 + i$

$I = (1+i)\int_0^\pi e^{(1-i)t}\,dt = \frac{1+i}{1-i}\left[e^{(1-i)\pi} - 1\right] =$

$= \frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{-\pi/4}}\left[e^\pi \cos\pi - e^\pi \sin\pi - 1\right] =$

$= -1_{\pi/2}\left[e^\pi + 1\right] = -i\left[e^\pi + 1\right]$

C. **(3 puntos)** Sea la función de dos variables definida como

$$u(x,y) = \mathrm{e}^{-a\,x}\cos(a-2)y,$$

donde a es un número real. Se pide anotar en el siguiente recuadro el valor de a para el que la función u es la parte real de una función analítica, así como la correspondiente función armónica conjugada, $v = v(x,y)$ que se anula en el origen, y la expresión analítica de $f = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ en función de $z = x + \mathrm{i}y$.

$$\boxed{\begin{array}{c} a = 1\,;\ v(x,y) = -e^{-x}\sin y \\ f(z) = e^{-z} \end{array}}$$

HAY MÁS PREGUNTAS AL DORSO

$u \in C^\infty$ y $u_{xx} + u_{yy} = [a^2 - (a-2)^2]\,e^{-ax}\cos(a-2)y$

u es armónica (Parte real de analítica) si $a^2 = (a-2)^2 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

$\Rightarrow u(x,y) = e^{-x}\cos y \Rightarrow$ $v_y = u_x = -e^{-x}\cos y \Rightarrow v = -e^{-x}\sin y + h(x)$

$u_y = -e^{-x}\sin y = -v_x = -e^{-x}\sin y - h'(x) \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = C$

pero $v(x,y) = -e^{-x}\sin y + C\big|_{(x,y)=(0,0)} = C = 0 \Rightarrow v(x,y) = -e^{-x}\sin y$

$\boxed{f(z) = e^{-x}\cos y - i\,e^{-x}\sin y = e^{-x}(\cos y - i\sin y) = e^{-x-iy} = e^{-z}}$

D. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el residuo en $z=0$ de la función

$$f(z)=\frac{1-e^z}{(\sin z)^2} = \frac{-z-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}-\cdots}{\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^2} = \frac{-1-\frac{z}{2!}-\frac{z^2}{3!}-\cdots}{z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)}$$

$\Rightarrow$ Polo de orden 1 $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,0)=-1}$$

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}\frac{z(1-e^z)}{(\sin z)^2}=-1$$

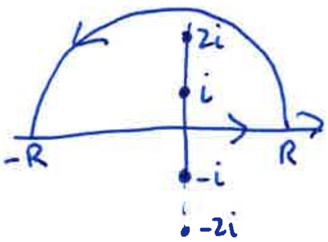
E. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro los términos no nulos de la parte principal (términos potenciales de exponente negativo) del desarrollo en serie de Laurent en $z=\pi$ de la función:

$$f(z)=\frac{\sin(2z)}{(z-\pi)^6} = \frac{\sin(2z-2\pi+2\pi)}{(z-\pi)^6} = \frac{\sin(2(z-\pi))}{(z-\pi)^6} = \frac{1}{(z-\pi)^6}\left[2(z-\pi)-\frac{8(z-\pi)^3}{3!}+\frac{32(z-\pi)^5}{5!}\right]$$

$$= \frac{2}{(z-\pi)^5}-\frac{4}{3}\frac{1}{(z-\pi)^3}+\frac{4}{15}\frac{1}{(z-\pi)}+\cdots$$

$$\boxed{f(z)=\frac{2}{(z-\pi)^5}-\frac{4}{3(z-\pi)^3}+\frac{4}{15(z-\pi)}+\cdots}$$

F. **(3 puntos)** Anotar en el siguiente recuadro el valor de la integral real



$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{2z^2}{(z^2+1)(z^2+4)},i\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{2z^2}{(z^2+1)(z^2+4)},2i\right)\right]=$$

$$=2\pi i\left[\frac{2i^2}{(2i)(i^2+4)}+\frac{2(2i)^2}{[(2i)^2+1](4i)}\right]=$$

$$=2\pi i\left[\frac{i}{3}+\frac{2i}{-3}\right]=-2\pi\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{I=\frac{2\pi}{3}}$$

Ampliación de Matemáticas ~~(Versión 1)~~, SOLUCIÓN (A)

(25-01-2017)

A. Sea $F = F(\omega)$ la transformada de Fourier del producto de convolución $(f * f)$, donde $f = f(x)$ es la funcion característica del intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = 1, \text{ en } -1 \le x \le 1; \quad f(x) = 0, \text{ en } x < -1 \text{ y } x > 1.$$

La funcion F cumple:

(1) $F(\omega) = \dfrac{(\sin\omega)^2}{2\,\omega^2}$. **(2)** $F(\omega) = \dfrac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

(3) $F(0) = 4$. **(4)** $F(\pi/2) = 0$.

$$F(\omega) = \left[\mathcal{F}(f)(\omega)\right]^2$$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt = -\left.\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\omega} = \frac{2\sin\omega}{\omega} \Rightarrow F(0) = 4$$

(B) La función g puede escribirse de la forma $g(t) =$

$$(H(t) - H(t-1))\, t(t-1) = H(t)(t^2 - t) - H(t-1)\,(t-1+1)(t-1).$$

Tomando transformadas de Laplace en la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales

$$(z^2+2z+1)\,\mathcal{L}(w) = 1 + \mathcal{L}(g).$$ De $\mathcal{L}(t^\nu) = \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$ y de $\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a)) = \exp(-az)\,\mathcal{L}(f)(z)$ se obtiene

$$\mathcal{L}(w)(z) = \frac{1}{(z+1)^2+1}\left(1 + \frac{1}{z^2}\left(\frac{2}{z} - 1 - \exp(-z)\left(\frac{2}{z}+1\right)\right)\right).$$

de donde

$$\mathcal{L}(w)(2) = \frac{1}{20}(2 - \exp(-2)).$$

(C) De acuerdo con la afirmación del enunciado y de las condiciones del problema de Cauchy $w(z) = z + \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^k$.

Sustituyendo en la ecuación

$$\sum_{k\geq 2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - (z^2 + z^5) - \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^{k+1} - \sum_{k\geq 2}^{\infty} c_k z^{k+4} = 0$$

de donde $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = \frac{1}{4\cdot 3}, c_5 = 0, c_6 = 0$

y $c_{k+6} = \frac{1}{(k+6)(k+5)} (c_{k+3} + c_k)$. Tomando en cuenta que

$c_2 = c_3 = 0$ la recurrencia anterior se puede escribir como

$$c_{3l+1} = \frac{1}{(3l+1)(3l)} \left(c_{3(l-1)+1} + c_{3(l-2)+1} \right).$$

Además $c_{3l+1} > 0$ para todo $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$c_{3l+2} = c_{3l} = 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

Al ser $c_1 \neq 0$ y $c_4 \neq 0$ la función w, que es entera, no puede ser par ni impar.

D) Al ser todos $c_k \geq 0$ $\frac{dw}{dz}(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k c_k z^{k-1} > 0$.

Por tanto, w es estrictamente creciente y no puede presentar extremos relativos. Además, $w(z) > 0$ para todo $z > 0$ de donde $\frac{d^2w}{dz^2}(z) > 0$ para todo z y en consecuencia la gráfica de w no presenta puntos de inflexión.

(E) La ecuación del enunciado puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{\ln(1+z)}{z\exp(z)}\frac{dw}{dz} - \frac{(1+z)^2}{4z\,\mathrm{sen}(z)\exp(z)}w$$

$z=0$ es un punto singular regular. En un entorno del origen la solución está determinada por los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$, es decir, $\lambda = \frac{1}{2}$ doble. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma

$$w(z) = C_1\sqrt{z}\,p_1(z) + C_2\left(\sqrt{z}\ln z\, p_1(z) + \sqrt{z}\,p_2(z)\right)$$

donde p_1, p_2 son funciones analíticas en un entorno del origen con $p_1(0)=1$. En consecuencia para $C_1=0$, $C_2=1$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{z}\ln z\, p_1(z)}{\sqrt{z}\ln z} + \lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{z}\,p_2(z)}{\sqrt{z}\ln z} = 1.$$

(E) Teniendo en cuenta que $J_2(x) = \frac{x^2}{2\cdot 4} + o(x^3)$, $J_1(x) = \frac{x}{2} + o(x^2)$

$J_3(x) = \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 8} + o(x^4)$ y las propiedades de los desarrollos limitados

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_3(x) + 4J_2(x) - x J_1(x)}{\int_0^x J_2(t)\,dt} = \lim_{x\to 0} \frac{J_3(x) + o(x^3)}{\int_0^x J_2(t)\,dt} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 8} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 4} + o(x^4)} \overset{!}{=} \frac{1}{2}.$$