EDOs lineales de segundo orden

Funciones de Bessel

4.3.1 (segundo parcial 14/15)

G. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[, \qquad (1)$$

$$u(1,\theta,t) = 0 \quad (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[, \qquad (2)$$

$$u(r,\theta,0) = J_1(\alpha r)\sin(\theta), \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0, \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[, \qquad (4)$$

donde α es un número real mayor que cero tal que $J_1(\alpha) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \sin(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t)J_1(\lambda_{k1}r)$ donde (λ_{m1}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.

(18) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha^2 t)J_1(\alpha r)\sin(\theta)$.

(19) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha t)J_1(\alpha r)\sin(\theta)$. ← Correcta

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

w_k es sol. de EDO $\begin{cases} w_k'(0) = 0 \\ w_k(0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \\ w_k'' = -\lambda_k^2 w_k \end{cases}$

Todos se resuelven igual.

$u(r,\theta,t) = \operatorname{sen}(\theta)\sum w_k J_1(\lambda_k \cdot r)$ cumple:

(2) siempre

(4) $\iff \sum w_k'(0) J_1(\lambda_k r) = 0 \iff w_k'(0) = 0 \ \forall k$

(3) $\iff \operatorname{sen}\theta \sum w_k(0) J_1(\lambda_k r) = J_1(\alpha r)\operatorname{sen}\theta \iff \begin{cases} w_k(0) = 1 & \text{si } k = k(\alpha) \\ w_k(0) = 0 & \text{si } k \neq k(\alpha) \end{cases}$

(1) $\iff \operatorname{sen}\theta \sum w_k''(t) J_1(\lambda_k r) = \operatorname{sen}\theta \sum w_k(t) J_1''(\lambda_k r)\cdot\lambda_k^2 + \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta \sum w_k(t) J_1'(\lambda_k r)\lambda_k - \frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta \sum w_k(t) J_1(\lambda_k r)$

Ahora: $\lambda_k^2 J_1''(r) + \frac{\lambda_k}{r} J_1'(\lambda_k r) + \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{r^2}\right) J_1(\lambda_k r) = 0$,

luego (1) $\iff \sum w_k''(t) J_1(\lambda_k r) = -\sum w_k(t)\lambda_k^2 J_1(\lambda_k r) \iff$

Por unicidad (ortogonalidad) $\iff w_k(t)\lambda_k^2 + w_k''(t) = 0$

$\iff w_k(t) = \cos(\lambda_k t)$ si $k = k(\alpha)$; $= 0$ si $k \neq k(\alpha)$

4.3.2 (segundo parcial 16/17)

F. El valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_3(x)}{\int_0^x J_2(t)\mathrm{d}t}.$$

es:

(21) $\frac{1}{2}$. **(22)** $\frac{1}{4}$.

(23) $\frac{1}{8}$. **(24)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$.

Al ser 0/0, se podría haber aplicado L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_3(x)}{\int_0^x J_2(t)\,dt} = \lim_{x\to 0}\frac{(x/2)^3/3! + o(x^3)}{1/2^2\cdot \frac{x^3}{3}/2! + o(x^3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \to (21)$$

4.3.3 (segundo parcial 17/18)

E. Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{1}{x^4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}) + 4w = 0, \quad \text{en }]0,+\infty[.$$

Sobre las soluciones reales de la ecuación anterior, $w :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, que además cumplen la condición $|\lim_{x\to 0^+} w(x)| < +\infty$ puede afirmarse que:

(17) Existen y son de la forma $w(x) = \frac{C}{x\sqrt{x}}J_{\frac{3}{2}}(2x)$ donde $C\in\mathbb{R}$.

(18) Existen y son de la forma $w(x) = \frac{C}{x^2\sqrt{x}}J_{\frac{3}{2}}(x)$ donde $C\in\mathbb{R}$.

(19) Existen y son de la forma $w(x) = C\sqrt{x}J_{-\frac{3}{2}}(2x)$ donde $C\in\mathbb{R}$.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$J_{3/2}(x) \sim x^{3/2} \Rightarrow (18)$ no acotada

$J_{-3/2}(x) \sim x^{-3/2} \Rightarrow (19)$ no acotada

(17) es el único candidato

Veamos si (17) es solución $w(x) = \frac{C}{x\sqrt{x}}J_{\frac{3}{2}}(2x) = Cx^{-3/2}J_{3/2}(x)$. Podemos quitar C

$\cdot\ w'(x) = -\frac{3}{2}x^{-5/2}J_{\frac{3}{2}}(2x) + x^{-3/2}\cdot 2\cdot J'_{\frac{3}{2}}(2x)$

$\cdot\ \underbrace{\frac{d}{dx}\left(x^4\cdot w'(x)\right)}_{A} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{2}x^{3/2}\cdot J_{\frac{3}{2}}(2x) + x^{5/2}\cdot 2\cdot J'_{\frac{3}{2}}(2x)\right) =$

$= -\frac{9}{4}x^{1/2}\cdot J_{\frac{3}{2}}(2x) - \frac{3}{\cancel{2}}x^{3/2}\cdot\cancel{2}\cdot J'_{\frac{3}{2}}(2x) + \frac{5}{\cancel{2}}x^{3/2}\cdot\cancel{2}\cdot J'_{\frac{3}{2}}(2x) + 2\cdot 2\cdot x^{5/2}\cdot J''_{\frac{3}{2}}(2x)$

$= -\frac{9}{4}x^{1/2}J_{\frac{3}{2}}(2x) + 2x^{3/2}J'_{\frac{3}{2}}(2x) + 4x^{5/2}J''_{\frac{3}{2}}(2x) =$

EDO $\iff A = -4x^4 w$

$= -4x^{5/2}\cdot J_{\frac{3}{2}}(2x)$

$\iff -\frac{9}{4\sqrt{2}}t^{1/2}J_{\frac{3}{2}}(t) + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}t^{3/2}J'_{\frac{3}{2}}(t) + \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{2}}t^{5/2}J''_{\frac{3}{2}}(t) = -\frac{\cancel{4}\,t^{5/2}}{\cancel{4}\sqrt{2}}J_{\frac{3}{2}}(t)$

$t = 2x \Rightarrow x = \frac{t}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{4} t J_{\frac{3}{2}}(t) + J'_{\frac{3}{2}}(t) \cdot t^2 + t^3 \cdot J''_{\frac{3}{2}}(t) = -t^3 J_{\frac{3}{2}}(t)$

$\cdot t^{1/2}$

$\Leftrightarrow t^2 \cdot J''_{\frac{3}{2}}(t) + t J'_{\frac{3}{2}}(t) + \left(t^2 - \frac{9}{4}\right) J_{\frac{3}{2}}(t) = 0$

$\cdot 1/t$

$\hookrightarrow$ EDO de $J_{\frac{3}{2}}$ ✓

Luego es solución.

4.3.4 (final ordinario 13/14)

G. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(1,\theta,t) = 0 \quad (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(r,\theta,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(J_0(ar))\cos(\theta), \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde a es un número real mayor que cero tal que $J_1(a) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar mediante el desarrollo $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t) J_1(\lambda_{k1} r)$ donde (λ_{m1}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(r)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(25) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.
(26) $u(r,\theta,t) = -a\exp(-a^2 t)J_1(ar)\cos(\theta)$.
(27) $u(r,\theta,t) = -\frac{1}{a}\exp(-a^2 t)J_1(ar)\cos(\theta)$.] Ambas cumplirán la EDP. Quizá la condiciones iniciales no.
(28) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

– Sabemos que $\frac{d}{dr}(J_0(r)) = -J_1(r) \Rightarrow \frac{d}{dr}(J_0(ar)) = -a J_1(ar)$ (*)

– Por otro lado, $u(r,\theta,0) = \cos\theta \sum w_{k1}(0) J_1(\lambda_{k1} \cdot r) = \cos\theta \cdot (-a) \cdot J_1(ar)$

$\hookrightarrow \forall r$, se tiene que cumplir eso $\Rightarrow$ sólo hay un término.
(unicidad serie Bessel)

– Luego queda ver (26) y (27). Ambas cumplirán EDP. Condiciones contorno ✓
(*) De aquí se ve que sólo (26) es posible.

– Veamos que (26) cumple EDP. (el $-a$ se puede quitar)

$u = e^{-a^2 t} J_1(ar)\cos\theta$

$- r^2 u_t = + a^2 r^2 e^{-a^2 t} J_1(ar)\cos\theta$

$r u_r = a r e^{-a^2 t} J'_1(ar)\cos\theta$

$r^2 u_{rr} = a^2 r^2 e^{-a^2 t} J''_1(ar)\cos\theta$

$u_{\theta\theta} = -e^{-a^2 t} J_1(ar)\cos\theta$

Suma: (eliminamos $e^{-a^2 t}\cos\theta$)

$a^2 r^2 J_1(ar) + ar J'_1(ar) +$
$+ a^2 r^2 J''_1(ar) - J_1(ar) = 0$?

$\Updownarrow ar = t$

$(t^2 - 1)J_1(t) + t J'_1(t) + t^2 J''_1(t) = 0$ ✓

4.3.5 (final ordinario 14/15)

F. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(1,\theta,t) = 0 \quad (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(r,\theta,0) = J_0(\alpha r), \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0, \quad (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

la serie sólo tiene un término (en realidad habría que decir más bien que $w_k(0)=0$ salvo para $k=\alpha$)

donde α es un número real mayor que cero tal que $J_0(\alpha) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k0}(t) J_0(\lambda_{k0} r)$ donde (λ_{m0}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_0(z)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.

(18) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha^2 t) J_0(\alpha r)$.

(19) $u(r,\theta,t) = \cos(\alpha t) J_0(\alpha r)$.

> Ambos cumplen contorno.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Veamos la (19):

$-v_{tt}\cdot r^2 = \alpha^2 r^2 \cos(\alpha t) J_0(\alpha r)$

$v_{rr}\cdot r^2 = \alpha^2 r^2 \cos(\alpha t) J_0''(\alpha r)$

$v_r \cdot r = \alpha r \cos\alpha t \, J_0'(\alpha r)$

$v_{\theta\theta} = 0$

Suma: $\alpha^2 r^2 J_0(\alpha r) + \alpha^2 r^2 J_0''(\alpha r) + \alpha r J_0'(\alpha r)$ / $\cos\alpha t$

Ecuación de J_0 evaluada en αr. Se cumple.

4.3.6 (final extraordinario 15/16)

E. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(1,\theta,t) = 0 \quad \text{para } (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$

$$u(r,\theta,0) = J_1(\alpha r)\cos(\theta) + J_2(\beta r)\sin(2\theta), \quad \text{para } (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde α, β son dos números reales mayores que cero tales que $\alpha \neq \beta$ $J_1(\alpha) = J_2(\beta) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t) J_1(\lambda_{k1} r) + \sin(2\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k2}(t) J_2(\lambda_{k2} r)$ donde (λ_{m1}) (respectivamente (λ_{m2})) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$ (respectivamente $J_2(z)$). Sobre la función u se puede afirmar que:

(17) $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\exp(-\alpha^2 t) J_1(\alpha r) + \sin(2\theta)\exp(-\beta^2 t) J_2(\beta r)$.

(18) $u(r,\theta,t) = \exp(-\alpha^2 t)(\cos(\theta) J_1(\alpha r) + \sin(2\theta) J_2(\beta r))$.

(19) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.

(20) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Probemos con (17):

$-v_t \cdot r^2 = \alpha^2 r^2 \cos\theta \, e^{-\alpha^2 t} J_1(\alpha r) + \beta^2 r^2 \operatorname{sen}(2\theta) e^{-\beta^2 t} J_2(\beta r)$

$= r^2 \cos\theta \, e^{-\alpha^2 t} J_1''(\alpha r) + \beta^2 r^2 \operatorname{sen}(2\theta) e^{-\beta^2 t} J_2''(\beta r)$

$\cos\theta \, e^{-\alpha^2 t} J_1'(\alpha r) + \beta r \operatorname{sen} 2\theta \, e^{-\beta^2 t} J_1'(\beta r)$

$u_{rr} \cdot r^2 \quad \alpha^2$
$u_r \cdot r = \alpha r$
$u_{\theta\theta} = -\cos\theta\, e^{-\alpha^2 t} J_1(\alpha r) \quad - 4 \operatorname{sen} 2\theta\, e^{-\beta^2 t} J_2(\beta r)$

$\text{Suma} = \cos\theta\, e^{-\alpha^2 t} \cdot \left[J_1(\alpha r) \cdot (\alpha^2 r^2 - 1) + \alpha^2 r^2 J_1''(\alpha r) + \alpha r J_1'(\alpha r) \right] +$
$+ \operatorname{sen} 2\theta\, e^{-\beta^2 t} \left[J_2(\beta r) (\beta^2 r^2 - 4) \ldots \right]$ Ambos 0.

4.3.7 (final ordinario 15/16)

F. Considérese el problema de Cauchy definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{para } (r,\theta,t) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(1,\theta,t) = 0 \quad \text{para } (\theta,t) \in [-\pi,\pi[\times]0,+\infty[,$$
$$u(r,\theta,0) = J_1(\alpha r)\cos(\theta), \quad \text{para } (r,\theta) \in [0,1[\times[-\pi,\pi[,$$

donde α es un número real mayor que cero tal que $J_1(\alpha) = 0$. La solución del problema anterior se puede expresar de la forma $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k1}(t) J_1(\lambda_{k1} r)$ donde (λ_{m1}) es la sucesión monótona creciente formada por todos los ceros reales positivos de $J_1(z)$. Sobre la función u se puede afirmar que:

(21) $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\exp(-\alpha^2 t) J_1(\alpha r)$.
(22) $u(r,\theta,t) = \cos(\theta)\exp(-\alpha t) J_1(\alpha r)$.
(23) El desarrollo de la función u definido en el enunciado tiene infinitos términos no nulos.
(24) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

¿Cómo distinguirlos?

Nota. $J_1(1) \neq 0$.

Otro semejante. Probemos con (21) Sea $A = \cos\theta\, e^{-\alpha^2 t}$

$-r^2 u_t = \alpha^2 r^2 \cos\theta\, e^{-\alpha^2 t} J_1(\alpha r)$
$r^2 u_{rr} = \alpha^2 r^2 A J_1''(\alpha r)$
$r u_r = \alpha r A J_1'(\alpha r)$
$u_{\theta\theta} = -A J_1(\alpha r)$

$\frac{S}{A} = \alpha^2 r^2 J_1''(\alpha r) + \alpha r J_1'(\alpha r) + (\alpha^2 r^2 - 1) J_1(\alpha r)$

4.3.8 (final ordinario 16/17)

x^2

$\sim x^3 \qquad \sim \qquad \sim x^2$

F. El valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_3(x) + 4J_2(x) - xJ_1(x)}{\int_0^x J_2(t)\mathrm{d}t}.$$

es:

(21) $\frac{1}{2}$. **(22)** $\frac{1}{4}$.

(23) $\frac{1}{8}$. **(24)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$.

$4J_2 = \frac{4x^2}{4\cdot 2!} = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$J_3 = \frac{x^3}{8\cdot 3!} + o(x^4)$

$-x\cdot J_1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Numerador: $x^3/8\cdot 3! + o(x^4)$

Denominador: $x^3/\cancel{4}\cdot 6 + o(x^3)$

límite $= \frac{24}{8\cdot 3!} = \frac{1}{2}$

4.3.9 (final ordinario 18/19)

E. Considérese el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_2(4x) - xJ_1(x) + x^2J_0(x)}{1 - J_0(x)}.$$

El límite anterior existe y vale:

(17) -8. **(18)** 8.

(19) 10. **(20)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Nota. $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$.

$J_2(4x) = \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{3!} + o(x^4)$

$-xJ_1(x) = -\frac{x\cdot(x/2)}{1} + \frac{x(x/2)^3}{2} + o(x^3)$

$x^2J_0(x) = x^2 - \frac{x^2\cdot(x/2)^2}{1} + o(x^3)$

Suma: $x^2\cdot(2 - \frac{1}{2} + 1) = \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$

Denominador: $1 - J_0(x) = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.

límite: $\frac{5/2}{1/4} = \boxed{10}$